



С.Л. Блюмин

В.Ф. Суханов

С.В. Чеботарёв

ЭКОНОМИЧЕСКИЙ ФАКТОРНЫЙ АНАЛИЗ



Липецк – 2004

Липецкий эколого-гуманитарный институт

С.Л. Блюмин, В.Ф. Суханов, С.В. Чеботарёв

ЭКОНОМИЧЕСКИЙ ФАКТОРНЫЙ АНАЛИЗ

Липецк – 2004

УДК 658.012.12

ББК 65.053я73

Б71

Блюмин С.Л., Суханов В.Ф., Чеботарёв С.В. Экономический факторный анализ: Монография. – Липецк: ЛЭГИ, 2004. – 148 с.

В монографии описываются методологические принципы экономического факторного анализа, рассматриваются теоретические основы и практические аспекты применения современного экономического анализа.

В контексте применения математических методов в экономическом анализе рассмотрен ряд актуальных производственных задач. Последовательно излагается новый универсальный метод факторного анализа, основанный на применении теоремы о среднем значении. Приведены примеры практической реализации полученных в ходе исследований результатов. Показана роль экономического факторного анализа в разработке оптимальных управленческих решений, в контроле над конечными результатами коммерческой и производственной деятельности предприятий.

Содержание книги соответствует отдельным дисциплинам специальностей 080101 – Экономическая теория, 080109 – Бухгалтерский учет, анализ и аудит, 080502 – Экономика и управление на предприятии, 080111 – Маркетинг, 080503 – Антикризисное управление, 080506 – Логистика, 220501 – Управление качеством, 080116 – Математические методы в экономике, 230401 – Прикладная математика, 230102 – Автоматизированные системы обработки информации и управления, 140211 – Электроснабжение, а также некоторых других направлений подготовки и специальностей.

Издание рекомендовано научно-техническим советом ЛЭГИ и предназначено для студентов, аспирантов и преподавателей вузов, руководителей всех уровней, а также специалистов соответствующих служб предприятий.

Библиография: 140 назв.

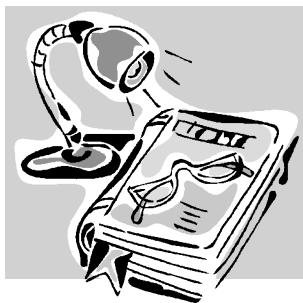
Рецензенты: доктор технических наук, профессор **Новиков Д.А.** (ведущий научный сотрудник Института проблем управления РАН); доктор технических наук, профессор **Рубан А.И.** (заведующий кафедрой информатики Красноярского государственного технического университета); **кафедра прикладной математики и экономико-математических методов Воронежской государственной технологической академии** (заведующий кафедрой, доктор технических наук, профессор **Матвеев М.Г.**); **кафедра управления строительством Воронежского государственного архитектурно-строительного университета** (заведующий кафедрой, доктор технических наук, профессор **Баркалов С.А.**).

ISBN 5-900037-44-4

© Липецкий эколого-гуманитарный институт, 2004

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
1. ЭКОНОМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ХОЗЯЙСТВЕННОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ПРЕДПРИЯТИЯ	7
1.1. СОДЕРЖАНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКОГО АНАЛИЗА	7
1.2. ПРЕДМЕТ И ОБЪЕКТ ЭКОНОМИЧЕСКОГО АНАЛИЗА	10
1.3. ЗАДАЧИ ЭКОНОМИЧЕСКОГО АНАЛИЗА	12
1.4. МЕТОД ЭКОНОМИЧЕСКОГО АНАЛИЗА	13
1.5. СИСТЕМНЫЙ ПОДХОД В ЭКОНОМИЧЕСКОМ АНАЛИЗЕ	14
1.6. СИСТЕМА ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЭКОНОМИЧЕСКОГО АНАЛИЗА	15
1.7. ЭКОНОМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ	17
2. ЭКОНОМИЧЕСКИЙ ФАКТОРНЫЙ АНАЛИЗ	20
2.1. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ЭКОНОМИЧЕСКОГО ФАКТОРНОГО АНАЛИЗА	20
2.1.1. СОДЕРЖАНИЕ И ПРЕДМЕТ ЭКОНОМИЧЕСКОГО ФАКТОРНОГО АНАЛИЗА	20
2.1.2. ЗАДАЧИ ЭКОНОМИЧЕСКОГО ФАКТОРНОГО АНАЛИЗА	22
2.1.3. МЕТОДЫ ЭКОНОМИЧЕСКОГО ФАКТОРНОГО АНАЛИЗА	28
2.2. ТЕОРЕМА ЛАГРАНЖА О КОНЕЧНЫХ АБСОЛЮТНЫХ ПРИРАЩЕНИЯХ В ЭКОНОМИЧЕСКОМ ФАКТОРНОМ АНАЛИЗЕ	45
2.2.1. ТЕОРЕМА ЛАГРАНЖА И СВЯЗАННЫЕ С НЕЙ ТЕОРЕМЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА	45
2.2.2. ПРИКЛАДНАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ И ХАРАКТЕРИСТИКИ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ПРИРАЩЕНИЙ	55
2.2.3. СОСТАВЛЕНИЕ РАБОЧИХ ФОРМУЛ НОВОГО МЕТОДА ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ МОДЕЛЕЙ ЭКОНОМИЧЕСКОГО ФАКТОРНОГО АНАЛИЗА	59
2.2.4. ПРИМЕРЫ	69
2.3. ЦЕПНОЙ ЭКОНОМИЧЕСКИЙ ФАКТОРНЫЙ АНАЛИЗ	80
2.3.1. ЦЕПНОЙ ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ	80
2.3.2. СПОСОБ ПРОСТОЙ ГРУППИРОВКИ	82
2.3.3. СПОСОБ УСРЕДНЕНИЯ НЕАДДИТИВНОГО ПОКАЗАТЕЛЯ ПО АДДИТИВНОМУ	86
2.3.4. ПРИМЕРЫ	87
2.4. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ЛАГРАНЖА В СЛУЧАЕ КОНЕЧНЫХ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ ПРИРАЩЕНИЙ И ДЛЯ ИНДЕКСНЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ	94
2.4.1. ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ ОБ ИНДЕКСАХ	94
2.4.2. ФОРМУЛА КОНЕЧНЫХ ПРИРАЩЕНИЙ В ОТНОСИТЕЛЬНОМ И ИНДЕКСНОМ ЭКОНОМИЧЕСКОМ ФАКТОРНОМ АНАЛИЗЕ	97
2.4.3. ИНДЕКСЫ ДИВИЗИА В ЭКОНОМИЧЕСКОМ ФАКТОРНОМ АНАЛИЗЕ	103
2.5. ОЦЕНКИ ВЫПУКЛЫХ КОМБИНАЦИЙ В ЭКОНОМИЧЕСКОМ АНАЛИЗЕ	107
2.5.1. НЕРАВЕНСТВА НА ВЫПУКЛЫХ КОМБИНАЦИЯХ	107
2.5.2. ПОСТАНОВКА И ФОРМАЛИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ	108
2.5.3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ	109
2.6. ВЫВОДЫ	112
3. ПРИМЕНЕНИЕ НОВЫХ МЕТОДОВ ЭКОНОМИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ДЛЯ СОВЕРШЕНСТВОВАНИЯ УПРАВЛЕНИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМИ ПРОЦЕССАМИ	114
3.1. МОДЕРНИЗИРОВАННАЯ СИСТЕМА УПРАВЛЕНИЯ ЭНЕРГОПОТРЕБЛЕНИЕМ НА ПРОМЫШЛЕННОМ ПРЕДПРИЯТИИ	114
3.2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЭНЕРГОПОТРЕБЛЕНИЯ	120
3.3. ПРИМЕРЫ УПРАВЛЕНИЯ ЭНЕРГОПОТРЕБЛЕНИЕМ МЕТАЛЛУРГИЧЕСКОГО ПРЕДПРИЯТИЯ С ПРИМЕНЕНИЕМ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ПРИРАЩЕНИЙ	121
3.4. ВЫВОДЫ	135
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	137
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	140



ВВЕДЕНИЕ

Возможно, вы не обретёте богатства, используя всю доступную полезную информацию, однако несомненно то, что вы потеряете всё, если не будете этого делать.

Дж. Трейнор

Структурные изменения, происходящие в экономике России, существенно влияют на процессы хозяйственной деятельности в стране. Многие предприятия работают в жёстких условиях внешней и внутренней конкуренции, что требует активных действий, направленных на оптимизацию технологических процессов и экономических стратегий компаний. Несмотря на то, что плановая социалистическая экономика подвергалась резкой критике после перехода к рынку, диверсификация направлений хозяйственной деятельности предприятий и их успешное развитие в настоящее время невозможны без использования точных методов бизнес-планирования. Последующая оптимизация деятельности компании достигается принятием корректных управленческих решений, для чего необходим комплексный анализ результатов работы предприятия. Результатом анализа должна быть информация, описывающая механизмы работы компании и показывающая возможности для корректировки производственного процесса в целях приведения системы хозяйствования к уровню, обеспечивающему необходимые показатели прибыльности.

Анализ хозяйственной деятельности предприятия – это прежде всего экономический анализ, направленный на системное исследование набора значимых экономических показателей. При этом, в условиях современной экономики очевидным становится тот факт, что практическое использование эмпирического и теоретического экономического анализа позволяет не только рационально проанализировать сложившуюся ситуацию или возможные перспективы, но и получить реальную выгоду от использования новейших методов исследования в условиях реального производства.

После смены системы хозяйствования потребовалось модернизировать методики комплексного экономического анализа. Новые задачи управления потребовали пересмотра старых и развития новых, актуальных экономико-математических методов, что неизбежно привело к активному научному поиску, направленному на совершенствование существующих теоретических основ экономического анализа.

Следуя последовательности изложения материала в монографии, представим ряд конкретных задач, способы и результаты решения которых представ-

ляют собой примеры результативного применения современных методов научного исследования на практике.

Так, использование *теоремы Лагранжа о среднем значении* в условиях, когда приращения факторов являются произвольными конечными величинами, позволяет проводить факторный анализ в соответствии с универсальной методикой, применимой к различным моделям и учитывающей функциональную структуру взаимосвязей между факторами.

При этом следует отметить, что экономический факторный анализ направлен, в первую очередь, на решение важной и распространённой на практике задачи поиска величин влияния изменения факторов на изменение определяемого ими результирующего показателя, что определяет большое прикладное значение результатов исследований, направленных на качественное улучшение методологии данного вида анализа.

Продолжением данного исследования является переход к изучению *методов цепного динамического экономического факторного анализа*. При динамической оценке величин факторного влияния на нескольких интервалах времени или при анализе продукции по ассортименту с целью получения более полной, подробной и достоверной информации об анализируемом объекте, возникает потребность в использовании специальных методов, которые позволяют учесть дискретность периода времени или неоднородность производственной номенклатуры. При этом возникает проблема выбора методики динамического экономического факторного анализа, связанная с наличием альтернативных подходов по определению интегральной оценки влияния факторов на обобщающий показатель.

Дальнейшим направлением изучения теории и практики экономического факторного анализа является исследование таких распространённых типов показателей, как *индексы* или *относительные величины*. Поскольку абсолютные значения не всегда позволяют получить содержательную информацию об изменении состояния факторной системы, то в ряде случаев более результативным является изучение отклонений относительных или индексных показателей.

С одним из методов цепного динамического факторного анализа и возникающими при этом *выпуклыми комбинациями* связана задача оценки границ интервала, содержащего относительное отклонение средневзвешенного значения некоторого показателя, рассматриваемого для двух сравниваемых наборов данных, в сопоставлении с границами другого интервала, определяемыми минимальным и максимальным относительными отклонениями данного показателя при попарном сравнении его значений на всём массиве данных. В результате решения задачи появляется возможность рассчитать как модифицированную величину отклонения средневзвешенного значения, за-

ведомо попадающую в требуемый интервал, так и модифицированный интервал, в который заведомо попадает требуемое отклонение.

В контексте экономического факторного анализа в монографии приводится описание *индексов Дивизии* как одной из базовых систем показателей теории индексов. Рассмотрены некоторые методические аспекты изложения данного материала.

Таково краткое описание перечня прикладных производственных задач, рассмотренных в данной монографии в рамках освещения теоретических и практических вопросов экономического факторного анализа.

Также необходимо отметить, что обучение методам поиска решений подобных задач должно быть одним из основных аспектов подготовки как математиков-инженеров, специализирующихся в области моделирования и оптимизации экономических процессов, так и экономистов-управленцев в рамках изучаемых ими экономико-математических методов. Такой подход к образованию, ориентированный на задачи современного общества, позволит подготовить для рынка производственных кадров специалистов высокого класса, спрос на которых будет высок как в сфере теоретической науки, так и в сфере экономики и финансов, где уже в настоящее время прикладная математика завоевала прочные позиции.

Содержание книги охватывает целый ряд задач прикладной области, связанной со специализацией «Моделирование и оптимизация экономических процессов», соответствующих разделу «Анализ и интерпретация результатов моделирования» специальной дисциплины СД.04 «Математическое моделирование» ГОС по направлению подготовки дипломированных специалистов «Прикладная математика». Кроме того, содержание соответствует позициям раздела «Требования к уровню подготовки выпускников по направлению подготовки дипломированных специалистов “Прикладная математика”» указанного ГОС о том, что специалист должен знать и уметь использовать:

- основные методы построения математических моделей;
- принципы моделирования и основные математические модели систем и процессов, возникающих в прикладных областях;

иметь опыт:

- W** использования основных приемов моделирования и исследования моделей с учетом их структуры;
- W** системного анализа и построения математических моделей для процессов, возникающих в прикладных областях.

Изложенный в монографии материал используется при изучении математического моделирования на специальностях «Прикладная математика», «Бухгалтерский учёт, анализ и аудит», «Экономика и управление на предприятии», «Государственное и муниципальное управление».

1. ЭКОНОМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ХОЗЯЙСТВЕННОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ПРЕДПРИЯТИЯ



1.1. СОДЕРЖАНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Под наукой в широком смысле слова понимается совокупность знаний о природе, обществе и мышлении. Эта совокупность отражает результаты, достигнутые человечеством на каждом историческом этапе, и соответствует степени осознания объективных законов развития природы и общества.

Изучение явлений природы и общественной жизни невозможно без аналитического подхода. Под анализом в данном случае понимается разделение явления или предмета на составные части (элементы) для изучения их как частей единого целого [60, 121].

Такое разделение позволяет проникнуть в сущность изучаемого процесса, понять его внутренние взаимосвязи, определить роль каждого системообразующего элемента. Например, чтобы понять процесс формирования себестоимости продукции, необходимо не только знать составляющие её элементы, но и определить, от чего зависит величина себестоимости по каждой статье затрат. Чем детальнее будет разложен прирост себестоимости по элементам, тем более полными будут знания об этом экономическом показателе и более эффективным будет управление процессом его формирования.

Вместе с тем необходимо отметить, что многочисленные явления и процессы окружающего нас мира не могут быть осмыслены без использования других способов исследования. Наиболее близок к анализу, с позиции особенностей человеческого мышления, синтез, который выявляет связи и зависимости между отдельными частями изучаемого предмета, соединяет их в единое целое. Современная диалектика исходит из единства

анализа и синтеза как научных методов изучения реальности. Анализ и синтез в единстве обеспечивают научное изучение явлений во всесторонней диалектической связи.

В результате сознательной деятельности люди постепенно расширяли взаимоотношения с природной средой и тем самым обогащали свои представления о разнообразных объектах и явлениях. Постепенно понадобился уже достаточно обособленный вид занятий, связанный с аналитическими исследованиями этих объектов и явлений. Так появился анализ в математике, химии, медицине и других науках.

Такой же процесс происходил и в экономической деятельности. Развитие производительных сил, производственных отношений, наращивание объёмов производства, расширение обмена способствовали выделению экономического анализа как самостоятельной отрасли науки.

Экономический анализ – это научный способ познания сущности экономических явлений и процессов, основанный на их изучении во всём многообразии связей и зависимостей [85].

Различают макроэкономический анализ, который изучает экономические явления и процессы на уровне мировой и национальной экономики и её отдельных отраслей, и микроэкономический анализ, изучающий эти процессы и явления на уровне отдельных субъектов хозяйствования. Последний получил название анализа хозяйственной деятельности.

Анализ хозяйственной деятельности обеспечивает комплексное исследование влияния внешних и внутренних, рыночных и производственных факторов на количество и качество производимой предприятием продукции, финансовые показатели работы предприятия и указывает возможные перспективы развития дальнейшей производственной деятельности предприятия в выбранной области хозяйствования [13, 54, 83].

Основная цель проведения анализа – повышение эффективности функционирования хозяйствующих субъектов и поиск резервов такого повышения. Для достижения этой цели проводятся: оценка результатов работы за прошедшие периоды; разработка процедур оперативного контроля за производственной деятельностью; выработка мер по предупреждению негативных явлений в деятельности предприятия и в её финансовых результатах; вскрытие резервов повышения результативности деятельности; разработка обоснованных планов и нормативов.

Экономический анализ как наука представляет собой систему специальных знаний [7, 61, 118, 120, 121, 128, 126], связанную прежде всего:

- с исследованием экономических процессов и их взаимосвязей, складывающихся под воздействием объективных экономических законов и факторов субъективного порядка;
- с научным обоснованием бизнес-планов, с объективной оценкой их выполнения;
- с выявлением положительных и отрицательных факторов и количественным измерением их действия;
- с раскрытием тенденций и пропорций хозяйственного развития и определением неиспользованных внутрихозяйственных резервов;
- с обобщением передового опыта и принятием оптимальных управленческих решений.

Исследование экономических процессов начинается, если пользоваться методом индукции, с малого, с единичного – с отдельного хозяйственного факта, явления, ситуации, которые в совокупности и представляют хозяйственный процесс, выражающий сущность хозяйственной деятельности в том или ином звене управляемой подсистемы и управляющей системы.

Однако способ индукции должен использоваться в единстве с методом дедукции. Это означает, что, анализируя единичное, нужно в то же время учитывать и общее. В ходе экономического анализа хозяйственные процессы изучаются в их взаимосвязи, взаимозависимости и взаимообусловленности.

Установление взаимосвязи, взаимозависимости и взаимообусловленности – наиболее важный момент анализа. Причинная связь объединяет все хозяйственные факты, явления, ситуации, процессы. Вне этой связи хозяйственная жизнь не мыслима.

Причинный, или факторный, анализ исходит из того, что каждая причина, каждый фактор получают надлежащую оценку. С этой целью причины-факторы предварительно изучаются, для чего классифицируются по группам: существенные и несущественные, основные и побочные и т.п. Далее исследуется влияние на хозяйственные процессы прежде всего существенных, основных факторов. Изучение несущественных факторов ведётся, если требуется, во вторую очередь. Раскрыть и понять основные причины, оказавшие определяющее влияние на выполнение бизнес-плана, выяснить их действие и взаимодействие – значит разобраться в особенностях хозяйственной деятельности анализируемого объекта.

При этом, в процессе анализа не только вскрываются и характеризуются основные факторы, влияющие на хозяйственную деятельность, но

и измеряется степень (сила) их действия. Для этого применяются соответствующие способы и приёмы экономических и математических расчётов, которые будут рассмотрены далее.

В настоящее время экономический анализ занимает важное место среди экономических наук. Его рассматривают в качестве одной из функций управления производственно-хозяйственной деятельностью [63, 85]. Место анализа в системе управления упрощённо можно отразить схемой (рис. 1.1).

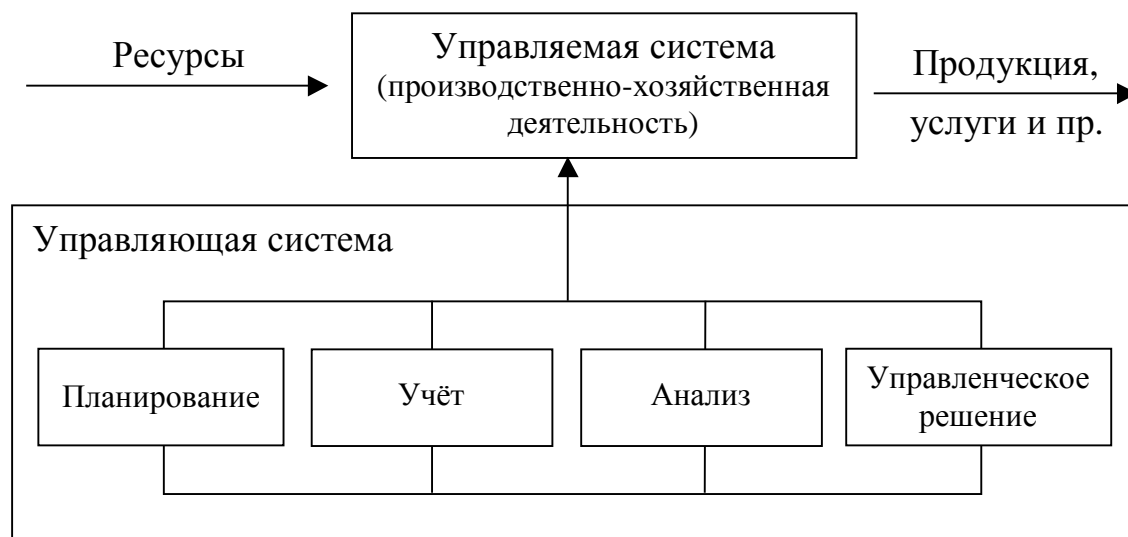


Рис. 1.1. Место экономического анализа в системе управления

Таким образом, экономический анализ является связующим звеном между учётом, который в свою очередь необходим для обобщения данных и контроля над выполнением плана, и принятием управленческих решений. Анализ предшествует решениям и действиям, обосновывает их и является основой научного управления производством, обеспечивая его объективность и эффективность.

1.2. ПРЕДМЕТ И ОБЪЕКТ ЭКОНОМИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Предметом экономических наук [121] являются производственные экономические отношения людей. Производственные отношения находятся в тесном взаимодействии с производственными силами, то есть технической стороной производства – его организацией, техникой и технологи-

ей. Но каждая отдельная экономическая наука изучает какую-то специфическую сторону, черту производственных отношений, то есть имеет свой предмет исследований.

Для определения предмета экономического анализа как науки следует обратиться к теории управления, которая выделяет основные, или общие, функции управления [65], присущие управлению любым объектом, и специфические функции, связанные с особенностями управления разными объектами.

Общие функции экономического управления можно определить так:

- 1) информационное обеспечение управления (сбор, обработка, упорядочение информации об экономических явлениях и процессах);
- 2) анализ или аналитическое обеспечение управления (обоснование наиболее оптимальных в данных условиях решений);
- 3) планирование (прогнозирование, перспективное и текущее планирование) экономической системы;
- 4) организация оперативного управления (организация и регулирование эффективного функционирования тех или иных элементов хозяйственного механизма в целях оптимизации использования трудовых, материальных и денежных ресурсов экономической системы);
- 5) контроль (контроль за ходом выполнения бизнес-планов и управленческих решений, оценка экономической эффективности деятельности, стимулирование).

Первые две функции отражают технологические этапы управления, которые сводятся к информационному и аналитическому обеспечению процесса принятия решений [6]. Само принятие решений осуществляется в виде таких функций управления, как планирование, организация управления и контроль. Именно основные функции являются предметом исследования соответствующих им наук. Информационное обеспечение управленческих решений – предмет изучения таких наук, как бухгалтерский учёт и статистика. Второй технологический этап – аналитическое обеспечение управленческих решений – предмет экономического анализа как науки. Эти два технологических этапа тесно связаны между собой и их можно определить как информационно-аналитическое обеспечение управленческих решений.

Итак, предметом экономического анализа как науки является одна из основных функций управления, отражающая технологический этап принятия решений и сводящаяся к аналитическому обеспечению управленческих решений.

Объектом экономического анализа является хозяйственная деятельность предприятий как совокупность производственных отношений, рассматриваемая во взаимодействии с технической стороной производства, с социальными и природными условиями [10].

Предприятие нельзя рассматривать только как производственно-технический комплекс. Это и система отношений людей по вопросам производства и сбыта продукции, услуг или других видов деятельности. Эта система отношений для коммерческих предприятий – основного объекта экономического анализа – выражается в категории коммерческого расчёта.

При этом хозяйственная деятельность предприятия как общий объект анализа может дифференцироваться на хозяйственные процессы, финансовые результаты, складывающиеся под воздействием объективных и субъективных факторов (причин) и отражающиеся через систему экономической информации [10, 29].

1.3. ЗАДАЧИ ЭКОНОМИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

В [7] указано также, что содержанием и предметом экономического анализа определяются и стоящие перед ним задачи.

К числу важнейших из них следует отнести:

- 1) повышение научно-экономической обоснованности бизнес-планов и нормативов (в процессе их разработки);
- 2) объективное и всесторонне изучение по данным учёта и отчётности выполнения установленных бизнес-планов и соблюдение нормативов по количеству, структуре и качеству выпущенной продукции, выполненных работ и услуг;
- 3) определение экономической эффективности использования трудовых, материальных и финансовых ресурсов;
- 4) контроль за осуществлением требований коммерческого расчёта и оценка конечных финансовых результатов;
- 5) выявление и измерение внутренних ресурсов на всех стадиях производственного процесса;
- 6) обоснование и испытание (проверка) оптимальности управленческих решений.

Одной из основных задач экономического анализа является также получение небольшого числа ключевых, наиболее информативных показателей [66, 67], точно и объективно характеризующих экономическое состояние предприятия. Следовательно, процедура экономического анализа

предполагает целенаправленное «разложение» хозяйственных процессов, изучение существующих связей, построение системы показателей, являющихся моделями экономических явлений и процессов.

Задачи экономического анализа, конечно, не исчерпываются приведённым выше перечнем. Многогранность и многовариантность хозяйственных ситуаций ставят перед ним многие задачи частного характера. И эти задачи можно решить с использованием общих и специальных аналитических методик.

Опыт хозяйственного развития показывает, что перед экономической наукой в целом и перед экономическим анализом в частности на различных этапах выдвигались новые задачи, усиливались ранее поставленные, по-иному обозначались соответствующие акценты. Этот процесс будет происходить, естественно, и в дальнейшем.

1.4. МЕТОД ЭКОНОМИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Под методом экономического анализа [7, 8, 9, 35, 116, 121] понимается диалектический способ подхода к изучению хозяйственных процессов в их становлении и развитии. Характерными особенностями метода экономического анализа являются: использование системы показателей, всесторонне характеризующих хозяйственную деятельность; изучение причин изменения этих показателей; выявление и измерение взаимосвязи между ними в целях повышения социально-экономической эффективности исследований.

В определении отмечаются характерные особенности метода экономического анализа. Первой такой особенностью является использование системы показателей при изучении хозяйственных явлений и процессов. Эта система формируется обычно в ходе планирования, при разработке систем и подсистем экономической информации, что не исключает возможности исчисления в ходе самого анализа новых показателей.

Вторая характерная особенность метода экономического анализа – изучение причин, вызвавших изменение тех или иных хозяйственных показателей. Поскольку экономические явления обусловлены причинной связью и причинной зависимостью, то задача анализа – раскрытие и изучение этих причин (факторов). На хозяйственную деятельность предприятия, даже на отдельно взятый показатель, могут влиять многочисленные и разнообразны причины. Выявить и изучить действие всех причин затруднительно и не всегда практически целесообразно.

Задача состоит в том, чтобы установить наиболее существенные причины, решающим образом повлиявшие на тот или иной показатель. Таким образом, предварительным условием, предпосылкой корректного анализа является экономически обоснованная классификация причин, влияющих на хозяйственную деятельность и её результаты. При этом экономические (хозяйственные) показатели нельзя рассматривать изолированно, все они между собой связаны. Однако это обстоятельство вовсе не исключает возможности и необходимости их логического обособления в процессе экономических расчётов.

1.5. СИСТЕМНЫЙ ПОДХОД В ЭКОНОМИЧЕСКОМ АНАЛИЗЕ

Для анализа процессов, протекающих на предприятии, целесообразно рассматривать его как систему [66, 67].

Система (от греч. *systema* – целое, составленное из частей; соединение) представляет собой множество элементов, находящихся в отношениях и связях друг с другом, которое образует определённую целостность, единство.

Как и всякое фундаментальное понятие, этот термин лучше всего конкретизируется в процессе рассмотрения его основных свойств.

Можно выделить следующие свойства системы:

1. Система – это прежде всего совокупность элементов. При определённых условиях отдельные элементы могут рассматриваться как системы (то есть имеет место иерархичность).

2. Наличие между элементами и (или) их свойствами существенных связей, превосходящих по мощности связи этих элементов с элементами, не входящими в данную систему. Указанное свойство отличает систему от простого конгломерата и выделяет из окружающей среды в виде целостного объекта.

3. Наличие определённой организации, что проявляется в снижении степени неопределённости системы по сравнению с системоформирующими факторами, определяющими возможность создания системы.

4. Существование интегративных свойств, присущих системе в целом, но не свойственных ни одному из её элементов в отдельности. Их наличие показывает, что свойства системы хотя и зависят от свойств элементов, но не определяются ими полностью.

Таким образом, понятие «система» характеризуется наличием множества элементов, связей между ними, а также целостным характером процесса объединения этих элементов.

Если рассматривать предприятие как систему, то такая система будет характеризоваться следующими признаками:

- наличием взаимодействия системы с внешней средой;
- функционированием в условиях воздействия случайных факторов;
- возможностью разбиения системы на множество подсистем;
- наличием иерархической структуры;
- наличием информационных связей (сетей) между элементами и подсистемами.

Взаимодействия системы с окружающей средой, а также элементов системы друг с другом могут быть представлены различными моделями структуры:

- 1) внешняя модель, в которой система представляется в каноническом виде и все её связи с внешней средой выражаются посредством описания сигналов входа и выхода;
- 2) иерархическая модель, в которой система расчленяется по уровням согласно принципу подчинения низших уровней высшим;
- 3) внутренняя модель, в которой отражаются состав и взаимосвязь между элементами системы.

Объектом экономического анализа в первую очередь является внутренняя модель структуры предприятия. Таким образом, в процессе анализа необходимо определить целевую функцию – результирующий показатель или некоторое множество результирующих показателей и, кроме того, задать некоторую совокупность показателей – факторов, которые характеризуют развитие рассматриваемых процессов.

Системный подход направлен, в том числе, и на совершенствование самих процедур выработки управляющих решений. Степень успешности данного подхода может быть измерена уровнем рентабельности, получаемым после его реализации [7].

1.6. СИСТЕМА ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЭКОНОМИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

В процессе экономического анализа хозяйственно-финансовой деятельности предприятий приходится работать с различными показателями [7, 130], которые можно свести в определённую систему.

Показатели можно разделить на следующие группы:

- стоимостные и натуральные – в зависимости от используемого способа измерения;
- количественные и качественные – в зависимости от того, какая характеристика явлений, операций, процессов оценивается;
- объёмные и удельные – в зависимости от того, применяется ли непосредственная оценка или же оценивается соотношение показателей.

Стоимостные показатели относятся к числу наиболее распространённых в экономическом анализе, и их использование вытекает из наличия товарного производства, товарного обращения и товарно-денежных отношений в условиях свободного рынка. При этом, одним из важнейших стоимостных показателей на промышленных предприятиях является показатель реализованной продукции, который обеспечивает тесную связь производства и потребления, характеризуя успешность работы предприятия на рынке.

Натуральные показатели применяются для количественной оценки выпускаемой и реализуемой продукции в её материально-вещественном содержании. Применение того или иного конкретного измерителя зависит от физических свойств продукции. Наряду с натуральными показателями в аналитической практике используется и их разновидность – условно-натуральные. Этот вид показателей применяют при планировании и анализе деятельности предприятий, выпускающих изделия разнообразного ассортимента, для обобщающей оценки характеристики объёма производства (продажи) продукции. Примером условно-натуральных показателей является величина, используемая для количественной оценки суммарной величины потребности в различных видах топлива для производства продукции – тонна условного топлива (тут).

Под количественными показателями (факторами) при анализе понимают те, которые выражают количественную определенность явлений и могут быть получены путем непосредственного учета (объём продукции, количество работающего персонала, станков и т.д.) [37]. Количественные показатели используются для выражения абсолютных и относительных величин, характеризующих объём производства и реализации продукции, его структуру и другие стороны работы предприятия. Количественные показатели могут выражаться как в стоимостном, так и натуральном измерителях.

Качественные показатели (факторы) определяют внутренние качества, признаки и особенности изучаемых явлений (производительность труда,

качество продукции, средняя продолжительность рабочего дня и т.д.). Качественные показатели используются для оценки выпущенной продукции с точки зрения её соответствия установленным требованиям (стандартам, техническим условиям, образцам) для оценки экономической эффективности материальных, трудовых и денежных затрат.

Величины товарооборота, оборотных средств, издержек обращения, себестоимости, прибыли – всё это объёмные показатели. Удельные показатели являются вторичными от соответствующих объёмных показателей. Например, выпуск продукции и количество рабочих – это объёмные показатели, а их отношение, то есть выработка продукции на одного рабочего – удельный показатель.

В экономическом анализе для описания изменения значения некоторого показателя (фактора) часто используются понятия планового (базового) и фактического (отчётного) значения показателя.

Под базовым значением показателя понимается его реальное или гипотетическое значение, которое рассматривается при анализе как начальное (нормативное) или плановое значение (база). Соответственно, фактическое значение показателя описывает действительную величину показателя, которая достигнута в рассматриваемом отчётном периоде.

1.7. ЭКОНОМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Экономический анализ – специальная отрасль знаний, становление которой как науки обуславливалось объективными требованиями и условиями, свойственными появлению любой новой отрасли научных знаний [7]. Первое из них – практическая потребность. Профессиональная маркетинговая деятельность, рыночные отношения при их полной коммерциализации, изучение внутренних и внешних факторов, определяющих конечные финансовые результаты, – всё это требования, обуславливающие необходимость последующих, текущих и перспективных аналитических работ.

Второе условие связано с развитием самой науки в целом и её отдельных отраслей. По мере развития науки происходила и дифференциация её отраслей. Экономический анализ сформировался в результате дифференциации общественных наук. Прежде отдельные формы экономического анализа были присущи преимущественно учётным наукам: балансоведению, бухгалтерскому учёту, статистике. Но по мере углубления экономи-

ческой работы на предприятиях возникла необходимость в выделении анализа как обособленной системы знаний, поскольку учётные дисциплины уже были не способны ответить на все требования практики.

Сформировавшись в самостоятельную отрасль знаний, экономический анализ комплексно, системно использует данные и способы (приёмы) исследования, присущие статистике, планированию, бухгалтерскому учёту, математике и другим наукам.

Диалектический процесс дифференциации и интеграции способствовал выделению таких наук, как управление (маркетинг и менеджмент), планирование, бухгалтерский учёт, статистика, экономическая кибернетика и др. Сюда же с полным основанием можно отнести и экономический анализ, который тесно связан с вышеперечисленными науками.

Современный бизнес требует современного экономического мышления, в немалой степени основанного на специальных математических методах [1, 36, 55, 63, 72, 124].

Связь анализа и математики определяется тем, что той и другой области знаний свойственно изучение количественных отношений. Применение математики в прикладных исследованиях и расчётах распространяется, в первую очередь, на область переменных величин, связанных между собой функциональной зависимостью. Экономические переменные также могут находиться в функциональной зависимости друг от друга. Изучение количественных соотношений и функциональных зависимостей экономических переменных является одной из задач математики.

Применение математики в экономике принимает форму экономико-математического моделирования. С помощью экономико-математической модели отображается тот или иной действительный экономический процесс. Такая модель может быть сконструирована только на основе глубокого теоретического исследования экономической сущности процесса. Только в этом случае математическая модель будет адекватна действительному экономическому процессу, будет объективно отражать его.

Математическое моделирование экономических явлений и процессов является важным инструментом экономического анализа. Оно даёт возможность получить чёткое представление об исследуемом объекте, охарактеризовать и количественно описать его внутреннюю структуру и внешние связи.

Математические методы, использованию которых экономика предлагает широкий простор, в настоящее время применяются для нужд управле-

ния, планирования, бухгалтерского учёта, статистики и экономического анализа.

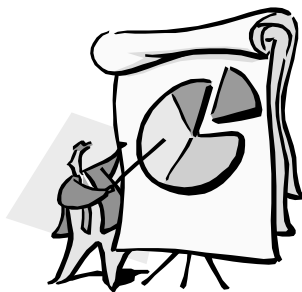
Применение математических методов в экономическом анализе деятельности предприятия требует [7]:

- системного подхода к изучению экономики предприятий, учёта всего множества существенных взаимосвязей между различными сторонами деятельности предприятий; в этих условиях сам анализ всё более приобретает черты системного в кибернетическом смысле этого термина;
- разработки комплекса экономико-математических моделей, отражающих количественную характеристику экономических процессов и задач, решаемых с помощью экономического анализа;
- совершенствования системы экономической информации о работе предприятий;
- наличия технических средств (вычислительной техники), осуществляющих хранение, обработку и передачу экономической информации в целях экономического анализа;
- организации специального коллектива аналитиков, состоящего из экономистов-производственников, специалистов по экономико-математическому моделированию, программистов и др.

Применение математических методов в решении многих задач экономического и инженерного характера стало практически возможным и плодотворным лишь при условии использования вычислительной техники, которая находит широкое применение при решении большинства современных задач экономического анализа. Применение вычислительной техники повышает эффективность аналитической работы. Это достигается за счёт сокращения сроков поведения анализа; более полного охвата влияния факторов на результаты хозяйственной деятельности; замены приближённых или упрощённых расчётов более точными вычислениями; постановки и решения новых многомерных задач анализа, практически не выполнимых вручную или традиционными методами.

Экономико-математическое моделирование работы предприятия должно быть основано на анализе его деятельности и, в свою очередь, обогащать этот анализ результатами и выводами, полученными после решения соответствующих задач [72].

2. ЭКОНОМИЧЕСКИЙ ФАКТОРНЫЙ АНАЛИЗ



2.1. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ЭКОНОМИЧЕСКОГО ФАКТОРНОГО АНАЛИЗА

2.1.1. СОДЕРЖАНИЕ И ПРЕДМЕТ ЭКОНОМИЧЕСКОГО ФАКТОРНОГО АНАЛИЗА

Большое значение в оценке хозяйственной деятельности предприятий имеет группировка задач балансовых и факторных [7, 125].

Термин «баланс» используется для обозначения системы показателей, характеризующих источники образования каких-либо ресурсов и направление их использования за определённый период [66, 67]. Таким образом, балансом является система показателей, характеризующих какое-либо явление путём сопоставления или противопоставления отдельных его сторон.

Балансовые методы – это методы анализа структуры, пропорций, соотношений. Балансовый метод как способ представления данных широко используется в планировании, учёте и экономическом анализе. Кроме привычного бухгалтерского баланса в анализе используются трудовые, товарные, денежные и другие виды балансов. Они могут быть плановыми и фактическими (отчётными). При помощи этих балансов планируются образование и распределение отдельных видов материалов, продукции, денежных средств, трудовых ресурсов.

Балансовый метод [84, С. 233-235] нашёл широкое применение в анализе обеспеченности организации трудовыми, материальными и финансовыми ресурсами, полноты их использования, в исследовании соответствия платёжных средств платёжным обязательствам и др. В качестве технического приёма балансовый способ используется для проверки правильности аналитических расчётов путём составления баланса отклонений.

При этом функционирование любой социально-экономической или технологической системы осуществляется в условиях сложного взаимодействия комплекса факторов внутреннего и внешнего порядка. Все эти факторы, как правило, находятся во взаимосвязи и взаимной обусловленности. Знание этих факторов и умение управлять ими позволяет воздействовать на изменение показателей эффективности деятельности предприятия [5, 54].

Поэтому экономический анализ в целом – это прежде всего факторный анализ (в широком смысле слова, а не только в виде статистического факторного анализа [4, 42, 51]). Наибольшее количество задач экономического анализа решается с использованием методов факторного анализа (согласно некоторым исследованиям, примерно 90% задач приходится на факторный анализ и лишь 10% – на балансовый [121, С. 37]).

Под *экономическим факторным анализом* понимается постепенный переход от начального значения к конечному значению результирующей факторной системы (или наоборот), раскрытие полного набора количественно измеримых факторов, оказывающих влияние на изменение результирующего показателя [7, 121, 122].

Если статистический факторный анализ направлен прежде всего на редукцию данных и определение структуры взаимосвязей между переменными, то экономический факторный анализ решает более широкие задачи, так как направлен не только на выявление причинно-следственных связей в системе, но и позволяет получить количественную оценку влияния отклонений факторов на отклонение значения исследуемого показателя.

Каждый результирующий показатель зависит от многочисленных и разнообразных факторов. Чем детальнее исследуется влияние факторов на величину результирующего показателя, тем точнее и объективнее результаты анализа и оценки качества работы предприятия. Отсюда, изучение и измерение влияния факторов является важным методическим приёмом в анализе хозяйственной деятельности. Без глубокого и всестороннего изучения факторов нельзя сделать обоснованные выводы о результатах деятельности, выявить резервы производства, обосновать планы и управленческие решения.

Таким образом, предметом экономического факторного анализа являются причины образования и изменения результатов хозяйственной деятельности. Познание причинно-следственных связей в процессе деятельности предприятий позволяет раскрыть сущность экономических явлений и на этой основе дать правильную оценку достигнутым результатам.

Классификация, систематизация, моделирование, измерение причинно-следственных связей являются главным методологическим вопросом в экономическом факторном анализе.

2.1.2. ЗАДАЧИ ЭКОНОМИЧЕСКОГО ФАКТОРНОГО АНАЛИЗА

Основными задачами экономического факторного анализа являются построение экономико-математических моделей, описывающих влияние факторов на результирующий показатель, и оценка оказываемого этими факторами влияния. На результирующий показатель может влиять один фактор, и в этом случае говорят об однофакторном анализе, или несколько – в этом случае используется многофакторный анализ.

Понятия факторов и результирующего показателя аналогичны понятию независимых переменных и функции в классическом математическом анализе. При этом однофакторный анализ аналогичен исследованию функции одной переменной, а многофакторный – функции многих переменных.

Таким образом, основная идея экономического факторного анализа заключается в разложении общей вариации результирующей функции на отдельные, не зависящие друг от друга компоненты, каждый из которых характеризует влияние вариации того или иного фактора или взаимодействия целого ряда факторов.

Примерная классификация задач факторного анализа деятельности предприятий с точки зрения использования математических методов [7] представлена на рис. 2.1.

При прямом факторном анализе выявляются отдельные факторы, влияющие на изменение результирующего показателя, устанавливаются формы детерминированной (функциональной) или стохастической зависимости между результирующим показателем и определённым набором факторов и выясняется роль отдельных факторов в изменении показателя.

Постановка задачи прямого факторного анализа распространяется на детерминированный и стохастический случай.

В качестве анализируемой конечной факторной системы рассмотрим некоторую функцию

$$y = f(x),$$

где $x = \{x_i\}$, $i = 1, \dots, n$ – некоторый набор изменяющихся факторов, от которых зависит функция $f(x)$, то есть показатель y .

Рассматривается ситуация, когда набор факторов получил по сравнению со своим базовым (начальным) значением некоторое приращение, результатом чего стало изменение начального значения результирующего показателя.

Для решения задачи экономического факторного анализа требуется определить, какой частью численное приращение функции обязано приращению каждого аргумента (фактора) [3, С. 64].



Рис. 2.1. Схема классификации
Задач экономического факторного анализа

При этом, задача может быть сформулирована для трёх возможных случаев в зависимости от выбора меры для измерения отклонения между плановым ω_0 и фактическим ω_1 значением анализируемых величин (факторов и результирующего показателя): абсолютное отклонение $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_0$, относительное отклонение $\delta\omega = (\omega_1 - \omega_0) / \omega_0$ или индекс изменения $i\omega = \omega_1 / \omega_0$.

Таким образом, для каждого из случаев (абсолютные, относительные и индексные отклонения) задача экономического факторного анализа формулируется в общем виде следующим образом:

$$\begin{aligned}\Delta y &= \Phi(\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n), \\ \delta y &= \Psi(\delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_n), \\ i y &= I(ix_1, ix_2, \dots, ix_n),\end{aligned}$$

где символы Δ , δ , i обозначают, соответственно, абсолютное, относительное отклонение и индекс изменения фактора или результирующего показателя.

Решение задачи в случае использования относительных или индексных показателей имеет большое значение в практике применения экономического факторного анализа и данные виды экономического факторного анализа будут в дальнейшем рассмотрены более подробно в соответствующих разделах.

На практике наиболее часто проводится анализ влияния абсолютных отклонений факторов на абсолютное изменение результирующего показателя. В этом случае, соотношение между приращением результирующего показателя и приращениями факторов, как правило, требуется найти в аддитивной форме:

$$\Delta y = \sum_{i=1}^n A_{x_i} = A_{x_1} + A_{x_2} + \dots + A_{x_n}.$$

То есть перед аналитиком ставится задача разложения приращения функции на составляющие A_{x_i} , каждое из которых характеризует влияние изменения i -го фактора на изменение результирующего показателя. Сформулированная таким образом проблема описывает основную задачу прямого детерминированного факторного анализа.

Примерами прямого детерминированного факторного анализа являются:

- исследование влияния производительности труда и численности рабочих на объём выпущенной продукции (y – объём продукции; x , z – факторы; задана функциональная форма связи $y = x \cdot z$);

- вычисление влияния объёмов продаж, цены продукции в иностранной валюте и курса этой валюты по отношению к рублю на выручку от реализации продукции на экспорт (y – выручка в рублях; x, z, v – факторы; задана функциональная форма связи $y = x \cdot z \cdot v$);
- анализ влияния величины прибыли, стоимости основных производственных фондов и оборотных средств на уровень рентабельности (y – уровень рентабельности; x, z, v – соответствующие факторы; задана функциональная форма связи $y = \frac{x}{z + v}$) [118, 119].

Задачи прямого детерминированного факторного анализа – наиболее распространённая группа задач в анализе хозяйственной деятельности.

В детерминированном моделировании факторных систем можно выделить небольшое число типов моделей [7, 85], наиболее часто встречающихся в анализе хозяйственной деятельности:

$$1) \text{ аддитивные модели: } y = \sum_{i=1}^n x_i = x_1 + x_2 + \dots + x_n; \quad (2.1)$$

$$2) \text{ мультипликативные модели: } y = \prod_{i=1}^n x_i = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n; \quad (2.2)$$

$$3) \text{ кратные модели: } y = \frac{x_1}{x_2}, \quad y = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\sum_{j=n+1}^m x_j}, \quad (2.3)$$

где y – результирующий показатель,
 x_i – факторы.

Кроме того, сочетанием различных комбинаций моделей (2.1)-(2.3) можно получить смешанные (комбинированные) модели. Например, мультипликативно-аддитивные или аддитивно-кратные системы:

$$\bar{y} = \sum_{j=1}^m \prod_{i=1}^n x_{ij} \text{ или } y = \frac{\sum_{i=2}^n x_i}{x_1}.$$

Применительно к классу детерминированных факторных систем различают следующие основные приёмы моделирования, названия которых

соответствуют терминологии, использованной в [32] для описания правил вычислительных процедур над дробями:

1. Метод удлинения факторной системы. Исходная факторная система:

$$y = \frac{a_1}{a_2}.$$

Если a_1 представить в виде суммы отдельных слагаемых-факторов $a_1 = a_{11} + a_{12} + \dots + a_{1n}$, то получаем конечную факторную систему вида

$$y = \frac{a_{11}}{a_2} + \frac{a_{12}}{a_2} + \dots + \frac{a_{1n}}{a_2} \text{ или } y = \sum_{i=1}^n x_i.$$

2. Метод расширения факторной системы. Исходная факторная система:

$$y = \frac{a_1}{a_2}.$$

Если и числитель, и знаменатель дроби «расширить» умножением на одно и то же число, то получим новую факторную систему – мультипликативную модель вида

$$y = \frac{a_1 b c d e \dots}{a_2 b c d e \dots} = \frac{a_1}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{d}{e} \cdot \frac{e}{a_2} \cdot \dots \text{ или } y = \prod_{i=1}^n x_i.$$

3. Метод сокращения факторной системы. Исходная факторная система:

$$y = \frac{a_1}{a_2}.$$

Если и числитель, и знаменатель дроби разделить на одно и то же число, то получим новую конечную факторную систему (при этом, естественно должны быть соблюдены правила выделения факторов):

$$y = \frac{\frac{a_1}{b}}{\frac{a_2}{b}} = \frac{a_{11}}{a_{21}} \text{ или } y = \frac{x_1}{x_2}.$$

Таким образом, сложный процесс формирования уровня изучаемого показателя хозяйственной деятельности может быть разложен различными приёмами на его составляющие (факторы) и представлен в виде модели детерминированной факторной системы.

Если в случае прямого детерминированного факторного анализа исходные данные для анализа имеются в форме конкретных чисел, то в случае прямого стохастического факторного анализа [85] данные задаются выборкой, так что можно говорить о статистическом факторном анализе.

Решение задач стохастического факторного анализа требует глубокого исследования для выявления основных факторов, влияющих на результирующий показатель, и подбора вида статистической зависимости, обычно регрессии, который бы наилучшим образом отражал действительную связь изучаемого показателя с набором факторов. Примером прямого стохастического факторного анализа является, например, регрессионный анализ производительности труда.

В технико-экономических исследованиях, кроме задач, сводящихся к детализации показателя, к разбивке его на составляющие части, существует группа задач синтеза, где требуется построить функцию, содержащую в себе основное качество всех рассматриваемых показателей-аргументов. В этом случае ставится обратная задача (относительно задачи прямого факторного анализа) – задача объединения ряда показателей в комплекс [7].

Пусть имеется набор показателей $x = \{x_i\}$, характеризующих некоторый процесс P . Каждый из показателей односторонне характеризует процесс P . Требуется построить функцию $f(x)$ изменения процесса P , содержащую в себе основные характеристики всех показателей или некоторых из них в комплексе. В зависимости от цели исследования функция $f(x)$ должна характеризовать процесс в статике или в динамике. Данная постановка задачи называется задачей обратного факторного анализа.

Примерами задачи обратного детерминированного факторного анализа являются задачи комплексной оценки производственно-хозяйственной деятельности, а также задачи математического программирования.

Для детального исследования технико-экономических показателей или процессов необходимо проводить не только одноступенчатый, но и цепной факторный анализ: статический (пространственный) и динамический (пространственный и (или) во времени).

Пусть исследуется экономический показатель y ; x_1, x_2, \dots, x_n – факторы, влияющие на этот показатель. В зависимости от цели исследования анализируется поведение показателя y одним из методов факторного анализа.

Если x_1, x_2, \dots, x_n сами являются функциями влияющих на них факторов, то для анализа y надо объяснить поведение x_1, x_2, \dots, x_n ; для этого проводят дальнейшую детализацию:

$$\begin{aligned} x_1 &= l_1(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m); \\ x_2 &= l_2(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k); \\ &\dots\dots\dots \\ x_n &= l_n(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_h). \end{aligned}$$

Детализация факторов может быть продолжена и дальше. Закончив её, решают обратную задачу факторного анализа, синтезируя результаты исследования для характеристики результирующего показателя y . Такой метод исследования называется цепным статическим методом факторного анализа.

При применении цепного динамического факторного анализа для полного изучения поведения результирующего показателя недостаточно его статического значения; факторный анализ проводится на различных интервалах дробления времени, на которых исследуется показатель, и (или) для набора нескольких однородных экономических показателей.

Экономический факторный анализ в этом случае может быть направлен на выяснение действия факторов, формирующих результаты хозяйственной деятельности, по различным источникам пространственного или временного происхождения.

Анализ временных рядов показателей хозяйственной деятельности, расщепление уровня ряда на его составляющие (основную линию развития – тренд, сезонную или периодическую составляющие, циклическую и случайную составляющие) – задача временного факторного анализа.

Классификация задач факторного анализа упорядочивает постановки многих экономических задач, позволяет выявить общие закономерности в их решении. При исследовании сложных экономических процессов возможна комбинация постановок задач, если последние не относятся к какому-либо типу, указанному в классификации.

2.1.3. МЕТОДЫ ЭКОНОМИЧЕСКОГО ФАКТОРНОГО АНАЛИЗА

Как было сказано выше, экономический анализ предполагает определение факторов, влияющих на хозяйственную деятельность предприятия (результирующие показатели), а также оценку степени их влияния. При этом используется ряд различных способов анализа [7, 68].

Так, в рассматриваемых условиях поставленной задачи прямого детерминированного факторного анализа наиболее простым является разложение результирующего показателя (функции) в виде

$$\Delta y = \sum_{i=1}^n \Delta y_i + \sigma(x), \quad (2.4)$$

где $\Delta y_i = f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i + \Delta x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$,

$\sigma(x)$ – неразложимый остаток, который можно интерпретировать как результат синергического эффекта от одновременного изменения взаимосвязанных факторов.

В этом случае используется принцип элиминирования – способ определения влияния некоторого фактора на результирующий показатель при фиксированных остальных факторах.

Целый класс методов экономического факторного анализа опирается на разложение модели как линейной функции от приращений её аргументов, то есть в виде

$$\Delta y = L(\Delta x) + \theta(x). \quad (2.5)$$

Так, например, пользуясь известной математической формулой для представления дифференциала функции, можно записать

$$\Delta y = \sum_{i=1}^n f'_{x_i}(x_0) \cdot \Delta x + \bar{\theta}(x). \quad (2.6)$$

Но, как нетрудно заметить, представленные выше способы разложения приращения исходной факторной системы (2.4)-(2.6) содержат в своей структуре упомянутый неразложимый (спорный) остаток.

По мнению ряда авторов, величина неразложимого остатка не должна расчленяться между факторами и её следует рассматривать как результат совместного влияния факторов [8].

Однако возможная интерпретация величины неразложимого остатка как имеющей самостоятельное экономическое содержание в качестве измерителя дополнительного эффекта взаимодействия факторов ставится некоторыми специалистами под сомнение.

Так, в [2, С. 58-61] указывается, что это слагаемое можно рассматривать лишь как «некоторый корректив к результату, получаемому при рассмотрении влияния изменения каждого фактора независимо друг от друга». И, поскольку неразложимый остаток носит «корректирующий характер», то, может быть, «его следует тем или иным путём распределить между оценками изолированного влияния факторов».

Именно с решением задачи распределения неразложимого остатка между аргументами связано разнообразие подходов к ответу на вопрос о величине факторного влияния.

В экономическом анализе для оценки факторного влияния традиционно используется ряд методов [50, 66, 67, 85, 115, 121, 123, 125]:

- метод дифференциального исчисления;
- индексный метод;
- метод цепных подстановок;

- метод абсолютных разниц;
- метод относительных разниц;
- метод простого прибавления неразложимого остатка;
- метод взвешенных конечных разностей;
- метод коэффициентов;
- метод долевого участия;
- логарифмический метод;
- метод дробления приращений факторов;
- интегральный метод.

Рассмотрим каждый из этих методов подробнее.

МЕТОД ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

В основе дифференциального способа [56] определения влияния изменения факторов на изменение результирующего показателя лежит метод нахождения полного дифференциала функции многих переменных.

Рассмотрим понятие дифференциала. Пусть Δx – произвольное приращение независимой переменной (фактора), которое уже не зависит от x . Это приращение называется дифференциалом независимой переменной и обозначается знаком Δx или dx .

Дифференциалом функции называется произведение её производной на дифференциал независимой переменной [47, 91, 100]. Дифференциал функции $y = f(x)$ обозначают символом dy или $df(x)$:

$$dy = df(x) = f'(x)dx.$$

Таким образом, дифференциал функции есть приращение ординаты касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в данной точке, когда x получает приращение dx .

В случае функции нескольких переменных, например $z = f(x, y)$, используется понятие полного дифференциала, представляющего собой сумму частных дифференциалов, каждый из которых равен произведению частной производной по заданной независимой переменной на дифференциал этой переменной:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

При этом дифференциал есть главная часть приращения функции, а именно:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy + o\left(\sqrt{dx^2 + dy^2}\right).$$

В методе дифференциального исчисления влияние факторов x и y на изменение z определяется следующим образом:

$$A_x = \frac{\partial z}{\partial x} dx = f'_x(x, y) \cdot \Delta x,$$

$$A_y = \frac{\partial z}{\partial y} dy = f'_y(x, y) \cdot \Delta y.$$

Таким образом, поскольку производная, то есть скорость изменения функции, соответствует степени воздействия независимой переменной на исследуемую функцию, то, фиксируя последовательно все переменные, кроме одной, можно получить частные производные и, как следствие, оценить степень воздействия каждой переменной на итоговую функцию [140]. Такой приём называется элиминированием (см. формулу (2.4)).

При условии, что значения приращений факторов сопоставимы, фактор, частная производная которого по абсолютной величине выше, оказывает большее влияние на результат. Знак частной производной указывает на характер этого влияния – положительная частная производная характеризует прямую зависимость, то есть с увеличением фактора происходит увеличение результирующего показателя, а отрицательная частная производная указывает на обратный характер зависимости, то есть с увеличением фактора результирующий параметр уменьшается.

Следует отметить, что точность дифференциального метода существенным образом зависит от величины изменения влияющих факторов. Чем меньше приращения факторов, тем выше точность оценки влияния факторов на результирующий показатель.

Этот факт объясняется тем, что дифференциал и приращение функции имеют общий предел при стремлении приращений факторов к нулю. Неразложимый остаток, который в данном методе интерпретируется как логическая ошибка, в этом случае просто отбрасывается.

Однако в технике, экономике и других областях деятельности человека можно легко найти примеры моделей с приращениями, которые не являются бесконечно малыми или, на практике, «достаточно малыми». Так, в условиях современной экономики значения изменений многих показателей не являются малыми. В этих случаях может оказаться весьма значительной погрешность использования дифференциала для оценки приращения показателя.

В связи с этим и проявляется главный недостаток применения метода дифференциального исчисления для расчётов, в которых, как правило,

требуется точный баланс изменения результирующего показателя и алгебраической суммы влияния всех факторов.

ИНДЕКСНЫЙ МЕТОД

В статистике, планировании и анализе хозяйственной деятельности основой для количественной оценки роли отдельных факторов в динамике изменений обобщающих показателей являются индексные модели.

Так, изучая зависимость объёма выпуска продукции на предприятии от изменений численности работающих и производительности их труда, можно воспользоваться следующей системой взаимосвязанных индексов:

$$I^N = \frac{\sum D_1 R_1}{\sum D_0 R_0},$$

$$I^N = \frac{\sum D_0 R_1}{\sum D_0 R_0} \cdot \frac{\sum D_1 R_1}{\sum D_0 R_1} = I^R \cdot I^D,$$

где I^N – общий индекс изменения объёма выпуска продукции;

I^R – индивидуальный (факторный) индекс изменения численности работающих;

I^D – факторный индекс изменения производительности труда работающих;

D_0, D_1 – среднегодовая выработка товарной продукции на одного работающего соответственно в базисном и отчётном периодах;

R_0, R_1 – среднегодовая численность промышленно-производственного персонала соответственно в базисном и отчётном периодах.

Абсолютное отклонение результирующего показателя – объёма выпуска товарной продукции предприятия в этом случае равняется

$$\Delta N = \sum D_1 R_1 - \sum D_0 R_0.$$

Чтобы определить, какая часть общего изменения объёма выпуска продукции достигнута за счёт изменения каждого из факторов в отдельности, необходимо при расчёте влияния одного из них элиминировать влияние другого фактора

Таким образом, величина влияния фактора определяется как разница между числителем и знаменателем соответствующего факторного индекса:

$$A_R = \sum D_0 R_1 - \sum D_0 R_0,$$

$$A_D = \sum D_1 R_1 - \sum D_0 R_1.$$

Изложенный принцип разложения абсолютного отклонения результирующего показателя пригоден для случая, когда число факторов равно двум (один из них – количественный, а другой – качественный), а анализируемый показатель равен их произведению, то есть индексный метод не даёт общего подхода для факторного разложения приращения результирующего показателя при числе факторов более двух.

В целом, экономический факторный анализ находит широкое применение в теории и практике использования статистических индексов. Вопросы индексного факторного анализа более подробно будут рассмотрены в дальнейшем наряду с описанием подходов к решению основной задачи относительного экономического факторного анализа.

МЕТОД ЦЕПНЫХ ПОДСТАНОВОК

Данный метод характеризуется тем, что при последовательном использовании приёма элиминирования для всех факторов происходит замена базовых значений показателей на фактические.

Таким образом, алгоритм расчёта факторной модели методом цепных подстановок в случае функции нескольких переменных можно представить в следующем виде:

- 1). Базовое значение результирующего показателя:

$$y_0 = \tilde{y}_0 = f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

- 2). Промежуточные значения результирующего показателя:

$$\tilde{y}_1 = f(x_1 + \Delta x_1, x_2, \dots, x_n),$$

$$\tilde{y}_i = f(x_1 + \Delta x_1, \dots, x_i + \Delta x_i, x_{i+1}, \dots), \quad i = 2, \dots, n-1.$$

- 3). Фактическое значение результирующего показателя:

$$y_1 = \tilde{y}_n = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n + \Delta x_n).$$

- 4). Общее абсолютное изменение результирующего показателя:

$$\Delta y = y_1 - y_0 = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

- 5). Изменение результирующего показателя за счёт изменения i -го фактора:

$$A_{x_i} = \tilde{y}_i - \tilde{y}_{i-1}, \quad i = 1, \dots, n.$$

При этом остаётся верным соотношение

$$\Delta y = \sum_{i=1}^n A_{x_i} = \tilde{y}_n - \tilde{y}_{n-1} + \tilde{y}_{n-1} - \tilde{y}_{n-2} + \dots + \tilde{y}_1 - \tilde{y}_0 = y_1 - y_0.$$

Несмотря на некоторую универсальность [125], метод цепных подстановок имеет ряд недостатков. Во-первых, результаты расчётов зависят от

последовательности замены факторов; во-вторых, активная роль в изменении результирующего показателя необоснованно часто приписывается влиянию изменения качественного фактора [7].

Например, рассмотрим двухфакторную мультипликативную модель $f = x \cdot y$, факторы x и y которой получают соответственно приращения Δx и Δy . Тогда результирующий показатель изменится на

$$\Delta f = f_1 - f_0 = (x + \Delta x)(y + \Delta y) - xy = x\Delta y + \Delta xy + \Delta x\Delta y.$$

Метод цепных подстановок приводит к двум различным видам представлений Δf :

$$\Delta f = (y + \Delta y)\Delta x + x\Delta y = A_x + A_y, \quad (2.7)$$

$$\Delta f = y\Delta x + (x + \Delta x)\Delta y = \bar{A}_x + \bar{A}_y. \quad (2.8)$$

Как показывает практика, обычно применяется второй вариант при условии, что x – количественный фактор, а y – качественный. В этом случае выражение для оценки влияния качественного фактора $(x + \Delta x)\Delta y$ более активно, поскольку его величина устанавливается умножением приращения качественного фактора на отчётное (фактическое) значение количественного фактора. Тем самым весь прирост обобщающего показателя за счёт совместного изменения факторов $(\Delta x\Delta y)$ приписывается влиянию только качественного фактора.

Таким образом, задача точного определения роли каждого фактора в изменении результирующего показателя обычным методом цепных подстановок не решается. В связи с этим особую актуальность приобретает поиск путей совершенствования для точного и однозначного определения роли отдельных факторов в условиях внедрения в экономическом анализе сложных экономико-математических моделей факторных систем.

Поиск путей совершенствования метода цепных подстановок должен осуществляться с двух основных позиций:

- содержательное обоснование определённой последовательности подстановок путём исследования сущности хозяйственных процессов и связей факторов, при котором порядок расчётов определяется не последовательностью расположения факторов в расчётной формуле, а их конкретным содержанием с выделением количественных и качественных факторов;
- нахождение рациональной вычислительной процедуры (метода факторного анализа), при которой устраняются условности и допущения и достигается получение однозначного результата вычисления величин влияния факторов.

Несмотря на то, что последний подход по пути совершенствования метода является наиболее перспективным, его применение встречало возражения со стороны ряда экономистов из-за «определённой абстрактности в рассуждениях, увлечения решением проблемы в основном в математическом плане» [43].

МЕТОД АБСОЛЮТНЫХ РАЗНИЦ

Этот метод является одной из модификаций элиминирования, но применяется только для мультипликативных и смешанных мультипликативно-аддитивных моделей вида

$$y = \prod_{i=1}^n x_i \quad \text{или} \quad \bar{y} = \sum_{j=1}^m \prod_{i=1}^n x_{ij}.$$

Он основан на способе нахождения производной произведения, то есть для случая мультипликативной модели:

$$dy = \sum_{i=1}^n \left(dx_i \prod_{k=1, k \neq i}^n x_k \right).$$

Метод абсолютных разниц вытекает из метода цепных подстановок, за исключением лишь того, что величина влияния факторов в этом методе сразу рассчитывается умножением абсолютного прироста исследуемого фактора на базовую (плановую) величину факторов, которые находятся справа от него, и на фактическую величину факторов, расположенных слева от него в модели, то есть для случая многофакторной мультипликативной модели получаем:

$$\Delta y = \sum_{i=1}^n A_{x_i} = \sum_{i=1}^n \left(\Delta x_i \prod_{j=1}^{i-1} [x_j + \Delta x_j] \prod_{k=i+1}^n x_k \right).$$

Помимо невозможности использовать этот алгоритм для всех типов факторных систем, метод абсолютных разниц имеет те же недостатки, что и метод цепных подстановок.

МЕТОД ОТНОСИТЕЛЬНЫХ РАЗНИЦ

Метод относительных разниц является разновидностью метода абсолютных разниц и также применяется только для мультипликативных и мультипликативно-аддитивных моделей.

Основное его отличие от метода абсолютных разниц заключается в том, что исходные данные по изменению факторных показателей даны в процентах прироста.

Тогда изменение результирующего показателя за счёт i -го фактора определяется следующим образом:

$$A_{x_i} = \left(y_0 + \sum_{j=1}^{i-1} A_{x_j} \right) \cdot \frac{\Delta x_i}{x_i} = \left(y_0 + \sum_{j=1}^{i-1} A_{x_j} \right) \cdot \delta x_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Результаты расчётов в этом случае аналогичны тем, что могут быть получены при использовании других методов элиминирования, подобных методу цепных подстановок. Недостатки метода такие же, как и у всего этого класса, и главный из них – изменение результата в зависимости от изменения порядка рассмотрения факторов. И причина этого недостатка кроется, как уже было показано выше, в том, что дифференциал равен приращению функции лишь в случае бесконечно малых величин.

МЕТОД ПРОСТОГО ПРИБАВЛЕНИЯ НЕРАЗЛОЖИМОГО ОСТАТКА

Не находя достаточно полного обоснования, что делать с неразложимым остатком, в практике экономического анализа стали использовать тривиальный приём прибавления остатка к тому или иному фактору, а также делить этот остаток между факторами в некоторой пропорции, например поровну. Последнее предложение теоретически обосновано в [129].

С учётом этого можно получить набор вычислительных формул, аналогичных различным видам разложения при использовании расчётных алгоритмов из группы методов цепных подстановок (см. (2.7)-(2.8)).

Существуют и другие предложения, которые хотя и редко, но всё же используются в практике экономического анализа. Например, для случая двухфакторной мультипликативной модели $f = x \cdot y$ остаток $\Delta x \Delta y$ можно отнести к величине влияния фактора y с коэффициентом

$$k = \frac{x \Delta y}{y \Delta x + x \Delta y} \quad \text{или} \quad k = \frac{x \Delta y}{y \Delta x},$$

а оставшуюся часть неразложимого остатка присоединить к величине влияния фактора x .

Методика расчёта с использованием формул (2.7)-(2.8), по мнению ряда специалистов, является универсальной, так как разрешает проблему неразложимого остатка.

Так, в [2, С. 65] отмечается, что «несмотря на все возражения, единственно практически приемлемым, хотя и основанным на определённых соглашениях о выборе весов индексов, будет метод взаимосвязанного изучения влияния факторов с использованием в индексе качественного показателя весов отчётного периода, а в индексе объёмного показателя – весов базисного периода».

Однако описанный метод всё же связан с условием определения количественных и качественных факторов, что усложняет задачу при использовании факторных систем большой размерности. При этом разложение общего отклонения результирующего показателя опять же зависит от последовательности подстановки. В связи с этим, невозможно получить однозначное количественное значение влияния отдельных факторов без соблюдения дополнительных условий.

В качестве одного из возможных решений проблемы однозначного распределения неразложимого остатка между факторами можно предложить *алгоритм пропорционального распределения остатка* между факторами. Коэффициенты для распределения остатка в этом случае определяются в соответствии с долями, которые имеют величины влияния того или иного фактора в общей сумме величин факторного влияния, посчитанной без учёта неразложимого остатка.

В этом случае, для модели вида $y = f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ получаем следующий алгоритм факторного анализа:

- 1). Базовые величины факторного влияния определяются в соответствии с методом элиминирования:

$$A_{x_i} = f(\dots, x_{i-1}, x_i + \Delta x_i, x_{i+1}, \dots) - f(x_1, x_2, \dots, x_n);$$

при этом, в соответствии с (2.4) остаётся нераспределённой величина неразложимого остатка:

$$\Delta y - \sum_{i=1}^n A_{x_i} = \sigma(x) = \sigma(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

- 2). Скорректированные значения факторного разложения вычисляются по формуле:

$$\tilde{A}_{x_i} = A_{x_i} + \sigma(x) \cdot \frac{A_{x_i}}{\sum_{i=1}^n A_{x_i}}.$$

Алгебраическая сумма скорректированных величин факторного влияния в этом случае в точности равняется приращению результирующего показателя:

$$\Delta y = \sum_{i=1}^n \tilde{A}_{x_i}.$$

МЕТОД ВЗВЕШЕННЫХ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

Этот метод состоит в том, что величина влияния каждого фактора определяется, для случая двухфакторной модели, как по первому (2.7), так и по второму (2.8) порядку подстановки, затем результат суммируется и от полученной суммы берётся средняя величина, дающая единый ответ о значении влияния фактора. Если в расчёте участвует больше факторов, то их значения рассчитываются по всем возможным подстановкам.

Для рассматриваемого простейшего случая получим:

$$\tilde{A}_x = \frac{A_x + \bar{A}_x}{2}, \quad \tilde{A}_y = \frac{A_y + \bar{A}_y}{2}, \quad \Delta f = \tilde{A}_x + \tilde{A}_y,$$

то есть в своей основе метод взвешенных конечных разностей в случае двухфакторной мультипликативной модели идентичен методу простого прибавления неразложимого остатка при делении этого остатка между факторами поровну.

Следует отметить, что с увеличением количества факторов и (или) изменения типа модели описанная идентичность методов не подтверждается.

Как видно, метод взвешенных конечных разностей позволяет учесть все варианты подстановок. Однако этот метод весьма трудоёмкий и предлагает весьма трудоёмкую вычислительную процедуру, так как приходится перебирать все возможные варианты перестановок.

МЕТОД КОЭФФИЦИЕНТОВ

Этот метод, описанный в [12], основан на сопоставлении числового значения одних и тех же базисных экономических показателей при разных условиях. Для двухфакторной мультипликативной модели получаем следующий результат:

$$\Delta f = f_1 - f_0 = (x + \Delta x)(y + \Delta y) - xy,$$

$$A_x = f_0 \cdot K_x = f_0 \cdot \frac{\Delta x}{x},$$

$$A_y = f_0 \cdot K_y = f_0 \cdot \frac{\Delta y}{y}.$$

Но в этом случае, как и для метода дифференциального исчисления, результат суммарного влияния факторов не совпадает с величиной изменения результирующего показателя, полученного прямым расчётом, т.е.:

$$\Delta f \neq A_x + A_y,$$

а точнее – отличается на величину неразложимого остатка:

$$\Delta f - (A_x + A_y) = \sigma(x, y) = \Delta x \Delta y.$$

Таким образом, данный метод также использует принцип элиминирования, фиксируя результирующий показатель на базовом уровне для всех факторов, кроме оцениваемого.

МЕТОД ДОЛЕВОГО УЧАСТИЯ

В ряде случаев для определения величины влияния факторов на отклонение результирующего показателя может быть использован метод долевого участия [86; 87, С. 18-25]. Этот метод используется для аддитивных и кратных моделей. В первом случае, когда рассматривается аддитивная модель

$$y = \sum_{i=1}^n x_i,$$

расчёт проводится следующим образом:

$$\Delta y = \sum_{i=1}^n A_{x_i} = \sum_{i=1}^n K_{x_i} \cdot \Delta y, \quad K_{x_i} = \frac{\Delta x_i}{\sum_{j=1}^n \Delta x_j}.$$

Методика расчёта для моделей кратного типа несколько сложнее.

В этом случае, для модели вида

$$y = \frac{A}{B} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\sum_{j=n+1}^m x_j}$$

любым из известных методов оценки количественного влияния факторов на результирующий показатель необходимо определить влияние факторов первого уровня A и B , а затем способом долевого участия рассчитать влияние факторов второго порядка x_k , определяющих факторы A или B .

ЛОГАРИФМИЧЕСКИЙ МЕТОД

Этот метод [99] состоит в том, что достигается логарифмически пропорциональное распределение остатка между факторами. При этом не требуется установления очередности действия факторов.

Рассмотрим логарифмический метод на примере мультипликативных моделей. В этом случае факторная система имеет вид

$$y = \prod_{i=1}^n x_i .$$

Прологарифмировав обе части равенства, получим:

$$\lg y = \sum_{i=1}^n \lg x_i ,$$

тогда

$$\lg y_1 - \lg y_0 = \lg \frac{y_1}{y_0} = \sum_{i=1}^n (\lg(x_i + \Delta x_i) - \lg x_i) = \sum_{i=1}^n \lg \left(\frac{x_i + \Delta x_i}{x_i} \right).$$

Разделив обе части формулы на $\lg y_1 - \lg y_0$ и умножив на Δy , получаем выражения для вычисления факторного влияния на приращение результирующего показателя:

$$\Delta y = \sum_{i=1}^n A_{x_i} = \sum_{i=1}^n [K_{x_i} \cdot \Delta y],$$
$$K_{x_i} = \frac{\lg \left(\frac{x_i + \Delta x_i}{x_i} \right)}{\lg \frac{y_1}{y_0}} = \frac{\lg \left(\frac{x_i + \Delta x_i}{x_i} \right)}{\sum_{i=1}^n \lg \left(\frac{x_i + \Delta x_i}{x_i} \right)}.$$

Из полученных формул следует, что общее приращение итогового показателя распределяется по факторам пропорционально отношению логарифмов факторных индексов к логарифму общего индекса результирующего показателя. При этом не имеет значения, какой логарифм используется (натуральный или десятичный).

Логарифмический метод также можно использовать при факторном анализе простейших кратных (или мультипликативно-кратных) моделей вида

$$y = \frac{A}{B} = \frac{\prod_{i=1}^n x_i}{\prod_{j=n+1}^m x_j} = \prod_{i=1}^n x_i \prod_{j=n+1}^m x_j^{-1}.$$

В этом случае при помощи логарифмирования достигается аналогичный результат:

$$\Delta y = \sum_{k=1}^m A_{x_k} = \sum_{k=1}^m [K_{x_k} \cdot \Delta y],$$

$$K_{x_k} = \frac{\lg\left(\frac{x_k + \Delta x_k}{x_k}\right)}{\lg \frac{y_1}{y_0}} = \frac{\lg\left(\frac{x_k + \Delta x_k}{x_k}\right)}{\sum_{i=1}^n \lg\left(\frac{x_i + \Delta x_i}{x_i}\right) + \sum_{j=n+1}^m \lg\left(\frac{x_j}{x_j + \Delta x_j}\right)}, \quad k = 1, \dots, n,$$

$$K_{x_k} = \frac{\lg\left(\frac{x_k}{x_k + \Delta x_k}\right)}{\lg \frac{y_1}{y_0}} = \frac{\lg\left(\frac{x_k}{x_k + \Delta x_k}\right)}{\sum_{i=1}^n \lg\left(\frac{x_i + \Delta x_i}{x_i}\right) + \sum_{j=n+1}^m \lg\left(\frac{x_j}{x_j + \Delta x_j}\right)}, \quad k = n+1, \dots, m.$$

Основным недостатком логарифмического метода является то, что он не может быть «универсальным», так как его применение затруднительно при анализе более сложных моделей факторных систем.

МЕТОД ДРОБЛЕНИЯ ПРИРАЩЕНИЙ ФАКТОРОВ

Продолжением метода дифференциального исчисления является метод дробления приращений факторных признаков [117], при котором проводится дробление приращения каждой из переменных на достаточно малые отрезки и осуществляется пересчёт значений частных производных при каждом (уже достаточно малом) перемещении в пространстве. Степень дробления принимается такой, чтобы суммарная ошибка не влияла на точность экономических расчётов.

Отсюда приращение функции $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ можно представить в общем виде следующим образом:

$$\Delta y = \sum_{i=1}^n A_{x_i} + \varepsilon = \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=0}^m [f'_{x_i}(x_1 + j\bar{\Delta}x_1, x_2 + j\bar{\Delta}x_2, \dots, x_n + j\bar{\Delta}x_n)] \cdot \bar{\Delta}x_i \right] + \varepsilon,$$

$$\bar{\Delta x}_i = \frac{\Delta x}{m},$$

где m – количество отрезков, на которые дробится приращение каждого фактора. Ошибка ϵ убывает с увеличением m .

Этот метод позволяет однозначно определить степень влияния различных факторов на результирующий показатель при заданной точности расчётов, не связан с последовательностью подстановок и выбором качественных и количественных факторов.

К недостаткам метода можно отнести вычислительные трудности, связанные с реализацией алгоритма расчёта, поскольку для достижения заданной точности потребуется многократно находить частные производные для результирующей функции в каждой точке разбиения.

ИНТЕГРАЛЬНЫЙ МЕТОД

Дальнейшим логическим развитием метода дробления приращений факторных признаков, развивающего в свою очередь метод дифференциального исчисления, стал интегральный метод факторного анализа [7, 103, 117, 120, 128].

Этот метод основывается на суммировании приращений функции, определяемых как частные производные, умноженные на приращения соответствующих аргументов на бесконечно малых промежутках [8]. При этом должны соблюдаться следующие условия:

- 1) непрерывная дифференцируемость функции, описывающей поведение результирующего показателя;
- 2) функция между начальной и конечной точками элементарного периода изменяется по прямой Γ_e ;
- 3) скорость изменения факторов должна быть постоянной величиной.

В общем виде формулы расчёта количественных величин влияния факторов на изменение результирующего показателя выводятся из формул для метода дробления приращений факторов в условиях предельного случая, когда $m \rightarrow \infty$:

$$\Delta y = \sum_{i=1}^n A_{x_i} = \sum_{i=1}^n \left[\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^m \left[f'_{x_i} (x_1 + j\bar{\Delta x}_1, x_2 + j\bar{\Delta x}_2, \dots, x_n + j\bar{\Delta x}_n) \right] \cdot \bar{\Delta x}_i \right].$$

В условиях реального технологического или хозяйственного процесса изменение факторов в области определения функции может происходить не по прямолинейному отрезку Γ_e , а по некоторой ориентированной кри-

вой Γ . Но так как изменение факторов рассматривается за элементарный период (то есть за минимальный отрезок времени, в течение которого хотя бы один из факторов получит приращение), то траектория Γ определяется единственно возможным способом – прямолинейным ориентированным отрезком Γ_e , соединяющим начальную и конечную точки элементарного периода.

Предположим, что факторы изменяются во времени и известны значения каждого фактора в m точках, то есть будем считать, что в n -мерном пространстве задано m точек:

$$M_j = (x_1^j, x_2^j, \dots, x_n^j), \quad j = 1, \dots, m,$$

где x_i^j – значение i -го фактора в момент j .

Пусть результирующий показатель получил приращение Δy за анализируемый период. Параметрическое уравнение прямой, соединяющей две точки M_j и M_{j+1} ($j = 1, 2, \dots, m-1$) можно записать в виде

$$x_i = x_i^j + (x_i^{j+1} - x_i^j) \cdot t; \quad i = 1, \dots, n; \quad 0 < t < 1.$$

Учитывая эту формулу, приращение по отрезку, соединяющему точки M_j и M_{j+1} , можно записать следующим образом:

$$\Delta y_{ij} = \int_0^1 f'_{x_i} [x_1^j + (x_1^{j+1} - x_1^j) \cdot t, \dots, x_n^j + (x_n^{j+1} - x_n^j) \cdot t] \cdot (x_i^{j+1} - x_i^j) dt,$$

где $i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, m-1$.

При этом величина Δy_{ij} характеризует вклад i -го фактора в изменение результирующего показателя за период j .

Вычислив все интегралы, получим матрицу

$$\begin{bmatrix} \Delta y_{11} & \Delta y_{12} & \mathbf{K} \Delta y_{1j} & \mathbf{K} \Delta y_{1(m-1)} \\ \Delta y_{21} & \Delta y_{22} & \mathbf{K} \Delta y_{2j} & \mathbf{K} \Delta y_{2(m-1)} \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} \\ \Delta y_{i1} & \Delta y_{i2} & \mathbf{K} \Delta y_{ij} & \mathbf{K} \Delta y_{i(m-1)} \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} \\ \Delta y_{(n-1)1} & \Delta y_{(n-1)2} & \mathbf{K} \Delta y_{(n-1)j} & \mathbf{K} \Delta y_{(n-1)(m-1)} \\ \Delta y_{n1} & \Delta y_{n2} & \mathbf{K} \Delta y_{nj} & \mathbf{K} \Delta y_{n(m-1)} \end{bmatrix}.$$

Просуммировав значения Δy_{ij} по строкам матрицы, получим набор величин, характеризующих вклад i -го фактора в изменение результирующего показателя за весь анализируемый период:

$$\Delta y = \sum_{i=1}^n \Delta y_i = \sum_{i=1}^n A_{x_i} = \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^{m-1} \Delta y_{ij} \right].$$

Интегральный метод факторного анализа находит широкое применение в практике детерминированного экономического анализа [127], так как данный метод рациональной вычислительной процедурой устранил неоднозначность оценки влияния факторов.

В отличие от класса методов цепной подстановки в интегральном методе действует логарифмический закон перераспределения факторных нагрузок. Этот метод объективен, так как исключает какие-либо предложения о роли факторов до проведения анализа и предлагает единый подход к анализу факторных систем любого типа.

К недостаткам интегрального метода можно отнести трудности, связанные с получением формул расчёта величин факторного влияния для произвольной модели. Так, в [7, 123] для облегчения решения задачи построения подынтегральных выражений приводятся исходные матрицы. При этом, «последующее вычисление определённого интеграла по заданной подынтегральной функции и заданному интервалу интегрирования выполняется при помощи ЭВМ по стандартной программе, в которой используется формула Симпсона, или вручную в соответствии с общими правилами интегрирования» [7, С. 138].

Таким образом, построение вспомогательных функций и их последующее интегрирование становится достаточно сложным и индивидуальным процессом для каждой конкретной модели, так как зависит от вида анализируемой функции, а численные методы, используемые при вычислении определённого интеграла, могут существенно сказаться на точности конечного результата.

2.2. ТЕОРЕМА ЛАГРАНЖА О КОНЕЧНЫХ АБСОЛЮТНЫХ ПРИРАЩЕНИЯХ В ЭКОНОМИЧЕСКОМ ФАКТОРНОМ АНАЛИЗЕ

2.2.1. ТЕОРЕМА ЛАГРАНЖА И СВЯЗАННЫЕ С НЕЙ ТЕОРЕМЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Сравнительный анализ, проведенный в предыдущем разделе на основе сведений из [7, 67, 85, 115, 125], выявляет ряд существенных недостатков в большинстве известных методов оценки количественного влияния факторов на результирующий показатель.

При этом всё же существуют универсальные методы, позволяющие однозначно оценить величины факторного влияния. Среди последних, по мнению специалистов в области экономического анализа [7], позицию приоритетного занимает метод интегрирования, вытекающий из метода дробления приращений факторов, развивающего, в свою очередь, метод дифференциального исчисления. Действительно, применение интегрирования даёт возможность получить общий подход к решению задач разного вида. Однако и этот метод имеет ряд недостатков, затрудняющих его широкое применение в практике работы с нестандартными факторными моделями.

В процессе изучения теории и практики экономического факторного анализа был разработан альтернативный существующим метод оценки количественного влияния факторов на результирующий показатель – метод конечных приращений [21, 23, 26, 106, 110, 113, 131-133], основанный на применении теоретического аппарата классического математического анализа.

В связи с этим рассмотрим ряд базовых теорем дифференциального и интегрального исчисления [41, 59, 100], которые могут быть использованы в процессе изучения методологии экономического факторного анализа. Данные теоремы последовательно приводят к формуле конечных приращений (формуле Лагранжа) [48, 57, 137, 139], которая стала основой для разработки нового универсального метода экономического факторного анализа, применимого в условиях произвольных конечных приращений факторов.

Теорема о связи знака производной с возрастанием и убыванием функции.

Пусть функция $f(x)$ имеет в точке x_0 конечную производную $f'(x_0)$. Тогда, если $f'(x_0) > 0$, то $f(x)$ возрастает в точке x_0 (то есть для значений x из некоторой окрестности x_0 выполняются условия: если $x < x_0$, то $f(x) < f(x_0)$, если $x > x_0$, то $f(x) > f(x_0)$); если $f'(x_0) < 0$, то $f(x)$ убывает в точке x_0 (то есть для значений x из некоторой окрестности x_0 выполняются условия: если $x < x_0$, то $f(x) > f(x_0)$, если $x > x_0$, то $f(x) < f(x_0)$).

Доказательство.

По определению,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Рассмотрим случай $f'(x_0) > 0$. Таким образом, существует окрестность точки x_0 , в которой верно неравенство

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0,$$

что означает справедливость следующих соотношений:

$$f(x) - f(x_0) > 0 \text{ при } x > x_0,$$

$$f(x) - f(x_0) < 0 \text{ при } x < x_0,$$

то есть функция $f(x)$ возрастает в точке x_0 . Случай $f'(x_0) < 0$ рассматривается аналогично. Теорема доказана. \square

Теорема Ферма (необходимое условие оптимума (экстремума)).

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a; b]$ и во внутренней точке x_0 этого отрезка принимает оптимальное (максимальное или минимальное значение) значение. Пусть в точке x_0 существует производная $f'(x_0)$. Тогда $f'(x_0) = 0$.

Доказательство.

Предположим противное – пусть x_0 – точка оптимума функции $f(x)$, и пусть $f'(x_0) \neq 0$. Рассмотрим для определённости случай, когда x_0 – точка минимума; предположим, что $f'(x_0) > 0$, тогда слева от точки x_0 по теореме о связи знака производной с возрастанием и убыванием функции должно выполняться неравенство $f(x) < f(x_0)$, что противоречит предположению о том, что x_0 – точка минимума. Если мы предположим, что

$f'(x_0) < 0$, то справа от точки x_0 должно быть верным неравенство $f(x) < f(x_0)$, чего также не может быть. Таким образом $f'(x_0) = 0$, что и требовалось доказать. \square

Теорема Ролля.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и дифференцируема во всех внутренних точках $[a; b]$. Пусть, кроме этого, $f(a) = f(b)$. Тогда внутри отрезка существует по крайней мере одна точка c такая, что $f'(c) = 0$.

Доказательство.

По теореме Вейерштрасса непрерывная на отрезке функция достигает своего наибольшего и наименьшего значений. Если оба значения достигаются на концах отрезка, то они равны по условию, а это означает, что функция тождественно постоянна на $[a; b]$. Тогда производная такой функции равна нулю. Если же хотя бы одно из значений – максимальное или минимальное – достигается внутри отрезка, то производная равна нулю в силу теоремы Ферма. Теорема доказана. \square

Геометрический смысл этой теоремы проиллюстрирован на рис. 2.2: по теореме Ролля существует хотя бы одна точка, в которой касательная к графику функции будет параллельна оси абсцисс, в этой точке производная равна нулю.

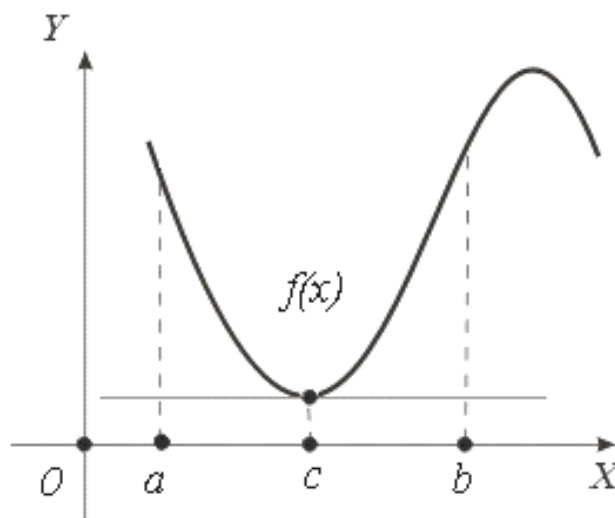


Рис. 2.2. Графическая интерпретация теоремы Ролля

Теорема Лагранжа (теорема о среднем дифференциальном исчислении).

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и дифференцируема во внутренних точках этого отрезка. Тогда внутри отрезка $[a; b]$ существу-

ет по крайней мере одна точка c , такая, что для неё выполняется равенство $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Доказательство.

Введем новую функцию

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{(f(b) - f(a)) \cdot (x - a)}{b - a}.$$

Эта функция удовлетворяет условиям теоремы Ролля: она непрерывна на $[a; b]$, так как представляет собой разность между непрерывной функцией $f(x)$ и линейной функцией; она имеет определённую конечную производную на $(a; b)$, равную

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Наконец непосредственной подстановкой убеждаемся в том, что $g(a) = g(b) = 0$.

Следовательно, найдется точка $c \in (a; b)$, такая, что

$$g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

Отсюда $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, что и требовалось доказать. \square

Геометрическая интерпретация теоремы Лагранжа приведена на рис. 2.3. Заметим, что $(f(b) - f(a))/(b - a)$ является угловым коэффициентом секущей, проходящей через точки $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$ кривой $y = f(x)$, а $f'(c)$ есть угловой коэффициент касательной к той же кривой, проходящий через точку $C(c, f(c))$.

Из теоремы Лагранжа следует, что на кривой $y = f(x)$ между точками A и B найдется такая точка C , касательная в которой параллельна секущей AB .

Доказанная формула $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ носит название формулы Лагранжа или формулы конечных приращений. Она очевидно верна и для случая $a > b$.

Дифференциальная теорема Лагранжа о среднем значении, записанная для функции многих переменных $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, позволяет перейти к формуле

$$\Delta y = \sum_{i=1}^n f'_{x_i}(c_1, c_2, \dots, c_n) \Delta x_i. \quad (2.9)$$

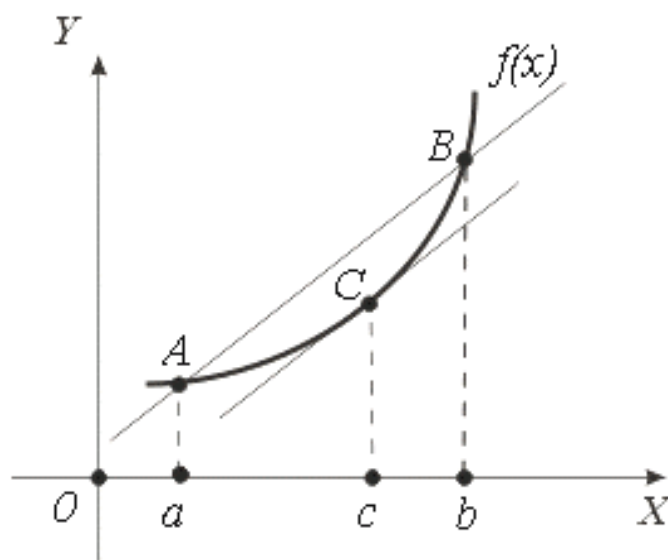


Рис. 2.3. Графическая интерпретация теоремы Лагранжа

Поскольку

$$c_i = x_i + \alpha \Delta x_i \in (x_i; x_i + \Delta x_i), \quad \alpha \in (0;1),$$

то формулу (2.9) можно переписать в виде

$$\Delta y = \sum_{i=1}^n f'_{x_i}(x_1 + \alpha \Delta x_1, x_2 + \alpha \Delta x_2, \dots, x_n + \alpha \Delta x_n) \Delta x_i, \quad (2.10)$$

где $0 < \alpha < 1$ – параметр, который используется при анализе модели, если существует необходимость более тщательного исследования влияния изменения факторов на вариацию результирующего показателя.

Таким образом, теорема Лагранжа позволяет получать точные формулы для расчёта влияния изменения факторов на изменение обобщающего показателя в случае не малых, но конечных приращений. При этом, значение параметра α позволяет найти промежуточные значения факторов, при которых достигается точное разложение приращения анализируемого результирующего показателя на величины факторного влияния.

На рис. 2.4 представлена графическая интерпретация результата применения теоремы о промежуточном значении в случае двухфакторной модели.

Траектория перехода от начальной точки к конечной в этом случае представляет собой прямолинейный ориентированный отрезок M_0M_1 . При этом точное разложение приращения функции достигается в некото-

рой промежуточной точке, через которую проходит касательная плоскость, построенная на касательных прямых, интерпретирующих соответствующие частные производные функции.

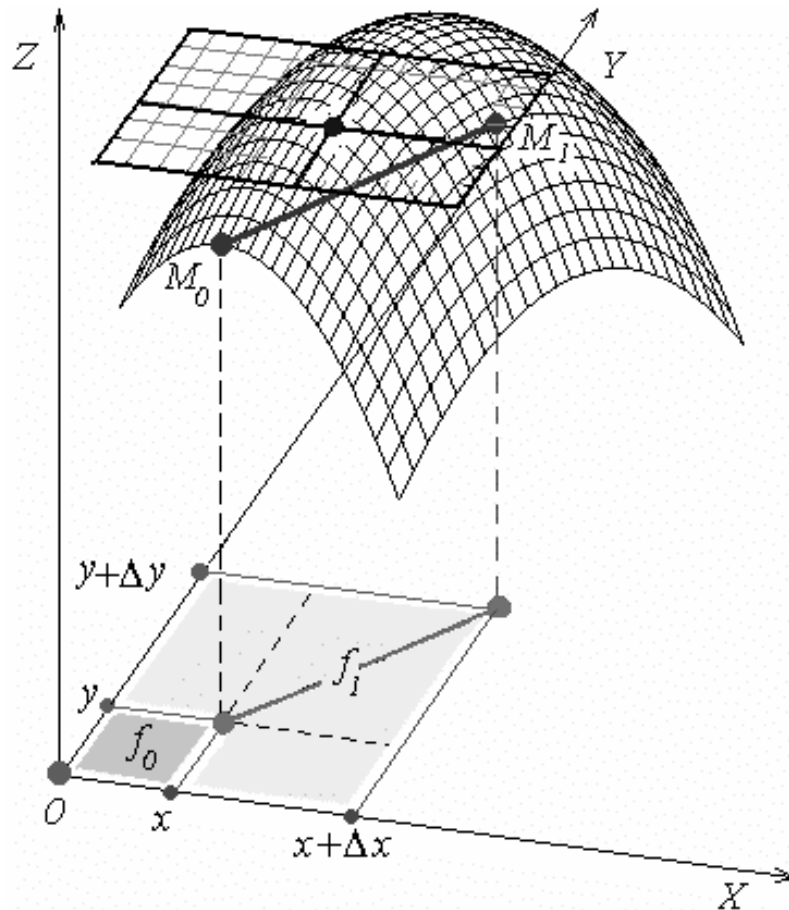


Рис. 2.4. Иллюстрация применения теоремы Лагранжа для определения влияния факторов на результирующий показатель

Если α находить не требуется, то выражение для разложения приращения результирующего показателя можно получить с использованием интегральной формы теоремы о среднем.

Теорема о среднем интегрального исчисления.

Пусть функция $g(x)$ интегрируема в $[a; b]$ и пусть на всём этом промежутке $m \leq g(x) \leq M$, тогда

$$\int_a^b g(x) dx = \mu \cdot (b - a),$$

где $m \leq \mu \leq M$.

Доказательство.

Если $a < b$, то по свойству определённого интеграла получаем

$$m(b-a) \leq \int_a^b g(x)dx \leq M(b-a),$$

откуда

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x)dx \leq M.$$

Приняв в качестве μ величину

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x)dx,$$

получаем требуемое равенство. \square

По основной формуле интегрального исчисления (формуле Ньютона-Лейбница) определённый интеграл функции равен разности двух значений первообразной функции, а именно

$$\int_a^b g(x)dx = G(b) - G(a). \quad (2.11)$$

Если применить к полученному выражению теорему о среднем дифференциального исчисления и учесть, что $g(x) = G'(x)$, то получим

$$G(b) - G(a) = G'(c)(b-a) = g(c)(b-a), \quad a \leq c \leq b.$$

Таким образом, с помощью формулы Ньютона-Лейбница устанавливается связь между теоремами о среднем в дифференциальном и интегральном исчислении.

Геометрический смысл формулы

$$\int_a^b g(x)dx = g(c)(b-a)$$

проиллюстрирован на рис. 2.5.

Рассмотрим криволинейную фигуру $ABCD$ под кривой $h = g(x)$. Тогда площадь этой криволинейной фигуры (выражаемая определённым интегралом) равна площади прямоугольника с тем же основанием и с некоторой средней ординатой $g(c)$ в качестве высоты. Таким образом, используя соотношение (2.11), для функции $y = f(x)$ получаем:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \int_x^{x+\Delta x} f'(t)dt.$$

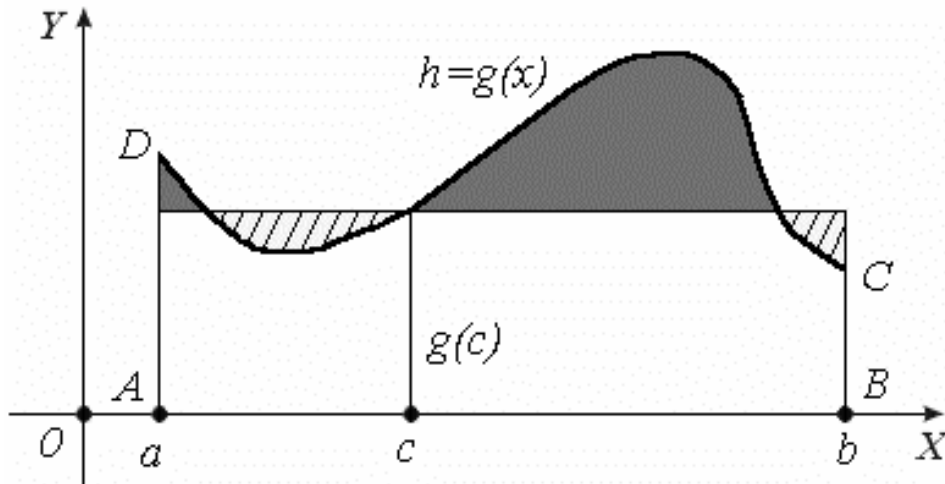


Рис. 2.5. Графическая интерпретация теоремы о среднем интегрального исчисления

Так как $t = t(\alpha) = x + \alpha\Delta x$, $\alpha \in (0;1)$, то в соответствии с формулой замены переменной в определённом интеграле, получим формулу для нахождения точного разложения приращения функции

$$\Delta y = \int_0^1 f'(t) \cdot t'(\alpha) d\alpha = \int_0^1 f'(x + \alpha\Delta x) \cdot \Delta x d\alpha.$$

Применив интегральную форму теоремы о среднем значении для функции многих переменных, получаем:

$$\Delta y = \sum_{i=1}^n \int_0^1 f'_{x_i}(x_1 + \alpha\Delta x_1, \dots, x_n + \alpha\Delta x_n) \Delta x_i d\alpha = \sum_{i=1}^n A_{x_i}. \quad (2.12)$$

При отыскании значений параметра α в случае анализа мультипликативной модели общего вида в соответствии с формулой (2.9) может потребоваться исследовать вопрос определения числа корней некоторого многочлена на заданном интервале. Для этого можно использовать теорему Бюдана-Фурье [62, С. 252-255, 138].

Пусть дан многочлен $f(x)$ n -й степени с действительными коэффициентами, причём допускаем, что он может обладать кратными корнями. Рассмотрим систему его последовательных производных

$$f(x) = f^{(0)}(x), f'(x), f''(x), \dots, f^{(n-1)}(x), f^{(n)}(x), \quad (*)$$

из которых последняя равна старшему коэффициенту a_0 многочлена $f(x)$, умноженному на $n!$, и поэтому всё время сохраняет постоянный знак. Если действительное число c не служит корнем ни одного из многочленов по-

лученной системы производных, то обозначим через $S(c)$ число перемен знаков в упорядоченной системе чисел

$$f(c), f'(c), f''(c), \dots, f^{(n-1)}(c), f^{(n)}(c).$$

Таким образом, можно рассматривать целочисленную функцию $S(x)$, определённую для тех значений x , которые не обращают в нуль ни одного из многочленов в первоначальной системе производных.

Посмотрим, как меняется число $S(x)$ при возрастании x . Пока x не пройдёт через корень ни одного из многочленов (*), число $S(x)$ не может измениться. Ввиду этого мы должны рассмотреть два случая: переход x через корень многочлена $f(x)$ и переход x через корень одной из производных $f^{(k)}(x)$, $1 \leq k \leq n-1$.

Пусть α будет l -кратный корень многочлена $f(x)$, $l \geq 1$, то есть

$$f(\alpha) = f'(\alpha) = \dots = f^{(l-1)}(\alpha) = 0, f^{(l)}(\alpha) \neq 0.$$

Пусть положительное число ε столь мало, что отрезок $[\alpha - \varepsilon; \alpha + \varepsilon]$ не содержит корней многочленов $f(x), f'(x), \dots, f^{(l-1)}(x)$, отличных от α , а также не содержит ни одного корня многочлена $f^{(l)}(x)$. Докажем, что в системе чисел

$$f(\alpha - \varepsilon), f'(\alpha - \varepsilon), \dots, f^{(l-1)}(\alpha - \varepsilon), f^{(l)}(\alpha - \varepsilon)$$

всякие два соседних числа имеют противоположные знаки, тогда как все числа

$$f(\alpha + \varepsilon), f'(\alpha + \varepsilon), \dots, f^{(l-1)}(\alpha + \varepsilon), f^{(l)}(\alpha + \varepsilon)$$

имеют один и тот же знак. Так как каждый из многочленов системы (*) является производной от предыдущего многочлена, то нам нужно лишь доказать, что если x проходит через корень α многочлена $f(x)$, то, независимо от кратности этого корня, до перехода $f(x)$ и $f'(x)$ имели разные знаки, а после перехода их знаки совпадают. Если $f(\alpha - \varepsilon) > 0$, то $f(x)$ убывает на отрезке $[\alpha - \varepsilon; \alpha]$, а потому $f'(\alpha - \varepsilon) < 0$; если же $f(\alpha - \varepsilon) < 0$, то $f(x)$ возрастает, и потому $f'(\alpha - \varepsilon) > 0$. Следовательно, в обоих случаях знаки различны. С другой стороны, если $f(\alpha + \varepsilon) > 0$, то $f(x)$ возрастает на отрезке $[\alpha; \alpha + \varepsilon]$, а потому $f'(\alpha + \varepsilon) > 0$; аналогично из $f(\alpha + \varepsilon) < 0$ следует $f'(\alpha + \varepsilon) < 0$. Таким образом, после перехода через корень α знаки $f(x)$ и $f'(x)$ должны совпадать.

Из доказанного следует, что при переходе x через l -кратный корень многочлена $f(x)$ система

$$f(x), f'(x), \dots, f^{(l-1)}(x), f^{(l)}(x)$$

теряет l перемен знаков.

Пусть α будет теперь корнем производных

$$f^{(k)}(x), f^{(k+1)}(x), \dots, f^{(k+l-1)}(x), 1 \leq k \leq n-1, l \geq 1,$$

но не служит корнем ни для $f^{(k-1)}(x)$, ни для $f^{(k+l)}(x)$. По доказанному выше, переход x через α влечёт за собой потерю в системе

$$f^{(k)}(x), f^{(k+1)}(x), \dots, f^{(k+l-1)}(x), f^{(k+l)}(x)$$

l перемен знаков. Правда, этот переход создаёт, возможно, новую переменную знаков между $f^{(k-1)}(x)$ и $f^{(k)}(x)$, однако, ввиду $l \geq 1$, при переходе x через α число перемен знаков в системе

$$f^{(k-1)}(x), f^{(k)}(x), f^{(k+1)}(x), \dots, f^{(k+l-1)}(x), f^{(k+l)}(x)$$

или не меняется, или же уменьшается. Оно может уменьшиться при этом лишь на чётное число, так как многочлены $f^{(k-1)}(x)$ и $f^{(k+l)}(x)$ не меняют своих знаков при переходе x через значение α .

Из полученных результатов вытекает, что если числа a и b , $a < b$, не являются корнями ни для одного их многочленов системы (*), то число действительных корней этого многочлена $f(x)$, заключённых между a и b и подсчитываемых каждый столько раз, какова его кратность, равно разности $S(a) - S(b)$ или меньше этой разности на чётное число.

Для того, чтобы ослабить ограничения, наложенные на числа a и b , введём следующие обозначения. Пусть действительное число c не является корнем многочлена $f(x)$, хотя, быть может, служит корнем для некоторых других многочленов системы (*). Обозначим через $S_+(c)$ число перемен знаков в системе чисел

$$f(c), f'(c), f''(c), \dots, f^{(n-1)}(c), f^{(n)}(c), \quad (**)$$

подсчитываемое следующим образом: если

$$f^{(k)}(c) = f^{(k+1)}(c) = \dots = f^{(k+l-1)}(c) = 0, \quad (***)$$

но

$$f^{(k-1)}(c) \neq 0, f^{(k+l)}(c) \neq 0, \quad (****)$$

то считаем $f^{(k)}(c), f^{(k+1)}(c), \dots, f^{(k+l-1)}(c)$ имеющими такой же знак, как у $f^{(k+l)}(c)$; это равносильно, очевидно, тому, что при подсчёте числа перемен знаков в системе (***) нули предполагаются вычеркнутыми. С другой стороны, через $S_-(c)$ обозначим число перемен знаков в системе (**), подсчитываемое следующим образом: если имеют место условия (***) и (****), то считаем, что $f^{(k+i)}(c), 0 \leq i \leq l-1$, имеет такой же знак, как и $f^{(k+l)}(c)$, если разность $l-i$ чётная, и противоположный знак, если эта разность нечётная.

Если мы хотим теперь определить число действительных корней многочлена $f(x)$, заключенных между a и b , $a < b$, причём a и b не являются корнями $f(x)$, но служат, быть может, корнями для других многочленов системы (*), то поступаем следующим образом. Пусть ε столь мало, что отрезок $[a; a+2\varepsilon]$ не содержит корней многочлена $f(x)$, а также отличных от a корней всех остальных многочленов системы (*); с другой стороны, пусть η столь мало, что отрезок $[b-2\eta; b]$ также не содержит корней $f(x)$ и отличных от b корней остальных многочленов системы (*). Тогда интересующее нас число действительных корней многочлена $f(x)$ будет равно числу действительных корней этого многочлена, заключенных между $a+\varepsilon$ и $b-\eta$, то есть, по доказанному выше, равно разности $S(a+\varepsilon) - S(b-\eta)$ или меньше этой разности на чётное число. Легко видеть, однако, что

$$S(a+\varepsilon) = S_+(a), \quad S(b-\eta) = S_-(b).$$

Таким образом, доказана теорема Бюдана-Фурье: если действительные числа a и b , $a < b$, не являются корнями многочлена $f(x)$ с действительными коэффициентами, то число действительных корней этого многочлена, заключенных между a и b и подсчитываемых каждый столько раз, какова его кратность, равно разности $S_+(a) - S_-(b)$ или меньше этой разности на чётное число.

2.2.2. ПРИКЛАДНАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ И ХАРАКТЕРИСТИКИ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ПРИРАЩЕНИЙ

Таким образом, последовательно используя фундаментальные теоремы математики, новый метод экономического факторного анализа – метод Лагранжа или метод конечных приращений – предлагает оригинальный, отличный от ранее применявшихся, подход для определения величин

влияния изменения факторов на изменение результирующего показателя, который в общем виде позволяет использовать для решения основной задачи экономического факторного анализа следующую формулу:

$$A_{x_i} = K \cdot \Delta x_i = f'_{x_i}(x_1 + \alpha \Delta x_1, x_2 + \alpha \Delta x_2, \dots, x_n + \alpha \Delta x_n) \Delta x_i. \quad (2.13)$$

Возможность нахождения точного разложения приращения функции открывает широкие перспективы для применения теоремы о среднем в экономическом анализе, так как величины, входящие в (2.10), имеют содержательную экономическую интерпретацию: приращение функции Δy есть изменение результирующего показателя, а x_i и Δx_i – соответственно фактор и его приращение.

Таким образом, применённый методологический подход в очередной раз доказывает тезис о том, что теоретические основы классического математического анализа находят своё актуальное приложение в теории и практике современного экономического анализа.

При этом, необходимо отметить ряд отличительных особенностей нового метода, которые доказывают правомерность его использования наряду или вместо базовых алгоритмов.

Так, использование соотношения (2.13) позволяет рассчитать элементы структуры факторной системы таким образом, что каждый фактор модели равноправен по отношению к другим, так как при этом не используются никакие априорные предположения о значимости или приоритете того или иного фактора, то есть соблюдается положение о независимости факторов. Структура факторной системы в этом случае сохраняет вид:

$$\Delta y = \sum_{i=1}^n A_{x_i} = A_{x_1} + A_{x_2} + \dots + A_{x_n}. \quad (2.14)$$

Из полученных формул также следует очевидный вывод о том, что применение формулы Лагранжа позволяет решить проблему неразложимого остатка, величина которого оказывается распределённой между факторами.

Вычисляемые в новом методе значения параметра α позволяют также находить сами промежуточные значения факторов, при которых изменение результирующей функции точно представляется в виде искомой комбинации величин влияния приращений факторов на приращение обобщающего показателя. Возможность определения одного или нескольких наборов промежуточных значений факторов позволяет осуществлять более полную интерпретацию результатов анализа при решении конкретных прикладных задач.

В этом случае качественный анализ величин факторного влияния, рассчитанных по методу конечных приращений, при сравнении их с результатами, получаемыми при использовании других методов экономического факторного анализа, позволяет получить исходную информацию, которая необходима при последующем решении задачи управления исследуемым процессом.

Рассмотрим отличия нового алгоритма от имеющихся методик экономического факторного анализа на примере двухфакторной мультипликативной модели.

Прежде всего необходимо отметить, что применение интегральной формы теоремы о среднем позволяет получить результаты, идентичные тем, что достигаются с использованием интегрального метода. При этом, вычислительный алгоритм, опирающийся на (2.12), является более простым в применении, чем использование матриц исходных значений для построения подынтегральных выражений в интегральном методе [7, С. 135-137].

Переходя к вопросу решения задачи распределения величины неразложимого остатка, следует указать, что применение теоремы о среднем позволяет распределить неразложимый остаток между факторами поровну (рис. 2.4 (проекция на плоскость XU) и рис. 2.6*d*), в отличие от других методов, когда остаток относится к одному или к другому фактору (рис. 2.6*a* и 2.6*b*), или же не распределяется совсем и рассматривается как самостоятельная величина (рис. 2.6*c*).

Метод, опирающийся на теорему о среднем значении, как было указано выше, позволяет проводить экономический факторный анализ в случае любых конечных приращений факторов. Это является тем более важным в условиях современных процессов хозяйствования, когда приращения факторов и результирующего показателя не являются малыми, что затрудняет применение классических методов экономического факторного анализа.

Важной особенностью нового метода является то, что он учитывает структуру взаимосвязей факторов, а также даёт общий подход к решению различных задач независимо от количества элементов, входящих в модель факторной системы, и формы связи между ними. Таким образом, появляется возможность применять алгоритмы факторного анализа при исследовании широкого спектра показателей. Данное преимущество имеет большое значение в практической работе, когда специалист работает не только с классическими, но и с различными смешанными типами систем. В этом

случае при использовании метода Лагранжа нет необходимости применять дополнительные способы для упрощения нестандартных функций.

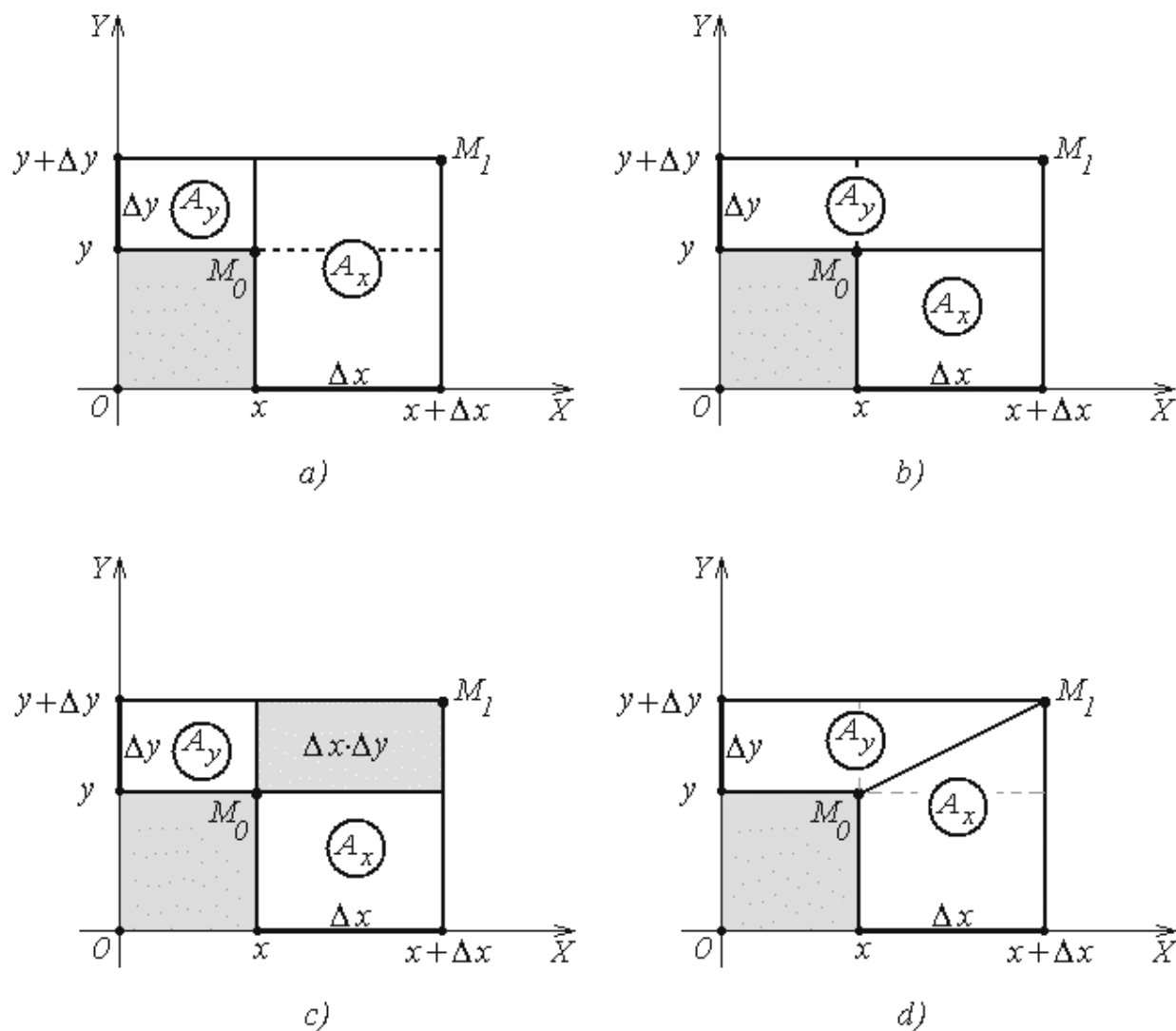


Рис. 2.6. Иллюстрация расчётов различными методами влияния факторов на результирующий показатель

К преимуществам метода конечных приращений можно отнести тот факт, что для его непосредственного применения не требуется использовать сложные вычислительные алгоритмы, что имеет большое значение в практике аналитической работы на предприятии, когда важно владеть методами безмашинного анализа факторных моделей [81]. Применение метода Лагранжа для составления рабочих формул для анализируемого типа факторной системы предполагает знание специалистом-аналитиком лишь базовых основ дифференциального или интегрального исчисления. В доказательство этого тезиса, далее будут выведены выражения для вы-

58

числения величин факторного влияния для наиболее часто встречающихся типов моделей.

Как и в случае интегрального метода [7], можно выделить два направления практического использования метода Лагранжа в решении задач факторного анализа.

К первому направлению относятся задачи статического факторного анализа, когда нет информации об изменении факторов внутри анализируемого периода. К статическим типам задач относятся расчёты, связанные с анализом выполнения плана показателей – анализ исполнения бюджета, анализ плана производства и продажи продукции и т.п.

Статический тип задач факторного анализа – наиболее разработанный и распространённый тип задач в детерминированном анализе хозяйственной и производственной деятельности управляемых объектов.

Ко второму направлению можно отнести задачи факторного анализа, когда имеется информация об изменениях факторов внутри анализируемого периода и она должна приниматься во внимание, то есть случай, когда этот период в соответствии с имеющимися данными разбивается на ряд элементарных.

Этот тип задач факторного анализа можно назвать динамическим, так как при этом участвующие в анализе факторы изменяются на каждом элементе разбиваемого на участки периода (номенклатурного перечня). К динамическим типам задач следует относить расчёты, связанные с анализом временных рядов анализируемых показателей.

2.2.3. СОСТАВЛЕНИЕ РАБОЧИХ ФОРМУЛ НОВОГО МЕТОДА ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ МОДЕЛЕЙ ЭКОНОМИЧЕСКОГО ФАКТОРНОГО АНАЛИЗА

В общем случае теорема о среднем неконструктивна, но существуют примеры численного решения задачи для большинства известных функций [14, 89].

Рассмотрим применение метода Лагранжа к основным типам моделей результирующего показателя.

В качестве примера мультипликативных моделей рассмотрим несколько стандартных факторных систем, которые наиболее часто встречаются в практике экономического факторного анализа финансовых и технологических показателей.

1). Двухфакторная мультипликативная модель – функция вида

$$f = x \cdot y.$$

Пусть факторы x и y получили соответственно приращения Δx и Δy , тогда отклонение функции имеет вид

$$\Delta f = (x + \Delta x)(y + \Delta y) - xy = y\Delta x + x\Delta y + \Delta x\Delta y. \quad (2.15)$$

Но в то же время, по теореме о промежуточном значении,

$$\Delta f = f'_x(x + \alpha\Delta x, y + \alpha\Delta y)\Delta x + f'_y(x + \alpha\Delta x, y + \alpha\Delta y)\Delta y,$$

$$\Delta f = (y + \alpha\Delta y)\Delta x + (x + \alpha\Delta x)\Delta y = A_x + A_y; \quad (2.16)$$

приравнявая (2.15) и (2.16), находим, что $\alpha = 0,5$ и тогда

$$\Delta f = (y + \frac{1}{2}\Delta y)\Delta x + (x + \frac{1}{2}\Delta x)\Delta y = y_{cp}\Delta x + x_{cp}\Delta y = A_x + A_y. \quad (2.17)$$

Таким образом, задача поиска величин факторного влияния получила точное и однозначное решение.

В данном случае достигнутый результат не является уникальным, так как аналогичные формулы для вычисления факторного влияния могут быть получены и с использованием некоторых других алгоритмов из набора классических методов экономического факторного анализа.

2). Трёхфакторная мультипликативная модель – функция вида

$$f = x \cdot y \cdot z.$$

После группировки слагаемых приращение функции можно представить в виде

$$\Delta f = \Delta xyz + (x + \Delta x)\Delta yz + (x + \Delta x)(y + \Delta y)\Delta z.$$

По формуле Лагранжа:

$$\Delta f = (y + \alpha\Delta y)(z + \alpha\Delta z)\Delta x + (x + \alpha\Delta x)(z + \alpha\Delta z)\Delta y + (x + \alpha\Delta x)(y + \alpha\Delta y)\Delta z,$$

где α можно найти из уравнения

$$3\lambda_0\alpha^2 + 2\lambda_1\alpha - (\lambda_0 + \lambda_1) = 0, \quad \lambda_0 = 1, \quad \lambda_1 = \frac{x}{\Delta x} + \frac{y}{\Delta y} + \frac{z}{\Delta z}.$$

Решая уравнение, получаем:

$$\alpha = \frac{\lambda_1}{3} \left(\pm \sqrt{1 + \frac{3}{\lambda_1} + \frac{3}{\lambda_1^2}} - 1 \right).$$

Для завершения процедуры анализа необходимо найти численное значение параметра $\alpha \in (0;1)$ для конкретных данных и подставить его в выражение для разложения приращения результирующего показателя, чтобы получить искомую структуру факторной системы

$$\Delta f = A_x + A_y + A_z.$$

Как показывает сравнительный анализ, в случае исследования трёхфакторной мультипликативной и других, более сложных по структуре моделей, метод Лагранжа позволяет получить результаты, которые отличаются от тех, что могут быть получены с применением базовых подходов экономического факторного анализа.

3). Четырёхфакторная мультипликативная модель – функция вида

$$f = x \cdot y \cdot z \cdot p.$$

В этом случае приращение функции запишем в виде

$$\Delta f = \Delta x y z p + (x + \Delta x) \Delta y z p + (x + \Delta x)(y + \Delta y) \Delta z p + (x + \Delta x)(y + \Delta y)(z + \Delta z) \Delta p.$$

Используя теорему о среднем значении, получаем:

$$\begin{aligned} \Delta f &= (y + \alpha \Delta y)(z + \alpha \Delta z)(p + \alpha \Delta p) \Delta x + (x + \alpha \Delta x)(z + \alpha \Delta z)(p + \alpha \Delta p) \Delta y + \\ &+ (x + \alpha \Delta x)(y + \alpha \Delta y)(p + \alpha \Delta p) \Delta z + (x + \alpha \Delta x)(y + \alpha \Delta y)(z + \alpha \Delta z) \Delta p = \\ &= A_x + A_y + A_z + A_p. \end{aligned}$$

Уравнение для вычисления параметра α :

$$4\lambda_0 \alpha^3 + 3\lambda_1 \alpha^2 + 2\lambda_2 \alpha - (\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2) = 0,$$

$$\lambda_0 = 1, \lambda_1 = \frac{x}{\Delta x} + \frac{y}{\Delta y} + \frac{z}{\Delta z} + \frac{p}{\Delta p},$$

$$\lambda_2 = \frac{x}{\Delta x} \cdot \frac{y}{\Delta y} + \frac{x}{\Delta x} \cdot \frac{z}{\Delta z} + \frac{x}{\Delta x} \cdot \frac{p}{\Delta p} + \frac{y}{\Delta y} \cdot \frac{z}{\Delta z} + \frac{y}{\Delta y} \cdot \frac{p}{\Delta p} + \frac{z}{\Delta z} \cdot \frac{p}{\Delta p}.$$

Решая уравнение, находим:

$$\alpha = \frac{1}{12} \cdot \beta - \frac{2 \cdot \lambda_2 - \frac{3}{4} \cdot \lambda_1^2}{\beta} - \frac{1}{4} \lambda_1,$$

$$\beta = \left\{ -27 \cdot \lambda_1^3 + 108 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 + 216 \cdot (\lambda_1 + \lambda_2 + 1) + \right.$$

$$+ 12 \cdot \left[(-81 \cdot \lambda_1^4 - 27 \cdot \lambda_1^2 \cdot \lambda_2^2 - 81 \cdot \lambda_1^3 \cdot \lambda_2) + \right.$$

$$+ (-81 \cdot \lambda_1^3 + 96 \cdot \lambda_2^3 + 324 \cdot (\lambda_1^2 \cdot \lambda_2 + \lambda_1 \cdot \lambda_2^2)) +$$

$$\left. + (324 \cdot (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) + 972 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2) + (648 \cdot (\lambda_1 + \lambda_2) + 324) \right]^{1/2} \left. \right\}^{1/3}.$$

Таким образом, в общем случае, для мультипликативной модели вида

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n x_i$$

получаем следующий алгоритм расчётов для применения метода Лагранжа:

I. Приращение результирующего показателя записывается как разница фактического и базового значений:

$$\begin{aligned} \Delta y &= \prod_{i=1}^n (x_i + \Delta x_i) - \prod_{i=1}^n x_i, \\ \Delta y &= \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^{i-1} (x_j + \Delta x_j) \cdot \Delta x_i \cdot \prod_{k=i+1}^n x_k, \\ \prod_{j=1}^0 (x_j + \Delta x_j) &= \prod_{k=n+1}^n x_k = 1. \end{aligned} \quad (2.18)$$

II. Применяя теорему о промежуточном значении, получаем формулу для точного разложения приращения функции:

$$\Delta y = \sum_{i=1}^n A_{x_i}, \quad A_{x_i} = \prod_{j=1}^{i-1} (x_j + \alpha \Delta x_j) \cdot \Delta x_i \cdot \prod_{k=i+1}^n (x_k + \alpha \Delta x_k). \quad (2.19)$$

III. Приравнявая (2.18) и (2.19), находим α из получившегося уравнения:

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{n-2} (n-m) \cdot \lambda_m \cdot \alpha^{n-1-m} - \sum_{m=0}^{n-2} \lambda_m &= 0, \\ \lambda_0 = 1, \quad \lambda_m &= \sum_{i=1}^m \prod_{j=1}^m a_{ij}, \quad m=1, \dots, n-2, \quad a_{ij} = \frac{x_k}{\Delta x_k}, \quad k=1, \dots, n. \end{aligned} \quad (2.20)$$

В качестве примера используем данный алгоритм для пятифакторной мультипликативной модели

$$f = x \cdot y \cdot z \cdot p \cdot q.$$

Получим следующие результаты:

I. Приращение результирующего показателя

$$\begin{aligned} \Delta f &= \Delta x y z p q + (x + \Delta x) \Delta y z p q + (x + \Delta x)(y + \Delta y) \Delta z p q + \\ &+ (x + \Delta x)(y + \Delta y)(z + \Delta z) \Delta p q + (x + \Delta x)(y + \Delta y)(z + \Delta z)(p + \Delta p) q. \end{aligned}$$

II. По теореме Лагранжа:

$$\begin{aligned} \Delta f &= (y + \alpha \Delta y)(z + \alpha \Delta z)(p + \alpha \Delta p)(q + \alpha \Delta q) \Delta x + \\ &+ (x + \alpha \Delta x)(z + \alpha \Delta z)(p + \alpha \Delta p)(q + \alpha \Delta q) \Delta y + \\ &+ (x + \alpha \Delta x)(y + \alpha \Delta y)(p + \alpha \Delta p)(q + \alpha \Delta q) \Delta z + \end{aligned}$$

$$+ (x + \alpha\Delta x)(y + \alpha\Delta y)(z + \alpha\Delta z)(q + \alpha\Delta q)\Delta p + \\ + (x + \alpha\Delta x)(y + \alpha\Delta y)(z + \alpha\Delta z)(p + \alpha\Delta p)\Delta q = A_x + A_y + A_z + A_p + A_q.$$

III. Значение параметра α находится из уравнения

$$5\lambda_0\alpha^4 + 4\lambda_1\alpha^3 + 3\lambda_2\alpha^2 + 2\lambda_3\alpha - (\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) = 0, \\ \lambda_0 = 1, \lambda_1 = a_x + a_y + a_z + a_p + a_q, \\ \lambda_2 = a_x \cdot a_y + a_x \cdot a_z + a_x \cdot a_p + a_x \cdot a_q + a_y \cdot a_z + \\ + a_y \cdot a_p + a_y \cdot a_q + a_z \cdot a_p + a_z \cdot a_q + a_p \cdot a_q, \\ \lambda_3 = a_x \cdot a_y \cdot a_z + a_x \cdot a_y \cdot a_p + a_x \cdot a_y \cdot a_q + a_x \cdot a_z \cdot a_p + a_x \cdot a_z \cdot a_q + \\ + a_x \cdot a_p \cdot a_q + a_y \cdot a_z \cdot a_p + a_y \cdot a_z \cdot a_q + a_y \cdot a_p \cdot a_q + a_z \cdot a_p \cdot a_q, \\ a_x = \frac{x}{\Delta x}, a_y = \frac{y}{\Delta y}, a_z = \frac{z}{\Delta z}, a_p = \frac{p}{\Delta p}, a_q = \frac{q}{\Delta q}.$$

Использование метода конечных приращений в общем виде не позволяет определить значения факторов в промежуточных точках единственным образом, то есть могут достигаться несколько различных значений параметра $\alpha \in (0;1)$ и соответствующих им промежуточных значений самих факторов $x_i + \alpha\Delta x_i$, что приводит к различным видам представления приращения результирующего показателя. Данное обстоятельство не ухудшает качественных характеристик нового метода. Напротив, как следует из расчётов на основе конкретных данных, множественность в определении величин факторного влияния, предоставляя всю доступную информацию, даёт возможность последовательно применить системный подход для решения задачи синтеза – задачи принятия решения.

При этом, в ряде случаев существует возможность оценить количество допустимых комбинаций разложения вариации обобщающего показателя.

Для оценки количества корней многочлена (2.20) можно использовать теорему Декарта, являющуюся, в свою очередь, следствием теоремы Бюдана-Фурье [62, С. 255-259].

Теорема Декарта.

Число положительных корней многочлена $f(x)$, засчитываемых столько раз, какова кратность каждого корня, равно числу перемен знаков в системе коэффициентов этого многочлена (равные нулю коэффициенты не учитываются) или меньше этого числа на чётное число.

Для определения числа отрицательных корней многочлена достаточно, очевидно, применить теорему Декарта к многочлену $f(-x)$. При этом, если ни один из коэффициентов многочлена не равен нулю, то переменам

знаков в системе коэффициентов многочлена $f(-x)$ соответствуют сохранения знаков в системе коэффициентов многочлена $f(x)$. Таким образом, если многочлен $f(x)$ не имеет равных нулю коэффициентов, то число его отрицательных корней (считаемых с их кратностями) равно числу сохранений знаков в системе коэффициентов или меньше его на чётное число.

Применим теорему Декарта к рассматриваемому многочлену (2.20) в случае, когда величины всех факторов и их приращений положительны.

Система коэффициентов данного многочлена:

$$\{n \cdot \lambda_0; (n-1) \cdot \lambda_1; \dots; 2 \cdot \lambda_{n-2}; -(\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_{n-2})\},$$

то есть число перемен знаков в его системе коэффициентов равно 1, так как все коэффициенты, кроме последнего, являются положительными для рассматриваемого частного случая:

$$\lambda_0 = 1 > 0, \lambda_m = \sum_{i=1}^{C_n^m} \prod_{j=1}^m \frac{x_k}{\Delta x_k} > 0, m = 1, \dots, n-2, k = 1, \dots, n.$$

Следовательно, данный многочлен имеет лишь один положительный корень. С другой стороны, теорема о среднем утверждает обязательность существования промежуточных значений $x_i + \alpha \Delta x_i \in (x_i; x_i + \Delta x_i)$, то есть должно существовать по крайней мере одно значение параметра $\alpha \in (0; 1)$.

Так как (2.20) имеет единственный положительный корень, то он и находится в интервале $(0; 1)$.

Таким образом, в случае, если все факторы и их приращения положительные, то метод Лагранжа позволяет найти для мультипликативной модели единственное выражение для точного представления приращения результирующего показателя как функции от приращений факторов, а, следовательно, метод предлагает однозначное решение основной задачи экономического факторного анализа.

Если значения факторов и их приращений не являются положительными, то допускаются различные варианты разложения приращения результирующего показателя. Результаты факторного анализа и их интерпретация на примере конкретных данных будут рассмотрены более подробно в следующем разделе.

Среди кратных моделей можно выделить несколько основных типов. Проведём исследование по каждому из них на примере простейших функций.

1). Функция вида

$$f = \frac{x}{y}.$$

Приращение результирующего показателя записывается в виде

$$\Delta f = \frac{x + \Delta x}{y + \Delta y} - \frac{x}{y} = A_x + A_y,$$

а с использованием теоремы о среднем:

$$\Delta f = \frac{\Delta x}{y + \alpha \Delta y} - \frac{(x + \alpha \Delta x) \cdot \Delta y}{(y + \alpha \Delta y)^2} = \frac{(y + \alpha \Delta y)}{(y + \alpha \Delta y)^2} \cdot \Delta x - \frac{(x + \alpha \Delta x)}{(y + \alpha \Delta y)^2} \cdot \Delta y.$$

Приравнявая два выражения для представления приращения функции, находим искомое значение параметра:

$$\alpha = \frac{\sqrt{y(y + \Delta y)} - y}{\Delta y}.$$

2). Функция вида

$$f = \frac{x}{y + z}.$$

Приращение результирующего показателя записывается в виде

$$\Delta f = \frac{x + \Delta x}{y + \Delta y + z + \Delta z} - \frac{x}{y + z} = A_x + A_y + A_z,$$

а по теореме о среднем

$$\Delta f = \frac{\Delta x}{(y + \alpha \Delta y + z + \alpha \Delta z)} - \frac{(x + \alpha \Delta x) \cdot \Delta y}{(y + \alpha \Delta y + z + \alpha \Delta z)^2} - \frac{(x + \alpha \Delta x) \cdot \Delta z}{(y + \alpha \Delta y + z + \alpha \Delta z)^2},$$

где

$$\alpha = \frac{\sqrt{(y + z) \cdot (y + \Delta y + z + \Delta z)} - (y + z)}{(\Delta y + \Delta z)}.$$

3). Функция вида

$$f = \frac{x + y}{z}.$$

Приращение результирующего показателя записывается в виде

$$\Delta f = \frac{x + \Delta x + y + \Delta y}{z + \Delta z} - \frac{x + y}{z} = A_x + A_y + A_z;$$

по теореме Лагранжа:

$$\Delta f = \frac{\Delta x}{(z + \alpha \Delta z)} - \frac{\Delta y}{(z + \alpha \Delta z)} - \frac{(x + \alpha \Delta x) + (y + \alpha \Delta y)}{(z + \alpha \Delta z)^2} \cdot \Delta z.$$

В этом случае

$$\alpha = \frac{\sqrt{z(z + \Delta z)} - z}{\Delta z}.$$

4). Функция

$$f = \frac{x + y}{z + p}.$$

Приращение результирующего показателя записывается в виде

$$\Delta f = \frac{x + \Delta x + y + \Delta y}{z + \Delta z + p + \Delta p} - \frac{x + y}{z + p} = A_x + A_y + A_z + A_p;$$

в соответствии с методом Лагранжа:

$$\Delta f = \frac{1}{(z + \alpha \Delta z + p + \alpha \Delta p)} \cdot \Delta x + \frac{1}{(z + \alpha \Delta z + p + \alpha \Delta p)} \cdot \Delta y - \\ - \frac{(x + \alpha \Delta x) + (y + \alpha \Delta y)}{(z + \alpha \Delta z + p + \alpha \Delta p)^2} \cdot \Delta z - \frac{(x + \alpha \Delta x) + (y + \alpha \Delta y)}{(z + \alpha \Delta z + p + \alpha \Delta p)^2} \cdot \Delta p,$$

где

$$\alpha = \frac{\sqrt{(z + p) \cdot (z + \Delta z + p + \Delta p)} - (z + p)}{(\Delta z + \Delta p)}.$$

Таким образом, применение теоремы Лагранжа для кратных моделей факторных систем вида

$$y = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\sum_{j=n+1}^m x_j}$$

также позволяет найти точное разложение приращения результирующего показателя:

$$\Delta y = \sum_{i=1}^n A_{x_i}, \quad A_{x_i} (i \leq n) = \frac{\Delta x_i}{\sum_{j=n+1}^m (x_j + \alpha \Delta x_j)},$$

$$A_{x_{j(n+1 \leq j \leq m)}} = \frac{\Delta x_j \cdot \sum_{i=1}^n (x_i + \alpha \Delta x_i)}{\left(\sum_{j=n+1}^m (x_j + \alpha \Delta x_j) \right)^2}, \quad \alpha = \frac{\sqrt{\sum_{j=n+1}^m x_j \cdot \sum_{j=n+1}^m (x_j + \Delta x_j)} - \sum_{j=n+1}^m x_j}{\sum_{j=n+1}^m \Delta x_j}.$$

Если находить параметр α не требуется, то выражения для расчёта элементов структуры факторной системы могут быть получены путём интегрирования простейших выражений на отрезке $0 \leq \alpha \leq 1$ в соответствии с формулой (2.12).

В этом случае, для двухфакторной мультипликативной модели $f = x \cdot y$ достигается тот же результат, что и при использовании дифференциальной теоремы Лагранжа:

$$\begin{aligned}\Delta f &= \int_0^1 ((y + \alpha \Delta y) \Delta x) d\alpha + \int_0^1 ((x + \alpha \Delta x) \Delta y) d\alpha = \\ &= \left(y \Delta x \alpha \left| \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} + \Delta y \Delta x \frac{\alpha^2}{2} \left| \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right. \right) + \left(x \Delta y \alpha \left| \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} + \Delta x \Delta y \frac{\alpha^2}{2} \left| \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right. \right) = \\ &= \left(y + \frac{1}{2} \Delta y \right) \Delta x + \left(x + \frac{1}{2} \Delta x \right) \Delta y = y_{cp} \Delta x + x_{cp} \Delta y = A_x + A_y.\end{aligned}$$

Для мультипликативной модели общего вида в этом случае можно получить следующий результат:

$$\begin{aligned}\Delta y &= \sum_{i=1}^n A_{x_i}, \quad A_{x_i} = \prod_{l=1}^n \Delta x_l \cdot \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} \cdot \lambda_{n-k}^i \right), \\ \lambda_0^i &= 1, \quad \lambda_m^i = \sum_{k=1}^{C_{n-1}^m} \prod_{j=1}^m a_{kj}, \quad m = 1, \dots, n-1, \quad a_{kj} = \frac{x_h}{\Delta x_h}, \quad h = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, n.\end{aligned}$$

Используем полученные формулы на примере пятифакторной мультипликативной модели:

$$\begin{aligned}f &= x \cdot y \cdot z \cdot p \cdot q, \quad \Delta f = A_x + A_y + A_z + A_p + A_q, \\ A_x &= \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot \Delta p \cdot \Delta q \cdot \left(\lambda_4^x + \frac{1}{2} \cdot \lambda_3^x + \frac{1}{3} \cdot \lambda_2^x + \frac{1}{4} \cdot \lambda_1^x + \frac{1}{5} \cdot \lambda_0^x \right), \\ \lambda_0^x &= 1, \quad \lambda_1^x = a_y + a_z + a_p + a_q, \\ \lambda_2^x &= a_y \cdot a_z + a_y \cdot a_p + a_y \cdot a_q + a_z \cdot a_p + a_z \cdot a_q + a_p \cdot a_q, \\ \lambda_3^x &= a_y \cdot a_z \cdot a_p + a_y \cdot a_z \cdot a_q + a_y \cdot a_p \cdot a_q + a_z \cdot a_p \cdot a_q, \quad \lambda_4^x = a_y \cdot a_z \cdot a_p \cdot a_q; \\ A_y &= \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot \Delta p \cdot \Delta q \cdot \left(\lambda_4^y + \frac{1}{2} \cdot \lambda_3^y + \frac{1}{3} \cdot \lambda_2^y + \frac{1}{4} \cdot \lambda_1^y + \frac{1}{5} \cdot \lambda_0^y \right), \\ \lambda_0^y &= 1, \quad \lambda_1^y = a_x + a_z + a_p + a_q,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_2^y &= a_x \cdot a_z + a_x \cdot a_p + a_x \cdot a_q + a_z \cdot a_p + a_z \cdot a_q + a_p \cdot a_q, \\
\lambda_3^y &= a_x \cdot a_z \cdot a_p + a_x \cdot a_z \cdot a_q + a_x \cdot a_p \cdot a_q + a_z \cdot a_p \cdot a_q, \lambda_4^y = a_x \cdot a_z \cdot a_p \cdot a_q; \\
A_z &= \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot \Delta p \cdot \Delta q \cdot \left(\lambda_4^z + \frac{1}{2} \cdot \lambda_3^z + \frac{1}{3} \cdot \lambda_2^z + \frac{1}{4} \cdot \lambda_1^z + \frac{1}{5} \cdot \lambda_0^z \right), \\
\lambda_0^z &= 1, \lambda_1^z = a_x + a_y + a_p + a_q, \\
\lambda_2^z &= a_x \cdot a_y + a_x \cdot a_p + a_x \cdot a_q + a_y \cdot a_p + a_y \cdot a_q + a_p \cdot a_q, \\
\lambda_3^z &= a_x \cdot a_y \cdot a_p + a_x \cdot a_y \cdot a_q + a_x \cdot a_p \cdot a_q + a_y \cdot a_p \cdot a_q, \lambda_4^z = a_x \cdot a_y \cdot a_p \cdot a_q; \\
A_p &= \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot \Delta p \cdot \Delta q \cdot \left(\lambda_4^p + \frac{1}{2} \cdot \lambda_3^p + \frac{1}{3} \cdot \lambda_2^p + \frac{1}{4} \cdot \lambda_1^p + \frac{1}{5} \cdot \lambda_0^p \right), \\
\lambda_0^p &= 1, \lambda_1^p = a_x + a_y + a_z + a_q, \\
\lambda_2^p &= a_x \cdot a_y + a_x \cdot a_z + a_x \cdot a_q + a_y \cdot a_z + a_y \cdot a_q + a_z \cdot a_q, \\
\lambda_3^p &= a_x \cdot a_y \cdot a_z + a_x \cdot a_y \cdot a_q + a_x \cdot a_z \cdot a_q + a_y \cdot a_z \cdot a_q, \lambda_4^p = a_x \cdot a_y \cdot a_z \cdot a_q; \\
A_q &= \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot \Delta p \cdot \Delta q \cdot \left(\lambda_4^q + \frac{1}{2} \cdot \lambda_3^q + \frac{1}{3} \cdot \lambda_2^q + \frac{1}{4} \cdot \lambda_1^q + \frac{1}{5} \cdot \lambda_0^q \right), \\
\lambda_0^q &= 1, \lambda_1^q = a_x + a_y + a_z + a_p, \\
\lambda_2^q &= a_x \cdot a_y + a_x \cdot a_z + a_x \cdot a_p + a_y \cdot a_z + a_y \cdot a_p + a_z \cdot a_p, \\
\lambda_3^q &= a_x \cdot a_y \cdot a_z + a_x \cdot a_y \cdot a_p + a_x \cdot a_z \cdot a_p + a_y \cdot a_z \cdot a_p, \lambda_4^q = a_x \cdot a_y \cdot a_z \cdot a_p; \\
a_y &= \frac{y}{\Delta y}, a_z = \frac{z}{\Delta z}, a_p = \frac{p}{\Delta p}, a_q = \frac{q}{\Delta q}.
\end{aligned}$$

Приращение обобщающего показателя в случае кратных моделей также можно представить с использованием альтернативных формул, получаемых после интегрирования в соответствии с (2.12):

$$\Delta y = \sum_{i=1}^n A_{x_i}, A_{x_i} (i \leq n) = \frac{\Delta x_i}{\sum_{j=n+1}^m \Delta x_j} \cdot \ln \left| \frac{\sum_{j=n+1}^m (x_j + \Delta x_j)}{\sum_{j=n+1}^m \Delta x_j} \right|,$$

$$A_{x_j (n+1 \leq j \leq m)} = \frac{\Delta y - \sum_{i=1}^n A_{x_i}}{\sum_{j=n+1}^m \Delta x_j} \Delta x_j.$$

Полученные для основных типов факторных систем формулы для расчёта величин факторного влияния по методу Лагранжа представлены в табл. 2.4.

Сводные результаты по выводу формул для представления разложения приращения результирующего показателя с использованием интегральной формы теоремы Лагранжа представлены в табл. 2.5.

Для упрощения и повышения эффективности применения метода Лагранжа в случае нестандартных моделей факторных систем можно рекомендовать использовать в расчётах специализированные математические пакеты [20]. Вспомогательные программные продукты значительно упрощают дифференцирование и интегрирование при разложении приращения результирующего показателя по составляющим величинам факторного влияния, позволяют точно находить решения уравнений при вычислении параметра α и могут быть использованы при решении других вычислительных задач, возникающих в процессе анализа.

2.2.4. ПРИМЕРЫ

В целях изучения особенностей практического применения метода конечных приращений рассмотрим некоторые результаты, получаемые с использованием данного метода для специальных частных случаев экономического факторного анализа классических моделей.

Пусть все факторы в мультипликативной модели общего вида

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n x_i$$

получили равные в относительном выражении приращения, то есть:

$$\delta_{x_1} = \dots = \delta_{x_n} = \frac{\Delta x_1}{x_1} = \dots = \frac{\Delta x_n}{x_n} = \delta.$$

В этом случае приращение результирующего показателя можно представить в следующем виде:

$$\Delta f = \prod_{i=1}^n (x_i + \Delta x_i) - \prod_{i=1}^n x_i = \prod_{i=1}^n (x_i + \delta x_i) - \prod_{i=1}^n x_i = \prod_{i=1}^n x_i \cdot \left((1 + \delta)^n - 1 \right). \quad (2.21)$$

По теореме Лагранжа:

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^{i-1} (x_j + \alpha \delta x_j) \cdot \delta x_i \cdot \prod_{k=i+1}^n (x_k + \alpha \delta x_k) = \prod_{i=1}^n x_i \cdot n \delta \cdot (1 + \alpha \delta)^{n-1}. \quad (2.22)$$

Приравнявая (2.21) и (2.22), получаем формулу для расчёта α :

$$\alpha = \frac{1}{\delta} \cdot \left(\left[\frac{(1 + \delta)^n - 1}{n \delta} \right]^{\frac{1}{n-1}} - 1 \right). \quad (2.23)$$

Если все факторы модели увеличились в отчётном периоде по сравнению с базовым на 100% ($\delta = 1$), то, используя (2.23), получаем, что в этом случае

$$\alpha = \left[\frac{2^n - 1}{n} \right]^{\frac{1}{n-1}} - 1.$$

Вычислим значения α для различных n :

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
α	0,500	0,528	0,554	0,578	0,600	0,621	0,640	0,657	0,672

В пределе при $n \rightarrow \infty$ получаем

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left[\frac{2^n - 1}{n} \right]^{\frac{1}{n-1}} - 1 \right\} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{2^n - 1}{n} \right]^{\frac{1}{n-1}} - 1 = \exp \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left[\frac{2^n - 1}{n} \right]^{\frac{1}{n-1}} \right\} - 1 = \\ &= \exp \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(2^n - 1) - \ln n}{n - 1} \right\} - 1 = \exp \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^n \ln 2}{2^n - 1} - \frac{1}{n} \right) / 1 \right\} - 1 = \exp \ln 2 - 1 = 1. \end{aligned}$$

Далее, для иллюстрации применения теоремы Бюдана-Фурье в экономическом факторном анализе проведём исследование на примере трёхфакторной мультипликативной модели

$$f = x \cdot y \cdot z.$$

По формуле Лагранжа:

$$\Delta f = (y + \alpha \Delta y)(z + \alpha \Delta z) \Delta x + (x + \alpha \Delta x)(z + \alpha \Delta z) \Delta y + (x + \alpha \Delta x)(y + \alpha \Delta y) \Delta z,$$

где α находится после решения уравнения

$$p_2(\alpha) = 3\lambda_0\alpha^2 + 2\lambda_1\alpha - (\lambda_0 + \lambda_1) = 3\alpha^2 + 2\lambda\alpha - (1 + \lambda) = 0,$$

$$\lambda_0 = 1, \lambda_1 = \lambda = \frac{x}{\Delta x} + \frac{y}{\Delta y} + \frac{z}{\Delta z}.$$

Для завершения анализа необходимо найти численное значение параметра для конкретных данных и подставить его в выражение для разложения приращения результирующего показателя, чтобы получить искомую структуру факторной системы.

Количество значений $\alpha \in (0;1)$, как уже было сказано, позволяет определить теорема Бюдана-Фурье, в соответствии с которой оно равно или на четное число меньше разности

$$S_+(0) - S_-(1)$$

(при этом каждый кратный корень считается столько раз, какова его кратность),

где $S_+(0)$ – количество перемен знака в ряде

$$p_{n-1}(0), p'_{n-1}(0), p''_{n-1}(0), \dots, p_{n-1}^{n-1}(0),$$

$S_-(1)$ – количество перемен знака в ряде

$$p_{n-1}(1), p'_{n-1}(1), p''_{n-1}(1), \dots, p_{n-1}^{n-1}(1),$$

n – степень многочлена, который используется при вычислении α .

При $n = 3$ получаем следующие наборы коэффициентов:

$$p_2(0) = -(1 + \lambda), p'_2(0) = 2\lambda, p''_2(0) = 6,$$

$$p_2(1) = 2 + \lambda, p'_2(1) = 6 + 2\lambda, p''_2(1) = 6.$$

Рассмотрим различные случаи и оценим соответствующее им количество перемен знака.

1) $\lambda \geq 0$,	$S_+(0) - S_-(1) = 1 - 0 = 1$,
2) $-1 \leq \lambda < 0$,	$S_+(0) - S_-(1) = 1 - 0 = 1$,
3) $-2 \leq \lambda < -1$,	$S_+(0) - S_-(1) = 2 - 0 = 2$,
4) $-3 \leq \lambda < -2$,	$S_+(0) - S_-(1) = 2 - 1 = 1$,
5) $\lambda < -3$,	$S_+(0) - S_-(1) = 2 - 1 = 1$.

При $\lambda = -2$ один из искоемых корней $\alpha = 1$, что действительно является решением рассматриваемого уравнения, но противоречит условию нахождения α в интервале $(0;1)$.

Таким образом, при $\lambda \in (-2; -1)$ анализируемый квадратный трёхчлен имеет два корня

$$\alpha_{1,2} = -\frac{\lambda}{3} \pm \sqrt{\frac{\lambda^2}{9} + \frac{\lambda}{3} + \frac{1}{3}} \in (0;1),$$

и один корень $\alpha \in (0;1)$ при всех остальных λ .

Рассмотрим несколько расчётов на примере трехфакторной мультипликативной модели в целях иллюстрации и подтверждения полученного с помощью теоремы Бюдана-Фурье результата (табл. 2.1).

Таблица 2.1

Примеры экономического факторного анализа

№	Исходные данные	λ	$\alpha \in (0;1)$	A_x	A_y	A_z	Δf
1.	$x = 2; \Delta x = 3;$ $y = 2; \Delta y = 1;$ $z = 1; \Delta z = 2$	3,17	0,53	15,56	7,35	18,09	41
2.	$x = 5; \Delta x = -2;$ $y = 1; \Delta y = 2;$ $z = 2; \Delta z = 3$	-1,33	$\alpha_1 = 0,74;$ $\alpha_2 = 0,15$	-20,88 -6,38	29,70 23,04	26,18 18,34	35
3.	$x = 7; \Delta x = -2;$ $y = 1; \Delta y = 2;$ $z = 1; \Delta z = 1$	-2	0,33	-4,44	16,89	10,55	23

Графическая иллюстрация полученного с применением теоремы Бюдана-Фурье результата приведена на рис. 2.7.

Аналогичное исследование можно проводить и для более сложных видов моделей. Однако в этом случае значительно возрастает количество комбинаций перебора коэффициентов, необходимых для определения перемен знака в соответствии с теоремой Бюдана-Фурье. Так, например, для мультипликативных моделей в ходе исследования [22] было получено предположение, что для факторной системы вида

$$f(x) = \prod_{i=1}^{n+1} x_i,$$

которой соответствует многочлен $p_n(\alpha)$, существует

$$\sum_{k=1}^n 2^{2n-2k} = 2^{2n-2} + 2^{2n-4} + 2^{2n-6} + \dots + 2^0 \quad \text{из } 2^{2n} \text{ случаев распределе-}$$

ния знаков функций $p_n(0)$, $p_n(1)$ и их производных, которые определяют количество корней $\alpha \in (0;1)$.

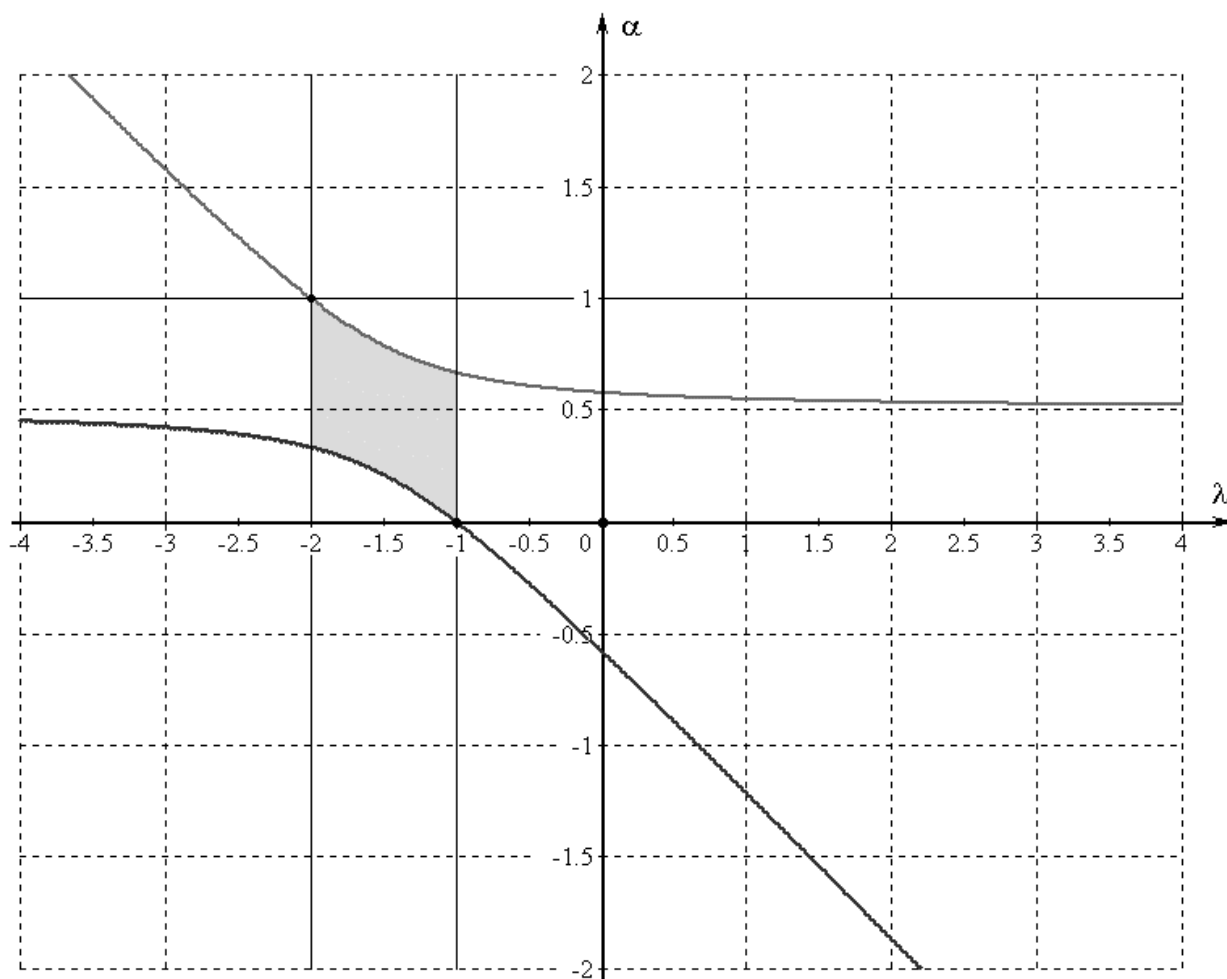


Рис. 2.7. Определение количества корней $\alpha \in (0;1)$ для трёхфакторной мультипликативной модели

В качестве примера для иллюстрации возможной интерпретации результатов анализа в случае не единственного решения задачи факторного анализа проведём сравнительный анализ метода конечных приращений и интегрального метода на примере трёхфакторной мультипликативной модели

$$y = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3,$$

где y – выручка в рублях от реализации продукции;

x_1 – цена в евро за единицу продукции;

x_2 – валютный курс в рублях за один евро;

x_3 – объём реализованной продукции.

Результаты анализа исходных данных (табл. 2.2), представленные в табл. 2.3 и на рис. 2.8, показывают, что один из вариантов решения методом Лагранжа близок к результатам интегрального метода, а второй даёт существенно более низкую оценку величинам факторного влияния цены и валютного курса, что может иметь содержательное значение при выра-

ботке управленческого решения, поскольку управлять данными факторами на практике, где анализируемая трёхфакторная модель применяется для оценки рублёвой выручки предприятия от экспортных продаж, может быть сложнее, чем фактором объёма реализуемой продукции.

Таблица 2.2

Данные об объёмах продаж

Объём продаж, тыс. ед.			Цена, евро/ед.			Валютный курс, руб./евро			Выручка, тыс. руб.		
план	факт	откл., %	план	факт	откл., %	план	факт	откл., %	план	факт	откл., %
2	54	2600%	2	1	-50%	30	65	117%	120	3390	2825%

Таблица 2.3

Сравнение результатов экономического факторного анализа

Величины факторного влияния, тыс. руб.								
Метод конечных приращений						Интегральный метод		
первый вариант			второй вариант					
объём	цена	курс	объём	цена	курс	объём	цена	курс
3691	-2033	1732	3220	-147	317	3554	-1482	1318

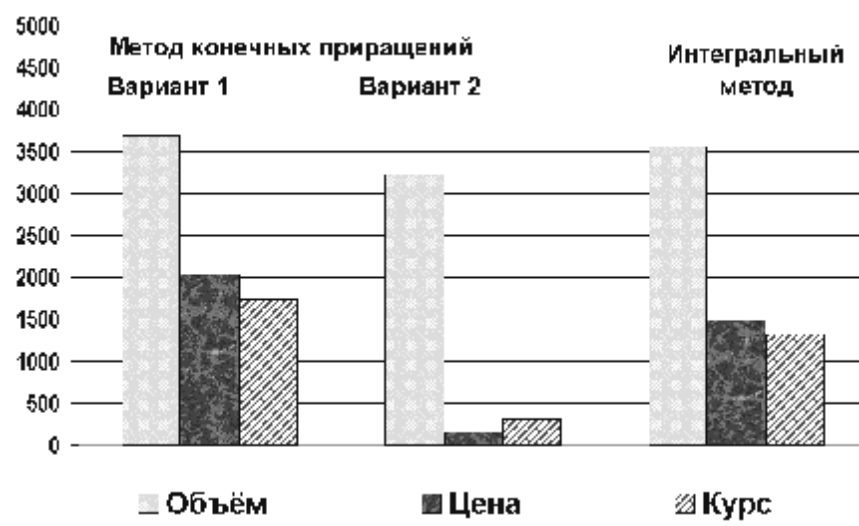


Рис. 2.8. Сравнение метода конечных приращений и интегрального метода (абсолютные величины факторного влияния, тыс. руб.)

В заключительной части раздела опишем пример использования полученных в ходе исследования результатов для случая приращений факторов и результирующего показателя более высоких порядков.

Итак, в классическом факторном анализе при исследовании простейшей двухфакторной мультипликативной модели анализируется влияние

изменений факторов на изменение обобщающего показателя. Таким образом, все усилия традиционного подхода направлены на учет неразложимого остатка и, по возможности, его разложение с использованием ансамбля вышеописанных методов факторного анализа.

Однако, современная практика применения экономического факторного анализа подсказывает, что неразложимый остаток в общем случае можно не устранять, а непосредственно учитывать и анализировать, исходя, например, из предположения того, что он, в свою очередь, имеет ту же мультипликативную структуру, что и исходная модель. Приведем пример того, как это может быть реализовано.

Предположим, что плановыми, наряду со значениями факторов x_0 , y_0 , являются и значения их приращений $\Delta_0 x$, $\Delta_0 y$. Эти величины имеют содержательную интерпретацию, например, как разрешённые значения допусков на приращения факторов. Данная интерпретация не является абстрактной, что подтверждается исследованиями, проведёнными на основе реальных производственных моделей, когда анализу подвергались именно отклонения значений факторов от изначально допустимых.

Плановое значение приращения показателя $z = x \cdot y$ представим в следующем виде:

$$\Delta_0 z = y_0 \Delta_0 x + x_0 \Delta_0 y + \Delta_0 x \Delta_0 y.$$

Фактическое приращение результирующего показателя равно

$$\Delta z = (y_0 \Delta x + x_0 \Delta y + \Delta x \Delta y).$$

Тогда отчётное значение приращения от базовой (допустимой) величины приращения имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta^2 z &= \Delta z - \Delta_0 z = \\ &= (y_0 \Delta x + x_0 \Delta y + \Delta x \Delta y) - (y_0 \Delta_0 x + x_0 \Delta_0 y + \Delta_0 x \Delta_0 y) = \\ &= y_0 (\Delta x - \Delta_0 x) + x_0 (\Delta y - \Delta_0 y) + (\Delta x \Delta y - \Delta_0 x \Delta_0 y) = \\ &= (y_0 \Delta^2 x + x_0 \Delta^2 y) + (\Delta_0 y \Delta^2 x + \Delta_0 x \Delta^2 y + \Delta^2 x \Delta^2 y) = \\ &= (y_0 + \Delta_0 y) \Delta^2 x + (x_0 + \Delta_0 x) \Delta^2 y + \Delta^2 x \Delta^2 y, \end{aligned} \tag{2.24}$$

где $\Delta^2 x = \Delta x - \Delta_0 x$, $\Delta^2 y = \Delta y - \Delta_0 y$ – фактические приращения приращений факторов.

Дальнейшим развитием такого подхода может быть экономический факторный анализ третьего порядка и т.д. [28].

Практическое применение предложенного метода экономического факторного анализа второго порядка в производственных условиях уже показало его большую гибкость и дало возможность получить содержательные результаты, дополняющие выводы традиционного подхода.

2.3. ЦЕПНОЙ ЭКОНОМИЧЕСКИЙ ФАКТОРНЫЙ АНАЛИЗ

2.3.1. ЦЕПНОЙ ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Большинство известных методов исследования влияния изменения факторов на изменение результирующего показателя применимы только в условиях статического факторного анализа модели.

Однако на практике часто возникает потребность в использовании специализированных методов экономического факторного анализа, которые позволяют учесть дискретную структуру анализируемого отчётного периода (неоднородность производственной номенклатуры), когда оценка количественного влияния факторов на результирующий показатель производится с учётом динамики показателей [16, 24, 114], т.е. в условиях цепного динамического факторного анализа.

Таким образом, исследователю необходимо рассчитать агрегированную (суммарную) оценку величин факторного влияния для случая, когда значения исследуемых факторов и обобщающего показателя известны не на всём периоде (для совокупности всех видов продукции), а даны лишь на составляющих отчётный период интервалах (для отдельных видов продукции). Цель анализа в данном случае заключается в получении более полной, подробной и достоверной информации об анализируемом объекте.

При этом следует отметить, что, несмотря на практическую значимость данного направления анализа, вопросы методологии динамического факторного анализа недостаточно широко освещены в специальной литературе и в соответствующих производственных инструкциях [69, 101].

Введём понятие факторной динамической структуры, под которой будем понимать набор некоторых элементарных отрезков, где рассматривается поведение результирующего показателя. С точки зрения разделения цепного динамического анализа на временной и пространственный типы, в качестве элементов структуры могут рассматриваться или временные отрезки (не обязательно хронологически последовательные) – периоды (например, месяц, квартал, год), или некоторые элементы перечня, включающего в себя набор однородных объектов (например, позиции из ассортимента производимой или продаваемой продукции).

Пусть имеются данные о поведении некоторого показателя

$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ на каждом из m элементов факторной структуры:

$$\begin{aligned} y^1 &= f(x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1), \\ y^2 &= f(x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2), \\ &\dots \\ y^m &= f(x_1^m, x_2^m, \dots, x_n^m). \end{aligned}$$

Тогда, для рассматриваемого набора, состоящего из нескольких значений результирующего показателя, задача динамического факторного анализа ставится следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta y &= \Phi^d(\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n), \\ \Delta x_i &= \varphi(\Delta x_i^1, \Delta x_i^2, \dots, \Delta x_i^m), \end{aligned}$$

то есть требуется определить влияние изменения значения факторов на каждом элементе структуры на изменение значения результирующего показателя на всём анализируемом периоде (по всему номенклатурному перечню).

С точки зрения методологии разложения приращения результирующего показателя во времени и (или) в пространстве допустимы три различных направления динамического факторного анализа.

Дело в том, что можно рассмотреть данные, относящиеся только к начальному и конечному уровню ряда, можно проанализировать данные за каждую пару смежных значений и просуммировать полученные результаты, а можно использовать в анализе усреднённые (средневзвешенные) значения факторов.

При этом, первый из предложенных способов, который предлагает использовать для оценки динамики влияния факторов только их начальные и конечные значения, фактически трансформирует динамическую постановку задачи в статическую. Действительно, в этом случае требуется анализировать не динамический ряд, а лишь некоторые плановые и фактические значения факторов и результирующего показателя.

Содержательно это означает, что влияние факторов внутри структуры как бы нивелируется и траектория перехода из ломаной кривой превращается в отрезок, соединяющий два значения результирующего показателя. Указанная особенность метода проиллюстрирована на рис. 2.9 на примере двухфакторной мультипликативной модели для случая двухэлементной структуры.

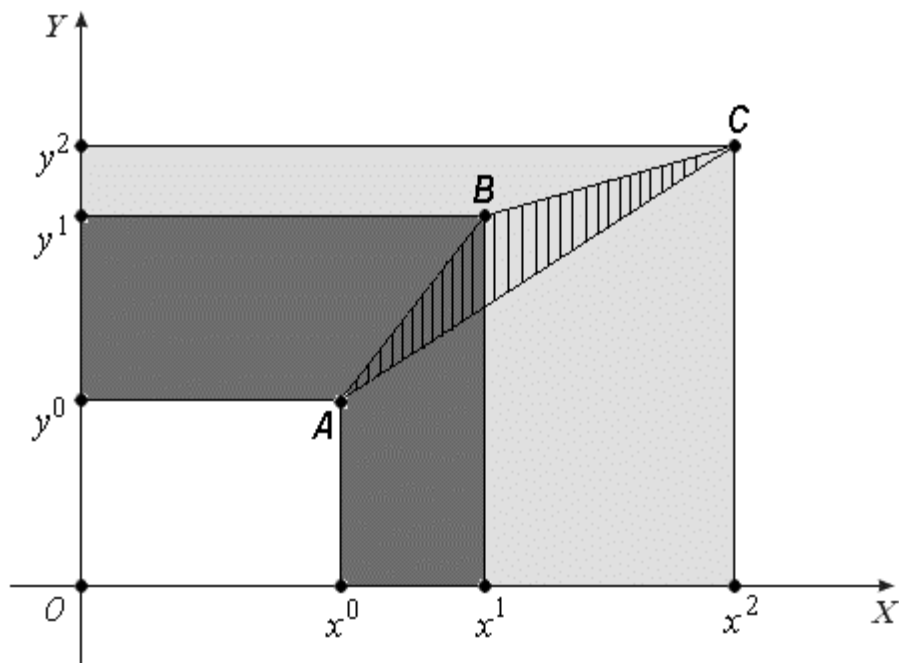


Рис. 2.9. Иллюстрация методов цепного динамического факторного анализа

Очевидно, что отклонение между интегральной величиной факторного влияния, посчитанной как сумма соответствующих значений на каждом элементе структуры, и величиной, полученной после статического факторного анализа, равно площади треугольника ABC . Отсюда следует вывод, что оба метода в случае двухфакторной модели дают одинаковый результат (отклонение равно нулю) только в случае, если совпадают темпы прироста факторов или, что то же самое, если наблюдается изменение состояния факторной системы по линейной траектории:

$$\frac{y^{j+1} - y^j}{x^{j+1} - x^j} = \frac{\Delta y^j}{\Delta x^j} = \text{const}, \quad j = 0, 1.$$

Так как метод анализа на основе сопоставления начального и конечного значения факторов и показателя меняет постановку задачи факторного анализа с динамической на статическую, то далее будут рассмотрены только два других, упомянутых выше, направления методологии цепного динамического факторного анализа.

2.3.2. СПОСОБ ПРОСТОЙ ГРУППИРОВКИ

Данный способ основан на последовательном проведении экономического факторного анализа на каждом элементе рассматриваемой динами-

ческой структуры и последующем суммировании величин факторного влияния. То есть на каждом элементе факторной структуры, используя метод Лагранжа, можно найти точное разложение приращения результирующего показателя в следующем виде:

$$\Delta y^j = \sum_{i=1}^n A_{x_i}^j, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Решение задачи динамического факторного анализа находится при последующем суммировании найденных значений факторного влияния по признаку принадлежности к тому или иному фактору:

$$\Delta y = \sum_{i=1}^n A_{x_i}, \quad A_{x_i} = \sum_{j=1}^m A_{x_i}^j.$$

Подобный подход применим к моделям любого типа.

Так, в случае мультипликативной модели вида

$$y = \sum_{j=1}^m \prod_{i=1}^n x_i^j = x_1^1 \cdot x_2^1 \cdot \dots \cdot x_n^1 + \dots + x_1^m \cdot x_2^m \cdot \dots \cdot x_n^m,$$

используя метод Лагранжа, можно найти следующее решение:

$$\Delta y = \sum_{i=1}^n A_{x_i}, \quad A_{x_i} = \sum_{j=1}^m \left[\prod_{k=1}^{i-1} (x_k^j + \alpha_j \Delta x_k^j) \cdot \Delta x_i^j \cdot \prod_{h=i+1}^n (x_h^j + \alpha_j \Delta x_h^j) \right], \quad (2.25)$$

где параметр α_j последовательно находится для каждого элемента структуры с использованием (2.20).

В случае применения интегрирования для разложения приращения результирующего показателя получим решение вида:

$$\Delta y = \sum_{i=1}^n A_{x_i}, \quad A_{x_i} = \sum_{j=1}^m \left[\prod_{h=1}^n \Delta x_h^j \cdot \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} \cdot \lambda_{n-k}^{ij} \right) \right]. \quad (2.26)$$

Полученный подход динамической оценки величин влияния изменения факторов аналогичным образом может быть использован и при анализе кратных моделей:

$$y = \sum_{j=1}^m \left[\frac{\sum_{i=1}^l x_i^j}{\sum_{i=l+1}^n x_i^j} \right] = \frac{x_1^1 + x_2^1 + \dots + x_l^1}{x_{l+1}^1 + x_{l+2}^1 + \dots + x_n^1} + \dots + \frac{x_1^m + x_2^m + \dots + x_l^m}{x_{l+1}^m + x_{l+2}^m + \dots + x_n^m}.$$

В этом случае, решая задачу динамического экономического факторного анализа, получаем следующий результат:

$$\begin{aligned}
\Delta y &= \sum_{i=1}^n A_{x_i}, \quad A_{x_i (i \leq l)} = \sum_{j=1}^m \frac{\Delta x_i^j}{\sum_{k=l+1}^n (x_k^j + \alpha_j \Delta x_k^j)}, \\
A_{x_i (l+1 \leq i \leq n)} &= \sum_{j=1}^m \frac{\Delta x_i^j \cdot \sum_{k=1}^l (x_k^j + \alpha_j \Delta x_k^j)}{\left(\sum_{k=l+1}^n (x_k^j + \alpha_j \Delta x_k^j) \right)^2}, \\
\alpha_j &= \frac{\sqrt{\sum_{k=l+1}^n x_k^j \cdot \sum_{k=l+1}^n (x_k^j + \Delta x_k^j) - \sum_{k=l+1}^n x_k^j}}{\sum_{k=l+1}^n \Delta x_k^j};
\end{aligned} \tag{2.27}$$

при использовании интегральной формы теоремы Лагранжа:

$$\begin{aligned}
\Delta y &= \sum_{i=1}^n A_{x_i}, \quad A_{x_i (i \leq l)} = \sum_{j=1}^m \frac{\Delta x_i^j}{\sum_{k=l+1}^n \Delta x_k^j} \cdot \ln \left| \frac{\sum_{k=l+1}^n (x_k^j + \Delta x_k^j)}{\sum_{k=l+1}^n \Delta x_k^j} \right|, \\
A_{x_i (l+1 \leq i \leq n)} &= \sum_{j=1}^m \frac{\Delta y^j - \sum_{k=1}^l A_{x_k^j}}{\sum_{k=l+1}^n \Delta x_k^j} \Delta x_i^j.
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Формализуем полученный результат по аналогии с подходами, применяемыми для ряда классических методов детерминированного факторного анализа [124, С. 7-12].

Итак, пусть известны значения факторов x_i на каждом элементе структуры, то есть имеется m значений каждого фактора, которые могут быть представлены в виде матрицы

$$\begin{bmatrix} x_i^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^1 & x_2^1 & \mathbf{K} & x_n^1 \\ x_1^2 & x_2^2 & \mathbf{K} & x_n^2 \\ \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} \\ x_1^m & x_2^m & \mathbf{K} & x_n^m \end{bmatrix},$$

Каждая строка матрицы соответствует вектору в n -мерном пространстве, содержащему значения факторов на j -том элементе структуры.

Применяя метод конечных приращений для разложения приращения результирующего показателя на каждом элементе динамической структуры, можно рассчитать матрицу значений величин факторного влияния

$$\begin{bmatrix} A_{x_i}^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{x_1}^1 & A_{x_2}^1 & \mathbf{K} & A_{x_n}^1 \\ A_{x_1}^2 & A_{x_2}^2 & \mathbf{K} & A_{x_n}^2 \\ \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} \\ A_{x_1}^m & A_{x_2}^m & \mathbf{K} & A_{x_n}^m \end{bmatrix}.$$

При этом, сумма элементов полученной матрицы по столбцу j характеризует суммарное влияние соответствующего фактора на изменение обобщающего показателя, то есть при использовании способа простой группировки

$$A_{x_i} = \sum_{j=1}^m A_{x_i}^j,$$

а алгебраическая сумма всех элементов матрицы составляет полное приращение результирующего показателя

$$\Delta y = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m A_{x_i}^j.$$

Следует отметить, что цепной анализ, проводимый по данной методике, корректен и в смысле равноправности всех элементов структуры модели. Это означает, что если получены факторные величины на более мелких элементах, то при анализе отклонения результирующего показателя за весь отчётный период (по всему ассортименту) или на некоторых подмножествах структуры допустимо в любом порядке группировать соответствующие величины факторного влияния, посчитанные для каждого первичного (минимального) элемента.

2.3.3. СПОСОБ УСРЕДНЕНИЯ НЕАДДИТИВНОГО ПОКАЗАТЕЛЯ ПО АДДИТИВНОМУ

В качестве альтернативы методу простой группировки можно предложить использовать механизм усреднения для получения средневзвешенных оценок неаддитивных (качественных) показателей.

Рассмотрим наиболее распространённую двухфакторную мультипликативную модель в динамике:

$$y = \sum_{j=1}^m \prod_{i=1}^2 x_i^j = x_1^1 \cdot x_2^1 + \dots + x_1^m \cdot x_2^m.$$

Для использования предлагаемого подхода запишем следующее выражение для результирующего показателя, введя некоторые обобщающие значения факторов, характеризующих систему на всей динамической факторной структуре:

$$y = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2.$$

Предположим, что факторы первого типа относятся к группе качественных (неаддитивных), а факторы второго типа являются количественными (аддитивными), то есть:

$$\bar{x}_1 \neq \sum_{j=1}^m x_1^j, \quad \bar{x}_2 = \sum_{j=1}^m x_2^j.$$

В этом случае результирующий показатель также будет количественным и его можно представить в виде

$$y = \frac{y}{\sum_{j=1}^m x_2^j} \cdot \sum_{j=1}^m x_2^j = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2,$$

где величина \bar{x}_1 представляет собой среднее значение неаддитивного фактора (например, среднюю цену), взвешенное по сумме аддитивных (например, по суммарному объёму продаж), для которого

$$\Delta \bar{x}_1 = \frac{\sum_{j=1}^m (x_1^j + \Delta x_1^j) \cdot (x_2^j + \Delta x_2^j)}{\sum_{j=1}^m (x_2^j + \Delta x_2^j)} - \frac{\sum_{j=1}^m x_1^j \cdot x_2^j}{\sum_{j=1}^m x_2^j},$$

$$\bar{x}_{1cp} = \frac{1}{2} \left[\frac{\sum_{j=1}^m (x_1^j + \Delta x_1^j) \cdot (x_2^j + \Delta x_2^j)}{\sum_{j=1}^m (x_2^j + \Delta x_2^j)} + \frac{\sum_{j=1}^m x_1^j \cdot x_2^j}{\sum_{j=1}^m x_2^j} \right].$$

Далее, в соответствии с методом конечных приращений получаем

$$\begin{aligned} \Delta y &= \sum_{i=1}^2 A_{x_i} = A_{x_1} + A_{x_2}, \\ A_{x_1} &= \bar{x}_{2cp} \cdot \Delta \bar{x}_1 = \sum_{j=1}^m \left(x_2^j + \frac{\Delta x_2^j}{2} \right) \cdot \Delta \bar{x}_1, \\ A_{x_2} &= \bar{x}_{1cp} \cdot \Delta \bar{x}_2 = \bar{x}_{1cp} \cdot \sum_{j=1}^m \Delta x_2^j. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Следует указать на некоторые особенности применения данного подхода, опирающегося на усреднение неаддитивных факторов, при анализе моделей более широкого спектра. Дело в том, что, во-первых, при использовании изложенного метода требуется определять принадлежность фактора к тому или иному типу – качественному или количественному, что в случае многофакторных моделей со сложной структурой может вызывать определённые трудности. Во-вторых, при числе количественных факторов более двух возникает неопределённость в выборе фактора, по которому будет производиться взвешивание (пример, описывающий подобную ситуацию, приведен далее).

Таким образом, метод усреднения неаддитивного фактора по аддитивному находит своё применение в основном для таких факторных систем, которые представляют собой аналог частного случая полных индексных систем [2, С. 54], то есть, когда результирующий показатель является количественным. При этом, в факторы в системе обязательно должны быть классифицированы и отнесены к качественным или количественным, а однозначное решение задача факторного анализа имеет только при числе факторов, равном двум. Указанные ограничения существенно сужают возможности по использованию метода усреднения как универсального подхода цепного динамического факторного анализа.

2.3.4. ПРИМЕРЫ

Рассмотрим особенности применения описанных выше методов на примере двухфакторной мультипликативной модели вида

$$y = x_1 \cdot x_2,$$

которую подвергнем анализу при разбиении структуры на две составляющие.

Тогда, исходя из того, что рассматриваются два периода времени (два различных вида продукции), получим исходные факторные системы для первого и второго периода (вида продукции) соответственно:

$$y^1 = x_1^1 \cdot x_2^1 \text{ и } y^2 = x_1^2 \cdot x_2^2.$$

Пусть приращения факторов и результирующих показателей равны:

$$\Delta x_1^1, \Delta x_2^1, \Delta x_1^2, \Delta x_2^2, \Delta y^1, \Delta y^2.$$

Применяя метод Лагранжа, основанный на теореме о промежуточном значении из математического анализа, можно получить следующие факторные разложения для каждого элемента структуры

$$\Delta y^1 = (x_1^1 + \Delta x_1^1) \cdot (x_2^1 + \Delta x_2^1) - x_1^1 \cdot x_2^1 = x_{2_{cp}}^1 \cdot \Delta x_1^1 + x_{1_{cp}}^1 \cdot \Delta x_2^1 = A_{x_1^1} + A_{x_2^1},$$

$$\Delta y^2 = (x_1^2 + \Delta x_1^2) \cdot (x_2^2 + \Delta x_2^2) - x_1^2 \cdot x_2^2 = x_{2_{cp}}^2 \cdot \Delta x_1^2 + x_{1_{cp}}^2 \cdot \Delta x_2^2 = A_{x_1^2} + A_{x_2^2}.$$

Рассмотрим некоторую функцию

$$\bar{y} = x_1 \cdot x_2,$$

где \bar{y} – обобщающий показатель, характеризующий поведение результирующей функции на всей анализируемой структуре (за два периода или по двум видам продукции);

x_1 – обобщающий фактор, агрегирующий в себе значения x_1^1 и x_1^2 , а

x_2 – соответственно x_2^1 и x_2^2 .

Предположим, что в данной двухфакторной мультипликативной модели один из факторов является количественным, а другой – качественным. В этом случае результирующий показатель является количественным (аддитивным).

Приняв x_2 в качестве количественного фактора, получаем, в силу свойства аддитивности, что

$$x_2 = x_2^1 + x_2^2, \Delta x_2 = \Delta x_2^1 + \Delta x_2^2,$$

$$\bar{y} = y^1 + y^2, \Delta \bar{y} = \Delta y^1 + \Delta y^2.$$

Используя вышеизложенные подходы динамического экономического факторного анализа, можно получить два варианта разложения приращения полученной двухфакторной модели

$$\bar{y} = x_1 \cdot x_2 = x_1^1 \cdot x_2^1 + x_1^2 \cdot x_2^2$$

во времени или пространстве.

Так, применение метода простой группировки величин факторного влияния даёт следующий результат:

$$\begin{aligned} \Delta \bar{y} &= \Delta y^1 + \Delta y^2 = x_{2_{cp}}^1 \cdot \Delta x_1^1 + x_{1_{cp}}^1 \cdot \Delta x_2^1 + x_{2_{cp}}^2 \cdot \Delta x_1^2 + x_{1_{cp}}^2 \cdot \Delta x_2^2 = \\ &= \left[x_{2_{cp}}^1 \cdot \Delta x_1^1 + x_{2_{cp}}^2 \cdot \Delta x_1^2 \right] + \left[x_{1_{cp}}^1 \cdot \Delta x_2^1 + x_{1_{cp}}^2 \cdot \Delta x_2^2 \right] = \\ &= \left(x_{2_{cp}}^1 + x_{2_{cp}}^2 \right) \cdot \frac{x_{2_{cp}}^1 \cdot \Delta x_1^1 + x_{2_{cp}}^2 \cdot \Delta x_1^2}{x_{2_{cp}}^1 + x_{2_{cp}}^2} + \frac{x_{1_{cp}}^1 \cdot \Delta x_2^1 + x_{1_{cp}}^2 \cdot \Delta x_2^2}{\Delta x_2^1 + \Delta x_2^2} \cdot \left(\Delta x_2^1 + \Delta x_2^2 \right) = \\ &= x_{2_{cp}} \cdot \Delta x_{1(1)} + x_{1_{cp}(1)} \cdot \Delta x_2 = A_{x_{1(1)}} + A_{x_{2(1)}}. \end{aligned}$$

Таким образом, итоговые величины факторного влияния получены путём обычной алгебраической группировки соответствующих слагаемых из факторного разложения для каждого из результирующих показателей, участвующих в формировании структуры, и их последующего приведения к виду, соответствующему стандартному представлению приращения двухфакторной мультипликативной модели с использованием метода Лагранжа.

Для применения второго метода необходимо усреднить неаддитивный (качественный) фактор модели по аддитивному (количественному).

При этом, для рассматриваемой модели получаем:

$$\bar{y} = x_1 \cdot x_2 = x_1^1 \cdot x_2^1 + x_1^2 \cdot x_2^2 = \frac{x_1^1 \cdot x_2^1 + x_1^2 \cdot x_2^2}{x_2^1 + x_2^2} \cdot (x_2^1 + x_2^2).$$

В этом случае

$$\Delta x_{1(2)} = \frac{(x_1^1 + \Delta x_1^1) \cdot (x_2^1 + \Delta x_2^1) + (x_1^2 + \Delta x_1^2) \cdot (x_2^2 + \Delta x_2^2)}{(x_2^1 + \Delta x_2^1) + (x_2^2 + \Delta x_2^2)} - \frac{x_1^1 \cdot x_2^1 + x_1^2 \cdot x_2^2}{x_2^1 + x_2^2},$$

$$x_{1_{cp}}(2) = \frac{\left[\frac{(x_1^1 + \Delta x_1^1) \cdot (x_2^1 + \Delta x_2^1) + (x_1^2 + \Delta x_1^2) \cdot (x_2^2 + \Delta x_2^2)}{(x_2^1 + \Delta x_2^1) + (x_2^2 + \Delta x_2^2)} + \frac{x_1^1 \cdot x_2^1 + x_1^2 \cdot x_2^2}{x_2^1 + x_2^2} \right]}{2}.$$

Применяя теорему о промежуточном значении, приращение результирующего показателя можно записать в виде

$$\begin{aligned} \Delta \bar{y} &= \left(x_{2_{cp}}^1 + x_{2_{cp}}^2 \right) \cdot \Delta x_{1(2)} + x_{1_{cp}}(2) \cdot \left(\Delta x_2^1 + \Delta x_2^2 \right) = \\ &= x_{2_{cp}} \cdot \Delta x_{1(2)} + x_{1_{cp}}(2) \cdot \Delta x_2 = A_{x_{1(2)}} + A_{x_2(2)}. \end{aligned}$$

Из полученных выражений следует вывод, что метод простой группировки и метод усреднения в случае двухфакторной мультипликативной модели предлагают различные подходы для определения величины отклонения и среднего значения качественного (неаддитивного) фактора, то есть в общем случае

$$\Delta_D = \Delta x_{1(1)} - \Delta x_{1(2)} \neq 0,$$

$$\Delta_{cp} = x_{1_{cp}}(1) - x_{1_{cp}}(2) \neq 0.$$

Соответствующие разности равны

$$\begin{aligned} \Delta_D &= \frac{(x_2^1 \Delta x_2^2 - x_2^2 \Delta x_2^1) \cdot (x_1^1 - x_1^2)}{(x_2^1 + x_2^2) \cdot [(x_2^1 + \Delta x_2^1) + (x_2^2 + \Delta x_2^2)]} + \\ &+ \frac{(x_2^1 \Delta x_2^2 - x_2^2 \Delta x_2^1) \cdot (\Delta x_1^1 - \Delta x_1^2)}{[(2x_2^1 + \Delta x_2^1) + (2x_2^2 + \Delta x_2^2)] \cdot [(x_2^1 + \Delta x_2^1) + (x_2^2 + \Delta x_2^2)]}, \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{cp} &= -\frac{(x_2^1 \Delta x_2^2 - x_2^2 \Delta x_2^1) \cdot (x_1^1 - x_1^2)}{2 \cdot (x_2^1 + x_2^2) \cdot (\Delta x_2^1 + \Delta x_2^2)} - \\ &- \frac{(x_2^1 \Delta x_2^2 - x_2^2 \Delta x_2^1) \cdot [(x_1^1 + \Delta x_1^1) - (x_1^2 + \Delta x_1^2)]}{2 \cdot (\Delta x_2^1 + \Delta x_2^2) \cdot [(x_2^1 + \Delta x_2^1) + (x_2^2 + \Delta x_2^2)]}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Покажем на некоторых числовых примерах (табл. 2.6) различия в результатах динамического факторного анализа, получаемых при использовании методов группировки и усреднения.

Приведенные примеры подтверждаются расчётами с применением формул (2.30)-(2.31). При этом, верным остаётся равенство

$$\begin{aligned}\Delta \bar{y} &= A_{x_{1(1)}} + A_{x_{2(1)}} = x_{2_{cp}} \cdot \Delta x_{1(1)} + x_{1_{cp}(1)} \cdot \Delta x_2 = \\ &= x_{2_{cp}} \cdot \Delta x_{1(2)} + x_{1_{cp}(2)} \cdot \Delta x_2 = A_{x_{1(2)}} + A_{x_{2(2)}} = \Delta \bar{y}.\end{aligned}$$

Таблица 2.6

Сравнительный анализ методов динамического экономического факторного анализа

№	Исходные данные	$\Delta x_{1(1)}$	$\Delta x_{1(2)}$	$x_{1_{cp}(1)}$	$x_{1_{cp}(2)}$	Δ_D	Δ_{cp}
1.	$x_1^1 = 3; \Delta x_1^1 = 12;$ $x_2^1 = 2; \Delta x_2^1 = 4;$ $x_1^2 = 15; \Delta x_1^2 = 9;$ $x_2^2 = 6; \Delta x_2^2 = 3$	10,04	8,40	13,50	16,20	1,64	-2,70
2.	$x_1^1 = 3; \Delta x_1^1 = 12;$ $x_2^1 = 2; \Delta x_2^1 = 4;$ $x_1^2 = 5; \Delta x_1^2 = 7;$ $x_2^2 = 6; \Delta x_2^2 = 12$	8,25	8,25	8,63	8,63	0,00	0,00
3.	$x_1^1 = 3; \Delta x_1^1 = 12;$ $x_2^1 = 2; \Delta x_2^1 = 4;$ $x_1^2 = 15; \Delta x_1^2 = 45;$ $x_2^2 = 6; \Delta x_2^2 = 18$	38,05	39,00	32,32	31,50	-0,95	0,82
4.	$x_1^1 = 3; \Delta x_1^1 = -2;$ $x_2^1 = 2; \Delta x_2^1 = 1;$ $x_1^2 = 10; \Delta x_1^2 = -1;$ $x_2^2 = 3; \Delta x_2^2 = 12$	-1,22	0,47	8,92	7,43	-1,69	1,49

Кроме того, как следует из расчётов с использованием конкретных числовых исходных данных (табл. 2.7), метод простой группировки и метод усреднения действительно, в общем случае, дают различные результаты оценки величин факторного влияния. Однако возможно и совпадение результатов расчётов.

Так, из формул (2.30)-(2.31) получаем, что равенство

$$\Delta_D = \Delta_{cp} = 0$$

верно в двух случаях.

1. Если совпадают величины относительного прироста факторов x_2^1 и x_2^2 :

$$\frac{\Delta x_2^1}{x_2^1} = \frac{x_2^1 + \Delta x_2^1}{x_2^1} - 1 = I_{x_2^1} - 1 = \delta_{x_2^1} = \delta_{x_2^2} = I_{x_2^2} - 1 = \frac{x_2^2 + \Delta x_2^2}{x_2^2} - 1 = \frac{\Delta x_2^2}{x_2^2}.$$

2. Если совпадают начальные значения и приращения факторов x_1^1 и x_1^2 :

$$x_1^1 = x_1^2 \text{ и } \Delta x_1^1 = \Delta x_1^2.$$

Пример № 2 из табл. 2.7 соответствует первому из указанных случаев совпадения результатов анализа.

Таблица 2.7

Примеры динамического экономического факторного анализа

№	Исходные данные	$A_{x_1(1)}$	$A_{x_2(1)}$	$A_{x_1(2)}$	$A_{x_2(2)}$	$\Delta \bar{y}$
1.	$x_1^1 = 3; x_2^1 = 2; x_1^2 = 15; x_2^2 = 6;$ $\Delta x_1^1 = 12; \Delta x_2^1 = 4; \Delta x_1^2 = 9; \Delta x_2^2 = 3$	115,5	94,5	96,6	113,4	210
2.	$x_1^1 = 3; x_2^1 = 2; x_1^2 = 5; x_2^2 = 6;$ $\Delta x_1^1 = 12; \Delta x_2^1 = 4; \Delta x_1^2 = 7; \Delta x_2^2 = 12$	132	138	132	138	270
3.	$x_1^1 = 3; x_2^1 = 2; x_1^2 = 15; x_2^2 = 6;$ $\Delta x_1^1 = 12; \Delta x_2^1 = 4; \Delta x_1^2 = 45; \Delta x_2^2 = 18$	723	711	741	693	1434
4.	$x_1^1 = 3; x_2^1 = 2; x_1^2 = 10; x_2^2 = 3;$ $\Delta x_1^1 = -2; \Delta x_2^1 = 1; \Delta x_1^2 = -1; \Delta x_2^2 = 12$	-14	116	5,37	96,63	102

Как было указано выше, использование метода усреднения для динамического факторного анализа моделей более сложной структуры затруднено из-за неоднозначности выбора набора факторов при взвешивании неаддитивного (качественного) показателя. Для иллюстрации сказанного рассмотрим трёхфакторную мультипликативную модель вида

$$y = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = x_1^1 \cdot x_2^1 \cdot x_3^1 + x_1^2 \cdot x_2^2 \cdot x_3^2,$$

где y – выручка в рублях от реализации продукции;

x_1 – цена в евро за единицу продукции;

x_2 – валютный курс в рублях за один евро;

x_3 – объём реализуемой продукции.

В этом случае допустимы два различных варианта усреднения каждого из неаддитивных факторов по аддитивному и другому неаддитивному. Таким образом, исходная модель может быть представлена в виде

$$y = \frac{x_1^1 \cdot x_2^1 \cdot x_3^1 + x_1^2 \cdot x_2^2 \cdot x_3^2}{x_2^1 \cdot x_3^1 + x_2^2 \cdot x_3^2} \cdot \frac{x_2^1 \cdot x_3^1 + x_2^2 \cdot x_3^2}{x_3^1 + x_3^2} \cdot (x_3^1 + x_3^2) = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3,$$

или, при усреднении вторым способом,

$$y = \frac{x_1^1 \cdot x_3^1 + x_1^2 \cdot x_3^2}{x_3^1 + x_3^2} \cdot \frac{x_1^1 \cdot x_2^1 \cdot x_3^1 + x_1^2 \cdot x_2^2 \cdot x_3^2}{x_1^1 \cdot x_3^1 + x_1^2 \cdot x_3^2} \cdot (x_3^1 + x_3^2) = \tilde{x}_1 \cdot \tilde{x}_2 \cdot x_3.$$

В первом случае значение средневзвешенной цены в евро вычисляется делением суммарной рублёвой выручки на условную величину стоимости реализованной продукции в рублях в пересчёте на один евро по его курсу к национальной российской валюте. Средний курс евро рассчитывается при последующем делении указанной условной величины на общее количество проданного товара.

При использовании второго способа усреднения получаем, что значение средней цены в евро рассчитывается путём деления общей выручки от реализации в евро на совокупный объём продаж, а средний курс евро вычисляется делением суммарной выручки в рублях на аналогичный показатель в евро.

В силу того, что фактор объёма реализации является аддитивным, величина совокупного объёма продаж в обоих случаях рассчитывается как простая сумма объёмов реализации по всем элементам структуры.

Несмотря на то, что второй вариант усреднения является более естественным, оба способа допускают содержательную прикладную интерпретацию и могут быть использованы в зависимости от постановки конкрет-

ной задачи. Но данный пример приводит к выводу о неоднозначности результата динамического экономического факторного анализа в случае, если применяется способ усреднения неаддитивного показателя по аддитивному. Кроме того, ещё один недостаток данного метода наглядно проявился в примере № 4 (табл. 2.7). Он заключается в том, что при формальном усреднении происходит как бы игнорирование промежуточных данных о поведении факторов в динамике и в результате величина влияния первого фактора получилась положительной несмотря на то, что значение данного фактора на обоих элементах динамической структуры снижалось.

В отличие от метода усреднения метод простой группировки может использоваться для факторных систем любого типа без ограничений на число факторов в модели и, как показывает практика, является более предпочтительным в решении конкретных прикладных задач.

2.4. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ЛАГРАНЖА В СЛУЧАЕ КОНЕЧНЫХ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ ПРИРАЩЕНИЙ И ДЛЯ ИНДЕКСНЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ

2.4.1. ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ ОБ ИНДЕКСАХ

Термин «индекс» в переводе с латинского языка означает указатель или показатель. В статистической практике индексом чаще всего называют показатель относительного изменения данного уровня какого-либо явления по сравнению с другим его уровнем, принятым за базу сравнения [2, С. 8]. В качестве такой базы может быть взят уровень явления по другой территории (территориальный индекс), уровень явления за какой-то прошлый период времени (динамический индекс) или нормативный уровень (индекс выполнения плана, индекс выполнения норм).

Зарождение индексного метода в статистике обычно относят к 1738 г., когда французский экономист Дюто предложил вычислять обобщённый показатель изменения цен как отношение сумм цен p на отдельные виды товаров в отчётном периоде к сумме цен на те же товары в базисном периоде, т.е. по формуле

$$I_p = \frac{\sum p_1}{\sum p_0}.$$

Несколько более сложной формулой для той же цели пользовался итальянец Карли в 1764 г.:

$$I_p = \frac{\sum \frac{p_1}{p_0}}{n}.$$

Много лет спустя было замечено, что такой простой способ получения обобщённой оценки изменения уровня цен не учитывает того, что в каждом их сравниваемых периодов продаётся различное количество одноимённых товаров. Поэтому немецкие статистики Э. Ласпейрес и Г. Пааше предложили вычислять индексы цен в форме, ныне именуемой агрегатной. Предложенная Э. Ласпейресом форма индекса в современных обозначениях может быть представлена в виде

$$I_p = \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0},$$

где p – цена на отдельные виды товаров;

q – количество проданных товаров каждого вида.

Подстрочные индексы «1» и «0» в данном случае обозначают, что данные относятся соответственно к отчётному и базисному периодам.

Э. Ласпейрес впервые придал экономическое содержание своему индексу цен; вместо простого их суммирования он использовал подсчёт общей стоимости фактически проданных товаров по двум видам цен. Однако, если в знаменателе индекса Ласпейреса находится вполне реальная величина – фактическая стоимость товаров, проданных в базисном периоде, то в числителе – условная величина – стоимость количества товаров, фактически проданных в базисном периоде, но по ценам, действовавшим в отчётном периоде. В связи с этим, разность числителя и знаменателя индекса отражает не фактический выигрыш (потери) покупателей от изменения цен, а некоторый условный результат в предположении, что изменение цен не повлияло на объём проданных товаров каждого вида.

В 1874 г. Г. Пааше предложил иную форму агрегатного индекса цен, которая имеет следующий вид:

$$I_p = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1}.$$

В числителе и знаменателе такого индекса помещены выражения, также имеющие определённый экономический смысл. В отличие от индекса Ласпейреса индекс Пааше содержит фактическую стоимость объёма то-

варов в отчётном периоде (числитель) и условную его оценку в ценах базисного периода (знаменатель).

Нетрудно заметить, что в приведенных индексах реальный экономический смысл имеет и разность числителя и знаменателя – таким образом можно определить величину влияния изменения фактора цены на изменение стоимости продаж, а различия в подходе решения задачи факторного анализа в зависимости от использования определённого типа индекса интерпретируются аналогично ситуации с двумя возможными разложениями приращения результирующего показателя при использовании метода цепных подстановок.

Очевидно, что результаты расчёта индексов по формулам Ласпейреса и Пааше по одинаковым исходным данным будут различными. По этой причине, история развития индексной теории развивалась в направлении поиска наилучшего метода построения показателя, характеризующего изменение исследуемых величин, то есть по пути «синтетической» трактовки содержания индекса [2]. Следует отметить, что проблема выбора формы индекса имеет важное практическое значение и может быть решена только в том случае, если формальные математические выражения будут подкреплены анализом конкретного содержания задачи и чёткой формулировкой целей, стоящих перед исследователем.

Наряду с «синтетическим» направлением теории индексов развивался и иной, так называемый «аналитический» подход к проблемам построения и выбора форм индексов, зарождение которого можно видеть в работе [31]. Сущность аналитической концепции индексов может быть кратко сведена к тому, что основным их назначением является не получение обобщающей характеристики изменения сложного явления, а измерение влияния изменения его составных частей, компонентов, факторов на изменение уровня этого явления.

Таким образом, аналитическое направление теории индексов фактически направлено на решение основной задачи экономического факторного анализа. Расширение задачи факторного анализа в данном случае требует учёта того, что изучение процесса изменения результирующего показателя может производиться в двух аспектах: можно рассматривать величину абсолютного изменения значений, но можно изучать и индекс (относительное изменение) факторов и обобщающего показателя.

При этом, поскольку вследствие причинно-следственной связи уровень (индекс) результирующего показателя определяется индексами формирующих его причин (факторов), то можно поставить задачу выработки

некоторого единого подхода к определению величин влияния изменения факторов для случаев относительного и абсолютного изменения показателя. Во всяком случае нет оснований априори утверждать, что подход к методологии и методика экономического факторного анализа должны зависеть от формы, способа выражения взаимосвязи результирующего показателя с факторами, что подводит к необходимости поиска универсальной, приемлемой для различных постановок задач методологии анализа, основой которой, например, может быть описанный ранее метод Лагранжа.

2.4.2. ФОРМУЛА КОНЕЧНЫХ ПРИРАЩЕНИЙ В ОТНОСИТЕЛЬНОМ И ИНДЕКСНОМ ЭКОНОМИЧЕСКОМ ФАКТОРНОМ АНАЛИЗЕ

Итак, экономические или технологические показатели можно, с известной долей условности, разделить на абсолютные и относительные. Первые относятся к категории объёмных, так как при их вычислении используется непосредственная оценка. Вторые, относительные, показатели относятся к типу удельных и представляют собой отношения абсолютных (или других относительных) показателей, то есть количество единиц одного показателя на одну единицу другого. Относительными показателями являются не только соотношения разных показателей в один и тот же момент времени, но и одного и того же, но в разные моменты; это темпы роста (индексы) данного показателя. В экономическом анализе и принятии решений, как уже было сказано, в одних случаях важны абсолютные показатели (например, общий объём прибыли или суммарный объём производства), в других – относительные (например, доход на душу населения или удельные показатели энергоёмкости).

Как было указано ранее, основная задача (абсолютного) экономического факторного анализа заключается в получении факторного разложения приращения результирующего показателя в виде некоторой его зависимости от абсолютных приращений факторов модели.

По аналогии, основная цель относительного экономического факторного анализа может быть сформулирована как задача нахождения факторного разложения в терминах относительных приращений, которые, в свою очередь, могут определяться по-разному [2, 46].

Придерживаясь концепции единой методологии факторного анализа для различных видов представления изменений показателей, применим ранее изложенный метод Лагранжа, опирающийся на теорему о промежу-

точном значении для случая анализа относительного изменения факторов и обобщающего показателя.

В качестве примера для иллюстрации применения теоремы о промежуточном значении в относительном экономическом факторном анализе рассмотрим такой часто используемый на практике показатель как коэффициент эластичности [70, 88], который показывает относительное изменение исследуемого показателя под действием некоторого единичного относительного изменения фактора, от которого он зависит, при неизменных остальных влияющих на него факторах.

Так, например, величина эластичности покупательского спроса на продукцию по её цене вычисляется по формуле

$$E_p(q) = \frac{\left(\frac{\Delta q}{q} \right)}{\left(\frac{\Delta p}{p} \right)},$$

где q – фактор объёма (оценка спроса);

p – фактор цены.

Эластичность в этом случае показывает относительное изменение (выраженное в процентах) величины спроса на какое-либо благо (товар, услугу) при изменении цены этого блага на один процент и характеризующая чувствительность потребителей к изменению цен на продукцию.

В общем случае, предельной (точечной) эластичностью функции $y = f(x)$ называется предел отношения относительных изменений показателя y и переменной (фактора) x [46]. Обозначив эластичность изменения функции y при изменении фактора x через $E_x(y)$, получаем

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta y}{y} / \frac{\Delta x}{x} \right] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x}{y} \right] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x}{y}.$$

Используя определение производной, выражение для эластичности может быть преобразовано к виду

$$E_x(y) = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y} = f'(x) \cdot \frac{x}{y} = \frac{f'(x)}{\frac{y}{x}} = \frac{f'(x)}{\frac{f(x)}{x}}.$$

Однако (см., например, [30, 33, 92]), при вычислении относительной величины прироста показателя, зависящего от некоторого набора факторов, абсолютные приращения факторов и показателя, как правило, относят к их начальным, базовым значениям.

При этом, исходя из предположения о малости приращений факторов, справедливо лишь приближённое равенство

$$E_{x_i}(y) = \left[\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \right] / \left[\frac{f(x)}{x_i} \right] \approx \left[\frac{\Delta f(x)}{f(x)} \right] / \left[\frac{\Delta x_i}{x_i} \right].$$

Соответственно, относительное изменение показателя в этом случае приближённо равно

$$\delta y = \frac{\Delta y}{y} \approx \sum_{i=1}^n f'_i(x) \cdot \left(\frac{x_i}{f(x)} \right) \cdot \frac{\Delta x_i}{x_i} = \sum_{i=1}^n f_i^{<e>}(x) \cdot \delta x_i, \quad (2.32)$$

где для любого значения x через

$$f_i^{<e>}(x) = E_{x_i}(y) = \frac{f'_i(x) \cdot x_i}{f(x)}$$

обозначены частные эластичности функции f при изменении i -го фактора модели [27].

И действительно, в указанных источниках речь идёт, как правило, о приближённом анализе в предположении о предельной малости изменений факторов, что не противоречит определению предельной эластичности, но может не соответствовать реальным ситуациям, возникающим в процессе хозяйственной деятельности, когда приращения факторов не малы, но конечны.

В этом случае, точное разложение относительного приращения показателя можно найти с использованием теоремы о промежуточном значении. Отнесение абсолютных приращений факторов и результирующего показателя к их значениям $x_{mi} \in (x_i; x_i + \Delta x_i)$ и $y_m = f(x_m)$ в промежуточной точке позволяет записать точное разложение

$$\begin{aligned} \delta y = \frac{\Delta y}{y} &= \sum_{k=1}^n f'_k(x_m) \cdot \left(\frac{x_{mk}}{f(x_m)} \right) \cdot \frac{f(x_m)}{f(x)} \cdot \frac{\Delta x_k}{x_{mk}} = \\ &= \sum_{k=1}^n f_k^{<e>}(x_m) \cdot i_m f \cdot \delta_m x_k, \end{aligned} \quad (2.33)$$

где величина $i_m f = \frac{y_m}{y} = \frac{f(x_m)}{f(x)}$ обозначает модифицированный индекс, который описывает темп роста значения показателя при сравнении его значений в базовом периоде и в промежуточной точке x_m , в которой достигается точное разложение приращения обобщающего показателя.

Формула (2.33) может трактоваться как «формула конечных относительных приращений для эластичностей».

Применяя полученный результат, выражение для эластичности результирующего показателя можно представить в виде

$$E_x(y) = \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i^{<e>}(x_m) \cdot i_f^m \cdot \delta_m x_i}{\delta x} = \sum_{i=1}^n f_i^{<e>}(x_m) \cdot i_f^m \cdot \frac{\delta_m x_i}{\delta x} . \quad (2.34)$$

Исходя из предположения, что абсолютный и относительный экономические факторные анализы содержательно различаются только тем, какая используется характеристика измерения величины отклонения между плановым и фактическим значениями, рассмотрим далее применение теоремы Лагранжа как основного методологического подхода и для случая индексного экономического факторного анализа.

В качестве базовой модели для приложения теоремы о среднем значении для случая индексных показателей рассмотрим производственную функцию [53, 94, 95], которая математически может быть представлена в виде факторной системы

$$y = f(x, a) ,$$

где f – ожидаемый производственный результат;

x – вектор ресурсов;

a – вектор структурных параметров производственной функции.

Производственная функция выражает технологическую связь между выпуском продукции и ресурсами (затратами) [49, 134], то есть она представляет собой отображение, ставящее в соответствие любому вектору затрат единственное неотрицательное действительное число, а именно – величину максимального выпуска продукции, которая может быть достигнута при использовании данного вектора ресурсов.

Оценки параметров производственных функций рассчитывают на основе статистической информации. Эта информация представляет собой результаты единовременного наблюдения за множеством однородных объектов или результаты наблюдения за одним и тем же объектом в разные периоды времени.

Производственные функции чаще всего строят на базе степенных многофакторных зависимостей, то есть зависимостей вида:

$$y = a \cdot \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i} = a \cdot x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot x_m^{\alpha_m} , \alpha_i < 1 \quad \forall i. \quad (2.35)$$

Функции такого вида называются степенными производственными функциями.

Степенную производственную функцию часто представляют в более удобном логарифмическом виде

$$\ln y = \ln a + \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \ln x_i ,$$

эквивалентном (2.35) при $x_i > 0, i = 1, \dots, n$. То есть операция логарифмирования позволяет осуществить переход от мультипликативной производственной функции к аддитивной.

В настоящее время степенные производственные функции используются для моделирования широкого класса экономических систем.

На практике для определения объёмов производства при различной комбинации факторов часто используют производственную функцию Кобба-Дугласа [30, 38, 135], предложенную К.У. Коббом и П.Х. Дугласом для описания связи между объемом общественного продукта и двумя важнейшими ресурсами – трудовыми ресурсами и основными производственными фондами:

$$y = a \cdot \prod_{i=1}^2 x_i^{\alpha_i} = a \cdot x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} = a \cdot L^{\alpha_1} \cdot C^{\alpha_2} ,$$

где L – фактор труда;

C – объём производственных фондов;

a – параметр степенной функции (фактор шкалы), определяемый на основе статистических данных;

α_i – эластичность выпуска продукции по отношению к i -му виду ресурсов (затрат) (на сколько процентов изменится выпуск при изменении расхода ресурса на единицу).

В более общем случае функцией Кобба-Дугласа называют типовую степенную производственную функцию (2.35).

При естественном предположении о положительности экономических величин выполним в производственной функции

$$y = F(x)$$

замену переменных

$$\xi_i = \ln x_i, \eta = \ln y, x_i = \exp \xi_i, y = \exp \eta,$$

так что функция преобразуется к виду

$$\eta = \ln y = \ln F(\exp \xi_1, \dots, \exp \xi_n) = \Phi(\xi_1, \dots, \xi_n) = \Phi(\xi) .$$

Очевидна связь между индексами фактора x , показателя y и абсолютными приращениями величин ξ и η :

$$\ln ix = \ln \frac{x + \Delta x}{x} = \ln(x + \Delta x) - \ln x = \Delta \xi ,$$

$$\ln iy = \ln \frac{F(x + \Delta x)}{F(x)} = \ln F(x + \Delta x) - \ln F(x) = \Delta \Phi(\xi) = \Delta \eta .$$

Применение теоремы Лагранжа для разложения приращения показателя η даёт точное факторное разложение

$$\Delta \eta = \sum_{i=1}^n \Phi'_i(\xi_m) \cdot \Delta \xi_i .$$

Возврат к исходным величинам приводит к соотношению

$$iy = \exp \Delta \eta = \exp \left(\sum_{i=1}^n \Phi'_i(\xi_m) \cdot \Delta \xi_i \right) =$$

$$= \prod_{i=1}^n (\exp \Delta \xi_i)^{\Phi'_i(\xi_m)} = \prod_{i=1}^n (ix_i)^{F_i^{<e>}(x_m)} , \quad (2.36)$$

где частные эластичности

$$F_i^{<e>}(x) = \frac{\partial \ln F(x)}{\partial \ln(x_i)} = \frac{F'_i(x) \cdot x_i}{F(x)}$$

совпадают с частными производными

$$\Phi'_i(\xi) = \frac{\partial \Phi(\xi)}{\partial \xi_i} .$$

Полученная формула (2.36) может трактоваться как «теорема Лагранжа для эластичностей и индексов» [25].

Для двухфакторной мультипликативной модели – производственной функции Кобба-Дугласа частные эластичности постоянны и совпадают с параметрами α_i , так что следствием (2.36) является очевидное соотношение:

$$iy = iL^{\alpha_1} \cdot iC^{\alpha_2} ,$$

или, в более общем виде, индекс степенной производственной функции вычисляется по формуле

$$iy = \prod_{i=1}^n (ix_i)^{\alpha_i} .$$

Таким образом, применение теоремы о промежуточном значении позволило найти точные выражения для представления зависимости относительного изменения (индекса) результирующего показателя от относительных приращений (индексов) факторов модели (производственной функции).

2.4.3. ИНДЕКСЫ ДИВИЗИА В ЭКОНОМИЧЕСКОМ ФАКТОРНОМ АНАЛИЗЕ

В экономическом анализе одним из базовых инструментов является вычислительный аппарат теории индексов, что объясняет интерес специалистов к его приложениям (в том числе, в экономическом факторном анализе).

В преподавании экономического факторного, в том числе индексного, анализа [2, 7], объединяющего разнообразные методы исследования количественного влияния изменений факторов на изменение результирующего показателя, также представляется целесообразным уделить внимание индексам Дивизиа и тесно связанным с ними индексам Монтгомери, Фогта и др., детально обсуждаемым в специальной литературе [44, 45, 52], где подчёркиваются их серьезные методические достоинства: они обладают рядом полезных и естественных свойств, в частности удовлетворяют критериям транзитивности и агрегирования, дают один из возможных и эффективных путей сближения алгоритмического, статистического, экономического и аксиоматического подходов к конструированию индексов.

В то же время отмечается, что вычислительные трудности создают серьёзные препятствия для практического применения индексов Дивизиа, так как их вычисление, в соответствии с исходным определением, путём непосредственного интегрирования является очень трудоёмкой процедурой; поэтому значение хорошей аппроксимационной формулы, поиск «заместителей» индексов Дивизиа, невозможно переоценить. Эти же проблемы заслуживают внимания и в плане преподавания данного материала [17, 105].

Истоки указанных трудностей коренятся в определяющей идее непрерывного взвешивания, в соответствии с которой индексы Дивизиа вводятся в контексте интегрального метода экономического факторного анализа, опирающегося для произвольной функции нескольких переменных

$$f = f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

на точное представление её приращения $\Delta f = f(x^1) - f(x^0)$, при пути интегрирования $x = x(t)$, $0 \leq t \leq 1$, в следующем виде:

$$\Delta f = \sum_{i=1}^m \int_0^1 \frac{\partial f(x(t))}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i(t)}{dt} dt. \quad (2.37)$$

При этом, если

$$v = \sum_{i=1}^m v_i, v_i = q_i \cdot p_i, \Delta v = v^1 - v^0,$$

то

$$\Delta v = \sum_{i=1}^m \int_0^1 p_i(t) \cdot \frac{dq_i(t)}{dt} dt + \sum_{i=1}^m \int_0^1 q_i(t) \cdot \frac{dp_i(t)}{dt} dt. \quad (2.38)$$

Для введения индексов Дивизиа, в соответствии с логарифмическим методом экономического факторного анализа, рассматривается функция $f = \ln(v)$ и её приращение в двух представлениях

$$\Delta f = \ln(v^1) - \ln(v^0) = \ln\left(\frac{v^1}{v^0}\right);$$

тогда точные индексы Дивизиа D_q, D_p определяются на основе формулы

$$\begin{aligned} \Delta f = \ln(v^1) - \ln(v^0) &= \sum_{i=1}^m \int_0^1 \frac{p_i(t)}{v(t)} \cdot \frac{dq_i(t)}{dt} dt + \sum_{i=1}^m \int_0^1 \frac{q_i(t)}{v(t)} \cdot \frac{dp_i(t)}{dt} dt = \\ &= \ln\left\{ \exp \int_0^1 [v(t)]^{-1} \cdot \sum_{i=1}^m p_i(t) \cdot \frac{dq_i(t)}{dt} dt \right\} + \ln\left\{ \exp \int_0^1 [v(t)]^{-1} \cdot \sum_{i=1}^m q_i(t) \cdot \frac{dp_i(t)}{dt} dt \right\} = \\ &= \ln D_q + \ln D_p, \end{aligned}$$

а приближённые \tilde{D}_q, \tilde{D}_p – на основе формулы

$$\begin{aligned} \Delta f = \ln\left(\frac{v^1}{v^0}\right) &= \ln\left(\frac{v^0 + (v^1 - v^0)}{v^0}\right) = \ln\left(1 + \frac{v^1 - v^0}{v^0}\right) \approx \frac{v^1 - v^0}{v^0} = \frac{\Delta v}{v^0} = \\ &= \ln\left\{ \exp \sum_{i=1}^m \int_0^1 \frac{p_i(t)}{v^0} \cdot \frac{dq_i(t)}{dt} dt \right\} + \ln\left\{ \exp \sum_{i=1}^m \int_0^1 \frac{q_i(t)}{v^0} \cdot \frac{dp_i(t)}{dt} dt \right\} = \\ &= \ln \tilde{D}_q + \ln \tilde{D}_p. \end{aligned}$$

В случае линейного пути интегрирования

$$\begin{aligned} q_i(t) &= q_i^0 + t(q_i^1 - q_i^0), p_i(t) = p_i^0 + t(p_i^1 - p_i^0), 0 \leq t \leq 1; \\ \int_0^1 \frac{p_i(t)}{v^0} \cdot \frac{dq_i(t)}{dt} dt &= \int_0^1 [p_i^0 + t(p_i^1 - p_i^0)] \cdot \frac{q_i^1 - q_i^0}{v^0} dt = \\ &= \frac{q_i^1 - q_i^0}{v^0} \cdot \left(p_i^0 \cdot t \Big|_0^1 + (p_i^1 - p_i^0) \cdot \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 \right) = \frac{q_i^1 - q_i^0}{v^0} \cdot \frac{p_i^0 + p_i^1}{2}, \end{aligned}$$

индексы

$$\tilde{D}_q^L = \exp \sum_{i=1}^m \frac{q_i^1 - q_i^0}{v^0} \cdot \frac{p_i^0 + p_i^1}{2}, \quad \tilde{D}_p^L = \exp \sum_{i=1}^m \frac{p_i^1 - p_i^0}{v^0} \cdot \frac{q_i^0 + q_i^1}{2}.$$

А в случае экспоненциального пути интегрирования

$$\begin{aligned} q_i(t) &= q_i^0 \cdot \exp\left(t \cdot \frac{q_i^1}{q_i^0}\right), \quad p_i(t) = p_i^0 \cdot \exp\left(t \cdot \frac{p_i^1}{p_i^0}\right), \quad 0 \leq t \leq 1; \\ \int_0^1 \frac{p_i(t)}{v^0} \cdot \frac{dq_i(t)}{dt} dt &= \int_0^1 \frac{1}{v^0} \cdot p_i^0 \cdot \exp\left(t \cdot \frac{p_i^1}{p_i^0}\right) \cdot q_i^0 \cdot \exp\left(t \cdot \frac{q_i^1}{q_i^0}\right) \cdot \ln \frac{q_i^1}{q_i^0} dt = \\ &= \frac{v_i^0}{v^0} \cdot \ln \frac{q_i^1}{q_i^0} \cdot \int_0^1 \exp\left(t \cdot \frac{v_i^1}{v_i^0}\right) dt = \frac{v_i^0}{v^0} \cdot \ln \frac{q_i^1}{q_i^0} \cdot \frac{\exp\left(t \cdot \ln \frac{v_i^1}{v_i^0}\right) \Big|_0^1}{\ln \frac{v_i^1}{v_i^0}} = \frac{v_i^0}{v^0} \cdot \ln \frac{q_i^1}{q_i^0} \cdot \frac{\frac{v_i^1}{v_i^0} - 1}{\ln \frac{v_i^1}{v_i^0}} = \\ &= \frac{v_i^1 - v_i^0}{v^0} \cdot \ln \frac{q_i^1}{q_i^0} : \ln \frac{v_i^1}{v_i^0}; \end{aligned}$$

для вычисления индексов получаем выражения:

$$\tilde{D}_q^E = \exp \sum_{i=1}^m \frac{v_i^1 - v_i^0}{v^0} \cdot \ln \frac{q_i^1}{q_i^0} : \ln \frac{v_i^1}{v_i^0}, \quad \tilde{D}_p^E = \exp \sum_{i=1}^m \frac{v_i^1 - v_i^0}{v^0} \cdot \ln \frac{p_i^1}{p_i^0} : \ln \frac{v_i^1}{v_i^0}.$$

Как с методической, так и с практической точки зрения ценность исходно используемого точного представления (2.37) в значительной степени теряется при переходе к приближённым индексам Дивизиа, хотя и более простым для вычисления, но связанным с приближённым равенством

$$\ln\left(1 + \frac{v^1 - v^0}{v^0}\right) \approx \frac{v^1 - v^0}{v^0},$$

справедливость которого к тому же не соответствует современным экономическим условиям, когда приращения факторов и показателей зачастую не являются малыми.

Использование в экономическом факторном анализе формулы конечных приращений Лагранжа даёт вместо (2.37) представление, тоже точное и не предполагающее малости приращений участвующих в нём величин, чем снимается последнее замечание:

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x_1^0 + \alpha \Delta x_1, \dots, x_i^0 + \alpha \Delta x_i, \dots, x_m^0 + \alpha \Delta x_m)}{\partial x_i} \cdot \Delta x_i, \quad (2.39)$$

где параметр $0 < \alpha < 1$, несмотря на неконструктивный характер теоремы Лагранжа в общем случае, допускает эффективное вычисление для специальных структур функций. Так, для функции v указанного выше вида $\alpha = 0,5$, что приводит к имеющему экономический смысл точному и не связанному с реальными величинами приращений (независимо от того, малы они или нет) представлению

$$\frac{\Delta v}{v^0} = \sum_{i=1}^m \frac{q_i^1 - q_i^0}{v^0} \cdot \frac{p_i^0 + p_i^1}{2} + \sum_{i=1}^m \frac{p_i^1 - p_i^0}{v^0} \cdot \frac{q_i^0 + q_i^1}{2},$$

которое хотя и может быть получено с использованием $\tilde{D}_q^L, \tilde{D}_p^L$, но предложенный здесь его вывод существенно проще.

Кроме того, для функции $f = \ln(v)$ из уравнения

$$\Delta f = \ln\left(\frac{v^0 + \Delta v}{v^0}\right) = \ln(v^0 + \alpha \cdot \Delta v) \cdot \Delta v$$

нетрудно найти

$$\alpha_{\ln} = \frac{\Delta v \sqrt{\frac{v^0 + \Delta v}{v^0}} - v^0}{\Delta v},$$

что даёт точное и не связанное с реальными величинами приращений (независимого то того, малы они или нет) представление

$$\Delta f = \ln(v^0 + \alpha_{\ln} \cdot \Delta v) \cdot \Delta v,$$

впрочем, совпадающее с

$$\Delta f = \ln(v^0 + \Delta v) - \ln(v^0).$$

Таким образом, вышеприведённые расчёты позволяют проследить эволюцию методов Дивизиа и показать пользователю данного аппарата выкладки для расчёта основных показателей исследованного подхода к оценке хозяйственной деятельности.

Также представляется полезным при изложении данного материала подчеркнуть взаимосвязи между различными системами индексов. Точные индексы Дивизиа, полученные при линейном пути интегрирования и совпадающие при этом с натуральными индексами Фогта, определяются сложными, не имеющими ясной интерпретации формулами; для экспоненциального пути ситуация оказывается ещё менее приемлемой.

С другой стороны, индексы Монтгомери представляют собой скорректированные приближённые индексы Дивизиа, порождаемые экспонен-

циальным путём и факторным разложением (2.38). Наконец, точные индексы Дивизиа, порождаемые степенным путём, совпадают с приближёнными индексами Монтгомери. В этом случае, имея аксиоматическое обоснование и представляя собой точные индексы Дивизиа для степенного пути, индексы Монтгомери оправдывают использование близких к ним по значениям других, возможно более просто вычисляемых и эвристически вводимых индексов.

2.5. ОЦЕНКИ ВЫПУКЛЫХ КОМБИНАЦИЙ В ЭКОНОМИЧЕСКОМ АНАЛИЗЕ

2.5.1. НЕРАВЕНСТВА НА ВЫПУКЛЫХ КОМБИНАЦИЯХ

В данном разделе рассматривается постановка и решение производственной задачи, лежащей в плоскости математического подхода к анализу специфических числовых комбинаций, допускающих экономическую интерпретацию.

Общеизвестным и тривиальным является тот факт, что, пользуясь стандартными математическими инструментами можно решать многочисленные прикладные задачи из различных областей человеческой деятельности. В этом разделе монографии приводится задача, которая в контексте этого высказывания не является исключением, а её прикладная интерпретация представляет интерес как с позиций результативного использования несложного математического аппарата, так и значимости полученных результатов для специалиста в области экономического анализа и для лица, принимающего управленческие решения.

Рассмотрим задачу на примере уже знакомой нам двухфакторной мультипликативной модели, например,

$$\text{выручка} = \text{цена} \times \text{объём} \quad \text{или} \quad v = p \times q.$$

Пусть анализируются два ряда данных, содержащих информацию по двум видам продукции или для двух отчётных периодов. То есть мы располагаем двойным набором значений цены и объёмов продаж продукции. Предполагаем, что производится некоторая обработка исходной информации, а именно: формируется новое множество, состоящее из показателей относительного отклонения значения цены для второго набора данных от соответствующего значения в первом наборе. Таким образом, получаем

ряд относительных величин локальных отклонений по ценам для двух исходных наборов данных.

Далее производим расчёт значения средней цены для каждого из наборов, усредняя цены по суммарному объёму продаж при известной валовой выручке. После этого находим относительное отклонение вычисленных глобальных значений средних цен.

В рамках работы экономических подразделений предприятия вполне обоснованной является формулировка задачи о том, может ли при заданных условиях значение глобального относительного отклонения для средних цен лежать в границах интервала между минимальным и максимальным значением из сформированной последовательности локальных относительных отклонений первичных (неусреднённых) цен.

Данная постановка проблемы не предполагает использование сложного математического аппарата, но представляет собой пример результативного применения классического математического подхода для решения тривиальной по постановке, но оригинальной по содержанию задачи.

2.5.2. ПОСТАНОВКА И ФОРМАЛИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ

Опираясь на вышеизложенную постановку задачи, можно предложить её аналитическое описание. В этом случае, исходными данными для анализа являются два набора чисел

$$\{ p'_i \geq 0; 0 \leq \alpha'_i \leq 1, \sum_i \alpha'_i = 1 \} \quad \text{и} \quad \{ p''_i \geq 0; 0 \leq \alpha''_i \leq 1, \sum_i \alpha''_i = 1 \},$$

где p'_i и p''_i – значения цен в первом и втором ряду данных соответственно; α'_i и α''_i – весовые коэффициенты, равные отношению частного i -го объёма к итоговому значению в соответствующем ряду данных, равному в свою очередь сумме всех величин объёмов продаж продукции из этого набора.

То есть, если

$$Q' = \sum_i q'_i, \quad Q'' = \sum_i q''_i,$$

то можно записать выражения для весовых коэффициентов в виде

$$\alpha'_i = \frac{q'_i}{Q'}, \quad \alpha''_i = \frac{q''_i}{Q''}.$$

Далее, рассматриваются выпуклые комбинации вида

$$p' = \sum_i \alpha'_i \cdot p'_i \quad \text{и} \quad p'' = \sum_i \alpha''_i \cdot p''_i,$$

выражающие значения средних цен первого и второго ряда соответственно; кроме того, для полноты описания задачи определим разности цен и их относительные отклонения как

$$r_i = p'_i - p''_i \quad \text{и} \quad r = p' - p'',$$

$$S_i = \frac{p'_i - p''_i}{p'_i} = \frac{r_i}{p'_i} \quad \text{и} \quad S = \frac{p' - p''}{p'} = \frac{r}{p'}.$$

Эти величины представляют собой абсолютные (r_i , r) и относительные (S_i , S) разности, вычисленные для значений исходных (локальных) и средних (глобальных) цен соответственно.

2.5.3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Введём обозначения для границ интервала, для которого производится оценка.

Пусть

$$S_j = \min_i S_i, \quad S_k = \max_i S_i.$$

Ожидаемое неравенство

$$S_j \leq S \leq S_k,$$

как показывают расчёты на конкретных числовых примерах [19] в общем случае неверно. То есть отклонение усреднённых цен не ограничивается рамками минимального и максимального значений отклонений локальных (частных) цен.

В то же время, путём несложных алгебраических преобразований можно получить модифицированный интервал, в который заведомо попадает требуемое глобальное отклонение

$$\underline{S}_j \leq S \leq \underline{S}_k, \quad (*)$$

$$\underline{S}_j = S_j + (S_j - 1) \cdot \left(\frac{\tilde{p}}{p'} - 1 \right),$$

$$\underline{S}_k = S_k + (S_k - 1) \cdot \left(\frac{\tilde{p}}{p'} - 1 \right),$$

где $\tilde{p} = \sum_i \alpha''_i \cdot p'_i$.

Кроме того, можно получить всегда справедливое неравенство с заданными границами, но для модифицированной величины:

$$S_j \leq \tilde{S} \leq S_k, \quad (**)$$

$$\tilde{S} = \frac{\tilde{r}}{\tilde{p}}, \quad \tilde{r} = \tilde{p} - p''.$$

Полученные формулы выводятся следующим образом:

$$1) \quad p'_i - p''_i = p'_i \cdot S_i \Rightarrow -p''_i = p'_i \cdot (S_i - 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = 1 + \frac{-p''}{p'} = 1 + \frac{\left(\sum_i (S_i - 1) \cdot \alpha''_i \cdot p'_i \right)}{p'};$$

$$2) \quad S_j \leq S_i \leq S_k \Rightarrow S_j - 1 \leq S_i - 1 \leq S_k - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + (S_j - 1) \cdot \frac{\sum_i \alpha''_i \cdot p'_i}{p'} \leq S \leq 1 + (S_k - 1) \cdot \frac{\sum_i \alpha''_i \cdot p'_i}{p'};$$

$$3) \quad 1 + (S_j - 1) \cdot \frac{\tilde{p}}{p'} = S_j + (1 - S_j) + (S_j - 1) \cdot \frac{\tilde{p}}{p'} = S_j + (S_j - 1) \cdot \left(\frac{\tilde{p}}{p'} - 1 \right) = \underline{S}_j$$

$$\text{и } 1 + (S_k - 1) \cdot \frac{\tilde{p}}{p'} = S_k + (1 - S_k) + (S_k - 1) \cdot \frac{\tilde{p}}{p'} = S_k + (S_k - 1) \cdot \left(\frac{\tilde{p}}{p'} - 1 \right) = \underline{S}_k,$$

откуда очевидно следует верность неравенства (*).

$$4) \quad p' - p'' = p' \cdot S \Rightarrow -p'' = p' \cdot (S - 1) \text{ и } 1 + (S_j - 1) \cdot \frac{\tilde{p}}{p'} \leq S \leq 1 + (S_k - 1) \cdot \frac{\tilde{p}}{p'} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (S_j - 1) \cdot \frac{\tilde{p}}{p'} \leq S - 1 \leq (S_k - 1) \cdot \frac{\tilde{p}}{p'} \Rightarrow S_j - 1 \leq (S - 1) \cdot \frac{p'}{\tilde{p}} \leq S_k - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_j \leq 1 - \frac{p''}{\tilde{p}} \leq S_k \Rightarrow S_j \leq \frac{\tilde{p} - p''}{\tilde{p}} \leq S_k,$$

что доказывает справедливость неравенства (**).

Для более наглядной демонстрации полученных результатов приведём два показательных примера.

Пример 1.

№	Набор № 1		Набор № 2		S_i
	p'_i	α'_i	p''_i	α''_i	
1	8,73	0,173	8,09	0,041	0,073
2	1,88	0,016	4,24	0,024	-1,255
3	33,01	0,031	61,54	0,013	-0,864
4	16,57	0,548	14,39	0,433	0,132
5	20,99	0,232	19,79	0,490	0,057

Получаем

$$S = \frac{p' - p''}{p'} = \frac{16,51 - 17,16}{16,51} = -0,039; S_i = -1,255; S_k = 0,132.$$

Таким образом, по данным примера глобальное отклонение лежит в рамках установленного интервала $S \in [S_i; S_k]$.

Пример 2.

№	Набор № 1		Набор № 2		S_i
	p'_i	α'_i	p''_i	α''_i	
1	8,73	0,178	8,09	0,029	0,073
2	67,60	0,016	61,54	0,009	0,090
3	16,57	0,564	14,39	0,306	0,132
4	20,99	0,238	19,79	0,346	0,057
5	65,96	0,005	19,19	0,311	0,709

Соответственно

$$S = \frac{p' - p''}{p'} = \frac{17,31 - 18,01}{17,31} = -0,040; S_i = 0,057; S_k = 0,709.$$

То есть, глобальное отклонение по средним ценам S не принадлежит интервалу $[S_i; S_k]$. Но при этом S лежит в границах модифицированного интервала $[\underline{S}_j; \underline{S}_k]$, так как $\underline{S}_j = -0,84; \underline{S}_k = 0,43$. А первоначальный интервал содержит модифицированное значение относительного отклонения $\tilde{S} = 0,47$.

Анализируя представленные во втором примере данные, можно дать некоторую экономическую интерпретацию полученному результату. Дело в том, что, действительно, цены первого ряда превосходят соответствующие значения второго, однако средняя цена по первому набору меньше ($p' < p''$) по причине меньшего удельного веса в общем объеме продаж

самой дорогой продукции, то есть в первом случае в большей степени шла реализация ассортимента с низкой ценой.

Следует отметить, что результаты полученных оценок границ неравенств для выпуклых комбинаций могут применяться в практике работы экономических подразделений предприятий. В частности, решение может быть использовано в качестве основы для более глубокого структурного анализа модели с целью выявления тех или иных причин, определивших величину средней цены и её расположение относительно ожидаемых границ интервала.

2.6. ВЫВОДЫ

Основная цель применения экономического факторного анализа заключается в вычислении влияния изменения факторов, определяющих поведение системы, на изменение результирующего показателя.

Актуальность исследований в данной области подтверждается тем, что в раздел «Анализ финансово-хозяйственной деятельности» Программы подготовки и аттестации профессиональных бухгалтеров, утверждённой решением Президентского совета ИПБ России (Протокол №09/-02 от 25.09.2002), включена тема «Методы и типовые методики анализа финансово-хозяйственной деятельности», в которой предусмотрено, в том числе, и изучение методов факторного анализа изменения экономических показателей.

Для решения основной задачи экономического факторного анализа в монографии представлен новый метод прямого статического детерминированного факторного анализа, основанный на использовании теоремы Лагранжа о среднем значении, обеспечивающий получение точного факторного разложения в случае произвольных конечных приращений факторов, позволяющий проводить исследования широкого спектра организационно-технологических процессов.

Использование нового метода в качестве базового элемента в системе управления производством позволяет найти решение основной задачи факторного анализа для всех основных типов факторных систем. При этом наличие нескольких решений позволяет осуществлять более полную и содержательную интерпретацию результатов анализа, что улучшает функциональные возможности блока экономического анализа в системе управления производственными процессами.

На основе метода конечных приращений разработаны методики прямого цепного динамического детерминированного факторного анализа, отличающиеся использованием теоремы о среднем значении и усреднения по аддитивным факторам, позволяющие эффективно использовать методы экономического факторного анализа для поддержки процессов управления с целью динамической оценки значений результирующего показателя.

Также с использованием нового метода экономического факторного анализа разработаны алгоритмы анализа эластичностей в индексном и относительном экономическом факторном анализе производственных функций, позволяющие получить точные выражения для представления относительного приращения или индекса роста обобщающего показателя в случае произвольных конечных приращений факторов.

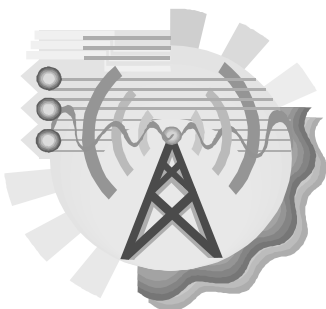
Предложенные способы цепного анализа могут быть активно использованы на практике, где, как правило, приходится решать задачу факторного анализа именно в динамической её постановке. Формулы (2.33) и (2.36), полученные для относительных приращений и индексов показателей, методологически дополняют исследования, проводимые для абсолютных величин отклонений, и могут быть использованы в тех предметных областях, где данные подходы имеют значение для решения содержательных прикладных задач.

Применение разработанных методик и алгоритмов экономического факторного анализа, основанных на использовании теоремы о среднем значении, позволило преодолеть ряд недостатков, присущих большинству известных методов:

- решена задача распределения величины неразложимого остатка без опоры на какие-либо априорные субъективные предположения о значимости того или иного фактора;
- предложенные методики дают возможность решения основной задачи экономического факторного анализа в случае динамической оценки величин факторного влияния;
- полученные алгоритмы являются универсальными и могут применяться для широкого спектра мультипликативных, кратных, аддитивных и смешанных типов моделей факторных систем.

Кроме того, в контексте решения задач экономического анализа, в монографии приведено исследование алгоритмов расчёта индексов Дивизиа, имеющих широкое применение в области применения методов теории индексов. Рассмотренная задача оценки выпуклых комбинаций наглядно показывает как математический аппарат может быть использован для решения проблемы, имеющей актуальную экономическую интерпретацию [15].

3. ПРИМЕНЕНИЕ НОВЫХ МЕТОДОВ ЭКОНОМИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ДЛЯ СОВЕРШЕНСТВОВАНИЯ УПРАВЛЕНИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМИ ПРОЦЕССАМИ



3.1. МОДЕРНИЗИРОВАННАЯ СИСТЕМА УПРАВЛЕНИЯ ЭНЕРГОПОТРЕБЛЕНИЕМ НА ПРОМЫШЛЕННОМ ПРЕДПРИЯТИИ

На современном этапе развития экономики топливно-энергетические ресурсы промышленного предприятия являются стратегическими с точки зрения его жизнеспособности [11, 82, 96] и находятся в одном ряду с такими видами ресурсов, как людские, производственные и финансовые. Эффективность использования энергетических ресурсов на предприятии влияет на рентабельность его работы, являясь одним из рычагов управления его конкурентоспособностью. Несмотря на очевидность этого факта, на сегодняшнем этапе в инфраструктуру управления многих предприятий не входят средства эффективного учета и управления потреблением энергоресурсов, хотя автоматизированные системы управления производствами (АСУП) известны уже более 40 лет и эффективно используются для управления стратегическими ресурсами предприятий. Более того, очень часто подразделения предприятий, отвечающие за энергоснабжение (например, служба главного энергетика), вообще не имеют средств автоматизации и не предполагают их использования. Таким образом, говоря о сегодняшнем состоянии дел с управлением энергопотреблением на предприятиях, можно утверждать, что этот вид управления на предприятиях развит недостаточно. В то же время не вызывает никаких сомнений тот факт, что потреблением энергоресурсов необходимо управлять.

Одним из основных приоритетов производственной политики любого крупного промышленного предприятия является создание условий для функционирования и развития основного производства при максимально эффективном использовании топливно-энергетических ресурсов [79]. Разработка и практическое внедрение различных организационно-экономических методов позволяет устранить нерациональное использование топливно-энергетических ресурсов и способствует внедрению быстрокупаемых технических и технологических мероприятий.

Себестоимость продукции в промышленности, в том числе и в металлургии, как правило, в значительной степени определяется затратами на приобретение и производство топливно-энергетических ресурсов. При этом, её энергоёмкость в России остаётся выше мировых аналогов, что и определяет актуальность поиска новых способов минимизации расходов на закупку энергоресурсов в целях оптимизации результатов финансово-хозяйственной деятельности предприятий. При этом, особую ценность приобретают мероприятия, не требующие значительных инвестиций и позволяющие использовать имеющиеся резервы снижения удельного энергопотребления существующего на предприятии оборудования [74].

Необходимо отметить, что в проведении целенаправленной работы по экономии затрат на закупку энергоресурсов можно выделить два основных направления:

- внедрение мероприятий по оптимизации энергоёмкости и энергосбережению [64];
- внедрение автоматизированного учета энергоресурсов.

Оба направления взаимосвязаны и являются неотъемлемыми элементами программы по экономии энергоресурсов [58]. При реализации данной программы необходимо проводить системный анализ режимов энергопотребления (исходная информация поступает из систем технического и коммерческого учета) с целью оптимизации этих режимов, что позволяет значительно снизить расходы на эксплуатацию энергохозяйства предприятия. Сложность решения данной оптимизационной задачи, как правило, связана с отсутствием или неопределенностью информации о характере протекающих процессов энергопотребления и только внедрение систем автоматизированного учета энергоресурсов позволяет исключить данный недостаток.

Наличие системы автоматизированного учета позволяет автоматически и оперативно составлять энергобаланс предприятия. При этом основной целью анализа энергобаланса является определение основных направ-

лений экономии и рационального использования электроэнергии, выбора оптимальной стратегии управления планированием электропотребления [39]. Энергобаланс является базой для улучшения методов нормирования энергопотребления. Нормирование энергопотребления – один из основных факторов, определяющих проведение энергосберегающей политики и ее эффективности на предприятии. Отсутствие достоверной и полной информации о режимах энергопотребления затрудняет правильное определение и анализ показателей нормирования. Это приводит к завышению удельных норм энергопотребления и соответственно к отсутствию реальной экономии электроэнергии, что недопустимо в современных экономических условиях.

Таким образом, методы экономического анализа и АСУП должны активно использоваться в области нормирования расхода ресурсов и управления энергопотреблением на предприятиях. При этом очевидно, что расчёт и анализ дифференцированных по агрегатам удельных и суммарных показателей расхода энергоресурсов необходим не только для контроля, анализа и планирования энергозатрат, но и для определения ряда экономических показателей (себестоимости, рентабельности и др.).

В ходе исследования в качестве предметной области для применения предложенных методик были выбраны технологические процессы потребления энергоресурсов в ОАО «Новолипецкий металлургический комбинат» – одном из крупнейших металлургических предприятий России.

Все вопросы, связанные с эксплуатацией энерго- и электрооборудования в ОАО «НЛМК», организацией снабжения комбината энергоресурсами находятся в компетенции Топливо-энергетического комплекса (ТЭК) комбината.

Основной технологической задачей ТЭК как структурного подразделения ОАО «НЛМК» является обеспечение надёжного бесперебойного энергоснабжения подразделений комбината всеми видами энергоресурсов требуемых параметров.

Одним из направлений по совершенствованию подходов планирования затрат при многономенклатурном производстве, к которому относится производственный цикл ОАО «НЛМК», является внедрение в работу соответствующих подразделений комбината методов экономического факторного анализа.

С учётом этого, одновременно с модернизацией и созданием систем автоматизированного технического и коммерческого учета энергоресурсов, в ТЭК ОАО «НЛМК» значительно улучшается информационное обес-

печение управления режимами энергопотребления, а также повышается эффективность самого управления. Данный результат достигается за счёт принятия результативных управленческих решений, в том числе, с учётом данных, получаемых с использованием факторного анализа.

Конкретная постановка производственных задач факторного анализа в полной мере корреспондирует с основной задачей экономического факторного анализа.

Отсюда, основная цель применения факторного анализа в ТЭК металлургического производства заключается в выявлении факторов, оказывающих наиболее заметное влияние на отклонение результирующего показателя (потребления энергоресурсов) от планового значения, выработке рекомендаций для последующего управления выбранными параметрами.

Для реализации основной функции факторного анализа следует внести некоторые изменения в стандартную схему управления, в результате чего получаем усовершенствованную схему, представленную на рис. 3.1.

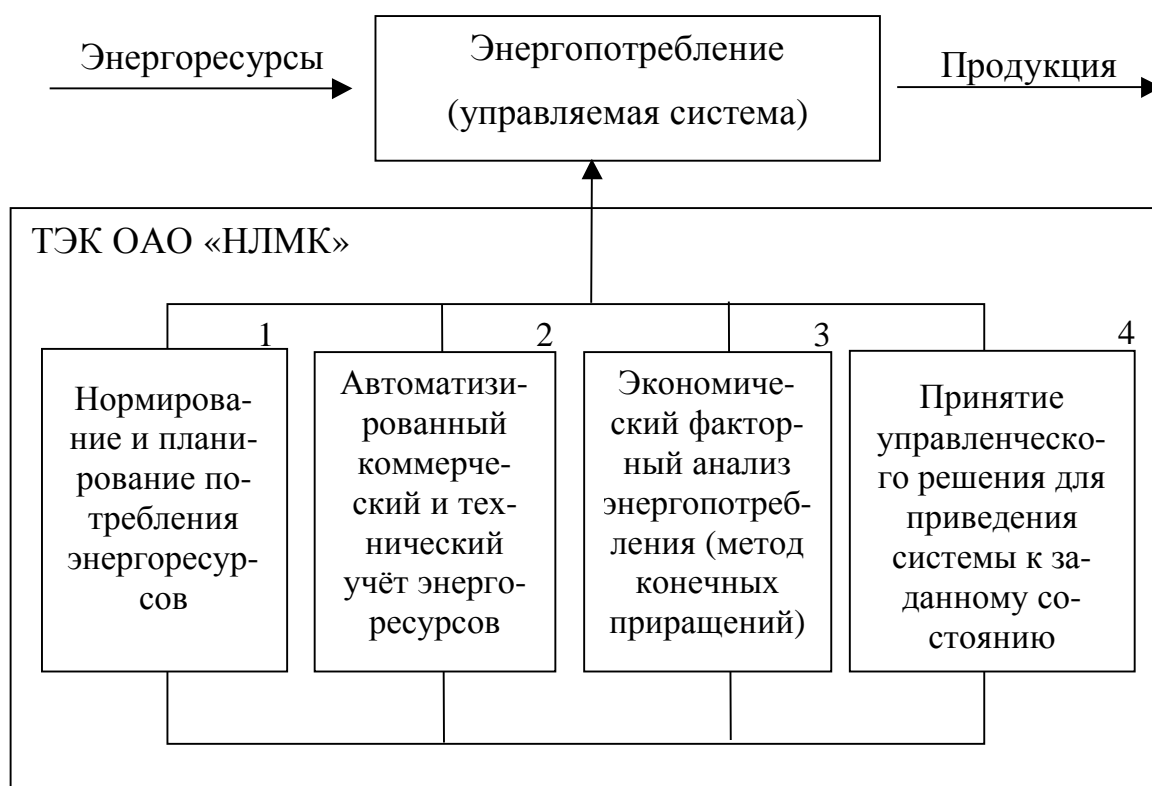


Рис. 3.1. Схема системы управления энергопотреблением на металлургическом предприятии

Таким образом, управление энергопотреблением в ТЭК с использованием аппарата анализа факторных систем осуществляется по следующему алгоритму:

1. Определяется необходимый набор моделей и на их основе производится расчёт удельных показателей и планирование суммарного объёма потребляемого вида энергоресурса.
2. С использованием автоматизированных систем технического и коммерческого учёта производится сбор данных о фактическом потреблении энергоресурсов на комбинате, производится расчёт отчётных (фактических) значений факторов и результирующих показателей.
3. Проводится факторный анализ моделей энергопотребления, вычисляются значения величин факторного влияния. При необходимости производится ранжирование факторов по величинам оценки влияния, оказанного их отклонением от плановых значений на изменение объёма потребления того или иного вида энергоносителя. В установленной форме формируется исходная информация для поддержки принятия управленческого решения.
4. На основе полученных данных вырабатывается управленческое решение по приведению уровня энергопотребления к некоторому нормативному значению.

При этом, управление процессом может быть направлено как на решение задачи минимизации энергоёмкости (энергосбережение), так и на решение задачи минимизации отклонения фактического значения энергопотребления от планового, что является актуальной проблемой в условиях функционирования оптового рынка электроэнергии в России [78, 80] и формирования новых регламентов оценки стоимости отклонений.

Данная схема соответствует общей структуре системы управления производством (рис. 1.1), однако в данном случае в блоке планирования акцентируется внимание на таком методически важном аспекте как нормирование, в блоке учёта указана необходимость автоматизации сбора и обработки данных, а в блоке анализа как связующее звено между учётом и управлением рассматривается экономический факторный анализ.

Кроме того, предложенная концепция управления и методики анализа вписываются в разработанный в ОАО «НЛМК» контур управления использованием энергетических ресурсов [90], представленный на рис. 3.2 и реализующий на предприятии функции ТЭК и Центра ресурсосбережения – специального структурного подразделения, цель деятельности которого заключается в обеспечении производства продукции заданного каче-

ства с минимальными затратами путём внедрения ресурсосберегающих мероприятий, технологий и оборудования.

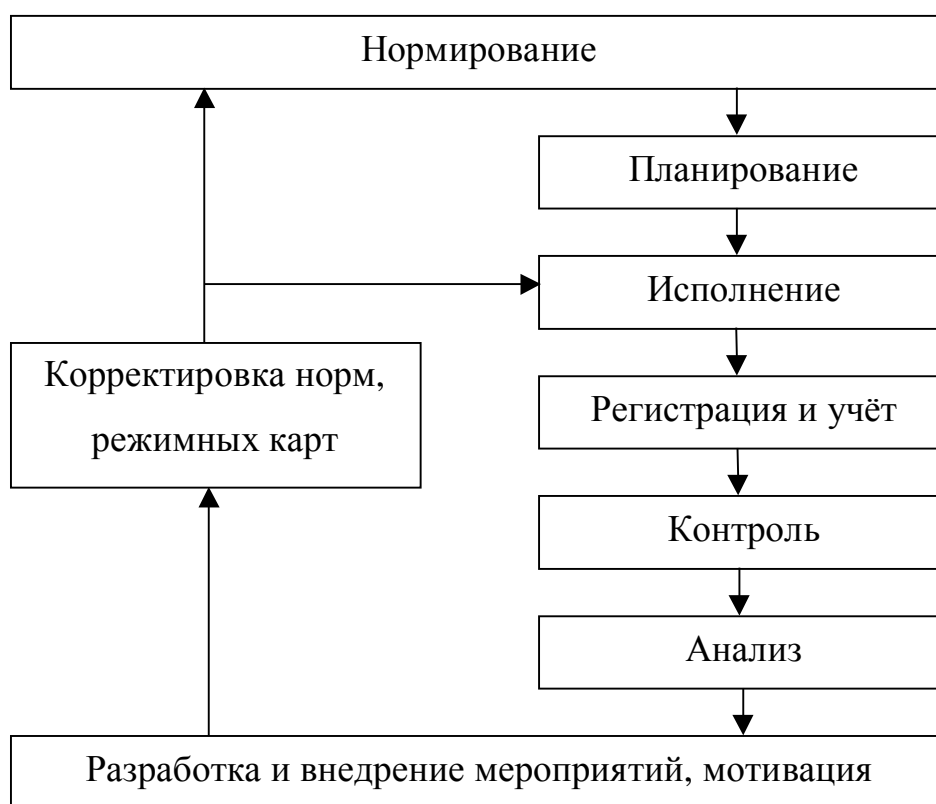


Рис. 3.2. Контур управления использованием энергоресурсов

Блок анализа в представленном контуре предусматривает проведение согласно разработанному регламенту анализа использования основных видов ресурсов цехами комбината, а также анализа удельной энергоёмкости, которая, как показывает опыт работы ведущих зарубежных и российских металлургических компаний, является универсальным критерием оценки эффективности использования ресурсов [90].

Экономический факторный анализ в данном случае также является одним из основных подходов к анализу потребления топливно-энергетических ресурсов и применяется для реализации функций анализа в контуре управления при исследовании различных моделей, описывающих процессы энергопотребления. При этом, методики статического и динамического факторного анализа, основанные на теореме о среднем значении, позволяют объективно и результативно исследовать основные показатели, используемые для оценки эффективности работы в области энергосбережения.

3.2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЭНЕРГОПОТРЕБЛЕНИЯ

В качестве практического приложения полученных в ходе исследования результатов, для совершенствования системы управления потреблением топливно-энергетических ресурсов были проанализированы некоторые модели энергопотребления, используемые в металлургии [73, 74].

В частности, метод конечных приращений экономического факторного анализа применялся для исследования процессов потребления электрической энергии и природного газа – двух основных видов энергоресурсов, используемых в производственном цикле металлургического предприятия.

Для планирования объёма потребности в электрической энергии на металлургических предприятиях, как правило, используется классическая мультипликативно-аддитивная модель, которая может быть представлена в виде

$$W = \sum_{i=1}^n N_i \cdot Q_i + \sum_{j=1}^m L_j \cdot t_j, \quad (3.1)$$

где W – общий объём потребности в электроэнергии (кВтч);

N_i – удельный расход (норма) энергии на единицу продукции (кВтч/ед.);

Q_i – объём конечной продукции или полуфабриката, выпущенный i -ым цехом (агрегатом) за анализируемый период (ед.);

L_j – суточный лимит расхода электроэнергии (кВтч);

t_j – количество календарных дней в отчётном периоде.

Первая часть правой части выражения (3.1) позволяет рассчитать потребность в электроэнергии для тех видов продукции (полуфабрикатов), для которых есть возможность и существует целесообразность рассчитывать норму расхода электроэнергии по переделам (технологическим операциям), участвующим в выпуске товарного продукта, отпускаемого на сторону (чугун, слябы, прокат и т.п.) или промышленного продукта, используемого для дальнейшего производства конечной продукции.

При этом следует отметить, что установление норм расхода электроэнергии, дифференцированных по видам и типоразмерам продукции, оправдано только применительно к наиболее энергоёмким конечным продуктам [75]. Для остальных целесообразно рассчитывать укрупнённые нормы или лимиты, относящиеся к группам продукции различной номенклатуры или группам агрегатов различной производительности и энергоёмкости. В этом случае в расчётах используется вторая часть формулы (3.1), которая применяется для определения планового объёма электроэнергии по тем аг-

регатам, для которых отсутствуют собственные нормы расхода, но в ходе статистических наблюдений вычислена величина, характеризующая среднесуточное потребление энергии (лимит). Умножением лимита на количество календарных дней отчётного периода рассчитывается суммарная потребность цеха (агрегата) в электроэнергии. Следует отметить, что лимитная схема расчёта как правило используется для небольших цехов (групп агрегатов) с низкой энергоёмкостью и значительным ассортиментом производимой продукции.

Для расчёта потребности в природном газе используется модель, практически идентичная (3.1), но учитывающая специфику потребления газообразного топлива в металлургическом производстве:

$$G = \sum_{i=1}^n K_{G_i} \cdot N_i \cdot Q_i + \sum_{j=1}^m L_j \cdot t_j, \quad (3.2)$$

где G – величина потребности в природного газе (тыс. м³ или тонн условного топлива);

K_{G_i} – коэффициент, который указывает на процент содержания природного газа в топливной смеси и рассчитывается, исходя из требований технологии производства (например, учитывает ограничения на общую калорийность смеси). То есть удельный расход топлива N_i обычно определяется для достижения заданной суммарной энергоёмкости газовой смеси, а для выделения из валового объёма топлива составляющей природного газа используется коэффициент K_{G_i} .

Также можно добавить, что при проведении факторного анализа моделей вида (3.1)-(3.2) следует учитывать тот факт, что величины удельного расхода энергоносителя, как правило, не являются числовыми константами, а рассчитываются по специальным формулам, получаемым после выполнения процедур статистической оценки данных величин с учётом особенностей технологического процесса и характеристик оборудования.

3.3. ПРИМЕРЫ УПРАВЛЕНИЯ ЭНЕРГОПОТРЕБЛЕНИЕМ МЕТАЛЛУРГИЧЕСКОГО ПРЕДПРИЯТИЯ С ПРИМЕНЕНИЕМ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ПРИРАЩЕНИЙ

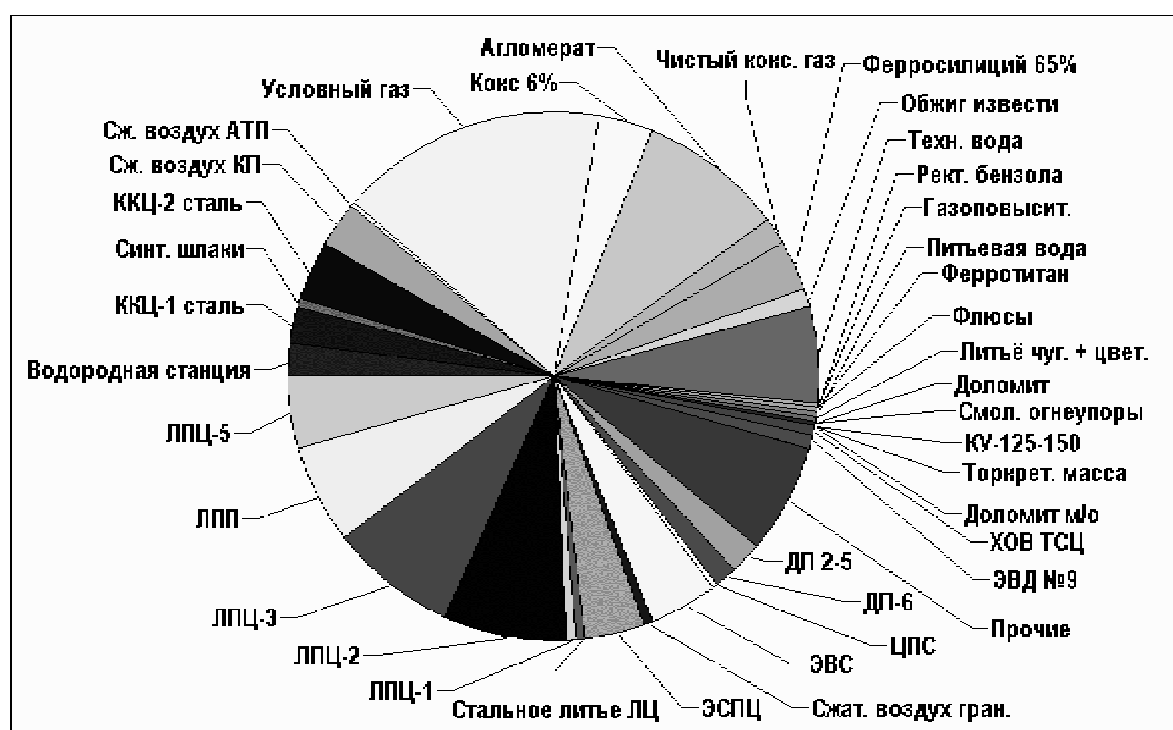
Далее покажем на конкретных примерах, каким образом предложенные методики и алгоритмы факторного анализа могут быть использованы

для реализации функции аналитического обеспечения управления технологическими процессами потребления топливно-энергетических ресурсов на металлургическом предприятии.

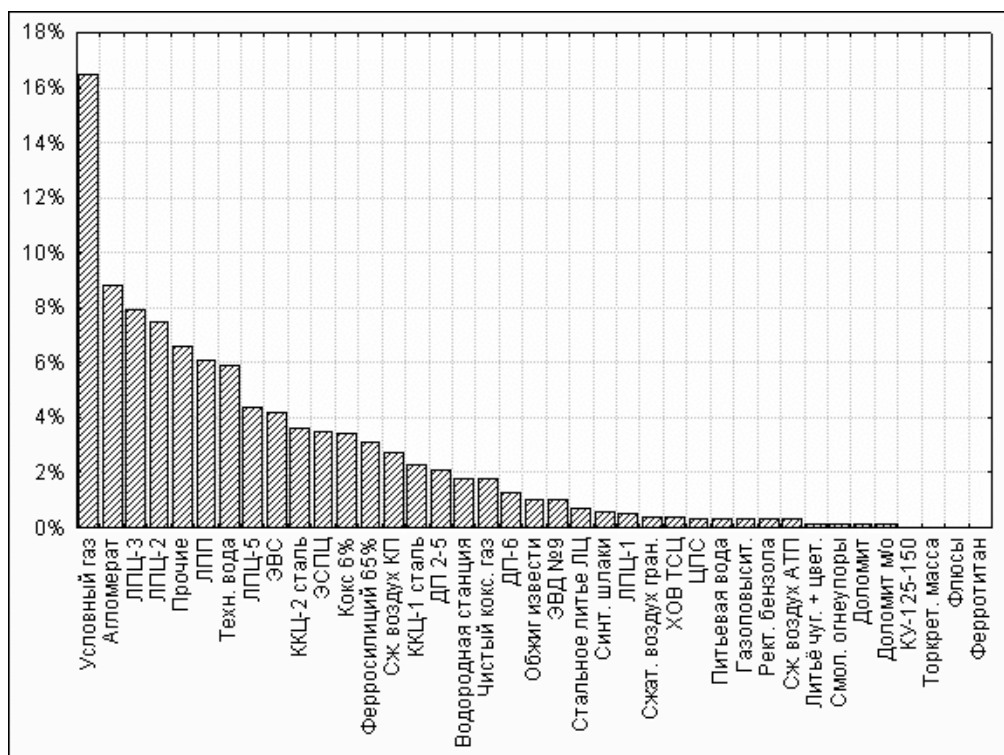
Приведём описание алгоритма анализа и проиллюстрируем его применение в усовершенствованной системе управления электропотреблением на примере выборки за май 2000 года.

Предварительно, на основании статистических данных о фактическом потреблении электроэнергии, полученных, в том числе, с использованием автоматизированных систем учёта, имеющиеся данные были отфильтрованы в целях выбора для анализа только тех цехов и агрегатов, объём электропотребления которых оказывает существенное влияние на изменение суммарного объёма потребления электрической энергии на комбинате (рис. 3.3а–с).

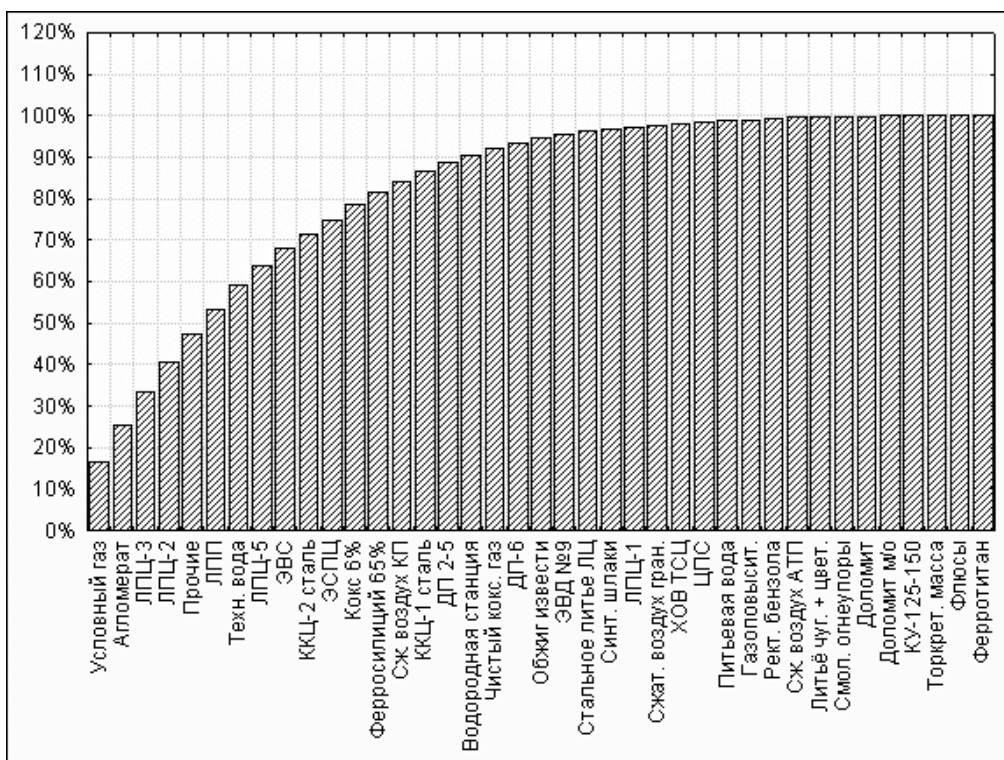
Далее, по имеющимся данным, в соответствии с методом Лагранжа, по формуле (2.17) для имеющейся двухфакторной мультипликативной модели проводился статический факторный анализ потребления электрической энергии для каждого энергоёмкого цеха или агрегата.



а) Диаграмма долей электропотребления цехов (агрегатов)



б) Гистограмма долей электропотребления цехов (агрегатов)



с) Гистограмма долей электропотребления цехов (с накоплением)

Рис. 3.3. Доли электропотребления цехов (агрегатов) в суммарном объеме потребления электроэнергии в ОАО «НЛМК»

Результаты анализа представлены на рис. 3.4-3.5, иллюстрирующих полученные данные соответственно в виде круговой диаграммы и гистограммы долей величин влияния факторов в общем отклонении результирующего показателя, которым является суммарный объем электропотребления на предприятии.

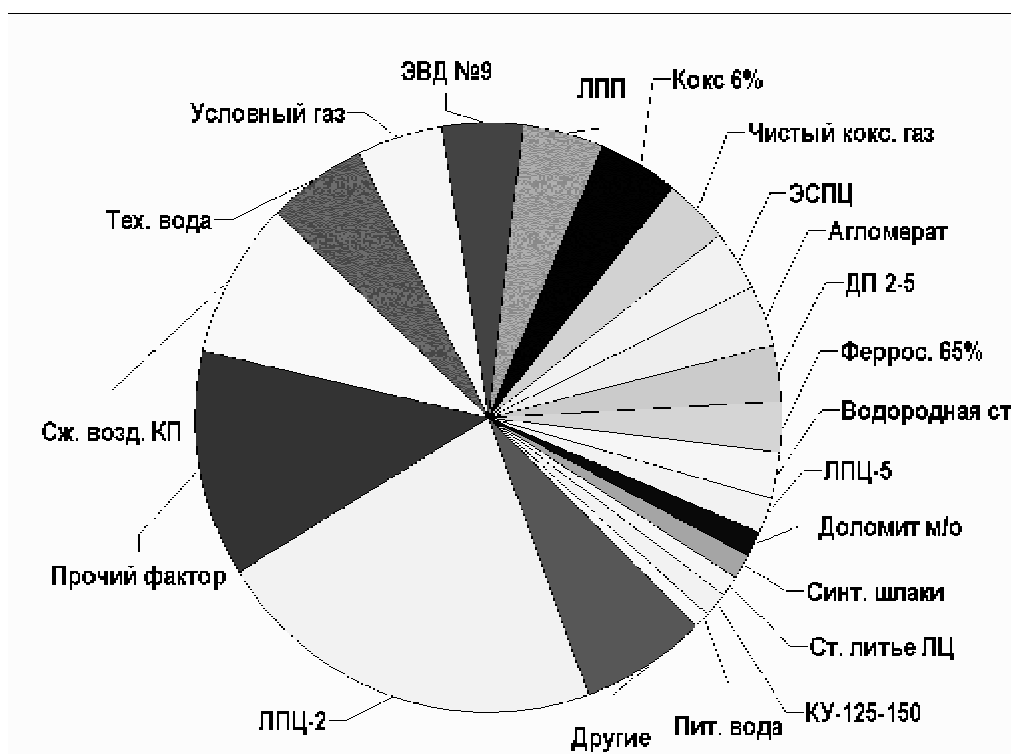


Рис. 3.4. Диаграмма долей оценок влияния факторов

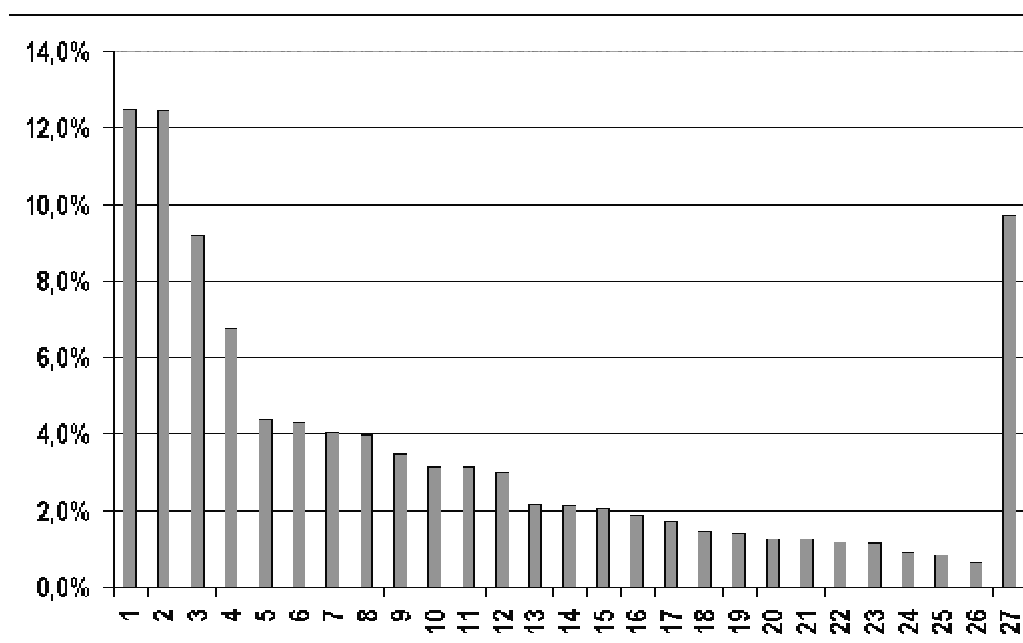


Рис. 3.5. Гистограмма долей оценок влияния факторов

Под термином «прочий фактор» на рис. 3.4 подразумевается группа потребителей, потребление которых планируется с использованием величин суточных лимитов расхода электроэнергии (см. (3.1)).

Для оценки величин факторного анализа по предприятию в целом применялся метод простой группировки цепного динамического экономического факторного анализа, то есть была вычислена сумма величин факторного влияния по всем цехам (агрегатам) отдельно для каждого вида фактора. Метод усреднения неаддитивного фактора по аддитивным в данном случае применять нецелесообразно, поскольку анализ проводится для набора производственных единиц и усреднение показателей их работы, измеряемых в различных единицах (тонны, м³), не несёт какой-либо полезной информации, необходимой для последующего управления.

Полученная в ходе анализа информация была обработана и представлена руководителям соответствующих подразделений – лицам, принимающим решения по вопросам управления электропотреблением.

Кроме того, после проведения факторного анализа потребления электрической энергии был сделан ряд содержательных выводов.

Во-первых, было рекомендовано пересмотреть процедуру планирования объёмов потребления электроэнергии в прокатных цехах. Дело в том, что эти цеха имеют многоагрегатную структуру и нормы должны рассчитываться для каждого агрегата отдельно. Однако при планировании использовался показатель суммарной отгруженной цехом (агрегатом) продукции и на этот объём рассчитывалась некоторая «усреднённая» норма, что вносило значительную погрешность в точность планирования и последующего вычисления результатов при проведении факторного анализа. Переход на поагрегатную схему расчёта потребления электрической энергии в указанных цехах позволяет повысить точность планирования и объективность последующего анализа.

Во-вторых, были выданы рекомендации по повышению точности прогнозирования объёмов производства и более корректному выбору моделей удельного расхода, обратив первоочередное внимание на наиболее энергоёмкие агрегаты. При этом, повышение точности планирования электропотребления позволяет получить значительный экономический эффект, а именно: уменьшение отклонения фактических значений электропотребления от плановых всего на 1% позволяет снизить затраты на покупку электрической мощности в часы прохождения максимальной нагрузки в ЕЭС России в среднем на 1 млн. руб. в месяц (оценка произведена с использованием тарифов, установленных Региональной энергетической комиссией Липецкой области на 2004 год).

В настоящее время ТЭК и Центр ресурсосбережения ОАО «НЛМК» при поддержке соответствующих служб и подразделений комбината осуществляют результативную работу в области энергосбережения [90], в том числе, проводя модернизацию и улучшая качественные характеристики методик планирования энергопотребления на комбинате. Динамика удельной энергоёмкости, рассчитанной по разработанной в ОАО «НЛМК» методике, представлена на рис. 3.6, динамика изменения удельного расхода электроэнергии – на рис. 3.7.

Кроме того, на комбинате проводится комплекс мероприятий по выходу на оптовый рынок электроэнергии (ОРЭ) и работе на этом рынке с применением различных торговых систем (регулируемый сектор [102]; сектор свободной торговли – спотовый рынок, форвардные контракты [136]; прямые договоры с поставщиками). Работа на оптовом рынке позволит нивелировать влияние упреждения при подаче заявок на покупку, так как механизмы современного ОРЭ позволяют производить покупку электроэнергии с меньшим временным интервалом между подачей заявки на покупку и физической поставкой товара. В настоящее время на комбинате также разрабатывается методика планирования почасовых объёмов потребления (производства) электрической энергии, необходимая для результативной работы на оптовом рынке. Факторный анализ и в этом случае является связующим элементом между алгоритмом прогнозирования, данными автоматизированных систем учёта и принятием управленческого решения, направленного на оптимизацию работы комбината на ОРЭ.

В-третьих, в процессе анализа была выявлена значительная доля в общей величине факторного влияния такого параметра как потери. То есть в рассмотренных отчётных периодах имелось отклонение прогноза потерь электроэнергии на комбинате от их фактически рассчитываемого значения, что во многом связано с влиянием величины небаланса. Под небалансом понимается разница между суммарным объёмом электроэнергии, зафиксированным в системе учёта на внешнем контуре – основных питающих подстанциях, и того объёма, который был определён по счётчикам, установленным непосредственно в цехах. По итогам анализа было принято решение о необходимости совершенствования процедуры планирования потерь, так как даже внедрение новой методики их расчёта не позволило в полной мере решить проблему. Кроме того, для повышения качества учёта на комбинате создаётся автоматизированная система коммерческого учёта электроэнергии (АСКУЭ) [40, 76, 77], соответствующая действующим на ОРЭ техническим требованиям, внедрение которой наравне с

активно проводимой модернизацией систем технического учёта позволит повысить достоверность информации об электропотреблении.

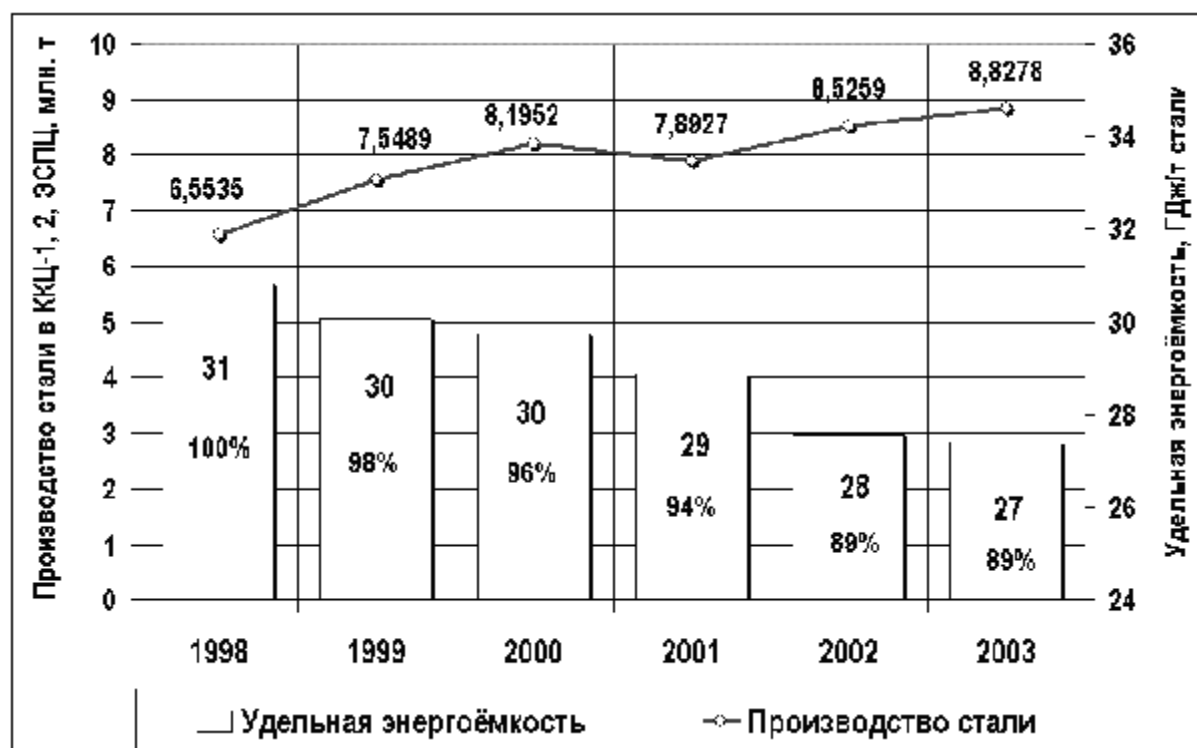


Рис. 3.6. Динамика удельной энергоёмкости металлургического комплекса

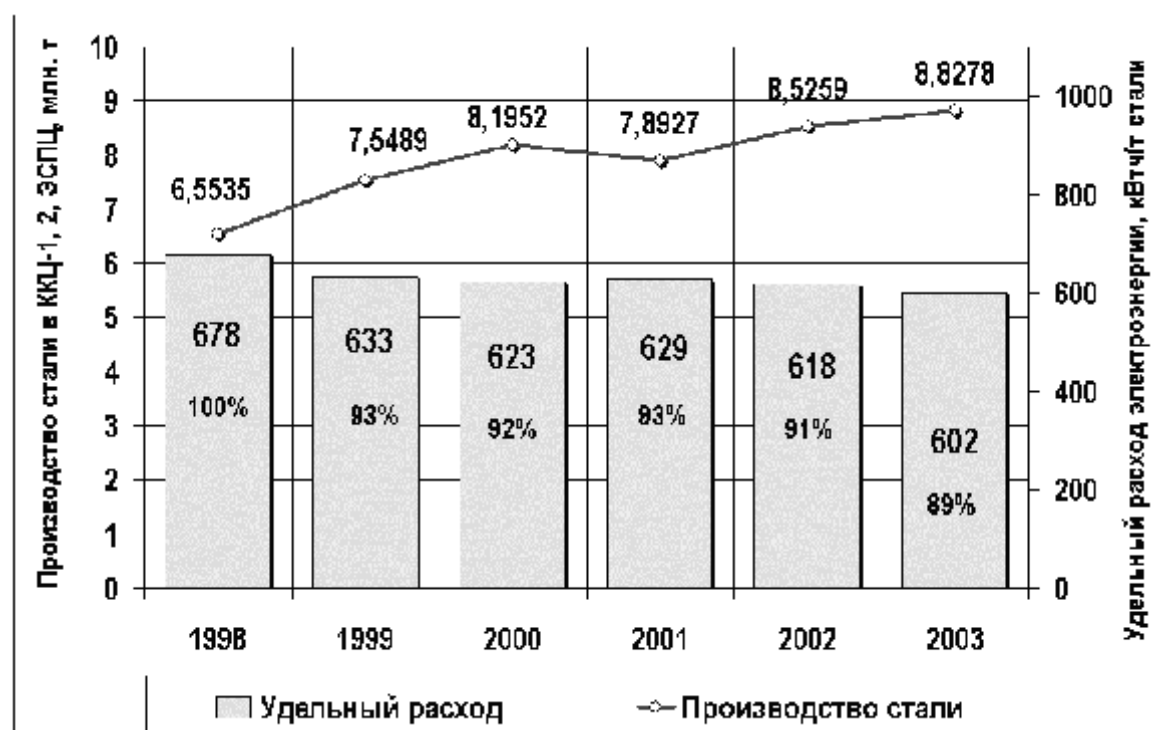


Рис. 3.7. Динамика удельного расхода электрической энергии на 1 тонну стали

Следует отметить, что в соответствии с существующими отраслевыми инструкциями [69] величину неразложимого остатка рекомендуется относить на качественный фактор (в данном случае – удельный расход электрической энергии), то есть используется метод цепных подстановок (2.8). Такой алгоритм можно считать корректным с точки зрения методологии, но при произвольных значениях величин изменения факторов подобный способ распределения величины неразложимого остатка может существенным образом повлиять на оценку результатов факторного анализа.

Рассмотрим отличия в результатах применения метода цепных подстановок и метода конечных приращений на примере агломерационного цеха № 2 по данным за июнь 2001 года (табл. 3.1-3.2). Несмотря на то, что удельный вес влияния факторов в общем уменьшении электропотребления изменился незначительно, отклонение в оценке величин влияния по фактору объёма производства составляет 10%, а по фактору удельного расхода – 8% (рис. 3.8), что предполагает существенные различия в принимаемых решениях об управлении рассматриваемой факторной системой. При этом, нет абсолютно никаких предпосылок относить значительную в данном случае величину неразложимого остатка к влиянию удельного расхода.

Таблица 3.1

Данные о производстве продукции и потреблении электроэнергии
в агломерационном цехе № 2

Объём производства, ед.			Удельный расход (норма) электроэнер- гии, кВтч/ед.			Потребление электроэнергии, тыс. кВтч		
план	факт	откл., %	план	факт	откл., %	план	факт	откл., %
499500	588502	17,8	34,9	28,6	-18,1	17433	16831	-3,4

Таблица 3.2

Результаты факторного анализа электропотребления с использованием
метода конечных приращения и метода цепных подстановок

Величины факторного влияния							
метод конечных приращений				метод цепных подстановок			
объём производства		удельный расход		объём производства		удельный расход	
тыс. кВтч	%	тыс. кВтч	%	тыс. кВтч	%	тыс. кВтч	%
2826	45	-3427	55	3106	46	-3707	54

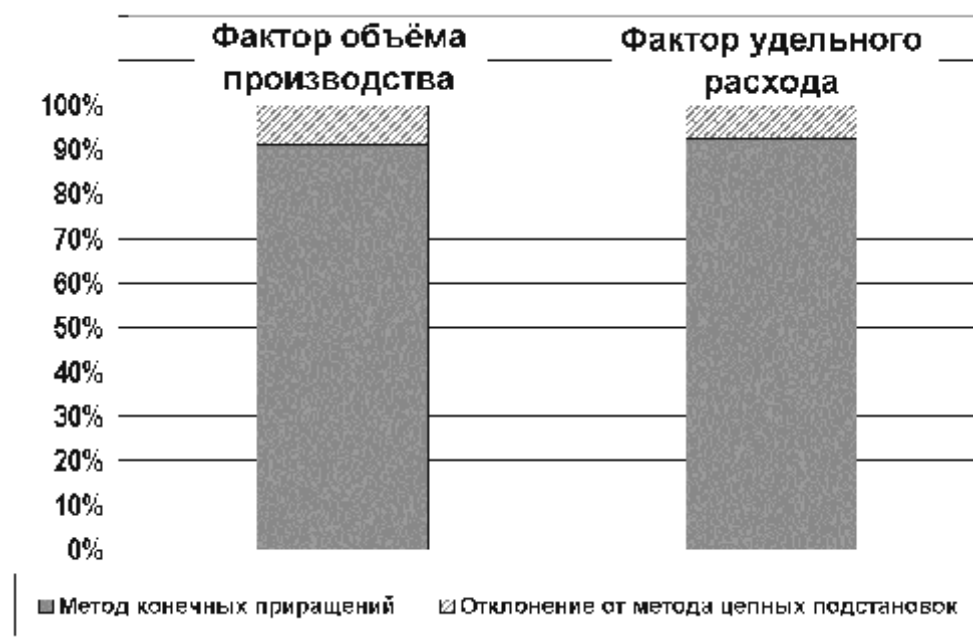


Рис. 3.8. Сравнение результатов оценки величин факторного влияния методом конечных приращений и методом цепных подстановок

Далее покажем применение метода конечных приращений экономического факторного анализа в совершенствовании систем управления энергопотреблением на примере исследования потребления природного газа в ОАО «НЛМК».

Прежде всего следует отметить, что для процесса потребления природного газа в металлургическом производстве характерно то, что в общем балансе велика доля нескольких энергоёмких цехов (см. рис. 3.9 и рис. 3.10). В связи с этим факторный анализ проводится, как правило, для наиболее весомых по доле потребления природного газа цехов (агрегатов).

Сравнительный анализ расчётов, полученных с использованием двух методов (метода конечных приращений и метода цепных подстановок), позволяет сделать выводы, аналогичные тем, что были приведены выше при исследовании модели электропотребления. При не малых, но конечных величинах изменений факторов метод цепных подстановок даёт неадекватные изучаемому процессу результаты, так как значимый по величине неразложимый остаток при использовании этого метода относится к влиянию удельного расхода, что приводит к необоснованному завышению оценки влияния данного фактора.

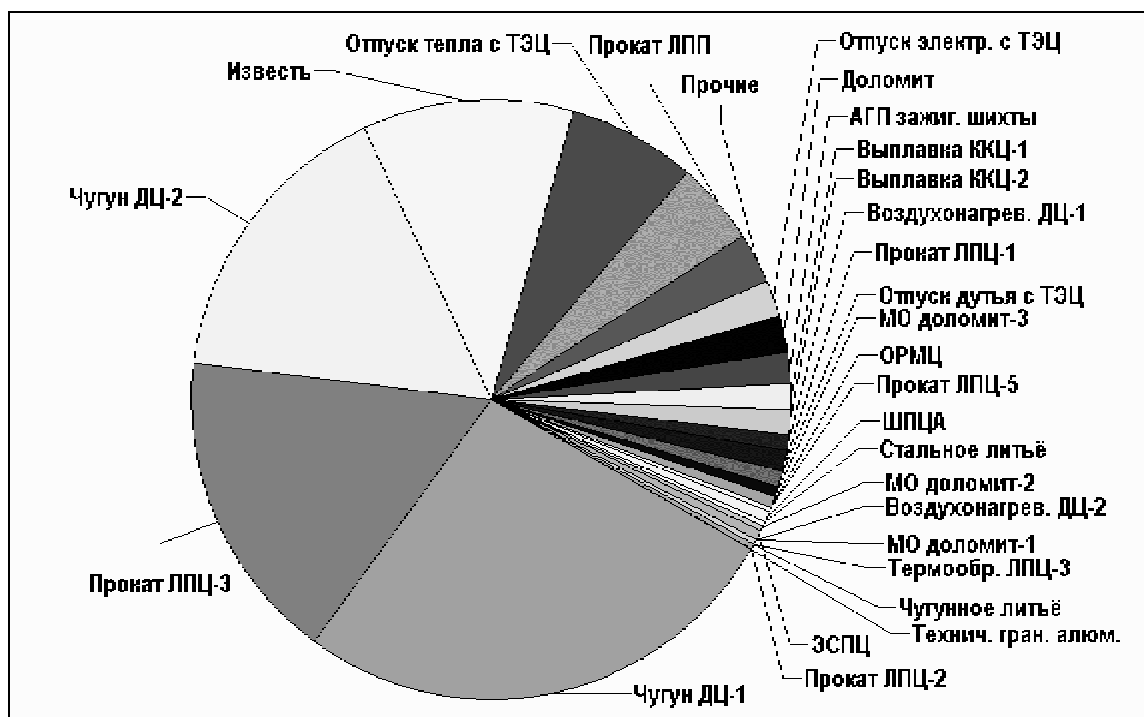


Рис. 3.9. Диаграмма долей потребления природного газа цехами (агрегатами) комбината

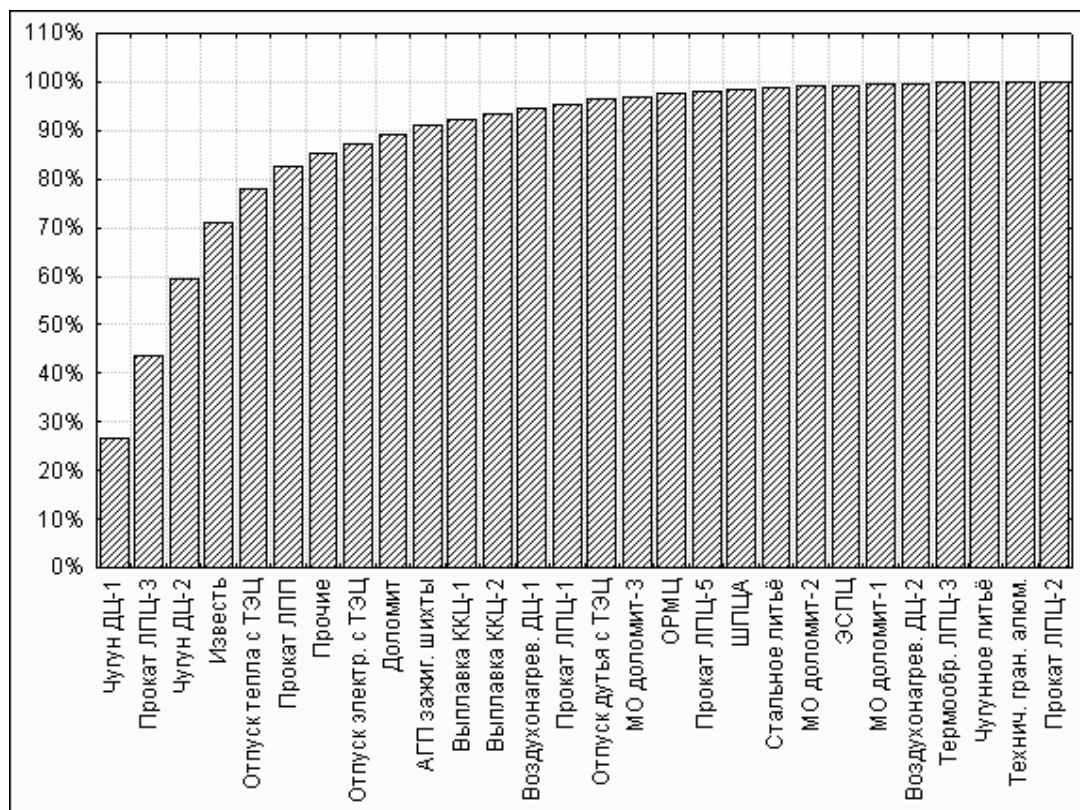


Рис. 3.10. Гистограмма долей потребления природного газа цехами (агрегатами) комбината

Наиболее сложным аспектом управления – фактором, ограничивающим возможности по воздействию на анализируемый процесс, в данном случае являются жёсткие технологические ограничения в условиях существующих колебаний производственной программы. То есть при принятии решений по управлению потреблением природного газа необходимо учитывать ряд дополнительных параметров, например, ограничения на определённое соотношение газов в топливной смеси или изменение объёмов выработки доменного и коксового газа.

Как и в случае анализа электропотребления, точность планирования объёмов закупки природного газа имеет большое значение с точки зрения оптимизации затрат и снижения себестоимости продукции комбината. Современные концепции реформирования рынка природного газа предусматривают постепенное ограничение лимитов его потребления крупными промышленными предприятиями, а цена дополнительного газа, поставляемого в настоящее время независимыми поставщиками для торгов на специализированной электронной торговой площадке, может превышать регулируемый тариф, установленный уполномоченным органом исполнительной власти, более чем в 1,5 раза. Данное обстоятельство указывает на существенный экономический эффект от проведения мероприятий по оптимизации потребления природного газа.

Далее, на примере данных об энергопотреблении за июнь 2000 г. покажем, как факторный анализ может быть использован для совершенствования методики нормирования. Так, после проведения факторного анализа в июне 2000 г. были выявлены наиболее значимые факторы, отклонение фактических значений которых от плановых существенно сказалось на изменении величины потребления природного газа в целом по предприятию: факторы объёма производства и величины удельного расхода в доменном производстве (ДП), а также норма потребления природного газа в листопрокатном цехе № 3 (ЛПЦ-3).

Управление объёмом выпуска продукции в ДП затруднено тем обстоятельством, что, являясь одним из основных звеньев в металлургическом цикле, доменные цехи находятся в жёстких условиях необходимости выполнения поставленной производственной программы и обязаны оперативно реагировать на её изменения. Кроме того, технологические нормы расхода газа в ДП определяются не только из формальных расчётов, а вычисляются с учётом состава и физико-химических характеристик природного газа и других видов ресурсов (например кокса). Поэтому для исследования была выбрана более управляемая модель планирования удельного расхода природного газа в ЛПЦ-3.

Выбранный показатель является расчётной величиной, производной от нормы расхода топлива в целом. Расход природного газа также зависит от соотношения в газовой смеси доменного, коксового, природного газа и от параметров калорийности смеси, которые регулирует соответствующая методика. Выход доменного и коксового газа в свою очередь зависит от величины объёма производимой продукции в доменном и коксохимическом производствах. Поскольку отклонение фактического отпуска составляющих смесь коксового и доменного газов от их плановых значений в отчётном месяце было незначительным, то эти дополнительные факторы можно исключить из рассмотрения. Таким образом, вычисление нормы потребления природного газа является в данном случае формальной процедурой и в ходе анализа достаточно будет исследовать модель расчёта удельного расхода топлива в ЛПЦ-3.

Согласно нормативным документам, устанавливавшим плановые нормы потребления топлива в ЛПЦ-3 во втором квартале 2000 года, расчёт удельного расхода производился по формуле

$$N_{пл.} = a \cdot \left[85,5 + 23 \cdot \frac{T_{III}}{T_{\Sigma}} \right], \quad (3.3)$$

где a – коэффициент, учитывающий снижение расхода энергоносителя за отчётный период, предшествующий планируемому;

T_{III} – время работы печей с шагающим подом;

T_{Σ} – суммарное время работы нагревательных печей в ЛПЦ-3.

Числовые коэффициенты в формуле (3.3) являются результатом статистической обработки методами регрессионного анализа данных о потреблении энергоресурсов в исследуемом подразделении комбината за предыдущие отчётные периоды.

Переходя к непосредственному рассмотрению примера на реальных данных, следует указать, что, поскольку коэффициент a в отчётном периоде не изменился, то отклонение значения удельного расхода (нормы) может быть вызвано только технологическими факторами, а именно – временем работы нагревательных печей в ЛПЦ-3.

Рассмотрим имеющиеся данные о плановых и фактических значениях факторов, определяющих значение нормы расхода топлива, и результирующего показателя (табл. 3.3).

С учётом информации, приведенной в примечании к табл. 3.3, введём в рассмотрение, кроме факторов времени работы печей, ещё один, так называемый «прочий фактор», плановое значение которого примем за 0, а фактическое – за разницу между значениями нормы расхода топлива

в столбцах факт.* и факт. соответственно. Таким образом, прочий фактор позволяет оценить влияние на удельный расход тех параметров, которые не были учтены в (3.3). Также необходимо отметить, что, так как время работы толкательных печей не менялось, то изменение удельного расхода топлива вызвано только снижением количества рабочего времени печей с шагающим подом.

Полученные после проведения анализа методом конечных приращений результаты представлены в табл. 3.4 и на рис. 3.11.

Таблица 3.3

Данные о факторах, определяющих потребление топлива в ЛПЦ-3

Печи	№	Время работы печей		Норма, кг/т/тонну		
		план.	факт.	план.	факт.	факт.*
Толкательные	1	744	744	88,51	87,28	81,01
	2	744	744			
	3	744	744			
Шагающие	4	168	0			
	5	168	187			
Итого		2568	2419			

* В производственном отчёте о работе цеха за месяц была указана фактическая норма расхода топлива, равная 81,01 кг/т/тонну, так как модель (3.3), применяемая при планировании, не учитывала ряд параметров, которые фактически повлияли на величину расхода топлива. Так, в отчётных документах указывается, что экономия топлива была достигнута за счёт выполнения энергосберегающих мероприятий, за счёт эффективного использования горячего посада, за счёт высокой производительности труда и других факторов.

Таблица 3.4

Факторный анализ потребления топлива в ЛПЦ-3

Время работы шагающих печей, часов			Норма, кг/т/тонну			Факторное влияние, кг/т/тонну	
план.	факт.	откл.	план.	факт.	откл.	время	прочий фактор
336	187	0	88,51	81,01	-7,50	-1,23	-6,27
Доля величины факторного влияния						16%	84%

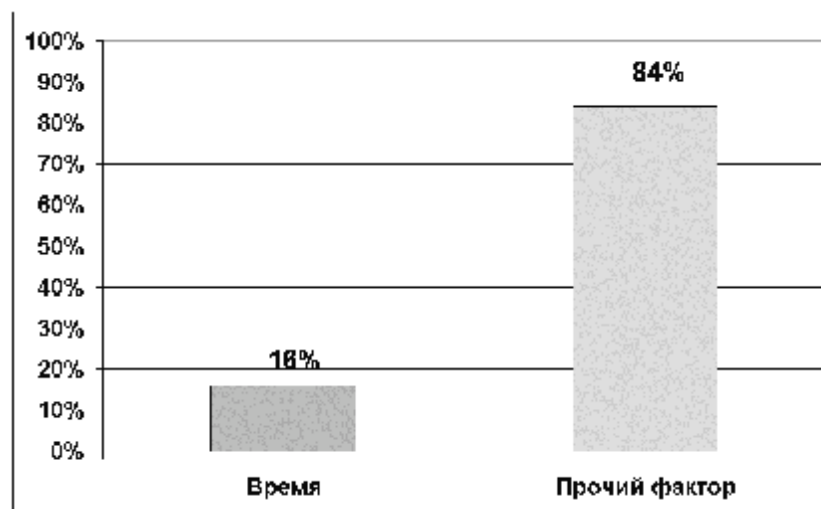


Рис. 3.11. Гистограмма долей оценок влияния факторов

Факторный анализ показал, что на отклонение величины удельного расхода наиболее значительно повлиял прочий фактор (84%), который не был формализован в модели расчёта планового значения нормы. Данный факт позволил оценить модель (3.3) как требующую корректировки, и по результатам исследования были подготовлены рекомендации о необходимости изменения расчётной формулы удельного расхода для повышения точности планирования объёма потребления топлива в ЛПЦ-3.

Таким образом, приведенный пример наглядно иллюстрирует одно из основных направлений комплексного анализа производственной деятельности, заключающееся в системном исследовании моделей, описывающих технологические процессы, с применением методов экономического факторного анализа, что позволяет получить более полную и достоверную информацию об изучаемом объекте.

В табл. 3.5 приведен ещё один пример факторного анализа потребления природного газа в ОАО «НЛМК» по данным августа 2001 г., содержательным результатом которого стало определение параметров, наиболее сильно повлиявших на изменение обобщающего показателя, а именно: было установлено, что увеличение потребности в природном газе объясняется следующими причинами:

- изменением норм на потребление природного газа в доменном производстве;
- изменением состава топлива на воздухонагреватели с увеличением удельного веса природного газа в газовой смеси по причине низкой калорийности доменного газа;
- технологическим изменением состава газовой смеси и времени работы шагающих печей.

Таблица 3.5

**Факторный анализ потребления природного газа
в доменном производстве и листопрокатном цехе № 3**

Цех	План			Факт			Факторное влияние, тыс. м ³		
	пр-во, т	норма, м ³ /т	объём, тыс. м ³	пр-во, т	норма, м ³ /т	объём, тыс. м ³	пр-во	норма	всего
Чугун ДЦ-1	450000	80	36000,0	447900	99	44342,1	-188,0	8530,1	450000
В/н ДЦ-1	520150	2,3	1196,3	517325	4	2069,3	-8,9	881,9	520150
Чугун ДЦ-2	232000	85	19720,0	220100	96	21129,6	-1077,0	2486,6	232000
В/н ДЦ-2	225040	0,04	9,0	224502	12,5	2806,3	-3,4	2800,6	225040
ЛПЦ-3	430600	59,8	25749,9	426600	73,7	31440,4	-267,0	5957,5	430600

Выявление указанных причин позволило предоставить исходную информацию для принятия решений по управлению факторами, влияющими на величину потребления природного газа.

3.4. ВЫВОДЫ

Применение экономического факторного анализа в производственной деятельности ТЭК ОАО «НЛМК» позволило в полной мере реализовать интеллектуальную функцию управления процессами энергопотребления.

Как следует из примеров практических исследований в реальных условиях действующего производства, внедрение метода конечных приращений экономического факторного анализа позволяет:

- повысить эффективность системы управления энергетическими затратами на промышленном предприятии;
- получить эффективный аналитический инструмент для поддержки принятия обоснованных управленческих решений;
- обеспечить снижение затрат на энергоснабжение и эксплуатацию энергооборудования за счет повышения эффективности управления.

Очевидно, что предметная область применения разработанных методик экономического факторного анализа, основанных на применении теоремы о среднем значении, не ограничивается энергетикой. Описанные методы можно использовать в исследованиях моделей различных экономических и технологических процессов.

Комплексный подход к анализу хозяйственной деятельности предприятия, опирающийся на применение алгоритмов экономического факторного анализа и предполагающий предоставление в полном объёме достоверной информации лицу, принимающему решение, позволяет не только получить объективную оценку причинно-следственных связей в системе, но и спрогнозировать вероятные последствия управляющего воздействия.

Программная реализация вычислительной процедуры экономического факторного анализа методом, основанном на применении формулы Лагранжа, была выполнена средствами среды Delphi на языке Object Pascal [98]. Однако, как показала практика, использование факторного анализа в работе специалистов соответствующих служб предприятий является более продуктивным, если применяются базовые пакеты доступных офисных приложений, оснащённые необходимым набором средств программирования. В случае исследования нестандартных моделей дополнительно могут потребоваться программные продукты, позволяющие использовать математические методы для проведения требуемых вычислений.

Более подробно с прикладными аспектами применения разработанных методик и алгоритмов экономического факторного анализа в совершенствовании управлении технологическими процессами можно ознакомиться, обратившись к [18, 21, 104, 107-109, 111, 112].



ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В современном мире высоких технологий стратегически важным является направление развития результативных отношений науки и бизнеса, вклад науки, её достижения становятся решающим фактором социального и экономического прогресса [71, 97]. Указания на то, что наука оказывает огромное и во многом определяющее влияние на все стороны жизни человека, можно найти ещё в источниках глубокой древности. Например, уже в начале 1 тысячелетия н.э. в собрании древнеиндийских нравоучений говорилось: «Наука есть разрешение многих сомнений; она есть видение сокровитного; она есть око для всего; слеп тот, у кого её нет».

В наше время стало очевидно, что уровень развития науки, образования, наукоёмких отраслей, рынков наукоёмких продуктов определяет уровень развития страны в целом, создаёт основу для устойчивого роста экономики и решения социальных проблем.

Поэтому необходимо искать и находить возможности для созидательного применения подходов инновационного менеджмента в целях прикладной реализации опыта и знаний фундаментальной науки, что позволит не только финансировать дальнейшие исследования, но и создаст благоприятные условия для развития бизнеса за счёт применения современных научных методов [34, 93].

Обращаясь к материалу, изложенному в монографии, можно отметить, что корректная интеллектуальная поддержка принимаемых управленческих решений позволяет оперативно реагировать на изменения конъюнктуры рынка и выстраивать оптимальную стратегию производства.

Таким образом, актуальность материала, изложенного в монографии, определяется необходимостью развития систем управления производством за счёт совершенствования методов экономического факторного анализа, которые, с одной стороны, должны преодолевать недостатки существующих алгоритмов, а, с другой стороны, должны результативно использоваться в управлении экономическими и технологическими процессами на предприятиях.

Развитие методов факторного анализа производственных систем необходимо для поиска оптимального решения задачи управления производством в целях более эффективного использования материальных ресурсов.

Полученные в ходе исследования результаты позволяют более эффективно выполнять производственную программу, так как появляется воз-

возможность объективной количественной оценки причинно-следственных связей между факторами бизнес-системы.

Также следует сказать несколько слов о прикладном значении исследований. Можно согласиться с позицией, изложенной в [84] о том, что внедрение и использование экономико-математических методов в практике управления продвигаются медленными темпами, степень их применения намного ниже потенциально возможной, а влияние на качество управленческих работ ещё невелико. При ощутимых успехах в создании аналитических моделей, используемых в качестве основы для научного анализа и прогнозирования экономических процессов, достижения в применении моделей в реальной технологии управления гораздо более скромны.

Большинство управленческих задач, решаемых с применением моделей, надолго остаются в так называемой «опытной» эксплуатации, применяются параллельно с немодельной технологией, которая остаётся основной. В качестве пользователей моделей выступают преимущественно их разработчики. То есть образуется заметный разрыв между масштабами исследовательской деятельности в области экономико-математических методов планирования и управления и конечным практическим использованием результатов этой деятельности, глубиной их воздействия на качество управленческих работ.

По этой причине, при исследовании методологии факторного анализа и разработке новых методик и алгоритмов значительное внимание было уделено практическому аспекту применения полученных теоретических результатов.

При этом, как справедливо указывает академик РАН Федоренко Н.П. [97], экономическая наука не имеет права останавливаться в деле совершенствования собственной методологии, в том числе и особенно в развитии экономико-математических методов: как макромоделей, так и методов решения конкретных хозяйственных задач.

Не теряют своей актуальности методы математической статистики, позволяющие извлечь из кажущейся хаотичности информации основные тенденции и закономерности. Безусловно требуют дальнейшего развития многие разделы прикладной математики, используемой в экономических исследованиях и управлении производством, в том числе оптимальное программирование, комбинаторные методы, теория игр, теория массового обслуживания, теория расписаний, теория управления запасами, теория износа и замены оборудования, имитационное моделирование и деловые игры. Глубоко заблуждается тот, кто считает, что перечисленное является рудиментом

планового хозяйства. Большинство этих методов было разработано для рыночной экономики и в полной мере может и должно быть использовано в России именно сегодня.

Необходимость эволюции экономико-математических методов создаёт хорошие предпосылки для повышения на рынке труда спроса на хорошо подготовленных специалистов в соответствующих областях науки. Этот факт открывает широкие перспективы для проведения исследований в области комплексного анализа хозяйственной деятельности предприятий, предоставляя большое поле деятельности для профессионалов в области прикладной математики.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Абчук В.А. Экономико-математические методы: Элементарная математика и логика. Методы исследования операций. – СПб.: Союз, 1999. – 320 с.
2. Адамов В.Е. Факторный индексный анализ (методология и проблемы). – М.: Статистика, 1977. – 200 с.
3. Адамов В.Е. Экономика и статистика фирм / В.Е. Адамов, С.Д. Ильенкова, Т.П. Сиротина, С.А. Смирнов; Под ред. С.Д. Ильенковой. – М.: Финансы и статистика, 2000. – 288 с.
4. Айвазян С.А., Мхитарян В.С. Прикладная статистика и основы эконометрики. – М.: ЮНИТИ, 1998. – 1022 с.
5. Анализ хозяйственной деятельности в промышленности / Н.А. Русак, В.И. Стражев, О.Ф. Мигун и др.; Под общ. ред. В.И. Стражева. – Минск: Вышэйшая школа, 1998. – 398 с.
6. Андрейчиков А.В., Андрейчикова О.Н. Анализ, синтез, планирование решений в экономике. – М.: Финансы и статистика, 2000. – 368 с.
7. Баканов М.И., Шеремет А.Д. Теория экономического анализа. – М.: Финансы и статистика, 1997. – 416 с.
8. Баканов М.И. Экономический анализ. (Теория, история, современное состояние, перспективы) / М.И. Баканов, А.Н. Кашаев, А.Д. Шеремет. – М.: Финансы, 1976. – 264 с.
9. Барнгольц С.Б., Мельник М.В. Методология экономического анализа деятельности хозяйствующего субъекта. – М.: Финансы и статистика, 2003. – 240 с.
10. Басовский Л.Е. Теория экономического анализа. – М.: ИНФРА-М, 2001. – 222 с.
11. Безопасность России. Правовые, социально-экономические и научно-технические аспекты. Энергетическая безопасность (ТЭК и государство). – М.: МГФ «Знание», 2000. – 304 с.
12. Белобжецкий И.А. Финансовые показатели предприятия и методы их контроля. – М.: Финансы, 1975. – С. 125-132.
13. Бердникова Т.Б. Анализ и диагностика финансово-хозяйственной деятельности предприятия. – М.: ИНФРА-М, 2003. – 215 с.
14. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1985. – 304 с.
15. Блюмин С.Л. Актуальная математика в решении экономических производственных задач / С.Л. Блюмин, В.Ф. Суханов, С.В. Чеботарёв // Опыт разработки и внедрения в учебный процесс вуза новых образовательных технологий: Материалы Всеросс. науч.-метод. конф. Ч.II. – Липецк: ЛГТУ, 2000. – С. 47-48.
16. Блюмин С.Л. Динамический и структурный экономический факторный анализ / С.Л. Блюмин, В.Ф. Суханов, С.В. Чеботарев // Программное обеспечение автоматизированных систем управления: Сб. докл. междунар. науч.-техн. конф. SAS-2000. – Липецк: ЛГТУ, 2000. – С. 25-30.
17. Блюмин С.Л. Индексы Дивизиа в экономическом факторном анализе / С.Л. Блюмин, В.А. Суворов, С.В. Чеботарёв // Вестник Тамбовского университета.

Серия: Естественные и технические науки. Том 5, Вып. 4. – Тамбов: ТГУ, 2000. – С. 419-422.

18. Блюмин С.Л. Исследование модели потребления энергоносителей с использованием прямого детерминированного факторного анализа / С.Л. Блюмин, В.Ф. Суханов, С.В. Чеботарёв // Теория и технология производства чугуна и стали: Сб. науч. труд. межгосуд. науч.-техн. конф. – Липецк: ЛЭГИ, 2000. – С. 188-193.

19. Блюмин С.Л. Некоторые оценки для выпуклых комбинаций / С.Л. Блюмин, В.Ф. Суханов, С.В. Чеботарёв // Современный анализ и его приложения: Тез. докл. Воронежской зимней матем. школы. – Воронеж: ВГУ, 2000. – С. 35.

20. Блюмин С.Л. Обзор математического программного обеспечения / С.Л. Блюмин, Г.О. Иванова, С.В. Чеботарёв // Славяновские чтения: Сб. науч. тр. Российской науч.-техн. конф. с междунар. участием. – Липецк: ЛЭГИ, 1999. – С. 263-269.

21. Блюмин С.Л. Основы прикладной математики. Экономические производственные задачи: Учеб. пособие / С.Л. Блюмин, В.Ф. Суханов, С.В. Чеботарёв. – Липецк: ЛЭГИ, 2000. – 72 с.

22. Блюмин С.Л. Применение теоремы Бюдана-Фурье в экономическом факторном анализе / С.Л. Блюмин, В.Ф. Суханов, С.В. Чеботарёв // Современные проблемы информатизации в непроизводственной сфере и экономике: Сб. трудов. IX Междунар. открытой науч. конф. Вып. 9. – Воронеж: Изд-во «Научная книга», 2004. – С. 8-9.

23. Блюмин С.Л. Применение теоремы Лагранжа в экономическом факторном анализе / С.Л. Блюмин, В.Ф. Суханов, С.В. Чеботарёв // Современные проблемы информатизации: Тез. докл. III Междунар. электронной науч. конф. – Воронеж: ВГПУ, 1998. – С. 75-76.

24. Блюмин С.Л. Сравнение различных практических методик цепного динамического экономического факторного анализа / С.Л. Блюмин, В.Ф. Суханов, Т.Г. Розгон, С.В. Чеботарёв // Проблемы безопасности транспортного пространства: Сб. науч. трудов междунар. конф. ЛГТУ и ЛЭГИ. – Липецк: ЛЭГИ, 1998. – С. 49-50.

25. Блюмин С.Л. Теорема Лагранжа для эластичностей в индексном экономическом факторном анализе производственных функций / С.Л. Блюмин, В.Ф. Суханов, С.В. Чеботарёв // Современные методы теории функций и сложные проблемы: Материалы конф. Воронежской зимней математ. школы. – Воронеж: ВГУ, 2003. – С. 36-37.

26. Блюмин С.Л., Суханов В.Ф. Теорема о среднем в экономическом факторном анализе // Социальные, экономические и финансовые проблемы перехода экономики в стадию устойчивого роста: Тез. докл. Всероссийской науч.-практ. конф. – Липецк: ЛГТУ, 1997. – С. 103-104.

27. Блюмин С.Л. Формула конечных относительных приращений для эластичностей в относительном экономическом факторном анализе производственных функций. Методические аспекты / С.Л. Блюмин, В.Ф. Суханов, С.В. Чеботарёв // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. Том 5, Вып. 3. – Тамбов: ТГУ, 2003. – С. 347-348.

28. Блюмин С.Л. Экономический факторный анализ второго порядка / С.Л. Блюмин, В.Ф. Суханов, С.В. Чеботарёв // Современные проблемы информати-

зации в непромышленной сфере и экономике: Сб. трудов VI Междунар. открытой науч. конф. Вып. 6. – Воронеж: ВЭПИ, 2001. – С. 40-41.

29. Богатко А.Н. Основы экономического анализа хозяйствующего субъекта. – М.: Финансы и статистика, 2001. – 206 с.

30. Ватник П.А. Математика производственных функций // Экономическая школа. Вып. 3. 1993. – С. 225-230.

31. Виноградова Н.М. Теория индексов. – М.: Гостехиздат, 1930. – 200 с.

32. Выгодский М.Я. Справочник по элементарной математике. – М.: Физматгиз, 1962. – С. 77-78.

33. Гальперин В.М. Микроэкономика: В 2-х т. / В.М. Гальперин, С.М. Игнатев, В.И. Моргунов. – СПб.: Экономическая школа, 1996. – 349 с., 503 с.

34. Гейтс Б. Дорога в будущее. – М.: Изд. отдел «Русская Редакция» ТОО «Channel Trading Ltd.», 1996. – 312 с.

35. Гинзбург А.И. Экономический анализ. – СПб.: Изд-во «Питер», 2003. – 176 с.

36. Горский В.Г., Орлов А.И. Математические методы исследования: итоги и перспективы // Заводская лаборатория. – 2002. – № 1. – С. 108-112.

37. Грищенко О.В. Анализ и диагностика финансово-хозяйственной деятельности предприятия. – Таганрог: ТРТУ, 2000. – 112 с.

38. Грузинов В.П. Экономика предприятия (предпринимательская). – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002. – 795 с.

39. Гунин В.М. Опыт нормирования и прогнозирования электропотребления предприятия на основе математической обработки статистической отчетности / В.М. Гунин, Л.А. Копцев, Г.В. Никифоров // Промышленная энергетика. – 2000. – № 2. – С. 2-5.

40. Гуртовцев А.Л. О происхождении и значениях термина «АСКУЭ» // Промышленная энергетика. – 2003. – № 8. – С. 5-6.

41. Демидович Б.П., Кудрявцев В.А. Краткий курс высшей математики. – М.: ООО «Издательство АСТ», 2003. – 654 с.

42. Дубров А.М. Многомерные статистические методы / А.М. Дубров, В.С. Мхитарян, Л.И. Трошин. – М.: Финансы и статистика, 2000. – 352 с.

43. Ежов А.И. Попытаемся внести ясность // Вестник статистики. – 1973. – № 1. – С. 20.

44. Ершов Э.Б. Индексы Дивизиа и их аппроксимация // В кн. [52]. – С. 291-297.

45. Ершов Э.Б. Индексы цен и количеств Фишера и Монтгомери как индексы Дивизиа. // Экономика и математические методы. – 2003. – Т. 39. – № 2. – С.136-154.

46. Замков О.О. Математические методы в экономике / О.О. Замков, А.В. Толстопятенко, И.Н. Черемных. – М.: ДИС, 1997. – 368 с.

47. Зельдович Я.Б., Мышкис А.Д. Элементы прикладной математики. – СПб.: Лань, 2002. – 592 с.

48. Ильин В.А. Математический анализ. Начальный курс. В 2-х т. / В.А. Ильин, В.А. Садовничий, Бл. Х. Сендов. Под ред. А.Н. Тихонова. – М.: Изд-во МГУ, 1985, 1987. – 662 с; 358 с.

49. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория / М. Интрилигатор. – М.: Айрис-пресс, 2002. – 576 с.

50. Каракоз И.И., Самборский В.И. Теория экономического анализа. – Киев: Выща школа, 1989. – 295 с.
51. Кендалл М., Стьюарт А. Многомерный статистический анализ и временные ряды. – М.: Наука, 1976. – 736 с.
52. Кёвеш П. Теория индексов и практика экономического анализа. – М.: Финансы и статистика, 1990. – 303 с.
53. Клейнер Г.Б. Производственные функции. Теория, методы, применение. – М.: Финансы и статистика, 1986. – 238 с.
54. Ковалёв В.В., Волкова О.Н. Анализ хозяйственной деятельности предприятия. – М.: Проспект, 2000. – 424 с.
55. Конюховский П.В. Математические методы исследования операций в экономике. – СПб.: Питер, 2002. – 208 с.
56. Копняев В.П. Методы анализа прибыли и рентабельности предприятий. – М.: Финансы, 1969. – С. 113.
57. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1968. – 720 с.
58. Кудрин Б.И. О теоретических основах и практике нормирования и энергосбережения // Промышленная энергетика. – 2000. – № 6. – С. 33-36.
59. Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа: Т. 1. – Висагинас: Alfa, 1998. – С. 168-169.
60. Курс экономического анализа / Под. ред. М.И. Баканова, А.Д. Шеремета. – М.: Финансы и статистика, 1984. – 412 с.
61. Курс анализа хозяйственной деятельности / Под. ред. С.К. Татура, А.Д. Шеремета. – М.: Экономика, 1974. – 399 с.
62. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1968. – 431 с.
63. Лагоша Б.А. Оптимальное управление в экономике. – М.: Финансы и статистика, 2003. – 192 с.
64. Лазаренко С.Н., Тризно С.К. Роль фактора энергосбережения при прогнозировании структуры топливно-энергетического баланса страны // Промышленная энергетика. – 2003. – № 1. – С. 2-5.
65. Литвак Б.Г. Разработка управленческого решения. – М.: Дело, 2000. – 392 с.
66. Любушин Н.П. Анализ финансово-экономической деятельности предприятия / Н.П. Любушин, В.Б. Лещева, В.Г. Дьякова; Под ред. Н.П. Любушина. – М.: ЮНИТИ, 1999. – 471 с.
67. Любушин Н.П. Теория экономического анализа / Н.П. Любушин, В.Б. Лещева, Е.А. Сучков. – М.: Юристъ, 2002. – 480 с.
68. Методика экономического анализа деятельности промышленного предприятия (объединения) / Под ред. А.И. Бужинского, А.Д. Шеремета. – М.: Финансы и статистика, 1988. – 294 с.
69. Методические положения по планированию, формированию и учёту затрат на производство и реализацию продукции (работ, услуг) предприятий металлургического комплекса. Основные положения. – М.: Министерство промышленности, науки и технологии РФ, 2002. – 78 с.
70. Макконнелл К., Брю С. Экономикс: В 2-х т. – М.: Республика, 1992. – 375 с., 350 с.

71. Моисеев Н.Н. Как далеко до завтрашнего дня... Свободные размышления 1917-1993. – М.: Изд-во МНЭПУ, 1997. – 312 с.
72. Монахов А.В. Математические методы анализа экономики. – СПб.: Питер, 2002. – 176 с.
73. Никифоров Г.В., Заславец Б.И. Энергосбережение на металлургических предприятиях. – Магнитогорск, МГТУ, 2000. – 283 с.
74. Олейников В.К., Никифоров Г.В. Анализ и управление электропотреблением на металлургических предприятиях: Учеб. пособие. – Магнитогорск, 1999. – 219 с.
75. Олейников В.К., Никифоров Г.В. Нормирование энергозатрат при многоменклатурном производстве // Промышленная энергетика. – 2000. – № 6. – С. 30-32.
76. Осика Л.К. Принципы создания измерительно-информационных комплексов для целей коммерческих расчетов потребителей на оптовом рынке электроэнергии // Измерение.RU. – 2002. – № 6. – С. 6-10.
77. Осика Л.К. Роль моделирования при выполнении измерений электроэнергии для целей коммерческого учёта // Измерение.RU. – 2003. – № 8. – С. 12-14.
78. Погребняк Е.В. О ходе реформирования электроэнергетики: от постановлений к закону // Аналитический доклад. – М.: Институт комплексных стратегических исследований, 2003. – 37 с.
79. Похабов В.И. Энергетический менеджмент на промышленных предприятиях / В.И. Похабов, В.И. Клевзович, В.В. Ворфоломеев. – Минск: УП «Технопринт», 2002. – 176 с.
80. Проект концепции стратегии РАО «ЕЭС России» на 2003-2008 гг. «5+5». – М.: ОАО РАО «ЕЭС России», 2003. – 42 с.
81. Прыкин Б.В. Техничко-экономический анализ производства. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2000. – 399 с.
82. Путь в XXI век: стратегические проблемы и перспективы российской экономики / Рук. авт. колл. Д.С. Львов; Отд. экон. РАН. – М.: Экономика, 1999. – 793 с. – (Системные проблемы России).
83. Пястолов С.М. Экономический анализ деятельности предприятия. – М.: Академический Проект, 2002. – 573 с.
84. Райзберг Б.А., Фатхутдинов Р.А. Управление экономикой. – М.: ЗАО «Бизнес-школа «Интел-Синтез»», 1999. – 784 с.
85. Савицкая Г.В. Анализ хозяйственной деятельности предприятия. – Минск: Новое знание, 2002. – 704 с.
86. Савичев П.И. Анализ рентабельности. – Л.: ЛФЭИ, 1972. – С. 22-31.
87. Савичев П.И. Экономический анализ – орудие выявления внутрихозяйственных резервов. – М.: Финансы, 1968. – 245 с.
88. Самуэльсон Пол А., Нордхаус Вильям Д. Экономика. – М: Изд-во «БИНОМ», 1997. – 800 с.
89. Сборник задач по математике для вузов. Ч. 1: Линейная алгебра и основы математического анализа / А.В. Ефимов, В.А. Болгов, А.Ф. Каракулин, Б.П. Демидович. – М.: Наука, 1993. – 480 с.
90. Скороходов В.Н. Активная работа в области энергосбережения на Новолипецком металлургическом комбинате / В.Н. Скороходов, П.П. Чернов, В.В. Логинов, О.Е. Фрумкин, А.Н. Кичигин // Сталь. – 2003. – № 5. – С. 88-91.

91. Смирнов В.И. Курс высшей математики: Т. 1. – М.: Наука, 1967. – С. 117-119, С. 367-370.
92. Солодовников А.С. Математика в экономике / А.С. Солодовников, В.А. Бабайцев, А.В. Браилов, И.Г. Шандра. Ч. 2. – М.: Финансы и статистика, 2001. – 376 с.
93. Сорос Дж. Алхимия финансов: Пер. с англ. – М.: Инфра-М, 1996. – 336 с.
94. Суворов Н.В. Макроэкономическое моделирование технологических изменений (теоретические, прикладные и инструментальные вопросы): Препринт WP2/2002/04. – М.: ГУ ВШЭ, 2002. – 80 с.
95. Терехов Л.Л. Производственные функции. – М.: Статистика, 1974. – 127 с.
96. Управление социально-экономическим развитием России: концепции, цели, механизмы / Д.С. Львов, А.Г. Поршнев (Авторский коллектив). – М.: Экономика, 2002. – 702 с.
97. Федоренко Н.П. Россия: уроки прошлого и лики будущего. – М.: Экономика, 2000. – 489 с.
98. Фёдоров А.Г. Delphi 3.0 для всех. – М.: КомпьютерПресс, 1998. – 544 с.
99. Фёдорова В., Егоров Ю. К вопросу о разложении прироста на факторы // Вестник статистики. – 1977. – № 5. – С. 71-73.
100. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: Т. 1 / Г.М. Фихтенгольц. – СПб.: Лань, 1997. – 608 с.
101. Хахалина А.Н. Анализ прибыли и рентабельности на металлургическом предприятии / А.Н. Хахалина, Л.Г. Иванова. – М.: Металлургия, 1974. – 82 с.
102. Хлебников В.В. Технологические особенности электронной торговли и расчётов на бирже электроэнергии / В.В. Хлебников // Промышленная энергетика. – 2003. – № 12. – С. 9-15.
103. Хумал А. Разделение прироста производства // Учёные записки по статистике. – М.: АН СССР, 1964. – С. 206-212.
104. Чеботарёв С.В. Актуальные аспекты применения математических методов в современном экономическом факторном анализе // Международный форум по проблемам науки, техники и образования: Труды форума. – Т. 1. – М.: Академия наук о Земле, 2002. – С. 80-83.
105. Чеботарёв С.В. Индексы Дивизиа // Наука и молодёжь на рубеже столетий: Сб. науч. трудов студенческой науч.-практ. конф. – Липецк: ЛГТУ, 2000. – С. 86-87.
106. Чеботарёв С.В. Инновационные подходы к методологии экономического факторного анализа // Научные труды молодых исследователей программы «Шаг в будущее». Т. 5. – Москва: НТА «АПФН», 2002. – С. 94-96.
107. Чеботарёв С.В. Метод Лагранжа и теорема Бюдана-Фурье в экономическом факторном анализе // Системы управления и информационные технологии, 2003, №1-2 (12). – Воронеж: Изд-во «Научная книга». – С. 30-35.
108. Чеботарёв С.В. Применение математических методов к анализу и решению экономических задач // Молодёжная науч.-техн. конф. техн. вузов Центральной России: Тез. докл. конф. – Брянск: БГТУ, 2000. – С. 57-58.
109. Чеботарёв С.В. Применение методов экономического факторного анализа к исследованию производственных моделей // Новые технологии в научных исследованиях, проектировании, управлении, производстве: Сб. трудов межвузовской науч.-техн. конф. – Воронеж: ВГТУ, 2001. – С. 19-20.

110. Чеботарёв С.В. Применение теоремы о промежуточном значении в экономическом факторном анализе // Научные труды: Межвузовский сборник. – Липецк: ЛЭГИ, 1998. – С. 165-176.

111. Чеботарёв С.В. Применение экономического факторного анализа для управления хозяйственными процессами // Управление большими системами: Сборник трудов молодых учёных, Вып. 5. – М.: ИПУ РАН, 2003. – С. 114-122.

112. Чеботарёв С.В. Прямой детерминированный факторный анализ как инструмент исследования математических моделей // Молодые учёные – промышленности, науке, технологиям и профессиональному образованию для устойчивого развития: проблемы и новые решения: Сб. науч. докл. и тез. Второй Междунар. конф. стран СНГ. – М.: Изд-во АМИ, 2000. – С. 97-98.

113. Чеботарёв С.В. Современные концепции экономического факторного анализа // Сборник научных трудов преподавателей и сотрудников, посвящённый 45-летию Липецкого государственного технического университета. Часть 3. – Липецк: ЛГТУ, 2001. – С. 70-73.

114. Чеботарёв С.В. Теория и практика статического и динамического экономического факторного анализа // Системы управления и информационные технологии: Межвузовский сб. науч. трудов. – Воронеж: Центрально-Черноземное книжное изд-во, 2001. – С. 68-73.

115. Чечевицына Л.Н., Чуев И.Н. Анализ финансово-хозяйственной деятельности. – М.: Маркетинг, 2002. – 352 с.

116. Шеремет А.Д., В.А. Протопопов. Анализ экономики промышленного производства. – М.: Высшая школа, 1984. – 352 с.

117. Шеремет А.Д. Метод цепных подстановок и совершенствование факторного анализа экономических показателей / А.Д. Шеремет, Г.Г. Дей, В.Н. Шаповалов // Вестник МГУ, серия «Экономика». 1971. – № 4. – С. 32-34.

118. Шеремет А.Д. Методика финансового анализа / А.Д. Шеремет, Р.С. Сайфулин, Е.В. Негашев. – М.: ИНФРА-М, 2001. – 208 с.

119. Шеремет А.Д., Негашев Е.В. Методика финансового анализа деятельности коммерческих организаций. – М.: ИНФРА-М, 2003. – 237 с.

120. Шеремет А.Д. Комплексный экономический анализ деятельности предприятия (вопросы методологии). – М.: Экономика, 1974. – 207 с.

121. Шеремет А.Д. Теория экономического анализа. – М.: ИНФРА-М, 2002. – 333 с.

122. Щиборщ К.В. Анализ хозяйственной деятельности предприятий России. – М.: ДИС, 2003. – 320 с.

123. Экономико-математические методы в анализе хозяйственной деятельности предприятий и объединений / А.Б. Бутник-Сиверский, Р.С. Сайфулин, Я.Р. Рейльян и др. – М.: Финансы и статистика, 1982. – 200 с.

124. Экономико-математические методы и прикладные модели: Учеб. пособие для вузов / В.В. Федосеев, А.Н. Гармаш, Д.М. Дайитбегов и др.; Под ред. В.В. Федосеева. – М.: ЮНИТИ, 1999. – С. 189-230.

125. Экономический анализ / Под. ред. Л.Т. Гиляровской. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2001. – 527 с.

126. Экономический анализ в торговле / Под. ред. М.И. Баканова. – М.: Финансы и статистика, 2004. – 400 с.

127. Экономический анализ: ситуации, тесты, примеры, задачи, выбор оптимальных решений, финансовое прогнозирование / Под. ред. М.И. Баканова, А.Д. Шеремета. – М.: Финансы и статистика, 1999. – 656 с.
128. Экономический анализ хозяйственной деятельности / Под ред. А.Д. Шеремета – М.: Экономика, 1979. – 205 с.
129. Югенбург С.М. О разложении абсолютных приростов по факторам // Учёные записки по статистике. – М.: АН СССР, 1955. – С. 66-83.
130. Ясин Е.Г. Теория информации и экономические исследования. – М.: Статистика, 1970. – С. 28.
131. Chebotarev S. V. Economic factorial analysis: general theory and original approaches / S.V. Chebotarev // The 4th International Carpathian Control Conference (ICCC 2003): Proceedings of the conference. – High Tatras, Slovak Republic, 2003. – P. 795-798.
132. Chebotarev S.V. Modern concepts of economic factorial analysis // The 15th European Simulation Multiconference (ESM 2001): Proceedings of the conference. – Prague, Czech Republic, 2001. – P. 76-77.
133. Chebotarev S.V. Numerical mathematics methods in economic factorial analysis // The 5th International Conference for Young Computer Scientists (ICYCS 1999): Proceedings of the conference. – Nanjing, P. R. China, 1999. – Vol. 1-2, part 10: Computer applications. – P. 125-131.
134. Chiang Alpha C. Fundamental methods of mathematical economics. – N.Y.: McGraw-Hill, 1990. – 788 p.
135. Cobb C.W., Douglas P.H. A Theory of Production // American Economic Review. – 1928. – № 1.
136. Hunt S., Shuttleworth G. Competition and choice in electricity. – Chichester: John Wiley and Sons, 2003. – 242 p.
137. Hunter John K., Nachtergaele Bruno. Applied analysis. – World Scientific Publishing Co, 2001. – 456 p.
138. Mignotte M. Mathématiques pour le calcul formel. – Paris: Press. Univ. de France, 1989. – 346 p.
139. Rudin W. Principles of mathematical analysis / Walter Rudin. – N.Y.: McGraw-Hill, 1976. – 343 p.
140. Sydsaeter K., Hammond P. Essential mathematics for economic analysis / Knut Sydsaeter, – FT Prentice Hall, 2001. – 696 p.

Сведения об авторах:

Блюмин Семён Львович
доктор физико-математических наук, профессор

Суханов Валерий Фёдорович
кандидат технических наук, доцент

Чеботарёв Сергей Владимирович
кандидат технических наук

УДК 658.012.12

ББК 65.053я73

Б71 Блюмин С.Л., Суханов В.Ф., Чеботарёв С.В. Экономический
факторный анализ: Монография. – Липецк: ЛЭГИ, 2004. – 148 с.

ISBN 5-900037-44-4

В монографии описываются методологические принципы экономического факторного анализа, рассматриваются теоретические основы и практические аспекты применения современного экономического анализа.

В контексте применения математических методов в экономическом анализе рассмотрен ряд актуальных производственных задач. Последовательно излагается новый универсальный метод факторного анализа, основанный на применении теоремы о среднем значении. Приведены примеры практической реализации полученных в ходе исследований результатов. Показана роль экономического факторного анализа в разработке оптимальных управленческих решений, в контроле над конечными результатами коммерческой и производственной деятельности предприятий.

Компьютерная вёрстка
Техническое редактирование

С.В. Чеботарёва
Н.С. Правильниковой,
И.Ф. Ковешниковой

Подписано в печать 18.11.2004. Формат 60×84/16. Бумага 55-60 г/м².

Гарнитура «Таймс». Усл. печ. л. 9,2.

Тираж 200 экз. Заказ № 828. Цена свободная.

Липецкий эколого-гуманитарный институт.

398600, г. Липецк, ул. Интернациональная, 5а.

Таблица 2.4

Формулы расчёта величин факторного влияния для мультипликативных и кратных моделей
(вычисляется значение параметра α)

Вид модели	Структура факторной системы	Формулы расчёта влияния изменения факторов на изменение результирующего показателя
1	2	3
$y = \prod_{i=1}^n x_i$	$\Delta y = \prod_{i=1}^n (x_i + \Delta x_i) - \prod_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n A_{x_i}$	$A_{x_i} = \prod_{j=1}^{i-1} (x_j + \alpha \Delta x_j) \cdot \Delta x_i \cdot \prod_{k=i+1}^n (x_k + \alpha \Delta x_k),$ <p>где α можно найти после решения уравнения</p> $\sum_{m=0}^{n-2} (n-m) \cdot \lambda_m \cdot \alpha^{n-1-m} - \sum_{m=0}^{n-2} \lambda_m = 0, \lambda_0 = 1, \lambda_m = \sum_{i=1}^{C_n^m} \prod_{j=1}^m a_{ij},$ $a_{ij} = 1/\delta_{x_k} = x_k / \Delta x_k, m = 1, \dots, n-2, k = 1, \dots, n$
$y = \frac{x_1}{x_2}$	$\Delta y = \frac{x_1 + \Delta x_1}{x_2 + \Delta x_2} - \frac{x_1}{x_2} = A_{x_1} + A_{x_2}$	$A_{x_1} = \frac{\Delta x_1}{x_2 + \alpha \Delta x_2}, A_{x_2} = \frac{\Delta x_2 (x_1 + \alpha \Delta x_1)}{(x_2 + \alpha \Delta x_2)^2}, \alpha = \frac{\sqrt{x_2 (x_2 + \Delta x_2)} - x_2}{\Delta x_2}$
$y = \frac{\sum_{i=2}^n x_i}{x_1}$	$\Delta y = \frac{\sum_{i=2}^n (x_i + \Delta x_i)}{x_1 + \Delta x_1} - \frac{\sum_{i=2}^n x_i}{x_1} = \sum_{i=1}^n A_{x_i}$	$A_{x_1} = \Delta x_1 \cdot \frac{\sum_{i=2}^n (x_i + \Delta x_i)}{(x_1 + \alpha \Delta x_1)^2}, A_{x_i (i \geq 2)} = \frac{\Delta x_i}{(x_1 + \alpha \Delta x_1)^2},$ $\alpha = \frac{\sqrt{x_1 (x_1 + \Delta x_1)} - x_1}{\Delta x_1}$

1	2	3
$y = \frac{x_1}{\sum_{i=2}^n x_i}$	$\Delta y = \frac{x_1 + \Delta x_1}{\sum_{i=2}^n (x_i + \Delta x_i)} - \frac{x_1}{\sum_{i=2}^n x_i} = \sum_{i=1}^n A_{x_i}$	$A_{x_1} = \frac{\Delta x_1}{\sum_{i=2}^n (x_i + \alpha \Delta x_i)}, \quad A_{x_i (i \geq 2)} = \frac{\Delta x_i \cdot (x_1 + \alpha \Delta x_1)}{(\sum_{i=2}^n (x_i + \alpha \Delta x_i))^2},$ $\alpha = \frac{\sqrt{\sum_{i=2}^n x_i \cdot \sum_{i=2}^n (x_i + \Delta x_i)} - \sum_{i=2}^n x_i}{\sum_{i=2}^n \Delta x_i}$
$y = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\sum_{j=n+1}^m x_j}$	$\Delta y = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i + \Delta x_i)}{\sum_{j=n+1}^m (x_j + \Delta x_j)} - \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\sum_{j=n+1}^m x_j} = \sum_{k=1}^m A_{x_k}$	$A_{x_i (i \leq n)} = \frac{\Delta x_i}{\sum_{j=n+1}^m (x_j + \alpha \Delta x_j)},$ $A_{x_j (n+1 \leq j \leq m)} = \frac{\Delta x_j \cdot \sum_{i=1}^n (x_i + \alpha \Delta x_i)}{(\sum_{j=n+1}^m (x_j + \alpha \Delta x_j))^2},$ $\alpha = \frac{\sqrt{\sum_{j=n+1}^m x_j \cdot \sum_{j=n+1}^m (x_j + \Delta x_j)} - \sum_{j=n+1}^m x_j}{\sum_{j=n+1}^m \Delta x_j}$

Таблица 2.5

Формулы расчёта величин факторного влияния для мультипликативных и кратных моделей
(применяется интегральная форма теоремы о среднем)

Вид модели	Структура факторной системы	Формулы расчёта влияния изменения факторов на изменение результирующего показателя
1	2	3
$y = \prod_{i=1}^n x_i$	$\Delta y = \prod_{i=1}^n (x_i + \Delta x_i) - \prod_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n A_{x_i}$	$A_{x_i} = \prod_{l=1}^n \Delta x_l \cdot \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} \cdot \lambda_{n-k}^i \right), \lambda_0^i = 1, \lambda_m^i = \sum_{k=1}^{C_{n-1}^m} \prod_{j=1}^m a_{kj},$ $a_{kj} = \frac{x_h}{\Delta x_h}, m = 1, \dots, n-1, h = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, n$
$y = \frac{x_1}{x_2}$	$\Delta y = \frac{x_1 + \Delta x_1}{x_2 + \Delta x_2} - \frac{x_1}{x_2} = A_{x_1} + A_{x_2}$	$A_{x_1} = \frac{\Delta x_1}{\Delta x_2} \cdot \ln \left \frac{x_2 + \Delta x_2}{x_2} \right , A_{x_2} = \Delta y - A_{x_1}$
$y = \frac{\sum_{i=2}^n x_i}{x_1}$	$\Delta y = \frac{\sum_{i=2}^n (x_i + \Delta x_i)}{x_1 + \Delta x_1} - \frac{\sum_{i=2}^n x_i}{x_1} = \sum_{i=1}^n A_{x_i}$	$A_{x_i (i \geq 2)} = \frac{\Delta x_i}{\Delta x_1} \cdot \ln \left \frac{x_1 + \Delta x_1}{x_1} \right , A_{x_1} = \Delta y - \sum_{i=2}^n A_{x_i}$

1	2	3
$y = \frac{x_1}{\sum_{i=2}^n x_i}$	$\Delta y = \frac{x_1 + \Delta x_1}{\sum_{i=2}^n (x_i + \Delta x_i)} - \frac{x_1}{\sum_{i=2}^n x_i} = \sum_{i=1}^n A_{x_i}$	$A_{x_1} = \frac{\Delta x_1}{\sum_{i=2}^n \Delta x_i} \cdot \ln \left \frac{\sum_{i=2}^n (x_i + \Delta x_i)}{\sum_{i=2}^n \Delta x_i} \right , \quad A_{x_i} (i \geq 2) = \frac{\Delta y - A_{x_1}}{\sum_{i=2}^n \Delta x_i} \Delta x_i$
$y = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\sum_{j=n+1}^m x_j}$	$\Delta y = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i + \Delta x_i)}{\sum_{j=n+1}^m (x_j + \Delta x_j)} - \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\sum_{j=n+1}^m x_j} = \sum_{k=1}^m A_{x_k}$	$A_{x_i} (i \leq n) = \frac{\Delta x_i}{\sum_{j=n+1}^m \Delta x_j} \cdot \ln \left \frac{\sum_{j=n+1}^m (x_j + \Delta x_j)}{\sum_{j=n+1}^m \Delta x_j} \right ,$ $A_{x_j} (n+1 \leq j \leq m) = \frac{\Delta y - \sum_{i=1}^n A_{x_i}}{\sum_{j=n+1}^m \Delta x_j} \Delta x_j$