

ВОЛШЕБНЫЙ МИР МАГИЧЕСКИХ КВАДРАТОВ

113	130	125	142	115	132	123	140	117	134	121	138	119	136	127	144	113	130	125	142
128	143	116	131	126	141	118	133	124	139	120	135	122	137	114	129	128	143	116	131
2	241	14	253	4	243	12	251	6	245	10	249	8	247	16	255	2	241	14	253
15	256	3	244	13	254	5	246	11	252	7	248	9	250	1	242	15	256	3	244
226	17	238	29	228	19	236	27	230	21	234	25	232	23	240	31	226	17	238	29
239	32	227	20	237	30	229	22	235	28	231	24	233	26	225	18	239	32	227	20
209	34	221	46	211	36	219	44	213	38	217	42	215	40	223	48	209	34	221	46
224	47	212	35	222	45	214	37	220	43	216	39	218	41	210	33	224	47	212	35
49	194	61	206	51	196	59	204	53	198	57	202	55	200	63	208	49	194	61	206
64	207	52	195	62	205	54	197	60	203	56	199	58	201	50	193	64	207	52	195
66	177	78	189	68	179	76	187	70	181	74	185	72	183	80	191	66	177	78	189
79	192	67	180	77	190	69	182	75	188	71	184	73	186	65	178	79	192	67	180
162	81	174	93	164	83	172	91	166	85	170	89	168	87	176	95	162	81	174	93
175	96	163	84	173	94	165	86	171	92	167	88	169	90	161	82	175	96	163	84
145	98	157	110	147	100	155	108	149	102	153	106	151	104	159	112	145	98	157	110
160	111	148	99	158	109	150	101	156	107	152	103	154	105	146	97	160	111	148	99
113	130	125	142	115	132	123	140	117	134	121	138	119	136	127	144	113	130	125	142
128	143	116	131	126	141	118	133	124	139	120	135	122	137	114	129	128	143	116	131
2	241	14	253	4	243	12	251	6	245	10	249	8	247	16	255	2	241	14	253
15	256	3	244	13	254	5	246	11	252	7	248	9	250	1	242	15	256	3	244
226	17	238	29	228	19	236	27	230	21	234	25	232	23	240	31	226	17	238	29
239	32	227	20	237	30	229	22	235	28	231	24	233	26	225	18	239	32	227	20
209	34	221	46	211	36	219	44	213	38	217	42	215	40	223	48	209	34	221	46
224	47	212	35	222	45	214	37	220	43	216	39	218	41	210	33	224	47	212	35
49	194	61	206	51	196	59	204	53	198	57	202	55	200	63	208	49	194	61	206
64	207	52	195	62	205	54	197	60	203	56	199	58	201	50	193	64	207	52	195
66	177	78	189	68	179	76	187	70	181	74	185	72	183	80	191	66	177	78	189
79	192	67	180	77	190	69	182	75	188	71	184	73	186	65	178	79	192	67	180
162	81	174	93	164	83	172	91	166	85	170	89	168	87	176	95	162	81	174	93
175	96	163	84	173	94	165	86	171	92	167	88	169	90	161	82	175	96	163	84
145	98	157	110	147	100	155	108	149	102	153	106	151	104	159	112	145	98	157	110
160	111	148	99	158	109	150	101	156	107	152	103	154	105	146	97	160	111	148	99
113	130	125	142	115	132	123	140	117	134	121	138	119	136	127	144	113	130	125	142
128	143	116	131	126	141	118	133	124	139	120	135	122	137	114	129	128	143	116	131
2	241	14	253	4	243	12	251	6	245	10	249	8	247	16	255	2	241	14	253
15	256	3	244	13	254	5	246	11	252	7	248	9	250	1	242	15	256	3	244
226	17	238	29	228	19	236	27	230	21	234	25	232	23	240	31	226	17	238	29
239	32	227	20	237	30	229	22	235	28	231	24	233	26	225	18	239	32	227	20
209	34	221	46	211	36	219	44	213	38	217	42	215	40	223	48	209	34	221	46
224	47	212	35	222	45	214	37	220	43	216	39	218	41	210	33	224	47	212	35
49	194	61	206	51	196	59	204	53	198	57	202	55	200	63	208	49	194	61	206

г. Саратов

2009 г.

АННОТАЦИЯ

В книге популярно излагаются многие вопросы теории построения магических квадратов, их преобразования. Вместе с хорошо известными методами построения приведено несколько оригинальных методов. Рассмотрены методы построения и свойства мало исследованных в русскоязычной литературе совершенных магических квадратов. Книга адресована всем любителям математики и в частности тем, кто увлекается комбинаторными задачами. Простота изложения делает книгу доступной и интересной всем – от школьников и школьных преподавателей до студентов и аспирантов.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Магические (волшебные) квадраты имеют очень древнюю и богатую историю, о которой можно написать отдельную книгу.

Самый первый магический квадрат третьего порядка (**рис. 1**) “был известен ещё древним китайцам под названием Ло шу. По преданию, он впервые появился на панцире священной черепахи, выползшей из реки Ло в XXIII веке до нашей эры, но современные китаеведы прослеживают Ло шу лишь до IV века до нашей эры. С того времени и вплоть до X века этот магический квадрат был мистическим символом огромного значения. Чётные числа древние китайцы отождествляли с “инь” – женским началом, нечётные с “ян” – мужским. Пятёрка в центральной клетке по их представлениям соответствовала земле, вокруг которой в строгом равновесии между инь и ян размещались 4 других элемента: числа 4 и 9 символизировали металл, 2 и 7 – огонь, 1 и 6 – воду, 3 и 8 – дерево”. [10]

4	9	2
3	5	7
8	1	4

Рис. 1

Из Китая магические квадраты проникли в Индию (примерно в XI веке), а затем в Японию. В Европу магические квадраты были завезены из Византии в XV веке. Магический квадрат четвёртого порядка так очаровал немецкого художника Альбрехта Дюрера, что он поместил его на своей знаменитой гравюре “Меланхолия”. Этот квадрат стал называться квадратом Дюрера. Интересно отметить, что средние числа в последней строке квадрата Дюрера – 15 и 14 – складываются в год создания гравюры – 1514. Подробно о квадрате Дюрера рассказано в главе 2.

В средние века магические квадраты связывали с астрологией, каждой планете соответствовал свой магический квадрат. Считалось, что магические квадраты обладают мистическими свойствами.

“Учение о магических квадратах занимало в математике значительное место лишь в тот период, когда в качестве основных “приложений” математики фигурировали числовые суеверия и астрология; в дальнейшем при возникновении новых, более серьёзных “потребителей” математики выяснилось, что для решения соответствующих естественнонаучных и технических задач теория магических квадратов не нужна. С тех пор она стала рассматриваться лишь в качестве одного из математических курьёзов. Однако при всём том учение о магических квадратах до сих пор может представлять интерес для любителей математики, в первую очередь для учащихся, в силу изящности построений и простоты и наглядности задач, не говоря уже о том, что это учение представляет собой благодарное поле приложения ряда общих теоретико-числовых концепций, весьма существенных и вне их связи с задачами теории магических квадратов”. [3]

Здесь следует сказать, что с 1964 года, когда была издана книга М. М. Постникова, из которой приведена цитата, многое изменилось, и магические квадраты перестали быть только объектом математических развлечений и очень изящной головоломкой. Сейчас магические квадраты находят практическое применение. Например, в [8] говорится о применении магических квадратов для коррекции ошибок, возникающих при передаче цифровой информации: “...на некоторую совокупность произвольно выбираемых чисел можно, пользуясь принципами построения магических квадратов, наложить за счёт введения избыточных чисел некоторые дополнительные условия. На приёмной стороне

производится проверка условий, которым должна удовлетворять переданная совокупность чисел, и производится контроль правильности передачи и исправления ошибок”. Дается ссылка на книгу Самойленко С. И. – Помехоустойчивое кодирование. – М.: 1966.

В последнее время в Интернете появились сообщения об использовании магических квадратов в новейших технологиях создания цифровых изображений. (21,22)

С древних времён до наших дней математики и даже люди других профессий занимаются составлением магических квадратов, разработкой методов построения, классификацией магических квадратов, изучением их свойств. Большой интерес вызывал вопрос об общем количестве магических квадратов разных порядков. Магического квадрата размером 2×2 не существует. Магический квадрат третьего порядка всего один с точностью до поворотов и отражений (об этих основных преобразованиях магических квадратов рассказано в книге). Этот квадрат показан на **рис. 1**.

Существует 880 магических квадратов четвёртого порядка с учётом поворотов и отражений. Впервые все эти квадраты построил французский математик Френикль де Бесси (Бернар) (1605 – 1675). Френикль выполнил очень большую работу по исследованию свойств магических квадратов четвёртого порядка. Его классификация этих квадратов очень интересна. [5]

“... Французским академиком Бернаром Френиклем де Бесси были написаны два сочинения о магических квадратах. Это были рукописные доклады, представленные им Королевской академии наук в Париже. Они были напечатаны впервые в результате хлопот математика Лягира только в 1693 г, спустя 18 лет после смерти Френикля. Не будь Лягира, неизвестно сколько лет лежали бы работы Френикля в архивах Королевской академии...”

...Трудолюбие Френикля особенно видно в его сочинении “Общая таблица магических квадратов в четыре”. Френикль был и остаётся единственным математиком, который вычислил и построил все 880 вариантов магических квадратов в 16 клеток. Таблица занимает 43 страницы книги. Трудно представить себе, сколько времени заняла у Френикля эта работа. Трудно потому что в наше время и в XVII в. решения одной и той же задачи выглядят совершенно по-разному...” (23)

“Существует множество классификаций магических квадратов порядка 4, основанных на различных принципах. Одна из лучших классификаций была предложена Генри Э. Дьюдени.

Точное число квадратов порядка 5 не было известно до 1973 г., когда полный перебор магических квадратов был осуществлён компьютерной программой, разработанной Р. Шрёппелем, математиком и программистом из “Information International”. Прогон программы на компьютере занимает около 100 часов машинного времени. Окончательное сообщение, написанное М. Билером, появилось в октябре 1975 г. С точностью до поворотов и отражений существует 275 305 224 магических квадратов порядка 5”. [10]

Для магических квадратов 5-го порядка тоже предпринята попытка классификации, например, по числу в центральной ячейке квадратов. Эта классификация представлена в [10].

Современная оценка количества магических квадратов разных порядков и видов приведена в (24).

Особое место в теории магических квадратов занимает разработка методов построения. За несколько веков составлено множество самых разных алгоритмов. В настоящее время большинство из них формализовано и запрограммировано. Это позволяет в считанные секунды с помощью компьютерной программы построить магический квадрат любого порядка, обладающий теми или иными свойствами, –

ассоциативный, пандиагональный, совершенный, бимагический и т.д. Некоторые методы являются универсальными, как например: метод составных квадратов, метод использования двух латинских ортогональных квадратов. Другие методы применяются только для построения отдельной серии порядков и конкретных видов магических квадратов.

Много методов построения магических квадратов разработано в XX-XXI вв. Самыми интересными из них, пожалуй, являются методы построения идеальных и совершенных магических квадратов.

Второй важнейший вопрос в теории магических квадратов – изучение различных преобразований. Существуют две группы преобразований магических квадратов – эквивалентные и неэквивалентные. Преобразования первой группы переводят исходный магический квадрат в эквивалентный (или изоморфный) магический квадрат. В эту группу входят, прежде всего, основные преобразования магических квадратов – повороты и отражения. Преобразования второй группы превращают исходный магический квадрат в существенно новый (или неизоморфный) магический квадрат.

О пользе занятий магическими квадратами очень хорошо сказал французский учёный А. Обри: “Составление магических квадратов представляет собой превосходную умственную гимнастику, развивающую способность понимать идеи размещения, сочетания, симметрии, классификации, обобщения и т. д.” [8]

ГЛАВА 1

ВВОДНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Традиционным (нормальным или классическим) магическим квадратом порядка n называется квадратная таблица размером $n \times n$, заполненная различными натуральными числами от 1 до n^2 так, что сумма чисел в каждой строке, каждом столбце и в обеих диагоналях таблицы равна одному и тому же числу, называемому **магической константой** квадрата.

Клетки квадратной таблицы мы будем называть также ячейками, а числа, расположенные в ячейках – элементами магического квадрата.

Нетрудно вывести формулу для магической константы S квадрата порядка n :

$$S = n(n^2 + 1)/2$$

Если суммы чисел в диагоналях квадрата не равны магической константе, то такой квадрат называется **полумагическим** (или **неполным**).

Магический квадрат порядка n называется **ассоциативным**, если сумма любых двух чисел, расположенных симметрично относительно центра квадрата, равна одному и тому же числу, которое, как нетрудно понять, равно $n^2 + 1$. Такие числа в ассоциативном магическом квадрате называются **взаимно дополнительными** или **комплементарными**. На **рис. 1.1** представлен ассоциативный магический квадрат четвёртого порядка.

1	14	15	4
8	11	10	5
12	7	6	9
13	2	3	16

Рис. 1.1

Магическая константа квадрата 4-го порядка равна 34. Сумма комплементарных чисел в квадрате 4-го порядка равна 17. На **рис. 1.1** выделены два комплементарных числа. Обозначим сумму комплементарных чисел ассоциативного магического квадрата K_a (константа ассоциативности). Очевидно, что сумма комплементарных чисел связана с магической константой квадрата следующей формулой:

$$[1] \quad S = K_a * n/2$$

В ассоциативных квадратах нечётного порядка в центральной ячейке находится число равное $K_a/2$.

Обычные диагонали в магическом квадрате называют **главными**, чтобы отличать их от **разломанных диагоналей**. Разломанная диагональ – это диагональ, параллельная главной диагонали и проходящая тоже через n ячеек квадрата. Поскольку главных диагоналей две, то разломанные диагонали тоже будут двух направлений. **Рис. 1.2** помогает понять, как образуются разломанные диагонали магического квадрата четвёртого порядка.

1	14	7	12	1	14	7	12
15	4	9	6	15	4	9	6
10	5	16	3	10	5	16	3
8	11	2	13	8	11	2	13

Рис. 1.2

Пояснение: к магическому квадрату порядка n присоединяется его копия. В полученном таким образом прямоугольнике размером $n \times 2n$ проводятся прямые, параллельные главным диагоналям магического квадрата и проходящие через n клеток.

Понятно, что в магическом квадрате порядка n будет $2(n-1)$ разломанных диагоналей.

Магический квадрат, заполненный любыми натуральными числами, называется **нетрадиционным** магическим квадратом. Конечно, не имеет смысла рассматривать тривиальные случаи заполнения квадрата одинаковыми числами. Понятно, что такие квадраты являются и ассоциативными, и пандиагональными и обладают другими свойствами магических квадратов.

На **рис. 1.3** изображён нетрадиционный магический квадрат 12-го порядка, составленный из 144 последовательных нечётных простых чисел. Этот квадрат составил Дж. Н. Манси в 1913 г. Он не только составил данный квадрат, но и доказал, что наименьший магический квадрат из последовательных нечётных простых чисел должен иметь порядок 12. [6]

1	823	821	809	811	797	19	29	313	31	23	37
89	83	211	79	641	631	619	709	617	53	43	739
97	227	103	107	193	557	719	727	607	139	757	281
223	653	499	197	109	113	563	479	173	761	587	157
367	379	521	383	241	467	257	263	269	167	601	599
349	359	353	647	389	331	317	311	409	307	293	449
503	523	233	337	547	397	421	17	401	271	431	433
229	491	373	487	461	251	443	463	137	439	457	283
509	199	73	541	347	191	181	569	577	571	163	593
661	101	643	239	691	701	127	131	179	613	277	151
659	673	677	683	71	67	61	47	59	743	733	41
827	3	7	5	13	11	787	769	773	419	149	751

Рис. 1.3

Суммы чисел в строках, в столбцах и в главных диагоналях нетрадиционного магического квадрата так же называют магической константой квадрата. Магическая константа квадрата, изображённого на рис. 1.3, равна 4514.

В работах о магических квадратах часто встречаются магические квадраты, заполненные числами от 0 до $n^2 - 1$. Это тоже нетрадиционная форма магического квадрата, которая является довольно распространённой. Чтобы привести такой магический квадрат к традиционному виду (к квадрату, заполненному числами от 1 до n^2), достаточно ко всем элементам квадрата прибавить единицу.

В дальнейшем мы будем опускать термин “традиционный” (за редкими исключениями), считая, что во всех случаях, когда не употреблён термин “нетрадиционный”, речь идёт о традиционных магических квадратах.

Магический квадрат называется **пандиагональным** (или **дьявольским**), если сумма чисел по всем разломанным диагоналям равна магической константе квадрата. На рис. 1.4 изображён пандиагональный магический квадрат четвёртого порядка.

1	8	13	12
14	11	2	7
4	5	16	9
15	10	3	6

Рис. 1.4

Термин “пандиагональный” можно истолковать по значению приставки *пан-* как “*вседиагональный*”. То есть в таком квадрате магическая сумма чисел есть во всех диагоналях, как главных, так и разломанных.

В англоязычной литературе термину “пандиагональный квадрат” соответствуют термины “*panmagic square*” и “*pandigital square*”.

Для порядков $n = 4k + 2$ не существует ни ассоциативных, ни пандиагональных магических квадратов. [18]

Примечание: при задании в общем виде некоторой серии порядков магических квадратов значения k считаются принадлежащими ряду натуральных чисел, если нет уточнения.

Свойство пандиагональности сохраняется при параллельном переносе магического квадрата на торе. Такой перенос вдоль горизонтальной оси координат просто осуществить, если свернуть магический квадрат в трубочку, склеить его левый и правый края, вертикально разрезать квадрат в другом месте, а затем снова развернуть его.

Получится, например, такой магический квадрат (**рис. 1.5**), который тоже будет пандиагональным.

8	13	12	1
11	2	7	14
5	16	9	4
10	3	6	15

Рис. 1.5

Аналогично осуществляется параллельный перенос вдоль вертикальной оси (в этом случае склеиваются верхний и нижний края квадрата, и делается горизонтальный разрез).

Можно выполнить параллельный перенос одновременно по обеим осям. Параллельный перенос на торе называют ещё торическим переносом.

Мы будем относить торические переносы к группе эквивалентных преобразований. Это значит, что все пандиагональные квадраты, получающиеся друг из друга торическим переносом, считаются эквивалентными.

Магический квадрат называется **идеальным**, если он одновременно **ассоциативный** и **пандиагональный**. Идеальные магические квадраты существуют для нечётных порядков $n > 3$ и для чётно-чётных порядков $n > 4$ (чётно-чётным называют порядок кратный 4). Для порядков $n = 4k + 2$ существуют только нетрадиционные идеальные квадраты, поскольку традиционные квадраты таких порядков не могут быть ни ассоциативными, ни пандиагональными. Существует также нетрадиционный идеальный квадрат 4-го порядка. Традиционные магические квадраты 4-го порядка могут быть либо ассоциативными, либо пандиагональными, но не могут обладать этими свойствами одновременно. Доказательство этого утверждения приведено на сайте автора. (25) Интересно отметить, что количество ассоциативных квадратов 4-го порядка равно количеству пандиагональных квадратов и равно 48. С точностью до торических переносов пандиагональных квадратов 4-го порядка всего 3. Это значит, что существует три группы по 16 пандиагональных квадратов. Все 16 квадратов, принадлежащие одной группе, эквивалентны, то есть получаются друг из друга торическим переносом.

В англоязычных работах термину “*идеальный квадрат*” соответствует термин “*ultramagic square*”.

На **рис. 1.6** представлен идеальный квадрат пятого порядка.

1	23	10	14	17
15	19	2	21	8
22	6	13	20	4
18	5	24	7	11
9	12	16	3	25

Рис. 1.6

Существует 16 идеальных квадратов 5-го порядка.

На **рис. 1.7** показан нетрадиционный идеальный квадрат 6-го порядка. Этот квадрат из журнала “Наука и жизнь” (№ 9, 1979 г., стр. 110), его автор Я. Д. Журба. Данный магический квадрат обладает и свойством ассоциативности, и свойством пандиагональности.

1	47	6	48	5	43
35	17	30	16	31	21
36	12	41	13	40	8
42	10	37	9	38	14
29	19	34	20	33	15
7	45	2	44	3	49

Рис. 1.7

Магическая константа этого квадрата равна 150, сумма комплементарных чисел равна 50. Очевидно, что формула [1] верна и для нетрадиционного ассоциативного квадрата.

Магический квадрат называется **совершенным**, если он пандиагональный и обладает несколькими дополнительными свойствами (подробно об этих свойствах в главе, посвящённой совершенным квадратам). Совершенные магические квадраты существуют для порядков $n = 4k$. Все пандиагональные квадраты 4-го порядка являются также и совершенными. На **рис. 1.4** и **рис. 1.5** показаны такие квадраты. Для других чётно-чётных порядков далеко не все пандиагональные квадраты являются совершенными. На **рис. 1.8** показан совершенный квадрат 8-го порядка.

1	63	3	61	8	58	6	60
16	50	14	52	9	55	11	53
17	47	19	45	24	42	22	44
32	34	30	36	25	39	27	37
57	7	59	5	64	2	62	4
56	10	54	12	49	15	51	13
41	23	43	21	48	18	46	20
40	26	38	28	33	31	35	29

Рис. 1.8

В англоязычной литературе термину “совершенный квадрат” соответствует термин “*most-perfect square*”.

Мы будем рассматривать только **аддитивные** магические квадраты в соответствии с данным выше определением. Существуют ещё **мультипликативные** и **аддитивно-мультипликативные** магические квадраты. В таких магических квадратах произведения чисел в строках, в столбцах и в главных диагоналях имеют одинаковое значение. [8]

ГЛАВА 2

МАГИЧЕСКИЙ КВАДРАТ ДЮРЕРА

Магический квадрат, воспроизведённый немецким художником Альбрехтом Дюрером на гравюре “Меланхолия”, известен всем исследователям магических квадратов.

Здесь подробно рассказывается об этом квадрате. На **рис. 2.1** показана гравюра “Меланхолия”, а на **рис. 2.2** магический квадрат, который изображён на ней.



Рис. 2.1



Рис. 2.2

Изобразим этот квадрат в привычном виде (рис. 2.3):

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Рис. 2.3

Как уже отмечалось, два средних числа в последней строке квадрата (они выделены) составляют год создания гравюры – 1514.

Рассмотрим теперь все свойства этого удивительного квадрата. Но делать это мы будем на другом квадрате, в группу которого входит квадрат Дюрера. Это означает, что квадрат Дюрера получается из того квадрата, который мы будем сейчас рассматривать, одним из семи основных преобразований магических квадратов, а именно поворотом на 180 градусов. Все 8 квадратов, образующих данную группу, обладают свойствами, которые будут сейчас перечислены, только в свойстве 8 для некоторых квадратов слово “строка” заменится на слово “столбец” и наоборот.

Основной квадрат данной группы вы видите на рис. 2.4.

1	14	15	4
12	7	6	9
8	11	10	5
13	2	3	16

Рис. 2.4

Теперь перечислим все свойства этого знаменитого квадрата.

Свойство 1. Этот квадрат ассоциативен, то есть любая пара чисел, симметрично расположенных относительно центра квадрата, даёт в сумме $17=1+n^2$.

Свойство 2. Сумма чисел, расположенных в угловых ячейках квадрата, равна магической константе квадрата – 34.

Свойство 3. Сумма чисел в каждом угловом квадрате 2×2 , а также в центральном квадрате 2×2 равна магической константе квадрата.

Свойство 4. Магической константе квадрата равна сумма чисел на противоположных сторонах двух центральных прямоугольников 2×4 , а именно: $14+15+2+3=34$, $12+8+9+5=34$.

Свойство 5. Магической константе квадрата равна сумма чисел в ячейках, отмечаемых ходом шахматного коня, а именно: $1+6+16+11=34$, $14+9+3+8$, $15+5+2+12=34$ и $4+10+13+7=34$.

Свойство 6. Магической константе квадрата равна сумма чисел в соответствующих диагоналях угловых квадратов 2×2 , примыкающих к противоположным вершинам квадрата. Например, в угловых квадратах 2×2 сумма чисел в первой паре соответствующих диагоналей: $1+7+10+16=34$ (это и понятно, так как эти числа расположены на главной диагонали самого квадрата). Сумма чисел в другой паре соответствующих диагоналей: $14+12+5+3=34$.

Свойство 7. Магической константе квадрата равна сумма чисел в ячейках, отмечаемых ходом, подобным ходу шахматного коня, но с удлинённой буквой Г. Вот эти числа: $1+9+8+16=34$, $4+12+5+13=34$, $1+2+15+16=34$, $4+3+14+13=34$.

Свойство 8. В каждой строке квадрата есть пара рядом стоящих чисел, сумма которых равна 15, и ещё пара тоже рядом стоящих чисел, сумма которых равна 19. В каждом столбце квадрата есть пара рядом стоящих чисел, сумма которых равна 13, и ещё пара тоже рядом стоящих чисел, сумма которых равна 21.

Свойство 9. Суммы квадратов чисел в двух крайних строках равны между собой. То же можно сказать о суммах квадратов чисел в двух средних строках. Смотрите:

$$\begin{aligned}1^2 + 14^2 + 15^2 + 4^2 &= 13^2 + 2^2 + 3^2 + 16^2 = 438 \\12^2 + 7^2 + 6^2 + 9^2 &= 8^2 + 11^2 + 10^2 + 5^2 = 310\end{aligned}$$

Аналогичным свойством обладают числа в столбцах квадрата.

Свойство 10. Если в рассматриваемый квадрат вписать квадрат с вершинами в серединах сторон (**рис. 2.5**), то:

а) сумма чисел, расположенных вдоль одной пары противоположных сторон вписанного квадрата, равна сумме чисел, расположенных вдоль другой пары противоположных сторон, и каждая из этих сумм равна магической константе квадрата;

б) равны между собой суммы квадратов и суммы кубов указанных чисел:

$$12^2 + 14^2 + 3^2 + 5^2 = 15^2 + 9^2 + 8^2 + 2^2 = 374$$
$$12^3 + 14^3 + 3^3 + 5^3 = 15^3 + 9^3 + 8^3 + 2^3 = 4624$$

1	14	15	4
12	7	6	9
8	11	10	5
13	2	3	16

Рис. 2.5

Вот такими свойствами обладает магический квадрат, порождающий группу магических квадратов, в которую входит квадрат Дюрера.

На примере квадрата Дюрера было показано, какими интересными свойствами могут обладать магические квадраты и как эти свойства увидеть.

ГЛАВА 3

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МАГИЧЕСКИХ КВАДРАТОВ

Тема преобразований магических квадратов занимает центральное место в теории магических квадратов наравне с темой о методах построения.

Как уже было сказано, все преобразования можно разделить на две группы: эквивалентные и не эквивалентные.

В первую группу входят основные преобразования (повороты и отражения относительно осей симметрии квадрата) и торические переносы. Некоторые исследователи магических квадратов относят к эквивалентным преобразованиям также взятие дополнения и М-преобразования. Мы не будем считать данные преобразования эквивалентными.

Эквивалентные преобразования переводят любой магический квадрат в эквивалентный (изоморфный) магический квадрат.

Все остальные преобразования относятся ко второй группе. Преобразования второй группы переводят любой магический квадрат в новый (неизоморфный) магический квадрат.

Будем обозначать матрицу исходного магического квадрата $A(a_{ij})$, матрицу преобразованного квадрата $B(b_{ij})$, преобразования – буквами латинского алфавита f, g, \dots . Запись $B = f(A)$ означает, что квадрат B получен из квадрата A с помощью преобразования f .

Два преобразования f и g называются *равносильными*, если

$$f(A) = g(A)$$

Преобразование f^{-1} называется *обратным* преобразованию f , если

$$B = f(A), \quad A = f^{-1}(B)$$

Здесь будут рассмотрены только некоторые преобразования. Подробно о преобразованиях можно прочитать на сайте автора. (26)

3.1. ОСНОВНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Основных преобразований семь, они применимы ко всем магическим квадратам (любого порядка и любого вида) и даже к полумагическим квадратам. Основные преобразования называют ещё *поворотами* и *отражениями*. Имеются в виду повороты квадрата вокруг центра на 90, 180 и 270 градусов и отражения относительно осей симметрии квадрата – горизонтальной и вертикальной.

Продемонстрируем основные преобразования на идеальном магическом квадрате 5-го порядка, изображённом на **рис. 3.1**.

1	23	10	14	17
15	19	2	21	8
22	6	13	20	4
18	5	24	7	11
9	12	16	3	25

Рис. 3.1

Этот квадрат ассоциативный и пандиагональный. Сейчас вы увидите, что основные преобразования магического квадрата сохраняют эти свойства, то есть квадраты, получающиеся в результате этих преобразований, тоже обладают свойствами ассоциативности и пандиагональности. Далее перечислены все основные преобразования и показаны магические квадраты, полученные из исходного квадрата с **рис. 3.1** в результате применения к нему этих преобразований.

1. Поворот вокруг центра квадрата на 90 градусов по часовой стрелке (**рис. 3.2**):

9	18	22	15	1
12	5	6	19	23
16	24	13	2	10
3	7	20	21	14
25	11	4	8	17

Рис. 3.2

2. Поворот вокруг центра квадрата на 180 градусов (**рис. 3.3**):

25	3	16	12	9
11	7	24	5	18
4	20	13	6	22
8	21	2	19	15
17	14	10	23	1

Рис. 3.3

Очевидно, что в случае поворота на 180 градусов направление поворота (по часовой стрелке или против часовой стрелки) не имеет значения.

3. Поворот вокруг центра квадрата на 270 градусов по часовой стрелке (**рис. 3.4**):

17	8	4	11	25
14	21	20	7	3
10	2	13	24	16
23	19	6	5	12
1	15	22	18	9

Рис. 3.4

4. Отражение относительно горизонтальной оси симметрии квадрата (**рис. 3.5**):

9	12	16	3	25
18	5	24	7	11
22	6	13	20	4
15	19	2	21	8
1	23	10	14	17

Рис. 3.5

5. Отражение относительно вертикальной оси симметрии квадрата (**рис. 3.6**):

17	14	10	23	1
8	21	2	19	15
4	20	13	6	22
11	7	24	5	18
25	3	16	12	9

Рис. 3.6

6. Это преобразование представляет собой комбинацию двух преобразований - № 1 и № 5, то есть сначала квадрат поворачивается вокруг центра на 90 градусов по часовой стрелке, а затем отражается относительно вертикальной оси симметрии. Получившийся в результате таких преобразований квадрат показан на **рис. 3.7**.

1	15	22	18	9
23	19	6	5	12
10	2	13	24	16
14	21	20	7	3
17	8	4	11	25

Рис. 3.7

Можно рассматривать это преобразование и как комбинацию преобразований № 3 и № 4. А ещё его можно рассматривать как отражение относительно главной диагонали исходного квадрата (рис. 3.8).

1	23	10	14	17
15	19	2	21	8
22	6	13	20	4
18	5	24	7	11
9	12	16	3	25

Рис. 3.8

На рис. 3.8 оранжевым цветом выделена главная диагональ, относительно которой происходит отражение. Раскрашены одинаковым цветом ячейки, симметрично расположенные относительно данной главной диагонали. Числа в этих ячейках меняются местами.

7. Это преобразование представляет собой комбинацию двух преобразований - № 1 и № 4, то есть сначала квадрат поворачивается на 90 градусов по часовой стрелке, а затем отражается относительно горизонтальной оси симметрии (рис. 3.9).

25	11	4	8	17
3	7	20	21	14
16	24	13	2	10
12	5	6	19	23
9	18	22	15	1

Рис. 3.9

Можно также рассматривать это преобразование как комбинацию преобразований № 3 и № 5. А ещё его можно рассматривать как отражение относительно второй главной диагонали исходного квадрата (рис. 3.10).

1	23	10	14	17
15	19	2	21	8
22	6	13	20	4
18	5	24	7	11
9	12	16	3	25

Рис. 3.10

Раскраска аналогична рис. 3.8.

Легко убедиться, что все полученные квадраты ассоциативные и пандиагональные, то есть идеальные.

Магические квадраты, получающиеся друг из друга одним из основных преобразований либо комбинацией нескольких основных преобразований, называются *эквивалентными (изоморфными)*, а сами основные преобразования относятся к группе эквивалентных преобразований.

Итак, каждый магический квадрат имеет семь эквивалентных (изоморфных) вариантов. Если рассматривают некоторую группу магических квадратов, в которой отсутствуют эквивалентные квадраты, о такой группе магических квадратов говорят, что она задана *с учётом основных преобразований* (или *с учётом поворотов и отражений*). Например, магический квадрат третьего порядка всего один с учётом основных преобразований. Ещё пример: группа идеальных квадратов 5-го порядка, один из которых представлен здесь, состоит из 16 квадратов с учётом основных преобразований. Магических квадратов 4-го порядка с учётом основных преобразований существует 880. Из них 48 пандиагональных и 48 ассоциативных. А вот с учётом торических преобразований, о которых будет рассказано далее, пандиагональных квадратов 4-го порядка только 3. Пандиагональных квадратов 5-го порядка существует 3600 с учётом поворотов и отражений, а с учётом торических преобразований их только 144.

Выше было сказано, что основные преобразования применимы и к полумагическим квадратам. Посмотрим один пример. В качестве исходного возьмём полумагический квадрат Франклина 8-го порядка (**рис. 3.11**). Это самый известный квадрат Бенджамина Франклина (1706 – 1790) – американского общественного деятеля, который в свободное время занимался составлением магических квадратов и достиг в этом превосходных результатов. [19]

52	61	4	13	20	29	36	45
14	3	62	51	46	35	30	19
53	60	5	12	21	28	37	44
11	6	59	54	43	38	27	22
55	58	7	10	23	26	39	42
9	8	57	56	41	40	25	24
50	63	2	15	18	31	34	47
16	1	64	49	48	33	32	17

Рис. 3.11

Применим к этому полумагическому квадрату основное преобразование № 7. Получившийся квадрат вы видите на **рис. 3.12**.

17	47	24	42	22	44	19	45
32	34	25	39	27	37	30	36
33	31	40	26	38	28	35	29
48	18	41	23	43	21	46	20
49	15	56	10	54	12	51	13
64	2	57	7	59	5	62	4
1	63	8	58	6	60	3	61
16	50	9	55	11	53	14	52

Рис. 3.12

Очевидно, что квадрат остался полумагическим и сохранил все свойства исходного квадрата.

3.2. ТОРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Торические преобразования, или преобразования параллельного переноса на торе, применимы только к пандиагональным магическим квадратам. Ещё существует небольшая группа полумагических квадратов Франклина, к которым тоже применимы торические преобразования.

Преобразование параллельного переноса на торе по одной оси легко выполнить так: сверните магический квадрат в трубочку, склейте его края, например, левый и правый. Затем разрежьте трубочку по вертикали в другом месте (не там, где склеены края) и разверните квадрат. Вы получите новый пандиагональный квадрат. Если склеить нижний и верхний края квадрата и разрезать трубочку по горизонтали, то получится параллельный перенос по другой оси. Можно выполнить параллельный перенос одновременно по обеим осям.

Любой пандиагональный магический квадрат порядка n образует группу из n^2 пандиагональных квадратов, получаемых друг из друга торическими преобразованиями. Как уже было сказано выше, торические преобразования относятся к группе эквивалентных преобразований.

Ещё проще представить торические преобразования на магической плоскости. Такая плоскость получится, если расположить на плоскости бесконечное количество копий одного и того же пандиагонального квадрата. Возьмём для примера следующий пандиагональный квадрат 5-го порядка (**рис. 3.13**):

1	7	20	14	23
15	24	3	6	17
8	16	12	25	4
22	5	9	18	11
19	13	21	2	10

Рис. 3.13

Изобразим магическую плоскость с помощью этого пандиагонального квадрата (**рис. 3.14**):

[illegible]

Рис. 3.14

Плоскость можно продолжать бесконечно во всех направлениях: вверх, вниз, влево, вправо. Любой квадрат 5×5 на этой плоскости будет пандиагональным. В группе из 25 пандиагональных квадратов 5-го порядка, образуемой одним пандиагональным квадратом, имеются квадраты, начинающиеся с каждого из чисел от 1 до 25 (говорят, что магический квадрат начинается с некоторого числа **m**, если это число находится в левой верхней ячейке квадрата). На магической плоскости можно очертить все эти 25 квадратов. Например, на **рис. 3.14** выделены квадраты, начинающиеся с чисел 1, 3, 6, 20, 24, 25.

Но самой замечательной является *совершенная* плоскость. Это плоскость, заполненная копиями совершенного квадрата, например, 4-го порядка. На **рис. 3.15** вы увидите совершенную плоскость. Любой квадрат 4x4 на этой плоскости является совершенным.

11	5	4	14	11	5	4	14	11	5	4	14	11	5	4	14	11	5	4
8	10	15	1	8	10	15	1	8	10	15	1	8	10	15	1	8	10	15
13	3	6	12	13	3	6	12	13	3	6	12	13	3	6	12	13	3	6
2	16	9	7	2	16	9	7	2	16	9	7	2	16	9	7	2	16	9
11	5	4	14	11	5	4	14	11	5	4	14	11	5	4	14	11	5	4
8	10	15	1	8	10	15	1	8	10	15	1	8	10	15	1	8	10	15
13	3	6	12	13	3	6	12	13	3	6	12	13	3	6	12	13	3	6
2	16	9	7	2	16	9	7	2	16	9	7	2	16	9	7	2	16	9
11	5	4	14	11	5	4	14	11	5	4	14	11	5	4	14	11	5	4
8	10	15	1	8	10	15	1	8	10	15	1	8	10	15	1	8	10	15
13	3	6	12	13	3	6	12	13	3	6	12	13	3	6	12	13	3	6
2	16	9	7	2	16	9	7	2	16	9	7	2	16	9	7	2	16	9
11	5	4	14	11	5	4	14	11	5	4	14	11	5	4	14	11	5	4
8	10	15	1	8	10	15	1	8	10	15	1	8	10	15	1	8	10	15
13	3	6	12	13	3	6	12	13	3	6	12	13	3	6	12	13	3	6
2	16	9	7	2	16	9	7	2	16	9	7	2	16	9	7	2	16	9
11	5	4	14	11	5	4	14	11	5	4	14	11	5	4	14	11	5	4
8	10	15	1	8	10	15	1	8	10	15	1	8	10	15	1	8	10	15
13	3	6	12	13	3	6	12	13	3	6	12	13	3	6	12	13	3	6
2	16	9	7	2	16	9	7	2	16	9	7	2	16	9	7	2	16	9
11	5	4	14	11	5	4	14	11	5	4	14	11	5	4	14	11	5	4
8	10	15	1	8	10	15	1	8	10	15	1	8	10	15	1	8	10	15
13	3	6	12	13	3	6	12	13	3	6	12	13	3	6	12	13	3	6

Рис. 3.15

Любой пандиагональный квадрат 4-го порядка образует группу из 16 пандиагональных квадратов, получающихся друг из друга торическими преобразованиями. Эти квадраты начинаются с чисел от 1 до 16. Все эти квадраты легко очертить на совершенной плоскости, заполненной копиями исходного совершенного квадрата. Как уже сказано выше, с учётом торических преобразований пандиагональных квадратов 4-го порядка всего 3. Следовательно, существует только три различные совершенные плоскости, заполненные копиями пандиагонального квадрата 4-го порядка. Одна из них представлена на **рис. 3.15**.

Совершенные плоскости существуют только для $n=4k$, то есть для тех же порядков, для которых существуют совершенные квадраты.

Ядром магической (совершенной) плоскости порядка n называется квадрат размером $2n-1$, расположенный на этой плоскости, который содержит группу из n^2 пандиагональных квадратов, получаемых друг из друга торическими преобразованиями. Ядро может быть расположено в любом месте плоскости.

На **рис. 3.16** показана совершенная плоскость восьмого порядка.

1	32	17	16	57	40	41	56	1	32	17	16	57	40	41	56	1	32	17	16
58	39	42	55	2	31	18	15	58	39	42	55	2	31	18	15	58	39	42	55
3	30	19	14	59	38	43	54	3	30	19	14	59	38	43	54	3	30	19	14
60	37	44	53	4	29	20	13	60	37	44	53	4	29	20	13	60	37	44	53
8	25	24	9	64	33	48	49	8	25	24	9	64	33	48	49	8	25	24	9
63	34	47	50	7	26	23	10	63	34	47	50	7	26	23	10	63	34	47	50
6	27	22	11	62	35	46	51	6	27	22	11	62	35	46	51	6	27	22	11
61	36	45	52	5	28	21	12	61	36	45	52	5	28	21	12	61	36	45	52
1	32	17	16	57	40	41	56	1	32	17	16	57	40	41	56	1	32	17	16
58	39	42	55	2	31	18	15	58	39	42	55	2	31	18	15	58	39	42	55
3	30	19	14	59	38	43	54	3	30	19	14	59	38	43	54	3	30	19	14
60	37	44	53	4	29	20	13	60	37	44	53	4	29	20	13	60	37	44	53
8	25	24	9	64	33	48	49	8	25	24	9	64	33	48	49	8	25	24	9
63	34	47	50	7	26	23	10	63	34	47	50	7	26	23	10	63	34	47	50
6	27	22	11	62	35	46	51	6	27	22	11	62	35	46	51	6	27	22	11
61	36	45	52	5	28	21	12	61	36	45	52	5	28	21	12	61	36	45	52
1	32	17	16	57	40	41	56	1	32	17	16	57	40	41	56	1	32	17	16
58	39	42	55	2	31	18	15	58	39	42	55	2	31	18	15	58	39	42	55
3	30	19	14	59	38	43	54	3	30	19	14	59	38	43	54	3	30	19	14
60	37	44	53	4	29	20	13	60	37	44	53	4	29	20	13	60	37	44	53
8	25	24	9	64	33	48	49	8	25	24	9	64	33	48	49	8	25	24	9
63	34	47	50	7	26	23	10	63	34	47	50	7	26	23	10	63	34	47	50
6	27	22	11	62	35	46	51	6	27	22	11	62	35	46	51	6	27	22	11
61	36	45	52	5	28	21	12	61	36	45	52	5	28	21	12	61	36	45	52
1	32	17	16	57	40	41	56	1	32	17	16	57	40	41	56	1	32	17	16
58	39	42	55	2	31	18	15	58	39	42	55	2	31	18	15	58	39	42	55
3	30	19	14	59	38	43	54	3	30	19	14	59	38	43	54	3	30	19	14
60	37	44	53	4	29	20	13	60	37	44	53	4	29	20	13	60	37	44	53
8	25	24	9	64	33	48	49	8	25	24	9	64	33	48	49	8	25	24	9
63	34	47	50	7	26	23	10	63	34	47	50	7	26	23	10	63	34	47	50
6	27	22	11	62	35	46	51	6	27	22	11	62	35	46	51	6	27	22	11
61	36	45	52	5	28	21	12	61	36	45	52	5	28	21	12	61	36	45	52
1	32	17	16	57	40	41	56	1	32	17	16	57	40	41	56	1	32	17	16
58	39	42	55	2	31	18	15	58	39	42	55	2	31	18	15	58	39	42	55

Рис. 3.16

На плоскости выделено ядро – квадрат 15x15. В ядре очерчено несколько совершенных квадратов, полученных из основного совершенного квадрата торическими преобразованиями. Совершенный квадрат 8-го порядка образует группу из 64 совершенных квадратов, все эти квадраты можно очертить в ядре совершенной плоскости, заполненной копиями исходного совершенного квадрата.

В идеальных квадратах нечётного порядка торические преобразования нарушают ассоциативность квадрата. Следовательно, идеальный квадрат нечётного порядка при параллельных переносах на торе не переходит в идеальный квадрат.

В идеальных квадратах порядка $n=4k$ ($k>1$) торические преобразования иногда сохраняют идеальность квадрата, то есть не нарушают ассоциативность. В общем случае ассоциативность нарушается. Посмотрим пример. Возьмём в качестве исходного квадрата идеальный квадрат 12-го порядка, изображённый на **рис. 3.17**.

1	96	31	100	123	77	11	86	32	106	129	78
117	54	133	72	19	40	111	53	143	62	20	46
104	130	81	6	85	36	103	124	75	5	95	26
71	14	44	118	57	138	61	24	43	112	51	137
3	89	35	98	128	82	9	90	25	108	127	76
115	52	135	65	23	38	116	58	141	66	13	48
97	132	79	4	87	29	107	122	80	10	93	30
69	18	37	120	55	136	63	17	47	110	56	142
8	94	33	102	121	84	7	88	27	101	131	74
119	50	140	70	21	42	109	60	139	64	15	41
99	125	83	2	92	34	105	126	73	12	91	28
67	16	39	113	59	134	68	22	45	114	49	144

Рис. 3.17

Этот квадрат можно перенести на торе так, что он останется идеальным, то есть новый квадрат обладает свойствами и пандиагональности (это свойство сохраняется при любом параллельном переносе на торе идеального квадрата), и ассоциативности. На **рис. 3.18** показан один из вариантов. Другие варианты параллельных переносов на торе данного квадрата, сохраняющих идеальность, предлагается сделать читателям.

107	122	80	10	93	30	97	132	79	4	87	29
63	17	47	110	56	142	69	18	37	120	55	136
7	88	27	101	131	74	8	94	33	102	121	84
109	60	139	64	15	41	119	50	140	70	21	42
105	126	73	12	91	28	99	125	83	2	92	34
68	22	45	114	49	144	67	16	39	113	59	134
11	86	32	106	129	78	1	96	31	100	123	77
111	53	143	62	20	46	117	54	133	72	19	40
103	124	75	5	95	26	104	130	81	6	85	36
61	24	43	112	51	137	71	14	44	118	57	138
9	90	25	108	127	76	3	89	35	98	128	82
116	58	141	66	13	48	115	52	135	65	23	38

Рис. 3.17

Теперь рассмотрим применение торических преобразований к одному из полумагических квадратов Франклина 8-го порядка. Полумагические квадраты Франклина обладают чудесным свойством: они остаются полумагическими с теми же суммами по главным диагоналям при любом параллельном переносе на торе. По аналогии с магической плоскостью мы можем говорить в этом случае о *полумагической* плоскости. Понятно, что эта плоскость заполняется копиями полумагического квадрата. На **рис. 3.18** показана такая плоскость, заполненная полумагическим квадратом Франклина 8-го порядка.

35	29	44	22	39	25	48	18	35	29	44	22	39	25	48	18	35	29	44
62	4	53	11	58	8	49	15	62	4	53	11	58	8	49	15	62	4	53
51	13	60	6	55	9	64	2	51	13	60	6	55	9	64	2	51	13	60
14	52	5	59	10	56	1	63	14	52	5	59	10	56	1	63	14	52	5
3	61	12	54	7	57	16	50	3	61	12	54	7	57	16	50	3	61	12
30	36	21	43	26	40	17	47	30	36	21	43	26	40	17	47	30	36	21
19	45	28	38	23	41	32	34	19	45	28	38	23	41	32	34	19	45	28
46	20	37	27	42	24	33	31	46	20	37	27	42	24	33	31	46	20	37
35	29	44	22	39	25	48	18	35	29	44	22	39	25	48	18	35	29	44
62	4	53	11	58	8	49	15	62	4	53	11	58	8	49	15	62	4	53
51	13	60	6	55	9	64	2	51	13	60	6	55	9	64	2	51	13	60
14	52	5	59	10	56	1	63	14	52	5	59	10	56	1	63	14	52	5
3	61	12	54	7	57	16	50	3	61	12	54	7	57	16	50	3	61	12
30	36	21	43	26	40	17	47	30	36	21	43	26	40	17	47	30	36	21
19	45	28	38	23	41	32	34	19	45	28	38	23	41	32	34	19	45	28
46	20	37	27	42	24	33	31	46	20	37	27	42	24	33	31	46	20	37
35	29	44	22	39	25	48	18	35	29	44	22	39	25	48	18	35	29	44
62	4	53	11	58	8	49	15	62	4	53	11	58	8	49	15	62	4	53
51	13	60	6	55	9	64	2	51	13	60	6	55	9	64	2	51	13	60
14	52	5	59	10	56	1	63	14	52	5	59	10	56	1	63	14	52	5
3	61	12	54	7	57	16	50	3	61	12	54	7	57	16	50	3	61	12
30	36	21	43	26	40	17	47	30	36	21	43	26	40	17	47	30	36	21
19	45	28	38	23	41	32	34	19	45	28	38	23	41	32	34	19	45	28
46	20	37	27	42	24	33	31	46	20	37	27	42	24	33	31	46	20	37
35	29	44	22	39	25	48	18	35	29	44	22	39	25	48	18	35	29	44
62	4	53	11	58	8	49	15	62	4	53	11	58	8	49	15	62	4	53
51	13	60	6	55	9	64	2	51	13	60	6	55	9	64	2	51	13	60

Рис. 3.18

На этой плоскости выделен исходный полумагический квадрат Франклина (он начинается с числа 1) и очерчено три полумагических квадрата, получаемых из исходного квадрата торическими преобразованиями. Точно так же группа этого полумагического квадрата будет содержать 64 полумагических квадрата, считая исходный квадрат. Проверьте суммы чисел в главных диагоналях очерченных квадратов и убедитесь, что они совпадают с двумя значениями: 252 и 268. Такие же значения имеют суммы в разломанных диагоналях всех квадратов данной группы.

А вот идеальный квадрат 8-го порядка, построенный по схеме Франклина, заложенной в его пандиагональном квадрате 16-го порядка (**рис. 3.19**):

1	56	49	47	42	31	26	8
62	11	14	20	21	36	37	59
4	30	27	46	43	53	52	5
63	33	40	17	24	10	15	58
7	50	55	41	48	25	32	2
60	13	12	22	19	38	35	61
6	28	29	44	45	51	54	3
57	39	34	23	18	16	9	64

Рис. 3.19

Нетрудно увидеть, что этот идеальный квадрат тоже можно перенести на торе так, что он останется идеальным. На **рис. 3.20** показан один из вариантов такого переноса.

48	25	32	2	7	50	55	41
19	38	35	61	60	13	12	22
45	51	54	3	6	28	29	44
18	16	9	64	57	39	34	23
42	31	26	8	1	56	49	47
21	36	37	59	62	11	14	20
43	53	52	5	4	30	27	46
24	10	15	58	63	33	40	17

Рис. 3.20

Кстати, магическая плоскость, заполненная копиями пандиагонального квадрата Франклина 16-го порядка, будет обладать интересными свойствами, которые присущи этому квадрату. Назовём эту плоскость *магической плоскостью Франклина* (**рис. 3.21**).

113	130	125	142	115	132	123	140	117	134	121	138	119	136	127	144	113	130	125	142
128	143	116	131	126	141	118	133	124	139	120	135	122	137	114	129	128	143	116	131
2	241	14	253	4	243	12	251	6	245	10	249	8	247	16	255	2	241	14	253
15	256	3	244	13	254	5	246	11	252	7	248	9	250	1	242	15	256	3	244
226	17	238	29	228	19	236	27	230	21	234	25	232	23	240	31	226	17	238	29
239	32	227	20	237	30	229	22	235	28	231	24	233	26	225	18	239	32	227	20
209	34	221	46	211	36	219	44	213	38	217	42	215	40	223	48	209	34	221	46
224	47	212	35	222	45	214	37	220	43	216	39	218	41	210	33	224	47	212	35
49	194	61	206	51	196	59	204	53	198	57	202	55	200	63	208	49	194	61	206
64	207	52	195	62	205	54	197	60	203	56	199	58	201	50	193	64	207	52	195
66	177	78	189	68	179	76	187	70	181	74	185	72	183	80	191	66	177	78	189
79	192	67	180	77	190	69	182	75	188	71	184	73	186	65	178	79	192	67	180
162	81	174	93	164	83	172	91	166	85	170	89	168	87	176	95	162	81	174	93
175	96	163	84	173	94	165	86	171	92	167	88	169	90	161	82	175	96	163	84
145	98	157	110	147	100	155	108	149	102	153	106	151	104	159	112	145	98	157	110
160	111	148	99	158	109	150	101	156	107	152	103	154	105	146	97	160	111	148	99
113	130	125	142	115	132	123	140	117	134	121	138	119	136	127	144	113	130	125	142
128	143	116	131	126	141	118	133	124	139	120	135	122	137	114	129	128	143	116	131
2	241	14	253	4	243	12	251	6	245	10	249	8	247	16	255	2	241	14	253
15	256	3	244	13	254	5	246	11	252	7	248	9	250	1	242	15	256	3	244
226	17	238	29	228	19	236	27	230	21	234	25	232	23	240	31	226	17	238	29
239	32	227	20	237	30	229	22	235	28	231	24	233	26	225	18	239	32	227	20
209	34	221	46	211	36	219	44	213	38	217	42	215	40	223	48	209	34	221	46
224	47	212	35	222	45	214	37	220	43	216	39	218	41	210	33	224	47	212	35
49	194	61	206	51	196	59	204	53	198	57	202	55	200	63	208	49	194	61	206

Рис. 3.21

Ядро магической плоскости Франклина – это квадрат размером 31x31, расположенный в любом месте плоскости. В таком квадрате можно очертить все 256 пандиагональных квадратов группы пандиагонального квадрата Франклина 16-го порядка.

Как уже сказано, магическая плоскость Франклина обладает несколькими замечательными свойствами, которыми обладает сам пандиагональный квадрат Франклина. Например, сумма чисел в любом квадрате 4x4, расположенном на магической плоскости Франклина, равна магической константе квадрата 16-ого порядка – 2056. А

сумма чисел в любом квадрате 2x2 этой плоскости равна четверти этой магической константы – 514.

Ещё одно интересное свойство: сумма чисел в фигуре, выделенной оранжевым цветом, равна магической константе квадрата. При этом данная фигура может перемещаться по плоскости вниз и вверх бесконечно, и в каждой новой подобной фигуре сумма чисел равна одному и тому же числу – 2056. На **рис. 3.21** раскрашено несколько подобных фигур. Но и это ещё не всё! Фигуру можно повернуть в квадрате на 90, 270 (по часовой стрелке или против часовой стрелки) или 180 градусов, а затем снова бесконечно перемещать по плоскости влево-вправо (в первых двух случаях) или вверх-вниз (в последнем случае). На **рис. 3.22** показана фигура, повернутая на 90 градусов против часовой стрелки.

14	11	13	12	14	115	132	123	140	117	134	121	138	119	136	127	144	113	130	125	142
4	3	0	5	2																
12	12	14	11	13	126	141	118	133	124	139	120	135	122	137	114	129	128	143	116	131
9	8	3	6	1																
25	2	24	14	25	4	243	12	251	6	245	10	249	8	247	16	255	2	241	14	253
5		1		3																
24	15	25	3	24	13	254	5	246	11	252	7	248	9	250	1	242	15	256	3	244
2		6		4																
31	22	17	23	29	228	19	236	27	230	21	234	25	232	23	240	31	226	17	238	29
	6		8																	
18	23	32	22	20	237	30	229	22	235	28	231	24	233	26	225	18	239	32	227	20
	9		7																	
48	20	34	22	46	211	36	219	44	213	38	217	42	215	40	223	48	209	34	221	46
	9		1																	
33	22	47	21	35	222	45	214	37	220	43	216	39	218	41	210	33	224	47	212	35
	4		2																	
20	49	19	61	20	51	196	59	204	53	198	57	202	55	200	63	208	49	194	61	206
8		4		6																
19	64	20	52	19	62	205	54	197	60	203	56	199	58	201	50	193	64	207	52	195
3		7		5																
19	66	17	78	18	68	179	76	187	70	181	74	185	72	183	80	191	66	177	78	189
1		7		9																
17	79	19	67	18	77	190	69	182	75	188	71	184	73	186	65	178	79	192	67	180
8		2		0																
95	16	81	17	93	164	83	172	91	166	85	170	89	168	87	176	95	162	81	174	93
	2		4																	
82	17	96	16	84	173	94	165	86	171	92	167	88	169	90	161	82	175	96	163	84
	5		3																	
11	14	98	15	11	147	100	155	108	149	102	153	106	151	104	159	112	145	98	157	110
2			7																	
97	16	11	14	99	158	109	150	101	156	107	152	103	154	105	146	97	160	111	148	99
	0	1	8																	
14	11	13	12	14	115	132	123	140	117	134	121	138	119	136	127	144	113	130	125	142
4		0		2																
12	12	14	11	13	126	141	118	133	124	139	120	135	122	137	114	129	128	143	116	131
9	8	3	6	1																
25	2	24	14	25	4	243	12	251	6	245	10	249	8	247	16	255	2	241	14	253
5		1		3																
24	15	25	3	24	13	254	5	246	11	252	7	248	9	250	1	242	15	256	3	244
2		6		4																
31	22	17	23	29	228	19	236	27	230	21	234	25	232	23	240	31	226	17	238	29
	6		8																	
18	23	32	22	20	237	30	229	22	235	28	231	24	233	26	225	18	239	32	227	20
	9		7																	
48	20	34	22	46	211	36	219	44	213	38	217	42	215	40	223	48	209	34	221	46
	9		1																	
33	22	47	21	35	222	45	214	37	220	43	216	39	218	41	210	33	224	47	212	35
	4		2																	
20	49	19	61	20	51	196	59	204	53	198	57	202	55	200	63	208	49	194	61	206
8		4		6																

Рис. 3.22

Предлагаем читателям более подробно исследовать свойства чудесной магической плоскости Франклина.

3.3. ВЗЯТИЕ ДОПОЛНЕНИЯ

Преобразование взятия дополнения описывается по [10].

Преобразование состоит в замене каждого элемента магического квадрата *комплементарным* числом. Напомним, что два числа в магическом квадрате порядка n называются *комплементарными* (или *взаимно дополнительными*), если они составляют в сумме $n^2 + 1$.

Преобразование взятия дополнения можно выразить следующей формулой:

$$[2] \quad b_{ij} = (-1) * a_{ij} + n^2 + 1$$

Для демонстрации преобразования возьмём сначала магический квадрат 5-ого порядка, изображённый на **рис. 3.23**.

5	4	24	15	17
25	21	2	11	6
3	23	7	20	12
18	16	13	10	8
14	1	19	9	22

Рис. 3.23

Очевидно, что этот квадрат не обладает никакими дополнительными свойствами. Применим к нему преобразование взятия дополнения. В результате получится такой магический квадрат (**рис. 3.24**):

21	22	2	11	9
1	5	24	15	20
23	3	19	6	14
8	10	13	16	18
12	25	7	17	4

Рис. 3.24

Очевидно, что получен совершенно новый магический квадрат не эквивалентный исходному. В [10] говорится, что иногда данное преобразование относится к группе эквивалентных преобразований.

Посмотрим, какой квадрат получится, если применить данное преобразование к ассоциативному магическому квадрату 5-ого порядка, изображённого на **рис. 3.25**.

1	23	10	14	17
15	19	2	21	8
22	6	13	20	4
18	5	24	7	11
9	12	16	3	25

Рис. 3.25

Квадрат, полученный в результате применения преобразования взятия дополнения к данному квадрату вы видите на **рис. 3.26**.

25	3	16	12	9
11	7	24	5	18
4	20	13	6	22
8	21	2	19	15
17	14	10	23	1

Рис. 3.26

Очевидно, что полученный квадрат эквивалентен исходному квадрату, он получается из исходного квадрата поворотом на 180 градусов. Это и понятно: в ассоциативном квадрате комплементарные числа расположены симметрично относительно центра квадрата. Таким образом, для ассоциативных магических квадратов взятие дополнения равносильно повороту квадрата на 180 градусов

Нетрудно увидеть из формулы [2], что взятие дополнения сохраняет пандиагональность квадрата. Возьмём, например, такой пандиагональный квадрат 5-ого порядка (рис. 3.27):

1	12	20	23	9
18	24	6	2	15
7	5	13	19	21
14	16	22	10	3
25	8	4	11	17

Рис. 3.27

Квадрат, получившийся в результате применения к данному квадрату преобразования взятия дополнения, изображён на рис. 3.28.

25	14	6	3	17
8	2	20	24	11
19	21	13	7	5
12	10	4	16	23
1	18	22	15	9

Рис. 3.28

Очевидно, что квадрат остался пандиагональным.

Итак, взятие дополнения сохраняет и ассоциативность, и пандиагональность квадрата, а значит, сохраняет идеальность (смотрите преобразование идеального квадрата с рис. 3.25).

Посмотрим на результат применения данного преобразования к совершенному квадрату 8-ого порядка, изображённому на рис. 3.29.

1	16	17	32	50	63	34	47
62	51	46	35	13	4	29	20
5	12	21	28	54	59	38	43
58	55	42	39	9	8	25	24
15	2	31	18	64	49	48	33
52	61	36	45	3	14	19	30

11	6	27	22	60	53	44	37
56	57	40	41	7	10	23	26

Рис. 3.29

Квадрат, полученный в результате взятия дополнения, изображён на **рис. 3.30**.

64	49	48	33	15	2	31	18
3	14	19	30	52	61	36	45
60	53	44	37	11	6	27	22
7	10	23	26	56	57	40	41
50	63	34	47	1	16	17	32
13	4	29	20	62	51	46	35
54	59	38	43	5	12	21	28
9	8	25	24	58	55	42	39

Рис. 3.30

Как и следовало ожидать, полученный квадрат совершенный. Посмотрите, как интересно получен новый квадрат из исходного квадрата: просто переставлены угловые квадраты 4x4.

Наконец, применим взятие дополнения к полумагическому квадрату Франклина 8-ого порядка, изображённому на **рис. 3.31**.

52	61	4	13	20	29	36	45
14	3	62	51	46	35	30	19
53	60	5	12	21	28	37	44
11	6	59	54	43	38	27	22
55	58	7	10	23	26	39	42
9	8	57	56	41	40	25	24
50	63	2	15	18	31	34	47
16	1	64	49	48	33	32	17

Рис. 3.31

Получившийся в результате применения преобразования квадрат показан на **рис. 3.32**.

13	4	61	52	45	36	29	20
51	62	3	14	19	30	35	46
12	5	60	53	44	37	28	21
54	59	6	11	22	27	38	43
10	7	58	55	42	39	26	23
56	57	8	9	24	25	40	41
15	2	63	50	47	34	31	18
49	64	1	16	17	32	33	48

Рис. 3.32

Легко убедиться, что квадрат остался полумагическим с теми же значениями сумм чисел по главным диагоналям (только эти значения поменялись местами).

Сохранение всех свойств магического квадрата при взятии дополнения не только легко увидеть на конкретных примерах, но и можно доказать, основываясь на формуле [2], выражающей данное преобразование.

Понятно, что если не относить взятие дополнения к группе эквивалентных преобразований, то мы получим с помощью этого преобразования множество новых магических квадратов разных видов: пандиагональных, совершенных и полумагических.

3.4 М-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

М-преобразования описываются по [8].

М-преобразования относятся к группе преобразований, связанных с перестановками строк и столбцов. Они применимы к любым магическим квадратам порядка $n > 3$.

М-преобразования различают двух видов.

Первый вид М-преобразований: перестановка двух строк с номерами i и $n+1-i$ и последующая перестановка двух столбцов с теми же номерами.

Приведём пример. В качестве исходного квадрата возьмём магический квадрат 5-го порядка (**рис. 3.33**).

1	8	17	14	25
22	24	10	6	3
15	16	13	2	19
18	12	4	20	11
9	5	21	23	7

Рис. 3.33

Понятно, что преобразование выполняется в два этапа: сначала перестановка строк, затем перестановка столбцов с теми же номерами. Можно выполнять преобразование в обратном порядке: сначала переставить столбцы, а затем строки с теми же номерами. Будем начинать с перестановки строк.

В квадрате 5-го порядка существует две пары строк с симметричными номерами: первая и пятая, вторая и четвёртая. Выберем для перестановки вторую и четвёртую строки. Обратите внимание на то, что квадрат, получающийся после первого этапа, не является магическим, в нём нет магической суммы чисел в главных диагоналях, то есть он является полумагическим. На **рис. 3.34** слева показан полумагический квадрат, полученный в результате выполнения первого этапа – перестановки в квадрате с **рис. 3.33** второй и четвёртой строк, а справа изображён магический квадрат, полученный в результате выполнения второго этапа – перестановки второго и четвёртого столбцов.

1	8	17	14	25
18	12	4	20	11
15	16	13	2	19
22	24	10	6	3
9	5	21	23	7

→

1	14	17	8	25
18	20	4	12	11
15	2	13	16	19
22	6	10	24	3
9	23	21	5	7

Рис. 3.34

Покажу ещё один пример – для магического квадрата 6-го порядка. Исходный квадрат изображён на **рис. 3.35**.

29	7	6	20	25	24
9	32	1	27	23	19
31	3	8	22	21	26
2	34	33	11	16	15
36	5	28	18	14	10
4	30	35	13	12	17

Рис. 3.35

Понятно, что в квадрате 6-го порядка существует три пары симметричных строк. Выберем для перестановки вторую и пятую строки. На **рис. 3.36** вы видите два квадрата, левый квадрат получен в результате первого этапа преобразования, правый квадрат получен в результате второго этапа.

29	7	6	20	25	24
36	5	28	18	14	10
31	3	8	22	21	26
2	34	33	11	16	15
9	32	1	27	23	19
4	30	35	13	12	17

→

29	25	6	20	7	24
36	14	28	18	5	10
31	21	8	22	3	26
2	16	33	11	34	15
9	23	1	27	32	19
4	12	35	13	30	17

Рис. 3.36

Второй вид М-преобразований: перестановка двух пар строк, имеющих соответственно номера i , j и $(n+1-i)$, $(n+1-j)$ и последующая перестановка двух пар столбцов с теми же номерами.

Рассмотрим данное преобразование на примере того же магического квадрата 6-го порядка с **рис. 3.35**. Выберем для перестановки следующие две пары строк: первую и третью, шестую и четвёртую. Обратите внимание: здесь переставляются не симметричные строки между собой (как в М-преобразованиях первого вида), а строка первая переставляется со строкой третьей и соответственно переставляется пара симметричных данным строк – шестая и четвёртая.

На **рис. 3.37** показан первый этап преобразования. Слева изображён исходный квадрат, справа – квадрат, полученный в результате перестановки строк.

29	7	6	20	25	24
9	32	1	27	23	19
31	3	8	22	21	26
2	34	33	11	16	15
36	5	28	18	14	10
4	30	35	13	12	17

→

31	3	8	22	21	26
9	32	1	27	23	19
29	7	6	20	25	24
4	30	35	13	12	17
36	5	28	18	14	10
2	34	33	11	16	15

Рис. 3.37

Здесь случайно промежуточный квадрат оказался магическим.

На **рис. 3.38** показан второй этап преобразования – перестановка столбцов с теми же номерами.

31	3	8	22	21	26		8	3	31	26	21	22
9	32	1	27	23	19		1	32	9	19	23	27
29	7	6	20	25	24		6	7	29	24	25	20
4	30	35	13	12	17	→	35	30	4	17	12	13
36	5	28	18	14	10		28	5	36	10	14	18
2	34	33	11	16	15		33	34	2	15	16	11

Рис. 3.38

В книге приводится формула, по которой можно посчитать, сколько квадратов будет в группе квадратов, полученных М-преобразованиями обоих видов из одного магического квадрата порядка n , считая исходный квадрат. Вот эта формула (q – количество квадратов в группе, образованной М-преобразованиями):

$$q = [n/2] * \{(2[n/2] - 2)!!\}$$

(символ $a!!$ означает произведение всех натуральных чисел, не превосходящих числа a и совпадающих с ним по чётности). Ниже приводится таблица значений q для магических квадратов порядков 4 – 13:

n	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
q	4	4	24	24	192	192	1920	1920	23040	23040

Для магического квадрата любого порядка можно вычислить по приведённой формуле количество квадратов, которые получаются с помощью М-преобразований обоих видов.

Покажу для примера группу, образуемую М-преобразованиями обоих видов, для магического квадрата 4-го порядка. Вместе с исходным квадратом в этой группе будет 4 квадрата. Значит, новых квадратов может быть получено только 3.

Возьмём в качестве исходного квадрата магический квадрат, изображённый на **рис. 3.39**.

1	2	15	16
12	14	3	5
13	7	10	4
8	11	6	9

Рис. 3.39

На **рис. 3.40** вы видите квадрат, полученный из данного квадрата М-преобразованием первого вида.

9	11	6	8
5	14	3	12
4	7	10	13
16	2	15	1

Рис. 3.40

На **рис. 3.41** и **рис. 3.42** изображены квадраты, полученные из данного квадрата М-преобразованиями второго вида.

14	12	5	3
2	1	16	15
11	8	9	6
7	13	4	10

Рис. 3.41

14	5	12	3
11	9	8	6
2	16	1	15
7	4	13	10

Рис. 3.42

Интересно заметить, что два рядом стоящих порядка – чётный и нечётный – имеют одинаковое количество квадратов в группе, образуемой М-преобразованиями (см. таблицу). Если вы возьмёте магический квадрат 5-го порядка, то он тоже образует группу из 4 квадратов (считая его самого) с помощью М-преобразований. Это объясняется тем, что в формуле для вычисления **q** присутствует целая часть $n/2$, а эта величина будет одинакова для **n** и для **n + 1**, если **n** чётно.

Следует обратить внимание на то, что М-преобразования не изменяют наборы чисел ни в строках, ни в столбцах, ни в главных диагоналях. Поэтому М-преобразования сохраняют те свойства исходного квадрата, которые зависят от наборов чисел в строках, в столбцах и в главных диагоналях. Например, если исходный квадрат бимагический, то все квадраты, полученные из него М-преобразованиями, тоже будут бимагическими (бимагическим называется такой магический квадрат, который остаётся магическим после замены всех его элементов на их квадраты).

Очевидно, что М-преобразования обоих видов сохраняют ассоциативность квадрата. Возьмём для примера идеальный квадрат 8-го порядка, изображённый на **рис. 3.43**.

1	56	49	47	42	31	26	8
62	11	14	20	21	36	37	59
4	30	27	46	43	53	52	5
63	33	40	17	24	10	15	58
7	50	55	41	48	25	32	2
60	13	12	22	19	38	35	61
6	28	29	44	45	51	54	3
57	39	34	23	18	16	9	64

Рис. 3.43

Совершенно понятно, что если мы выполним для данного квадрата М-преобразование первого вида, то есть переставим симметричные строки и затем симметричные столбцы с теми же номерами, ассоциативность квадрата не нарушится.

Покажем применение к этому идеальному квадрату М-преобразования второго вида. Выберем для перестановки следующие пары строк: вторую, третью и соответственно симметричные строки – седьмую и шестую. На **рис. 3.44** показан первый

этап преобразования, слева – исходный квадрат, справа – результат выполнения первого этапа.

1	56	49	47	42	31	26	8
62	11	14	20	21	36	37	59
4	30	27	46	43	53	52	5
63	33	40	17	24	10	15	58
7	50	55	41	48	25	32	2
60	13	12	22	19	38	35	61
6	28	29	44	45	51	54	3
57	39	34	23	18	16	9	64

→

1	56	49	47	42	31	26	8
4	30	27	46	43	53	52	5
62	11	14	20	21	36	37	59
63	33	40	17	24	10	15	58
7	50	55	41	48	25	32	2
6	28	29	44	45	51	54	3
60	13	12	22	19	38	35	61
57	39	34	23	18	16	9	64

Рис. 3.44

Очевидно, что квадрат, полученный после первого этапа, не утратил ассоциативность. Завершаем преобразование, выполняем перестановку столбцов с теми же номерами (рис. 3.45):

1	56	49	47	42	31	26	8
4	30	27	46	43	53	52	5
62	11	14	20	21	36	37	59
63	33	40	17	24	10	15	58
7	50	55	41	48	25	32	2
6	28	29	44	45	51	54	3
60	13	12	22	19	38	35	61
57	39	34	23	18	16	9	64

→

1	49	56	47	42	26	31	8
4	27	30	46	43	52	53	5
62	14	11	20	21	37	36	59
63	40	33	17	24	15	10	58
7	55	50	41	48	32	25	2
6	29	28	44	45	54	51	3
60	12	13	22	19	35	38	61
57	34	39	23	18	9	16	64

Рис. 3.45

Окончательный результат тоже является ассоциативным квадратом.

А вот пандиагональность квадрата М-преобразования не сохраняют. Это видно в последнем примере.

3.5 МАТРИЧНАЯ ФОРМА ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

В матричной форме может быть задано любое преобразование магического квадрата.

Обозначим матрицу исходного магического квадрата порядка n $A(a_{ij})$, матрицу преобразованного квадрата обозначим $B(b_{ij})$, $i, j = 1, 2, 3 \dots n$. Будем называть для краткости квадрат с матрицей $A(a_{ij})$ квадратом A , квадрат с матрицей $B(b_{ij})$ квадратом B .

Рассмотрим пример матричной формы преобразования. Для наглядности возьмём в качестве исходного квадрата квадрат пятого порядка (рис. 3.46).

1	23	10	14	17
15	19	2	21	8
22	6	13	20	4
18	5	24	7	11
9	12	16	3	25

Рис. 3.46

Матрица этого квадрата $A(a_{ij})$ будет иметь вид (**рис. 3.47**):

a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}
a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}
a_{51}	a_{52}	a_{53}	a_{54}	a_{55}

Рис. 3.47

В этой матрице индексы элементов следуют в естественном порядке, первый индекс, как правило, означает номер строки, а второй индекс – номер столбца.

Примечание: иногда индексы элементов разделяются запятыми: $a_{i,j}$. Мы используем запятую, начиная с квадратов 10-ого порядка, когда индексы являются двузначными числами.

Теперь применим к исходному квадрату основное преобразование № 1 – поворот вокруг центра квадрата на 90 градусов по часовой стрелке. Очевидно, что матрица преобразованного квадрата В будет иметь такой вид (**рис. 3.48**):

a_{51}	a_{41}	a_{31}	a_{21}	a_{11}
a_{52}	a_{42}	a_{32}	a_{22}	a_{12}
a_{53}	a_{43}	a_{33}	a_{23}	a_{13}
a_{54}	a_{44}	a_{34}	a_{24}	a_{14}
a_{55}	a_{45}	a_{35}	a_{25}	a_{15}

Рис. 3.48

Эта матрица и есть матричная форма основного преобразования № 1. Будем для краткости говорить, что данная матрица является матрицей основного преобразования № 1, или: основное преобразование № 1 задано матрицей. Если предположить, что некто мистер Х не знает, как повернуть квадрат вокруг центра на 90 градусов по часовой стрелке, надо дать ему матрицу этого преобразования, и тогда он без труда составит преобразованный квадрат.

Посмотрим ещё один пример. Применим к исходному квадрату одно из торических преобразований, например, задаваемое матрицей, изображённой на **рис. 3.49**.

a_{33}	a_{34}	a_{35}	a_{31}	a_{32}
a_{43}	a_{44}	a_{45}	a_{41}	a_{42}
a_{53}	a_{54}	a_{55}	a_{51}	a_{52}
a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{11}	a_{12}
a_{23}	a_{24}	a_{25}	a_{21}	a_{22}

Рис. 3.49

В результате применения преобразования, заданного этой матрицей, мы получим следующий квадрат (**рис. 3.50**):

13	20	4	22	6
24	7	11	18	5
16	3	25	9	12
10	14	17	1	23
2	21	8	15	19

Рис. 3.50

Иногда магический квадрат надо преобразовать, увеличив или уменьшив все его элементы на одно и то же число. Очевидно, что такое преобразование можно записать так:

$$b_{ij} = a_{ij} + \text{const}$$

Если прибавляемая константа число положительное, то все элементы увеличатся, а если константа число отрицательное, то все элементы уменьшатся.

Можно преобразовать магический квадрат, умножив все его элементы на одно и то же число. Такое преобразование запишется формулой:

$$b_{ij} = a_{ij} * \text{const}$$

Понятно, что в результате применения таких преобразований получатся нетрадиционные магические квадраты. Однако, очень часто наоборот нетрадиционный квадрат, заполненный числами от 0 до n^2-1 , превращается с помощью увеличения всех его элементов на единицу в традиционный магический квадрат, заполненный числами от 1 до n^2 . В этом случае прибавляемая константа в приведённой выше формуле равна 1.

3.6 ПРЕОБРАЗОВАНИЕ “СТРОКИ-ДИАГОНАЛИ”

Преобразование “строки-диагонали” применимо к пандиагональным квадратам нечётного порядка. Здесь о нём рассказывается очень кратко. Более подробно можно посмотреть на сайте автора. (27)

Преобразование “строки-диагонали” задаётся в матричной форме. Рассмотрим преобразование на примере пандиагонального квадрата 9-го порядка. Матрица преобразования изображена на рис. 3.51.

a_{11}	a_{56}	a_{92}	a_{47}	a_{83}	a_{38}	a_{74}	a_{29}	a_{65}
a_{66}	a_{12}	a_{57}	a_{93}	a_{48}	a_{84}	a_{39}	a_{75}	a_{21}
a_{22}	a_{67}	a_{13}	a_{58}	a_{94}	a_{49}	a_{85}	a_{31}	a_{76}
a_{77}	a_{23}	a_{68}	a_{14}	a_{59}	a_{95}	a_{41}	a_{86}	a_{32}
a_{33}	a_{78}	a_{24}	a_{69}	a_{15}	a_{51}	a_{96}	a_{42}	a_{87}
a_{88}	a_{34}	a_{79}	a_{25}	a_{61}	a_{16}	a_{52}	a_{97}	a_{43}
a_{44}	a_{89}	a_{35}	a_{71}	a_{26}	a_{62}	a_{17}	a_{53}	a_{98}
a_{99}	a_{45}	a_{81}	a_{36}	a_{72}	a_{27}	a_{63}	a_{18}	a_{54}
a_{55}	a_{91}	a_{46}	a_{82}	a_{37}	a_{73}	a_{28}	a_{64}	a_{19}

Рис. 3.51

В качестве исходного квадрата возьмём следующий квадрат (рис. 3.52):

1	75	58	53	14	38	69	34	27
11	42	70	36	19	3	76	62	50
21	4	80	59	47	15	43	72	28
51	16	45	64	30	22	8	77	56
31	26	5	74	60	52	18	37	66
61	54	10	39	67	35	23	2	78
71	32	20	6	79	63	46	12	40
81	55	48	13	44	68	29	24	7
41	65	33	25	9	73	57	49	17

Рис. 3.52

На иллюстрации (рис. 3.53) изображено применение преобразования, заданного матрицей на рис. 3.51, к пандиагональному квадрату 9-ого порядка. Слева изображён исходный квадрат, а справа – преобразованный квадрат.

Преобразование “строки-диагонали” для квадрата 9-ого порядка

1	75	58	53	14	38	69	34	27
11	42	70	36	19	3	76	62	50
21	4	80	59	47	15	43	72	28
51	16	45	64	30	22	8	77	56
31	26	5	74	60	52	18	37	66
61	54	10	39	67	35	23	2	78
71	32	20	6	79	63	46	12	40
81	55	48	13	44	68	29	24	7
41	65	33	25	9	73	57	49	17

→

1	52	65	8	48	72	6	50	67
35	75	18	33	77	13	28	79	11
42	23	58	37	25	56	44	21	63
46	70	2	53	66	9	51	68	4
80	12	36	78	14	31	73	16	29
24	59	40	19	61	38	26	57	45
64	7	47	71	3	54	69	5	49
17	30	81	15	32	76	10	34	74
60	41	22	55	43	20	62	39	27

Рис. 3.53

На иллюстрации хорошо видно, что все строки исходного квадрата переходят в диагонали нового квадрата (главную и разломанные) одного направления. В главную диагональ переходит верхняя строка. Отсюда преобразование и получило своё название. Следует отметить, что столбцы исходного квадрата так же переходят в диагонали нового квадрата, другого направления, при этом в главную диагональ переходит центральный столбец.

Очевидно, что из квадрата, изображённого на рис. 3.53 справа, можно получить исходный квадрат, изображённый слева, преобразованием, обратным преобразованию “строки-диагонали”. На рис. 3.54 вы видите матрицу обратного преобразования.

a ₁₁	a ₂₂	a ₃₃	a ₄₄	a ₅₅	a ₆₆	a ₇₇	a ₈₈	a ₉₉
a ₂₉	a ₃₁	a ₄₂	a ₅₃	a ₆₄	a ₇₅	a ₈₆	a ₉₇	a ₁₈
a ₃₈	a ₄₉	a ₅₁	a ₆₂	a ₇₃	a ₈₄	a ₉₅	a ₁₆	a ₂₇
a ₄₇	a ₅₈	a ₆₉	a ₇₁	a ₈₂	a ₉₃	a ₁₄	a ₂₅	a ₃₆
a ₅₆	a ₆₇	a ₇₈	a ₈₉	a ₉₁	a ₁₂	a ₂₃	a ₃₄	a ₄₅
a ₆₅	a ₇₆	a ₈₇	a ₉₈	a ₁₉	a ₂₁	a ₃₂	a ₄₃	a ₅₄
a ₇₄	a ₈₅	a ₉₆	a ₁₇	a ₂₈	a ₃₉	a ₄₁	a ₅₂	a ₆₃
a ₈₃	a ₉₄	a ₁₅	a ₂₆	a ₃₇	a ₄₈	a ₅₉	a ₆₁	a ₇₂
a ₉₂	a ₁₃	a ₂₄	a ₃₅	a ₄₆	a ₅₇	a ₆₈	a ₇₉	a ₈₁

Рис. 3.54

На иллюстрации (рис. 3.55) показано применение обратного преобразования к другому пандиагональному квадрату 9-го порядка. Исходный квадрат изображён слева.

Преобразование обратное преобразованию “строки-диагонали”								
1	42	80	64	60	35	46	24	17
50	21	16	5	39	79	68	57	34
72	56	31	54	20	13	9	38	76
8	37	78	71	55	33	53	19	15
52	23	12	7	41	75	70	59	30
67	63	29	49	27	11	4	45	74
6	44	73	69	62	28	51	26	10
48	25	14	3	43	77	66	61	32
65	58	36	47	22	18	2	40	81

→

1	21	31	71	41	11	51	61	81
34	72	37	12	49	62	77	2	24
38	15	52	63	73	3	22	35	68
53	59	74	6	25	36	64	39	13
75	4	26	32	65	42	16	54	55
27	28	66	40	17	50	56	78	7
69	43	18	46	57	76	8	23	29
14	47	60	79	9	19	30	67	44
58	80	5	20	33	70	45	10	48

Рис. 3.55

В этом примере исходный квадрат идеальный. Очевидно, что в результате преобразования “строки-диагонали” квадрат утратил ассоциативность и потому не является идеальным. Однако его очень просто превратить в идеальный квадрат торическим переносом. На рис. 3.56 вы видите новый квадрат, полученный из квадрата, изображённого на рис. 3.55 справа, торическим преобразованием.

27	28	66	40	17	50	56	78	7
69	43	18	46	57	76	8	23	29
14	47	60	79	9	19	30	67	44
58	80	5	20	33	70	45	10	48
1	21	31	71	41	11	51	61	81
34	72	37	12	49	62	77	2	24
38	15	52	63	73	3	22	35	68
53	59	74	6	25	36	64	39	13
75	4	26	32	65	42	16	54	55

Рис. 3.56

Если обозначить преобразование “строки-диагонали” f , преобразование торического переноса – g , исходный квадрат – A (на **рис. 3.55** слева), квадрат, изображённый на **рис. 3.55** справа – B , квадрат на **рис. 3.56** – C , можно записать:

$$B = f(A), \quad C = g(B) = g(f(A))$$

Понятно, что к квадрату A применена комбинация двух преобразований. На **рис. 3.57** приведена матрица преобразования “строки-диагонали” в общем виде для любого порядка $n = 2m + 1$, $m = 1, 2, 3 \dots$

По этой общей матрице вы можете составить матрицу данного преобразования для любого конкретного порядка. В матрице $k = (n + 1)/2 = m + 1$.

$a_{1,1}$	$a_{k,k+1}$	$a_{n,2}$	$a_{k-1,k+2}$	$a_{n-1,3}$...	$a_{k+3,k-2}$	$a_{3,n-1}$	$a_{k+2,k-1}$	$a_{2,n}$	$a_{k+1,k}$
$a_{k+1,k+1}$	$a_{1,2}$	$a_{k,k+2}$	$a_{n,3}$	$a_{k-1,k+3}$...	$a_{4,n-1}$	$a_{k+3,k-1}$	$a_{3,n}$	$a_{k+2,k}$	$a_{2,1}$
$a_{2,2}$	$a_{k+1,k+2}$	$a_{1,3}$	$a_{k,k+3}$	$a_{n,4}$...	$a_{k+4,k-1}$	$a_{4,n}$	$a_{k+3,k}$	$a_{3,1}$	$a_{k+2,k+1}$
$a_{k+2,k+2}$	$a_{2,3}$	$a_{k+1,k+3}$	$a_{1,4}$	$a_{k,k+4}$...	$a_{5,n}$	$a_{k+4,k}$	$a_{4,1}$	$a_{k+3,k+1}$	$a_{3,2}$
$a_{3,3}$	$a_{k+2,k+3}$	$a_{2,4}$	$a_{k+1,k+4}$	$a_{1,5}$...	$a_{k+5,k}$	$a_{5,1}$	$a_{k+4,k+1}$	$a_{4,2}$	$a_{k+3,k+2}$
...
$a_{k-2,k-2}$	$a_{n-2,n-1}$	$a_{k-3,k-1}$	$a_{n-3,n}$	$a_{k-4,k}$...	$a_{1,n-4}$	$a_{k,k-4}$	$a_{n,n-3}$	$a_{k-1,k-3}$	$a_{n-1,n-2}$
$a_{n-1,n-1}$	$a_{k-2,k-1}$	$a_{n-2,n}$	$a_{k-3,k}$	$a_{n-3,1}$...	$a_{k+1,k-4}$	$a_{1,n-3}$	$a_{k,k-3}$	$a_{n,n-2}$	$a_{k-1,k-2}$
$a_{k-1,k-1}$	$a_{n-1,n}$	$a_{k-2,k}$	$a_{n-2,1}$	$a_{k-3,k+1}$...	$a_{2,n-3}$	$a_{k+1,k-3}$	$a_{1,n-2}$	$a_{k,k-2}$	$a_{n,n-1}$
$a_{n,n}$	$a_{k-1,k}$	$a_{n-1,1}$	$a_{k-2,k+1}$	$a_{n-2,2}$...	$a_{k+2,k-3}$	$a_{2,n-2}$	$a_{k+1,k-2}$	$a_{1,n-1}$	$a_{k,k-1}$
$a_{k,k}$	$a_{n,1}$	$a_{k-1,k+1}$	$a_{n-1,2}$	$a_{k-2,k+2}$...	$a_{3,n-2}$	$a_{k+2,k-2}$	$a_{2,n-1}$	$a_{k+1,k-1}$	$a_{1,n}$

Рис. 3.57

Покажем пример составления матрицы преобразования для квадратов порядка $n = 11$; в этом случае $k = 6$. Составляем матрицу по общей матрице, подставляя значения n и k . На **рис. 3.58** вы видите готовую матрицу преобразования “строки-диагонали” для квадратов 11-го порядка.

$a_{1,1}$	$a_{6,7}$	$a_{11,2}$	$a_{5,8}$	$a_{10,3}$	$a_{4,9}$	$a_{9,4}$	$a_{3,10}$	$a_{8,5}$	$a_{2,11}$	$a_{7,6}$
$a_{7,7}$	$a_{1,2}$	$a_{6,8}$	$a_{11,3}$	$a_{5,9}$	$a_{10,4}$	$a_{4,10}$	$a_{9,5}$	$a_{3,11}$	$a_{8,6}$	$a_{2,1}$
$a_{2,2}$	$a_{7,8}$	$a_{1,3}$	$a_{6,9}$	$a_{11,4}$	$a_{5,10}$	$a_{10,5}$	$a_{4,11}$	$a_{9,6}$	$a_{3,1}$	$a_{8,7}$
$a_{8,8}$	$a_{2,3}$	$a_{7,9}$	$a_{1,4}$	$a_{6,10}$	$a_{11,5}$	$a_{5,11}$	$a_{10,6}$	$a_{4,1}$	$a_{9,7}$	$a_{3,2}$
$a_{3,3}$	$a_{8,9}$	$a_{2,4}$	$a_{7,10}$	$a_{1,5}$	$a_{6,11}$	$a_{11,6}$	$a_{5,1}$	$a_{10,7}$	$a_{4,2}$	$a_{9,8}$
$a_{9,9}$	$a_{3,4}$	$a_{8,10}$	$a_{2,5}$	$a_{7,11}$	$a_{1,6}$	$a_{6,1}$	$a_{11,7}$	$a_{5,2}$	$a_{10,8}$	$a_{4,3}$
$a_{4,4}$	$a_{9,10}$	$a_{3,5}$	$a_{8,11}$	$a_{2,6}$	$a_{7,1}$	$a_{1,7}$	$a_{6,2}$	$a_{11,8}$	$a_{5,3}$	$a_{10,9}$
$a_{10,10}$	$a_{4,5}$	$a_{9,11}$	$a_{3,6}$	$a_{8,1}$	$a_{2,7}$	$a_{7,2}$	$a_{1,8}$	$a_{6,3}$	$a_{11,9}$	$a_{5,4}$
$a_{5,5}$	$a_{10,11}$	$a_{4,6}$	$a_{9,1}$	$a_{3,7}$	$a_{8,2}$	$a_{2,8}$	$a_{7,3}$	$a_{1,9}$	$a_{6,4}$	$a_{11,10}$
$a_{11,11}$	$a_{5,6}$	$a_{10,1}$	$a_{4,7}$	$a_{9,2}$	$a_{3,8}$	$a_{8,3}$	$a_{2,9}$	$a_{7,4}$	$a_{1,10}$	$a_{6,5}$
$a_{6,6}$	$a_{11,1}$	$a_{5,7}$	$a_{10,2}$	$a_{4,8}$	$a_{9,3}$	$a_{3,9}$	$a_{8,4}$	$a_{2,10}$	$a_{7,5}$	$a_{1,11}$

Рис. 3.58

Предлагаем читателям составить матрицу обратного преобразования в общем виде.

3.7 ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ТРЁХ КВАДРАТОВ

Преобразование трёх квадратов применяется к ассоциативным квадратам чётно-чётного порядка. Это преобразование превращает любой ассоциативный квадрат чётно-чётного порядка в пандиагональный квадрат. Ассоциативный квадрат порядка $n = 4k$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) делится на 4 квадрата порядка $m = n/2$. Левый верхний квадрат остаётся без изменения. Правый верхний квадрат отражается относительно вертикальной оси симметрии, левый нижний квадрат отражается относительно горизонтальной оси симметрии, правый нижний квадрат поворачивается на 180 градусов.

Покажем применение преобразования на примере ассоциативного квадрата 4-го порядка (рис. 3.59):

1	14	15	4
12	7	6	9
8	11	10	5
13	2	3	16

Рис. 3.59

Выполнив все описанные действия с тремя квадратами 2x2 (на рисунках квадраты 2x2 выделены красными границами), получаем следующий пандиагональный квадрат (рис. 3.60):

1	14	4	15
12	7	9	6
13	2	16	3
8	11	5	10

Рис. 3.60

Интересно отметить, что преобразование трёх квадратов равносильно следующим преобразованиям исходного ассоциативного квадрата: а) перестановка столбцов в правой половине квадрата: столбцы записываются в обратном порядке – справа налево; б) в полученном после перестановки столбцов квадрате выполняется перестановка строк в нижней половине квадрата: строки записываются в обратном порядке – снизу вверх. Продемонстрирую это на том же исходном квадрате с рис. 1. В результате выполнения этапа а) получаем следующий квадрат (рис. 3.61):

1	14	4	15
12	7	9	6
8	11	5	10
13	2	16	3

Рис. 3.61

Теперь в этом квадрате переставим строки в нижней половине, получим готовый результат – пандиагональный квадрат (рис. 3.62), который в точности совпадает с квадратом на рис. 3.60.

1	14	4	15
12	7	9	6
13	2	16	3
8	11	5	10

Рис. 3.62

На примере квадрата 4-го порядка докажем, что преобразование трёх квадратов превращает любой ассоциативный квадрат в пандиагональный. Обозначим: $p = n^2 + 1 = 17$. Любой ассоциативный квадрат 4-го порядка можно записать в виде (рис. 3.63):

a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}
$p - a_{24}$	$p - a_{23}$	$p - a_{22}$	$p - a_{21}$
$p - a_{14}$	$p - a_{13}$	$p - a_{12}$	$p - a_{11}$

Рис. 3.63

Применив к этому квадрату преобразование трёх квадратов, получим следующий квадрат (рис. 3.64):

a_{11}	a_{12}	a_{14}	a_{13}
a_{21}	a_{22}	a_{24}	a_{23}
$p - a_{14}$	$p - a_{13}$	$p - a_{11}$	$p - a_{12}$
$p - a_{24}$	$p - a_{23}$	$p - a_{21}$	$p - a_{22}$

Рис. 3.64

Вычислив сумму чисел в любой диагонали этого квадрата (как главной, так и разломанной), видим, что эта сумма всегда равна одной и той же величине: $2p = 34$.

Посмотрим применение преобразования трёх квадратов к идеальному квадрату 8-го порядка. Как известно, идеальный квадрат является одновременно и ассоциативным, и пандиагональным. Применив к такому квадрату преобразование трёх квадратов, мы получим новый пандиагональный квадрат, который утрачивает ассоциативность и поэтому уже не является идеальным. В качестве исходного идеального квадрата возьмём квадрат, изображенный на рис. 3.65.

1	56	49	47	42	31	26	8
62	11	14	20	21	36	37	59
4	30	27	46	43	53	52	5
63	33	40	17	24	10	15	58
7	50	55	41	48	25	32	2
60	13	12	22	19	38	35	61
6	28	29	44	45	51	54	3
57	39	34	23	18	16	9	64

Рис. 3.65

Применив к этому квадрату преобразование трёх квадратов, получим следующий пандиагональный квадрат (**рис. 3.66**):

1	56	49	47	8	26	31	42
62	11	14	20	59	37	36	21
4	30	27	46	5	52	53	43
63	33	40	17	58	15	10	24
57	39	34	23	64	9	16	18
6	28	29	44	3	54	51	45
60	13	12	22	61	35	38	19
7	50	55	41	2	32	25	48

Рис. 3.66

Рассмотрим преобразование обратное преобразованию трёх квадратов. Это преобразование интересно тем, что оно совпадает с самим преобразованием трёх квадратов. В самом деле: посмотрим на преобразование каждого из трёх квадратов. Очевидно, что обратное преобразование каждого квадрата совпадает с самим преобразованием. То есть в обратном преобразовании с каждым из трёх квадратов надо делать то же самое: в правом верхнем квадрате переставить столбцы, в левом нижнем переставить строки, правый нижний повернуть на 180 градусов. Левый верхний квадрат остаётся без изменения.

Понятно, что не любой пандиагональный квадрат чётно-чётного порядка можно превратить в ассоциативный с помощью преобразования обратного преобразованию трёх квадратов, а только такой пандиагональный квадрат, который может быть получен преобразованием трёх квадратов из ассоциативного квадрата.

Приведём пример применения обратного преобразования. В качестве исходного пандиагонального квадрата возьмём квадрат 12-го порядка, изображённый на **рис. 3.67**.

1	140	88	61	9	132	109	40	92	49	101	48
143	6	58	83	135	14	35	106	54	95	43	98
126	23	75	66	118	31	18	123	71	78	26	115
20	121	69	80	28	113	128	21	73	68	120	29
3	138	86	63	11	130	111	38	90	51	103	46
141	8	60	81	133	16	33	108	56	93	41	100
36	105	53	96	44	97	144	5	57	84	136	13
110	39	91	50	102	47	2	139	87	62	10	131
127	22	74	67	119	30	19	122	70	79	27	114
17	124	72	77	25	116	125	24	76	65	117	32
34	107	55	94	42	99	142	7	59	82	134	15
112	37	89	52	104	45	4	137	85	64	12	129

Рис. 3.67

Применим к этому квадрату преобразование обратное преобразованию трёх квадратов. Полученный ассоциативный квадрат вы видите на рис. 3.68.

1	140	88	61	9	132	48	101	49	92	40	109
143	6	58	83	135	14	98	43	95	54	106	35
126	23	75	66	118	31	115	26	78	71	123	18
20	121	69	80	28	113	29	120	68	73	21	128
3	138	86	63	11	130	46	103	51	90	38	111
141	8	60	81	133	16	100	41	93	56	108	33
112	37	89	52	104	45	129	12	64	85	137	4
34	107	55	94	42	99	15	134	82	59	7	142
17	124	72	77	25	116	32	117	65	76	24	125
127	22	74	67	119	30	114	27	79	70	122	19
110	39	91	50	102	47	131	10	62	87	139	2
36	105	53	96	44	97	13	136	84	57	5	144

Рис. 3.68

Примечание: исходный квадрат в этом примере получен комбинацией различных преобразований из пандиагонального квадрата Франклина, построенного Кором Гуркенсом.

А теперь возьмём совершенный квадрат 8-ого порядка (рис. 3.69) и применим к нему преобразование обратное преобразованию трёх квадратов.

1	63	3	61	8	58	6	60
16	50	14	52	9	55	11	53
17	47	19	45	24	42	22	44
32	34	30	36	25	39	27	37
57	7	59	5	64	2	62	4
56	10	54	12	49	15	51	13
41	23	43	21	48	18	46	20
40	26	38	28	33	31	35	29

Рис. 3.69

Результат применения преобразования показан на рис. 3.70.

1	63	3	61	60	6	58	8
16	50	14	52	53	11	55	9
17	47	19	45	44	22	42	24
32	34	30	36	37	27	39	25
40	26	38	28	29	35	31	33
41	23	43	21	20	46	18	48
56	10	54	12	13	51	15	49
57	7	59	5	4	62	2	64

Рис. 3.70

Понятно, что применение преобразования обратного преобразованию трёх квадратов к любому совершенному квадрату даёт ассоциативный квадрат.

3.8 ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СТАНДАРТНОЙ ПЕРЕСТАНОВКИ СТРОК И/ЛИ СТОЛБЦОВ

Данное преобразование применяется к пандиагональным квадратам любого порядка, как нечётного, так и чётно-чётного. Оно состоит в следующем: при перестановке строк первая строка (сверху) остаётся на месте, а остальные строки записываются в обратном порядке – снизу вверх. То же самое при перестановке столбцов: первый столбец (слева) остаётся на месте, а остальные столбцы записываются в обратном порядке – справа налево. Можно одновременно переставить и строки, и столбцы. Посмотрим примеры применения данного преобразования.

Пример 1. Стандартная перестановка строк в пандиагональном квадрате 5-го порядка.

В качестве исходного квадрата возьмём пандиагональный квадрат, изображённый на **рис. 3.71**.

1	20	9	12	23
14	22	3	16	10
18	6	15	24	2
25	4	17	8	11
7	13	21	5	19

Рис. 3.71

Результат применения к этому квадрату стандартной перестановки строк показан на **рис. 3.72**.

1	20	9	12	23
7	13	21	5	19
25	4	17	8	11
18	6	15	24	2
14	22	3	16	10

Рис. 3.72

По аналогии с преобразованием “строки-диагонали” преобразование стандартной перестановки строк и/или столбцов можно назвать преобразованием “диагонали-диагонали”, так как оно переводит все диагонали исходного квадрата (главные и разломанные) в диагонали нового квадрата. На **рис. 3.71** выделены цветом две диагонали, одна главная и одна разломанная. На **рис. 3.72** выделены разломанные диагонали, в которые перешли отмеченные диагонали исходного квадрата. Вы можете проследить за всеми остальными диагоналями исходного квадрата.

Пример 2. Стандартная перестановка строк и столбцов в пандиагональном квадрате 5-го порядка.

В качестве исходного квадрата возьмём тот же самый квадрат с **рис. 3.71**. Применим к нему одновременно и перестановку строк, и перестановку столбцов. Результат вы видите на **рис. 3.73**.

1	23	12	9	20
7	19	5	21	13
25	11	8	17	4
18	2	24	15	6
14	10	16	3	22

Рис. 3.73

Пример 3. Стандартная перестановка столбцов в пандиагональном квадрате 8-го порядка.

В качестве исходного пандиагонального квадрата возьмём пандиагональный квадрат, изображённый на **рис. 3.74**.

1	58	45	19	8	63	44	22
16	23	36	62	9	18	37	59
24	15	60	38	17	10	61	35
25	34	53	11	32	39	52	14
57	2	21	43	64	7	20	46
56	47	28	6	49	42	29	3
48	55	4	30	41	50	5	27
33	26	13	51	40	31	12	54

Рис. 3.74

На **рис. 3.75** показан пандиагональный квадрат, полученный в результате применения к данному квадрату стандартной перестановки столбцов.

1	22	44	63	8	19	45	58
16	59	37	18	9	62	36	23
24	35	61	10	17	38	60	15
25	14	52	39	32	11	53	34
57	46	20	7	64	43	21	2
56	3	29	42	49	6	28	47
48	27	5	50	41	30	4	55
33	54	12	31	40	51	13	26

Рис. 3.75

На **рис. 3.74** выделены главные диагонали исходного квадрата; на **рис. 3.75** вы видите, что главные диагонали превратились в разломанные.

Интересно отметить, что рассмотренное преобразование можно применять и к нетрадиционным пандиагональным квадратам порядка $n = 4k + 2$. Покажем это на примере нетрадиционного идеального квадрата 10-го порядка, изображённого на **рис. 3.76**.

1	168	10	165	3	159	9	166	12	157
156	15	147	18	154	24	148	17	145	26
118	51	127	48	120	42	126	49	129	40
117	54	108	57	115	63	109	56	106	65
27	142	36	139	29	133	35	140	38	131
39	132	30	135	37	141	31	134	28	143
105	64	114	61	107	55	113	62	116	53
130	41	121	44	128	50	122	43	119	52
144	25	153	22	146	16	152	23	155	14
13	158	4	161	11	167	5	160	2	169

Рис. 3.76

Применим к этому пандиагональному квадрату преобразование стандартной перестановки строк. Результат вы видите на **рис. 3.77**.

1	168	10	165	3	159	9	166	12	157
13	158	4	161	11	167	5	160	2	169
144	25	153	22	146	16	152	23	155	14
130	41	121	44	128	50	122	43	119	52
105	64	114	61	107	55	113	62	116	53
39	132	30	135	37	141	31	134	28	143
27	142	36	139	29	133	35	140	38	131
117	54	108	57	115	63	109	56	106	65
118	51	127	48	120	42	126	49	129	40
156	15	147	18	154	24	148	17	145	26

Рис. 3.77

В исходном квадрате точно так же выделены две диагонали, а в преобразованном квадрате вы видите те диагонали, в которые перешли выделенные диагонали исходного квадрата.

Следует отметить, что данное преобразование не сохраняет ассоциативность квадрата. Так, в последнем примере исходный квадрат ассоциативный, а преобразованный квадрат утратил это свойство.

3.9 ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПЕРЕСТАНОВКИ СТРОК И/ИЛИ СТОЛБЦОВ В АССОЦИАТИВНЫХ КВАДРАТАХ

В ассоциативных магических квадратах как нечётного, так и чётно-чётного порядка могут быть переставлены строки, симметрично расположенные относительно горизонтальной оси симметрии квадрата, и/или столбцы, расположенные симметрично относительно вертикальной оси симметрии квадрата. Можно переставлять любое количество таких строк и/или столбцов. В результате такой перестановки будут получаться новые ассоциативные квадраты. Покажем несколько примеров.

Пример 1. Перестановка строк и столбцов в ассоциативном квадрате 5-го порядка.

Исходный ассоциативный квадрат изображён на **рис. 3.78**.

3	16	9	22	15
20	8	21	14	2
7	25	13	1	19
24	12	5	18	6
11	4	17	10	23

Рис. 3.78

Переставим в этом квадрат первую строку с пятой строкой и второй столбец с третьим столбцом.

В результате такой перестановки получится следующий ассоциативный квадрат (**рис. 3.79**):

11	10	17	4	23
20	14	21	8	2
7	1	13	25	19
24	18	5	12	6
3	22	9	16	15

Рис. 3.79

Понятно, что в квадратах нечётного порядка при рассматриваемом преобразовании центральная строка и центральный столбец всегда остаются на месте, потому что они находятся как раз на осях симметрии квадрата.

Пример 2. Перестановка строк и столбцов в ассоциативном квадрате 8-го порядка.

В качестве исходного квадрата возьмём ассоциативный квадрат, изображённый на **рис. 3.80**.

1	63	62	4	5	59	58	8
56	10	11	53	52	14	15	49
48	18	19	45	44	22	23	41
25	39	38	28	29	35	34	32
33	31	30	36	37	27	26	40
24	42	43	21	20	46	47	17
16	50	51	13	12	54	55	9
57	7	6	60	61	3	2	64

Рис. 3.80

Выполним преобразование в два этапа. Сначала переставим две пары симметричных строк (на рис. 3.80 и на рис. 3.81 переставляемые строки выделены одинаковым цветом). Результат показан на рис. 3.81.

1	63	62	4	5	59	58	8
16	50	51	13	12	54	55	9
48	18	19	45	44	22	23	41
33	31	30	36	37	27	26	40
25	39	38	28	29	35	34	32
24	42	43	21	20	46	47	17
56	10	11	53	52	14	15	49
57	7	6	60	61	3	2	64

Рис. 3.81

Очевидно, что полученный квадрат является ассоциативным. А теперь переставим в полученном квадрате две пары симметричных столбцов, например, первый и восьмой, третий и шестой. В результате этого преобразования получим следующий ассоциативный квадрат (рис. 3.82):

8	63	59	4	5	62	58	1
9	50	54	13	12	51	55	16
41	18	22	45	44	19	23	48
40	31	27	36	37	30	26	33
32	39	35	28	29	38	34	25
17	42	46	21	20	43	47	24
49	10	14	53	52	11	15	56
64	7	3	60	61	6	2	57

Рис. 3.82

В заключение покажу применение рассматриваемого преобразования к нетрадиционному идеальному квадрату 10-го порядка с рис. 3.76. Переставим три пары симметричных строк, например: вторую и девятую, четвертую и седьмую, пятую и шестую. В результате такой перестановки получится следующий нетрадиционный ассоциативный квадрат (рис. 3.83):

1	168	10	165	3	159	9	166	12	157
144	25	153	22	146	16	152	23	155	14
118	51	127	48	120	42	126	49	129	40
105	64	114	61	107	55	113	62	116	53
39	132	30	135	37	141	31	134	28	143
27	142	36	139	29	133	35	140	38	131
117	54	108	57	115	63	109	56	106	65
130	41	121	44	128	50	122	43	119	52
156	15	147	18	154	24	148	17	145	26
13	158	4	161	11	167	5	160	2	169

Рис. 3.83

Очевидно, что квадрат утратил свойство пандиагональности. Рассматриваемое преобразование не сохраняет пандиагональность квадрата.

Напомню читателям, что подробнее о преобразованиях магических квадратов можно посмотреть на сайте автора.

ГЛАВА 4. МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ МАГИЧЕСКИХ КВАДРАТОВ

Как уже говорилось, методы построения магических квадратов – важнейшая составляющая теории магических квадратов. С самого возникновения магических квадратов и до наших дней математики разрабатывают различные методы построения. Наряду с методами построения магических квадратов, не обладающих никакими дополнительными свойствами, разрабатываются методы построения разных видов магических квадратов: пандиагональных, идеальных, совершенных, бимагических и т.д.

Установлено, что при построении магических квадратов необходимо учитывать порядок квадрата. В соответствии с порядком все методы делятся на три группы: а) для квадратов нечётного порядка $n = 2k + 1$; б) для квадратов чётно-чётного порядка $n = 4k$; в) для квадратов чётно-нечётного порядка $n = 4k + 2$ ($k = 1, 2, 3 \dots$).

4.1 ПОСТРОЕНИЕ МАГИЧЕСКИХ КВАДРАТОВ НЕЧЁТНОГО ПОРЯДКА

4.1.1 ИНДИЙСКИЙ (СИАМСКИЙ) МЕТОД

“Индийский метод составления магических квадратов (иногда называется также *сиамским*) является, по-видимому, самым древним алгоритмом построения магических квадратов произвольного нечётного порядка $n = 2m + 1$ ”. [3]

Правила для метода очень простые. Число **1** вписывается в середину верхней строки. Далее числа вписываются в естественном порядке по восходящей диагонали. Как только число выходит за пределы квадрата, сразу перенесём его в эквивалентную ячейку внутри квадрата. Дойдя до числа **kn**, то есть до числа кратного порядку квадрата, пишем следующее число снизу от только что записанного числа и снова записываем числа по восходящей диагонали.

Примечание: следует пояснить, что такое эквивалентная ячейка. Если число, оказавшееся за пределами квадрата, находится справа от него, надо записать его в том же горизонтальном ряду, сместив на **n** ячеек влево (см., например, число 30 на **рис. 4.1**). Если число оказалось над квадратом, надо записать его в том же вертикальном ряду, сместив на **n** ячеек вниз (см., например, число 31 на **рис. 4.1**) [**n** – порядок квадрата].

Продemonстрируем построение магического квадрата 7-го порядка данным методом (**рис. 4.1**).

	31	40	49	2	11	20	
30	39	48	1	10	19	28	30
38	47	7	9	18	27	29	38
46	6	8	17	26	35	37	46
5	14	16	25	34	36	45	5
13	15	24	33	42	44	4	13
21	23	32	41	43	3	12	21
22	31	40	49	2	11	20	

Рис. 4.1

Очевидно, что полученный квадрат является ассоциативным. Все квадраты, построенные индийским методом, ассоциативны (в представленном здесь варианте, когда

число **1** вписывается в середину верхней строки; в [3] говорится, что метод допускает обобщение – когда число **1** вписывается в другие ячейки квадрата).

Посмотрим ещё один пример – построение квадрата 9-го порядка (**рис. 4.2**).

	48	59	70	81	2	13	24	35	
47	58	69	80	1	12	23	34	45	47
57	68	79	9	11	22	33	44	46	57
67	78	8	10	21	32	43	54	56	67
77	7	18	20	31	42	53	55	66	77
6	17	19	30	41	52	63	65	76	6
16	27	29	40	51	62	64	75	5	16
26	28	39	50	61	72	74	4	15	26
36	38	49	60	71	73	3	14	25	36
37	48	59	70	81	2	13	24	35	

Рис. 4.2

4.1.2 МЕТОД ТЕРРАС

В [3] говорится, что метод террас предложен Баше де Мезириаком и поэтому называется ещё методом Баше.

Начнём демонстрацию метода с построения магического квадрата 5-го порядка.

С четырёх сторон к исходному квадрату 5x5 добавляются террасы так, чтобы получился зубчатый квадрат того же порядка, что и исходный (**рис. 4.3** и **рис. 4.4**). На рисунках террасы окрашены в жёлтый цвет.

В полученной фигуре располагают числа от 1 до 25 в естественном порядке косыми (диагональными) рядами снизу вверх (**рис. 4.3**) или сверху вниз (**рис. 4.4**). Числа в террасах, не попавшие в квадрат, перемещаются как бы вместе с террасами внутрь него так, чтобы они примкнули к противоположным сторонам квадрата, как показано на **рис. 4.5** и **4.6**.

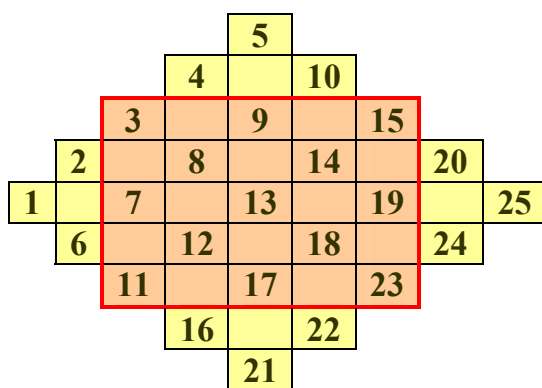


Рис. 4.3

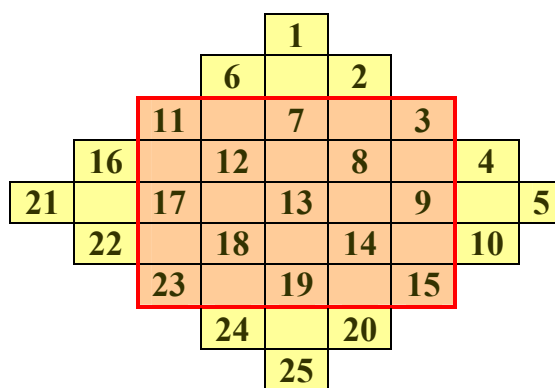


Рис. 4.4

			5			
		4		10		
	3	16	9	22	15	
2	20	8	21	14	2	20
1		7	25	13	1	19
	6	24	12	5	18	6
		11	4	17	10	23
			16		22	
				21		

Рис. 4.5

			1			
		6		2		
	11	24	7	20	3	
16	4	12	25	8	16	4
21		17	5	13	21	9
	22	10	18	1	14	22
		23	6	19	2	15
			24		20	
				25		

Рис. 4.6

На рис. 4.7 и 4.8 изображены готовые магические квадраты, эти квадраты эквивалентны, один получается из другого поворотом на 90 градусов относительно центра квадрата.

3	16	9	22	15
20	8	21	14	2
7	25	13	1	19
24	12	5	18	6
11	4	17	10	23

Рис. 4.7

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

Рис. 4.8

Заметим, что методом террас можно построить не только традиционный магический квадрат нечётного порядка (то есть заполненный числами от 1 до n^2), но и квадрат, заполненный любыми другими числами, лишь бы разность между каждым последующим и предыдущим числом была постоянной, то есть это должны быть члены арифметической прогрессии. Так, на рис. 4.9 вы видите нетрадиционный магический квадрат 5-го порядка, заполненный чётными числами от 2 до 50, построенный методом террас.

6	32	18	44	30
40	16	42	28	4
14	50	26	2	38
48	24	10	36	12
22	8	34	20	46

Рис. 4.9

Очевидно, что магические квадраты, построенные методом террас, получаются ассоциативными. На рис. 4.10 изображён квадрат 7-го порядка, а на рис. 4.11 – квадрат 9-го порядка, построенные методом террас.

4	29	12	37	20	45	28
35	11	36	19	44	27	3
10	42	18	43	26	2	34
41	17	49	25	1	33	9
16	48	24	7	32	8	40
47	23	6	31	14	39	15
22	5	30	13	38	21	46

Рис. 4.10

5	46	15	56	25	66	35	76	45
54	14	55	24	65	34	75	44	4
13	63	23	64	33	74	43	3	53
62	22	72	32	73	42	2	52	12
21	71	31	81	41	1	51	11	61
70	30	80	40	9	50	10	60	20
29	79	39	8	49	18	59	19	69
78	38	7	48	17	58	27	68	28
37	6	47	16	57	26	67	36	77

Рис. 4.11

Ассоциативные квадраты порядков не кратных 3, построенные методом террас, превращаются в идеальные магические квадраты простой перестановкой строк или столбцов с постоянным шагом. Частично этим свойством обладают квадраты, построенные индийским (сиамским) методом: эти квадраты превращаются в идеальные для порядков не кратных 3 и не кратных 5 и только перестановкой столбцов.

Перестановка столбцов (строк) с постоянным шагом означает, что столбцы (строки) переставляются через постоянное число столбцов (строк), например, через 1. Перестановка начинается от центрального столбца (центральной строки) вправо (вверх).

Начнём демонстрацию этого свойства с квадрата 5-го порядка с **рис. 4.7**. На **рис. 4.12** вы видите идеальный квадрат, полученный из этого квадрата перестановкой столбцов с шагом 1, а на **рис. 4.13** – идеальный квадрат, полученный перестановкой строк с шагом 1. Перестановка строк (столбцов) с шагом 2 в квадрате 5-го порядка даёт эквивалентные квадраты.

22	3	9	15	16
14	20	21	2	8
1	7	13	19	25
18	24	5	6	12
10	11	17	23	4

Рис. 4.12

24	12	5	18	6
3	16	9	22	15
7	25	13	1	19
11	4	17	10	23
20	8	21	14	2

Рис. 4.13

Теперь посмотрим превращение в идеальный квадрат ассоциативного квадрата 7-го порядка с **рис. 4.10**. Сначала выполним перестановку столбцов. Здесь получается два оригинальных квадрата: при перестановке с шагом 1 (**рис. 4.14**) и с шагом 2 (**рис. 4.15**). Другие шаги дают эквивалентные квадраты.

20	28	29	37	45	4	12
44	3	11	19	27	35	36
26	34	42	43	2	10	18
1	9	17	25	33	41	49
32	40	48	7	8	16	24
14	15	23	31	39	47	6
38	46	5	13	21	22	30

Рис. 4.14

29	20	4	37	28	12	45
11	44	35	19	3	36	27
42	26	10	43	34	18	2
17	1	41	25	9	49	33
48	32	16	7	40	24	8
23	14	47	31	15	6	39
5	38	22	13	46	30	21

Рис. 4.15

Теперь выполним аналогичную перестановку строк. На **рис. 4.16** строки переставлены с шагом 1, а на **рис. 4.17** – с шагом 2 (исходным по-прежнему является квадрат с **рис. 4.10**). Перестановка строк с другими шагами даёт эквивалентные квадраты.

16	48	24	7	32	8	40
22	5	30	13	38	21	46
35	11	36	19	44	27	3
41	17	49	25	1	33	9
47	23	6	31	14	39	15
4	29	12	37	20	45	28
10	42	18	43	26	2	34

Рис. 4.16

35	11	36	19	44	27	3
16	48	24	7	32	8	40
4	29	12	37	20	45	28
41	17	49	25	1	33	9
22	5	30	13	38	21	46
10	42	18	43	26	2	34
47	23	6	31	14	39	15

Рис. 4.17

Понятно, что аналогичная перестановка строк (или столбцов) в ассоциативных квадратах порядков кратных 3, построенных методом террас, даёт новые ассоциативные (но не пандиагональные!) квадраты. Предлагаю читателям проделать это на примере ассоциативного квадрата 9-го порядка с рис. 4.11.

4.1.3 МЕТОД МОСКОПУЛА (МЕТОД КОНЯ)

“В методе византийского учёного Москопула, как в индийском методе, указывается некоторый алгоритм последовательного заполнения клеток основного квадрата числами от 1 до n^2 . Порядок заполнения клеток по этому способу такой же, как порядок обегания шахматной доски конём,двигающимся вверх и направо. Поэтому метод Москопула иногда называется также *методом коня*”. [3]

Правила для метода Москопула очень просты (излагаются по [3]).

1. Если порядок квадрата n не кратен 3, то число 1 вписывается в любую ячейку квадрата; если порядок квадрата n кратен 3, то число 1 вписывается в середину нижней строки.

2. Последовательно вписываем числа в естественном порядке, двигаясь ходом шахматного коня вверх и направо. Как только число выходит за пределы квадрата, переносим его в эквивалентную ячейку внутри квадрата.

3. Если ячейка, в которую должно быть вписано число $z+1$, уже занята другим числом, то вписываем число $z+1$ в ячейку, расположенную в том же вертикальном ряду, что и ячейка с числом z , но находящуюся на четыре ячейки выше.

Проиллюстрируем построение магического квадрата 5-ого порядка методом Москопула (рис. 4.18).

			21		
	6				
	12	25	8	16	4
	18		14	22	10
11	24	7	20	3	
17	5	13	21	9	17
23	6	19	2	15	23
4	12	25	8	16	
10	18	1	14	22	

Рис. 4.18

Примечание: об эквивалентной ячейке было сказано при описании индийского метода. Но там не было случая такого расположения числа вне квадрата, как расположены числа 4 и 10 на рис. 4.18. В таком случае число надо сначала сместить вниз на n ячеек (оно окажется точно

справа от квадрата), а затем сместить его влево на n ячеек (оно окажется в эквивалентной ячейке внутри квадрата). Можно действовать и в обратном порядке: сначала сместить влево, а затем вниз.

Теперь рассмотрим случай другого положения числа **1** (рис. 4.19):

6					
			16		
		14	22	10	18
	7	20	3	11	24
5	13	21	9	17	5
6	19	2	15	23	
12	25	8	16	4	12
18	1	14	22	10	
24	7	20	3	11	

Рис. 4.19

Понятно, что, по-разному располагая в квадрате число **1**, мы можем построить n^2 магических квадратов, но это только для порядков не кратных 3.

Рассмотрим построение магического квадрата 9-го порядка методом Москопула (рис. 4.20). Порядок квадрата кратен 3, поэтому число **1** записывается в середину нижней строки.

							55		
			10						
	38	79	30	71	22	63	14	46	6
	58	18	50		42	74	34	66	26
37	78	29	70	21	62	13	54	5	
57	17	49	9	41	73	33	65	25	57
77	28	69	20	61	12	53	4	45	77
16	48	8	40	81	32	64	24	56	16
36	68	19	60	11	52	3	44	76	36
47	7	39	80	31	72	23	55	15	47
67	27	59	10	51	2	43	75	35	67
6	38	79	30	71	22	63	14	46	
26	58	18	50	1	42	74	34	66	

Рис. 4.20

Для квадратов порядков кратных 3 метод Москопула тоже допускает обобщение. Для таких квадратов число **1** можно вписывать в такую ячейку, координаты которой удовлетворяют условиям: $x = 1 \pmod{3}$, $y = 0 \pmod{3}$. Понятно, что центральная ячейка нижней строки квадрата удовлетворяет этим условиям, её координаты такие: $x = (n - 1)/2$, $y = 0$. Всего же в квадрате порядка n кратного 3 будет $(n/3)^2$ ячеек, координаты которых удовлетворяют указанному условию. Следовательно, для порядков кратных 3 методом Москопула можно построить $(n/3)^2$ магических квадратов.

Покажем ещё один магический квадрат 9-го порядка, построенный данным методом. Число **1** запишем в ячейку, имеющую координаты: $x = 1$, $y = 3$. Смотрите построение этого магического квадрата на рис. 4.21

						37			
	41	73	33	65	25	57	17	49	9
	61	12	53	4	45	77	28	69	20
40	81	32	64	24	56	16	48	8	40
60	11	52	3	44	76	36	68	19	60
80	31	72	23	55	15	47	7	39	80
10	51	2	43	75	35	67	27	59	
30	71	22	63	14	46	6	38	79	30
50	1	42	74	34	66	26	58	18	50
70	21	62	13	54	5	37	78	29	70
9	41	73	33	65	25	57	17	49	
20	61	12	53	4	45	77	28	69	

Рис. 4.21

Автором предложены варианты метода Москопула: а) для построения идеальных магических квадратов нечётного порядка не кратного 3; б) для построения ассоциативных магических квадратов нечётного порядка кратного 3. Подробно эти варианты можно посмотреть на сайте автора. (28)

Здесь показаны два примера – построение ассоциативного квадрата 9-го порядка (рис.4.22) и построение идеального квадрата 11-го порядка (рис. 4.23) методом Москопула.

	28								
						64			
	68	19	60	11	52	3	44	76	36
	7	39	80	31	72	23	55	15	47
67	27	59	10	51	2	43	75	35	67
6	38	79	30	71	22	63	14	46	6
26	58	18	50	1	42	74	34	66	26
37	78	29	70	21	62	13	54	5	
57	17	49	9	41	73	33	65	25	57
77	28	69	20	61	12	53	4	45	77
16	48	8	40	81	32	64	24	56	16
36	68	19	60	11	52	3	44	76	
47	7	39	80	31	72	23	55	15	

Рис. 4.22

							100				
		34									
	69	9	59	120	49	110	39	89	29	79	19
	44	94	23	84	13	74	3	64	114	54	104
68	8	58	119	48	109	38	99	28	78	18	68
43	93	33	83	12	73	2	63	113	53	103	43
7	57	118	47	108	37	98	27	88	17	67	7
92	32	82	22	72	1	62	112	52	102	42	92
56	117	46	107	36	97	26	87	16	77	6	
31	81	21	71	11	61	111	51	101	41	91	31
116	45	106	35	96	25	86	15	76	5	66	116
80	20	70	10	60	121	50	100	40	90	30	80
55	105	34	95	24	85	14	75	4	65	115	55
19	69	9	59	120	49	110	39	89	29	79	
104	44	94	23	84	13	74	3	64	114	54	

Рис. 4.23

Построение идеальных магических квадратов нечётного порядка кратного 3 методом Москопула невозможно.

В [8] приведён интересный вариант метода коня. Этот вариант дан в виде задачи. Предлагаем эту задачу читателям. По приведённой иллюстрации (рис. 4.23а) разработать алгоритм построения магических квадратов нечётного порядка.

							5							
						4			10					
			3				9			15				
	2				8			14			20			
1			7				13			19			25	
	6				12			18			24			
			11				17			23				
					16			22						
							21							

Рис. 4.23а

Решение задачи приведено в (29).

4.1.4 МЕТОД АЛЬФИЛА

“Метод альфила вполне аналогичен методу Москопула, только вместо хода коня в этом методе используется движение по диагонали через одну клетку (по этому закону в старинных шахматах двигался предок современного слона – так называемый *альфил*, от которого и происходит название метода)”. [3]

Правила для метода альфила таковы (излагаются по [3]):

1. Число 1 вписывается в ячейку с координатами (0, 1).
2. Числа вписываются в естественном порядке по восходящей диагонали через одну ячейку. Как только число выходит за пределы квадрата, переносим его в эквивалентную ячейку внутри квадрата.

3. Если ячейка, в которую должно быть вписано число $z+1$, уже занята, то число $z+1$ вписывается в ячейку, получающуюся из ячейки с числом z “удлинённым ходом шахматного коня” (иными словами: если число z находится в ячейке с координатами (x, y) , то число $z+1$ вписывается в ячейку с координатами $(x+2, y+2)$ при условии, что эта ячейка свободна, и в ячейку с координатами $(x+1, y+3)$ в противном случае).

На **рис. 4.24** показано построение магического квадрата 5-ого порядка методом альфила.

				6		
		24	8	17		15
	21	10	19	3	12	
23	7	16	5	14	23	7
9	18	2	11	25	9	18
20	4	13	22	6	20	4
1	15	24	8	17		
12	21	10	19	3		

Рис. 4.24

Очевидно, что квадрат получился ассоциативным.

В отличие от индийского метода и метода Москопула (ход коня) метод альфила не допускает обобщений. Это значит, что для любого нечётного порядка этим методом можно построить только один магический квадрат. Число 1 в этом методе всегда вписывается в ячейку с координатами $(0, 1)$.

Посмотрите ещё построение квадрата 9-ого порядка методом альфила (**рис. 4.25**):

								10		
		78	31	65	27	61	14	48		44
	73	35	69	22	56	18	52	5	39	
77	30	64	26	60	13	47	9	43	77	30
34	68	21	55	17	51	4	38	81	34	68
72	25	59	12	46	8	42	76	29	72	25
20	63	16	50	3	37	80	33	67	20	63
58	11	54	7	41	75	28	71	24	58	11
15	49	2	45	79	32	66	19	62	15	49
53	6	40	74	36	70	23	57	10	53	6
1	44	78	31	65	27	61	14	48		
39	73	35	69	22	56	18	52	5		

Рис. 4.25

Квадрат тоже получился ассоциативным.

Сравним этот квадрат с квадратом, построенным методом террас. Для более удобного сравнения повернём этот квадрат на 180 градусов (**рис. 4.26**):

5	52	18	56	22	69	35	73	39
48	14	61	27	65	31	78	44	1
10	57	23	70	36	74	40	6	53
62	19	66	32	79	45	2	49	15
24	71	28	75	41	7	54	11	58
67	33	80	37	3	50	16	63	20
29	76	42	8	46	12	59	25	72
81	38	4	51	17	55	21	68	34
43	9	47	13	60	26	64	30	77

Рис. 4.26

Определим здесь понятие начальной цепочки магического квадрата. Начальной цепочкой магического квадрата порядка n называется последовательность n первых чисел. Начальная цепочка может иметь разные формы. В квадрате на рис. 4.26 начальная цепочка имеет диагональную форму (она выделена). Магические квадраты, имеющие одинаковую форму начальной цепочки, будем называть *подобными*.

Продублируем квадрат, построенный методом террас (рис. 4.27):

5	46	15	56	25	66	35	76	45
54	14	55	24	65	34	75	44	4
13	63	23	64	33	74	43	3	53
62	22	72	32	73	42	2	52	12
21	71	31	81	41	1	51	11	61
70	30	80	40	9	50	10	60	20
29	79	39	8	49	18	59	19	69
78	38	7	48	17	58	27	68	28
37	6	47	16	57	26	67	36	77

Рис. 4.27

В этом квадрате начальная цепочка имеет такую же диагональную форму, как и в квадрате на рис. 4.26. Перед вами два подобных магических квадрата.

Интересно отметить, что эти магические квадраты связаны *комбинированным* преобразованием “плюс-минус ...”. Преобразования данного типа не были представлены в главе, посвящённой преобразованиям магических квадратов. Покажем здесь одно из таких преобразований. Это преобразование комбинированное, так как в нём участвует более одного числа. В *простых* преобразованиях “плюс-минус ...” участвует одно число. Преобразования “плюс-минус ...” задаются в матричной форме.

На рис. 4.28 вы видите матрицу преобразования, связывающего квадраты, изображённые на рис. 4.26 и на рис. 4.27.

	-6	-3		+3	-3		+3	+6
+6		-6	-3		+3	-3		+3
+3	+6		-6	-3		+3	-3	
	+3	+6		-6	-3		+3	-3
-3		+3	+6		-6	-3		+3
+3	-3		+3	+6		-6	-3	
	+3	-3		+3	+6		-6	-3
-3		+3	-3		+3	+6		-6
-6	-3		+3	-3		+3	+6	

Рис. 4.28

В матрице для краткости не записаны элементы a_{ij} исходного квадрата. Применив преобразование, заданное этой матрицей, к квадрату с рис. 4.26, вы получите квадрат, изображённый на рис. 4.27. Очевидно, что данное преобразование сохраняет ассоциативность квадрата. Симметрия преобразования, обеспечивающая сохранение ассоциативности, хорошо видна в матрице на рис. 4.28.

Автором предлагается следующий вариант метода альфила. Число 1 записывается так же в ячейку с координатами (0, 1). Числа записываются в естественном порядке по восходящей диагонали *другого направления* и не через ячейку, а в каждой ячейке подряд. Если ячейка оказывается уже занятой, то число вписывается так же “удлиненным ходом шахматного коня”. На рис. 4.29 показано построение магического квадрата 7-го порядка с применением варианта метода альфила.

		29					
	39	7	17	34	44	12	22
11	28	38	6	16	33	43	11
49	10	27	37	5	15	32	49
31	48	9	26	36	4	21	31
20	30	47	8	25	42	3	20
2	19	29	46	14	24	41	2
40	1	18	35	45	13	23	40
	39	7	17	34	44	12	22

Рис. 4.29

Мы получили ассоциативный магический квадрат, который не эквивалентен квадрату, построенному методом альфила. Для сравнения на рис. 4.30 приведён квадрат 7-го порядка, построенный методом альфила.

46	20	36	10	33	7	23
16	39	13	29	3	26	49
42	9	32	6	22	45	19
12	35	2	25	48	15	38
31	5	28	44	18	41	8
1	24	47	21	37	11	34
27	43	17	40	14	30	4

Рис. 4.30

Можно сказать, что вариант метода альфила является методом современного шахматного слона или методом короля (и слон, и король могут ходить применяемым в этом варианте способом: на одну клетку по диагонали).

Посмотрите построение ассоциативного магического квадрата 15-го порядка с применением варианта метода альфила (рис. 4.31).

		121													
	173	15	67	134	186	28	80	147	199	41	93	160	212	54	106
53	120	172	14	66	133	185	27	79	146	198	40	92	159	211	53
225	52	119	171	13	65	132	184	26	78	145	197	39	91	158	225
157	224	51	118	170	12	64	131	183	25	77	144	196	38	105	157
104	156	223	50	117	169	11	63	130	182	24	76	143	210	37	104
36	103	155	222	49	116	168	10	62	129	181	23	90	142	209	36
208	35	102	154	221	48	115	167	9	61	128	195	22	89	141	208
140	207	34	101	153	220	47	114	166	8	75	127	194	21	88	140
87	139	206	33	100	152	219	46	113	180	7	74	126	193	20	87
19	86	138	205	32	99	151	218	60	112	179	6	73	125	192	19
191	18	85	137	204	31	98	165	217	59	111	178	5	72	124	191
123	190	17	84	136	203	45	97	164	216	58	110	177	4	71	123
70	122	189	16	83	150	202	44	96	163	215	57	109	176	3	70
2	69	121	188	30	82	149	201	43	95	152	214	56	108	175	2
174	1	68	135	187	29	81	148	200	42	94	161	213	55	107	174
	173	15	67	134	186	28	80	147	199	41	93	160	212	54	106

Рис. 4.31

Предлагаем читателям построить квадрат 15-го порядка методом альфила и сравнить его с квадратом на рис. 4.31.

4.1.5 МЕТОД ДЕЛАИРА или МЕТОД ЛАТИНСКИХ КВАДРАТОВ

Прежде чем начать описание метода латинских квадратов, необходимо дать определения латинского квадрата (определения даются по [8]).

Определение 1

Латинским квадратом порядка n называется квадратная таблица размером $n \times n$, среди n^2 элементов которой различными будут только n штук, и любой из n различных элементов встречается ровно один раз в каждой строке и в каждом столбце таблицы.

На рис. 4.32 показан пример латинского квадрата 5-го порядка.

0	1	2	3	4
4	0	1	2	3
3	4	0	1	2
2	3	4	0	1
1	2	3	4	0

Рис. 4.32

Определение 2

Латинский квадрат $n \times n$, в котором n различных элементов находятся также в каждой из его главных диагоналей, называется *диагональным*.

Очевидно, что латинский квадрат на **рис. 4.32** не является диагональным, так как в одной из его главных диагоналей все элементы одинаковы. На **рис. 4.33** показан диагональный латинский квадрат 5-го порядка.

0	1	2	3	4
2	3	4	0	1
4	0	1	2	3
1	2	3	4	0
3	4	0	1	2

Рис. 4.33

Определение 3

Два латинских квадрата A и B одинакового порядка n называются *ортогональными*, если различны все пары, образованные их соответствующими элементами a_{ij} , b_{ij} , то есть если при наложении латинских квадратов A и B получается таблица, все n^2 элементов которой различны.

Латинские квадраты 5-го порядка, приведённые выше, ортогональны. Таблица, получающаяся при наложении этих квадратов, о которой говорится в определении, называется также *греко-латинским квадратом*. Для приведённых латинских квадратов греко-латинский квадрат будет таким (**рис. 4.34**):

00	11	22	33	44
42	03	14	20	31
34	40	01	12	23
21	32	43	04	10
13	24	30	41	02

Рис. 4.34

Очевидно, что все элементы в этом квадрате различны.

Заметим, что все приведённые определения относятся к *классическим* латинским квадратам. Для построения магических квадратов используются также *обобщённые* латинские квадраты.

Определение 4

Обобщённым латинским квадратом порядка n называется квадратная таблица размером $n \times n$, среди n^2 элементов которой различными будут только n штук, и любой из n различных элементов встречается ровно n раз внутри этой таблицы. На **рис. 4.35** вы видите пример обобщённого латинского квадрата 6-го порядка.

0	6	0	6	0	6
4	2	4	2	4	2
5	1	5	1	5	1
5	1	5	1	5	1
4	2	4	2	4	2
0	6	0	6	0	6

Рис. 4.35

Когда употребляется термин “латинский квадрат”, подразумевается, что речь идёт о классическом латинском квадрате.

Метод латинских квадратов основан на использовании пары ортогональных латинских (классических или обобщённых) квадратов. В случае использования классических латинских квадратов необходимо, чтобы каждый из двух вспомогательных латинских квадратов являлся нетрадиционным магическим квадратом, то есть сумма чисел в каждой строке, в каждом столбце и в обеих главных диагоналях этих квадратов была равна одному и тому же числу. Очевидно, что этому условию удовлетворяют все диагональные квадраты. Но есть (как увидим далее) и не диагональные квадраты, которые тоже удовлетворяют этому условию.

Итак, предположите, что мы составили пару ортогональных латинских квадратов $A(a_{ij})$ и $B(b_{ij})$ порядка n , которые являются нетрадиционными магическими квадратами. Тогда магический квадрат $C(c_{ij})$ составляется из данной пары вспомогательных латинских квадратов по следующей формуле:

$$[1] \quad c_{ij} = n \cdot a_{ij} + b_{ij} + 1$$

При этом следует отметить, что оба вспомогательных квадрата в данной формуле равноправны, то есть их можно поменять местами и тогда формула запишется так:

$$[2] \quad c_{ij} = n \cdot b_{ij} + a_{ij} + 1$$

В этом состоит основной принцип метода латинских квадратов. Метод латинских квадратов применяется не только для построения магических квадратов нечётного порядка, но и для построения многих других видов магических квадратов. Как следует из описания метода, главное – это уметь составить пару ортогональных латинских квадратов. Составить магический квадрат из готовой пары вспомогательных латинских квадратов по формуле [1] или по формуле [2] очень просто.

Для квадратов нечётного порядка метод латинских квадратов называется также методом Делаира. Рассмотрим данный метод.

Первый латинский квадрат для любого нечётного порядка $n = 2m + 1$ строится следующим образом:

- 1) выбирается произвольная перестановка i_1, i_2, \dots, i_{n-1} чисел $0, 1, \dots, n-1$, для которой $i_{n-1} = m$ (или $[n/2]$);
 - 2) заполняется нижний горизонтальный ряд числами i_1, i_2, \dots, i_{n-1} ;
 - 3) остальные горизонтальные ряды заполняются последовательно снизу вверх так, чтобы каждый следующий ряд получался из предыдущего циклическим сдвигом с шагом 1. [3]
- На рис. 4.36 показан первый вспомогательный латинский квадрат.

2	1	0	4	3
3	2	1	0	4
4	3	2	1	0
0	4	3	2	1
1	0	4	3	2

Рис. 4.36

Второй вспомогательный латинский квадрат строится аналогично, только теперь произвольная перестановка чисел $0, 1, \dots, n-1$ записывается в верхний горизонтальный ряд. В последней ячейке по-прежнему оказывается число m . Далее заполняются следующие строки сверху вниз точно таким же циклическим сдвигом с шагом 1. На **рис. 4.37** вы видите второй вспомогательный квадрат.

0	4	1	3	2
4	1	3	2	0
1	3	2	0	4
3	2	0	4	1
2	0	4	1	3

Рис. 4.37

Оба вспомогательных латинских квадрата являются нетрадиционными магическими квадратами с магической константой 10. Легко видеть, что эти латинские квадраты не диагональные.

На **рис. 4.38** показан магический квадрат, построенный из данной пары ортогональных латинских квадратов по формуле [1], а на **рис. 4.39** – квадрат, построенный по формуле [2].

11	10	2	24	18
20	12	9	3	21
22	19	13	6	5
4	23	16	15	7
8	1	25	17	14

Рис. 4.38

3	22	6	20	14
24	8	17	11	5
10	19	13	2	21
16	15	4	23	7
12	1	25	9	18

Рис. 4.39

Очевидно, что эти квадраты не эквивалентные.

Понятно, что первый латинский квадрат можно построить в 24 вариантах (число перестановок из 4 чисел 0, 1, 3, 4; положение числа 2 фиксировано). Для любого из этих вариантов второй латинский квадрат тоже можно построить в 24 вариантах.

Следовательно, всего данным методом можно построить (по одной из формул [1], [2]) 576 магических квадратов 5-го порядка. Однако среди этих квадратов будут эквивалентные квадраты. Если же для каждой пары латинских квадратов применять обе формулы [1] и [2], то получатся две группы по 576 квадратов.

Посмотрим ещё один пример – построение методом Делайра магического квадрата 7-го порядка. На **рис. 4.40** показан первый вспомогательный латинский квадрат.

3	0	1	2	4	5	6
6	3	0	1	2	4	5
5	6	3	0	1	2	4
4	5	6	3	0	1	2
2	4	5	6	3	0	1
1	2	4	5	6	3	0
0	1	2	4	5	6	3

Рис. 4.40

Выберем для построения второго вспомогательного латинского квадрата ту же самую перестановку чисел, что и в первом латинском квадрате. Второй латинский квадрат вы видите на **рис. 4.41**.

0	1	2	4	5	6	3
1	2	4	5	6	3	0
2	4	5	6	3	0	1
4	5	6	3	0	1	2
5	6	3	0	1	2	4
6	3	0	1	2	4	5
3	0	1	2	4	5	6

Рис. 4.41

Оба латинских квадрата являются нетрадиционными магическими квадратами с магической константой 21.

На **рис. 4.42** изображён готовый магический квадрат, построенный из данной пары ортогональных латинских квадратов по формуле [1].

22	2	10	19	34	42	46
44	24	5	13	21	32	36
38	47	27	7	11	15	30
33	41	49	25	1	9	17
20	35	39	43	23	3	12
14	18	29	37	45	26	6
4	8	16	31	40	48	28

Рис. 4.42

В этом примере квадрат получился ассоциативным.

Читателям предлагается построить магический квадрат из данной пары латинских квадратов по формуле [2].

Легко посчитать, что методом Делайра можно построить две группы магических квадратов 7-го порядка по 518400 квадратов в каждой.

Автором предлагается вариант метода Делайра, основанный на использовании пары ортогональных диагональных латинских квадратов.

Покажем этот вариант метода на примере построения магического квадрата 5-го порядка.

Возьмём для построения следующую пару ортогональных диагональных латинских квадратов (**рис.4.43 – 4.44**):

0	1	2	3	4
4	2	3	0	1
3	4	1	2	0
1	3	0	4	2
2	0	4	1	3

Рис. 4.43

0	1	2	3	4
3	4	1	2	0
4	2	3	0	1
2	0	4	1	3
1	3	0	4	2

Рис. 4.44

Данную пару ортогональных диагональных латинских квадратов назовём *нормализованной* ввиду того, что в первой строке обоих квадратов стоит тождественная перестановка чисел 0, 1, ... 4. Записывая в первой строке обоих квадратов любую другую перестановку чисел 0, 1, ... 4, мы можем получить 120 вариантов подобных пар ортогональных диагональных латинских квадратов. Из каждой такой пары можно построить магический квадрат по любой из формул [1], [2].

Из приведённой нормализованной пары латинских квадратов по формуле [1] получается такой магический квадрат (**рис. 4.45**):

1	7	13	19	25
24	15	17	3	6
20	23	9	11	2
8	16	5	22	14
12	4	21	10	18

Рис. 4.45

Для того чтобы было удобно составлять другие пары ортогональных диагональных квадратов, подобные приведённой нормализованной паре, надо записать квадраты этой пары в символьном виде (**рис. 4.46 – 4.47**).

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_5	a_3	a_4	a_1	a_2
a_4	a_5	a_2	a_3	a_1
a_2	a_4	a_1	a_5	a_3
a_3	a_1	a_5	a_2	a_4

Рис. 4.46

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_4	a_5	a_2	a_3	a_1
a_5	a_3	a_4	a_1	a_2
a_3	a_1	a_5	a_2	a_4
a_2	a_4	a_1	a_5	a_3

Рис. 4.47

Теперь выбираем произвольную перестановку, например: $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 0$, $a_4 = 2$, $a_5 = 4$. Заполняем для данных значений символы латинские квадраты по рисункам 4.46 – 4.47. Получаем следующую пару ортогональных диагональных латинских квадратов (рис. 4.48 – 4.49):

1	3	0	2	4
4	0	2	1	3
2	4	3	0	1
3	2	1	4	0
0	1	4	3	2

Рис. 4.48

1	3	0	2	4
2	4	3	0	1
4	0	2	1	3
0	1	4	3	2
3	2	1	4	0

Рис. 4.49

Осталось построить магический квадрат по любой из формул [1], [2]. Покажем на рис. 4.50 квадрат, построенный по формуле [1].

7	19	1	13	25
23	5	14	6	17
15	21	18	2	9
16	12	10	24	3
4	8	22	20	11

Рис. 4.50

Очевидно, что получен новый магический квадрат не эквивалентный квадрату, построенному из нормализованной пары ортогональных диагональных латинских квадратов.

Существует ещё одна нормализованная пара ортогональных диагональных латинских квадратов 5-го порядка. ([6], стр. 9).

Эта пара показана на рис. 4.51 – 4.52.

0	1	2	3	4
3	4	0	1	2
1	2	3	4	0
4	0	1	2	3
2	3	4	0	1

Рис. 4.51

0	1	2	3	4
2	3	4	0	1
4	0	1	2	3
1	2	3	4	0
3	4	0	1	2

Рис. 4.52

Магический квадрат, построенный из данной пары латинских квадратов, получается эквивалентным магическому квадрату, построенному методом Москопула (методом коня). Смотрите этот квадрат на рис. 4.53.

1	7	13	19	25
18	24	5	6	12
10	11	17	23	4
22	3	9	15	16
14	20	21	2	8

Рис. 4.53

Для порядка 7 существует, по крайней мере, 6 пар ортогональных диагональных латинских квадратов. На рис. 4.54 – 4.55 представлена одна из таких пар.

0	1	2	3	4	5	6
2	3	4	5	6	0	1
4	5	6	0	1	2	3
6	0	1	2	3	4	5
1	2	3	4	5	6	0
3	4	5	6	0	1	2
5	6	0	1	2	3	4

Рис. 4.54

0	1	2	3	4	5	6
3	4	5	6	0	1	2
6	0	1	2	3	4	5
2	3	4	5	6	0	1
5	6	0	1	2	3	4
1	2	3	4	5	6	0
4	5	6	0	1	2	3

Рис. 4.55

Читателям предлагается построить из данной пары латинских квадратов магический квадрат 7-го порядка. Интересно отметить, что этот магический квадрат тоже получается эквивалентным квадрату, построенному методом Москопула.

Представленная пара латинских квадратов является нормализованной. Точно так же, как и для квадратов 5-го порядка, можно получить $7! = 5040$ вариантов подобных пар ортогональных диагональных латинских квадратов.

Вопрос построения пар ортогональных диагональных латинских квадратов является отдельной и очень сложной темой. Математический пакет программ (Maple) умеет составлять группу взаимно ортогональных латинских квадратов для любого порядка равного простому числу или степени простого числа. Так, например, для порядка 7 Maple строит группу из 6 попарно ортогональных латинских квадратов. Два квадрата из этой группы не являются диагональными. Из остальных 4 диагональных квадратов можно составить 6 пар ортогональных диагональных латинских квадратов. Одна из этих пар представлена выше.

Для порядка 9 Maple строит группу из 8 попарно ортогональных латинских квадратов. Два квадрата в этой группе не являются диагональными. Из 6 диагональных квадратов можно составить 15 пар ортогональных диагональных латинских квадратов. На рис. 4.56 – 4.57 представлена одна из таких пар.

0	1	2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	0	1	2
6	7	8	0	1	2	3	4	5
7	8	6	1	2	0	4	5	3
1	2	0	4	5	3	7	8	6
4	5	3	7	8	6	1	2	0
5	3	4	8	6	7	2	0	1
8	6	7	2	0	1	5	3	4
2	0	1	5	3	4	8	6	7

Рис. 4.56

0	1	2	3	4	5	6	7	8
4	5	3	7	8	6	1	2	0
8	6	7	2	0	1	5	3	4
1	2	0	4	5	3	7	8	6
5	3	4	8	6	7	2	0	1
6	7	8	0	1	2	3	4	5
2	0	1	5	3	4	8	6	7
3	4	5	6	7	8	0	1	2
7	8	6	1	2	0	4	5	3

Рис. 4.57

Магический квадрат 9-го порядка, построенный из данной пары латинских квадратов по формуле [1], получается оригинальным, то есть он не эквивалентен магическому квадрату, построенному методом Москопула, как это было в случаях для порядков 5 и 7. Вы видите этот квадрат на **рис. 4.58**.

1	11	21	21	41	51	61	71	81
32	42	49	62	72	79	2	12	19
63	70	80	3	10	20	33	40	50
65	75	55	14	24	4	44	54	34
15	22	5	45	52	35	66	73	56
43	53	36	64	74	57	13	23	6
48	28	38	78	58	68	27	7	17
76	59	69	25	8	18	46	29	39
26	9	16	47	30	37	77	60	67

Рис. 4.58

Интересно отметить: чтобы посмотреть, из какой пары ортогональных латинских квадратов может быть получен тот или иной магический квадрат, надо разложить этот магический квадрат на два ортогональных латинских квадрата, используя формулу [1] “наоборот”. Посмотрите пример. Возьмём магический квадрат с рис. 4.22. Этот квадрат построен методом Москопула. Разложим этот магический квадрат на два ортогональных латинских квадрата. Пара полученных ортогональных латинских квадратов показана на **рис. 4. 59 – 4.60**. Обратите внимание: латинские квадраты получились не диагональные, в одной из главных диагоналей есть повторяющиеся числа. Однако эти квадраты являются нетрадиционными магическими квадратами с магической константой 36. Перед вами ещё один пример, когда магический квадрат строится из пары ортогональных латинских квадратов, не являющихся диагональными. Не диагональные ортогональные латинские квадраты используются и в самом методе Делаира.

Ещё заметьте: второй латинский квадрат получается из первого отражением относительно вертикальной оси симметрии.

7	2	6	1	5	0	4	8	3
0	4	8	3	7	2	6	1	5
2	6	1	5	0	4	8	3	7
4	8	3	7	2	6	1	5	0
6	1	5	0	4	8	3	7	2
8	3	7	2	6	1	5	0	4
1	5	0	4	8	3	7	2	6
3	7	2	6	1	5	0	4	8
5	0	4	8	3	7	2	6	1

Рис. 4.59

3	8	4	0	5	1	6	2	7
5	1	6	2	7	3	8	4	0
7	3	8	4	0	5	1	6	2
0	5	1	6	2	7	3	8	4
2	7	3	8	4	0	5	1	6
4	0	5	1	6	2	7	3	8
6	2	7	3	8	4	0	5	1
8	4	0	5	1	6	2	7	3
1	6	2	7	3	8	4	0	5

Рис. 4.60

Автором не проведено до конца исследование вопроса составления пары ортогональных диагональных латинских квадратов для следующих нечётных порядков (данная тема находится в работе). Для порядков не кратных 3 составление таких пар не вызывает затруднений. А вот для порядков кратных 3 не всё так просто. Если порядок является степенью числа 3, то можно воспользоваться пакетом программ Maple. Это и было сделано для порядка 9. А теперь интересная задача: составьте хотя бы одну пару ортогональных диагональных латинских квадратов 15-го порядка. Вторая задача: составить группу взаимно ортогональных латинских квадратов для порядка 27 с помощью Maple. Следующий сложный порядок – 21 (не берётся Maple).

Доказано, что пары ортогональных диагональных латинских квадратов существуют для всех порядков, кроме 2, 3, 6. [20]

Таким образом, предложенный автором вариант метода Делаира работает для всех нечётных порядков не кратных 3 без всяких вопросов. Применение этого метода для построения магических квадратов порядков кратных 3 связано с вопросом составления пар ортогональных диагональных латинских квадратов таких порядков, который не является до конца решённым.

4.1.6. МЕТОД ОКАЙМЛЁННЫХ КВАДРАТОВ

Оригинальный метод окаймлённых квадратов приведён в [8]. Изложение метода даётся по указанной книге.

Для построения данным методом магического квадрата любого порядка $n = 2k + 1$ ($k > 1$) надо выполнить следующие действия:

1. Строим любым известным методом магический квадрат порядка $n-2$.
2. Увеличиваем все элементы построенного магического квадрата на величину $2(n-1)$.
3. Помещаем построенный магический квадрат порядка $n-2$ в матрицу $n \times n$ так, чтобы с каждой стороны квадрата был один свободный столбец (свободная строка).
4. Угловые ячейки матрицы $n \times n$ заполняются так: в верхнюю левую ячейку записывается число $d-3k-1$, в верхнюю правую – число $d-k-1$, в нижнюю левую – число $k+1$, в нижнюю правую – число $3k+1$, где $k=[n/2]$, $d=n^2+1$.
5. Свободные ячейки верхней строки матрицы заполняются следующими числами (в произвольном порядке): k и $\{m, d-2k-1-m\}$, где $m=1, 2, \dots, k-1$.
6. Свободные ячейки левого столбца матрицы заполняются следующими числами (в произвольном порядке): $d-2k-1$ и $\{k+1+m, d-3k-1-m\}$, где $m=1, 2, \dots, k-1$.
7. Свободные ячейки нижней строки матрицы заполняют числами, комплементарными (то есть дополнительными до d) числам, расположенным напротив соответствующей ячейки в верхней строке матрицы. Аналогично заполняются свободные ячейки правого столбца матрицы.

Продemonстрируем метод построения на примере, приведённом в [8]. Это пример построения магического квадрата 5-ого порядка.

В качестве исходного магического квадрата выбран следующий магический квадрат третьего порядка (рис. 4.61):

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Рис. 4.61

Выполним сразу два пункта, увеличим все элементы этого магического квадрата на $2(n-1)=8$ и поместим его в матрицу 5×5 (рис. 4.62).

	16	9	14	
	11	13	15	
	12	17	10	

Рис. 4.62

Выполняем пункт 4, заполняем угловые ячейки матрицы (рис. 4.63).

19				23
	16	9	14	
	11	13	15	
	12	17	10	
3				7

Рис. 4.63

Заполняем верхнюю строку и левый столбец матрицы (пункты 5 и 6). Смотрите на рис. 4.64.

19	1	2	20	23
4	16	9	14	
21	11	13	15	
18	12	17	10	
3				7

Рис. 4.64

Осталось выполнить последний пункт – заполнить нижнюю строку и правый столбец матрицы комплементарными числами. И магический квадрат 5-ого порядка готов (рис. 4.65).

19	1	2	20	23
4	16	9	14	22
21	11	13	15	5
18	12	17	10	8
3	25	24	6	7

Рис. 4.65

Интересно отметить, что, поскольку, верхняя строка и левый столбец матрицы заполняются числами в произвольном порядке (кроме угловых ячеек), то можно построить не один магический квадрат данным методом. Так, для порядка $n=5$ можно построить 36 разных магических квадратов (вариантов заполнения верхней строки 6, и при этом вариантов заполнения левого столбца тоже 6). На **рис. 4.66** вы видите один из вариантов.

19	2	20	1	23
18	16	9	14	8
4	11	13	15	22
21	12	17	10	5
3	24	6	25	7

Рис. 4.66

Теперь продолжим демонстрацию для квадрата 7-ого порядка. А в качестве исходного магического квадрата возьмём только что построенный магический квадрат 5-ого порядка с **рис. 4.65**. Результат выполнения пунктов 2-3 изображён на **рис. 4.67**.

	31	13	14	32	35	
	16	28	21	26	34	
	33	23	25	27	17	
	30	24	29	22	20	
	15	37	36	18	19	

Рис. 4.67

Заполняем матрицу, выполняя пункты 4-7, и получаем следующий магический квадрат (**рис. 4.68**):

40	1	2	3	41	42	46
5	31	13	14	32	35	45
6	16	28	21	26	34	44
43	33	23	25	27	17	7
38	30	24	29	22	20	12
39	15	37	36	18	19	11
4	49	48	47	9	8	10

Рис. 4.68

Для квадрата 7-ого порядка вариантов ещё больше – 14400 (вариантов заполнения верхней строки 120, и при этом вариантов заполнения левого столбца тоже 120).

И, наконец, ещё один пример – построение магического квадрата 9-ого порядка. В качестве исходного снова берём только что построенный магический квадрат седьмого порядка (хотя, конечно, можно взять любой магический квадрат данного порядка). На **рис. 4.69** вы видите готовый магический квадрат 9-ого порядка.

69	1	2	3	4	70	71	72	77
6	56	17	18	19	57	58	62	76
7	21	47	29	30	48	51	61	75
8	22	32	44	37	42	50	60	74
73	59	49	39	41	43	33	23	9
66	54	46	40	45	38	36	28	16
67	55	31	53	52	34	35	27	15
68	20	65	64	63	25	24	26	14
5	81	80	79	78	12	11	10	13

Рис. 4.69

Предлагаем читателям посчитать, сколько магических квадратов 9-ого порядка можно построить данным методом.

Интересно, что каждый вписанный квадрат является нетрадиционным магическим квадратом. При этом магическая константа каждого квадрата, вписанного в магический квадрат 9-ого порядка, является числом кратным 41 (числу в центральной ячейке квадрата). Магическая константа каждого квадрата, вписанного в магический квадрат 7-ого порядка (рис. 4.68) кратна числу 25 и т. д.

Посмотрите на квадрат 9-ого порядка (**рис. 4.69**). Магическая константа вписанного квадрата 3-его порядка равна $123=3*41$, магическая константа вписанного квадрата 5-ого порядка равна $205=5*41$, магическая константа вписанного квадрата 7-ого порядка равна $287=7*41$. А магическая константа самого квадрата 9-го порядка равна $369=9*41$. Забавная закономерность!

Вы можете продолжить построение окаймлённых магических квадратов.

Квадраты, изображённые на **рис. 4.69**, в некоторых источниках называются концентрическими. О концентрических магических квадратах можно прочитать на сайте автора. (30).

4.1.7 МЕТОД ПРИМЕНЕНИЯ ОБРАТИМЫХ КВАДРАТОВ

Прежде чем начать описание метода, надо дать определение обратимого квадрата. Обратимый квадрат – это не магический квадрат.

Определение

Обратимым квадратом порядка n называется квадратная матрица $n \times n$, заполненная последовательными натуральными числами от 1 до n^2 , так что полученный квадрат обладает свойством ассоциативности.

Обратимый квадрат обладает ещё несколькими свойствами. Например, суммы чисел в диагоналях каждого квадрата 2×2 , находящегося внутри обратимого квадрата, одинаковы. Более подробное определение обратимого квадрата можно посмотреть в (31).

Самый простой обратимый квадрат – это матрица, заполненная последовательными натуральными числами от 1 до n^2 в естественном порядке.

Начнём с магического квадрата третьего порядка. На **рис. 4.70** вы видите самый простой обратимый квадрат третьего порядка.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Рис. 4.70

Будем строить магические квадраты, совпадающие с квадратами, построенными методом террас. Применим к обратимому квадрату с **рис. 4.70** следующее матричное преобразование (**рис. 4.71**) [матрицу исходного квадрата мы обозначили $A(a_{ij})$]:

a_{12}	a_{31}	a_{23}
a_{33}	a_{22}	a_{11}
a_{21}	a_{13}	a_{32}

Рис. 4.71

В результате получается магический квадрат, который вы видите на **рис. 4.72**. Он в точности совпадает с квадратом, построенным методом террас.

2	7	6
9	5	1
4	3	8

Рис. 4.72

Проделаем то же самое для квадрата 5-ого порядка. Самый простой обратимый квадрат не показывается, читатели уже знают, что в таком квадрате числа просто вписываются в естественном порядке построчно, начиная с левой верхней ячейки, в которую записывается число 1. На **рис. 4.73** показано матричное преобразование, которое надо применить к самому простому обратимому квадрату 5-ого порядка, чтобы получить

магический квадрат. Этот квадрат тоже будет совпадать с квадратом, построенным методом террас.

a_{13}	a_{41}	a_{24}	a_{52}	a_{35}
a_{45}	a_{23}	a_{51}	a_{34}	a_{12}
a_{22}	a_{55}	a_{33}	a_{11}	a_{44}
a_{54}	a_{32}	a_{15}	a_{43}	a_{21}
a_{31}	a_{14}	a_{42}	a_{25}	a_{53}

Рис. 4.73

Применив это матричное преобразование к самому простому обратимому квадрату 5-ого порядка, получаем следующий магический квадрат (рис. 4.74):

3	16	9	22	15
20	8	21	14	2
7	25	13	1	19
24	12	5	18	6
11	4	17	10	23

Рис. 4.74

Ну, и ещё раз – для квадрата 7-ого порядка. На рис. 4.75 вы видите матричное преобразование для построения магического квадрата 7-ого порядка из самого простого обратимого квадрата.

a_{14}	a_{51}	a_{25}	a_{62}	a_{36}	a_{73}	a_{47}
a_{57}	a_{24}	a_{61}	a_{35}	a_{72}	a_{46}	a_{13}
a_{23}	a_{67}	a_{34}	a_{71}	a_{45}	a_{12}	a_{56}
a_{66}	a_{33}	a_{77}	a_{44}	a_{11}	a_{55}	a_{22}
a_{32}	a_{76}	a_{43}	a_{17}	a_{54}	a_{21}	a_{65}
a_{75}	a_{42}	a_{16}	a_{53}	a_{27}	a_{64}	a_{31}
a_{41}	a_{15}	a_{52}	a_{26}	a_{63}	a_{37}	a_{74}

Рис. 4.75

На рис. 4.76 изображён готовый магический квадрат 7-ого порядка, построенный применением этого матричного преобразования к самому простому обратимому квадрату.

4	29	12	37	20	45	28
35	11	36	19	44	27	3
10	42	18	43	26	2	34
41	17	49	25	1	33	9
16	48	24	7	32	8	40
47	23	6	31	14	39	15
22	5	30	13	38	21	46

Рис. 4.76

“Ну и что же в этом методе?” – спросит читатель. Все эти магические квадраты можно построить и методом террас. Однако обратимый квадрат ведь не один только существует – самый простой. Есть ещё очень много обратимых квадратов. И из каждого обратимого квадрата, применяя то же самое матричное преобразование, можно построить новый магический квадрат. Таким образом, мы имеем обобщение метода террас. Покажу пример для квадрата 7-ого порядка. На **рис. 4.77** вы видите новый обратимый квадрат.

5	6	7	4	1	2	3
12	13	14	11	8	9	10
19	20	21	18	15	16	17
26	27	28	25	22	23	24
33	34	35	32	29	30	31
40	41	42	39	36	37	38
47	48	49	46	43	44	45

Рис. 4.77

Обозначив по-прежнему матрицу этого обратимого квадрата $A(a_{ij})$, применим к нему матричное преобразование, заданное матрицей на **рис. 4.75**. Мы получим новый магический квадрат 7-ого порядка (**рис. 4.78**).

4	33	8	41	16	49	24
31	11	40	15	48	23	7
14	38	18	47	22	6	30
37	21	45	25	5	29	13
20	44	28	3	32	12	36
43	27	2	35	10	39	19
26	1	34	9	42	17	46

Рис. 4.78

Очевидно, что новый квадрат подобен квадрату с **рис. 4.76**, однако не эквивалентен ему. Интересно отметить, что эти квадраты связаны преобразованием “плюс-минус 4”. На **рис. 4.79** показана матрица этого преобразования.

	+4	-4	+4	-4	+4	-4
-4		+4	-4	+4	-4	+4
+4	-4		+4	-4	+4	-4
-4	+4	-4		+4	-4	+4
+4	-4	+4	-4		+4	-4
-4	+4	-4	+4	-4		+4
+4	-4	+4	-4	+4	-4	

Рис. 4.79

Симметрия преобразования, обеспечивающая сохранение ассоциативности преобразуемого магического квадрата, очевидна.

Составим ещё один обратимый квадрат (**рис. 4.80**):

15	16	17	18	19	20	21
8	9	10	11	12	13	14
1	2	3	4	5	6	7
22	23	24	25	26	27	28
43	44	45	46	47	48	49
36	37	38	39	40	41	42
29	30	31	32	33	34	35

Рис. 4.80

Строим магический квадрат из этого обратимого квадрата с помощью того же матричного преобразования (с рис. 4.75). Полученный магический квадрат вы видите на рис. 4.81.

18	43	12	37	6	31	28
49	11	36	5	30	27	17
10	42	4	29	26	16	48
41	3	35	25	15	47	9
2	34	24	21	46	8	40
33	23	20	45	14	39	1
22	19	44	13	38	7	32

Рис. 4.81

Очевидно, что полученный магический квадрат оригинальный, то есть он не эквивалентен двум построенным выше магическим квадратам 7-ого порядка. Даже начальная цепочка немного изменила свою форму, оставаясь по-прежнему диагональной. Этот квадрат связан с квадратом, построенным методом террас (рис. 4.76), преобразованием “плюс-минус 14”. Предлагаем читателям составить матрицу этого преобразования.

Таким образом, с помощью обратимых квадратов мы получили обобщение метода террас. Понятно, что аналогично можно строить квадраты любого нечётного порядка. Магических квадратов построится ровно столько, сколько существует обратимых квадратов данного порядка. Матрицу преобразования надо составлять, исходя из пары квадратов: самый простой обратимый квадрат – квадрат, построенный методом террас. Впрочем, из трёх приведённых выше матриц преобразования для порядков 3, 5, 7 можно вывести закономерности составления такой матрицы и написать матрицу преобразования в общем виде для любого нечётного порядка $n = 2k + 1$ (как это было сделано, например, для матрицы преобразования “строки-диагонали”). Предлагаем читателям решить эту задачу.

На сайте автора изложен метод построения идеальных магических квадратов с помощью обратимых квадратов. (32)

4.1.8 МЕТОД СОСТАВНЫХ КВАДРАТОВ

Метод составных квадратов является универсальным методом. Этим методом можно построить магический квадрат любого порядка n , который может быть представлен в виде произведения двух чисел: $n = k \cdot m$, если оба числа k и m могут быть порядком магического квадрата, то есть эти числа должны быть больше 2. Понятно, что минимальный порядок квадрата, который может быть построен данным методом, равен 9. Квадрат порядка k назовём *базовым*, а квадрат порядка m – *основным*. Базовый и

основной квадраты можно менять местами. При этом если и базовый, и основной квадраты обладают некоторым свойством, оно присуще и составному квадрату. Так, например, из двух ассоциативных квадратов получается ассоциативный составной квадрат, из двух идеальных квадратов – идеальный составной квадрат.

Метод составных квадратов известен очень давно. К сожалению, неизвестно имя автора этого метода.

Обозначим базовый квадрат порядка k $A(a_{ij})$, а основной квадрат порядка m $B(b_{ij})$.

Матрица квадрата порядка $n = k \cdot m$, который мы собираемся построить методом составных квадратов, разбивается на k^2 квадратов размером $m \times m$. Каждый из таких квадратов заполняется элементами основного квадрата, увеличенными на $m^2 \cdot (a_{ij} - 1)$, где a_{ij} – тот элемент базового квадрата, на месте которого стоит основной квадрат.

Рассмотрим конкретный пример. Возьмём в качестве базового квадрата магический квадрат 3-го порядка с **рис. 4.72**, а в качестве основного – магический квадрат 5-го порядка с **рис. 4.74**. Поскольку оба квадрата ассоциативны, составной квадрат 15-го порядка тоже будет ассоциативным. В нашем примере $k = 3$, $m = 5$. Матрица квадрата 15-го порядка разбивается на 9 квадратов 5×5 . На **рис. 4.82** изображена схема заполнения каждого квадрата 5×5 .

$b_{ij}+25$	$b_{ij}+150$	$b_{ij}+125$
$b_{ij}+200$	$b_{ij}+100$	b_{ij}
$b_{ij}+75$	$b_{ij}+50$	$b_{ij}+175$

Рис. 4.82

Готовый магический квадрат 15-го порядка, построенный методом составных квадратов, показан на **рис. 4.83**.

28	41	34	47	40	153	166	159	172	165	128	141	134	147	140
45	33	46	39	27	170	158	171	164	152	145	133	146	139	127
32	50	38	26	44	157	175	163	151	169	132	150	138	126	144
49	37	30	43	31	174	162	155	168	156	149	137	130	143	131
36	29	42	35	48	161	154	167	160	173	136	129	142	135	148
203	216	209	222	215	103	116	109	122	115	3	16	9	22	15
220	208	221	214	202	120	108	121	114	102	20	8	21	14	2
207	225	213	201	219	107	125	113	101	119	7	25	13	1	19
224	212	205	218	206	124	112	105	118	106	24	12	5	18	6
211	204	217	210	223	111	104	117	110	123	11	4	17	10	23
78	91	84	97	90	53	66	59	72	65	178	191	184	197	190
95	83	96	89	77	70	58	71	64	52	195	183	196	189	177
82	100	88	76	94	57	75	63	51	69	182	200	188	176	194
99	87	80	93	81	74	62	55	68	56	199	187	180	193	181
86	79	92	85	98	61	54	67	60	73	186	179	192	185	198

Рис. 4.83

А теперь поменяем местами базовый и основной квадраты. Базовым будет квадрат 5-го порядка, а основным – квадрат 3-го порядка. В этом случае $k = 5$, $m = 3$. Матрица квадрата 15-го порядка разбивается на 25 квадратов 3×3 . На **рис. 4.84** показана схема заполнения каждого квадрата 3×3 .

$a_{ij}+18$	$a_{ij}+135$	$a_{ij}+72$	$a_{ij}+189$	$a_{ij}+126$
$a_{ij}+171$	$a_{ij}+63$	$a_{ij}+180$	$a_{ij}+117$	$a_{ij}+9$
$a_{ij}+54$	$a_{ij}+216$	$a_{ij}+108$	a_{ij}	$a_{ij}+162$
$a_{ij}+207$	$a_{ij}+99$	$a_{ij}+36$	$a_{ij}+153$	$a_{ij}+45$
$a_{ij}+90$	$a_{ij}+27$	$a_{ij}+144$	$a_{ij}+81$	$a_{ij}+198$

Рис. 4.84

Готовый магический квадрат 15-го порядка изображён на рис. 4.85.

20	25	24	137	142	141	74	79	78	191	196	195	128	133	132
27	23	19	144	140	136	81	77	73	198	194	190	135	131	127
22	21	26	139	138	143	76	75	80	193	192	197	130	129	134
173	178	177	65	70	69	182	187	186	119	124	123	11	16	15
180	176	172	72	68	64	189	185	181	126	122	118	18	14	10
175	174	179	67	66	71	184	183	188	121	120	125	13	12	17
56	61	60	218	223	222	110	115	114	2	7	6	164	169	168
63	59	55	225	221	217	117	113	109	9	5	1	171	167	163
58	57	62	220	219	224	112	111	116	4	3	8	166	165	170
209	214	213	101	106	105	38	43	42	155	160	159	47	52	51
216	212	208	108	104	100	45	41	37	162	158	154	54	50	46
211	210	215	103	102	107	40	39	44	157	156	161	49	48	53
92	97	96	29	34	33	146	151	150	83	88	87	200	205	204
99	95	91	36	32	28	153	149	145	90	86	82	207	203	199
94	93	98	31	30	35	148	147	152	85	84	89	202	201	206

Рис. 4.85

Посмотрим на этот магический квадрат с точки зрения латинских квадратов, то есть разложим его на два ортогональных латинских квадрата. На рис. 4.86 вы видите первый латинский квадрат, соответствующий этому магическому квадрату.

1	1	1	9	9	9	4	5	5	12	13	12	8	8	8
1	1	1	9	9	9	5	5	4	13	12	12	8	8	8
1	1	1	9	9	9	5	4	5	12	12	13	8	8	8
11	11	11	4	4	4	12	12	12	7	8	8	0	1	0
11	11	11	4	4	4	12	12	12	8	8	7	1	0	0
11	11	11	4	4	4	12	12	12	8	7	8	0	0	1
3	4	3	14	14	14	7	7	7	0	0	0	10	11	11
4	3	3	14	14	14	7	7	7	0	0	0	11	11	10
3	3	4	14	14	14	7	7	7	0	0	0	11	10	11
13	14	14	6	7	6	2	2	2	10	10	10	3	3	3
14	14	13	7	6	6	2	2	2	10	10	10	3	3	3
14	13	14	6	6	7	2	2	2	10	10	10	3	3	3
6	6	6	1	2	2	9	10	9	5	5	5	13	13	13
6	6	6	2	2	1	10	9	9	5	5	5	13	13	13
6	6	6	2	1	2	9	9	10	5	5	5	13	13	13

Рис. 4.86

Очевидно, что это обобщённый латинский квадрат. Второй латинский квадрат оказался классическим (рис. 4.87).

4	9	8	1	6	5	13	3	2	10	0	14	7	12	11
11	7	3	8	4	0	5	1	12	2	13	9	14	10	6
6	5	10	3	2	7	0	14	4	12	11	1	9	8	13
7	12	11	4	9	8	1	6	5	13	3	2	10	0	14
14	10	6	11	7	3	8	4	0	5	1	12	2	13	9
9	8	13	6	5	10	3	2	7	0	14	4	12	11	1
10	0	14	7	12	11	4	9	8	1	6	5	13	3	2
2	13	9	14	10	6	11	7	3	8	4	0	5	1	12
12	11	1	9	8	13	6	5	10	3	2	7	0	14	4
13	3	2	10	0	14	7	12	11	4	9	8	1	6	5
5	1	12	2	13	9	14	10	6	11	7	3	8	4	0
0	14	4	12	11	1	9	8	13	6	5	10	3	2	7
1	6	5	13	3	2	10	0	14	7	12	11	4	9	8
8	4	0	5	1	12	2	13	9	14	10	6	11	7	3
3	2	7	0	14	4	12	11	1	9	8	13	6	5	10

Рис. 4.87

Посмотрите, как интересно строится этот латинский квадрат. Происходит циклическая перестановка сразу целых блоков 3х3. Оба латинских квадрата являются нетрадиционными магическими квадратами с магической константой 105. Кроме того, оба квадрата обладают свойством ассоциативности.

Построим магический квадрат, поменяв местами первый и второй латинские квадраты в формуле для построения магического квадрата методом латинских квадратов. На рис. 4.88 вы видите готовый магический квадрат.

62	137	122	25	100	85	200	51	36	163	14	223	114	189	174
167	107	47	130	70	10	81	21	185	44	208	148	219	159	99
92	77	152	55	40	115	6	215	66	193	178	29	144	129	204
117	192	177	65	140	125	28	103	88	203	54	39	151	2	211
222	162	102	170	110	50	133	73	13	84	24	188	32	196	136
147	132	207	95	80	155	58	43	118	9	218	69	181	166	17
154	5	214	120	195	180	68	143	128	16	91	76	206	57	42
35	199	139	225	165	105	173	113	53	121	61	1	87	27	191
184	169	20	150	135	210	98	83	158	46	31	106	12	221	72
209	60	45	157	8	217	108	183	168	71	146	131	19	94	79
90	30	194	38	202	142	213	153	93	176	116	56	124	64	4
15	224	75	187	172	23	138	123	198	101	86	161	49	34	109
22	97	82	197	48	33	160	11	220	111	186	171	74	149	134
127	67	7	78	18	182	41	205	145	216	156	96	179	119	59
52	37	112	3	212	63	190	175	26	141	126	201	104	89	164

Рис. 4.88

На методе составных квадратов основан один из методов построения идеальных магических квадратов порядка $n = 3^p$, $p = 2, 3, 4 \dots$

Продемонстрируем этот метод на примере построения идеального квадрата 9-го порядка. Сначала строится ассоциативный магический квадрат методом составных квадратов. При этом в качестве базового и основного квадратов могут быть выбраны любые из 8 вариантов магического квадрата 3-го порядка. Даже базовым и основным квадратом может служить один и тот же квадрат 3-го порядка. Именно такой пример здесь рассмотрен. В качестве базового и основного квадратов выбран квадрат 3-го порядка с **рис. 4.72**. Поскольку квадрат 3-го порядка ассоциативен, построенный методом составных квадратов квадрат 9-го порядка тоже будет ассоциативным. Готовый магический квадрат 9-го порядка вы видите на **рис. 4.89**.

11	16	15	56	61	60	47	52	51
18	14	10	63	59	55	54	50	46
13	12	17	58	57	62	49	48	53
74	79	78	38	43	42	2	7	6
81	77	73	45	41	37	9	5	1
76	75	80	40	39	44	4	3	8
29	34	33	20	25	24	65	70	69
36	32	28	27	23	19	72	68	64
31	30	35	22	21	26	67	66	71

Рис. 4.89

А теперь в этом квадрате надо определённым образом переставить столбцы, и идеальный магический квадрат готов! Очень простой и оригинальный метод построения идеальных квадратов для любого порядка, являющегося степенью числа 3. Посмотрите на готовый идеальный квадрат (**рис. 4.90**).

11	56	47	16	61	52	15	60	51
18	63	54	14	59	50	10	55	46
13	58	49	12	57	48	17	62	53
74	38	2	79	43	7	78	42	6
81	45	9	77	41	5	73	37	1
76	40	4	75	39	3	80	44	8
29	20	65	34	25	70	33	24	69
36	27	72	32	23	68	28	19	64
31	22	67	30	21	66	35	26	71

Рис. 4.90

Если вы сравните этот идеальный квадрат с исходным ассоциативным квадратом, непременно поймёте, по какому принципу переставлены столбцы в исходном квадрате. Столбцы переставляются с шагом 2, то есть через два столбца. Можно пояснить схему перестановки так: исходный квадрат делится на три секции по 3 столбца в каждой. В новом квадрате сначала помещаются подряд первые столбца из каждой секции, затем – вторые столбцы из каждой секции и, наконец, – третьи столбцы.

Из того же самого исходного ассоциативного квадрата можно получить второй идеальный квадрат, переставив по такой же схеме строки. На **рис. 4.91** изображён квадрат, полученный из ассоциативного квадрата с **рис. 4.89** перестановкой строк.

11	16	15	56	61	60	47	52	51
74	79	78	38	43	42	2	7	6
29	34	33	20	25	24	65	70	69
18	14	10	63	59	55	54	50	46
81	77	73	45	41	37	9	5	1
36	32	28	27	23	19	72	68	64
13	12	17	58	57	62	49	48	53
76	75	80	40	39	44	4	3	8
31	30	35	22	21	26	67	66	71

Рис. 4.91

Подробно о данном методе построения идеальных квадратов можно посмотреть на сайте автора. (33)

Предлагаем читателям самостоятельно построить описанным методом идеальный магический квадрат 27-го порядка. Результат можно сравнить с результатом автора.

Как уже было сказано, метод составных квадратов применим для построения магических квадратов любого порядка, как нечётного, так и чётного. Применение этого метода для построения квадратов чётных порядков будет показано в соответствующих разделах.

Здесь был показан один метод построения идеальных квадратов нечётного порядка. Этот метод не охватывает все нечётные порядки. Автором разработан уникальный метод построения идеальных квадратов любого нечётного порядка $n > 3$ – *метод качелей*. Этому методу посвящена большая статья. (34)

4.2 МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ МАГИЧЕСКИХ КВАДРАТОВ ЧЁТНО-ЧЁТНОГО ПОРЯДКА

Здесь будут рассмотрены методы построения магических квадратов чётно-чётного порядка $n = 4k$, $k = 1, 2, 3 \dots$

4.2.1 МЕТОД КВАДРАТНЫХ РАМОК

Рассмотрим построение данным методом магического квадрата 8-го порядка. На матричное поле (с изображённым на нём исходным квадратом 8х8) наносятся квадратные рамки со стороной в два раза меньшего размера, чем сторона исходного квадрата (см. **рис. 4.92**) с шагом в одну клетку по диагонали (или две клетки по строкам и столбцам). Затем по линиям рамок расставляются числа от 1 до n^2 (n – порядок квадрата) в естественном порядке, начиная с левой верхней ячейки исходного квадрата, причём первая рамка обходится по часовой стрелке, вторая рамка начинается с верхней свободной справа ячейки квадрата и обходится против часовой стрелки и т. д. Числа, не попавшие в квадрат, переносятся внутрь его так, чтобы они примкнули к противоположащим сторонам квадрата. Готовый магический квадрат изображён на **рис. 4.93**.

			4	5			
		3			6		
	2		21	20		7	
1		22			19		8
16	23		36	37		18	9
24	15	35			38	10	17
25	34	14	53	52	11	39	32
33	26	54	13	12	51	31	40
48	55	27			30	50	41
56	47		28	29		42	49
57		46			43		64
	58		45	44		63	
		59			62		
			60	61			

Рис. 4.92

1	58	22	45	44	19	63	8
16	23	59	36	37	62	18	9
24	15	35	60	61	38	10	17
25	34	14	53	52	11	39	32
33	26	54	13	12	51	31	40
48	55	27	4	5	30	50	41
56	47	3	28	29	6	42	49
57	2	46	21	20	43	7	64

Рис. 4.93

Магические квадраты, построенные методом квадратных рамок, ассоциативны. Понятно, что методом квадратных рамок можно построить только один магический квадрат данного порядка. Можно ли обобщить метод? Попробуем сделать это с помощью

использования обратимых квадратов. Начнём с магического квадрата 4-го порядка. На **рис. 4.94** вы видите квадрат, построенный методом квадратных рамок.

1	14	15	4
8	11	10	5
12	7	6	9
13	2	3	16

Рис. 4.94

Чтобы получить такой магический квадрат, надо применить к самому простому обратимому квадрату, матрица которого обозначена $A(a_{ij})$, следующее матричное преобразование (**рис. 4.95**):

a_{11}	a_{42}	a_{43}	a_{14}
a_{24}	a_{33}	a_{32}	a_{21}
a_{34}	a_{23}	a_{22}	a_{31}
a_{41}	a_{12}	a_{13}	a_{44}

Рис. 4.95

А теперь возьмём другой обратимый квадрат 4-го порядка (**рис. 4.96**) и применим к нему это же преобразование.

1	2	5	6
3	4	7	8
9	10	13	14
11	12	15	16

Рис. 4.96

На **рис. 4.97** вы видите готовый магический квадрат.

1	12	15	6
8	13	10	3
14	7	4	9
11	2	5	16

Рис. 4.97

Мы получили новый магический квадрат, не эквивалентный квадрату на **рис. 4.94**. Эти два квадрата связаны преобразованием “плюс-минус 2”. Предлагаем читателям составить матрицу этого преобразования.

В (31) приведено точное количество обратимых квадратов 4-го порядка; их всего 48, три группы по 16 квадратов в каждой. Вот первая группа обратимых квадратов.

1 2 3 4	1 2 3 4	5 6 7 8	5 6 7 8
5 6 7 8		9 10 11 12		1 2 3 4		13 14 15 16
9 10 11 12		5 6 7 8		13 14 15 16		1 2 3 4
13 14 15 16		13 14 15 16		9 10 11 12		9 10 11 12
1 3 2 4		1 3 2 4		5 7 6 8		5 7 6 8
5 7 6 8		9 11 10 12		1 3 2 4		13 15 14 16
9 11 10 12		5 7 6 8		13 15 14 16		1 3 2 4
13 15 14 16		13 15 14 16		9 11 10 12		9 11 10 12
2 1 4 3		2 1 4 3		6 5 8 7		6 5 8 7
6 5 8 7		10 9 12 11		2 1 4 3		14 13 16 15
10 9 12 11		6 5 8 7		14 13 16 15		2 1 4 3
14 13 16 15		14 13 16 15		10 9 12 11		10 9 12 11
2 4 1 3		2 4 1 3		6 8 5 7		6 8 5 7
6 8 5 7		10 12 9 11		2 4 1 3		14 16 13 15
10 12 9 11		6 8 5 7		14 16 13 15		2 4 1 3
14 16 13 15		14 16 13 15		10 12 9 11		10 12 9 11

Применив к любому из этих квадратов преобразование, заданное матрицей на **рис. 4.95**, мы получим новый магический квадрат 4-го порядка.

Приведём ещё один пример. Возьмём в качестве исходного квадрата последний обратимый квадрат (из приведённой выше группы обратимых квадратов). На **рис. 4.98** вы видите построенный магический квадрат.

6	12	9	7
15	1	4	14
3	13	16	2
10	8	5	11

Рис. 4.98

Этот квадрат получается из квадрата, построенного методом квадратных рамок (**рис. 4.94**), перестановкой строк и столбцов.

Таким образом, мы можем построить с помощью данного матричного преобразования 48 магических квадратов 4-го порядка. Вот такое интересное обобщение метода квадратных рамок даёт использование обратимых квадратов.

Проделаем то же самое для квадратов 8-го порядка. На **рис. 4.99** вы видите матричное преобразование, которое надо применить к самому простому обратимому квадрату 8-го порядка, чтобы получить магический квадрат, построенный методом квадратных рамок (**рис. 4.93**).

a₁₁	a₈₂	a₃₆	a₆₅	a₆₄	a₃₃	a₈₇	a₁₈
a₂₈	a₃₇	a₈₃	a₅₄	a₅₅	a₈₆	a₃₂	a₂₁
a₃₈	a₂₇	a₅₃	a₈₄	a₈₅	a₅₆	a₂₂	a₃₁
a₄₁	a₅₂	a₂₆	a₇₅	a₇₄	a₂₃	a₅₇	a₄₈
a₅₁	a₄₂	a₇₆	a₂₅	a₂₄	a₇₃	a₄₇	a₅₈
a₆₈	a₇₇	a₄₃	a₁₄	a₁₅	a₄₆	a₇₂	a₆₁
a₇₈	a₆₇	a₁₃	a₄₄	a₄₅	a₁₆	a₆₂	a₇₁
a₈₁	a₁₂	a₆₆	a₃₅	a₃₄	a₆₃	a₁₇	a₈₈

Рис. 4.99

Берём теперь в качестве исходного квадрата другой обратимый квадрат, изображённый на **рис. 4.100**.

1	2	3	4	9	10	11	12
5	6	7	8	13	14	15	16
17	18	19	20	25	26	27	28
21	22	23	24	29	30	31	32
33	34	35	36	41	42	43	44
37	38	39	40	45	46	47	48
49	50	51	52	57	58	59	60
53	54	55	56	61	62	63	64

Рис. 4.100

Применив матричное преобразование с **рис. 4.99** к этому обратимому квадрату, получаем следующий магический квадрат (**рис. 4.101**):

1	54	26	45	40	19	63	12
16	27	55	36	41	62	18	5
28	15	35	56	61	42	6	17
21	34	14	57	52	7	43	32
33	22	58	13	8	51	31	44
48	59	23	4	9	30	50	37
60	47	3	24	29	10	38	49
53	2	46	25	20	39	11	64

Рис. 4.101

Очевидно, что магические квадраты, построенные с помощью матричного преобразования, тоже ассоциативны (см. квадраты на **рис. 4.97, 4.98, 4.101**).

Новый магический квадрат 8-го порядка связан с квадратом, построенным методом квадратных рамок, преобразованием “плюс-минус 4”. Вы видите матрицу этого преобразования на **рис. 4.102**.

	-4	+4		-4			+4
	+4	-4		+4			-4
+4			-4		+4	-4	
-4			+4		-4	+4	
	-4	+4		-4			+4
	+4	-4		+4			-4
+4			-4		+4	-4	
-4			+4		-4	+4	

Рис. 4.102

Перед вами ещё один пример простого преобразования “плюс-минус ...”, сохраняющего ассоциативность квадрата. Посмотрите, какая красивая симметрия в этом преобразовании.

В (31) приведено количество обратимых квадратов 8-го порядка, это 10 групп по 36864 квадрата в каждой, итого 368640 квадратов. Столько же магических квадратов мы можем построить с помощью показанного здесь матричного преобразования. Все эти квадраты будут различны с точностью до перестановки строк и столбцов и преобразований типа “плюс-минус ...”.

Понятно, что применение матричного преобразования легко запрограммировать. Если составить программу построения всех обратимых квадратов 8-го порядка, то, добавив в эту программу блок применения к каждому обратимому квадрату матричного преобразования, вы построите с помощью этой программы 368640 магических квадратов 8-го порядка.

Базовый обратимый квадрат каждой группы называется *уникальным* обратимым квадратом. В (35) построены все 10 уникальных обратимых квадратов 8-го порядка. Как уже сказано, каждый из уникальных обратимых квадратов порождает группу из 36864 обратимых квадратов. Построение всех обратимых квадратов – задача очень интересная ещё и потому, что из каждого обратимого квадрата другим матричным преобразованием можно получить совершенный магический квадрат. (36)

На рис. 4.103 показан третий уникальный обратимый квадрат 8-го порядка (два уже представлены выше, первый – самый простой обратимый квадрат, в котором числа записаны по порядку, второй – на рис. 4.100).

1	2	3	4	33	34	35	36
5	6	7	8	37	38	39	40
9	10	11	12	41	42	43	44
13	14	15	16	45	46	47	48
17	18	19	20	49	50	51	52
21	22	23	24	53	54	55	56
25	26	27	28	57	58	59	60
29	30	31	32	61	62	63	64

Рис. 4.103

Применим матричное преобразование с рис. 4.99 к этому обратимому квадрату. Полученный в результате магический квадрат вы видите на рис. 4.104.

1	30	42	53	24	11	63	36
40	43	31	20	49	62	10	5
44	39	19	32	61	50	6	9
13	18	38	57	28	7	51	48
17	14	58	37	8	27	47	52
56	59	15	4	33	46	26	21
60	55	3	16	45	34	22	25
29	2	54	41	12	23	35	64

Рис. 4.104

Предлагаем читателям посмотреть на метод квадратных рамок с точки зрения метода латинских квадратов.

4.2.2 МЕТОД РАУЗ-БОЛЛА

Метод Рауз-Болла состоит в следующем: в данный квадрат чётно-чётного порядка вписываются числа в их естественном порядке, начиная с левой верхней ячейки. Затем в квадрате проводятся диагонали (рис. 4.105).

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Рис. 4.105

Числа, расположенные во взаимно симметричных ячейках (относительно центра квадрата), через которые прошли диагонали, меняются местами, а числа, через которые диагонали не прошли, остаются на месте. Так, на рис. 22 диагонали пересекли восемь чисел, надо поменять местами взаимно симметричные: 1-16, 6-11, 13-4, 10-7. Готовый магический квадрат изображён на рис. 4.106.

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

Рис. 4.106

Можно поступить наоборот: оставить на месте числа, через которые прошли диагонали, а поменять местами числа, не попавшие на диагонали и симметрично расположенные относительно центра квадрата. На рис. 4.107 показан квадрат, построенный таким образом. Сравнив его с квадратом на рис. 4.106, вы видите, что это тот же квадрат, повернутый на 180 градусов вокруг центра квадрата.

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

Рис. 4.107

При построении методом Рауз-Болла магического квадрата 8-го порядка диагонали соединяют не только углы квадрата, но и середины его сторон, то есть диагонали проводятся в четырёх угловых квадратах 4x4 (рис. 4.108).

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

Рис. 4.108

Взаимно симметричных пар чисел, которые надо поменять местами, будет шестнадцать: 1-64, 10-55, 19-46, 28-37, 8-57, 15-50, 22-43, 29-36, 4-61, 5-60, 11-54, 14-51, 18-47, 23-42, 25-40, 32-33. На рис. 4.109 изображён готовый магический квадрат восьмого порядка, построенный методом Рауз-Болла.

64	2	3	61	60	6	7	57
9	55	54	12	13	51	50	16
17	47	46	20	21	43	42	24
40	26	27	37	36	30	31	33
32	34	35	29	28	38	39	25
41	23	22	44	45	19	18	48
49	15	14	52	53	11	10	56
8	58	59	5	4	62	63	1

Рис. 4.109

Примечание: в [8] метод Рауз-Болла представлен как метод Деланэ – Мондезира. Метод описывается так: “Построим исходную таблицу размером $n \times n$. Разделим исходную таблицу на квадратные блоки 4×4 и отметим в каждом блоке клетки, находящиеся на главных диагоналях. Для получения классического квадрата порядка $n=4k$ остаётся во всех отмеченных клетках произвести замену находящихся в них чисел d_i на числа $n \cdot n + 1 - d_i$ ” (стр. 116).

Исходной таблицей здесь называется самый простой обратимый квадрат.

Следует добавить, что можно наоборот числа в отмеченных ячейках оставить без изменения, а все остальные числа заменить на взаимно дополнительные (рис. 4.110).

1	2	3	4	5	6	7	8		1	63	62	4	5	59	58	8
9	10	11	12	13	14	15	16		56	10	11	53	52	14	15	49
17	18	19	20	21	22	23	24		48	18	19	45	44	22	23	41
25	26	27	28	29	30	31	32		25	39	38	28	29	35	34	32
33	34	35	36	37	38	39	40	→	33	31	30	36	37	27	26	40
41	42	43	44	45	46	47	48		24	42	43	21	20	46	47	17
49	50	51	52	53	54	55	56		16	50	51	13	12	54	55	9
57	58	59	60	61	62	63	64		57	7	6	60	61	3	2	64

Рис. 4.110

Очевидно, что магические квадраты, построенные методом Рауз-Болла, ассоциативны.

Есть ещё упрощённый метод Рауз-Болла, но он мало интересен, так как приводит к эквивалентному магическому квадрату. Кратко упрощённый метод состоит в следующем: так же проводят в квадрате диагонали, а затем вписывают числа в естественном порядке, сначала заполняя ячейки, пересечённые диагоналями и пропуская ячейки, не пересечённые диагоналями, а потом наоборот, начиная теперь писать с нижней правой ячейки квадрата. На **рис. 4.111** изображён квадрат 8-го порядка, построенный упрощённым методом Рауз-Болла.

1	63	62	4	5	59	58	8
56	10	11	53	52	14	15	49
48	18	19	45	44	22	23	41
25	39	38	28	29	35	34	32
33	31	30	36	37	27	26	40
24	42	43	21	20	46	47	17
16	50	51	13	12	54	55	9
57	7	6	60	61	3	2	64

Рис. 4.111

Как видите, этот квадрат эквивалентен квадрату с **рис. 4.109** и в точности совпадает с квадратом на **рис. 4.110** справа.

Покажем ещё один квадрат, построенный упрощённым методом Рауз-Болла (**рис. 4.112**).

1	143	142	4	5	139	138	8	9	135	134	12
132	14	15	129	128	18	19	125	124	22	23	121
120	26	27	117	116	30	31	113	112	34	35	109
37	107	106	40	41	103	102	44	45	99	98	48
49	95	94	52	53	91	90	56	57	87	86	60
84	62	63	81	80	66	67	77	76	70	71	73
72	74	75	69	68	78	79	65	64	82	83	61
85	59	58	88	89	55	54	92	93	51	50	96
97	47	46	100	101	43	42	104	105	39	38	108
36	110	111	33	32	114	115	29	28	118	119	25
24	122	123	21	20	126	127	17	16	130	131	13
133	11	10	136	137	7	6	140	141	3	2	144

Рис. 4.112

Обратите внимание: в этом методе исходным квадратом является самый простой обратимый квадрат. Естественно, сразу возникает вопрос: можно ли применить метод к другому обратимому квадрату. Проверим. Возьмём в качестве исходного обратимый квадрат 4-го порядка с **рис. 4.96**. Прделаем нужные перестановки чисел в этом квадрате. Готовый магический квадрат показан на **рис. 4.113**.

16	2	5	11
3	13	10	8
9	7	4	14
6	12	15	1

Рис. 4.113

Получаем новый магический квадрат, он тоже ассоциативен. Этот квадрат связан с квадратом, построенным методом Рауз-Болла (**рис. 4.106**) преобразованием “плюс-минус 2”. Составьте матрицу этого преобразования.

Аналогично тому, как это было сделано в методе квадратных рамок, можно составить матрицу преобразования, с помощью которого очень просто строить магические квадраты подобные квадратам, построенным методом Рауз-Болла, из обратимых квадратов. Предоставляем это читателям.

Таким образом, мы имеем обобщение метода Рауз-Болла: из каждого обратимого квадрата можно получить новый магический квадрат.

Другое обобщение метода Рауз-Болла даёт применение метода качелей. Этот вопрос рассмотрен в (37).

4.2.3 МЕТОД ЛАТИНСКИХ КВАДРАТОВ

В [8] рассматривается метод обобщённых латинских квадратов для построения совершенных магических квадратов чётно-чётного порядка (стр. 119-120). Этот метод подробно изложен в (38).

Здесь будет рассмотрено построение магических квадратов чётно-чётного порядка методом латинских квадратов с использованием классических латинских квадратов (далее в этом разделе термин “классический” опускается).

Начнём с квадратов 4-го порядка. На **рис. 4.114 – 4.115** вы видите пару ортогональных диагональных латинских квадратов 4-го порядка. Эта пара легко составляется вручную.

0	1	2	3
2	3	0	1
3	2	1	0
1	0	3	2

Рис. 4.114

0	1	2	3
3	2	1	0
1	0	3	2
2	3	0	1

Рис. 4.115

Оба латинских квадрата являются нетрадиционными магическими квадратами с магической константой 6.

Магический квадрат, построенный с помощью этих латинских квадратов, изображён на **рис. 4.116**.

1	6	11	16
12	15	2	5
14	9	8	3
7	4	13	10

Рис. 4.116

Оба вспомогательных латинских квадрата нормализованные, то есть в первой строке квадратов стоит тождественная перестановка чисел **0, 1, 2, 3**. Помещая в первую строку другие перестановки данных чисел, мы получим 24 варианта пар ортогональных диагональных латинских квадратов и из каждой пары можем построить магический квадрат. А с учётом того, что первый и второй латинские квадраты равноправны, мы удваиваем количество магических квадратов, которые можно построить данным методом.

Для порядка 8 не так просто составить пару ортогональных диагональных латинских квадратов вручную, не зная, как это делать. Однако здесь есть хороший способ – воспользоваться пакетом программ Maple. При помощи этого пакета программ можно построить группу из 7 взаимно ортогональных латинских квадратов. Один из этих квадратов не диагональный, остальные 6 диагональные. Понятно, что из 6 квадратов можно составить 15 пар ортогональных диагональных латинских квадратов. На **рис. 4.117 – 4.118** представлена одна из пар ортогональных диагональных латинских квадратов 8-го порядка.

0	1	2	3	4	5	6	7
2	3	0	1	6	7	4	5
4	5	6	7	0	1	2	3
6	7	4	5	2	3	0	1
5	4	7	6	1	0	3	2
7	6	5	4	3	2	1	0
1	0	3	2	5	4	7	6
3	2	1	0	7	6	5	4

Рис. 4.117

0	1	2	3	4	5	6	7
3	2	1	0	7	6	5	4
6	7	4	5	2	3	0	1
5	4	7	6	1	0	3	2
1	0	3	2	5	4	7	6
2	3	0	1	6	7	4	5
7	6	5	4	3	2	1	0
4	5	6	7	0	1	2	3

Рис. 4.118

Оба латинских квадрата являются нетрадиционными магическими квадратами с магической константой 28. Магический квадрат, построенный из данной пары ортогональных диагональных латинских квадратов, изображён на **рис. 4.119**.

1	10	19	28	37	46	55	64
20	27	2	9	56	63	38	45
39	48	53	62	3	12	17	26
54	61	40	47	18	25	4	11
42	33	60	51	14	5	32	23
59	52	41	34	31	24	13	6
16	7	30	21	44	35	58	49
29	22	15	8	57	50	43	36

Рис. 4.119

Оригинальный получился квадрат, в нём комплементарные числа расположены симметрично вертикальной оси симметрии квадрата. Это свойство выполняется и в квадрате 4-го порядка (**рис. 4.116**).

Как уже сказано, из группы попарно ортогональных диагональных латинских квадратов 8-го порядка, полученных с помощью Maple, можно составить 15 пар ортогональных диагональных латинских квадратов. Все они нормализованные. Из каждой такой пары можно получить 40320 вариантов. Следовательно, методом латинских квадратов можно построить 604800 магических квадратов 8-го порядка. А если учесть, что первый и второй вспомогательные латинские квадраты равноправны, то это количество удваивается.

Далее у нас следует порядок 12. Тут вопрос не решён. Maple не может составлять ортогональные латинские квадраты для этого порядка. Сложности будут так же со всеми следующими чётно-чётными порядками, которые не являются степенью числа 2. Очень хорошая задача для читателей!

Для порядков, являющихся степенью числа 2, задача решается просто. Во-первых, с этой задачей может справиться Maple. Во-вторых, ортогональные латинские квадраты для таких порядков легко построить по аналогии с представленными здесь ортогональными латинскими квадратами 8-го порядка. Приведём одну из пар ортогональных диагональных латинских квадратов 16-го порядка (квадраты составлены по аналогии с квадратами 8-го порядка):

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15
2 3 0 1 6 7 4 5 10 11 8 9 14 15 12 13
4 5 6 7 0 1 2 3 12 13 14 15 8 9 10 11
6 7 4 5 2 3 0 1 14 15 12 13 10 11 8 9
8 9 10 11 12 13 14 15 0 1 2 3 4 5 6 7
10 11 8 9 14 15 12 13 2 3 0 1 6 7 4 5
12 13 14 15 8 9 10 11 4 5 6 7 0 1 2 3
14 15 12 13 10 11 8 9 6 7 4 5 2 3 0 1
9 8 11 10 13 12 15 14 1 0 3 2 5 4 7 6
11 10 9 8 15 14 13 12 3 2 1 0 7 6 5 4
13 12 15 14 9 8 11 10 5 4 7 6 1 0 3 2
15 14 13 12 11 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0
1 0 3 2 5 4 7 6 9 8 11 10 13 12 15 14
3 2 1 0 7 6 5 4 11 10 9 8 15 14 13 12
5 4 7 6 1 0 3 2 13 12 15 14 9 8 11 10
7 6 5 4 3 2 1 0 15 14 13 12 11 10 9 8

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15
3 2 1 0 7 6 5 4 11 10 9 8 15 14 13 12
6 7 4 5 2 3 0 1 14 15 12 13 10 11 8 9
5 4 7 6 1 0 3 2 13 12 15 14 9 8 11 10
12 13 14 15 8 9 10 11 4 5 6 7 0 1 2 3
15 14 13 12 11 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0
10 11 8 9 14 15 12 13 2 3 0 1 6 7 4 5
9 8 11 10 13 12 15 14 1 0 3 2 5 4 7 6
7 6 5 4 3 2 1 0 15 14 13 12 11 10 9 8
4 5 6 7 0 1 2 3 12 13 14 15 8 9 10 11
1 0 3 2 5 4 7 6 9 8 11 10 13 12 15 14
2 3 0 1 6 7 4 5 10 11 8 9 14 15 12 13
11 10 9 8 15 14 13 12 3 2 1 0 7 6 5 4
8 9 10 11 12 13 14 15 0 1 2 3 4 5 6 7
13 12 15 14 9 8 11 10 5 4 7 6 1 0 3 2
14 15 12 13 10 11 8 9 6 7 4 5 2 3 0 1

Оба латинских квадрата являются нетрадиционными магическими квадратами с магической константой 120. Очевидно, что квадраты тоже нормализованные.

Одной пары ортогональных диагональных латинских квадратов нам вполне достаточно, чтобы построить магический квадрат 16-го порядка. А если варьировать перестановку в первой строке квадратов, то можно построить вообще огромное количество квадратов – $16!$ (16 факториал). Меняя местами первый и второй вспомогательные латинские квадраты, можем удвоить это количество.

На **рис. 4.120** представлен магический квадрат 16-го порядка, построенный с помощью приведённой пары ортогональных латинских квадратов:

1	18	35	52	69	86	103	120	137	154	171	188	205	222	239	256
36	51	2	17	104	119	70	85	172	187	138	153	240	255	206	221
71	88	101	118	3	20	33	50	207	224	237	254	139	156	169	186
102	117	72	87	34	49	4	19	238	253	208	223	170	185	140	155
141	158	175	192	201	218	235	252	5	22	39	56	65	82	99	116
176	191	142	157	236	251	202	217	40	55	6	21	100	115	66	81
203	220	233	250	143	160	173	190	67	84	97	114	7	24	37	54
234	249	204	219	174	189	144	159	98	113	68	83	38	53	8	23
152	135	182	165	212	195	242	225	32	15	62	45	92	75	122	105
181	166	151	136	241	226	211	196	61	46	31	16	121	106	91	76
210	193	244	227	150	133	184	167	90	73	124	107	30	13	64	47
243	228	209	194	183	168	149	134	123	108	89	74	63	48	29	14
28	11	58	41	96	79	126	109	148	131	178	161	216	199	246	229
57	42	27	12	125	110	95	80	177	162	147	132	245	230	215	200
94	77	128	111	26	9	60	43	214	197	248	231	146	129	180	163
127	112	93	78	59	44	25	10	247	232	213	198	179	164	145	130

Рис. 4.120

В этом квадрате тоже комплементарные числа расположены симметрично вертикальной оси симметрии.

Предлагаем читателям следующие задачи: 1) построить второй магический квадрат 16-го порядка из приведённой пары ортогональных латинских квадратов, поменяв их местами; 2) составить новую пару ортогональных диагональных латинских квадратов, записав в первую строку латинских квадратов произвольную перестановку чисел 0, 1, 2 ... 15, отличную от тождественной перестановки; 3) составить пару ортогональных диагональных латинских квадратов 32-го порядка по аналогии с латинскими квадратами 8-го и 16-го порядков; 4) с помощью этой пары латинских квадратов построить магический квадрат 32-го порядка; 5) формализовать и запрограммировать процедуру составления нормализованной пары ортогональных диагональных латинских квадратов любого порядка $n = 2^p$, $p > 1$.

4.2.4 МЕТОД СОТОВЫХ КВАДРАТОВ

Метод сотовых квадратов применяется для построения магических квадратов любого чётного порядка $n = 2k$, $k > 2$.

Определение

Магический квадрат порядка $n = 2k$, $k > 2$ называется *сотовым*, если он составлен из квадратов 2×2 , в каждом из которых записаны четыре последовательных числа.

Примечание: в определении речь идёт о традиционном магическом квадрате. Очевидно, что сотовый квадрат может быть и нетрадиционным. Один из двух вспомогательных нетрадиционных магических квадратов, используемых при построении магического сотового квадрата, будет сотовым квадратом в смысле данного определения. Он тоже составляется из квадратов 2×2 , но в каждом таком квадрате записываются четыре числа – 0, 1, 2, 3 (эти четыре числа тоже последовательные).

Данный метод излагается по [8]. Автор указанной книги рассматривает три случая построения сотовых квадратов (в книге эти квадраты называются *2*2 ячейчными*):

1. квадраты порядка $n = 4k + 2$, $k = 1, 2, 3 \dots$;
2. квадраты порядка $n = 8k + 4$, $k = 1, 2, 3 \dots$;
3. квадраты порядка $n = 8k$, $k = 1, 2, 3 \dots$.

Первый случай будет рассмотрен в следующем разделе, посвящённом построению магических квадратов чётно-нечётного порядка. Для чётно-чётных порядков наибольший интерес представляет третий случай. Этот случай и будет здесь рассмотрен.

Для построения магического сотового квадрата методом сотовых квадратов составляются два вспомогательных квадрата. Магический квадрат строится из пары вспомогательных квадратов путём их поэлементного суммирования, то есть просто применяется следующая формула:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

где a_{ij} – элементы первого вспомогательного квадрата, b_{ij} – соответствующие элементы второго вспомогательного квадрата, c_{ij} – соответствующие элементы готового магического квадрата.

Итак, мы будем строить магические квадраты порядка $n = 8k$. Чтобы построить первый вспомогательный квадрат, надо выбрать любой магический квадрат порядка $m = 4k$. Рассмотрим для наглядности конкретный пример построения магического квадрата 8-го порядка. Возьмём в качестве исходного квадрата для построения первого вспомогательного квадрата квадрат 4-го порядка, изображённый на **рис. 4.121**.

1	2	15	16
12	14	3	5
13	7	10	4
8	11	6	9

Рис. 4.121

Далее последовательность натуральных чисел от **1** до n^2 разбивается на блоки по 4 числа в каждом.

Блок №1 – 1, 2, 3, 4

Блок № 2 – 5, 6, 7, 8

Блок № 3 – 9, 10, 11, 12

.....

Блок № 15 – 57, 58, 59, 60

Блок № 16 – 61, 62, 63, 64

Первый вспомогательный квадрат строится следующим образом: матрица 8×8 разбивается на квадраты 2×2 . В каждом таком квадрате записываются 4 одинаковых

числа. Эти числа определяются так: каждый квадрат 2×2 соответствует ячейке квадрата, изображённого на **рис. 4.121**. Число в этой ячейке показывает номер блока, из которого должно быть взято число, вписываемое в соответствующий квадрат 2×2 . Берётся всегда первое число из каждого блока. Например, в правой верхней ячейке квадрата на **рис. 4.121** стоит число 16. Значит, в соответствующий квадрат 2×2 надо вписать первое число блока №16, это число 61. В левой нижней ячейке квадрата на **рис. 4.121** стоит число 8. Значит, в соответствующий квадрат 2×2 надо вписать первое число блока №8, это число 29.

Если обозначить элементы квадрата на **рис. 4.121** d_{ij} , то числа, вписываемые в соответствующие квадраты 2×2 первого вспомогательного квадрата, определяются по формуле: $1 + 4(d_{ij} - 1)$.

На **рис. 4.122** вы видите готовый первый вспомогательный квадрат.

1	1	5	5	57	57	61	61
1	1	5	5	57	57	61	61
45	45	53	53	9	9	17	17
45	45	53	53	9	9	17	17
49	49	25	25	37	37	13	13
49	49	25	25	37	37	13	13
29	29	41	41	21	21	33	33
29	29	41	41	21	21	33	33

Рис. 4.122

Этот вспомогательный квадрат является нетрадиционным магическим квадратом с магической константой 248. Этот квадрат, как и исходный квадрат на **рис. 4.121**, не обладает никакими дополнительными свойствами.

Второй вспомогательный квадрат составляется из квадратов 2×2 , в каждом из которых записываются четыре числа – 0, 1, 2, 3. Понятно, что этот квадрат должен быть составлен так, чтобы он являлся нетрадиционным магическим квадратом, то есть имел одинаковые суммы чисел во всех строках, столбцах и главных диагоналях. Подробно о построении второго вспомогательного квадрата можно посмотреть в [8] и на сайте автора.(39)

На **рис. 4.123** вы видите второй вспомогательный квадрат.

0	1	3	2	3	2	0	1
2	3	1	0	1	0	2	3
3	2	0	1	0	1	3	2
1	0	2	3	2	3	1	0
3	2	0	1	0	1	3	2
1	0	2	3	2	3	1	0
0	1	3	2	3	2	0	1
2	3	1	0	1	0	2	3

Рис. 4.123

Это нетрадиционный магический квадрат с магической константой 12. Очевидно, что он обладает свойством ассоциативности.

Теперь осталось сложить поэлементно два вспомогательных квадрата, и магический сотовый квадрат 8-го порядка готов (**рис. 4.124**).

1	2	8	7	60	59	61	62
3	4	6	5	58	57	63	64
48	47	53	54	9	10	20	19
46	45	55	56	11	12	18	17
52	51	25	26	37	38	16	15
50	49	27	28	39	40	14	13
29	30	44	43	24	23	33	34
31	32	42	41	22	21	35	36

Рис. 4.124

Полученный магический сотовый квадрат не обладает никакими дополнительными свойствами. Хотя второй вспомогательный квадрат ассоциативен, этого не достаточно, чтобы магический сотовый квадрат тоже был ассоциативным, необходимо, чтобы этим свойством обладал также первый вспомогательный квадрат. Такой пример сейчас и будет рассмотрен.

Возьмём в качестве исходного квадрата для построения первого вспомогательного квадрат ассоциативный квадрат 4-го порядка (**рис. 4.125**).

1	14	15	4
12	7	6	9
8	11	10	5
13	2	3	16

Рис. 4.125

На **рис. 4.126** изображён готовый первый вспомогательный квадрат 8x8, построенный с помощью этого исходного квадрата.

1	1	53	53	57	57	13	13
1	1	53	53	57	57	13	13
45	45	25	25	21	21	33	33
45	45	25	25	21	21	33	33
29	29	41	41	37	37	17	17
29	29	41	41	37	37	17	17
49	49	5	5	9	9	61	61
49	49	5	5	9	9	61	61

Рис. 4.126

Очевидно, что этот нетрадиционный магический квадрат обладает свойством ассоциативности. Второй вспомогательный квадрат возьмём тот же самый, что и в предыдущем примере (**рис. 4.123**). Сложим поэлементно два вспомогательных квадрата и получим новый сотовый магический квадрат 8-го порядка, который будет ассоциативным,

так как оба вспомогательных квадрата ассоциативны. Смотрите этот сотовый квадрат на **рис. 4.127**.

1	2	56	55	60	59	13	14
3	4	54	53	58	57	15	16
48	47	25	26	21	22	36	35
46	45	27	28	23	24	34	33
32	31	41	42	37	38	20	19
30	29	43	44	39	40	18	17
49	50	8	7	12	11	61	62
51	52	6	5	10	9	63	64

Рис. 4.127

Рассмотрим ещё один пример. Возьмём в качестве исходного квадрата для построения первого вспомогательного квадрата пандиагональный квадрат 4-ого порядка (**рис. 4.128**).

1	8	13	12
14	11	2	7
4	5	16	9
15	10	3	6

Рис. 4.128

Будем строить магический сотовый квадрат 8-го порядка. Сначала построим первый вспомогательный квадрат (**рис. 4.129**).

1	1	29	29	49	49	45	45
1	1	29	29	49	49	45	45
53	53	41	41	5	5	25	25
53	53	41	41	5	5	25	25
13	13	17	17	61	61	33	33
13	13	17	17	61	61	33	33
57	57	37	37	9	9	21	21
57	57	37	37	9	9	21	21

Рис. 4.129

Нетрудно убедиться в том, что этот нетрадиционный магический квадрат является пандиагональным.

А теперь надо построить второй вспомогательный квадрат так, чтобы он тоже был пандиагональным. Для этого применим к ассоциативному квадрату с **рис. 4.123** преобразование трёх квадратов, которые превращает ассоциативный квадрат чётно-

чётного порядка в пандиагональный. В результате применения этого преобразования получаем пандиагональный вспомогательный квадрат, изображённый на **рис. 4.130**.

0	1	3	2	1	0	2	3
2	3	1	0	3	2	0	1
3	2	0	1	2	3	1	0
1	0	2	3	0	1	3	2
2	3	1	0	3	2	0	1
0	1	3	2	1	0	2	3
1	0	2	3	0	1	3	2
3	2	0	1	2	3	1	0

Рис. 4.130

Складываем поэлементно вспомогательные квадраты с **рис. 4.129** и с **рис. 4.130**. Полученный сотовый магический квадрат 8-го порядка показан на **рис. 4.131**.

1	2	32	31	50	49	47	48
3	4	30	29	52	51	45	46
56	55	41	42	7	8	26	25
54	53	43	44	5	6	28	27
15	16	18	17	64	63	33	34
13	14	20	19	62	61	35	36
58	57	39	40	9	10	24	23
60	59	37	38	11	12	22	21

Рис. 4.131

Так как оба вспомогательных квадрата пандиагональны, то и сотовый магический квадрат получился пандиагональный.

Интересно отметить, что другой пандиагональный сотовый квадрат 8-го порядка можно получить из ассоциативного сотового квадрата с **рис. 4.127** применением к нему преобразования трёх квадратов. Этот квадрат показан на **рис. 4.132**.

Построение сотовых магических квадратов 16-го порядка подробно описывается в (40). Здесь покажем только самый интересный сотовый квадрат 16-го порядка – идеальный (**рис. 4.133**).

1	2	224	223	194	193	187	188	165	166	124	123	102	101	31	32
3	4	222	221	196	195	185	186	167	168	122	121	104	103	29	30
248	247	41	42	55	56	78	77	84	83	141	142	147	148	234	233
246	245	43	44	53	54	80	79	82	81	143	144	145	146	236	235
15	16	118	117	108	107	181	182	171	172	210	209	208	207	17	18
13	14	120	119	106	105	183	184	169	170	212	211	206	205	19	20
250	249	131	132	157	158	68	67	94	93	39	40	57	58	232	231
252	251	129	130	159	160	66	65	96	95	37	38	59	60	230	229
28	27	197	198	219	220	162	161	192	191	97	98	127	128	6	5
26	25	199	200	217	218	164	163	190	189	99	100	125	126	8	7
237	238	52	51	46	45	87	88	73	74	152	151	138	137	243	244
239	240	50	49	48	47	85	86	75	76	150	149	140	139	241	242
22	21	111	112	113	114	176	175	178	177	203	204	213	214	12	11
24	23	109	110	115	116	174	173	180	179	201	202	215	216	10	9
227	228	154	153	136	135	89	90	71	72	62	61	36	35	253	254
225	226	156	155	134	133	91	92	69	70	64	63	34	33	255	256

Рис. 4.133

4.2.5 МЕТОД ОКАЙМЛЁННЫХ КВАДРАТОВ

Этот метод аналогичен методу окаймлённых квадратов, изложенному в разделе 4.1.6 для квадратов нечётного порядка. Но здесь есть одна особенность: в процессе окаймления мы получаем также квадраты порядка $n = 4k + 2$ (или чётно-нечётного порядка), а здесь рассматриваются квадраты чётно-чётного порядка. Тем не менее, изложим этот метод в данном разделе. Изложение метода даётся по [8].

Правила построения для порядков $n = 4k$ и $n = 4k + 2$ различны. Минимальный порядок магического квадрата чётного порядка, который можно построить методом окаймлённых квадратов, равен 6. Он строится окаймлением магического квадрата 4-го порядка. Итак, сначала излагаются правила построения магического квадрата порядка $n = 4k + 2$.

1. Построим любой магический квадрат порядка $n - 2$.
2. Увеличим все элементы этого магического квадрата на величину $2(n - 1)$ и поместим полученный нетрадиционный магический квадрат в матрицу $n \times n$ так, чтобы с каждой стороны квадрата был свободный столбец (свободная строка).
3. Заполним угловые ячейки матрицы $n \times n$ следующим образом: в левую верхнюю ячейку запишем число $3m - 1$, в верхнюю правую – число 1 , в нижнюю левую – число $d - 1$, в нижнюю правую - число $d - 3m + 1$, где $m = n/2$, $d = n^2 + 1$.
4. В оставшиеся свободными ячейки верхней строки поместим (произвольным образом) числа $\{2i + 1\}$ и $\{d - 2j\}$, где $i = 1, 2, \dots, m - 2$, а $j = 1, 2, \dots, m$.
5. В оставшиеся свободные клетки левого столбца поместим (произвольным образом) числа $2m - 1$, $\{d - 4m + 1 + j\}$, $\{3m - 1 - i\}$, $\{3m - 1 + q, d - 2m - q\}$, где $j = 1, 2, \dots, M + 1$, $i = 1, 2, \dots, M$, $q = 1, 2, \dots, M - 1$, $M = [m/2]$.
6. Оставшиеся свободными ячейки нижней строки (правого столбца) заполним числами, комплементарными числам в противоположных ячейках верхней строки (левого столбца), то есть дающими в сумме $(n^2 + 1)$.

Проиллюстрируем правила на примере построения окаймлённого квадрата 6-го порядка из [8]. В качестве исходного квадрата выбран следующий квадрат 4-го порядка (рис. 4.134):

1	10	15	8
16	7	2	9
6	13	12	3
11	4	5	14

Рис. 4.134

Результат выполнения пунктов 2-3 изображён на рис. 4.135.

8					1
	11	20	25	18	
	26	17	12	19	
	16	23	22	13	
	21	14	15	24	
36					29

Рис. 4.135

На рис. 4.136 вы видите результат выполнения пунктов 4-5.

8	3	35	33	31	1
5	11	20	25	18	
7	26	17	12	19	
28	16	23	22	13	
27	21	14	15	24	
36					29

Рис. 4.136

Выполнение последнего пункта совсем просто: записываем в противоположных ячейках комплементарные числа. Готовый магический квадрат 6-го порядка вы видите на рис. 4.137.

8	3	35	33	31	1
5	11	20	25	18	32
7	26	17	12	19	30
28	16	23	22	13	9
27	21	14	15	24	10
36	34	2	4	6	29

Рис. 4.137

Поскольку числа в верхней строке и в левом столбце квадрата вписываются произвольно (кроме чисел в угловых ячейках), можно построить данным методом не один магический квадрат. Так, для квадрата 6-го порядка будет 24 варианта заполнения верхней строки и 24 варианта заполнения левого столбца, а всего получается 576 вариантов заполнения. Следовательно, можно построить 576 магических квадратов 6-го порядка. На рис. 4.138 изображён один из вариантов.

8	35	33	31	3	1
7	11	20	25	18	30
28	26	17	12	19	9
27	16	23	22	13	10
5	21	14	15	24	32
36	2	4	6	34	29

Рис. 4.138

Переходим к следующему чётному порядку – $n = 8$. Так как этот порядок относится к серии порядков $n = 4k$, здесь правила будут другие. В качестве исходного по-прежнему берётся любой магический квадрат порядка $n - 2$, то есть в данном примере 6-го порядка. Возьмём в качестве исходного квадрата только что построенный магический квадрат 6-го порядка с рис. 4.137. Пункт 2 выполняется так же, как в описанных выше правилах. Результат выполнения этого пункта показан на рис. 4.139.

	22	17	49	47	45	15	
	19	25	34	39	32	46	
	21	40	31	26	33	44	
	42	30	37	36	27	23	
	41	35	28	29	38	24	
	50	48	16	18	20	43	

Рис. 4.139

Теперь опишем правила заполнения строк и столбцов в этой матрице. Начинаем с пункта 3 правил.

3. Для заполнения клеток верхней строки таблицы $n \times n$ используем числа $\{4i - 3, 4i, d - 4i + 2, d - 4i + 1\}$, где $m = [n/2]$, $M = [m/2]$, $d = n \cdot n + 1$, $i = 1, 2, \dots, M$.

При этом если m кратно четырём, то в крайнюю левую клетку верхней строки помещаем число m , а в крайнюю правую клетку – число 1. Если же m не кратно четырём, то в крайнюю левую клетку помещаем число $m + 3$, а в крайнюю правую клетку – число 4. Остальные из указанных выше чисел расставляем в свободных клетках верхней строки произвольным образом.

4. Пусть в верхней левой угловой клетке таблицы $n \times n$ находится число i , а в верхней правой угловой клетке – число j , тогда в нижнюю левую клетку таблицы помещаем число $d - j$, а в нижнюю правую клетку – число $d - i$.

5. В оставшиеся свободными клетки левого столбца таблицы $n \times n$ помещаем (произвольным образом) числа $\{2m + 2i - 1, d - 2m - 2i\}$, где $i = 1, 2, \dots, m-1$.

6. Оставшиеся свободными клетки нижней строки и правого столбца заполняем так, чтобы расположенные друг против друга числа были взаимно дополнительными.

Заполняем по приведённым правилам матрицу с **рис. 4.139**. На **рис. 4.140** изображён готовый магический квадрат 8-го порядка.

4	5	8	63	62	59	58	1
9	22	17	49	47	45	15	56
11	19	25	34	39	32	46	54
13	21	40	31	26	33	44	52
55	42	30	37	36	27	23	10
53	41	35	28	29	38	24	12
51	50	48	16	18	20	43	14
64	60	57	2	3	6	7	61

Рис. 4.140

Для квадрата 8-го порядка имеется 720 вариантов заполнения верхней строки и столько же вариантов заполнения левого столбца. Следовательно, методом окаймлённых квадратов можно построить 518400 магических квадратов 8-го порядка. Это только для одного исходного квадрата 6-го порядка.

На построении окаймлённого квадрата 8-го порядка пример в [8] заканчивается. Выполним следующее окаймление, то есть построим магический квадрат 10-го порядка. Так как этот порядок принадлежит к серии порядков $n = 4k + 2$, соответственно надо пользоваться правилами для таких порядков. В качестве исходного магического квадрата 8-го порядка возьмём только что построенный квадрат с **рис. 4.140** (хотя, разумеется, можно взять любой другой магический квадрат 8-го порядка). На **рис. 4.141** вы видите результат выполнения пунктов 1-2.

	22	23	26	81	80	77	76	19	
	27	40	35	67	65	63	33	74	
	29	37	43	52	57	50	64	72	
	31	39	58	49	44	51	62	70	
	73	60	48	55	54	45	41	28	
	71	59	53	46	47	56	42	30	
	69	68	66	34	36	38	61	32	
	82	78	75	20	21	24	25	79	

Рис. 4.141

Заполним свободные ячейки в этой матрице, выполнив пункты 3-6 правил. Готовый магический квадрат 10-го порядка представлен на **рис. 4.142**.

14	91	93	95	97	99	7	5	3	1
9	22	23	26	81	80	77	76	19	92
83	27	40	35	67	65	63	33	74	18
84	29	37	43	52	57	50	64	72	17
85	31	39	58	49	44	51	62	70	16
15	73	60	48	55	54	45	41	28	86
90	71	59	53	46	47	56	42	30	11
13	69	68	66	34	36	38	61	32	88
12	82	78	75	20	21	24	25	79	89
100	10	8	6	4	2	94	96	98	87

Рис. 4.142

Точно так же, как в случае окаймлённых квадратов нечётного порядка, здесь получаются концентрические магические квадраты. Посмотрите, какие магические константы имеют вписанные нетрадиционные магические квадраты (**рис. 4.142**): $S_4 = 202$, $S_6 = 303$, $S_8 = 404$. Все эти константы кратны числу $d = n^2 + 1$. Забавная закономерность! Впрочем, магическая константа квадрата 10-го порядка $S_{10} = 505$ тоже кратна этому числу. Это очевидно из формулы для магической константы традиционного магического квадрата:

$$S = n \cdot (n^2 + 1) / 2$$

Предлагаем читателям выполнить следующее окаймление, то есть построить магический квадрат 12-го порядка. Понятно, что теперь надо пользоваться правилами для порядков серии $n = 4k$. В качестве исходного магического квадрата 10-го порядка возьмите только что построенный квадрат с **рис. 4.142**. На **рис. 4.143** дана заготовка для построения магического квадрата 12-го порядка. Осталось заполнить свободные ячейки матрицы.

	36	113	115	117	119	121	29	27	25	23	
	31	44	45	48	103	102	99	98	41	114	
	105	49	62	57	89	87	85	55	96	40	
	106	51	59	65	74	79	72	86	94	39	
	107	53	61	80	71	66	73	84	92	38	
	37	95	82	70	77	76	67	63	50	108	
	112	93	81	75	68	69	78	64	52	33	
	35	91	90	88	56	58	60	83	54	110	
	34	104	100	97	42	43	46	47	101	111	
	122	32	30	28	26	24	116	118	120	109	

Рис. 4.143

Здесь магические константы вписанных нетрадиционных магических квадратов такие: $S_4 = 290$, $S_6 = 435$, $S_8 = 580$, $S_{10} = 725$. Все константы кратны числу $n^2 + 1 = 145$, причём множители кратности таковы: 2, 3, 4, 5. Наконец, магическая константа квадрата 12-го порядка тоже кратна этому числу с множителем кратности 6: $S_{12} = 6 \cdot 145 = 870$.

Те читатели, кому понравилось строить окаймлённые квадраты, могут пойти дальше: построить магические квадраты порядков 14, 16 и т. д.

4.2.6 МЕТОД СОСТАВНЫХ КВАДРАТОВ

Универсальный метод составных квадратов, конечно, работает и для квадратов чётно-чётного порядка. Минимальный порядок квадрата чётно-чётного порядка, который можно построить методом составных квадратов, равен 12.

Приведём пример построения магического квадрата 12-го порядка методом составных квадратов. Поскольку число 12 представляется в виде произведения чисел 3 и 4, в качестве базового можно взять квадрат 3-го порядка, а в качестве основного – квадрат 4-го порядка, или наоборот: в качестве базового взять квадрат 4-го порядка, а в качестве основного – квадрат 3-го порядка.

Возьмём в качестве базового квадрат 3-го порядка, который изображён на **рис. 4.144**, а в качестве основного квадрата – квадрат 4-го порядка, изображённый на **рис. 4.145**.

2	7	6
9	5	1
4	3	8

Рис. 4.144

1	8	11	14
15	10	5	4
6	3	16	9
12	13	2	7

Рис. 4.145

Основной принцип метода составных квадратов был изложен в разделе 4.1.8. На **рис. 4.146** вы видите составной квадрат 12-го порядка.

17	24	27	30	97	104	107	110	81	88	91	94
31	26	21	20	111	106	101	100	95	90	85	84
22	19	32	25	102	99	112	105	86	83	96	89
28	29	18	23	108	109	98	103	92	93	82	87
129	136	139	142	65	72	75	78	1	8	11	14
143	138	133	132	79	74	69	68	15	10	5	4
134	131	144	137	70	67	80	73	6	3	16	9
140	141	130	135	76	77	66	71	12	13	2	7
49	56	59	62	33	40	43	46	113	120	123	126
63	58	53	52	47	42	37	36	127	122	117	116
54	51	64	57	38	35	48	41	118	115	128	121
60	61	50	55	44	45	34	39	124	125	114	119

Рис. 4.146

В этом примере базовый квадрат ассоциативный, основной квадрат – пандиагональный. Составной квадрат не обладает ни ассоциативностью, ни пандиагональностью. Чтобы некоторое свойство было присуще составному квадрату, необходимо, чтобы этим свойством обладали и базовый, и основной квадраты. Если мы возьмём в качестве основного квадрата ассоциативный квадрат 4-го порядка, а базовый квадрат оставим прежний, то мы получим составной квадрат 12-го порядка, который будет ассоциативным. Если мы будем строить, например, составной квадрат 16-го порядка и выберем для этого построения пандиагональный квадрат 4-го порядка с **рис. 4.145** (и в качестве базового, и в качестве основного квадратов), построенный составной квадрат 16-го порядка будет пандиагональным. Проверьте!

Предлагаем читателям поменять ролями базовый и основной квадраты и построить новый составной квадрат 12-го порядка.

В данном разделе не рассматриваются методы построения магических квадратов чётно-чётного порядка, обладающих дополнительными свойствами, а именно: пандиагональных, идеальных и совершенных квадратов. Эти методы можно найти на сайте автора. (40)

4.3 МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ МАГИЧЕСКИХ КВАДРАТОВ ЧЁТНО-НЕЧЁТНОГО ПОРЯДКА

В данном разделе будут рассмотрены методы построения магических квадратов чётно-нечётного порядка $n = 4k + 2$. Магические квадраты этой серии порядков менее всего исследованы, потому что для таких порядков не существует ни ассоциативных, ни пандиагональных квадратов. Нет и очень древних методов построения магических квадратов чётно-нечётного порядка.

4.3.1 МЕТОД ЧЕТЫРЁХ КВАДРАТОВ

Начнём излагать данный метод с построения квадрата 6-го порядка. Разобьём квадрат 6х6 на четыре квадрата 3х3 (**рис.4.147**). В каждом из этих квадратов построим магические квадраты 3-го порядка, но из разных чисел. Квадрат в левом верхнем углу заполним числами от 1 до 9, это нормальный магический квадрат 3-го порядка. Остальные три квадрата будут нетрадиционными магическими; квадрат в правом верхнем углу заполним числами от 19 до 27, в левом нижнем углу – числами от 28 до 36, в правом нижнем – числами от 10 до 18. Три нетрадиционных магических квадрата строятся на основе магического квадрата, помещённого в левом верхнем углу; так, например, квадрат в правом верхнем углу получается из основного магического квадрата 3-го порядка

прибавлением к числам во всех ячейках числа 18. Аналогично в двух других квадратах, только число прибавляется другое (в одном случае – 27, в другом – 9). Заполнив таким образом все четыре квадрата 3х3, внимательно посмотрим на результат. Оказывается, мы получили почти готовый магический квадрат 6-го порядка. Надо только поменять местами три пары чисел: 2-29, 5-32, 4-31. На **рис. 4.148** вы видите готовый магический квадрат шестого порядка.

2	7	6	20	25	24
9	5	1	27	23	19
4	3	8	22	21	26
29	34	33	11	16	15
36	32	28	18	14	10
31	30	35	13	12	17

Рис. 4.147

29	7	6	20	25	24
9	32	1	27	23	19
31	3	8	22	21	26
2	34	33	11	16	15
36	5	28	18	14	10
4	30	35	13	12	17

Рис. 4.148

Как известно, существует 8 вариантов магического квадрата 3-го порядка, получающихся друг из друга поворотами и отражениями. Если вы возьмёте другой вариант магического квадрата 3-го порядка и описанным способом постройте магический квадрат 6-го порядка, то это будет новый квадрат, который нельзя получить из первого построенного квадрата (**рис. 4.148**) ни поворотом, ни отражением. Один из таких квадратов вы видите на **рис. 4.149**.

31	9	2	22	27	20
3	32	7	21	23	25
35	1	6	26	19	24
4	36	29	13	18	11
30	5	34	12	14	16
8	28	33	17	10	15

Рис. 4.149

Таким образом, данным методом можно построить восемь разных магических квадратов 6-го порядка.

Теперь переходим к квадрату следующего чётно-нечётного порядка, 10-го. Будем действовать аналогичным образом: разобьём матрицу 10х10 на четыре квадрата 5х5 и в каждом таком квадрате построим магический квадрат 5-го порядка. При этом достаточно построить традиционный магический квадрат в левом верхнем углу, а другие

(нетрадиционные) магические квадраты получатся из первого прибавлением ко всем числам в ячейках одного и того же числа; для квадрата в правом верхнем углу это число равно 50, для квадрата в левом нижнем углу – 75, для квадрата в правом нижнем углу – 25 (рис. 4.150).

3	16	9	22	15	53	66	59	72	65
20	8	21	14	2	70	58	71	64	52
7	25	13	1	19	57	75	63	51	69
24	12	5	18	6	74	62	55	68	56
11	4	17	10	23	61	54	67	60	73
78	91	84	97	90	28	41	34	47	40
95	83	96	89	77	45	33	46	39	27
82	100	88	76	94	32	50	38	26	44
99	87	80	93	81	49	37	30	43	31
86	79	92	85	98	36	29	42	35	48

Рис. 4.150

Посмотрим на заполненный квадрат. Константа магического квадрата 10-го порядка равна 505. Просуммировав числа в строках, столбцах и диагоналях рассматриваемого квадрата, убеждаемся, что со столбцами у нас уже всё в порядке. А вот чтобы получить константу в строках и диагоналях, надо поменять местами числа по закрашенным траекториям, то есть фигуру, состоящую из чисел 3,8,25,12,11 надо поменять местами с фигурой, состоящей из чисел 78, 83,100, 87, 86 (эти фигуры окрашены одним цветом). Точно так же столбец 15,2,19,6,23 надо поменять местами со столбцом 90,77,94,81,98, а столбец 53,70, 57, 74,61 – со столбцом 28,45,32, 49, 36 (обменивающиеся столбцы тоже одинаково окрашены).

На рис. 4.151 изображён готовый магический квадрат 10-го порядка.

78	16	9	22	90	28	66	59	72	65
20	83	21	14	77	45	58	71	64	52
7	100	13	1	94	32	75	63	51	69
24	87	5	18	81	49	62	55	68	56
86	4	17	10	98	36	54	67	60	73
3	91	84	97	15	53	41	34	47	40
95	8	96	89	2	70	33	46	39	27
82	25	88	76	19	57	50	38	26	44
99	12	80	93	6	74	37	30	43	31
11	79	92	85	23	61	29	42	35	48

Рис. 4.151

Замечание, сделанное для квадратов 6-го порядка, имеет место и для квадратов 10-го порядка. Поскольку магических квадратов 5-го порядка существует очень много

(несколько миллионов), то и магических квадратов 10-го порядка таким методом мы можем построить огромное количество.

Докажем, что описанным способом действительно можно построить магический квадрат любого порядка $n = 4k + 2$.

Доказательство

Пусть нам надо построить магический квадрат порядка n , n – число чётное, но не кратно 4. Представим n в виде $2*m$, где m будет числом нечётным. Разобьём матрицу $n \times n$ на четыре квадрата размерами $m \times m$ и в каждом из них построим магический квадрат (магический квадрат любого нечётного порядка мы строить умеем, например, методом террас) по описанной выше схеме. Пронумеруем квадраты размерами $m \times m$: квадрат в левом верхнем углу матрицы – 1-ый, в правом верхнем углу – 2-ой, в левом нижнем углу – 3-ий, а правом нижнем углу – 4-ый. Посчитаем константы всех магических квадратов порядка m и покажем, что суммы чисел в столбцах матрицы $n \times n$ действительно равны магической константе квадрата порядка n . Константы вычисляются по известной формуле для константы магического квадрата, которая представляет собой не что иное, как формулу для суммы n членов арифметической прогрессии. Заметим, что нетрадиционные магические квадраты 2-ой, 3-ий и 4-ый также заполнены числами, образующими арифметическую прогрессию с разностью 1.

$$S_1 = (1 + m^2)*m/2$$

$$S_2 = [(2m^2 + 1) + 3m^2]*m/2 = (5m^2 + 1)*m/2$$

$$S_3 = [(3m^2 + 1) + 4m^2]*m/2 = (7m^2 + 1)*m/2$$

$$S_4 = [(m^2 + 1) + 2m^2]*m/2 = (3m^2 + 1)*m/2$$

$$S = (1 + n^2)*n/2 = (1 + 4m^2)*2m/2 = (1 + 4m^2)*m$$

$$S_1 + S_3 = (1 + m^2)*m/2 + (7m^2 + 1)*m/2 = (1 + 4m^2)*m$$

$$S_2 + S_4 = (5m^2 + 1)*m/2 + (3m^2 + 1)*m/2 = (1 + 4m^2)*m$$

Здесь S_1, S_2, S_3, S_4 – магические константы квадратов порядка m (1-го, 2-го, 3-го и 4-го соответственно), S – магическая константа квадрата порядка n .

Тем самым доказано, что суммы по столбцам уже получились. Более того:

$$S_1 + S_2 = m*(1 + 3m^2)$$

$$S_3 + S_4 = m*(1 + 5m^2)$$

то есть сумма чисел по горизонталям в верхней половине исходного квадрата на m^3 меньше нужной константы, а в нижней половине – на m^3 больше этой константы.

Далее:

$$S_1 + S_4 = m*(2m^2 + 1)$$

$$S_2 + S_3 = m*(6m^2 + 1)$$

то есть сумма чисел по одной диагонали исходного квадрата на $2m^3$ меньше нужной, а по другой диагонали – на $2m^3$ больше нужной.

Докажем, наконец, что суммы чисел по горизонталям и диагоналям квадрата $n \times n$ можно выровнять (то есть привести к нужной константе), переставляя определённым образом числа в столбцах. Посмотрите ещё раз на **рис. 4.147** и на **рис. 4.150**. Вы видите, что на **рис. 4.147** пары чисел, которые надо поменять местами, находятся на ломаных линиях, прилегающих к левой стороне квадрата $n \times n$ и захватывающих по два

диагональных числа на каждой диагонали квадрата. $m \times m$. На **рис. 4.150** есть точно такие же ломаные линии и ещё два столбца, прилегающие к вертикальной оси симметрии квадрата $n \times n$ слева и справа, числа которых тоже меняются местами (эти столбцы как бы целиком переставляются). Если вы начнёте строить магический квадрат 14-го порядка, то убедитесь, что порядок обмена чисел будет аналогичным, только столбцов, прилегающих к вертикальной оси симметрии, которые надо переставить, будет уже четыре, по два с каждой стороны оси симметрии.

Итак, закономерность прослежена. Делаем вывод: для того чтобы выровнять суммы чисел по горизонталям и диагоналям квадрата порядка $n = 2 \cdot m$, составленного из четырёх магических квадратов порядка m (m – нечётное число), надо поменять местами числа: а) расположенные на ломаных линиях, прилегающих к левой стороне квадрата $n \times n$ и захватывающих по два диагональных числа на каждой диагонали в квадрате порядка m ; б) в $(m - 3)$ столбцах, прилегающих к вертикальной оси симметрии квадрата $n \times n$ по $(m - 3)/2$ с каждой стороны.

Заметим, что столбцы не обязательно брать прилегающие к вертикальной оси симметрии квадрата $n \times n$, их можно взять в любом другом месте, только не захватывать числа, попавшие на ломаные линии, и одинаковое количество слева и справа от оси симметрии. Для конкретности мы берём столбцы, прилегающие к оси симметрии.

Докажем высказанное утверждение о выравнивании сумм.

Каждое число 3-го квадрата больше соответствующего числа 1-го квадрата на $3m^2$, а каждое число 4-го квадрата меньше соответствующего числа 2-го квадрата на m^2 . Следовательно, совершив указанные перестановки чисел, мы изменим сумму в каждой строке верхней половины исходного квадрата на величину:

$$3m^2 + (m - 3) \cdot 3m^2/2 - (m - 3) \cdot m^2/2$$

Преобразовав это выражение, убеждаемся, что оно тождественно равно m^3 , то есть как раз той величине, которой недоставало в каждой строке. Точно на такую же величину мы уменьшим сумму в каждой строке нижней половины исходного квадрата, и она тоже сделается равной константе квадрата.

Теперь посмотрим, на какую величину изменится сумма по диагонали квадрата порядка n , проходящей с левого верхнего угла в правый нижний. Очевидно, что она увеличится на следующую величину:

$$2 \cdot 3m^2 + (m - 3) \cdot 3m^2/2 + (m - 3) \cdot m^2/2$$

Преобразовав это выражение, вы увидите, что оно тождественно равно $2m^3$, то есть как раз той величине, которая составляла разницу прежней диагональной суммы и магической константы квадрата $n \times n$. Точно на такую же величину уменьшится сумма по другой диагонали квадрата $n \times n$ и тоже станет равной константе квадрата.

В заключение приведём общие формулы для составления нетрадиционных магических квадратов порядка $m = n/2$.

1-ый квадрат – традиционный магический квадрат, составленный из чисел от 1 до m^2 . Этот магический квадрат можно построить любым из известных методов построения магических квадратов нечётного порядка.

2-ой квадрат (и все следующие) – нетрадиционный магический. Он составляется путём прибавления к числам в каждой ячейке 1-го квадрата числа $2m^2$, то есть он заполняется числами от $1 + 2m^2$ до $3m^2$;

3-ий квадрат составляется путём прибавления к числам в каждой ячейке 1-го квадрата числа $3m^2$, то есть он заполняется числами от $1 + 3m^2$ до $4m^2$;

4-ый квадрат составляется путём прибавления к числам в каждой ячейке 1-го квадрата числа m^2 , то есть он заполняется числами от $1 + m^2$ до $2m^2$.

А теперь покажем ещё один пример – построение данным методом магического квадрата 14-ого порядка.

Сначала построим 1-ый магический квадрат нечётного порядка $m = 7$. Выберем для этого метод террас.

2-ой магический квадрат получаем прибавлением к числам 1-ого квадрата числа $2m^2=98$; 3-ий квадрат – прибавлением числа $3m^2=147$; 4-ый квадрат – прибавлением числа $m^2=49$.

Число переставляемых столбцов равно $(m - 3) = 4$, по два с каждой стороны оси симметрии квадрата 14×14 . На рис. 4.152 показана матрица 14×14 , составленная из четырёх магических квадратов 7-го порядка, а на рис. 4.153 вы видите готовый магический квадрат 14-го порядка.

4	29	12	37	20	45	28	102	127	110	135	118	143	126
35	11	36	19	44	27	3	133	99	134	117	142	125	101
10	42	18	43	26	2	34	108	140	116	141	124	100	132
41	17	49	25	1	33	9	139	115	147	123	99	131	107
16	48	24	7	32	8	40	114	146	122	105	130	106	138
47	23	6	31	14	39	15	145	121	104	129	112	137	113
22	5	30	13	38	21	46	120	103	128	111	136	119	144
151	176	159	184	167	192	175	53	78	61	86	69	94	77
182	158	183	166	191	174	150	84	60	85	68	93	76	52
157	189	165	190	173	149	181	59	91	67	92	75	51	83
188	164	196	172	148	180	156	90	66	98	74	50	82	58
163	195	171	154	179	155	187	65	97	73	56	81	57	89
194	170	153	178	161	186	162	96	72	55	80	63	88	64
169	152	177	160	185	168	193	71	54	79	62	87	70	95

Рис. 4.152

151	29	12	37	20	192	175	53	78	110	135	118	143	126
35	158	36	19	44	174	150	84	60	134	117	142	125	101
10	189	18	43	26	149	181	59	91	116	141	124	100	132
41	164	49	25	1	180	156	90	66	147	123	99	131	107
16	195	24	7	32	155	187	65	97	122	105	130	106	138
47	170	6	31	14	186	162	96	72	104	129	112	137	113
169	5	30	13	38	168	193	71	54	128	111	136	119	144
4	176	159	184	167	45	28	102	127	61	86	69	94	77
182	11	183	166	191	27	3	133	109	85	68	93	76	52
157	42	165	190	173	2	34	108	140	67	92	75	51	83
188	17	196	172	148	33	9	139	115	98	74	50	82	58
163	48	171	154	179	8	40	114	146	73	56	81	57	89
194	23	153	178	161	39	15	145	121	55	80	63	88	64
22	152	177	160	185	21	46	120	103	79	62	87	70	95

Рис. 4.153

Отметим интересное свойство магических квадратов, построенных данным методом. Угловые квадраты порядка $m = n/2$ можно повернуть на 180 градусов, получится новый магический квадрат. Покажем это свойство на примере магического квадрата с рис. 4.148. Повернув в этом квадрате угловые квадраты 3×3 на 180 градусов, мы получим магический квадрат, изображённый на рис. 4.154.

8	3	31	26	21	22
1	32	9	19	23	27
6	7	29	24	25	20
35	30	4	17	12	13
28	5	36	10	14	18
33	34	2	15	16	11

Рис. 4.154

Можно также поворачивать угловые квадраты на 90 градусов вокруг центра одновременно в одном направлении (по часовой стрелке или против часовой стрелки), но тогда надо ещё поменять местами два угловых квадрата. В результате таких преобразований получим новый магический квадрат. Продемонстрируем это свойство на том же магическом квадрате 6-го порядка с рис. 4.148. Повернём все угловые квадраты 3×3 на 90 градусов по часовой стрелке, а затем поменяем местами левый верхний и правый нижний угловые квадраты. Полученный магический квадрат изображён на рис. 4.155.

13	18	11	22	27	20
12	14	16	21	23	25
17	10	15	26	19	24
4	36	2	31	9	29
30	5	34	3	32	7
35	28	33	8	1	6

Рис. 4.155

А теперь поменяем местами другую пару угловых квадратов – правый верхний и левый нижний, другая пара угловых квадратов остаётся на месте. Получим такой магический квадрат (рис. 4.156):

31	9	29	4	36	2
3	32	7	30	5	34
8	1	6	35	28	33
22	27	20	13	18	11
21	23	25	12	14	16
26	19	24	17	10	15

Рис. 4.156

В [8] есть вариант метода четырёх квадратов (см. стр. 125-127). В этом варианте выбираются другие числа для перестановок, нежели в описанном здесь методе. Основной принцип метода такой же.

4.3.2 МЕТОД ОКАЙМЛЁННЫХ КВАДРАТОВ

Метод окаймлённых квадратов был изложен в разделе 4.2.5 при построении этим методом магических квадратов чётно-чётного порядка. Продублируем здесь правила для квадратов чётно-нечётного порядка (правила для квадратов чётно-чётного и чётно-нечётного порядка различны), чтобы читатели видели их перед собой. Напомним, что метод окаймлённых квадратов излагается по [8].

Для построения магического квадрата любого порядка $n = 4k + 2$ выполним следующие действия:

1. Построим любой магический квадрат порядка $n - 2$.
2. Увеличим все элементы этого магического квадрата на величину $2(n - 1)$ и поместим полученный нетрадиционный магический квадрат в матрицу $n \times n$ так, чтобы с каждой стороны квадрата был свободный столбец (свободная строка).
3. Заполним угловые ячейки матрицы $n \times n$ следующим образом: в левую верхнюю ячейку запишем число $3m - 1$, в верхнюю правую – число 1 , в нижнюю левую – число $d - 1$, в нижнюю правую - число $d - 3m + 1$, где $m = n/2$, $d = n^2 + 1$.
4. В оставшиеся свободными ячейки верхней строки поместим (произвольным образом) числа $\{2i + 1\}$ и $\{d - 2j\}$, где $i = 1, 2, \dots, m - 2$, а $j = 1, 2, \dots, m$.
5. В оставшиеся свободные клетки левого столбца поместим (произвольным образом) числа $2m - 1$, $\{d - 4m + 1 + j\}$, $\{3m - 1 - i\}$, $\{3m - 1 + q, d - 2m - q\}$, где $j = 1, 2, \dots, M + 1$, $i = 1, 2, \dots, M$, $q = 1, 2, \dots, M - 1$, $M = [m/2]$.

6. Оставшиеся свободными ячейки нижней строки (правого столбца) заполним числами, комплементарными числам в противоположных ячейках верхней строки (левого столбца), то есть дающими в сумме $(n^2 + 1)$.

Приведём пример построения магического квадрата 14-го порядка методом окаймлённых квадратов. В качестве исходного квадрата возьмём идеальный квадрат 12-го порядка (рис. 4.157).

1	96	31	100	123	77	11	86	32	106	129	78
117	54	133	72	19	40	111	53	143	62	20	46
104	130	81	6	85	36	103	124	75	5	95	26
71	14	44	118	57	138	61	24	43	112	51	137
3	89	35	98	128	82	9	90	25	108	127	76
115	52	135	65	23	38	116	58	141	66	13	48
97	132	79	4	87	29	107	122	80	10	93	30
69	18	37	120	55	136	63	17	47	110	56	142
8	94	33	102	121	84	7	88	27	101	131	74
119	50	140	70	21	42	109	60	139	64	15	41
99	125	83	2	92	34	105	126	73	12	91	28
67	16	39	113	59	134	68	22	45	114	49	144

Рис. 4.157

Результат выполнения пункта 2 правил изображён на рис. 4.158.

	27	122	57	126	149	103	37	112	58	132	155	104	
	143	80	159	98	45	66	137	79	169	88	46	72	
	130	156	107	32	111	62	129	150	101	31	121	52	
	97	40	70	144	83	164	87	50	69	138	77	163	
	29	115	61	124	154	108	35	116	51	134	153	102	
	141	78	161	91	49	64	142	84	167	92	39	74	
	123	158	105	30	113	55	133	148	106	36	119	56	
	95	44	63	146	81	162	89	43	73	136	82	168	
	34	120	59	128	147	110	33	114	53	127	157	100	
	145	76	166	96	47	68	135	86	165	90	41	67	
	125	151	109	28	118	60	131	152	99	38	117	54	
	93	42	65	139	85	160	94	48	71	140	75	170	

Рис. 4.158

Вписанный квадрат 12-го порядка является нетрадиционным идеальным магическим квадратом с магической константой 1182, которая кратна величине $d = n^2 + 1 = 197$.

Выполним остальные пункты правил, заполняя свободные ячейки в окаймлении на рис. 4.158. Готовый магический квадрат 14-го порядка представлен на рис. 4.159.

20	195	193	11	191	9	189	7	187	5	185	3	183	1
182	27	122	57	126	149	103	37	112	58	132	155	104	15
22	143	80	159	98	45	66	137	79	169	88	46	72	175
181	130	156	107	32	111	62	129	150	101	31	121	52	16
21	97	40	70	144	83	164	87	50	69	138	77	163	176
174	29	115	61	124	154	108	35	116	51	134	153	102	23
19	141	78	161	91	49	64	142	84	167	92	39	74	178
173	123	158	105	30	113	55	133	148	106	36	119	56	24
18	95	44	63	146	81	162	89	43	73	136	82	168	179
172	34	120	59	128	147	110	33	114	53	127	157	100	25
17	145	76	166	96	47	68	135	86	165	90	41	67	180
171	125	151	109	28	118	60	131	152	99	38	117	54	26
13	93	42	65	139	85	160	94	48	71	140	75	170	184
196	2	4	186	6	188	8	190	10	192	12	194	14	177

Рис. 4.159

Магическая константа этого квадрата равна 1379 и тоже, конечно, кратна величине d .

Предлагаем читателям выполнить следующее окаймление, то есть построить магический квадрат 16-го порядка, взяв за исходный квадрат построенный здесь квадрат 14-го порядка с **рис. 4.159**. Только теперь надо пользоваться другими правилами – для квадратов серии порядков $n = 4k$ (смотрите правила в разделе 4.2.5).

4.3.3 МЕТОД СОТОВЫХ КВАДРАТОВ

Метод сотовых квадратов для построения магических квадратов чётно-чётного порядка был изложен в разделе 4.2.4. Напомним, что метод излагается по [8].

В построении участвуют два вспомогательных квадрата. Оба они составлены из квадратов 2×2 , как из сот, отсюда и название метода (название дано автором).

Начнём демонстрацию метода с построения магического квадрата 6-го порядка. Построение первого вспомогательного квадрата было подробно описано в разделе 4.2.4, поэтому не будем здесь останавливаться на этом. На **рис. 4.160** вы видите магический квадрат 3-го порядка, выбранный в качестве исходного для построения первого вспомогательного квадрата.

2	7	6
9	5	1
4	3	8

Рис. 4.160

На **рис. 4.161** изображён готовый первый вспомогательный квадрат.

5	5	25	25	21	21
5	5	25	25	21	21
33	33	17	17	1	1
33	33	17	17	1	1
13	13	9	9	29	29
13	13	9	9	29	29

Рис. 4.161

Первый вспомогательный квадрат является нетрадиционным магическим квадратом с магической константой 102.

На построении второго вспомогательного квадрата остановимся подробно. Как уже говорилось в разделе 4.2.4, второй вспомогательный квадрат составляется из квадратов 2x2, в каждом из которых записываются числа 0, 1, 2, 3. Будем называть квадраты 2x2 блоками. Таких блоков будет всего 24. Все они показаны на **рис. 4.162**. Обратите внимание: под каждым блоком написан его номер.

<table><tr><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>3</td><td>0</td></tr></table>	1	2	3	0	<table><tr><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>0</td><td>3</td></tr></table>	1	2	0	3	<table><tr><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>2</td><td>3</td></tr></table>	1	0	2	3	<table><tr><td>2</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>3</td></tr></table>	2	0	1	3	<table><tr><td>0</td><td>2</td></tr><tr><td>1</td><td>3</td></tr></table>	0	2	1	3	<table><tr><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>2</td><td>3</td></tr></table>	0	1	2	3	<table><tr><td>2</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>3</td></tr></table>	2	1	0	3	<table><tr><td>1</td><td>3</td></tr><tr><td>0</td><td>2</td></tr></table>	1	3	0	2
1	2																																						
3	0																																						
1	2																																						
0	3																																						
1	0																																						
2	3																																						
2	0																																						
1	3																																						
0	2																																						
1	3																																						
0	1																																						
2	3																																						
2	1																																						
0	3																																						
1	3																																						
0	2																																						
1	2	3	4	5	6	7	8																																
<table><tr><td>1</td><td>3</td></tr><tr><td>2</td><td>0</td></tr></table>	1	3	2	0	<table><tr><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td></tr></table>	2	3	1	0	<table><tr><td>0</td><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td></tr></table>	0	3	1	2	<table><tr><td>0</td><td>3</td></tr><tr><td>2</td><td>1</td></tr></table>	0	3	2	1	<table><tr><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td></tr></table>	2	3	0	1	<table><tr><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>3</td><td>2</td></tr></table>	1	0	3	2	<table><tr><td>2</td><td>1</td></tr><tr><td>3</td><td>0</td></tr></table>	2	1	3	0	<table><tr><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>3</td><td>2</td></tr></table>	0	1	3	2
1	3																																						
2	0																																						
2	3																																						
1	0																																						
0	3																																						
1	2																																						
0	3																																						
2	1																																						
2	3																																						
0	1																																						
1	0																																						
3	2																																						
2	1																																						
3	0																																						
0	1																																						
3	2																																						
9	10	11	12	13	14	15	16																																
<table><tr><td>0</td><td>2</td></tr><tr><td>3</td><td>1</td></tr></table>	0	2	3	1	<table><tr><td>2</td><td>0</td></tr><tr><td>3</td><td>1</td></tr></table>	2	0	3	1	<table><tr><td>3</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td></tr></table>	3	0	1	2	<table><tr><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td></tr></table>	3	2	1	0	<table><tr><td>3</td><td>1</td></tr><tr><td>2</td><td>0</td></tr></table>	3	1	2	0	<table><tr><td>3</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>2</td></tr></table>	3	1	0	2	<table><tr><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td></tr></table>	3	2	0	1	<table><tr><td>3</td><td>0</td></tr><tr><td>2</td><td>1</td></tr></table>	3	0	2	1
0	2																																						
3	1																																						
2	0																																						
3	1																																						
3	0																																						
1	2																																						
3	2																																						
1	0																																						
3	1																																						
2	0																																						
3	1																																						
0	2																																						
3	2																																						
0	1																																						
3	0																																						
2	1																																						
17	18	19	20	21	22	23	24																																

Рис. 4.162

Понятно, что блоки надо так расположить во вспомогательном квадрате, чтобы он был нетрадиционным магическим квадратом. В этом вся сложность. При этом нет никаких ограничений на то, какими блоками заполнять вспомогательный квадрат. Можно выбирать произвольные варианты комбинаций блоков.

В [8] приводится схема расположения блоков во втором вспомогательном квадрате 6-го порядка. Вы видите эту схему на **рис. 4.163**.

1	1	1
1	2	1
2	1	2

Рис. 4.163

В этой схеме указаны номера блоков, которыми надо заполнить второй вспомогательный квадрат. Заменив номера блоков самими блоками, мы получаем следующий вспомогательный квадрат (**рис. 4.164**):

1	2	1	2	1	2
3	0	3	0	3	0
1	2	1	2	1	2
3	0	0	3	3	0
1	2	1	2	1	2
0	3	3	0	0	3

Рис. 4.164

Этот квадрат является нетрадиционным магическим квадратом с магической константой 9.

Теперь надо сложить поэлементно первый и второй вспомогательные квадраты. Готовый сотовый магический квадрат вы видите на **рис. 4.165**.

6	7	26	27	22	23
8	5	28	25	24	21
34	35	18	19	2	3
36	33	17	20	4	1
14	15	10	11	30	31
13	16	12	9	29	32

Рис. 4.165

Очевидно, что второй вспомогательный квадрат на **рис. 4.164** составлен из двух разных блоков. Такой вариант всего один. Если использовать для построения второго вспомогательного квадрата три разных блока, то вариантов будет 15. Все эти варианты приведены в [8]. Рассмотрим ещё один пример, в котором возьмём схему заполнения второго вспомогательного квадрата тремя различными блоками (**рис. 4.166**).

1	1	1
19	2	1
2	1	2

Рис. 4.166

Заменяем номера блоков самим блоками и второй вспомогательный квадрат готов (**рис. 4.177**).

1	2	1	2	1	2
3	0	3	0	3	0
3	0	1	2	1	2
1	2	0	3	3	0
1	2	1	2	1	2
0	3	3	0	0	3

Рис. 4.177

Первый вспомогательный квадрат возьмём тот же самый, что и в предыдущем примере (**рис. 4.161**). Сложим поэлементно первый вспомогательный квадрат и второй вспомогательный квадрат с **рис. 4.177**. Готовый сотовый магический квадрат 6-го порядка вы видите на **рис. 4.178**.

6	7	26	27	22	23
8	5	28	25	24	21
36	33	18	19	2	3
34	35	17	20	4	1
14	15	10	11	30	31
13	16	12	9	29	32

Рис. 4.178

Сравните этот магический квадрат с квадратом, построенным выше (рис. 4.165). Они отличаются всего одним блоком 2x2. Эти два квадрата связаны преобразованием “плюс-минус 2”.

В [8] отмечается, что данным методом можно построить 95232 различных сотовых магических квадратов 6-го порядка с учётом поворотов и отражений. Понятно, что среди этих квадратов будет много квадратов, связанных преобразованием типа “плюс-минус ...”.

Предложим читателям ещё одну схему расстановки блоков во втором вспомогательном квадрате 6-го порядка из [8] (рис. 4.179):

10	17	4
4	10	17
10	17	4

Рис. 4.179

Постройте по этой схеме второй вспомогательный квадрат, а затем сотовый магический квадрат 6-го порядка.

Понятно, что для построения второго вспомогательного квадрата 6-го порядка можно использовать 2 разных блока, 3 разных блока и т. д. до 9 разных блоков. Если использовать 2 разных блока, то схема расстановки будет всего одна (рис. 4.163), если использовать 3 разных блока, то схем будет 15, если использовать 4 разных блока, то схем будет 52. Если же использовать 9 разных блоков, то схем будет 18886. Предлагаем читателям составить схему расстановки блоков для второго вспомогательного квадрата 6-го порядка с использованием 4, 5, ... 9 разных блоков.

Переходим к построению сотового магического квадрата 10-го порядка. Для построения первого вспомогательного квадрата возьмём следующий магический квадрат 5-го порядка, построенный методом террас (рис. 4.180):

3	16	9	22	15
20	8	21	14	2
7	25	13	1	19
24	12	5	18	6
11	4	17	10	23

Рис. 4.180

На рис. 4.181 изображён первый вспомогательный квадрат 10-го порядка, построенный с помощью данного исходного квадрата 5-го порядка.

9	9	61	61	33	33	85	85	57	57
9	9	61	61	33	33	85	85	57	57
77	77	29	29	81	81	53	53	5	5
77	77	29	29	81	81	53	53	5	5
25	25	97	97	49	49	1	1	73	73
25	25	97	97	49	49	1	1	73	73
93	93	45	45	17	17	69	69	21	21
93	93	45	45	17	17	69	69	21	21
41	41	13	13	65	65	37	37	89	89
41	41	13	13	65	65	37	37	89	89

Рис. 4.181

Для построения второго вспомогательного квадрата воспользуемся схемой расстановки блоков из [8]. Эта схема показана на **рис. 4.182**.

1	2	1	15	1
1	15	1	11	1
7	1	2	1	1
1	2	1	2	7
2	1	7	1	2

Рис. 4.182

Как видите, здесь используются пять разных блоков: №№ 1, 2, 7, 11, 15. Заменим номера блоков самими блоками, и второй вспомогательный сотовый квадрат готов (**рис. 4.183**).

1	2	1	2	1	2	2	1	1	2
3	0	0	3	3	0	3	0	3	0
1	2	2	1	1	2	0	3	1	2
3	0	3	0	3	0	1	2	3	0
2	1	1	2	1	2	1	2	1	2
0	3	3	0	0	3	3	0	3	0
1	2	1	2	1	2	1	2	2	1
3	0	0	3	3	0	0	3	0	3
1	2	1	2	2	1	1	2	1	2
0	3	3	0	0	3	3	0	0	3

Рис. 4.183

Второй вспомогательный квадрат является нетрадиционным магическим квадратом с магической константой 15.

Нам осталось построить сотовый магический квадрат 10-го порядка из двух вспомогательных квадратов (с **рис. 4.181** и с **рис. 4.183**) путём поэлементного их сложения. Готовый магический квадрат изображён на **рис. 4.184**.

10	11	62	63	34	35	87	86	58	59
12	9	61	64	36	33	88	85	60	57
78	79	31	30	82	83	53	56	6	7
80	77	32	29	84	81	54	55	8	5
27	26	98	99	50	51	2	3	74	75
25	28	100	97	49	52	4	1	76	73
94	95	46	47	18	19	70	71	23	22
96	93	45	48	20	17	69	72	21	24
42	43	14	15	67	66	38	39	90	91
41	44	16	13	65	68	40	37	89	92

Рис. 4.184

В [8] приводится ещё одна схема расстановки блоков – для квадрата 14-го порядка. Однако автор книги не приводит общий метод построения второго вспомогательного квадрата для любого порядка $n = 4k + 2$.

Идея для составления второго вспомогательного квадрата любого порядка была предложена М. Алексеевым на форуме. (42)

Идея такова: исходный квадрат разбивается на несколько более мелких квадратов и прямоугольников. Продемонстрируем построение сотового квадрата 14-го порядка, который и был показан на форуме (рис. 4.185).

1	2	0	3	3	0	0	3	3	0	1	2	0	3
0	3	1	2	1	2	2	1	1	2	0	3	1	2
3	0	2	1	0	3	3	0	0	3	3	0	2	1
2	1	3	0	2	1	1	2	2	1	2	1	3	0
2	0	1	3	1	2	1	2	1	2	2	0	1	3
1	3	2	0	3	0	3	0	3	0	1	3	2	0
1	3	2	0	1	2	1	2	1	2	1	3	2	0
2	0	1	3	3	0	0	3	3	0	2	0	1	3
2	0	1	3	1	2	1	2	1	2	2	0	1	3
1	3	2	0	0	3	3	0	0	3	1	3	2	0
1	2	0	3	3	0	0	3	3	0	1	2	0	3
0	3	1	2	1	2	2	1	1	2	0	3	1	2
3	0	2	1	0	3	3	0	0	3	3	0	2	1
2	1	3	0	2	1	1	2	2	1	2	1	3	0

Рис. 4.185

В центральном квадрате 6х6 записываем любой из известных вспомогательных квадратов 6-ого порядка. Все четыре угловых квадрата 4х4 заполняются одинаково. Верхний прямоугольник 4х6 заполняется блоками № 12 и № 19 (см. рис. 4.162) в шахматном порядке; нижний прямоугольник 4х6 заполняется точно так же. Левый прямоугольник 4х6 получается из верхнего прямоугольника 4х6 поворотом вокруг центра на 90 градусов по часовой стрелке. Правый прямоугольник 4х6 заполняется точно так же, как левый. Если заменить все блоки их номерами, то вспомогательный квадрат с рис. 4.185 будет выглядеть так (рис. 4.186):

2	11	19	12	19	2	11
24	15	12	19	12	24	15
4	9	1	1	1	4	9
9	4	1	2	1	9	4
4	9	2	1	2	4	9
2	11	19	12	19	2	11
24	15	12	19	12	24	15

Рис. 4.186

Это и есть схема расстановки блоков в квадрате 14-го порядка, она совсем другая, нежели схема расстановки, приведённая в [8]. Предлагаем читателям построить первый вспомогательный квадрат 14-го порядка, а затем с помощью двух вспомогательных квадратов построить сотовый магический квадрат 14-го порядка.

Теперь идея ясна, можно без труда составить второй вспомогательный сотовый квадрат любого чётно-нечётного порядка. На рис. 4.187 вы видите второй вспомогательный квадрат 10-го порядка, построенный данным методом.

2	1	0	3	3	0	0	3	0	3
0	3	1	2	2	1	1	2	2	1
3	0	1	2	1	2	1	2	2	1
2	1	3	0	3	0	3	0	3	0
0	3	1	2	1	2	1	2	1	2
1	2	3	0	0	3	3	0	0	3
3	0	1	2	1	2	1	2	2	1
2	1	0	3	3	0	0	3	3	0
2	1	3	0	0	3	3	0	0	3
0	3	2	1	1	2	2	1	2	1

Рис. 4.187

Заменив в этом квадрате все блоки их номерами, получим схему расстановки блоков (рис. 4.188):

7	11	24	11	12
24	1	1	1	15
11	1	2	1	2
24	2	1	2	15
7	24	11	24	12

Рис. 4.188

Построим второй вспомогательный квадрат 18-го порядка. Теперь в центр квадрата надо поместить вспомогательный квадрат 10x10, который у нас уже есть (рис. 4.187).

Угловые квадраты 4x4 и прямоугольники 4x10 заполняются описанным выше способом. На **рис. 4.189** показано построение этого квадрата.

1	2	0	3	3	0	0	3	3	0	0	3	3	0	1	2	0	3
0	3	1	2	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	0	3	1	2
3	0	2	1	0	3	3	0	0	3	3	0	0	3	3	0	2	1
2	1	3	0	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	2	1	3	0
2	0	1	3	2	1	0	3	3	0	0	3	0	3	2	0	1	3
1	3	2	0	0	3	1	2	2	1	1	2	2	1	1	3	2	0
1	3	2	0	3	0	1	2	1	2	1	2	2	1	1	3	2	0
2	0	1	3	2	1	3	0	3	0	3	0	3	0	2	0	1	3
2	0	1	3	0	3	1	2	1	2	1	2	1	2	2	0	1	3
1	3	2	0	1	2	3	0	0	3	3	0	0	3	1	3	2	0
1	3	2	0	3	0	1	2	1	2	1	2	2	1	1	3	2	0
2	0	1	3	2	1	0	3	3	0	0	3	3	0	2	0	1	3
2	0	1	3	2	1	3	0	0	3	3	0	0	3	2	0	1	3
1	3	2	0	0	3	2	1	1	2	2	1	2	1	1	3	2	0
1	2	0	3	3	0	0	3	3	0	0	3	3	0	1	2	0	3
0	3	1	2	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	0	3	1	2
3	0	2	1	0	3	3	0	0	3	3	0	0	3	3	0	2	1
2	1	3	0	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	2	1	3	0

Рис. 4.189

Предлагаем читателям построить сотовый магический квадрат 18-го порядка с использованием второго вспомогательного квадрата с **рис. 4.189** (первый вспомогательный квадрат постройте самостоятельно).

В общем случае для порядка $n = 4k+2$ ($k>2$) при построении второго вспомогательного квадрата разбиение надо выполнять следующим образом: в центре – квадрат размерами $(n-8) \times (n-8)$, по углам – квадраты 4×4 , прямоугольники размерами $4 \times (n-8)$ получатся сами.

Например, для квадрата 26-го порядка имеем следующее разбиение: в центре матрицы 26×26 будет находиться квадрат размерами 18×18 , по углам – квадраты размерами 4×4 ; прямоугольники размерами 4×18 получаются автоматически.

Центральный квадрат заполняем, используя построенный ранее вспомогательный квадрат порядка $(n-8)$. Так, для построения вспомогательного квадрата 14-го порядка используем вспомогательный квадрат 6-го порядка, для построения вспомогательного квадрата 18-го порядка используем сотовый квадрат 10-го порядка и т. д.

Способ заполнения квадратов 4×4 и прямоугольников $4 \times (n-8)$ подробно описан.

Интересный вариант метода сотовых квадратов дан в (43). Этот вариант называется *методом LUX*. Его автор J. H. Conway.

На **рис. 4.190** вы видите копию иллюстрации с указанного веб-сайта, которая очень хорошо объясняет суть метода LUX.

<div style="display: flex; flex-direction: column; align-items: center;"> <div style="display: flex; justify-content: space-around; width: 100%;"> 41</div> <div style="text-align: center;"> </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; width: 100%;"> 23</div> </div>	68	65	96	93	4	1	32	29	60	57
	L	L	L	L	L	L	L	L	L	L
	66	67	94	95	2	3	30	31	58	59
	L	L	L	L	L	L	L	L	L	L
<div style="display: flex; flex-direction: column; align-items: center;"> <div style="display: flex; justify-content: space-around; width: 100%;"> 14</div> <div style="text-align: center;"> </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; width: 100%;"> 23</div> </div>	92	89	20	17	28	25	56	53	64	61
	L	L	L	L	L	L	L	L	L	L
	90	91	18	19	26	27	54	55	62	63
	L	L	L	L	L	L	L	L	L	L
<div style="display: flex; flex-direction: column; align-items: center;"> <div style="display: flex; justify-content: space-around; width: 100%;"> 14</div> <div style="text-align: center;"> </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; width: 100%;"> 32</div> </div>	16	13	24	21	49	52	80	77	88	85
	L	L	L	L	L	L	L	L	L	L
	14	15	22	23	50	51	78	79	86	87
	L	L	L	L	L	L	L	L	L	L
	37	40	45	48	76	73	81	84	9	12
	U	U	U	U	U	U	U	U	U	U
	38	39	46	47	74	75	82	83	10	11
	U	U	U	U	U	U	U	U	U	U
	41	44	69	72	97	100	5	8	33	36
	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	43	42	71	70	99	98	7	6	35	34
	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X

Рис. 4.190

Прежде чем разъяснить эту иллюстрацию, раскроем читателям

СМЫСЛ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ КВАДРАТОВ

Итак, начнём всё сначала – с построения методом сотовых квадратов сотового магического квадрата 6-го порядка. Для этого, как вы уже знаете, строятся два вспомогательных квадрата. Первый строится на основе магического квадрата третьего порядка. В качестве этого квадрата можно взять любой из восьми вариантов, возьмём, например, этот (рис. 4.191):

8	3	4
1	5	9
6	7	2

Рис. 4.191

Вот каков смысл этого исходного квадрата – в этом квадрате указаны номера блоков, состоящих из четырёх последовательных чисел, которые будут стоять в соответствующих квадратах 2x2 в строящемся сотовом магическом квадрате 6-го порядка. Объясним подробнее. Все числа от 1 до 36 делятся на блоки по 4 последовательных числа в каждом:

- блок № 1 – 1, 2, 3, 4
- блок № 2 – 5, 6, 7, 8
- блок № 3 – 9, 10, 11, 12
- ...
- блок № 8 – 29, 30, 31, 32
- блок № 9 – 33, 34, 35, 36.

В создаваемом сотовом магическом квадрате 6-го порядка в левом верхнем квадрате 2х2 будет стоять блок № 8, в правом верхнем квадрате 2х2 – блок № 4, в центральном квадрате 2х2 – блок № 5 и так далее (см. на **рис. 4.191**). Вот таков смысл исходного квадрата третьего порядка. И ничего не надо с ним делать, никаких преобразований!

Теперь раскрою смысл второго вспомогательного квадрата. Как вы знаете, второй вспомогательный квадрат составляется из квадратов 2х2, заполненных числами 0, 1, 2, 3 так, чтобы он был нетрадиционным магическим квадратом. Например, вот один из вариантов второго вспомогательного квадрата (**рис. 4.192**):

3	0	2	0	3	1
2	1	1	3	0	2
1	2	0	2	1	3
0	3	1	3	0	2
1	3	2	0	2	1
2	0	3	1	3	0

Рис. 4.192

Преобразуем этот квадрат, увеличив все его элементы на единицу (**рис. 4.193**):

4	1	3	1	4	2
3	2	2	4	1	3
2	3	1	3	2	4
1	4	2	4	1	3
2	4	3	1	3	2
3	1	4	2	4	1

Рис. 4.193

А теперь посмотрим на каждый блок 2х2, в каждом таком блоке записаны числа 1, 2, 3, 4. Это порядковые номера чисел в каждом блоке. Например, в правом верхнем блоке 2х2 у нас будет стоять блок № 4 (см. на **рис. 4.191**), то есть блок из чисел: 13, 14, 15, 16, а вот в каком порядке эти числа расположить в блоке, показывают числа 1, 2, 3, 4, записанные в соответствующем блоке во втором вспомогательном квадрате; то есть числа надо расположить так: число 13 поместить в ячейку, в которой записано число 1, число 14 поместить в ячейку с числом 2, число 15 – в ячейку с числом 3, число 16 – в ячейку с числом 4. И так в каждом блоке.

На **рис. 4.194** вы видите готовый сотовый магический квадрат 6-го порядка.

32	29	11	9	16	14
31	30	10	12	13	15
2	3	17	19	34	36
1	4	18	20	33	35
22	24	27	25	7	6
23	21	28	26	8	5

Рис. 4.194

На **рис. 4.190** слева показаны в графической форме последовательности заполнения блоков, в этом примере всего три варианта заполнения, по форме графические рисунки напоминают буквы **L**, **U**, **X**, отсюда и название метода. Однако формы графических рисунков, соответствующих порядку заполнения блоков, могут быть и другими. Понятно, что они полностью определяются вторым вспомогательным квадратом. Покажем графические схемы заполнения для приведённого выше примера сотового квадрата 6-го порядка (**рис. 4.195**):

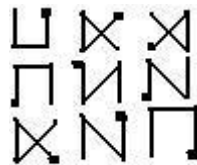


Рис. 4.195

На каждой схеме начало (число 1) помечено прямоугольником, а далее надо двигаться по линиям схемы, ставя последовательно числа – 1, 2, 3, 4.

А теперь построим сотовый магический квадрат 10-го порядка в точном соответствии со схемой, изображённой на **рис. 4.190**, то есть точно методом LUX. В качестве исходного возьмём магический квадрат 5-го порядка, изображённый на **рис. 4.196**.

5	4	24	15	17
25	21	2	11	6
3	23	7	20	12
18	16	13	10	8
14	1	19	9	22

Рис. 4.196

Точно так же разобьём все числа от 1 до 100 на блоки по 4 числа:

блок № 1 – 1, 2, 3, 4

блок № 2 – 5, 6, 7, 8

блок № 3 – 9, 10, 11, 12

...

блок № 24 – 93, 94, 95, 96

блок № 25 – 97, 98, 99, 100

Расположение блоков в матрице для квадрата 10-го порядка задаёт исходный квадрат 5-го порядка, в левом верхнем квадрате 2x2 будет стоять блок № 5, в правом верхнем квадрате 2x2 – блок № 17, в центральном квадрате 2x2 – блок № 7 и так далее.

Схема заполнения каждого блока 2x2 дана на **рис. 4.190**. Заполняем матрицу по этой схеме и получаем такой сотовый магический квадрат 10-го порядка (**рис. 4.197**):

20	17	16	13	96	93	60	57	68	65
18	19	14	15	94	95	58	59	66	67
100	97	84	81	8	5	44	41	24	21
98	99	82	83	6	7	42	43	22	23
12	9	92	89	25	28	80	77	48	45
10	11	90	91	26	27	78	79	46	47
69	72	61	64	52	49	37	40	29	32
70	71	62	63	50	51	38	39	30	31
53	56	1	4	73	76	33	36	85	88
55	54	3	2	75	74	35	34	87	86

Рис. 4.197

Предлагаем читателям восстановить по сотовому магическому квадрату 10-го порядка на **рис. 4.190** первый и второй вспомогательные квадраты, которые были использованы для его построения.

В (44) приведён обобщённый метод сотовых квадратов, а также ещё один вариант данного метода.

4.3.4 МЕТОД ЛАТИНСКИХ КВАДРАТОВ

Аналогично методу Делаира для квадратов нечётного порядка магические квадраты порядка $n = 4k + 2$ ($k > 1$) можно строить методом латинских квадратов. Доказано, что существуют пары ортогональных диагональных латинских квадратов любого порядка, кроме 2, 3, 6. [20]

Однако построение таких пар ортогональных квадратов очень сложная задача. В некоторых англоязычных статьях найдены отдельные группы попарно ортогональных латинских квадратов, например, порядков 10, 22. Необходимо исследовать данный вопрос более детально, изучив все имеющиеся результаты в этой области. Автору пока не удалось найти общий алгоритм построения пар ортогональных диагональных латинских квадратов для любого порядка рассматриваемой серии.

Здесь будут показаны два примера – для порядков 10 и 22.

Пара ортогональных диагональных латинских квадратов 10-го порядка найдена в [20]. В этой статье приведены три пары ортогональных диагональных латинских квадратов. Для построения магического квадрата достаточно одной пары. На **рис. 4.198 – 4.199** приведена пара ортогональных диагональных латинских квадратов 10-го порядка.

0	9	4	6	1	7	5	8	2	3
7	1	9	4	5	3	8	0	6	2
4	6	2	8	3	1	7	5	9	0
6	0	7	3	2	8	4	9	1	5
5	3	6	7	4	2	9	1	0	8
8	4	1	2	9	5	0	6	3	7
2	5	3	0	8	9	6	4	7	1
3	2	8	9	0	4	1	7	5	6
9	7	5	1	6	0	3	2	8	4
1	8	0	5	7	6	2	3	4	9

Рис. 4.198

0	8	5	1	7	3	4	6	9	2
5	1	7	2	9	8	0	3	4	6
1	7	2	9	5	6	8	0	3	4
9	6	4	3	0	2	7	1	5	8
3	0	8	6	4	1	5	9	2	7
4	3	0	8	6	5	9	2	7	1
7	2	9	5	1	4	6	8	0	3
6	4	3	0	8	9	2	7	1	5
2	9	6	4	3	7	1	5	8	0
8	5	1	7	2	0	3	4	6	9

Рис. 4.199

Оба латинских квадрата являются нетрадиционными магическими квадратами с магической константой 45.

Для порядка 10 вообще всё очень просто в методе латинских квадратов: греко-латинский квадрат, составленный из двух ортогональных диагональных латинских квадратов, уже является готовым магическим квадратом, только записанным в нетрадиционной форме, то есть он заполнен числами от 0 до 99. Чтобы привести этот

квадрат к традиционной форме записи, надо все элементы увеличить на 1. На **рис. 4.200** вы видите магический квадрат 10-го порядка, построенный из данной пары ортогональных диагональных латинских квадратов.

1	99	46	62	18	74	55	87	30	33
76	12	98	43	60	39	81	4	65	27
42	68	23	90	36	17	79	51	94	5
70	7	75	34	21	83	48	92	16	59
54	31	69	77	45	22	96	20	3	88
85	44	11	29	97	56	10	63	38	72
28	53	40	6	82	95	67	49	71	14
37	25	84	91	9	50	13	78	52	66
93	80	57	15	64	8	32	26	89	41
19	86	2	58	73	61	24	35	47	100

Рис. 4.200

Как помнят читатели, первый и второй латинские квадраты равноправны в формуле для построения магического квадрата. Поменяв местами первый и второй квадраты, мы получим такой магический квадрат (**рис. 4.201**):

1	90	55	17	72	38	46	69	93	24
58	12	80	25	96	84	9	31	47	63
15	77	23	99	54	62	88	6	40	41
97	61	48	34	3	29	75	20	52	86
36	4	87	68	45	13	60	92	21	79
49	35	2	83	70	56	91	27	74	18
73	26	94	51	19	50	67	85	8	32
64	43	39	10	81	95	22	78	16	57
30	98	66	42	37	71	14	53	89	5
82	59	11	76	28	7	33	44	65	100

Рис. 4.201

Интересно отметить, что приведённые ортогональные диагональные латинские квадраты являются нормализованными по одной и той же главной диагонали, то есть в этой диагонали находится тождественная перестановка чисел 0, 1, 2, ... 9. Выполнив любую трансформацию этой перестановки, мы получим новую пару ортогональных диагональных латинских квадратов и с её помощью построим новые магические квадраты. Например, заменим тождественную перестановку такой перестановкой: 0, 9, 8, 7, 6, 1, 2, 3, 4, 5. В результате получим такую пару ортогональных диагональных латинских квадратов (**рис. 4.202 – 4.203**):

0	5	6	2	9	3	1	4	8	7
3	9	5	6	1	7	4	0	2	8
6	2	8	4	7	9	3	1	5	0
2	0	3	7	8	4	6	5	9	1
1	7	2	3	6	8	5	9	0	4
4	6	9	8	5	1	0	2	7	3
8	1	7	0	4	5	2	6	3	9
7	8	4	5	0	6	9	3	1	2
5	3	1	9	2	0	7	8	4	6
9	4	0	1	3	2	8	7	6	5

Рис. 4.202

0	4	1	9	3	7	6	2	5	8
1	9	3	8	5	4	0	7	6	2
9	3	8	5	1	2	4	0	7	6
5	2	6	7	0	8	3	9	1	4
7	0	4	2	6	9	1	5	8	3
6	7	0	4	2	1	5	8	3	9
3	8	5	1	9	6	2	4	0	7
2	6	7	0	4	5	8	3	9	1
8	5	2	6	7	3	9	1	4	0
4	1	9	3	8	0	7	6	2	5

Рис. 4.203

На **рис. 4.204** изображён магический квадрат, построенный из данной пары ортогональных диагональных латинских квадратов.

1	55	62	30	94	38	17	43	86	79
32	100	54	69	16	75	41	8	27	83
70	24	89	46	72	93	35	11	58	7
26	3	37	78	81	49	64	60	92	15
18	71	25	33	67	90	52	96	9	44
47	68	91	85	53	12	6	29	74	40
84	19	76	2	50	57	23	65	31	98
73	87	48	51	5	66	99	34	20	22
59	36	13	97	28	4	80	82	45	61
95	42	10	14	39	21	88	77	63	56

Рис. 4.204

Очевидно, что это новый магический квадрат не эквивалентный квадратам, построенным выше. Предлагаем читателям построить из данной пары ортогональных диагональных латинских квадратов второй магический квадрат, поменяв латинские квадраты местами.

Таким образом, из пары ортогональных диагональных латинских квадратов, изображённой на **рис. 4.198 – 4.199**, можно получить 10! (10 факториал) других пар ортогональных диагональных латинских квадратов и из каждой такой пары построить два магических квадрата 10-го порядка.

Переходим к построению магического квадрата 22-го порядка методом латинских квадратов. Этот пример интересен тем, что ортогональные латинские квадраты не диагональные. Диагональных ортогональных латинских квадратов данного порядка найти не удалось. Вот пара ортогональных латинских квадратов 22-го порядка из [20a].

Первый латинский квадрат

0	17	16	15	11	4	9	5	13	3	20	21	14	19	10	12	8	18	6	2	7	1
8	1	18	17	16	12	5	10	6	14	4	0	21	15	20	11	13	9	19	7	3	2
4	9	2	19	18	17	13	6	11	7	15	5	1	21	16	0	12	14	10	20	8	3
9	5	10	3	20	19	18	14	7	12	8	16	6	2	21	17	1	13	15	11	0	4
1	10	6	11	4	0	20	19	15	8	13	9	17	7	3	21	18	2	14	16	12	5
13	2	11	7	12	5	1	0	20	16	9	14	10	18	8	4	21	19	3	15	17	6
18	14	3	12	8	13	6	2	1	0	17	10	15	11	19	9	5	21	20	4	16	7
17	19	15	4	13	9	14	7	3	2	1	18	11	16	12	20	10	6	21	0	5	8
6	18	20	16	5	14	10	15	8	4	3	2	19	12	17	13	0	11	7	21	1	9
2	7	19	0	17	6	15	11	16	9	5	4	3	20	13	18	14	1	12	8	21	10
21	3	8	20	1	18	7	16	12	17	10	6	5	4	0	14	19	15	2	13	9	11
10	21	4	9	0	2	19	8	17	13	18	11	7	6	5	1	15	20	16	3	14	12
15	11	21	5	10	1	3	20	9	18	14	19	12	8	7	6	2	16	0	17	4	13
5	16	12	21	6	11	2	4	0	10	19	15	20	13	9	8	7	3	17	1	18	14
19	6	17	13	21	7	12	3	5	1	11	20	16	0	14	10	9	8	4	18	2	15
3	20	7	18	14	21	8	13	4	6	2	12	0	17	1	15	11	10	9	5	19	16
20	4	0	8	19	15	21	9	14	5	7	3	13	1	18	2	16	12	11	10	6	17
7	0	5	1	9	20	16	21	10	15	6	8	4	14	2	19	3	17	13	12	11	18
12	8	1	6	2	10	0	17	21	11	16	7	9	5	15	3	20	4	18	14	13	19
14	13	9	2	7	3	11	1	18	21	12	17	8	10	6	16	4	0	5	19	15	20
16	15	14	10	3	8	4	12	2	19	21	13	18	9	11	7	17	5	1	6	20	0
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	21

Второй латинский квадрат

0	8	21	18	17	13	16	19	10	2	9	6	15	11	4	20	12	14	1	7	5	3
6	1	9	21	19	18	14	17	20	11	3	10	7	16	12	5	0	13	15	2	8	4
9	7	2	10	21	20	19	15	18	0	12	4	11	8	17	13	6	1	14	16	3	5
4	10	8	3	11	21	0	20	16	19	1	13	5	12	9	18	14	7	2	15	17	6
18	5	11	9	4	12	21	1	0	17	20	2	14	6	13	10	19	15	8	3	16	7
17	19	6	12	10	5	13	21	2	1	18	0	3	15	7	14	11	20	16	9	4	8
5	18	20	7	13	11	6	14	21	3	2	19	1	4	16	8	15	12	0	17	10	9
11	6	19	0	8	14	12	7	15	21	4	3	20	2	5	17	9	16	13	1	18	10
19	12	7	20	1	9	15	13	8	16	21	5	4	0	3	6	18	10	17	14	2	11
3	20	13	8	0	2	10	16	14	9	17	21	6	5	1	4	7	19	11	18	15	12
16	4	0	14	9	1	3	11	17	15	10	18	21	7	6	2	5	8	20	12	19	13
20	17	5	1	15	10	2	4	12	18	16	11	19	21	8	7	3	6	9	0	13	14
14	0	18	6	2	16	11	3	5	13	19	17	12	20	21	9	8	4	7	10	1	15
2	15	1	19	7	3	17	12	4	6	14	20	18	13	0	21	10	9	5	8	11	16
12	3	16	2	20	8	4	18	13	5	7	15	0	19	14	1	21	11	10	6	9	17
10	13	4	17	3	0	9	5	19	14	6	8	16	1	20	15	2	21	12	11	7	18
8	11	14	5	18	4	1	10	6	20	15	7	9	17	2	0	16	3	21	13	12	19
13	9	12	15	6	19	5	2	11	7	0	16	8	10	18	3	1	17	4	21	14	20
15	14	10	13	16	7	20	6	3	12	8	1	17	9	11	19	4	2	18	5	21	0
21	16	15	11	14	17	8	0	7	4	13	9	2	18	10	12	20	5	3	19	6	1
7	21	17	16	12	15	18	9	1	8	5	14	10	3	19	11	13	0	6	4	20	2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	0	21

В обоих квадратах повторяющиеся числа есть только в одной диагонали, а в другой диагонали все числа разные. Из данной пары ортогональных латинских квадратов магический квадрат ещё нельзя строить, потому что эти латинские квадраты не являются нетрадиционными магическими квадратами, сумма чисел в неправильной диагонали каждого квадрата не равна магической константе $S = 231$. Если построить из данной пары ортогональных латинских квадратов магический квадрат, он получится полумагический, то есть в нём сумма чисел в соответствующей главной диагонали не будет равна магической константе квадрата.

Для того чтобы построить магический квадрат 22-го порядка, преобразуем латинские квадраты аналогично тому, как показано выше преобразование латинских квадратов 10-го порядка: с помощью трансформации тождественной перестановки чисел 0, 1, 2, ... 21. Для первого латинского квадрата применена такая трансформация тождественной перестановки:

0, 19, 7, 1, 4, 5, 8, 3, 2, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 6, 20, 21

В результате такого преобразования получен следующий латинский квадрат:

0	17	16	15	11	4	9	5	13	1	20	21	14	6	10	12	2	18	8	7	3	19
2	19	18	17	16	12	5	10	8	14	4	0	21	15	20	11	13	9	6	3	1	7
4	9	7	6	18	17	13	8	11	3	15	5	19	21	16	0	12	14	10	20	2	1
9	5	10	1	20	6	18	14	3	12	2	16	8	7	21	17	19	13	15	11	0	4
19	10	8	11	4	0	20	6	15	2	13	9	17	3	1	21	18	7	14	16	12	5
13	7	11	3	12	5	19	0	20	16	9	14	10	18	2	4	21	6	1	15	17	8
18	14	1	12	2	13	8	7	19	0	17	10	15	11	6	9	5	21	20	4	16	3
17	6	15	4	13	9	14	3	1	7	19	18	11	16	12	20	10	8	21	0	5	2
8	18	20	16	5	14	10	15	2	4	1	7	6	12	17	13	0	11	3	21	19	9
7	3	6	0	17	8	15	11	16	9	5	4	1	20	13	18	14	19	12	2	21	10
21	1	2	20	19	18	3	16	12	17	10	8	5	4	0	14	6	15	7	13	9	11
10	21	4	9	0	7	6	2	17	13	18	11	3	8	5	19	15	20	16	1	14	12
15	11	21	5	10	19	1	20	9	18	14	6	12	2	3	8	7	16	0	17	4	13
5	16	12	21	8	11	7	4	0	10	6	15	20	13	9	2	3	1	17	19	18	14
6	8	17	13	21	3	12	1	5	19	11	20	16	0	14	10	9	2	4	18	7	15
1	20	3	18	14	21	2	13	4	8	7	12	0	17	19	15	11	10	9	5	6	16
20	4	0	2	6	15	21	9	14	5	3	1	13	19	18	7	16	12	11	10	8	17
3	0	5	19	9	20	16	21	10	15	8	2	4	14	7	6	1	17	13	12	11	18
12	2	19	8	7	10	0	17	21	11	16	3	9	5	15	1	20	4	18	14	13	6
14	13	9	7	3	1	11	19	18	21	12	17	2	10	8	16	4	0	5	6	15	20
16	15	14	10	1	2	4	12	7	6	21	13	18	9	11	3	17	5	19	8	20	0
11	12	13	14	15	16	17	18	6	20	0	19	7	1	4	5	8	3	2	9	10	21

Для второго латинского квадрата применена следующая трансформация тождественной перестановки:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 21, 20, 19, 18, 17, 16, 15, 14, 13, 12, 11, 10, 9, 8, 7, 6

В результате данного преобразования получен такой латинский квадрат:

0	19	6	9	10	14	11	8	17	2	18	21	12	16	4	7	15	13	1	20	5	3
21	1	18	6	8	9	13	10	7	16	3	17	20	11	15	5	0	14	12	2	19	4
18	20	2	17	6	7	8	12	9	0	15	4	16	19	10	14	21	1	13	11	3	5
4	17	19	3	16	6	0	7	11	8	1	14	5	15	18	9	13	20	2	12	10	21
9	5	16	18	4	15	6	1	0	10	7	2	13	21	14	17	8	12	19	3	11	20
10	8	21	15	17	5	14	6	2	1	9	0	3	12	20	13	16	7	11	18	4	19
5	9	7	20	14	16	21	13	6	3	2	8	1	4	11	19	12	15	0	10	17	18
16	21	8	0	19	13	15	20	12	6	4	3	7	2	5	10	18	11	14	1	9	17
8	15	20	7	1	18	12	14	19	11	6	5	4	0	3	21	9	17	10	13	2	16
3	7	14	19	0	2	17	11	13	18	10	6	21	5	1	4	20	8	16	9	12	15
11	4	0	13	18	1	3	16	10	12	17	9	6	20	21	2	5	19	7	15	8	14
7	10	5	1	12	17	2	4	15	9	11	16	8	6	19	20	3	21	18	0	14	13
13	0	9	21	2	11	16	3	5	14	8	10	15	7	6	18	19	4	20	17	1	12
2	12	1	8	20	3	10	15	4	21	13	7	9	14	0	6	17	18	5	19	16	11
15	3	11	2	7	19	4	9	14	5	20	12	0	8	13	1	6	16	17	21	18	10
17	14	4	10	3	0	18	5	8	13	21	19	11	1	7	12	2	6	15	16	20	9
19	16	13	5	9	4	1	17	21	7	12	20	18	10	2	0	11	3	6	14	15	8
14	18	15	12	21	8	5	2	16	20	0	11	19	17	9	3	1	10	4	6	13	7
12	13	17	14	11	20	7	21	3	15	19	1	10	18	16	8	4	2	9	5	6	0
6	11	12	16	13	10	19	0	20	4	14	18	2	9	17	15	7	5	3	8	21	1
20	6	10	11	15	12	9	18	1	19	5	13	17	3	8	16	14	0	21	4	7	2
1	2	3	4	5	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	0	6

Преобразованные латинские квадраты являются нетрадиционными магическими квадратами с магической константой 231. Эти квадраты ортогональные. С помощью этой пары ортогональных латинских квадратов мы можем построить магический квадрат 22-го порядка. Этот магический квадрат вы видите ниже. Квадрат построен по второй формуле, то есть латинские квадраты переставлены (первый стал вторым, а второй – первым). Предлагаем читателям построить магический квадрат из той же пары ортогональных латинских квадратов, но по первой формуле.

1	436	149	214	232	313	252	182	388	46	417	484	279	359	99	167	333	305	31	448	114	86
465	42	415	150	193	211	292	231	163	367	71	375	462	258	351	122	14	318	271	48	420	96
401	450	52	381	151	172	190	273	210	4	346	94	372	440	237	309	475	37	297	263	69	112
98	380	429	68	373	139	19	169	246	189	25	325	119	338	418	216	306	454	60	276	221	467
218	121	361	408	93	331	153	29	16	223	168	54	304	466	310	396	195	272	433	83	255	446
234	184	474	334	387	116	328	133	65	39	208	15	77	283	443	291	374	161	244	412	106	427
129	213	156	453	311	366	471	294	152	67	62	187	38	100	249	428	270	352	21	225	391	400
370	469	192	5	432	296	345	444	266	140	108	85	166	61	123	241	407	251	330	23	204	377
185	349	461	171	28	411	275	324	421	247	134	118	95	13	84	476	199	386	224	308	64	362
74	158	315	419	18	53	390	254	303	406	226	137	464	131	36	107	455	196	365	201	286	341
264	90	3	307	416	41	70	369	233	282	385	207	138	445	463	59	117	434	162	344	186	320
165	242	115	32	265	382	51	91	348	212	261	364	180	141	424	460	82	483	413	2	323	299
302	12	220	468	55	262	354	87	120	327	191	227	343	157	136	405	426	105	441	392	27	278
50	281	35	198	449	78	228	335	89	473	293	170	219	322	10	135	378	398	128	438	371	257
337	75	260	58	176	422	101	200	314	130	452	285	17	177	301	33	142	355	379	481	404	236
376	329	92	239	81	22	399	124	181	295	470	431	243	40	174	280	56	143	340	358	447	215
439	357	287	113	205	104	44	384	477	160	268	442	410	240	63	8	259	79	144	319	339	194
312	397	336	284	472	197	127	66	363	456	9	245	423	389	206	73	24	238	102	145	298	173
277	289	394	317	250	451	155	480	88	342	435	26	230	402	368	178	109	49	217	125	146	7
147	256	274	360	290	222	430	20	459	110	321	414	47	209	383	347	159	111	72	183	478	43
457	148	235	253	332	267	203	409	30	425	132	300	393	76	188	356	326	6	482	97	175	45
34	57	80	103	126	479	458	437	403	395	353	350	316	288	269	248	229	202	179	164	11	154

4.3.5 МЕТОД ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ОБРАТИМЫХ КВАДРАТОВ

В [206] приведён интересный метод построения магических квадратов чётно-нечётного порядка. Этот метод основан на использовании обратимых квадратов. Пример в книге приведён только один – построение магического квадрата 6-го порядка из самого простого обратимого квадрата. Покажем этот пример. Построение выполняется в два этапа.

Первый этап: в самом простом обратимом квадрате числа, расположенные на главных диагоналях, оставим без изменения, а все остальные числа заменим комплементарными (то есть дающими в сумме $n^2 + 1 = 37$) (**рис. 4.205**). Полученный в результате квадрат, конечно, не является магическим. Это промежуточный результат.

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
14	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36

→

1	35	34	33	32	6
30	8	28	27	11	25
24	23	15	16	20	19
18	17	21	22	14	13
12	26	10	9	29	7
31	5	4	3	2	36

Рис. 4.205

Второй этап: преобразовывается квадрат, полученный на первом этапе (этот квадрат изображён на **рис. 4.205** справа). Как происходит преобразование квадрата, показано на **рис. 4.206**. Числа в ячейках одного цвета меняются местами.

1	35	34	33	32	6
30	8	28	27	11	25
24	23	15	16	20	19
18	17	21	22	14	13
12	26	10	9	29	7
31	5	4	3	2	36

→

1	35	34	3	32	6
30	8	28	27	11	7
24	23	15	16	14	19
13	17	21	22	20	18
12	26	9	10	29	25
31	2	4	33	5	36

Рис. 4.206

Для того чтобы лучше видеть, как происходит перестановка чисел, надо разделить квадрат на четыре угловых квадрата 3х3. В левом верхнем квадрате 3х3 ничего не меняется. Обмен числами происходит между правыми квадратами и между нижними квадратами.

А теперь возьмём в качестве исходного другой обратимый квадрат 6-го порядка и сделаем те же операции. На **рис. 4.207** показан первый этап, а на **рис. 4.208** – второй этап.

Первый этап

1	2	3	7	8	9		1	35	34	30	29	9
4	5	6	10	11	12		33	5	31	27	11	25
13	14	15	19	20	21	→	24	23	15	19	17	16
16	17	18	22	23	24		21	20	18	22	14	13
25	26	27	31	32	33		12	26	10	6	32	4
28	29	30	34	35	36		28	8	7	3	2	36

Рис. 4.207

Второй этап

1	35	34	30	29	9		1	35	34	3	29	9
33	5	31	27	11	25	→	33	5	31	27	11	4
24	23	15	19	17	16		24	23	15	19	14	16
21	20	18	22	14	13		13	20	18	22	17	21
12	26	10	6	32	4		12	26	6	10	32	25
28	8	7	3	2	36		28	2	7	30	8	36

Рис. 4.208

Мы получили новый магический квадрат.

Теперь построим данным методом магический квадрат 10-го порядка. В качестве исходного квадрата возьмём самый простой обратимый квадрат. Первый этап показан на **рис. 4.209**. Здесь некоторые изменения по сравнению с квадратом 6-го порядка: на месте остаются числа не только на главных диагоналях квадрата. Ячейки, в которых числа остаются на месте, на рисунке выделены оранжевым цветом. В остальных ячейках числа точно так же заменяются на комплементарные (то есть дающие в сумме $n^2 + 1 = 101$). Полученный в результате квадрат, конечно, не магический. Это промежуточный результат.

Первый этап

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		1	2	98	97	96	95	94	93	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20		90	12	13	87	86	85	84	18	19	81
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30		80	79	23	24	76	75	27	28	72	71
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40		70	69	68	34	35	36	37	63	62	61
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	→	41	59	58	57	45	46	54	53	52	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60		51	49	48	47	55	56	44	43	42	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70		40	39	38	64	65	66	67	33	32	31
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80		30	29	73	74	26	25	77	78	22	21
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90		20	82	83	17	16	15	14	88	89	11
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100		91	92	8	7	6	5	4	3	99	100

Рис. 4.209

На втором этапе преобразуем квадрат, полученный на первом этапе (на **рис. 4.209** этот квадрата справа). Точно так же разделим квадрат на четыре угловых квадрата 5x5. В левом верхнем квадрате ничего не изменяется. Обмен числами происходит между

правыми квадратами и между нижними квадратами. Ячейки, в которых переставляются числа, закрашены в одинаковый цвет (рис. 4.210). Очевидно, что ячейки с обмениваемыми числами в правых квадратах 5x5 симметричны относительно горизонтальной оси симметрии квадрата 10x10, а в нижних квадратах 5x5 числа переставляются в симметричных относительно вертикальной оси симметрии ячейках.

Второй этап

1	2	98	97	96	95	94	93	9	10
90	12	13	87	86	85	84	18	19	81
80	79	23	24	76	75	27	28	72	71
70	69	68	34	35	36	37	63	62	61
41	59	58	57	45	46	54	53	52	50
51	49	48	47	55	56	44	43	42	60
40	39	38	64	65	66	67	33	32	31
30	29	73	74	26	25	77	78	22	21
20	82	83	17	16	15	14	88	89	11
91	92	8	7	6	5	4	3	99	100

→

1	2	98	97	96	95	4	93	9	10
90	12	13	87	86	15	84	18	19	81
80	79	23	24	76	75	27	28	72	21
70	69	68	34	35	36	37	63	32	61
41	59	58	57	45	46	54	43	52	50
51	42	48	47	55	56	44	53	49	60
31	39	38	64	65	66	67	33	62	40
30	29	73	74	25	26	77	78	22	71
20	82	83	14	16	85	17	88	89	11
91	92	3	7	6	5	94	8	99	100

Рис. 4.210

Магический квадрат 10-го порядка построен.

Покажем пример с использованием другого обратимого квадрата 10-го порядка. На рис. 4.211 изображён первый этап, на рис. 4.212 – второй этап.

Первый этап

1	2	3	4	5	11	12	13	14	15
6	7	8	9	10	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	31	32	33	34	35
26	27	28	29	30	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	51	52	53	54	55
46	47	48	49	50	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	71	72	73	74	75
66	67	68	69	70	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	91	92	93	94	95
86	87	88	89	90	96	97	98	99	100

→

1	2	98	97	96	90	89	88	14	15
95	7	8	92	91	85	84	18	19	81
80	79	23	24	76	70	32	33	67	66
75	74	73	29	30	36	37	63	62	61
41	59	58	57	45	51	49	48	47	55
46	54	53	52	50	56	44	43	42	60
40	39	38	64	65	71	72	28	27	26
35	34	68	69	31	25	77	78	22	21
20	82	83	17	16	10	9	93	94	6
86	87	13	12	11	5	4	3	99	100

Рис. 4.211

Второй этап

1	2	98	97	96	90	89	88	14	15
95	7	8	92	91	85	84	18	19	81
80	79	23	24	76	70	32	33	67	66
75	74	73	29	30	36	37	63	62	61
41	59	58	57	45	51	49	48	47	55
46	54	53	52	50	56	44	43	42	60
40	39	38	64	65	71	72	28	27	26
35	34	68	69	31	25	77	78	22	21
20	82	83	17	16	10	9	93	94	6
86	87	13	12	11	5	4	3	99	100

→

1	2	98	97	96	90	4	88	14	15
95	7	8	92	91	10	84	18	19	81
80	79	23	24	76	70	32	33	67	21
75	74	73	29	30	36	37	63	27	61
41	59	58	57	45	51	49	43	47	55
46	42	53	52	50	56	44	48	54	60
26	39	38	64	65	71	72	28	62	40
35	34	68	69	25	31	77	78	22	66
20	82	83	9	16	85	17	93	94	6
86	87	3	12	11	5	89	13	99	100

Рис. 4.212

Предлагаем читателям построить магический квадрат 14-го порядка из самого простого обратимого квадрата.

Понятно, что преобразования, выполняемые в обратимом квадрате при построении магических квадратов представленным методом, можно выразить в матричной форме, объединив оба этапа преобразований.

Вариант данного метода имеется в (45).

4.3.6 МЕТОД СОСТАВНЫХ КВАДРАТОВ

Точно так же, как для нечётных и чётно-чётных порядков, магические квадраты чётно-нечётного порядка $n = 4k + 2$ можно строить методом составных квадратов. Минимальный порядок квадрата чётно-нечётного порядка, который может быть построен данным методом, равен 18. Поскольку число 18 представляется в виде произведения чисел 3 и 6, в качестве базового и основного квадратов можно брать квадраты этих порядков. Покажем один пример построения магического квадрата 18-го порядка методом составных квадратов. В качестве базового квадрата возьмём магический квадрат 3-го порядка (рис. 4.213), а в качестве основного – сотовый магический квадрат 6-го порядка с рис. 4.194; продублируем этот квадрат для наглядности (рис. 4.214).

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Рис. 4.213

32	29	11	9	16	14
31	30	10	12	13	15
2	3	17	19	34	36
1	4	18	20	33	35
22	24	27	25	7	6
23	21	28	26	8	5

Рис. 4.214

Готовый магический квадрат 18-го порядка, построенный методом составных квадратов, вы видите на **рис. 4.215**.

140	137	119	117	124	122	320	317	299	297	304	302	68	65	47	45	52	50
139	138	118	120	121	123	319	318	298	300	301	303	67	66	46	48	49	51
110	111	125	127	142	144	290	291	305	307	322	324	38	39	53	55	70	72
109	112	126	128	141	143	289	292	306	308	321	323	37	40	54	56	69	71
130	132	135	133	115	114	310	312	315	313	295	294	58	60	63	61	43	42
131	129	136	134	116	113	311	309	316	314	296	293	59	57	64	62	44	41
104	101	83	81	88	86	176	173	155	153	160	158	248	245	227	225	232	230
103	102	82	84	85	87	175	174	154	156	157	159	247	246	226	228	229	231
74	75	89	91	106	108	146	147	161	163	178	180	218	219	233	235	250	252
73	76	90	92	105	107	145	148	162	164	177	179	217	220	234	236	249	251
94	96	99	97	79	78	166	168	171	169	151	150	238	240	243	241	223	222
95	93	100	98	80	77	167	165	172	170	152	149	239	237	244	242	224	221
284	281	263	261	268	266	32	29	11	9	16	14	212	209	191	189	196	194
283	282	262	264	265	267	31	30	10	12	13	15	211	210	190	192	193	195
254	255	269	271	286	288	2	3	17	19	34	36	182	183	197	199	214	216
253	256	270	272	285	287	1	4	18	20	33	35	181	184	198	200	213	215
274	276	279	277	259	258	22	24	27	25	7	6	202	204	207	205	187	186
275	273	280	278	260	257	23	21	28	26	8	5	203	201	208	206	188	185

Рис. 4.215

Магический квадрат получился сотовый, как и основной квадрат. Если вы поменяете ролями базовый и основной квадраты в этом примере, то сотовый квадрат не получится, получится просто магический квадрат. Проверьте!

4.4. ПОСТРОЕНИЕ ПОЛУМАГИЧЕСКИХ КВАДРАТОВ

Методам построения полумагических квадратов уделяется значительно меньше внимания. В то же время самые знаменитые полумагические квадраты Бенджамина Франклина говорят о том, что и полумагические квадраты могут быть весьма интересны.

4.4.1 АЛГОРИТМ ФРАНКЛИНА

До нас дошли три полумагических квадрата Франклина – два квадрата 8-го порядка и квадрат 16-го порядка. О квадратах Франклина написаны монографии, его алгоритм исследовали многие математики, построены сотни полумагических квадратов, подобных квадратам Франклина. Полумагические квадраты Франклина обладают уникальными свойствами, об этих квадратах можно написать отдельную книгу.

Каждый исследователь находит свой подход к алгоритму Франклина и в соответствии с этим строит аналогичные полумагические квадраты. Автором найдена своя интерпретация алгоритма Франклина и построено много подобных полумагических квадратов. (46, 47).

Не имея возможности в рамках данной книги подробно остановиться на применении *метода качелей* (который здесь не представлен) к алгоритму Франклина, приведём только несколько примеров. Сначала покажем оригинальные полумагические квадраты Франклина (**рис. 4.216 – 4.218**).

52	61	4	13	20	29	36	45
14	3	62	51	46	35	30	19
53	60	5	12	21	28	37	44
11	6	59	54	43	38	27	22
55	58	7	10	23	26	39	42
9	8	57	56	41	40	25	24
50	63	2	15	18	31	34	47
16	1	64	49	48	33	32	17

Рис. 4.216

17	47	30	36	21	43	26	40
32	34	19	45	28	38	23	41
33	31	46	20	37	27	42	24
48	18	35	29	44	22	39	25
49	15	62	4	53	11	58	8
64	2	51	13	60	6	55	9
1	63	14	52	5	59	10	56
16	50	3	61	12	54	7	57

Рис. 4.217

200	217	232	249	8	25	40	57	72	89	104	121	136	153	168	185
58	39	26	7	250	231	218	199	186	167	154	135	122	103	90	71
198	219	230	251	6	27	38	59	70	91	102	123	134	155	166	187
60	37	28	5	252	229	220	197	188	165	156	133	124	101	92	69
201	216	233	248	9	24	41	56	73	88	105	120	137	152	169	184
55	42	23	10	247	234	215	202	183	170	151	138	119	106	87	74
203	214	235	246	11	22	43	54	75	86	107	118	139	150	171	182
53	44	21	12	245	236	213	204	181	172	149	140	117	108	85	76
205	212	237	244	13	20	45	52	77	84	109	116	141	148	173	180
51	46	19	14	243	238	211	206	179	174	147	142	115	110	83	78
207	210	239	242	15	18	47	50	79	82	111	114	143	146	175	178
49	48	17	16	241	240	209	208	177	176	145	144	113	112	81	80
196	221	228	253	4	29	36	61	68	93	100	125	132	157	164	189
62	35	30	3	254	227	222	195	190	163	158	131	126	99	94	67
194	223	226	255	2	31	34	63	66	95	98	127	130	159	162	191
64	33	32	1	256	225	224	193	192	161	160	129	128	97	96	65

Рис. 4.218

Основное свойство полумагических квадратов Франклина состоит в том, что они остаются полумагическими с теми же значениями сумм чисел во всех диагоналях (как главных, так и разломанных) при торических переносах.

Параллельным переносом на торе полумагический квадрат с рис. 4.216 превращается в такой полумагический квадрат (рис. 4.219):

1	16	17	32	33	48	49	64
63	50	47	34	31	18	15	2
8	9	24	25	40	41	56	57
58	55	42	39	26	23	10	7
6	11	22	27	38	43	54	59
60	53	44	37	28	21	12	5
3	14	19	30	35	46	51	62
61	52	45	36	29	20	13	4

Рис. 4.219

В этом квадрате есть такое интересное свойство: комплементарные числа расположены симметрично относительно вертикальной оси симметрии квадрата.

В квадрате выделена начальная цепочка.

Именно в таком виде данный полумагический квадрат был исследован автором и получено много подобных квадратов не только 8-го, но и других порядков. На **рис. 4.220** показан полумагический квадрат 4-го порядка, а на **рис. 4.221** – полумагический квадрат 12-го порядка. Оба эти квадрата построены по алгоритму Франклина.

1	8	9	16
14	11	6	3
4	5	12	13
15	10	7	2

Рис. 4.220

1	24	25	48	49	72	73	96	97	120	121	144
136	129	112	105	88	81	64	57	40	33	16	9
12	13	36	37	60	61	84	85	108	109	132	133
137	128	113	104	89	80	65	56	41	32	17	8
2	23	26	47	50	71	74	95	98	119	122	143
138	127	114	103	90	79	66	55	42	31	18	7
3	22	27	46	51	70	75	94	99	118	123	142
139	126	115	102	91	78	67	54	43	30	19	6
10	15	34	39	58	63	82	87	106	111	130	135
140	125	116	101	92	77	68	53	44	29	20	5
11	14	35	38	59	62	83	86	107	110	131	134
141	124	117	100	93	76	69	52	45	28	21	4

Рис. 4.221

Очевидно, что показанные полумагические квадраты 4-го и 12-го порядка подобны квадрату 8-го порядка с **рис. 4.219**; все три квадрата имеют одинаковую форму начальной цепочки. В квадратах 4-го и 12-го порядков тоже комплементарные числа расположены симметрично относительно вертикальной оси симметрии. Эти квадраты тоже остаются полумагическими с теми же значениями сумм чисел во всех диагоналях при торических переносах.

Если аналогично преобразовать полумагический квадрат Франклина 16-го порядка с **рис. 4.218**, то он примет такой вид (**рис. 4.222**):

1	32	33	64	65	96	97	128	129	160	161	192	193	224	225	256
255	226	223	194	191	162	159	130	127	98	95	66	63	34	31	2
3	30	35	62	67	94	99	126	131	158	163	190	195	222	227	254
253	228	221	196	189	164	157	132	125	100	93	68	61	36	29	4
16	17	48	49	80	81	112	113	144	145	176	177	208	209	240	241
242	239	210	207	178	175	146	143	114	111	82	79	50	47	18	15
14	19	46	51	78	83	110	115	142	147	174	179	206	211	238	243
244	237	212	205	180	173	148	141	116	109	84	77	52	45	20	13
12	21	44	53	76	85	108	117	140	149	172	181	204	213	236	245
246	235	214	203	182	171	150	139	118	107	86	75	54	43	22	11
10	23	42	55	74	87	106	119	138	151	170	183	202	215	234	247
248	233	216	201	184	169	152	137	120	105	88	73	56	41	24	9
5	28	37	60	69	92	101	124	133	156	165	188	197	220	229	252
251	230	219	198	187	166	155	134	123	102	91	70	59	38	27	6
7	26	39	58	71	90	103	122	135	154	167	186	199	218	231	250
249	232	217	200	185	168	153	136	121	104	89	72	57	40	25	8

Рис. 4.222

Легко видеть, что и этот полумагический квадрат подобен представленным выше полумагическим квадратам 4-го, 8-го и 12-го порядков.

Можно продолжить построение подобных полумагических квадратов для любого порядка $n = 4k$. Читатели вполне могут найти свою интерпретацию алгоритма Франклина и построить другие подобные полумагические квадраты.

Напомним: подробное изложение данного метода вы найдёте на сайте автора. (41)

4.4.2 МЕТОД ЛАТИНСКИХ КВАДРАТОВ

Полумагические квадраты можно строить методом латинских квадратов точно так же, как и магические квадраты. При этом для построения полумагических квадратов годится любая пара ортогональных латинских квадратов. Доказано, что ортогональные латинские квадраты существуют для любого порядка, кроме 2 и 6.

Начнём с самого минимального порядка – 3. На рис. 4.223 показана пара ортогональных латинских квадратов 3-го порядка.

0	1	2
1	2	0
2	0	1

2	1	0
0	2	1
1	0	2

Рис. 4.223

Заметим: латинские квадраты являются нетрадиционными полумагическими квадратами, в обоих квадратах нет магической константы в одной из главных диагоналей.

Формула для построения полумагических квадратов методом латинских квадрата точно такая же, как для магических квадратов. Из данной пары ортогональных латинских квадратов получается такой полумагический квадрат 3-го порядка (**рис. 4.224**):

3	5	7
4	9	2
8	1	6

Рис. 4.224

Можно построить и второй полумагический квадрат из этой же пары ортогональных латинских квадратов, поменяв их местами.

Теперь покажем пример построения полумагического квадрата 9-го порядка методом латинских квадратов. На **рис. 4.225** вы видите пару ортогональных латинских квадратов 9-го порядка. Эти ортогональные латинские квадраты построены в Maple.

0	1	2	3	4	5	6	7	8		0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	0	4	5	3	7	8	6		3	4	5	6	7	8	0	1	2
2	0	1	5	3	4	8	6	7		6	7	8	0	1	2	3	4	5
3	4	5	6	7	8	0	1	2		7	8	6	1	2	0	4	5	3
4	5	3	7	8	6	1	2	0		1	2	0	4	5	3	7	8	6
5	3	4	8	6	7	2	0	1		4	5	3	7	8	6	1	2	0
6	7	8	0	1	2	3	4	5		5	3	4	8	6	7	2	0	1
7	8	6	1	2	0	4	5	3		8	6	7	2	0	1	5	3	4
8	6	7	2	0	1	5	3	4		2	0	1	5	3	4	8	6	7

Рис. 4.225

В этой паре один латинский квадрат является диагональным (на **рис. 4.225** справа), а во втором латинском квадрате (на **рис. 4.225** слева) только одна диагональ неправильная, она полностью состоит из одинаковых чисел. Эта единственная неправильная диагональ приводит к тому, что квадрат, построенный из данной пары ортогональных латинских квадратов, является полумагическим, в нём нет магической суммы чисел только в одной диагонали. Этот полумагический квадрат изображён на **рис. 4.226**.

1	11	21	31	41	51	61	71	81
13	23	6	43	53	36	64	74	57
25	8	18	46	29	39	76	59	69
35	45	52	56	66	73	5	15	22
38	48	28	68	78	58	17	27	7
50	33	40	80	63	70	20	3	10
60	67	77	9	16	26	30	37	47
72	79	62	12	19	2	42	49	32
75	55	65	24	4	14	54	34	44

Рис. 4.226

Последний пример – построение полумагического квадрата 10-го порядка. На **рис. 4.227** вы видите пару ортогональных латинских квадратов 10-го порядка. Эти ортогональные латинские квадраты построены по алгоритму, приведённому в [20в].

0	8	1	9	2	7	5	6	3	4
4	1	8	2	9	5	7	0	6	3
7	3	2	8	5	9	4	1	0	6
3	7	6	5	8	4	9	2	1	0
9	6	7	0	4	8	3	5	2	1
6	9	0	7	1	3	8	4	5	2
8	0	9	1	7	2	6	3	4	5
1	2	5	4	3	6	0	8	9	7
2	5	4	3	6	0	1	9	7	8
5	4	3	6	0	1	2	7	8	9

0	4	8	5	9	6	7	1	2	3
7	1	5	8	6	9	0	2	3	4
1	7	2	6	8	0	9	3	4	5
9	2	7	3	0	8	1	4	5	6
2	9	3	7	4	1	8	5	6	0
8	3	9	4	7	5	2	6	0	1
3	8	4	9	5	7	6	0	1	2
6	0	1	2	3	4	5	8	9	7
5	6	0	1	2	3	4	7	8	9
4	5	6	0	1	2	3	9	7	8

Рис. 4.227

Оба латинских квадрата не диагональные. В квадрате, изображённом на **рис. 4.227** слева, сумма чисел в обеих диагоналях равна магической константе 45, а в квадрате, изображённом справа, сумма чисел в одной диагонали не равна магической константе. Понятно, что квадрат, построенный из данной пары ортогональных латинских квадратов, будет полумагическим, при этом только в одной диагонали сумма чисел не будет равна магической константе квадрата. На **рис. 4.228** вы видите этот полумагический квадрат.

1	85	19	96	30	77	58	62	33	44
48	12	86	29	97	60	71	3	64	35
72	38	23	87	59	91	50	14	5	66
40	73	68	54	81	49	92	25	16	7
93	70	74	8	45	82	39	56	27	11
69	94	10	75	18	36	83	47	51	22
84	9	95	20	76	28	67	31	42	53
17	21	52	43	34	65	6	89	100	78
26	57	41	32	63	4	15	98	79	90
55	46	37	61	2	13	24	80	88	99

Рис. 4.228

Понятно, что для применения метода латинских квадратов необходимо иметь любую пару ортогональных латинских квадратов.

А теперь посмотрим на метод Франклина с точки зрения метода латинских квадратов. Для этого разложим полумагический квадрат 8-го порядка с **рис. 4.219** на два ортогональных латинских квадрата (**рис. 4.229**).

0	1	2	3	4	5	6	7
7	6	5	4	3	2	1	0
0	1	2	3	4	5	6	7
7	6	5	4	3	2	1	0
0	1	2	3	4	5	6	7
7	6	5	4	3	2	1	0
0	1	2	3	4	5	6	7
7	6	5	4	3	2	1	0

0	7	0	7	0	7	0	7
6	1	6	1	6	1	6	1
7	0	7	0	7	0	7	0
1	6	1	6	1	6	1	6
5	2	5	2	5	2	5	2
3	4	3	4	3	4	3	4
2	5	2	5	2	5	2	5
4	3	4	3	4	3	4	3

Рис. 4.229

Это обобщённые ортогональные латинские квадраты. Таким образом, полумагические квадраты могут строиться не только с использованием классических, но и обобщённых латинских квадратов.

4.4.3 МЕТОД СОСТАВНЫХ КВАДРАТОВ

Минимальный порядок составного полумагического квадрата равен 9. Для построения такого квадрата можно взять в качестве базового и основного квадратов один и тот же полумагический квадрат 3-го порядка, например, квадрат с **рис. 4.224**. Построенный с использованием этого квадрата составной полумагический квадрат 9-го порядка показан на **рис. 4.230**.

21	23	25	39	41	43	57	59	61
22	27	20	40	45	38	58	63	56
26	19	24	44	37	42	62	55	60
30	32	34	75	77	79	12	14	16
31	36	29	76	81	74	13	18	11
35	28	33	80	73	78	17	10	15
66	68	70	3	5	7	48	50	52
67	72	65	4	9	2	49	54	47
71	64	69	8	1	6	53	46	51

Рис. 4.230

Можно взять в качестве одного из квадратов (базового или основного) магический квадрат. Рассмотрим такой пример. Для построения составного полумагического квадрата 12-го порядка возьмём в качестве базового квадрата магический квадрат с **рис. 4.213**, а в качестве основного квадрата – полумагический квадрат 4-го порядка, построенный по алгоритму Франклина (**рис. 4.220**). Готовый полумагический квадрат вы видите на **рис. 4.231**.

49	56	57	64	129	136	137	144	17	24	25	32
62	59	54	51	142	139	134	131	30	27	22	19
52	53	60	61	132	133	140	141	20	21	28	29
63	58	55	50	143	138	135	130	31	26	23	18
33	40	41	48	65	72	73	80	97	104	105	112
46	43	38	35	78	75	70	67	110	107	102	99
36	37	44	45	68	69	76	77	100	101	108	109
47	42	39	34	79	74	71	66	111	106	103	98
113	120	121	128	1	8	9	16	81	88	89	96
126	123	118	115	14	11	6	3	94	91	86	83
116	117	124	125	4	5	12	13	84	85	92	93
127	122	119	114	15	10	7	2	95	90	87	82

Рис. 4.231

4.5 ПОСТРОЕНИЕ НЕТРАДИЦИОННЫХ МАГИЧЕСКИХ КВАДРАТОВ

Методы построения нетрадиционных магических квадратов мало исследованы. Однако известно несколько оригинальных способов построения таких квадратов. Рассмотрим некоторые из них.

4.5.1 МЕТОД ТЕРРАС

Нетрадиционный магический квадрат любого нечётного порядка можно построить методом террас, который изложен в разделе 4.1.2. Для этого в качестве исходной последовательности, состоящей из n^2 чисел, надо взять любую арифметическую прогрессию, все члены которой и разность являются натуральными числами. Построим, например, нетрадиционный магический квадрат 5-го порядка, взяв 25 членов следующей арифметической прогрессии: 4, 7, 10, ... 73, 76 (рис. 4.232)

				16				
			13		31			
		10	49	28	67	46		
	7	61	25	64	43	7	61	
4		22	76	40	4	58		76
	19	73	37	16	55	19	73	
		34	13	52	31	70		
			49		67			
				64				

Рис. 4.232

Нетрадиционные магические квадраты, построенные методом террас, ассоциативны.

4.5.2 ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ГРЕКО-ЛАТИНСКИХ КВАДРАТОВ

Нетрадиционный магический квадрат любого порядка, кроме 3 и 6, можно построить, используя греко-латинский квадрат, составленный из пары ортогональных диагональных латинских квадратов. Рассмотрим конкретный пример. На рис. 4.233 показан греко-латинский квадрат 7-го порядка.

00	11	22	33	44	55	66
54	65	06	10	21	32	43
31	42	53	64	05	16	20
15	26	30	41	52	63	04
62	03	14	25	36	40	51
46	50	61	02	13	24	35
23	34	45	56	60	01	12

Рис. 4.233

Если строить из этого греко-латинского квадрата традиционный магический квадрат 7-го порядка, то надо смотреть на элементы этого квадрата, как на числа в семеричной системе счисления. Посмотрим на элементы этого греко-латинского квадрата, как на числа в какой-нибудь другой системе счисления, например, в десятичной. Мы имеем готовый нетрадиционный магический квадрат 7-го порядка. Чтобы в квадрате не было числа 0, увеличим все его элементы на 1. Вот как будет выглядеть этот нетрадиционный магический квадрат, записанный в привычном виде (рис. 4.234):

1	12	23	34	45	56	67
55	66	7	11	22	33	44
32	43	54	65	6	17	21
16	27	31	42	53	64	5
63	4	15	26	37	41	52
47	51	62	3	14	25	36
24	35	46	57	61	2	13

Рис. 4.234

Далее можно посмотреть на элементы греко-латинского квадрата с рис. 4.233 как на числа в любой другой системе счисления с натуральным основанием $R > 7$. И в каждой такой системе мы получаем новый нетрадиционный магический квадрат. Приведём ещё пример для восьмеричной системы счисления (рис. 4.235).

1	10	19	28	37	46	55
45	54	7	9	18	27	36
26	35	44	53	6	15	17
14	23	25	34	43	52	5
51	4	13	22	31	33	42
39	41	50	3	12	21	30
20	29	38	47	49	2	11

Рис. 4.235

4.5.3 ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ОБОБЩЁННЫХ ЛАТИНСКИХ КВАДРАТОВ

Метод обобщённых латинских квадратов применяется для построения нетрадиционных идеальных магических квадратов порядка $n = 4k + 2$.

Как известно, традиционные магические квадраты данной серии порядков не могут быть ни ассоциативными, ни пандиагональными. А вот нетрадиционные магические квадраты могут даже одновременно обладать этими свойствами, то есть являются идеальными. Излагаемый здесь метод был найден в журнале “Наука и жизнь” (№9, 1979 г.). Сначала рассмотрим пример из журнала. На **рис. 4.236** показана пара ортогональных обобщённых латинских квадратов, которая используется для построения нетрадиционного идеального магического квадрата 6-го порядка.

0	4	5	5	4	0
6	2	1	1	2	6
0	4	5	5	4	0
6	2	1	1	2	6
0	4	5	5	4	0
6	2	1	1	2	6

0	6	0	6	0	6
4	2	4	2	4	2
5	1	5	1	5	1
5	1	5	1	5	1
4	2	4	2	4	2
0	6	0	6	0	6

Рис. 4.236

Формула для построения нетрадиционных идеальных магических квадратов 6-го порядка из данной пары ортогональных обобщённых латинских квадратов имеет следующий вид:

$$c_{ij} = (7 + m) * a_{ij} + b_{ij} + 1, m = 0, 1, 2 \dots$$

где a_{ij} - элементы первого латинского квадрата, b_{ij} - соответствующие элементы второго латинского квадрата, c_{ij} - соответствующие элементы готового идеального квадрата. При каждом m получается новый нетрадиционный идеальный магический квадрат. Таким образом, из одной пары ортогональных обобщённых латинских квадратов можно построить бесконечно много подобных нетрадиционных идеальных магических квадратов.

Обратите внимание: второй латинский квадрат получается из первого поворотом вокруг центра на 90 градусов против часовой стрелки.

Готовый нетрадиционный идеальный квадрат 6-го порядка, построенный при $m = 0$, изображён на **рис. 4.237**.

1	35	36	42	29	7
47	17	12	10	19	45
6	30	41	37	34	2
48	16	13	9	20	44
5	31	40	38	33	3
43	21	8	14	15	49

Рис. 4.237

Магическая константа этого квадрата равна 150, константа ассоциативности $K_a = 50$. Квадрат обладает очень интересным свойством: сумма чисел в любом квадрате 2×2 , расположенном внутри этого квадрата, равна одному и тому же числу $2 * K_a$. Это свойство позволяет превратить данный квадрат в нетрадиционный совершенный квадрат, применив к нему преобразование трёх квадратов. На **рис. 4.238** вы видите этот нетрадиционный совершенный квадрат.

1	35	36	7	29	42
47	17	12	45	19	10
6	30	41	2	34	37
43	21	8	49	15	14
5	31	40	3	33	38
48	16	13	44	20	9

Рис. 4.238

Таким образом, мы имеем метод построения нетрадиционных идеальных и совершенных магических квадратов порядка $n = 4k + 2$.

Как уже сказано, второй латинский квадрат получается из первого поворотом на 90 градусов. Значит, задача сводится к построению первого латинского квадрата. Если внимательно посмотреть на структуру первого латинского квадрата, легко увидеть, что для его построения достаточно построить две полустроки:

$$\begin{array}{ccc} 0 & 4 & 5 \\ 6 & 2 & 1 \end{array}$$

При этом вторая полустрока состоит из чисел, являющихся комплементарными (взаимно дополнительными) числам первой полустроки.

Задача составления полустрок оказалась очень интересной. Полустроки можно составлять, действуя простым подбором. Приведём пример для порядка $n = 18$. Вот полустроки, составленные в этом примере простым подбором:

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 18 & 17 & 15 & 13 & 9 & 8 & 6 & 4 \\ 20 & 2 & 3 & 5 & 7 & 11 & 12 & 14 & 16 \end{array}$$

При составлении полустрок надо руководствоваться следующими правилами:

- 1) все числа в полустроках должны быть различны;
- 2) при выборе пары $(0, X)$ число X надо выбирать чётным и больше порядка квадрата (в некоторых случаях X может быть равно порядку квадрата); при этом верхний предел для числа X не ограничен;
- 3) сумма чисел в каждой полустроке равна одному и тому же значению $S = X * n / 4$ (n – порядок квадрата).

В рассматриваемом примере $n = 18$, $X = 20$, $S = 90$. Составить первый и второй латинские квадраты из приведённых полустрок предоставляется читателям. На **рис. 4.239** показан готовый нетрадиционный идеальный квадрат 18-го порядка. Заметим, что формула для построения нетрадиционного идеального магического квадрата в общем случае имеет вид:

$$c_{ij} = (X + 1 + m) * a_{ij} + b_{ij} + 1, m = 0, 1, 2 \dots$$

Представленный квадрат построен при $m = 0$.

1	399	358	336	274	210	169	147	85	105	127	189	190	294	316	378	379	21
439	45	82	108	166	234	271	297	355	339	313	255	250	150	124	66	61	423
18	382	375	319	291	193	186	130	102	88	144	172	207	277	333	361	396	4
436	48	79	111	163	237	268	300	352	342	310	258	247	153	121	69	58	426
14	386	371	323	287	197	182	134	98	92	140	176	203	281	329	365	392	8
430	54	73	117	157	243	262	306	346	348	304	264	241	159	115	75	52	432
9	391	366	328	282	202	177	139	93	97	135	181	198	286	324	370	387	13
427	57	70	120	154	246	259	309	343	351	301	267	238	162	112	78	49	435
5	395	362	332	278	206	173	143	89	101	131	185	194	290	320	374	383	17
425	59	68	122	152	248	257	311	341	353	299	269	236	164	110	80	47	437
7	393	364	330	280	204	175	141	91	99	133	183	196	288	322	372	385	15
429	55	72	118	156	244	261	307	345	349	303	265	240	160	114	76	51	433
10	390	367	327	283	201	178	138	94	96	136	180	199	285	325	369	388	12
434	50	77	113	161	239	266	302	350	344	308	260	245	155	119	71	56	428
16	384	373	321	289	195	184	132	100	90	142	174	205	279	331	363	394	6
438	46	81	109	165	235	270	298	354	340	312	256	249	151	123	67	60	424
19	381	376	318	292	192	187	129	103	87	145	171	208	276	334	360	397	3
421	63	64	126	148	252	253	315	337	357	295	273	232	168	106	84	43	441

Рис. 4.239

Магическая константа этого квадрата равна 3978, константа ассоциативности – 442. Квадрат тоже обладает отмеченным выше свойством и может быть превращён в нетрадиционный совершенный квадрат преобразованием трёх квадратов.

Разумеется, составлять полустроки простым подбором неэффективно. Данный метод обсуждался на форуме. (42)

Два участника форума нашли разные аналитические формулы для полустрок. Приведём один из вариантов (возможно, читатели найдут другие формулы). Участник форума предложил такие формулы для полустрок ($t = n/2$):

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} 0 & 3t-4 & 3t-6 & \dots & 2t+1 & 2t-1 & 2t-2 & t-3 & t-5 & \dots & 4 & 2 \\ 3t-3 & 1 & 3 & \dots & t-4 & t-2 & t-1 & 2t & 2t+2 & \dots & 3t-7 & 3t-5 \end{array}$$

Для $n = 18$ имеем $t = 9$ и полустроки, составленные по этим формулам, будут такими:

$$\begin{array}{cccccccccccc} 0 & 23 & 21 & 19 & 17 & 16 & 6 & 4 & 2 \\ 24 & 1 & 3 & 5 & 7 & 8 & 18 & 20 & 22 \end{array}$$

Очевидно, что полустроки получились другие, нежели в рассмотренном выше примере. Здесь $X = 24$, сумма чисел в полустроках $S = 108$. Читателям предлагается построить нетрадиционный идеальный магический квадрат 18-го, используя новые полустроки.

Используя данные аналитические формулы, легко доказать, что составленные по этим формулам полустроки удовлетворяют всем требованиям, перечисленным выше, для любого порядка $n = 4k + 2$. Для этого достаточно вычислить в общем виде сумму чисел в первой полустроке и убедиться в том, что она совпадает со значением:

$$S = 3t(t-1)/2$$

Описанный метод применим также для построения нетрадиционных идеальных квадратов чётно-чётного порядка $n = 4k$. Хотя для данной серии порядков существуют традиционные идеальные квадраты (за исключением $n = 4$), тем не менее, можно строить и нетрадиционные идеальные квадраты. Покажем один пример – построение нетрадиционного идеального магического квадрата 8-го порядка методом обобщённых латинских квадратов. На **рис. 4.240** показана пара ортогональных обобщённых латинских квадратов 8-го порядка.

0	7	6	3	3	6	7	0
8	1	2	5	5	2	1	8
0	7	6	3	3	6	7	0
8	1	2	5	5	2	1	8
0	7	6	3	3	6	7	0
8	1	2	5	5	2	1	8
0	7	6	3	3	6	7	0
8	1	2	5	5	2	1	8

0	8	0	8	0	8	0	8
7	1	7	1	7	1	7	1
6	2	6	2	6	2	6	2
3	5	3	5	3	5	3	5
3	5	3	5	3	5	3	5
6	2	6	2	6	2	6	2
7	1	7	1	7	1	7	1
0	8	0	8	0	8	0	8

Рис. 4.240

Готовый нетрадиционный идеальный квадрат 8-го порядка, построенный из данной пары ортогональных обобщённых латинских квадратов, изображён на **рис. 4.241**.

1	72	55	36	28	63	64	9
80	11	26	47	53	20	17	74
7	66	61	30	34	57	70	3
76	15	22	51	49	24	13	78
4	69	58	33	31	60	67	6
79	12	25	48	52	21	16	75
8	65	62	29	35	56	71	2
73	18	19	54	46	27	10	81

Рис. 4.241

Магическая константа этого квадрата равна 328, константа ассоциативности – 82. Сумма чисел в любом квадрате 2×2 , расположенном внутри этого квадрата, равна удвоенной константе ассоциативности – 164. Однако преобразованием трёх квадратов этот квадрат в нетрадиционный совершенный квадрат не превращается.

Нетрадиционный идеальный квадрат 4-го порядка удалось построить только с повторяющимися числами (**рис. 4.242**).

1	16	13	4
16	1	4	13
4	13	16	1
13	4	1	16

Рис. 4.242

Отметим, что приведённая выше аналитическая формула для полустрок не пригодна для порядков $n = 4k$. Предлагаем читателям получить аналитическую формулу полустрок для данной серии порядков. При этом в случае $n = 8k$ можно положить $X = n$.

Именно так в рассмотренном выше примере для $n = 8$. Для $n = 16$ полустроки могут быть, например, такими:

0	15	14	12	9	6	5	3
16	1	2	4	7	10	11	13

4.5.4 МЕТОД СОСТАВНЫХ КВАДРАТОВ

Универсальный метод составных квадратов применим и для построения нетрадиционных магических квадратов. Покажем пример построения нетрадиционного магического квадрата 9-го порядка. Возьмём в качестве базового и основного квадратов один и тот же нетрадиционный магический квадрат 3-го порядка, изображённый на **рис. 4.243**.

6	21	18
27	15	3
12	9	24

Рис. 4.243

Готовый составной нетрадиционный магический квадрат 9-го порядка вы видите на **рис. 4.244**.

51	66	63	186	201	198	159	174	171
72	60	48	207	195	183	180	168	156
57	54	69	192	189	204	165	162	177
240	255	252	132	147	144	24	39	36
261	249	237	153	141	129	45	33	21
246	243	258	138	135	150	30	27	42
105	120	117	78	93	90	213	228	225
126	114	102	99	87	75	234	222	210
111	108	123	84	81	96	219	216	231

Рис. 4.244

Обратите внимание: этот нетрадиционный магический квадрат обладает свойством ассоциативности, потому что и базовый, и основной квадрат обладают этим свойством. Магическая константа этого квадрата равна 1269, константа ассоциативности – 282.

Другие методы построения нетрадиционных магических квадратов можно найти в [8], в частности, метод построения нетрадиционных магических квадратов из простых чисел. Например, перед вами стоит задача: составить нетрадиционный магический квадрат 3-го порядка из простых чисел. Первый такой квадрат был построен Дьюдени, это квадрат с минимальной магической константой равной 111. Вы видите этот известный квадрат на **рис. 4.245**. [6]

67	1	43
13	37	61
31	73	7

Рис. 4.245

Попробуйте построить нетрадиционный магический квадрат 3-го порядка из других простых чисел. Попытайтесь придумать алгоритм такого построения. Если не получится, загляните в [8].

Примечание. Легко, например, составить компьютерную программу для построения нетрадиционных магических квадратов 3-го порядка из простых чисел без всякого особого алгоритма: просто ввести некоторый массив простых чисел и перебирать все числа из этого массива на предмет их расположения в магическом квадрате 3x3 (можно вставить в программу блок составления массива простых чисел любого наперёд заданного размера). Для порядка 3 такая программа работает эффективно.

ГЛАВА 5. СОВЕРШЕННЫЕ МАГИЧЕСКИЕ КВАДРАТЫ

Совершенные магические квадраты были известны ещё в XIX веке. Однако они очень мало исследованы, особенно в русскоязычной литературе. Совершенные магические квадраты в англоязычной литературе называются “most perfect square”. Это самые красивые магические квадраты, недаром они называются совершенными.

5.1 ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОВЕРШЕННЫХ КВАДРАТОВ

Определение совершенных магических квадратов даётся по (31):

“Definition

1. Every 2×2 block of cells (including wrap-around) sum to $2T$ (where $T = n^2 + 1$) (i.e. compact)
2. Any pair of integers distant $n/2$ along a diagonal sum to T (i.e. complete)
3. Doubly-even pandiagonal normal magic squares (i.e. order 4, 8, 12, etc using integers from 1 to n^2)”.

Разъясним данное определение. Для наглядности покажем совершенный квадрат 8-го порядка (**рис. 5.1**).

1	32	17	16	57	40	41	56
58	39	42	55	2	31	18	15
3	30	19	14	59	38	43	54
60	37	44	53	4	29	20	13
8	25	24	9	64	33	48	49
63	34	47	50	7	26	23	10
6	27	22	11	62	35	46	51
61	36	45	52	5	28	21	12

Рис. 5.1

Начнём с третьего пункта определения. В этом пункте говорится, что совершенные магические квадраты – это пандиагональные квадраты порядка двойной чётности, то есть порядка $n = 4k$.

В первом пункте определения говорится о таком свойстве совершенных квадратов: в каждом блоке 2×2 , находящемся внутри совершенного квадрата, сумма чисел равна одному и тому же значению, равному $2T$, где $T = n^2 + 1$. Такое же значение должна принимать сумма чисел в угловых ячейках совершенного квадрата (см. замечание в скобках: including wrap-around). Это обеспечит сохранение значения суммы чисел в блоках 2×2 при параллельных переносах совершенного квадрата на торе. В показанном совершенном квадрате $T = 65$, сумма чисел в любом блоке 2×2 равна 130, сумма чисел в угловых ячейках квадрата тоже равна 130.

Осталось разъяснить свойство, сформулированное во втором пункте определения. Любая пара чисел вдоль любой диагонали, расположенных друг от друга на расстоянии $n/2$, даёт в сумме T . Поскольку речь идёт о комплементарных числах, назовём это свойство свойством *комплементарности*. На **рис. 5.1** показаны (раскраской) две пары комплементарных чисел. Данное свойство тоже сохраняется при параллельных переносах совершенного квадрата на торе.

Понятно, что основные преобразования сохраняют свойство совершенности магического квадрата.

В цитируемой статье приводится ещё такой совершенный квадрат 12-го порядка (рис. 5.2):

65	93	82	95	49	78	68	64	51	62	84	79
32	100	15	98	48	115	29	129	46	131	13	114
25	133	42	135	9	118	28	104	11	102	44	119
24	108	7	106	40	123	21	137	38	139	5	122
17	141	34	143	1	126	20	112	3	110	36	127
76	56	59	54	92	71	73	85	90	87	57	70
77	81	94	83	61	66	80	52	63	50	96	67
116	16	99	14	132	31	113	45	130	47	97	30
117	41	134	43	101	26	120	12	103	10	136	27
124	8	107	6	140	23	121	37	138	39	105	22
125	33	142	35	109	18	128	4	111	2	144	19
72	60	55	58	88	75	69	89	86	91	53	74

Рис. 5.2

А сейчас рассмотрим подробно все свойства совершенных квадратов на примере совершенного квадрата 4-го порядка. Все пандиагональные квадраты 4-го порядка (их 48 штук без учёта торических переносов) являются совершенными. Помимо основных свойств совершенных квадратов, перечисленных в определении, совершенные квадраты 4-го порядка обладают ещё некоторыми дополнительными свойствами.

На рис. 5.3 изображён совершенный квадрат, на примере которого будут рассмотрены свойства совершенных квадратов 4-го порядка.

1	14	7	12
15	4	9	6
10	5	16	3
8	11	2	13

Рис. 5.3

Перечислим все свойства данного совершенного квадрата – основные и дополнительные. Заметим, что для $n = 4$ имеем $2T = S$, S – магическая константа квадрата. Поэтому о сумме $2T$ мы говорим в этом случае как о магической константе квадрата.

Свойство 1. Сумма чисел в любом квадрате 2×2 , находящемся внутри совершенного квадрата 4-го порядка, равна магической константе квадрата.

Таких квадратов 2×2 в квадрате 4-го порядка 9 штук. Посчитайте сумму чисел в любом таком квадрате, она равна магической константе квадрата – 34.

Свойство 2. Сумма чисел, расположенных в угловых ячейках совершенного квадрата 4-го порядка равна магической константе квадрата.

$$1 + 12 + 8 + 13 = 34$$

Свойство 3. Сумма чисел, расположенных в угловых ячейках любого квадрата 3×3 , находящегося внутри совершенного квадрата 4-го порядка, равна магической константе квадрата.

В квадрате 4-го порядка находятся 4 квадрата 3×3 . Вот, например, сумма чисел в угловых ячейках одного из таких квадратов:

$$1 + 7 + 10 + 16 = 34$$

Свойство 4. Если в совершенный квадрат 4-го порядка вписать квадрат 2×2 с вершинами в серединах сторон совершенного квадрата (**рис. 5.4**), то сумма чисел, расположенных вдоль одной пары противоположных сторон вписанного квадрата, равна сумме чисел, расположенных вдоль другой пары противоположных сторон, и каждая из этих сумм равна магической константе квадрата.



1	14	7	12
15	4	9	6
10	5	16	3
8	11	2	13

Рис. 5.4

Свойство 5. В каждой строке совершенного квадрата 4-го порядка есть пара рядом стоящих чисел, сумма которых равна S_1 , и другая пара рядом стоящих чисел, сумма которых равна S_2 , так что $S_1 + S_2 = 34$ (магическая константа квадрата).

В квадрате, изображённом на **рис. 5.3**, в каждой строке есть пара рядом стоящих чисел, сумма которых равна 15, и другая пара рядом стоящих чисел, сумма которых равна 19. При этом пара чисел с суммой 15 в первой строке находится в начале строки, во второй строке – в конце строки, в третьей строке снова в начале строки и в четвёртой строке – в конце строки. Аналогично чередуется и расположение пары чисел с суммой 19.

Свойство 6. В каждом столбце совершенного квадрата 4-го порядка есть пара рядом стоящих чисел, сумма которых равна S_3 , и другая пара рядом стоящих чисел, сумма которых равна S_4 , так что $S_3 + S_4 = 34$.

В квадрате на **рис. 5.3** $S_3 = 16$, $S_4 = 18$. Пары чисел с суммами S_3 и S_4 точно так же расположены попеременно то в начале, то в конце столбца.

Свойство 7. В совершенном квадрате 4-го порядка суммы квадратов чисел в первой и третьей (а также во второй и четвёртой) строках равны.

В квадрате на рис. 5.3 эти суммы таковы:

$$\begin{aligned} 1^2 + 14^2 + 7^2 + 12^2 &= 390 \\ 15^2 + 4^2 + 9^2 + 6^2 &= 358 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10^2 + 5^2 + 16^2 + 3^2 &= 390 \\ 8^2 + 11^2 + 2^2 + 13^2 &= 358 \end{aligned}$$

Свойство 8. В совершенном квадрате 4-го порядка суммы квадратов чисел в первом и третьем (а также во втором и четвёртом) столбцах равны.

В квадрате на **рис. 5.3** эти суммы таковы:

$$1^2 + 15^2 + 10^2 + 8^2 = 390$$

$$14^2 + 4^2 + 5^2 + 11^2 = 358$$

$$7^2 + 9^2 + 16^2 + 2^2 = 390$$

$$12^2 + 6^2 + 3^2 + 13^2 = 358$$

Свойство 9. В совершенном квадрате 4-го порядка на диагоналях как самого квадрата, так и любого квадрата 3х3, находящегося внутри него, сумма двух чисел, разделённых третьим числом, равна 17. Это и есть свойство комплементарности. Свойство прекрасно проиллюстрировано в (48) шаблоном Дьюдени (**рис. 5.5**).

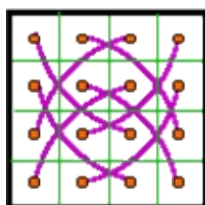


Рис. 5.5

На этом шаблоне соединены все пары комплементарных (то есть дополняющих друг друга до константы $n^2 + 1 = 17$) чисел.

На **рис. 5.6** показан другой совершенный квадрат 4-го порядка.

1	8	11	14
12	13	2	7
6	3	16	9
15	10	5	4

Рис. 5.6

Читателям предлагается самостоятельно проверить все свойства совершенных квадратов для этого квадрата. Заметим, что в свойствах 5-8 значения сумм будут другими. Кроме того, в этом квадрате, в отличие от квадрата с **рис. 5.3**, суммы квадратов чисел в первой и третьей (во второй и четвёртой) строках не равны соответствующим суммам квадратов чисел в столбцах.

Самый известный совершенный квадрат 8-го порядка приведён в (49). Он записан на этом веб-сайте в нетрадиционной форме, то есть заполнен числами от 0 до 63. Смотрите этот квадрат на **рис. 5.7** в традиционной форме записи.

1	63	3	61	12	54	10	56
16	50	14	52	5	59	7	57
17	47	19	45	28	38	26	40
32	34	30	36	21	43	23	41
53	11	55	9	64	2	62	4
60	6	58	8	49	15	51	13
37	27	39	25	48	18	46	20
44	22	42	24	33	31	35	29

Рис. 5.7

Понятно, что в этом квадрате также выполняются основные свойства совершенных квадратов, данные в определении. Кроме того, квадрат обладает несколькими дополнительными свойствами, аналогичными свойствам, показанным для совершенного квадрата 4-го порядка. Например: если в данный совершенный квадрат вписать квадрат 4x4 с вершинами в серединах сторон квадрата, то суммы чисел по каждой паре противоположных сторон вписанного квадрата будут равны магической константе квадрата (**рис. 5.8**).

1	63	3	61	12	54	10	56
16	50	14	52	5	59	7	57
17	47	19	45	28	38	26	40
32	34	30	36	21	43	23	41
53	11	55	9	64	2	62	4
60	6	58	8	49	15	51	13
37	27	39	25	48	18	46	20
44	22	42	24	33	31	35	29

Рис. 5.8

На **рис. 5.9** показано соединение нескольких пар ячеек, в которых находятся комплементарные числа, аналогично шаблону Дьюдени.

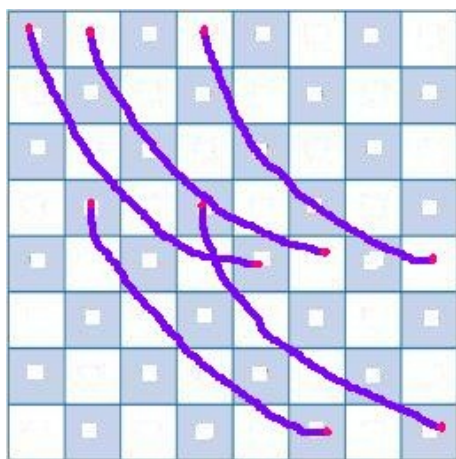


Рис. 5.9

Подробное исследование свойств данного совершенного квадрата приведено в (50). Все 48 совершенных квадратов 4-го порядка давно известны. А как строить совершенные квадраты порядков больше 4? Существует несколько методов построения совершенных квадратов. Покажем здесь два метода.

5.2 ПОСТРОЕНИЕ СОВЕРШЕННЫХ КВАДРАТОВ ИЗ ОБРАТИМЫХ КВАДРАТОВ

Прежде всего, приведём определение обратимых квадратов. Определение иллюстрируется самым простым обратимым квадратом, который заполняется числами от 1 до n^2 в естественном порядке построчно, начиная с левой верхней ячейки квадрата (**рис. 5.10**).

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Рис. 5.10

Определение обратимого квадрата даётся по (31):

“Definition

1. Equal cross sums. (similarity)
 $1 + 6 = 2 + 5$, $1 + 11 = 3 + 9$, $1 + 16 = 4 + 13$, etc.
Also $1 + 14 = 2 + 13$, $2 + 12 = 4 + 10$, etc.
In general, the sum of the two numbers at diagonally opposite corners of any rectangle or sub-square within the reversible square will equal the sum of the two numbers at the other pair of diagonally opposite corners.
2. Note also that $1 + 4 = 2 + 3$, $1 + 13 = 5 + 9$, $9 + 12 = 10 + 11$, etc. In general the sum of the first and last numbers in each row or column equal the sum of the next and the next to last number in each row or column, etc. (reverse similarity).
3. Integers 1 and 2 must appear in the same row or column”.

Думаем, что перечисленные свойства не нуждаются в переводе, так как они показаны на конкретных примерах соответствующих сумм чисел (см. **рис. 5.10**). В третьем пункте определения говорится, что числа 1 и 2 должны находиться в одной строке или в одном столбце квадрата. Заметим: обратимый квадрат является ассоциативным.

Обратимый квадрат называется *уникальным*, если в нём выполняется свойство: в любой строке и в любом столбце числа следуют в порядке возрастания. Понятно, что обратимый квадрат, изображённый на **рис. 5.10**, является уникальным. Для порядка 4 существует три уникальных обратимых квадрата. Каждый уникальный обратимый квадрат порождает группу из обратимых квадратов. Количество квадратов в каждой группе вычисляется по следующей формуле:

$$M_n = 2^{n-2} \{(1/2 * n)!\}^2$$

Например, при $n = 4$ имеем: $M_n = 16$, то есть каждый уникальный обратимый квадрат 4-го порядка порождает группу из 16 квадратов. Следовательно, всего существует 48 обратимых квадратов 4-го порядка.

Для порядка 8 существует 10 уникальных обратимых квадратов. Каждый из уникальных квадратов порождает группу из 36864 обратимых квадратов. Таким образом, всего существует 368640 обратимых квадратов 8-го порядка.

В (31) приведена одна группа обратимых квадратов 4-го порядка. Вот эта группа:

1 2 3 4	1 2 3 4	5 6 7 8	5 6 7 8
5 6 7 8	9 10 11 12	1 2 3 4	13 14 15 16
9 10 11 12	5 6 7 8	13 14 15 16	1 2 3 4
13 14 15 16	13 14 15 16	9 10 11 12	9 10 11 12
.			
1 3 2 4	1 3 2 4	5 7 6 8	5 7 6 8
5 7 6 8	9 11 10 12	1 3 2 4	13 15 14 16
9 11 10 12	5 7 6 8	13 15 14 16	1 3 2 4
13 15 14 16	13 15 14 16	9 11 10 12	9 11 10 12
.			
2 1 4 3	2 1 4 3	6 5 8 7	6 5 8 7
6 5 8 7	10 9 12 11	2 1 4 3	14 13 16 15
10 9 12 11	6 5 8 7	14 13 16 15	2 1 4 3
14 13 16 15	14 13 16 15	10 9 12 11	10 9 12 11
.			
2 4 1 3	2 4 1 3	6 8 5 7	6 8 5 7
6 8 5 7	10 12 9 11	2 4 1 3	14 16 13 15
10 12 9 11	6 8 5 7	14 16 13 15	2 4 1 3
14 16 13 15	14 16 13 15	10 12 9 11	10 12 9 11

Было установлено (см. [12]), что между обратимыми и совершенными квадратами существует взаимнооднозначное соответствие, то есть каждому обратимому квадрату соответствует один и только один совершенный квадрат. Благодаря такому соответствию между обратимыми и совершенными квадратами был получен метод построения совершенных квадратов из обратимых.

Метод превращения любого обратимого квадрата в совершенный изложен во многих англоязычных статьях, например, в (31). Однако во всех вариантах изложения, которые встречал автор, превращение обратимого квадрата в совершенный выполняется в три этапа, при этом третий этап является преобразованием квадрата, заданным в системе координат. Автором предлагается матричная форма преобразования, которая позволяет сразу превращать любой обратимый квадрат в совершенный квадрат.

Продemonстрируем этот вариант метода на конкретных примерах. Начнём с квадрата 4-го порядка. Обозначим матрицу этого обратимого квадрата $A(a_{ij})$. Тогда совершенный квадрат, полученный из этого обратимого квадрата, будет иметь матрицу $B = f(A)$, которую вы видите на **рис. 5.11**.

a_{11}	a_{43}	a_{14}	a_{42}
a_{24}	a_{32}	a_{21}	a_{33}
a_{41}	a_{13}	a_{44}	a_{12}
a_{34}	a_{22}	a_{31}	a_{23}

Рис. 5.11

Это и есть то матричное преобразование, которое надо применить к обратимому квадрату 4-го порядка, чтобы получить из него совершенный квадрат. Применим это

преобразование к самому простому обратимому квадрату с **рис. 5.10**. В результате получится следующий совершенный квадрат (**рис. 5.12**):

1	15	6	12
8	10	3	13
11	5	16	2
14	4	9	7

Рис. 5.12

Понятно, что матричное преобразование очень легко запрограммировать. Написав программу для этого преобразования, вы с её помощью можете получить совершенный квадрат из любого обратимого квадрата. Читателям предлагается построить совершенные квадраты 4-го порядка из всех обратимых квадратов, приведённых выше, исключая самый простой обратимый квадрат, превращение которого в совершенный квадрат уже показано.

А теперь покажем матрицу обратного преобразования, то есть преобразования, которое превращает совершенный квадрат в обратимый квадрат. Пусть совершенный квадрат имеет матрицу $B(b_{ij})$, тогда обратимый квадрат, соответствующий данному совершенному квадрату, будет иметь матрицу $C = g(B)$, которую вы видите на **рис. 5.13**.

b_{11}	b_{34}	b_{32}	b_{13}
b_{23}	b_{42}	b_{44}	b_{21}
b_{43}	b_{22}	b_{24}	b_{41}
b_{31}	b_{14}	b_{12}	b_{33}

Рис. 5.13

Приведём пример применения этого преобразования. Возьмём в качестве исходного квадрата следующий совершенный квадрат (**рис. 5.14**):

1	8	13	12
14	11	2	7
4	5	16	9
15	10	3	6

Рис. 5.14

Применив к этому квадрату преобразование, описанное матрицей с **рис. 5.13**, получаем соответствующий данному квадрату обратимый квадрат, который вы видите на **рис. 5.15**.

1	9	5	13
2	10	6	14
3	11	7	15
4	12	8	16

Рис. 5.15

Понятно, что если применить к обратимому квадрату с **рис. 5.15** преобразование, описанное матрицей с **рис. 5.11**, то получится совершенный квадрат с **рис. 5.14**. Попробуйте!

Аналогично составляется матричное преобразование для превращения любого обратимого квадрата 8-го порядка в совершенный квадрат. Матрица этого преобразования изображена на **рис. 5.16**.

a_{11}	a_{87}	a_{13}	a_{85}	a_{18}	a_{82}	a_{16}	a_{84}
a_{28}	a_{72}	a_{26}	a_{74}	a_{21}	a_{77}	a_{23}	a_{75}
a_{31}	a_{67}	a_{33}	a_{65}	a_{38}	a_{62}	a_{36}	a_{64}
a_{48}	a_{52}	a_{46}	a_{54}	a_{41}	a_{57}	a_{43}	a_{55}
a_{81}	a_{17}	a_{83}	a_{15}	a_{88}	a_{12}	a_{86}	a_{14}
a_{78}	a_{22}	a_{76}	a_{24}	a_{71}	a_{27}	a_{73}	a_{25}
a_{61}	a_{37}	a_{63}	a_{35}	a_{68}	a_{32}	a_{66}	a_{34}
a_{58}	a_{42}	a_{56}	a_{44}	a_{51}	a_{47}	a_{53}	a_{45}

Рис. 5.16

На **рис. 5.17** изображён самый простой обратимый квадрат 8-го порядка, а на **рис. 5.18** совершенный квадрат, полученный из него данным матричным преобразованием.

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

Рис. 5.17

1	63	3	61	8	58	6	60
16	50	14	52	9	55	11	53
17	47	19	45	24	42	22	44
32	34	30	36	25	39	27	37
57	7	59	5	64	2	62	4
56	10	54	12	49	15	51	13
41	23	43	21	48	18	46	20
40	26	38	28	33	31	35	29

Рис. 5.18

Покажем матрицу обратного преобразования. Пусть исходный совершенный квадрат имеет матрицу $B(b_{ij})$. Тогда соответствующий этому квадрату обратимый квадрат будет иметь матрицу $C = g(B)$, которую вы видите на **рис. 5.19**.

b_{11}	b_{56}	b_{13}	b_{58}	b_{54}	b_{17}	b_{52}	b_{15}
b_{25}	b_{62}	b_{27}	b_{64}	b_{68}	b_{23}	b_{66}	b_{21}
b_{31}	b_{76}	b_{33}	b_{78}	b_{74}	b_{37}	b_{72}	b_{35}
b_{45}	b_{82}	b_{47}	b_{84}	b_{88}	b_{43}	b_{86}	b_{41}
b_{85}	b_{42}	b_{87}	b_{44}	b_{48}	b_{83}	b_{46}	b_{81}
b_{71}	b_{36}	b_{73}	b_{38}	b_{34}	b_{77}	b_{32}	b_{75}
b_{65}	b_{22}	b_{67}	b_{24}	b_{28}	b_{63}	b_{26}	b_{61}
b_{51}	b_{16}	b_{53}	b_{18}	b_{14}	b_{57}	b_{12}	b_{55}

Рис. 5.19

Применим это матричное преобразование к совершенному квадрату, изображённому на **рис. 5.7**. В результате получим обратимый квадрат, показанный на **рис. 5.20**.

1	2	3	4	9	10	11	12
5	6	7	8	13	14	15	16
17	18	19	20	25	26	27	28
21	22	23	24	29	30	31	32
33	34	35	36	41	42	43	44
37	38	39	40	45	46	47	48
49	50	51	52	57	58	59	60
53	54	55	56	61	62	63	64

Рис. 5.20

Это второй уникальный обратимый квадрат 8-го порядка (первый уникальный обратимый квадрат изображён на **рис. 5.17**, это самый простой обратимый квадрат, заполненный числами в естественном порядке). Покажем ещё пять уникальных обратимых квадрата 8-го порядка (**рис. 5.21 – 5.25**). Остальные три уникальных обратимых квадратов предлагается составить читателям.

1	2	3	4	33	34	35	36
5	6	7	8	37	38	39	40
9	10	11	12	41	42	43	44
13	14	15	16	45	46	47	48
17	18	19	20	49	50	51	52
21	22	23	24	53	54	55	56
25	26	27	28	57	58	59	60
29	30	31	32	61	62	63	64

Рис. 5.21

1	2	9	10	33	34	41	42
3	4	11	12	35	36	43	44
5	6	13	14	37	38	45	46
7	8	15	16	39	40	47	48
17	18	25	26	49	50	57	58
19	20	27	28	51	52	59	60
21	22	29	30	53	54	61	62
23	24	31	32	55	56	63	64

Рис. 5.22

1	2	3	4	17	18	19	20
5	6	7	8	21	22	23	24
9	10	11	12	25	26	27	28
13	14	15	16	29	30	31	32
33	34	35	36	49	50	51	52
37	38	39	40	53	54	55	56
41	42	43	44	57	58	59	60
45	46	47	48	61	62	63	64

Рис. 5.23

1	2	5	6	9	10	13	14
3	4	7	8	11	12	15	16
17	18	21	22	25	26	29	30
19	20	23	24	27	28	31	32
33	34	37	38	41	42	45	46
36	36	39	40	43	44	47	48
49	50	53	54	57	58	61	62
51	52	55	56	59	60	63	64

Рис. 5.24

1	2	5	6	17	18	21	22
3	4	7	8	19	20	23	24
9	10	13	14	25	26	29	30
11	12	15	16	27	28	31	32
33	34	37	38	49	50	53	54
35	36	39	40	51	52	55	56
41	42	45	46	57	58	61	62
43	44	47	48	59	60	63	64

Рис. 5.25

Покажем ещё одно превращение обратимого квадрата в совершенный квадрат с помощью матричного преобразования, изображённого на **рис. 5.16**. В качестве исходного квадрата возьмём обратимый квадрат с **рис. 5.21**. Готовый совершенный квадрат вы видите на **рис. 5.26**.

1	63	3	61	36	30	34	32
40	26	38	28	5	59	7	57
9	55	11	53	44	22	42	24
48	18	46	20	13	51	15	49
29	35	31	33	64	2	62	4
60	6	58	8	25	39	27	37
21	43	23	41	56	10	54	12
52	14	50	16	17	47	19	45

Рис. 5.26

Наконец, покажем матричное преобразование для порядка 12 (рис. 5.27).

$a_{1,1}$	$a_{12,11}$	$a_{1,3}$	$a_{12,9}$	$a_{1,5}$	$a_{12,7}$	$a_{1,12}$	$a_{12,2}$	$a_{1,10}$	$a_{12,4}$	$a_{1,8}$	$a_{12,6}$
$a_{2,12}$	$a_{11,2}$	$a_{2,10}$	$a_{11,4}$	$a_{2,8}$	$a_{11,6}$	$a_{2,1}$	$a_{11,11}$	$a_{2,3}$	$a_{11,9}$	$a_{2,5}$	$a_{11,7}$
$a_{3,1}$	$a_{10,11}$	$a_{3,3}$	$a_{10,9}$	$a_{3,5}$	$a_{10,7}$	$a_{3,12}$	$a_{10,2}$	$a_{3,10}$	$a_{10,4}$	$a_{3,8}$	$a_{10,6}$
$a_{4,12}$	$a_{9,2}$	$a_{4,10}$	$a_{9,4}$	$a_{4,8}$	$a_{9,6}$	$a_{4,1}$	$a_{9,11}$	$a_{4,3}$	$a_{9,9}$	$a_{4,5}$	$a_{9,7}$
$a_{5,1}$	$a_{8,11}$	$a_{5,3}$	$a_{8,9}$	$a_{5,5}$	$a_{8,7}$	$a_{5,12}$	$a_{8,2}$	$a_{5,10}$	$a_{8,4}$	$a_{5,8}$	$a_{8,6}$
$a_{6,12}$	$a_{7,2}$	$a_{6,10}$	$a_{7,4}$	$a_{6,8}$	$a_{7,6}$	$a_{6,1}$	$a_{7,11}$	$a_{6,3}$	$a_{7,9}$	$a_{6,5}$	$a_{7,7}$
$a_{12,1}$	$a_{1,11}$	$a_{12,3}$	$a_{1,9}$	$a_{12,5}$	$a_{1,7}$	$a_{12,12}$	$a_{1,2}$	$a_{12,10}$	$a_{1,4}$	$a_{12,8}$	$a_{1,6}$
$a_{11,12}$	$a_{2,2}$	$a_{11,10}$	$a_{2,4}$	$a_{11,8}$	$a_{2,6}$	$a_{11,1}$	$a_{2,11}$	$a_{11,3}$	$a_{2,9}$	$a_{11,5}$	$a_{2,7}$
$a_{10,1}$	$a_{3,11}$	$a_{10,3}$	$a_{3,9}$	$a_{10,5}$	$a_{3,7}$	$a_{10,12}$	$a_{3,2}$	$a_{10,10}$	$a_{3,4}$	$a_{10,8}$	$a_{3,6}$
$a_{9,12}$	$a_{4,2}$	$a_{9,10}$	$a_{4,4}$	$a_{9,8}$	$a_{4,6}$	$a_{9,1}$	$a_{4,11}$	$a_{9,3}$	$a_{4,9}$	$a_{9,5}$	$a_{4,7}$
$a_{8,1}$	$a_{5,11}$	$a_{8,3}$	$a_{5,9}$	$a_{8,5}$	$a_{5,7}$	$a_{8,12}$	$a_{5,2}$	$a_{8,10}$	$a_{5,4}$	$a_{8,8}$	$a_{5,6}$
$a_{7,12}$	$a_{6,2}$	$a_{7,10}$	$a_{6,4}$	$a_{7,8}$	$a_{6,6}$	$a_{7,1}$	$a_{6,11}$	$a_{7,3}$	$a_{6,9}$	$a_{7,5}$	$a_{6,7}$

Рис. 5.27

Самый простой обратимый квадрат 12-го порядка не показываем, потому что читатели уже знают, как составлять самые простые обратимые квадраты (см. рис. 5.10 и рис. 5.17). На рис. 5.28 показан совершенный квадрат 12-го порядка, полученный данным матричным преобразованием из самого простого обратимого квадрата.

1	143	3	141	5	139	12	134	10	136	8	138
24	122	22	124	20	126	13	131	15	129	17	127
25	119	27	117	29	115	36	110	34	112	32	114
48	98	46	100	44	102	37	107	39	105	41	103
49	95	51	93	53	91	60	86	58	88	56	90
72	74	70	76	68	78	61	83	63	81	65	79
133	11	135	9	137	7	144	2	142	4	140	6
132	14	130	16	128	18	121	23	123	21	125	19
109	35	111	33	113	31	120	26	118	28	116	30
108	38	106	40	104	42	97	47	99	45	101	43
85	59	87	57	89	55	96	50	94	52	92	54
84	62	82	64	80	66	73	71	75	69	77	67

Рис. 5.28

Теперь составим матрицу обратного преобразования, которое превращает совершенный квадрат в обратимый. Пусть исходный совершенный квадрат имеет матрицу $B(b_{ij})$, тогда соответствующий ему обратимый квадрат будет иметь матрицу $C = g(B)$, которую вы видите на **рис. 5.29**.

$b_{1,1}$	$b_{7,8}$	$b_{1,3}$	$b_{7,10}$	$b_{1,5}$	$b_{7,12}$	$b_{7,6}$	$b_{1,11}$	$b_{7,4}$	$b_{1,9}$	$b_{7,2}$	$b_{1,7}$
$b_{2,7}$	$b_{8,2}$	$b_{2,9}$	$b_{8,4}$	$b_{2,11}$	$b_{8,6}$	$b_{8,12}$	$b_{2,5}$	$b_{8,10}$	$b_{2,3}$	$b_{8,8}$	$b_{2,1}$
$b_{3,1}$	$b_{9,8}$	$b_{3,3}$	$b_{9,10}$	$b_{3,5}$	$b_{9,12}$	$b_{9,6}$	$b_{3,11}$	$b_{9,4}$	$b_{3,9}$	$b_{9,2}$	$b_{3,7}$
$b_{4,7}$	$b_{10,2}$	$b_{4,9}$	$b_{10,4}$	$b_{4,11}$	$b_{10,6}$	$b_{10,12}$	$b_{4,5}$	$b_{10,10}$	$b_{4,3}$	$b_{10,8}$	$b_{4,1}$
$b_{5,1}$	$b_{11,8}$	$b_{5,3}$	$b_{11,10}$	$b_{5,5}$	$b_{11,12}$	$b_{11,6}$	$b_{5,11}$	$b_{11,4}$	$b_{5,9}$	$b_{11,2}$	$b_{5,7}$
$b_{6,7}$	$b_{12,2}$	$b_{6,9}$	$b_{12,4}$	$b_{6,11}$	$b_{12,6}$	$b_{12,12}$	$b_{6,5}$	$b_{12,10}$	$b_{6,3}$	$b_{12,8}$	$b_{6,1}$
$b_{12,7}$	$b_{6,2}$	$b_{12,9}$	$b_{6,4}$	$b_{12,11}$	$b_{6,6}$	$b_{6,12}$	$b_{12,5}$	$b_{6,10}$	$b_{12,3}$	$b_{6,8}$	$b_{12,1}$
$b_{11,1}$	$b_{5,8}$	$b_{11,3}$	$b_{5,10}$	$b_{11,5}$	$b_{5,12}$	$b_{5,6}$	$b_{11,11}$	$b_{5,4}$	$b_{11,9}$	$b_{5,2}$	$b_{11,7}$
$b_{10,7}$	$b_{4,2}$	$b_{10,9}$	$b_{4,4}$	$b_{10,11}$	$b_{4,6}$	$b_{4,12}$	$b_{10,5}$	$b_{4,10}$	$b_{10,3}$	$b_{4,8}$	$b_{10,1}$
$b_{9,1}$	$b_{3,8}$	$b_{9,3}$	$b_{3,10}$	$b_{9,5}$	$b_{3,12}$	$b_{3,6}$	$b_{9,11}$	$b_{3,4}$	$b_{9,9}$	$b_{3,2}$	$b_{9,7}$
$b_{8,7}$	$b_{2,2}$	$b_{8,9}$	$b_{2,4}$	$b_{8,11}$	$b_{2,6}$	$b_{2,12}$	$b_{8,5}$	$b_{2,10}$	$b_{8,3}$	$b_{2,8}$	$b_{8,1}$
$b_{7,1}$	$b_{1,8}$	$b_{7,3}$	$b_{1,10}$	$b_{7,5}$	$b_{1,12}$	$b_{1,6}$	$b_{7,11}$	$b_{1,4}$	$b_{7,9}$	$b_{1,2}$	$b_{7,7}$

Рис. 5.29

Применим это преобразование к совершенному квадрату, представленному на **рис. 5.2**. Соответствующий обратимый квадрат вы видите на **рис. 5.30**.

65	52	82	50	49	67	66	84	83	51	81	68
29	16	46	14	13	31	30	48	47	15	45	32
25	12	42	10	9	27	26	44	43	11	41	28
21	8	38	6	5	23	22	40	39	7	37	24
17	4	34	2	1	19	18	36	35	3	33	20
73	60	90	58	57	75	74	92	91	59	89	76
69	56	86	54	53	71	70	88	87	55	85	72
125	112	142	110	109	127	126	144	143	111	141	128
121	108	138	106	105	123	122	140	139	107	137	124
117	104	134	102	101	119	118	136	135	103	133	120
113	100	130	98	97	115	114	132	131	99	129	116
77	64	94	62	61	79	78	96	95	63	93	80

Рис. 5.30

Понятно, что этот обратимый квадрат не входит в группу, порождаемую самым простым уникальным квадратом 12-го порядка (со вписанными по порядку числами). Очевидно и то, что этот квадрат не является уникальным. Можно предложить такую задачу: составить уникальный квадрат 12-ого порядка, в группу которого входит квадрат с **рис. 5.30**.

В заключение покажем матричное преобразование для превращения обратимого квадрата любого прядка $n = 4k$ в совершенный квадрат (**рис. 5.31**).

$a_{1,1}$	$a_{n,n-1}$	$a_{1,3}$	$a_{n,n-3}$...	$a_{n,k+1}$	$a_{1,n}$	$a_{n,2}$	$a_{1,n-2}$	$a_{n,4}$...	$a_{12,k}$
$a_{2,n}$	$a_{n-1,2}$	$a_{2,n-2}$	$a_{n-1,4}$...	$a_{n-1,k}$	$a_{2,1}$	$a_{n-1,n-1}$	$a_{2,3}$	$a_{n-1,n-3}$...	$a_{n-1,k+1}$
$a_{3,1}$	$a_{n-2,n-1}$	$a_{3,3}$	$a_{n-2,n-3}$...	$a_{n-2,k+1}$	$a_{3,n}$	$a_{n-2,2}$	$a_{3,n-2}$	$a_{n-2,4}$...	$a_{n-2,k}$
...
$a_{k-2,n}$	$a_{k+3,2}$	$a_{k-2,n-2}$	$a_{k+3,4}$...	$a_{k+3,k}$	$a_{k-2,1}$	$a_{k+3,n-1}$	$a_{k-2,3}$	$a_{k+3,n-3}$...	$a_{k+3,k+1}$
$a_{k-1,1}$	$a_{k+2,n-1}$	$a_{k-1,3}$	$a_{k+2,n-3}$...	$a_{k+2,k+1}$	$a_{k-1,n}$	$a_{k+2,2}$	$a_{k-1,n-2}$	$a_{k+2,4}$...	$a_{k+2,k}$
$a_{k,n}$	$a_{k+1,2}$	$a_{k,n-2}$	$a_{k+1,4}$...	$a_{k+1,k}$	$a_{k,1}$	$a_{k+1,n-1}$	$a_{k,3}$	$a_{k+1,n-3}$...	$a_{k+1,k+1}$
$a_{n,1}$	$a_{1,n-1}$	$a_{n,3}$	$a_{1,n-3}$...	$a_{1,k+1}$	$a_{n,n}$	$a_{1,2}$	$a_{n,n-2}$	$a_{1,4}$...	$a_{1,k}$
$a_{n-1,n}$	$a_{2,2}$	$a_{n-1,n-2}$	$a_{2,4}$...	$a_{2,k}$	$a_{n-1,1}$	$a_{2,n-1}$	$a_{n-1,3}$	$a_{2,n-3}$...	$a_{2,k+1}$
$a_{n-2,1}$	$a_{3,n-1}$	$a_{n-2,3}$	$a_{3,n-3}$...	$a_{3,k+1}$	$a_{n-2,n}$	$a_{3,2}$	$a_{n-2,n-2}$	$a_{3,4}$...	$a_{3,k}$
...
$a_{k+3,n}$	$a_{k-2,2}$	$a_{k+3,n-2}$	$a_{k-2,4}$...	$a_{k-2,k}$	$a_{k+3,1}$	$a_{k-2,n-1}$	$a_{k+3,3}$	$a_{k-2,n-3}$...	$a_{k-2,k+1}$
$a_{k+2,1}$	$a_{k-1,n-1}$	$a_{k+2,3}$	$a_{k-1,n-3}$...	$a_{k-1,k+1}$	$a_{k+2,n}$	$a_{k-1,2}$	$a_{k+2,n-2}$	$a_{k-1,4}$...	$a_{k-1,k}$
$a_{k+1,n}$	$a_{k,2}$	$a_{k+1,n-2}$	$a_{k,4}$...	$a_{k,k}$	$a_{k+1,1}$	$a_{k,n-1}$	$a_{k+1,3}$	$a_{k,n-3}$...	$a_{k,k+1}$

Рис. 5.31

Используя эту матрицу, вы можете написать матричное преобразование, превращающее обратимые квадраты любого порядка $n = 4k$ в совершенные квадраты.

Предлагается задача: составить матрицу обратного преобразования в общем виде.

5.3 МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ОБОБЩЁННЫХ ЛАТИНСКИХ КВАДРАТОВ

Рассматриваемый здесь метод - это уже хорошо известный читателям метод латинских квадратов. Для построения совершенного магического квадрата составляется пара ортогональных обобщённых латинских квадратов. Метод излагается по [8].

Главное в данном методе – построить первый вспомогательный обобщённый латинский квадрат. Второй вспомогательный обобщённый латинский квадрат, ортогональный первому латинскому квадрату, получается из первого квадрата поворотом на 90 градусов вокруг центра квадрата по часовой стрелке. Построение первого вспомогательного обобщённого латинского квадрата порядка $n = 4k$ выполняется следующим образом: каждая строка нижней половины квадрата заполняется путём последовательного чередования чисел i и $n-i-1$, где i – порядковый номер строки (строки нумеруются снизу вверх целыми числами от 0 до $n-1$); верхняя половина квадрата получается из нижней отражением относительно вертикальной оси симметрии.

Формула для построения магического квадрата из пары ортогональных латинских квадратов читателям тоже известна. Однако напомним эту формулу. Обозначим элементы первого латинского квадрата a_{ij} , элементы второго латинского квадрата – b_{ij} , тогда каждый соответствующий элемент совершенного квадрата c_{ij} получается по формуле:

$$c_{ij} = n \cdot a_{ij} + b_{ij} + 1$$

Отметим, что первый и второй латинские квадраты в этой формуле равноправны, то есть их можно менять местами.

Продemonстрируем описанный метод на конкретных примерах. Начнём с квадрата минимального порядка $n = 4$.

На рис. 5.32 вы видите первый обобщённый латинский квадрат, на рис. 5.33 – второй, а на рис. 5.34 – готовый совершенный квадрат 4-го порядка.

2	1	2	1
3	0	3	0
1	2	1	2
0	3	0	3

Рис. 5.32

0	1	3	2
3	2	0	1
0	1	3	2
3	2	0	1

Рис. 5.33

9	6	12	7
16	3	13	2
5	10	8	11
4	15	1	14

Рис. 5.34

Далее идёт пример из [8] (стр. 119) для квадрата 8-го порядка. На **рис. 5.35** изображён первый обобщённый латинский квадрат, на **рис. 5.36** – второй, а на **рис. 5.37** вы видите готовый совершенный квадрат 8-го порядка.

4	3	4	3	4	3	4	3
5	2	5	2	5	2	5	2
6	1	6	1	6	1	6	1
7	0	7	0	7	0	7	0
3	4	3	4	3	4	3	4
2	5	2	5	2	5	2	5
1	6	1	6	1	6	1	6
0	7	0	7	0	7	0	7

Рис. 5.35

0	1	2	3	7	6	5	4
7	6	5	4	0	1	2	3
0	1	2	3	7	6	5	4
7	6	5	4	0	1	2	3
0	1	2	3	7	6	5	4
7	6	5	4	0	1	2	3
0	1	2	3	7	6	5	4
7	6	5	4	0	1	2	3

Рис. 5.36

33	26	35	28	40	31	38	29
48	23	46	21	41	18	43	20
49	10	51	12	56	15	54	13
64	7	62	5	57	2	59	4
25	34	27	36	32	39	30	37
24	47	22	45	17	42	19	44
9	50	11	52	16	55	14	53
8	63	6	61	1	58	3	60

Рис. 5.37

Как уже сказано, совершенные квадраты остаются совершенными при параллельных переносах на торе. Применим к квадрату с **рис. 5.37** преобразование параллельного переноса на торе с целью превратить его в квадрат, начинающийся с числа 1. Полученный совершенный квадрат вы видите на **рис. 5.38**.

1	58	3	60	8	63	6	61
40	31	38	29	33	26	35	28
41	18	43	20	48	23	46	21
56	15	54	13	49	10	51	12
57	2	59	4	64	7	62	5
32	39	30	37	25	34	27	36
17	42	19	44	24	47	22	45
16	55	14	53	9	50	11	52

Рис. 5.38

Посмотрите ещё один пример – построение рассматриваемым методом совершенного квадрата 12-го порядка. На **рис. 5.39** вы видите первый обобщённый латинский квадрат. Второй латинский квадрат не показываем в этом примере, читателям предоставляется самостоятельно повернуть первый латинский квадрат на 90 градусов по часовой стрелке.

6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5
7	4	7	4	7	4	7	4	7	4	7	4
8	3	8	3	8	3	8	3	8	3	8	3
9	2	9	2	9	2	9	2	9	2	9	2
10	1	10	1	10	1	10	1	10	1	10	1
11	0	11	0	11	0	11	0	11	0	11	0
5	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6
4	7	4	7	4	7	4	7	4	7	4	7
3	8	3	8	3	8	3	8	3	8	3	8
2	9	2	9	2	9	2	9	2	9	2	9
1	10	1	10	1	10	1	10	1	10	1	10
0	11	0	11	0	11	0	11	0	11	0	11

Рис. 5.39

На **рис. 5.40** изображён совершенный квадрат 12-го порядка, построенный из данной пары ортогональных обобщённых латинских квадратов.

73	62	75	64	77	66	84	71	82	69	80	67
96	59	94	57	92	55	85	50	87	52	89	54
97	38	99	40	101	42	108	47	106	45	104	43
120	35	118	33	116	31	109	26	111	28	113	30
121	14	123	16	125	18	132	23	130	21	128	19
144	11	142	9	140	7	133	2	135	4	137	6
61	74	63	76	65	78	72	83	70	81	68	79
60	95	58	93	56	91	49	86	51	88	53	90
37	98	39	100	41	102	48	107	46	105	44	103
36	119	34	117	32	115	25	110	27	112	29	114
13	122	15	124	17	126	24	131	22	129	20	127
12	143	10	141	8	139	1	134	3	136	5	138

Рис. 5.40

Точно так же, как было показано для квадрата 8-го порядка, этот совершенный квадрат можно перенести на торе, сделав его начинающимся с числа 1.

Понятно, что описанный метод легко запрограммировать. По программе вы сможете построить совершенный квадрат любого порядка.

В (36) дан оригинальный метод построения совершенных квадратов с применением метода качелей.

Если замостить всю плоскость копиями какого-либо совершенного квадрата, прилегающими друг к другу, получится совершенная плоскость. На этой плоскости любой очерченный квадрат данного порядка будет совершенным. О совершенной плоскости рассказано в разделе 3.2.

5.4 ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СОВЕРШЕННЫХ КВАДРАТОВ

Как уже отмечено, совершенные квадраты остаются совершенными при основных преобразованиях и при параллельных переносах на торе. Есть ещё преобразование, которое переводит совершенные квадраты в совершенные, – преобразование взятия дополнения (см. раздел 3.3). Покажем один пример. Применим преобразование взятия дополнения к совершенному квадрату с **рис. 5.37**. В результате получим такой совершенный квадрат (**рис. 5.41**):

32	39	30	37	25	34	27	36
17	42	19	44	24	47	22	45
16	55	14	53	9	50	11	52
1	58	3	60	8	63	6	61
40	31	38	29	33	26	35	28
41	18	43	20	48	23	46	21
56	15	54	13	49	10	51	12
57	2	59	4	64	7	62	5

Рис. 5.41

Кроме того, в совершенных квадратах возможны другие преобразования благодаря их уникальной структуре. Совершенные квадраты составлены из блоков 2×2 , сумма чисел в которых одинакова. Поэтому в совершенных квадратах возможны такие преобразования, как перестановка строк (столбцов) в блоках 2×2 , перестановка чисел в диагоналях блоков 2×2 , перестановка самих блоков 2×2 . Покажем эти преобразования. Для демонстрации преобразований возьмём совершенный квадрат 8-го порядка, изображённый на **рис. 5.42**.

1	16	17	32	53	60	37	44
63	50	47	34	11	6	27	22
3	14	19	30	55	58	39	42
61	52	45	36	9	8	25	24
12	5	28	21	64	49	48	33
54	59	38	43	2	15	18	31
10	7	26	23	62	51	46	35
56	57	40	41	4	13	20	29

Рис. 5.42

Преобразование 1. Перестановка столбцов в блоках 2×2 . Преобразование равносильно перестановке столбцов в исходном квадрате. Полученный в результате этого преобразования совершенный квадрат вы видите на **рис. 5.43**.

16	1	32	17	60	53	44	37
50	63	34	47	6	11	22	27
14	3	30	19	58	55	42	39
52	61	36	45	8	9	24	25
5	12	21	28	49	64	33	48
59	54	43	38	15	2	31	18
7	10	23	26	51	62	35	46
57	56	41	40	13	4	29	20

Рис. 5.43

Преобразование 2. Перестановка строк в блоках 2×2 . Это преобразование равносильно перестановке строк в исходном квадрате. Полученный совершенный квадрат изображён на **рис. 5.44**.

63	50	47	34	11	6	27	22
1	16	17	32	53	60	37	44
61	52	45	36	9	8	25	24
3	14	19	30	55	58	39	42
54	59	38	43	2	15	18	31
12	5	28	21	64	49	48	33
56	57	40	41	4	13	20	29
10	7	26	23	62	51	46	35

Рис. 5.44

Преобразование 3. Перестановка чисел в диагоналях блоков 2×2 . Это преобразование равносильно одновременной перестановке строк и столбцов в блоках 2×2 или перестановке строк и столбцов в исходном квадрате. Новый совершенный квадрат показан на **рис. 5.45**.

50	63	34	47	6	11	22	27
16	1	32	17	60	53	44	37
52	61	36	45	8	9	24	25
14	3	30	19	58	55	42	39
59	54	43	38	15	2	31	18
5	12	21	28	49	64	33	48
57	56	41	40	13	4	29	20
7	10	23	26	51	62	35	46

Рис. 5.45

Преобразование 4. Теперь переставляем целые блоки; в каждом угловом квадрате 4×4 исходного квадрата с **рис. 5.42** переставляются блоки по обеим диагоналям. Полученный в результате этого преобразования совершенный квадрат представлен на **рис. 5.46**.

19	30	3	14	39	42	55	58
45	36	61	52	25	24	9	8
17	32	1	16	37	44	53	60
47	34	63	50	27	22	11	6
26	23	10	7	46	35	62	51
40	41	56	57	20	29	4	13
28	21	12	5	48	33	64	49
38	43	54	59	18	31	2	15

Рис. 5.46

Преобразование 5. В этом преобразовании тоже переставляются блоки 2×2 таким образом: угловые блоки переставляются по диагоналям квадрата, в центральном квадрате 4×4 блоки тоже переставляются по диагоналям. Полученный совершенный квадрат изображён на **рис. 5.47**.

46	35	17	32	53	60	10	7
20	29	47	34	11	6	56	57
3	14	64	49	28	21	39	42
61	52	2	15	38	43	25	24
12	5	55	58	19	30	48	33
54	59	9	8	45	36	18	31
37	44	26	23	62	51	1	16
27	22	40	41	4	13	63	50

Рис. 5.47

Преобразование 6. Далее будем преобразовывать только что полученный совершенный квадрат с **рис. 5.47**. Снова переставим столбцы в блоках 2×2 , что

равносильно перестановке столбцов в самом квадрате 8x8. Смотрите новый совершенный квадрат на **рис. 5.48**.

35	46	32	17	60	53	7	10
29	20	34	47	6	11	57	56
14	3	49	64	21	28	42	39
52	61	15	2	43	38	24	25
5	12	58	55	30	19	33	48
59	54	8	9	36	45	31	18
44	37	23	26	51	62	16	1
22	27	41	40	13	4	50	63

Рис. 5.48

Преобразование 7. Переставим строки в блоках 2x2 в том же квадрате с **рис. 5.47**. Это преобразование равносильно перестановке строк в этом квадрате. Новый совершенный квадрат вы видите на **рис. 5.49**.

20	29	47	34	11	6	56	57
46	35	17	32	53	60	10	7
61	52	2	15	38	43	25	24
3	14	64	49	28	21	39	42
54	59	9	8	45	36	18	31
12	5	55	58	19	30	48	33
27	22	40	41	4	13	63	50
37	44	26	23	62	51	1	16

Рис. 5.49

Преобразование 8. И последнее преобразование: перестановка чисел по диагоналям блоков 2x2 в том же квадрате с **рис. 5.47**. Преобразование равносильно одновременной перестановке строк и столбцов в блоках 2x2 или перестановке строк и столбцов в самом квадрате. Полученный в результате этого преобразования квадрат изображён на **рис. 5.50**.

29	20	34	47	6	11	57	56
35	46	32	17	60	53	7	10
52	61	15	2	43	38	24	25
14	3	49	64	21	28	42	39
59	54	8	9	36	45	31	18
5	12	58	55	30	19	33	48
22	27	41	40	13	4	50	63
44	37	23	26	51	62	16	1

Рис. 5.50

Итак, с помощью описанных преобразований мы получили из одного совершенного квадрата (**рис. 5.42**) восемь новых совершенных квадратов.

Возможны для совершенных квадратов и преобразования типа “плюс-минус ...”. Приведём два примера. В первом примере два совершенных квадрата 8-го порядка

связаны простым преобразованием “плюс-минус 8”. На **рис. 5.51** изображён исходный совершенный квадрат.

1	16	17	32	50	63	34	47
62	51	46	35	13	4	29	20
5	12	21	28	54	59	38	43
58	55	42	39	9	8	25	24
15	2	31	18	64	49	48	33
52	61	36	45	3	14	19	30
11	6	27	22	60	53	44	37
56	57	40	41	7	10	23	26

Рис. 5.51

На **рис. 5.52** показана матрица преобразования “плюс-минус 8”.

		+8	+8			-8	-8
		-8	-8			+8	+8
		+8	+8			-8	-8
		-8	-8			+8	+8
		+8	+8			-8	-8
		-8	-8			+8	+8
		+8	+8			-8	-8
		-8	-8			+8	+8

Рис. 5.52

Применим это матричное преобразование к квадрату с **рис. 5.51**, в результате получится такой совершенный квадрат (**рис. 5.53**):

1	16	25	40	50	63	26	39
62	51	38	27	13	4	37	28
5	12	29	36	54	59	30	35
58	55	34	31	9	8	33	32
15	2	39	26	64	49	40	25
52	61	28	37	3	14	27	38
11	6	35	30	60	53	36	29
56	57	32	33	7	10	31	34

Рис. 5.53

Во втором примере рассмотрим комбинированное преобразование “плюс-минус ...”. Исходный совершенный квадрат тот же самый (**рис. 5.51**). Матрица преобразования изображена на **рис. 5.54**.

				+3	-3	+3	-3
+1	-1	+1	-1	-2	+2	-2	+2
-2	+2	-2	+2	+1	-1	+1	-1
+3	-3	+3	-3				
-3	+3	-3	+3				
+2	-2	+2	-2	-1	+1	-1	+1
-1	+1	-1	+1	+2	-2	+2	-2
				-3	+3	-3	+3

Рис. 5.54

Такое красивое преобразование переводит исходный квадрат с **рис. 5.51** в совершенный квадрат, изображённый на **рис. 5.42**.

Поскольку совершенные квадраты пандиагональны, к ним применимо преобразование стандартной перестановки строк и/или столбцов (см. раздел 3.8). Это преобразование тоже переводит совершенный квадрат в совершенный. Покажем один пример. Применим преобразование стандартной перестановки строк к совершенному квадрату с **рис. 5.53**. Преобразованный совершенный квадрат показан на **рис. 5.55**.

1	16	25	40	50	63	26	39
56	57	32	33	7	10	31	34
11	6	35	30	60	53	36	29
52	61	28	37	3	14	27	38
15	2	39	26	64	49	40	25
58	55	34	31	9	8	33	32
5	12	29	36	54	59	30	35
62	51	38	27	13	4	37	28

Рис. 5.55

В заключение отметим, что универсальный метод составных квадратов для построения совершенных квадратов не пригоден. Приведём один пример. Возьмём в качестве базового и основного квадратов один и тот же совершенный квадрат 4-го порядка, изображённый на **рис. 5.56**.

1	8	10	15
12	13	3	6
7	2	16	9
14	11	5	4

Рис. 5.56

На **рис. 5.57** вы видите магический квадрат 16-го порядка, построенный методом составных квадратов с использованием квадрата с **рис. 5.56**

1	8	10	15	113	120	122	127	145	152	154	159	225	232	234	239
12	13	3	6	124	125	115	118	156	157	147	150	236	237	227	230
7	2	16	9	119	114	128	121	151	146	160	153	231	226	240	233
14	11	5	4	126	123	117	116	158	155	149	148	238	235	229	228
177	184	186	191	193	200	202	207	33	40	42	47	81	88	90	95
188	189	179	182	204	205	195	198	44	45	35	38	92	93	83	86
183	178	192	185	199	194	208	201	39	34	48	41	87	82	96	89
190	187	181	180	206	203	197	196	46	43	37	36	94	91	85	84
97	104	106	111	17	24	26	31	241	248	250	255	129	136	138	143
108	109	99	102	28	29	19	22	252	253	243	246	140	141	131	134
103	98	112	105	23	18	32	25	247	242	256	249	135	130	144	137
110	107	101	100	30	27	21	20	254	251	245	244	142	139	133	132
209	216	218	223	161	168	170	175	65	72	74	79	49	56	58	63
220	221	211	214	172	173	163	166	76	77	67	70	60	61	51	54
215	210	224	217	167	162	176	169	71	66	80	73	55	50	64	57
222	219	213	212	174	171	165	164	78	75	69	68	62	59	53	52

Рис. 5.57

Этот магический квадрат является пандиагональным, однако совершенным он не является. Интересно отметить, что данный магический квадрат составлен из 16 нетрадиционных совершенных квадратов 4-го порядка.

ПОСЛЕСЛОВИЕ

Уважаемые читатели!

Прошу вас присылать свои вопросы, замечания, пожелания по адресу natalimak1@yandex.ru или в Гостевую книгу сайта www.klassikpoez.narod.ru. Если книга вам понравилась, расскажите о ней своим друзьям и знакомым.

Книга написана по материалам отдельных статей, которые вы найдёте здесь: <http://www.klassikpoez.narod.ru/glavnaja.htm>

Использованы далеко не все материалы, потому что издатель ограничил объём книги. Можно написать продолжение данной книги, и даже не одно.

Следует отметить, что пока версталась книга и шли переговоры о её издании (которые, увы, завершились безрезультатно), я тем временем занималась углубленным изучением метода латинских квадратов и написала по этой теме цикл статей “Новые аспекты метода латинских квадратов” (все статьи выложены на сайте). Эти исследования одновременно коснулись латинских квадратов, в частности методов построения пар ортогональных латинских квадратов, необходимых для построения магических квадратов. Таким образом, я предлагаю для издания ещё одну книгу с рабочим названием “Латинские квадраты”. По данной теме почти отсутствует литература на русском языке, и поэтому предлагаемая книга будет пользоваться большим спросом на книжном рынке.

Обращаюсь ко всем издателям и издательствам с предложением рассмотреть вопрос издания предлагаемых книг о магических и латинских квадратах.

С уважением, Наталия Макарова

15 февраля 2009 г.
г. Саратов

ЛИТЕРАТУРА

Пояснение: в тексте используются ссылки в квадратных и в круглых скобках. Первые относятся к книгам и статьям, изданным (опубликованным) в бумажном виде, вторые относятся к веб-сайтам.

- [1] Я. В. Успенский. Избранные математические развлечения. – Издательство “Сеятель”, 1924
- [2] Б. А. Кордемский. Математическая смекалка. – М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1957
- [3] М. М. Постников. Магические квадраты. – М.: Наука, 1964
- [4] Н.М. Рудин. От магического квадрата к шахматам. М.: Физкультура и спорт, 1969
- [5] Е. Я. Гуревич. Тайна древнего талисмана. – М.: Наука, 1969
- [6] Мартин Гарднер. Математические досуги. – М.: Мир, 1972
- [7] Энциклопедический словарь юного математика. – М.: Педагогика, 1989
- [8] Ю. В. Чебраков. Магические квадраты. Теория чисел, алгебра, комбинаторный анализ. – СПб.: СПб гос. техн. ун-т, 1995
- [9] Ю. В. Чебраков. Теория магических матриц. Выпуск ТММ-1. – Санкт-Петербург: 2008 (электронная версия книги: <http://chebrakov.narod.ru/>)
- [10] М. Гарднер. Путешествие во времени. – М.: Мир, 1990. Электронная версия книги: http://publ.lib.ru/ARCHIVES/G/GARDNER_Martin/Puteshestvie_vo_vremeni.%20%5bdjv%5D.zip
- [11] Gardner. M. Magic Squares and Cubes. Ch. 17 in Time Travel and Other Mathematical Bewilderments. New York: W. H. Freeman, 1988.
- [12] McClintock, E. (1897) On the most perfect forms of magic squares, with methods for their production. American Journal of Mathematics 19 p. 99-120
- [13] Paul C. Pasles (2001) The Lost Squares of Dr. Franklin. American Mathematical Monthly 108(6), p. 489-511. Электронная версия: <http://www.pasles.org/Franklin.html>
- [14] Ollerenshaw, K. (1986) On ‘most perfect’ or ‘complete’ 8 x 8 pandiagonal magic squares. Proceedings of the Royal Society of London A407, p. 259-281 (статья здесь: <http://www.klassikpoez.narod.ru/mk/2397989.pdf>)
- [15] Kathleen Ollerenshaw and David Bree, Most-perfect Pandiagonal Magic Squares, Institute of Mathematics and its Applications, 1988, 0-905091-06-X
- [16] Ian Stewart, Mathematical Recreations column, Scientific American, Nov. 99, p.122-123 (статья здесь: <http://www.klassikpoez.narod.ru/mk/122-123.pdf>)
- [17] C. Bragdon (1936). The Franklin 16x16 Magic Square, Scripta Mathematica 4, p. 158-159.
- [18] B. Rosser, R. Walker, The algebraic theory of diabolic magic squares. Duke Math. Journal, 5, 1939, pp. 705-728.
- [19] Paul C. Pasles (2001). The Lost Squares of Dr. Franklin. *American Mathematical Monthly* 108(6), 489-511. Электронная версия: <http://www.pasles.org/Franklin.html> .
- [20] J.W. Brown и другие. Completion of the Spectrum of Orthogonal Diagonal Latin Squares.
- [20a] R.J.R Abel и другие. Three mutually orthogonal idempotent Latin squares of orders 22 and 26.
- [20б] Soror A.L. WESTERN MANDALAS of TRANSFORMATION
- [20в] Stinson. Latin Squares.

ВЕБ-САЙТЫ

- (21) http://www.stereo.ru/whatiswhat.php?article_id=254
- (22) <http://elementy.ru/blogs/users/ezalegin/31255>
- (23) Е.Я. Гуревич. Тайна древнего талисмана. <http://telesmi.narod.ru/mystic/tlsmn002.htm>
- (24) <http://www.trump.de/magic-squares/howmany.html>
- (25) Н. Макарова. Ассоциативные магические квадраты.
<http://www.klassikpoez.narod.ru/assoc.htm>
- (26) Н. Макарова. Преобразования магических квадратов (часть I).
<http://www.natalimak1.narod.ru/preobraz.htm>
- (27) Н. Макарова. Преобразования магических квадратов (часть II).
<http://www.natalimak1.narod.ru/preobraz1.htm>
- (28) Н. Макарова. Построение идеальных и ассоциативных квадратов нечётного порядка ходом шахматного коня. <http://www.klassikpoez.narod.ru/hodkonem.htm>
- (29) Н. Макарова. Методы построения магических квадратов (часть III).
<http://www.natalimak1.narod.ru/metody3.htm>
- (30) Н. Макарова. Концентрические магические квадраты.
<http://www.natalimak1.narod.ru/concent.htm>
- (31) Most-Perfect Magic Squares. <http://www.geocities.com/~harveyh/most-perfect.htm>
- (32) Н. Макарова. Построение идеальных квадратов нечётного порядка из обратимых квадратов. <http://www.klassikpoez.narod.ru/obratid.htm>
- (33) Н. Макарова. Пандиагональные квадраты нечётных порядков кратных 9.
<http://www.klassikpoez.narod.ru/ideal9.htm>
- (34) Н. Макарова. Идеальные квадраты. Метод качелей.
<http://www.klassikpoez.narod.ru/idealob.htm>
- (35) Н. Макарова. Совершенные магические квадраты (часть IV).
<http://www.klassikpoez.narod.ru/soversh3.htm>
- (36) Н. Макарова. Совершенные магические квадраты (часть II).
<http://www.klassikpoez.narod.ru/soversh1.htm>
- (37) Н. Макарова. Квадраты, построенные по схеме Френикля и других древних мастеров.
<http://www.klassikpoez.narod.ru/frenik1.htm>
- (38) Н. Макарова. Метод построения совершенных квадратов с помощью обобщённых латинских квадратов. <http://www.klassikpoez.narod.ru/latsov.htm>
- (39),(40) Н. Макарова. Сотовые магические квадраты.
<http://www.natalimak1.narod.ru/sotov.htm>
- (41) Н. Макарова. Волшебный мир магических квадратов.
<http://www.klassikpoez.narod.ru/glavmaja.htm>
- (42) Научный форум. <http://dxdy.ru/topic15897.html>, <http://dxdy.ru/topic12959.html>
- (43) <http://mathworld.wolfram.com/MagicSquare.html>
- (44) Н. Макарова. Обобщённый метод сотовых квадратов.
<http://www.natalimak1.narod.ru/sotov1.htm>
- (45) Н. Скрябина, В. Дубовской. Магические квадраты.
<http://www.dubovskoy.net/MAGIC/magic%20SQ.doc>
- (46) Н. Макарова. Квадраты Франклина. <http://www.klassikpoez.narod.ru/franklin.htm>
- (47) Н. Макарова. Полные комплекты квадратов Франклина.
<http://www.natalimak1.komplfr.htm>
- (48) <http://www.geocities.com/~harveyh/order4list.htm#GroupI>
- (49) <http://vadda.livejournal.com/45317.html?mode=reply>
- (50) Н. Макарова. Совершенные магические квадраты (часть I).
<http://www.klassikpoez.narod.ru/soversh.htm>

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие

Глава 1. Вводные определения

Глава 2. Магический квадрат Дюрера

Глава 3. Преобразования магических квадратов

3.1 Основные преобразования

3.2 Торические преобразования

3.3 Взятие дополнения

3.4 М-преобразования

3.5 Матричная форма преобразований

3.6 Преобразование “строки-диагонали”

3.7 Преобразование трёх квадратов

3.8 Преобразование стандартной перестановки строк и/или столбцов

3.9 Преобразование перестановки строк и/или столбцов в ассоциативных квадратах

Глава 4. Методы построения магических квадратов

4.1. Построение магических квадратов нечётного порядка

4.1.1 Индийский (сиамский) метод

4.1.2 Метод террас

4.1.3 Метод Москопула (метод коня)

4.1.4 Метод альфила

4.1.5 Метод Делаира (метод латинских квадратов)

4.1.6 Метод окаймлённых квадратов

4.1.7 Метод применения обратимых квадратов

4.1.8 Метод составных квадратов

4.2. Методы построения магических квадратов чётно-чётного порядка

4.2.1 Метод квадратных рамок

4.2.2 Метод Рауз-Болла

4.2.3 Метод латинских квадратов

4.2.4 Метод сотовых квадратов

4.2.5 Метод окаймлённых квадратов

4.2.6 Метод составных квадратов

4.3. Методы построения магических квадратов чётно-нечётного порядка

4.3.1 Метод четырёх квадратов

4.3.2 Метод окаймлённых квадратов

4.3.3. Метод сотовых квадратов

4.3.4 Метод латинских квадратов

4.3.5 Метод использования обратимых квадратов

4.3.6 Метод составных квадратов

4.4. Построение полумагических квадратов

4.4.1 Алгоритм Франклина

4.4.2 Метод латинских квадратов

4.4.3 Метод составных квадратов

4.5. Построение нетрадиционных магических квадратов

4.5.1 Метод террас

4.5.2 Использование греко-латинских квадратов

4.5.3 Использование обобщённых латинских квадратов

4.5.4 Метод составных квадратов

Глава 5. Совершенные магические квадраты

5.1. Определение совершенных квадратов

5.2 Построение совершенных квадратов из обратимых квадратов

5.3 Метод построения с помощью обобщённых латинских квадратов

5.4 Преобразования совершенных квадратов

Послесловие

Литература

Веб-сайты