

В. Б. АЛЕКСЕЕВ

# ТЕОРЕМА АБЕЛЯ

*в задачах  
и решениях*

МЦНМО, 2001

УДК 517.545, 512.54

А 47

ББК 22.144

**Алексеев В. Б.**

А 47 Теорема Абеля в задачах и решениях — М.: МЦНМО, 2001. — 192 с. 115 илл.

ISBN 5-900916-86-3

Из этой книги читатель узнает, как решать алгебраические уравнения 3-й и 4-й степени с одним неизвестным и почему для решения уравнений более высокой степени не существует общих формул (в радикалах). При этом он познакомится с двумя очень важными разделами современной математики — теорией групп и теорией функций комплексного переменного. Одна из основных целей данной книги — дать возможность читателю попробовать свои силы в математике. Для этого почти весь материал представлен в виде определений, примеров и большого числа задач, снабженных указаниями и решениями.

Книга рассчитана на широкий круг читателей, интересующихся серьезной математикой (начиная со школьников старших классов), и не предполагает у читателя каких-либо специальных предварительных знаний. Книга может служить также пособием для работы математического кружка.

ББК 22.144

ISBN 5-900916-86-3

© Алексеев В. Б., 2001

© МЦНМО, 2001

Предисловие . . . . .	5
Введение . . . . .	7
Глава I. <i>Группы</i> . . . . .	14
§ 1. Примеры . . . . .	14
§ 2. Группы преобразований . . . . .	18
§ 3. Группы . . . . .	20
§ 4. Циклические группы . . . . .	24
§ 5. Изоморфизм . . . . .	26
§ 6. Подгруппы . . . . .	27
§ 7. Прямое произведение . . . . .	30
§ 8. Смежные классы. Теорема Лагранжа . . . . .	30
§ 9. Внутренние автоморфизмы . . . . .	32
§ 10. Нормальные подгруппы . . . . .	34
§ 11. Факторгруппы . . . . .	36
§ 12. Коммутант . . . . .	37
§ 13. Гомоморфизм . . . . .	39
§ 14. Разрешимые группы . . . . .	43
§ 15. Подстановки . . . . .	46
Глава II. <i>Комплексные числа</i> . . . . .	51
§ 1. Поля и многочлены . . . . .	52
§ 2. Поле комплексных чисел . . . . .	57
§ 3. Единственность поля комплексных чисел . . . . .	62
§ 4. Геометрические представления комплексных чисел . . . . .	64
§ 5. Тригонометрическая форма комплексных чисел . . . . .	66
§ 6. Непрерывность . . . . .	69
§ 7. Непрерывные кривые . . . . .	73
§ 8. Отображение кривых. Основная теорема алгебры комплексных чисел . . . . .	77
§ 9. Риманова поверхность функции $w = \sqrt{z}$ . . . . .	82
§ 10. Римановы поверхности более сложных функций . . . . .	91

§ 11. Функции, выражающиеся в радикалах . . . . .	98
§ 12. Группы Галуа многозначных функций . . . . .	105
§ 13. Группы Галуа функций, выражающихся в ра- дикалах . . . . .	107
§ 14. Теорема Абеля . . . . .	109
<i>Указания, решения, ответы</i> . . . . .	115
Предметный указатель . . . . .	190

В курсе средней школы подробно изучаются алгебраические уравнения с одним неизвестным 1-й степени (линейные) и 2-й степени (квадратные). При этом оказывается, что для решения таких уравнений существуют общие формулы, выражающие корни уравнения через его коэффициенты с помощью арифметических операций и радикалов. А существуют ли подобные формулы для решения алгебраических уравнений более высоких степеней, знают очень немногие. Оказывается, что для уравнений 3-й и 4-й степени такие формулы тоже существуют. Методы решения этих уравнений мы рассмотрим во «Введении». Если же рассмотреть общее алгебраическое уравнение с одним неизвестным степени выше 4-й, то оказывается, что оно не разрешимо в радикалах, т. е. не существует формулы, выражающей корни такого уравнения через коэффициенты с помощью арифметических операций и радикалов. Это и есть теорема Абеля.

Одна из целей данной книги — познакомить читателя с доказательством теоремы Абеля. Мы не будем здесь подробно рассматривать результаты, полученные несколько позже французским математиком Эваристом Галуа, который рассмотрел не общие, а конкретные алгебраические уравнения с фиксированными числовыми коэффициентами и для таких уравнений нашел условие, при котором корни уравнения можно выразить через коэффициенты с помощью арифметических операций и радикалов. Тем, кто захочет ближе познакомиться с результатами Галуа, можно рекомендовать книги Постникова М. М. «Теория Галуа» и Ван дер Вардена Б. Л. «Алгебра»<sup>\*)</sup>.

---

<sup>\*)</sup> Постников М. М., Теория Галуа, Физматгиз, 1963.  
Ван дер Варден Б. Л., Алгебра, М., Наука, 1979.

Из общих результатов Галуа можно, в частности, получить и теорему Абеля. Однако в этой книге мы пойдем по другому пути, который позволит читателю познакомиться с двумя очень важными разделами современной математики — теорией групп и теорией функций комплексного переменного. Читатель узнает, что такое (в математике) группа, поле и какими свойствами они обладают. Узнает, что такое комплексные числа и почему именно так, а не иначе они определяются. Узнает, что такое риманова поверхность и в чем состоит «основная теорема алгебры комплексных чисел».

Автор будет сопровождать читателя на этом пути, но даст ему широкую возможность испытать свои собственные силы. Для этого читателю будет предложено большое число задач. Задачи расположены непосредственно в основном тексте книги и являются фактически составной частью основного текста. Задачи имеют сплошную нумерацию, которая выделена полужирным шрифтом. Если какие-то задачи окажутся читателю не под силу, то ему на помощь придут «Указания, решения и ответы».

Книга содержит много понятий, возможно новых для читателя. Чтобы читатель мог легче в них ориентироваться, в конце книги приведен алфавитный список понятий с указанием страниц, на которых эти понятия определяются.

Книга написана на основе лекций, прочитанных в разные годы профессором Московского университета Владимиром Игоревичем Арнольдом и автором в Московской физико-математической школе-интернате №18 при МГУ. Автор благодарен В. И. Арнольду, высказавшему ряд ценных замечаний при подготовке рукописи этой книги.

*В. Б. Алексеев*

Мы начнем эту книгу с рассмотрения вопроса о том, как решаются алгебраические уравнения с одним неизвестным от 1-й до 4-й степени. Методы решения алгебраических уравнений 1-й и 2-й степени были известны еще математикам древнего мира, методы решения алгебраических уравнений 3-й и 4-й степени были разработаны лишь в XVI веке.

*Общим алгебраическим уравнением с одним неизвестным степени  $n$  называется уравнение вида*

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

в котором  $a_0 \neq 0$ \*).

При  $n = 1$  получаем линейное уравнение

$$a_0x + a_1 = 0, \quad a_0 \neq 0.$$

Это уравнение имеет, очевидно, единственное решение

$$x = -\frac{a_1}{a_0}$$

при любых значениях коэффициентов. При  $n = 2$  получаем квадратное уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$$

(вместо  $a_0, a_1, a_2$  мы пишем здесь  $a, b, c$ , как принято в школе). Разделив обе части этого уравнения на  $a$  и положив  $p = \frac{b}{a}, q = \frac{c}{a}$ , получим приведенное квадратное уравнение

$$x^2 + px + q = 0. \tag{1}$$

---

\*) Коэффициенты  $a_0, a_1, \dots, a_n$  можно пока считать произвольными действительными числами.

После преобразований получаем

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} = \frac{p^2}{4} - q \quad \text{и} \quad \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q. \quad (2)$$

В курсе средней школы далее рассматривается только случай  $\frac{p^2}{4} - q \geq 0$ . Если же  $\frac{p^2}{4} - q < 0$ , то говорят, что равенство (2) не может иметь место и уравнение (1) не имеет действительных корней. Чтобы не возникало таких исключений, нам удобнее будет рассматривать в дальнейшем алгебраические уравнения не в области действительных чисел, а в более широкой области комплексных чисел.

Подробно (вместе с определением) мы будем рассматривать комплексные числа в главе II. Пока читателю достаточно знать или принять на веру следующие утверждения о комплексных числах:

1) множество комплексных чисел является расширением множества действительных чисел, т. е. действительные числа содержатся среди комплексных чисел, так же как, например, целые числа содержатся среди действительных;

2) комплексные числа можно складывать, вычитать, умножать, делить, возводить в натуральную степень, причем все эти операции обладают всеми основными свойствами соответствующих операций для действительных чисел;

3) если  $z$  — комплексное число, не равное нулю, и  $n$  — натуральное число, то существует ровно  $n$  корней  $n$ -й степени из  $z$ , т. е.  $n$  комплексных чисел  $w$  таких, что  $w^n = z$ . При  $z = 0$  имеем  $\sqrt[n]{0} = 0$ . Если  $w_1$  и  $w_2$  — корни 2-й степени из числа  $z$ , то  $w_2 = -w_1$ .

Ниже мы не только будем интересоваться как действительными, так и комплексными корнями уравнений, но и в качестве коэффициентов этих уравнений будем рассматривать произвольные комплексные числа. При этом приведенные выше рассуждения о линейных и квадратных уравнениях останутся в силе, что вытекает из указанного выше свойства 2 комплексных чисел.

Продолжим рассмотрение квадратного уравнения. В области комплексных чисел равенство (2) при любых значениях  $p$  и  $q$  равносильно равенству

$$x + \frac{p}{2} = \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$



где под  $\sqrt{p^2/4 - q}$  понимается какое-нибудь одно определенное значение корня второй степени.

Таким образом,

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}. \quad (3)$$

Переходя к  $a, b, c$ , получим

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad (4)$$

Для дальнейшего нам понадобятся два факта, относящиеся к уравнениям 2-й степени:

1) теорема Виета \*): комплексные числа  $x_1$  и  $x_2$  в том и только в том случае являются корнями уравнения  $x^2 + px + q = 0$ , если  $x_1 + x_2 = -p$ ,  $x_1 \cdot x_2 = q$ . Действительно, если  $x_1$  и  $x_2$  — корни уравнения  $x^2 + px + q = 0$ , то выполняется равенство (3). Отсюда  $x_1 + x_2 = -p$ ,  $x_1 \cdot x_2 = q$ . Обратно, если  $x_1 + x_2 = -p$ ,  $x_1 \cdot x_2 = q$  то, заменяя  $p$  и  $q$  в уравнении  $x^2 + px + q = 0$  их выражениями через  $x_1$  и  $x_2$ , получим  $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = (x - x_1)(x - x_2) = 0$ , и, следовательно,  $x_1$  и  $x_2$  являются корнями уравнения  $x^2 + px + q = 0$ ;

2) квадратный трехчлен  $ax^2 + bx + c$  является полным квадратом (т. е.

$$ax^2 + bx + c = [\sqrt{a}(x - x_0)]^2$$

для некоторого комплексного числа  $x_0$ ) тогда и только тогда, когда корни уравнения  $ax^2 + bx + c$  совпадают (оба они должны равняться  $x_0$ ). Это имеет место в том и только в том случае (см. формулу (4)), когда  $b^2 - 4ac = 0$ . Выражение  $b^2 - 4ac$  называется *дискриминантом* квадратного трехчлена.

Рассмотрим теперь приведенное уравнение 3-й степени

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0. \quad (5)$$

(Общее уравнение 3-й степени сводится к приведенному делением на  $a_0$ .) Сделаем замену  $x = y + d$ , где  $d$  мы выберем позднее. Получим

$$(y + d)^3 + a(y + d)^2 + b(y + d) + c = 0.$$

---

\*) Франсуа Виет (1540–1603) — французский математик.

Раскрыв все скобки и приводя подобные относительно  $y$  члены, получим уравнение

$$y^3 + (3d + a)y^2 + (3d^2 + 2ad + b)y + (d^3 + ad^2 + bd + c) = 0.$$

Коэффициент при  $y^2$  в этом уравнении равен  $3d + a$ . Поэтому если мы возьмем  $d = -\frac{a}{3}$ , то после замены  $x = y - \frac{a}{3}$  мы приведем уравнение к виду

$$y^3 + py + q = 0, \quad (6)$$

где  $p$  и  $q$  — некоторые многочлены от  $a, b, c$ .

Пусть  $y_0$  — корень уравнения (6). Представив его в виде  $y_0 = \alpha + \beta$  (где  $\alpha$  и  $\beta$  пока неизвестны), получим

$$\alpha^3 + 3\alpha\beta(\alpha + \beta) + \beta^3 + p(\alpha + \beta) + q = 0$$

и

$$\alpha^3 + \beta^3 + (\alpha + \beta)(3\alpha\beta + p) + q = 0. \quad (7)$$

Посмотрим, можно ли на  $\alpha$  и  $\beta$  наложить дополнительное условие

$$\alpha\beta = -\frac{p}{3}.$$

В этом случае получим для  $\alpha$  и  $\beta$  два уравнения

$$\begin{cases} \alpha + \beta = y_0, \\ \alpha\beta = -\frac{p}{3}. \end{cases}$$

По теореме Виета для любого  $y_0$  такие  $\alpha$  и  $\beta$  действительно существуют (возможно, комплексные) и являются корнями уравнения

$$w^2 - y_0 w - \frac{p}{3} = 0.$$

Если мы возьмем такие  $\alpha$  и  $\beta$  (пока еще неизвестные нам), то уравнение (7) приведет к виду

$$\alpha^3 + \beta^3 + q = 0. \quad (8)$$

Возводя обе части уравнения  $\alpha\beta = -\frac{p}{3}$  в 3-ю степень и объединяя полученное уравнение с (8), будем иметь

$$\begin{cases} \alpha^3 + \beta^3 = -q, \\ \alpha^3 \cdot \beta^3 = -\frac{p^3}{27}, \end{cases}$$

откуда по теореме Виета  $\alpha^3$  и  $\beta^3$  являются корнями уравнения

$$w^2 + qw - \frac{p^3}{27} = 0.$$

Таким образом,

$$\alpha^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \quad \text{и} \quad \beta^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}},$$

где опять под  $\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$  понимается одно определенное значение корня 2-й степени. Отсюда корни уравнения (6) выражаются формулой

$$y_{1,2,3} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

причем для каждого из трех значений первого корня 3-й степени \*) нужно брать соответствующее значение второго так, чтобы выполнялось условие  $\alpha\beta = -\frac{p}{3}$ .

Полученная формула носит название *формулы Кардано* \*\*). Подставив в нее вместо  $p$  и  $q$  их выражения через  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и вычитая  $\frac{a}{3}$ , получим формулу для корней уравнения (5). Делая затем замену:  $a = \frac{a_1}{a_0}$ ,  $b = \frac{a_2}{a_0}$ ,  $c = \frac{a_3}{a_0}$ , получим формулу для корней общего уравнений 3-й степени.

Рассмотрим теперь приведенное уравнение 4-й степени

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0. \quad (9)$$

(Общее уравнение сводится к приведенному делением на  $a_0$ .) Сделав замену переменной  $x = y - \frac{a}{4}$ , подобную замене, сделанной в случае уравнения 3-й степени, приведем уравнение (9) к виду

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0, \quad (10)$$

где  $p$ ,  $q$  и  $r$  — некоторые многочлены от  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ .

Уравнение (10) будем решать методом, который носит название *метода Феррари* \*\*\*). Преобразуем левую часть

\*) См. указанное выше свойство 3 комплексных чисел.

\*\*) Дж. Кардано (1501–1576) — итальянский математик.

\*\*\*) Л. Феррари (1522–1565) — итальянский математик, ученик Кардано.

уравнения (10) следующим образом:

$$\left(y^2 + \frac{p}{2}\right)^2 + qy + \left(r - \frac{p^2}{4}\right) = 0$$

и

$$\left(y^2 + \frac{p}{2} + \alpha\right)^2 - \left[2\alpha\left(y^2 + \frac{p}{2}\right) + \alpha^2 - qy + \frac{p^2}{4} - r\right] = 0, \quad (11)$$

где  $\alpha$  — произвольное число. Постараемся теперь подобрать  $\alpha$  так, чтобы многочлен 2-й степени относительно  $y$

$$2\alpha y^2 - qy + \left(\alpha p + \alpha^2 + \frac{p^2}{4} - r\right),$$

стоящий в квадратных скобках, стал полным квадратом. Как было отмечено выше, для того чтобы он был полным квадратом, необходимо и достаточно, чтобы дискриминант этого многочлена равнялся нулю, т. е.

$$q^2 - 8\alpha\left(\alpha p + \alpha^2 + \frac{p^2}{4} - r\right) = 0. \quad (12)$$

Раскрывая скобки, получим для нахождения  $\alpha$  уравнение 3-й степени, которое мы умеем решать. Если в качестве  $\alpha$  взять один из корней уравнения (12), то выражение, стоящее в квадратных скобках в (11), будет полным квадратом. В этом случае левая часть уравнения (11) является разностью квадратов и поэтому может быть разложена в произведение двух многочленов 2-й степени относительно  $y$ . После этого остается решить два получившихся уравнения 2-й степени.

Таким образом, уравнение 4-й степени всегда может быть решено и, более того, можно, аналогично случаю 3-й степени, получить формулу, выражающую корни общего уравнения 4-й степени через коэффициенты уравнения с помощью операций сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в натуральную степень и извлечения корней натуральной степени.

Долгое время математики пытались найти метод решения в радикалах общего уравнения 5-й степени. Однако в 1824 г. норвежский математик Нильс Генрик Абель (1802–1829) доказал следующую теорему.

*Теорема Абеля. Общее алгебраическое уравнение с одним неизвестным степени выше 4-й неразрешимо в*

*радикалах, т. е. не существует формулы, выражающей корни общего уравнения степени выше 4-й через коэффициенты с помощью операций сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в натуральную степень и извлечения корней натуральной степени.*

Мы сможем доказать эту теорему в конце книги. Однако для этого нам потребуются такие математические понятия, как группа, разрешимая группа, функция комплексного переменного, риманова поверхность и т. д. Со всеми этими и другими математическими понятиями мы и познакомим читателя в дальнейшем на страницах этой книги. Начнем мы с рассмотрения очень важного в математике понятия группы.

# Группы

Исследование алгебраических уравнений в начале XIX века привело математиков к необходимости выделения особого математического понятия — понятия группы. Новое понятие оказалось настолько плодотворным, что не только проникло почти во все разделы современной математики, но и стало играть важную роль в некоторых разделах других наук, например в квантовой механике и в кристаллографии. Исследования, связанные с понятием группы, выросли в отдельную ветвь современной математики — теорию групп. Что же представляет собой понятие группы в математике? Чтобы ответить на этот вопрос, начнем с рассмотрения некоторых примеров.

## § 1. Примеры

Уже в арифметике мы сталкиваемся с операциями, которые двум данным числам ставят в соответствие третье число. Так операция сложения паре чисел  $(3, 5)$  ставит в соответствие число 8, а паре  $(2, 2)$  число 4. Операция вычитания, если ее рассматривать на множестве всех целых чисел, также ставит в соответствие каждой паре целых чисел определенное целое число. При этом здесь надо указать не только пару чисел, но и порядок этих чисел. Так, паре  $(5, 3)$  вычитание ставит в соответствие число 2, а паре  $(3, 5)$  число  $-2$ . Таким образом, пары  $(5, 3)$  и  $(3, 5)$  должны рассматриваться как различные.

Пары, в которых задан порядок элементов, мы будем называть *упорядоченными парами*.

**О п р е д е л е н и е.** Пусть  $M$  — некоторое множество элементов произвольной природы. Если каждой упорядочен-

ной паре элементов из  $M$  поставлен в соответствие определенный элемент также из  $M$ , то говорят, что на  $M$  задана *бинарная операция*.

Бинарными операциями являются, например, сложение на множестве натуральных или на множестве целых чисел, вычитание на множестве целых чисел. Вычитание на множестве натуральных чисел бинарной операцией не является, так как, например, упорядоченной паре  $(3, 5)$  вычитание не ставит в соответствие никакого натурального числа.

1. На множестве: 1) всех четных натуральных чисел, 2) всех нечетных натуральных чисел, 3) всех отрицательных целых чисел рассмотрите операции: а) сложения, б) вычитания, в) умножения. В каких случаях получится бинарная операция? \*)

Рассмотрим еще несколько примеров бинарных операций. К этим примерам мы будем часто обращаться в дальнейшем.

Пример 1. Пусть  $A$ ,  $B$  и  $C$  — вершины равностороннего треугольника  $ABC$  (рис. 1). Повернем треугольник вокруг его центра  $O$  на  $120^\circ$  в направлении, указанном стрелкой. Тогда вершина  $A$  перейдет в вершину  $B$ ,  $B$  в  $C$  и  $C$  в  $A$ . Таким образом, треугольник совместится со своим первоначальным положением (если не учитывать названия вершин), т. е. поворот на  $120^\circ$  вокруг точки  $O$  является преобразованием, переводящим данный треугольник в себя. Обозначим это преобразование через  $a$ . Его можно

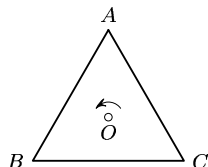


Рис. 1

записать в виде  $a = \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{pmatrix}$ , где в верхней строчке перечислены все вершины треугольника, а нижняя строчка показывает, куда каждая из них переходит. Поворот на  $240^\circ$  в том же направлении вокруг точки  $O$  также является

---

\*) Часть предлагаемых в дальнейшем задач носит практический характер и служит для лучшего уяснения на примерах новых понятий. Другие задачи являются теоретическими, и результаты их используются в дальнейшем. Поэтому если читателю не удастся решить какую-либо задачу, то ему необходимо ознакомиться с ее решением по «Указаниям, решениям и ответам».

преобразованием, переводящим треугольник в себя. Обозначим это преобразование через  $b$ , тогда  $b = \begin{pmatrix} A & B & C \\ C & A & B \end{pmatrix}$ .

Имеется еще одно вращение, переводящее треугольник в себя, отличное от  $a$  и  $b$ , — это поворот на  $0^\circ$ . Обозначим это преобразование через  $e$ , тогда  $e = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A & B & C \end{pmatrix}$ . Легко видеть, что существует только 3 различных вращения плоскости <sup>\*)</sup>, переводящих равносторонний треугольник  $ABC$  в себя, а именно  $e$ ,  $a$  и  $b$ .

Пусть  $g_1$  и  $g_2$  — произвольные преобразования треугольника. Тогда под  $g_1 \cdot g_2$  (или просто  $g_1 g_2$ ) мы будем понимать преобразование  $g_3$ , которое получится, если сначала

Таблица 1

	$e$	$a$	$b$
$e$			
$a$			$e$
$b$			

выполнить преобразование  $g_2$  и затем преобразование  $g_1$ ;  $g_3$  мы будем называть произведением или композицией преобразований  $g_2$  и  $g_1$ .

Можно составить *таблицу умножения* (табл. 1), где каждая строка, а также каждый столбец соответствует некоторому вращению, переводящему треугольник  $ABC$  в себя. На пересечении строки, соответствующей преобразованию  $g_1$ , и столбца, соответствующего преобразованию  $g_2$ , мы будем ставить преобразование, равное  $g_1 \cdot g_2$ . Так, например, в выделенную клетку табл. 1 мы должны поставить преобразование  $a \cdot b$ , которое получится, если сначала повернуть треугольник на  $240^\circ$ , а затем еще на  $120^\circ$ . Следовательно,  $a \cdot b$  — поворот на  $360^\circ$ , т. е. совпадает с  $e$ . Тот же результат мы получим, если будем рассуждать следующим образом: преобразование  $b$  переводит вершину  $A$  в  $C$ , а преобразование  $a$  переводит затем вершину  $C$  в  $A$ . Таким образом, преобразование  $a \cdot b$  переведет вершину  $A$  в  $A$ . Точно так же можно получить, что вершина  $B$  переходит в  $B$ , а  $C$  переходит в  $C$ . Отсюда  $ab = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A & B & C \end{pmatrix}$ , т. е.  $ab = e$ .

## 2. Заполнить полностью таблицу 1.

Любое преобразование некоторой фигуры в себя, сохра-

---

\*) Имеются в виду вращения плоскости без выхода в пространство, т. е. вращения только вокруг некоторых осей, перпендикулярных к плоскости.



няющее расстояния между всеми ее точками, называется *симметрией* данной фигуры. Так, рассмотренные в примере 1 вращения равностороннего треугольника являются его симметриями.

**Пример 2.** Кроме вращений, у равностороннего треугольника имеется еще 3 симметрии, а именно, отражения относительно осей  $l_1$ ,  $l_2$  и  $l_3$  (рис. 2). Эти преобразования

мы обозначим соответственно  $c$ ,  $d$ ,  $f$ , так что  $c = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A & C & B \end{pmatrix}$ ,

$d = \begin{pmatrix} A & B & C \\ C & B & A \end{pmatrix}$ ,  $f = \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & A & C \end{pmatrix}$ . Здесь можно по-разному по-

нимать композицию двух преобразований. Рассмотрим, например, композицию преобразований  $c \cdot d$ . Можно считать, что при выполнении преобразования  $d$  ось  $l_1$  переходит в новое положение (а именно, в положение старой оси  $l_3$ , и после этого преобразование  $c$  рассматривать как отражение относительно нового положения оси  $l_1$  (т. е. относительно старой оси  $l_3$ ). С другой стороны, можно считать, что оси не связаны жестко с фигурой и не преобразуются вместе с ней и, следовательно, в рассматриваемом примере после выполнения преобразования  $d$  преобразование  $c$  должно выполняться как отражение относительно старой оси  $l_1$ . Именно так мы и будем рассматривать в дальнейшем композицию преобразований. При таком подходе оказываются справедливыми рассуждения о вершинах фигуры, аналогичные рассуждениям, приведенным непосредственно перед задачей 2. Такие рассуждения удобно использовать для вычисления композиций преобразований.

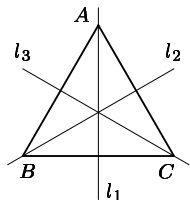


Рис. 2

**3.** Составить таблицу умножения для всех симметрий правильного треугольника.

**Пример 3.** Пусть  $e$ ,  $a$ ,  $b$  и  $c$  обозначают соответственно вращения квадрата на  $0^\circ$ , на  $180^\circ$ , на  $90^\circ$  и на  $270^\circ$  в направлении, указанном стрелкой (рис. 3).

**4.** Составить таблицу умножения для вращений квадрата.

**Пример 4.** Пусть  $d$ ,  $f$ ,  $g$  и  $h$  обозначают отражения квадрата относительно осей, указанных на рис. 4.

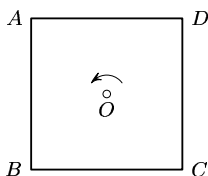


Рис. 3

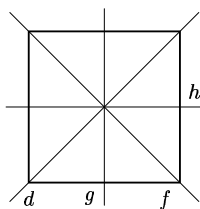


Рис. 4

**5.** Составить таблицу умножения для всех симметрий квадрата.

**Пример 5.** Пусть  $ABCD$  — ромб, не являющийся квадратом.

**6.** Найти все симметрии данного ромба и составить для них таблицу умножения.

**Пример 6.** Пусть  $ABCD$  — прямоугольник, не являющийся квадратом.

**7.** Найти все симметрии данного прямоугольника и составить для них таблицу умножения.

## § 2. Группы преобразований

Пусть  $X$  и  $Y$  — два множества элементов произвольной природы, и пусть каждому элементу  $x$  из  $X$  поставлен в соответствие однозначно определенный элемент  $y$  из  $Y$ . Тогда говорят, что задано некоторое *отображение*  $\varphi$  множества  $X$  в множество  $Y$  ( $\varphi: X \rightarrow Y$ ). Элемент  $y$  называют *образом* элемента  $x$ , а  $x$  — *прообразом* элемента  $y$ , и записывают  $\varphi(x) = y$ .

**Определение.** Отображение  $\varphi: X \rightarrow Y$  называют отображением множества  $X$  **на** множество  $Y$ , если для каждого элемента  $y$  из  $Y$  существует элемент  $x$  из  $X$  такой, что  $\varphi(x) = y$ , т. е. у каждого  $y$  из  $Y$  есть прообраз в  $X$ .

**8.** Пусть отображение  $\varphi$  ставит в соответствие каждому городу мира первую букву из его названия на русском языке (например,  $\varphi(\text{Москва}) = \text{М}$ ). Будет ли  $\varphi$  отображением всех городов мира **на** весь русский алфавит?

**Определение.** Отображение  $\varphi: X \rightarrow Y$  называют

взаимно однозначным отображением множества  $X$  на множество  $Y$ , если для каждого  $y$  из  $Y$  существует, и притом единственный, прообраз в  $X$ .

9. Рассмотрим следующие отображения множества всех целых чисел в множество неотрицательных целых чисел:

$$\begin{aligned} \text{а) } \varphi(n) &= n^2; & \text{б) } \varphi(n) &= |n|; \\ \text{в) } \varphi(n) &= \begin{cases} 2n, & \text{если } n \geq 0, \\ 2|n| - 1, & \text{если } n < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Какие из этих отображений являются отображениями **на**, взаимно однозначными отображениями?

Пусть  $M$  — произвольное множество. Произвольное взаимно однозначное отображение множества  $M$  на себя,  $g: M \rightarrow M$ , мы будем для краткости называть *преобразованием* множества  $M$ .

Два преобразования  $g_1$  и  $g_2$  будут считаться равными, если  $g_1(A) = g_2(A)$  для любого элемента  $A$  из  $M$ . Вместо термина преобразование часто используется термин *подстановка*. Мы будем использовать этот термин лишь в тех случаях, когда преобразование задано на конечном множестве. Тогда подстановка может быть записана в виде

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_n \\ A_{i_1} & A_{i_2} & \dots & A_{i_n} \end{pmatrix},$$

где в верхней строке перечислены все элементы данного множества, а нижняя строка показывает, куда каждый их этих элементов переходит.

Так как преобразование — это взаимно однозначное отображение, то для каждого преобразования  $g$  существует *обратное преобразование*  $g^{-1}$ , которое определяется следующим образом: если  $g(A) = B$ , то  $g^{-1}(B) = A$ . Так, в приме-

ре 1,  $a = \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{pmatrix}$ , поэтому  $a^{-1} = \begin{pmatrix} A & B & C \\ C & A & B \end{pmatrix}$ , т. е.  $a^{-1} = b$ .

10. Найти обратные преобразования ко всем симметриям равностороннего треугольника (примеры 1, 2, стр. 15–17).

11. Пусть  $g(x) = 2x$  — преобразование всех действительных чисел. Найти обратное преобразование.

*Произведение преобразований*  $g_1$  и  $g_2$  определяется так:  $(g_1 g_2)(A) = g_1(g_2(A))$  (сначала делается преобразование  $g_2$ , затем  $g_1$ ). Если  $g_1$  и  $g_2$  — преобразования множества  $M$ , то

$g_1 g_2$  — также преобразование множества  $M$ .

**О п р е д е л е н и е.** Пусть некоторое множество преобразований  $G$  обладает следующими свойствами: 1) если преобразования  $g_1$  и  $g_2$  содержатся в  $G$ , то и их произведение  $g_3 = g_1 g_2$  содержится в  $G$ ; 2) если преобразование  $g$  содержится в  $G$ , то и обратное ему преобразование  $g^{-1}$  содержится в  $G$ . Тогда такое множество преобразований  $G$  будем называть *группой преобразований*.

Нетрудно проверить, что множества преобразований, рассмотренные в примерах 1–6, являются группами преобразований.

**12.** Доказать, что любая группа преобразований содержит тождественное преобразование  $e$  такое, что  $e(A) = A$  для любого элемента  $A$  множества  $M$ .

**13.** Доказать, что  $eg = ge = g$  для любого преобразования  $g$ .

**14.** Доказать, что для любых трех преобразований  $g_1, g_2$  и  $g_3$  имеет место равенство

$$(g_1 g_2) g_3 = g_1 (g_2 g_3) *).$$

### § 3. Группы

При решении задач 6 и 7 мы составили таблицы умножения для симметрий ромба и прямоугольника. При этом оказалось, что при наших обозначениях симметрий (см. решения) эти таблицы совпадают. Для многих целей такие группы преобразований естественно считать совпадающими. Поэтому мы отвлечемся от природы элементов множества (в нашем случае преобразований) и природы бинарной операции **\*\*) (в нашем случае композиции преобразований)** и будем рассматривать просто бинарные операции на произвольных множествах, но только такие операции, для которых выполняются основные свойства групп преобразований. При этом произвольную бинарную операцию мы будем обычно называть умножением, и если паре  $(a, b)$  соответствует , то будем с называть произведением  $a$  и  $b$  и

---

\*) Это равенство справедливо не только для преобразований, но и для любых трех отображений  $g_1, g_2, g_3$  таких, что  $g_3: M_1 \rightarrow M_2, g_2: M_2 \rightarrow M_3, g_1: M_3 \rightarrow M_4$ .

\*\*) Определение бинарной операции см. на стр. 14.

писать  $ab = .$  В некоторых частных случаях эта операция может называться по-иному, например, композицией, сложением и т. д.

**Определение.** *Группой* называется множество  $G$  элементов произвольной природы, на котором задана бинарная операция  $a \cdot b$  такая, что выполняются следующие условия:

1) *ассоциативность*:  $(ab)c = a(bc)$  для любых элементов  $a, b, c$  из  $G$ ;

2) в  $G$  существует такой элемент  $e$ , что  $ea = ae = a$  для любого элемента  $a$  из  $G$ , такой элемент  $e$  называется *единицей* группы  $G$ ;

3) для любого элемента  $a$  из  $G$  существует такой элемент  $a^{-1}$  в  $G$ , что  $aa^{-1} = a^{-1}a = e$ , такой элемент называется *обратным к элементу  $a$* .

Из результатов задач 12–14 мы видим, что всякая группа преобразований является группой (в некотором смысле верно и обратное утверждение (см. 55)). Таким образом, мы уже имеем несколько примеров групп. Все эти группы содержат конечное число элементов, такие группы называются *конечными* группами. Число элементов в конечной группе называется *порядком группы*. Группы, содержащие бесконечное число элементов, называются *бесконечными* группами.

Рассмотрим несколько примеров бесконечных групп.

**Пример 7.** Рассмотрим множество всех целых чисел. Под бинарной операцией на этом множестве будем понимать обычное сложение. Тогда мы получим группу. Действительно, роль единичного элемента в этом случае будет играть 0, так как  $0 + n = n + 0 = n$  для любого целого  $n$ . Кроме того, для каждого  $n$  существует обратный элемент  $-n$  (называемый в случае сложения *противоположным элементом*), так как  $n + (-n) = (-n) + n = 0$ . Ассоциативность в этом случае следует из законов арифметики. Полученная группа называется *группой целых чисел по сложению*.

**15.** Образуют ли группу по умножению: 1) все действительные числа, 2) все действительные числа без 0?

**16.** Образуют ли группу по умножению все положительные действительные числа?

**17.** Образуют ли все натуральные числа группу: а) по

сложению, б) по умножению?

**18.** Доказать, что в любой группе существует единственный единичный элемент.

**19.** Доказать, что для любого элемента  $a$  группы существует единственный обратный элемент  $a^{-1}$ .

**20.** Доказать, что: 1)  $e^{-1} = e$ , 2)  $(a^{-1})^{-1} = a$ .

Если  $a$  и  $b$  — элементы некоторой группы, то по определению бинарной операции выражение  $a \cdot b$  задает некоторый определенный элемент группы. Поэтому выражения вида  $(a \cdot b) \cdot c$ ,  $a \cdot (b \cdot c)$ ,  $(a \cdot b) \cdot (c \cdot d)$  также задают некоторые определенные элементы группы. Любые два из полученных элементов можно снова перемножить, получив опять определенный элемент группы, и т. д. При этом чтобы на каждом шаге можно было однозначно восстановить, какая же операция выполнялась последней, будем оба перемножаемых выражения заключать в скобки (выражения, состоящие из одной буквы, можно в скобки не заключать). Всевозможные выражения, которые можно построить таким способом, назовем *правильно построенными произведениями*. Например,  $(a \cdot b) \cdot (c \cdot (a \cdot c))$  — правильно построенное произведение, а выражение  $(a \cdot b) \cdot c \cdot (c \cdot d)$  не является правильно построенным произведением, так как не ясно, в каком порядке должны выполняться операции умножения. Рассматривая произведение  $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$  нескольких действительных чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , мы совсем не ставим скобок, так как оказывается, что результат не зависит от порядка выполнения операций, т. е. при любой расстановке скобок, дающей правильно построенное произведение, результат, соответствующий этому произведению, будет одним и тем же. Оказывается, что это свойство выполняется в любой группе, что вытекает из результата следующей задачи.

**21.** Пусть бинарная операция  $a \cdot b$  обладает свойством ассоциативности, т. е.  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$  для любых элементов  $a, b, c$ . Доказать, что любое правильно построенное произведение, в котором слева направо идут элементы  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , задает тот же элемент, что и произведение

$$(\dots((a_1 \cdot a_2) \cdot a_3) \cdot \dots \cdot a_{n-1}) \cdot a_n.$$

Таким образом, если  $a_1, a_2, \dots, a_n$  — элементы некото-

рой группы, то все правильно построенные произведения, полученные из элементов  $a_1, a_2, \dots, a_n$  именно в этом порядке разными расстановками скобок, задают один и тот же элемент, который будем обозначать  $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$  (уже без указания скобок).

При умножении действительных чисел выполняется еще одно очень важное свойство, а именно: произведение  $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$  не изменится, если произвольным образом переставить сомножители. Однако в произвольной группе это свойство может не выполняться.

**О п р е д е л е н и е.** Два элемента  $a$  и  $b$  группы называются *перестановочными* или *коммутирующими*, если  $ab = ba$ . Если все элементы группы коммутируют между собой, то такая группа называется *коммутативной* или *абелевой*.

Существуют некоммутативные группы. Такой группой является, например, группа симметрий треугольника (см. пример 2, где  $ac = f$ ,  $ca = d$  и  $ac \neq ca$ ).

**22.** Выяснить, являются ли коммутативными следующие группы (см. 2, 4–7): 1) группа вращений треугольника, 2) группа вращений квадрата, 3) группа симметрий квадрата, 4) группа симметрий ромба, 5) группа симметрий прямоугольника.

**23.** Доказать, что в произвольной группе:

1)  $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ , 2)  $(a_1 \cdot \dots \cdot a_n)^{-1} = a_n^{-1} \cdot \dots \cdot a_1^{-1}$ .

**З а м е ч а н и е.** Пиджак надевают после рубашки, а снимают раньше.

Если есть некоторое равенство  $a = b$  в произвольной группе  $G^{-1}$  (обозначающее, что левая и правая части задают один и тот же элемент), то из него можно получить новое равенство, умножив обе части исходного равенства на некоторый элемент  $c$  группы  $G$ . Однако, так как произведение в группе может зависеть от порядка сомножителей, то можно только либо обе части равенства умножить на некоторый элемент справа:  $ac = bc$ , либо обе части умножить на некоторый элемент слева:  $ca = cb$ .

**24.** Пусть  $a, b$  — произвольные элементы некоторой группы  $G$ . Доказать, что каждое из уравнений  $ax = b$  и  $ya = b$  имеет, и притом ровно одно, решение в данной группе.

Условие единственности из задачи 24 можно выразить еще следующим образом: если  $ab_1 = ab_2$  или  $b_1a = b_2a$ , то

$$b_1 = b_2.$$

**25.** Пусть  $a \cdot a = e$  для любого элемента  $a$  группы  $G$ . Доказать, что группа  $G$  коммутативная.

Под  $a^m$ , где  $m$  — произвольное натуральное число и  $a$  — произвольный элемент группы  $G$ , мы будем понимать произведение  $a \cdot a \cdot \dots \cdot a$ , где число сомножителей равно  $m$ .

**26.** Доказать, что  $(a^m)^{-1} = (a^{-1})^m$ , где  $m$  — натуральное число.

Таким образом,  $(a^m)^{-1}$  и  $(a^{-1})^m$  при натуральном  $m$  — это один и тот же элемент, который мы будем обозначать  $a^{-m}$ . Кроме того, мы положим  $a^0 = e$  для любого элемента  $a$ .

**27.** Доказать, что  $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$  для любых целых чисел  $m$  и  $n$ .

**28.** Доказать, что  $(a^m)^n = a^{mn}$  для любых целых чисел  $m$  и  $n$ .

## § 4. Циклические группы

Простейшими и в то же время очень важными группами являются циклические группы, которые мы сейчас и рассмотрим.

**Определение.** Пусть  $a$  — элемент некоторой группы  $G$ . Наименьшее натуральное число  $n$  такое, что  $a^n = e$ , называют *порядком элемента  $a$* . Если такого  $n$  не существует, то говорят, что  $a$  — *элемент бесконечного порядка*.

**29.** Найти порядки всех элементов в группах симметрий правильного треугольника, квадрата и ромба (см. **3**, **5**, **6**).

**30.** Пусть элемент  $a$  имеет порядок  $n$ . Доказать, что: 1) элементы  $e, a, a^2, \dots, a^{n-1}$  все различны; 2) для любого целого  $m$  элемент  $a^m$  совпадает с одним из указанных выше элементов.

**Определение.** Если элемент  $a$  имеет порядок  $n$  и кроме элементов  $e, a, a^2, \dots, a^{n-1}$  в группе  $G$  больше нет элементов, то группа  $G$  называется *циклической группой порядка  $n$ , порожденной элементом  $a$* , а элемент  $a$  называется *образующим* этой группы.

**Пример 8.** Пусть на плоскости дан правильный  $n$ -угольник. Рассмотрим все вращения плоскости (без переворачивания), переводящие правильный  $n$ -угольник в себя.



**31.** Доказать, что эти вращения образуют циклическую группу порядка  $n$ .

**32.** Найти все образующие элементы в группах вращений треугольника и квадрата (примеры 1 и 3, стр. 15 и 17).

**33.** Пусть элемент  $a$  имеет порядок  $n$ . Доказать, что  $a^m = e$  тогда и только тогда, когда  $m = nd$ , где  $d$  — произвольное целое число.

**34.** Пусть  $a$  имеет простой порядок  $p$  и  $m$  — произвольное целое число. Доказать, что либо  $a^m = e$ , либо элемент  $a^m$  имеет порядок  $p$ .

**35.** Пусть наибольший общий делитель натуральных чисел  $m$  и  $n$  равен  $d$  и  $a$  имеет порядок  $n$ . Доказать, что элемент  $a^m$  имеет порядок  $n/d$ .

**36.** Найти все образующие в группе вращений правильного 12-угольника.

**37.** Пусть  $a$  — элемент бесконечного порядка. Доказать, что элементы  $\dots, a^{-2}, a^{-1}, a^0 = e, a, a^2, \dots$  все различны.

**О п р е д е л е н и е.** Если  $a$  — элемент бесконечного порядка и кроме элементов  $\dots, a^{-2}, a^{-1}, e, a, a^2, \dots$  в группе  $G$  больше нет элементов, то  $G$  называют *бесконечной циклической группой* и  $a$  — ее *образующим*.

**38.** Доказать, что группа целых чисел по сложению (пример 7, стр. 21) является бесконечной циклической группой. Найти все ее образующие.

**П р и м е р 9.** Пусть  $n$  — натуральное число. Рассмотрим всевозможные остатки, которые могут получаться при делении целых чисел на  $n$ , т. е. числа  $0, 1, 2, \dots, n-1$ . Зададим на множестве этих остатков следующую бинарную операцию. Будем складывать данные остатки как обычно, а за результат принимать остаток от деления полученного числа на  $n$ . Эту операцию будем называть *сложением по модулю  $n$* . Так, по модулю 4 будет  $1 + 2 = 3$ , а  $3 + 3 = 2$ .

**39.** Составить таблицы сложения по модулю: а) 2, б) 3, в) 4.

**40.** Доказать, что остатки с операцией сложения по модулю  $n$  образуют группу, причем эта группа циклическая порядка  $n$ .

Рассмотрим снова произвольную циклическую группу порядка  $n$ :  $e, a, a^2, \dots, a^{n-1}$ .

**41.** Доказать, что  $a^m \cdot a^r = a^k$ , где  $0 \leq m < n, 0 \leq r < n$  и  $0 \leq k < n$ , тогда и только тогда, когда по модулю  $n$  имеет

место равенство  $m + r = k$ .

Из результата предыдущей задачи вытекает, что умножению элементов в произвольной циклической группе порядка  $n$  соответствует некоторым образом сложение остатков по модулю  $n$ . Точно так же умножению элементов в бесконечной циклической группе соответствует сложение целых чисел (см. 27). Здесь мы подошли к важному понятию в теории групп — понятию изоморфизма.

## § 5. Изоморфизм

**Определение.** Пусть даны две группы  $G_1$  и  $G_2$ , и пусть имеется взаимно однозначное отображение  $\varphi$  элементов группы  $G_1$  на элементы группы  $G_2$  (см. § 2), причем такое, что умножению в  $G_1$  соответствует умножение в  $G_2$ , т. е. если  $\varphi(a) = a'$ ,  $\varphi(b) = b'$ ,  $\varphi(c) = c'$  и  $ab = c$  в группе  $G_1$ , то  $a'b' = c'$  в группе  $G_2$ . Тогда  $\varphi$  называют *изоморфизмом* группы  $G_1$  на группу  $G_2$ , а группы, между которыми можно установить изоморфизм, называют *изоморфными*. Условие того, что взаимно однозначное отображение  $\varphi$  является изоморфизмом, можно записать еще следующим образом:  $\varphi(ab) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$  для любых элементов  $a$  и  $b$  группы  $G_1$ ; здесь произведение  $ab$  берется в группе  $G_1$ , а произведение  $\varphi(a) \cdot \varphi(b)$  в группе  $G_2$ .

**42.** Какие из следующих групп изоморфны: 1) группа вращений квадрата, 2) группа симметрий ромба, 3) группа симметрий прямоугольника, 4) группа остатков с операцией сложения по модулю 4?

**43.** Пусть  $\varphi: G_1 \rightarrow G_2$  — изоморфизм. Доказать, что обратное отображение  $\varphi^{-1}: G_2 \rightarrow G_1$  также изоморфизм.

**44.** Пусть  $\varphi_1: G_1 \rightarrow G_2$  и  $\varphi_2: G_2 \rightarrow G_3$  — изоморфизмы. Доказать, что  $\varphi_2\varphi_1: G_1 \rightarrow G_3$  также изоморфизм.

Из последних двух задач следует, что две группы, изоморфные третьей группе, изоморфны между собой.

**45.** Доказать, что любая циклическая группа порядка  $n$  изоморфна группе остатков при делении на  $n$  с операцией сложения по модулю  $n$ .

**46.** Доказать, что любая бесконечная циклическая группа изоморфна группе целых чисел по сложению.

**47.** Пусть  $\varphi: G \rightarrow F$  — изоморфизм. Доказать, что  $\varphi(e_G) = e_F$ , где  $e_G$  и  $e_F$  — единицы групп  $G$  и  $F$ .

**48.** Пусть  $\varphi: G \rightarrow F$  — изоморфизм. Доказать, что  $\varphi(g^{-1}) = [\varphi(g)]^{-1}$  для всех элементов  $g$  группы  $G$ .

**49.** Пусть  $\varphi: G \rightarrow F$  — изоморфизм и  $\varphi(g) = h$ . Доказать, что  $g$  и  $h$  имеют равные порядки.

Если изучается сама групповая операция, а природа элементов, из которых составлены группы, не играет роли, то изоморфные группы можно не различать. Так, например, мы будем говорить, что существует лишь одна с точностью до изоморфизма (см. **45**) циклическая группа порядка  $n$ , которую мы будем обозначать  $\mathbb{Z}_n$ , и одна с точностью до изоморфизма (см. **46**) бесконечная циклическая группа, которую мы будем обозначать  $\mathbb{Z}$ .

Если группа  $G_1$  изоморфна группе  $G_2$ , то мы будем писать  $G_1 \cong G_2$ .

**50.** Найти все (с точностью до изоморфизма) группы, содержащие: а) 2 элемента, б) 3 элемента.

**51.** Привести пример двух групп с одинаковым числом элементов и неизоморфных.

**52.** Доказать, что группа всех действительных чисел по сложению изоморфна группе положительных действительных чисел по умножению.

**53.** Пусть  $a$  — произвольный элемент группы  $G$ . Рассмотрим отображение  $\varphi_a$  множества элементов группы  $G$  в себя, определенное следующим образом:  $\varphi_a(x) = ax$  для любого элемента  $x$  из  $G$ . Доказать, что  $\varphi_a$  является преобразованием множества элементов группы  $G$  (т. е. взаимно однозначным отображением множества элементов группы  $G$  на себя).

**54.** Пусть для каждого элемента  $a$  группы  $G$  построено преобразование  $\varphi_a$  (см. задачу **53**). Доказать, что множество всех этих преобразований  $\varphi_a$  образует группу с обычной операцией произведения преобразований.

**55.** Доказать, что группа  $G$  изоморфна построенной в предыдущей задаче группе преобразований.

## § 6. Подгруппы

Рассмотрим в группе  $G$  некоторое подмножество элементов. Может оказаться, что само является группой относительно той же бинарной операции, которая задана на  $G$ .

В этом случае  $H$  называют *подгруппой* группы  $G$ . Так, например, группа вращений правильного  $n$ -угольника является подгруппой группы всех симметрий правильного  $n$ -угольника.

Если  $a$  — элемент группы  $G$ , то множество всех элементов вида  $a^m$  является подгруппой группы  $G$  (эта подгруппа циклическая, мы ее рассмотрели в § 4).

**56.** Пусть  $H$  — подгруппа группы  $G$ . Доказать, что: а) единичные элементы в  $G$  и  $H$  совпадают; б) если  $a$  — элемент подгруппы  $H$ , то элементы, обратные к  $a$  в  $G$  и  $H$ , совпадают.

**57.** Для того чтобы  $H$  было подгруппой группы  $G$  (относительно той же бинарной операции), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия: 1) если  $a$  и  $b$  содержатся в  $H$ , то элемент  $ab$  (произведение в группе  $G$ ) содержится в  $H$ ; 2)  $e$  (единичный элемент группы  $G$ ) содержится в  $H$ ; 3) если  $a$  содержится в  $H$ , то и  $a^{-1}$  (в группе  $G$ ) содержится в  $H$ . Доказать.

**З а м е ч а н и е.** Из условий 1 и 3 вытекает условие 2.

**58.** Найти все подгруппы в группах: 1) симметрий правильного треугольника, 2) симметрий квадрата.

**59.** Найти все подгруппы в циклических группах: а)  $\mathbb{Z}_5$ , б)  $\mathbb{Z}_8$ , в)  $\mathbb{Z}_{15}$ .

**60.** Доказать, что все подгруппы в  $\mathbb{Z}_n$  имеют вид  $\left\{ e, a^d, a^{2d}, \dots, a^{\left(\frac{n}{d}-1\right)d} \right\}$ , где  $d$  — делитель  $n$  и  $a$  — образующий группы  $\mathbb{Z}_n$ .

**61.** Доказать, что все подгруппы бесконечной циклической группы имеют вид  $\{ \dots, a^{-2r}, a^{-r}, e, a^r, a^{2r}, \dots \}$ , где  $a$  — образующий, а  $r$  — произвольное натуральное число.

**62.** Доказать, что в любой бесконечной группе бесконечно много подгрупп.

**63.** Доказать, что пересечение любого числа подгрупп <sup>\*)</sup> некоторой группы  $G$  также является подгруппой группы  $G$ .

**Пример 10.** Рассмотрим правильный тетраэдр, вершины которого обозначены буквами  $A, B, C$  и  $D$ . Если посмотреть со стороны точки  $D$  на треугольник  $ABC$ , то

---

\*) Пересечение нескольких множеств — это множество всех тех элементов, которые содержатся одновременно во всех данных множествах.

точки  $A, B, C$  могут идти по часовой стрелке или против (рис. 5). Соответственно этому мы будем различать две ориентации тетраэдра.

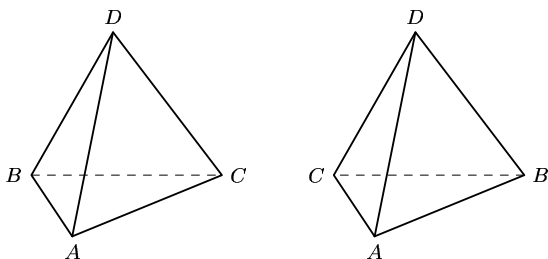


Рис. 5

**64.** Сохраняют ли ориентацию тетраэдра следующие преобразования:  $a = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & C & A & D \end{pmatrix}$  — вращение на  $120^\circ$  вокруг высоты;  $b = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & C & B & A \end{pmatrix}$  — вращение на  $180^\circ$  вокруг оси, проходящей через середины ребер  $AD$  и  $BC$ ;  $c = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A & C & B & D \end{pmatrix}$  — отражение относительно плоскости, проходящей через ребро  $AD$  и середину ребра  $BC$ ; преобразование, порождающее циклическую подстановку вершин  $d = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & C & D & A \end{pmatrix}$ .

Все симметрии правильного тетраэдра, очевидно, образуют группу, которая называется *группой симметрий тетраэдра*.

**65.** Сколько элементов в группе симметрий тетраэдра?

**66.** В группе симметрий тетраэдра найти подгруппы, изоморфные: а) группе симметрий треугольника, б) циклической группе  $\mathbb{Z}_4$ .

**67.** Доказать, что все симметрии тетраэдра, сохраняющие ориентацию, образуют группу. Сколько в ней элементов?

Группа симметрий тетраэдра, сохраняющих ориентацию, называется *группой вращений тетраэдра*.

**68.** В группе вращений тетраэдра найти подгруппы, изо-

морфные циклическим группам: а)  $\mathbb{Z}_2$ , б)  $\mathbb{Z}_3$ .

## § 7. Прямое произведение

Из двух групп можно образовать новую группу.

**О п р е д е л е н и е.** *Прямое произведение* двух групп  $G$  и  $H$  (обозначается  $G \times H$ ) называется множество всевозможных упорядоченных пар  $(g, h)$ , где  $g$  — произвольный элемент из  $G$  и  $h$  — произвольный элемент из  $H$ , со следующей бинарной операцией:  $(g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2) = (g_1 g_2, h_1 h_2)$ , где произведение  $g_1 g_2$  берется в группе  $G$ , а  $h_1 h_2$  в  $H$ .

**69.** Доказать, что  $G \times H$  — группа.

**70.** Пусть в группе  $G$   $n$  элементов, а в группе  $H$   $k$  элементов. Сколько элементов в группе  $G \times H$ ?

**71.** Доказать, что группы  $G \times H$  и  $H \times G$  изоморфны.

**72.** Найти подгруппы в  $G \times H$ , изоморфные группам  $G$  и  $H$ .

**73.** Пусть группы  $G$  и  $H$  коммутативные. Доказать, что группа  $G \times H$  также коммутативная.

**74.** Пусть  $G_1$  — подгруппа группы  $G$  и  $H_1$  — подгруппа группы  $H$ . Доказать, что  $G_1 \times H_1$  — подгруппа в  $G \times H$ .

**75.** Пусть  $G$  и  $H$  — произвольные группы. Верно ли, что любую подгруппу в группе  $G \times H$  можно представить в виде  $G_1 \times H_1$ , где  $G_1$  — подгруппа группы  $G$ , а  $H_1$  — подгруппа группы  $H$ ?

**76.** Доказать, что группа симметрий ромба изоморфна группе  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ .

**77.** Верны ли равенства: 1)  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \cong \mathbb{Z}_6$ , 2)  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \cong \mathbb{Z}_8$ ?

**78.** Доказать, что  $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{mn}$  тогда и только тогда, когда числа  $m$  и  $n$  взаимно просты.

## § 8. Смежные классы. Теорема Лагранжа

С каждой подгруппой  $H$  группы  $G$  связано следующее разбиение элементов группы  $G$  на подмножества. Для любого элемента  $x$  из  $G$  рассмотрим множество всех элементов вида  $xh$ , где  $h$  пробегает всевозможные значения из подгруппы  $H$ . Полученное множество, обозначаемое  $xH$ , называется *левым смежным классом по  $H$ , порожденным элементом  $x$* .

**79.** Найти все левые смежные классы группы симметрий треугольника по подгруппе: а) вращений треугольника,

б) отражений относительно одной оси  $\{e, c\}$  (см. примеры 1 и 2, стр. 15–17).

**80.** Доказать, что каждый элемент группы входит в некоторый левый смежный класс по подгруппе  $H$ .

**81.** Пусть элемент  $y$  входит в левый смежный класс по  $H$ , порожденный элементом  $x$ . Доказать, что левые смежные классы по  $H$ , порожденные элементами  $x$  и  $y$ , совпадают.

**82.** Пусть левые смежные классы по  $H$ , порожденные элементами  $x$  и  $y$ , содержат общий элемент. Доказать, что эти смежные классы совпадают.

Таким образом, левые смежные классы, порожденные любыми двумя элементами, либо не пересекаются, либо совпадают, и мы получаем разбиение всех элементов группы  $G$  на непересекающиеся классы. Это разбиение называют *левым разложением группы  $G$  по подгруппе  $H$* .

Число элементов в подгруппе называют *порядком подгруппы*. Пусть  $m$  — порядок подгруппы  $H$ . Если  $h_1 \neq h_2$ , то  $xh_1 \neq xh_2$ , поэтому каждый левый смежный класс содержит также  $m$  элементов. Следовательно, если  $m$  — порядок группы  $G$  и  $r$  — число левых смежных классов в разложении  $G$  по  $H$ , то  $m \cdot r = n$ , и нами доказана

Теорема 1 (теорема Лагранжа<sup>\*)</sup>). *Порядок подгруппы является делителем порядка группы.*

**83.** Доказать, что порядок любого элемента (см. стр. 24) является делителем порядка группы.

**84.** Доказать, что всякая группа простого порядка — циклическая и любой элемент в ней, отличный от  $e$ , является образующим.

**85.** Группа  $G$  содержит 31 элемент. Сколько подгрупп может содержать группа  $G$ ?

**86.** Доказать, что все группы простого порядка  $p$  изоморфны друг другу.

**87.** Пусть  $n$  делится на  $m$ . Построить группу порядка  $n$ , содержащую подгруппу, изоморфную данной группе  $G$  порядка  $m$ .

**88.** Пусть  $n$  делится на  $m$ . Может ли в группе порядка  $n$

---

<sup>\*)</sup> Лагранж Жозеф Луи (1736–1813) — французский математик и механик.

не быть подгруппы порядка  $m$ ?

Можно построить также *правые смежные классы*  $Hx$  и *правое разложение* группы  $G$  по подгруппе  $H$ . Если порядок подгруппы  $H$  равен  $m$ , то все правые смежные классы также содержат  $m$  элементов и число их равно натуральному числу  $n/m$ , где  $n$  — порядок группы. Таким образом, число правых смежных классов совпадает с числом левых смежных классов.

**З а м е ч а н и е.** Для практического построения разложений конечной группы не надо строить смежные классы для каждого элемента, так как при этом будут получаться одинаковые классы, а надо брать элементы, еще не вошедшие в построенные уже смежные классы. Так как  $eH = He = H$ , то сама подгруппа всегда образует как правый, так и левый смежный класс.

**89.** Построить левое и правое разложение группы симметрий треугольника по подгруппе: а) вращений  $\{e, a, b\}$ , б) отражений относительно одной оси  $\{e, c\}$ .

**90.** Построить левое и правое разложение группы симметрий квадрата по подгруппе: а) отражений относительно центра  $\{e, a\}$ , б) отражений относительно диагонали  $\{e, d\}$ .

**91.** Построить разложение группы всех целых чисел по сложению по подгруппе чисел, делящихся на 3 \*).

**92.** Найти все (с точностью до изоморфизма) группы порядка: а) 4, б) 6, в) 8.

## § 9. Внутренние автоморфизмы

Начнем с примера. Рассмотрим группу симметрий правильного треугольника. Если мы обозначим вершины

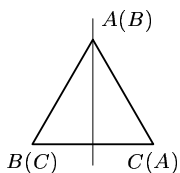


Рис. 6

треугольника буквами  $A, B, C$ , то каждый элемент этой группы однозначно определяется подстановкой трех букв  $A, B, C$ . Например, отражение треугольника относительно высоты, опущенной из вершины  $A$  на сторону  $BC$ , записывается в виде  $\begin{pmatrix} A & B & C \\ A & C & B \end{pmatrix}$ . Чтобы перемножить два эле-

---

\*) Мы не указываем здесь, какое разложение требуется построить — левое или правое, так как в коммутативной группе оба разложения, очевидно, совпадают.



мента группы симметрий треугольника, достаточно выполнить одну за другой соответствующие подстановки. Таким образом, мы получаем изоморфизм группы симметрий треугольника и группы подстановок трех букв  $A, B, C$ . Заметим теперь, что этот изоморфизм определен неоднозначно: он зависит от того, какую именно вершину треугольника мы обозначили через  $A$ , какую через  $B$  и какую через  $C$ . Переобозначение вершин само может рассматриваться как подстановка трех букв  $A, B, C$ . Например,  $g = \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{pmatrix}$  соответствует следующему переобозначению вершин:

старое обозначение	$A$	$B$	$C$
новое обозначение	$B$	$C$	$A$

При новом обозначении вершин каждый элемент группы симметрий треугольника получит новое обозначение в виде подстановки букв  $A, B, C$ . Например, отражение треугольника относительно вертикальной высоты (рис. 6) обозначается следующим образом:

старое обозначение	$\begin{pmatrix} A & B & C \\ A & C & B \end{pmatrix}$
новое обозначение	$\begin{pmatrix} A & B & C \\ C & B & A \end{pmatrix}$

**93.** Рассмотрим элемент группы симметрий треугольника, которому при некотором обозначении вершин соответствовала подстановка  $h$ . Какая подстановка будет соответствовать этому же элементу группы симметрий треугольника при переобозначении вершин  $g$ ?

Заметим теперь, что «переобозначение»  $g$  превращает элемент  $h$  некоторой группы преобразований в  $ghg^{-1}$  не только в рассмотренном примере группы симметрий треугольника, но и в самом общем случае. Таким образом, исследование переобозначений приводит к следующему определению.

**О п р е д е л е н и е.** Пусть  $G$  — группа,  $g$  — ее элемент. Определим отображение  $\varphi_g$  группы  $G$  в себя формулой  $\varphi_g(h) = ghg^{-1}$  (где  $h$  — любой элемент группы). Это отобра-

жение называется *внутренним автоморфизмом* группы  $G$ , порожденным элементом  $g$ .

**94.** Докажите, что внутренний автоморфизм группы является изоморфизмом группы на себя.

**95.** Во что переходит отражение треугольника относительно его высоты при всевозможных внутренних автоморфизмах группы симметрий треугольника?

**96.** Во что переходит вращение треугольника на  $120^\circ$  при всевозможных внутренних автоморфизмах группы симметрий треугольника?

**97.** Какие 2 элемента группы симметрий тетраэдра можно перевести друг в друга внутренним автоморфизмом, а какие нельзя? Тот же вопрос для группы вращений тетраэдра.

**98.** Докажите, что порядки элементов  $ab$  и  $ba$  в любой группе равны.

Заметим, что при всяком внутреннем автоморфизме группы (как и при любом изоморфизме) каждая ее подгруппа переходит в подгруппу, вообще говоря, другую (например, отражения относительно одной высоты треугольника переходят в отражения относительно другой высоты). Однако некоторые «особенно симметричные» подгруппы остаются на месте при всех внутренних автоморфизмах (например, подгруппа вращений треугольника в группе симметрий треугольника). Такие подгруппы мы сейчас и рассмотрим.

## § 10. Нормальные подгруппы

**О п р е д е л е н и е.** Подгруппа некоторой группы называется *нормальной подгруппой*, если она переходит в себя при всех внутренних автоморфизмах группы. Иными словами, подгруппа  $N$  группы  $G$  называется нормальной подгруппой в  $G$ , если для любого элемента  $a$  из  $N$  и любого элемента  $g$  из  $G$  элемент  $gag^{-1}$  содержится в  $N$ .

Таким образом, подгруппа вращений является нормальной подгруппой в группе симметрий треугольника, а подгруппа отражений относительно высоты, опущенной из вершины  $A$  на сторону  $BC$  (состоящая из двух элементов), нормальной подгруппой группы симметрий треугольника не является.

**99.** Докажите, что в коммутативной группе всякая подгруппа является нормальной подгруппой.

**100.** Является ли нормальной подгруппой группы симметрий квадрата подгруппа центральных симметрий, состоящая из элементов  $\{e, a\}$  (примеры 3, 4, стр. 17–18)?

**Теорема 2.** *Подгруппа  $N$  группы  $G$  является нормальной подгруппой тогда и только тогда, когда левое и правое разложения (см. § 8) группы  $G$  по подгруппе  $N$  совпадают \*).*

**101.** Доказать сформулированную теорему.

**102.** Пусть  $n$  — порядок группы  $G$ ,  $m$  — порядок подгруппы  $H$  и  $m = n/2$ . Доказать, что  $H$  является нормальной подгруппой группы  $G$ .

**103.** Доказать, что пересечение (см. сноску на стр. 28) любого числа нормальных подгрупп некоторой группы  $G$  является нормальной подгруппой группы  $G$ .

**104.** Множество элементов группы  $G$ , перестановочных со всеми элементами группы, называется *центром* группы  $G$ . Доказать, что центр — подгруппа и, более того, нормальная подгруппа группы  $G$ .

**105.** Пусть  $N_1$  и  $N_2$  — нормальные подгруппы соответственно в группах  $G_1$  и  $G_2$ . Доказать, что  $N_1 \times N_2$  — нормальная подгруппа в группе  $G_1 \times G_2$ .

Следующий пример показывает, что нормальная подгруппа нормальной подгруппы группы  $G$  может не быть нормальной подгруппой самой группы  $G$ .

**Пример 11.** Рассмотрим подгруппу группы симметрий квадрата, состоящую из отражений относительно диагоналей и центра (см. примеры 3, 4, стр. 17–18, подгруппа  $\{e, a, d, f\}$ ). Эта подгруппа содержит половину элементов группы симметрий квадрата и является поэтому нормальной подгруппой в ней (см. 102). Подгруппа  $\{e, d\}$ , состоящая из отражений относительно одной из диагоналей, содержит половину элементов подгруппы  $\{e, a, d, f\}$  и является, следовательно, нормальной подгруппой в ней. С другой стороны, подгруппа  $\{e, d\}$  не является нормальной подгруппой всей группы симметрий квадрата, так как при внутренних автоморфизмах  $d$  переходит в отражение

---

\*) В этом случае получающееся разложение будет называться просто разложением по нормальной подгруппе.

относительно другой диагонали:  $bdb^{-1} = f$ .

## § 11. Факторгруппы

Начнем с примера. Рассмотрим разложение группы симметрий квадрата по нормальной подгруппе, состоящей из центральных симметрий  $e$  и  $a$  (см. примеры 3, 4, стр. 17–18). Легко получить, что разложение нашей группы на 4 смежных класса имеет вид, указанный в табл. 2.

Таблица 2

$e$	$b$	$d$	$g$
$a$	$c$	$f$	$h$
$E$	$A$	$B$	$C$

Обозначим каждый смежный класс какой-нибудь буквой, например,  $E, A, B, C$ . Если умножить любой элемент из класса  $A$  на любой элемент из класса  $B$ , то результат оказывается в одном и том же классе  $C$  независимо от того, какие именно элементы классов  $A$  и  $B$  взяты. Из решения следующей задачи вытекает, что это не случайно.

**106.** Пусть есть разложение группы  $G$  по нормальной подгруппе  $N$ , и пусть элементы  $x_1$  и  $x_2$  лежат в одном смежном классе и элементы  $y_1$  и  $y_2$  также лежат в одном смежном классе. Доказать, что элементы  $x_1y_1$  и  $x_2y_2$  лежат в одном смежном классе.

Таким образом, взяв по представителю из двух смежных классов и перемножив их в определенном порядке, мы попадем в смежный класс, который не будет зависеть от того, каких именно представителей мы выбрали. Следовательно, при разложении группы по нормальной подгруппе  $N$  на множестве смежных классов можно определить бинарную операцию следующим образом: если  $A = xN$ ,  $B = yN$ , то положим  $A \cdot B = (xy)N$ . Результат задачи 105 показывает, что эта операция определена однозначно и не зависит от выбора элементов  $x$  и  $y$ , порождающих смежные классы  $A$  и  $B$ . Так, в рассмотренном выше примере  $A \cdot B = C$ .

В задачах 107–109 речь идет о разложениях по нормальной подгруппе.

**107.** Пусть  $T_1, T_2, T_3$  — смежные классы. Доказать, что  $(T_1T_2)T_3 = T_1(T_2T_3)$ .

**108.** Пусть нормальная подгруппа обозначена буквой  $E$ . Доказать, что  $ET = TE = T$  для любого смежного класса.

**109.** Доказать, что для любого смежного класса  $T$  найдется класс  $T^{-1}$  такой, что  $TT^{-1} = T^{-1}T = E$ .

Из утверждений задач 107–109 следует, что множество смежных классов с описанной выше бинарной операцией образует группу. Эта группа называется *факторгруппой группы  $G$  по нормальной подгруппе  $N$*  и обозначается  $G/N$ .

Очевидно, что  $G/\{e\} \cong G$  и  $G/G \cong \{\}$ . Очевидно также, что порядок факторгруппы равен натуральному числу  $n/t$ , где  $n$  — порядок группы  $G$ , а  $t$  — порядок нормальной подгруппы  $N$ . Например, факторгруппа группы симметрий квадрата по подгруппе центральных симметрий содержит 4 элемента.

**110.** Выяснить, будет ли факторгруппа группы симметрий квадрата по подгруппе центральных симметрий изоморфна группе вращений квадрата или группе симметрий ромба.

**111.** Найти все нормальные подгруппы и факторгруппы \*) по ним в следующих группах: а) группа симметрий треугольника, б)  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ , в) группа симметрий квадрата, г) группа кватернионов (стр. 125).

**112.** Описать все нормальные подгруппы и факторгруппы по ним для групп: а)  $\mathbb{Z}_n$ , б)  $\mathbb{Z}$ .

**113.** Найти все нормальные подгруппы и факторгруппы по ним в группе вращений тетраэдра.

**114.** В прямом произведении групп  $G_1 \times G_2$  рассмотрим подгруппу  $G_1 \times \{e_2\}$ . Доказать, что это нормальная подгруппа и что факторгруппа по ней изоморфна группе  $G_2$ .

## § 12. Коммутант

Напомним, что два элемента  $a$  и  $b$  группы  $G$  называются *перестановочными* (или *коммутирующими*), если  $ab = ba$ . Степень некоммутативности двух элементов группы можно измерять с помощью произведения  $aba^{-1}b^{-1}$ , которое равно единице тогда и только тогда, когда  $a$  и  $b$  перестановочны (докажите).

**Определение.** Элемент  $aba^{-1}b^{-1}$  называют *коммутатором* элементов  $a$  и  $b$ . *Коммутантом  $K(G)$  группы  $G$*  называется множество всевозможных произведений конечного числа коммутаторов группы  $G$ .

---

\*) В дальнейшем найти факторгруппу означает указать какую-либо группу, рассмотренную ранее, которой искомая факторгруппа изоморфна.

- 115.** Доказать, что коммутант является подгруппой.
- 116.** Доказать, что коммутант является нормальной подгруппой группы.
- 117.** Доказать, что коммутант совпадает с единичной подгруппой  $\{e\}$  тогда и только тогда, когда группа коммутативна.
- 118.** Найти коммутант в группах: а) симметрий треугольника, б) симметрий квадрата, в) в группе кватернионов (стр. 125).
- 119.** Доказать, что коммутант в группе симметрий правильного  $n$ -угольника изоморфен группе  $\mathbb{Z}_n$  при  $n$  нечетном и группе  $\mathbb{Z}_{n/2}$  при  $n$  четном.
- 120.** Найти коммутант в группе вращений тетраэдра.
- 121.** Доказать, что если нормальная подгруппа в группе вращений или в группе симметрий тетраэдра содержит хотя бы одно вращение вокруг оси, проходящей через вершину, то она содержит всю группу вращений тетраэдра.
- 122.** Найти коммутант в группе симметрий тетраэдра.
- Рассмотрим еще 2 группы: *группу вращений куба* и *группу вращений правильного октаэдра* (рис. 7).

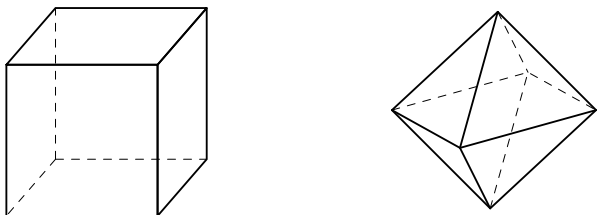


Рис. 7

- 123.** Сколько элементов в каждой из этих групп? Перечислить элементы группы вращений куба.
- 124.** Доказать, что группы вращений куба и октаэдра изоморфны.
- 125.** Сколькими различными способами можно закрасить грани куба 6 цветами (каждую грань своим цветом), если различными считаются раскраски, которые нельзя совместить друг с другом вращением куба? Тот же вопрос для спичечного коробка.
- 126.** Каким из известных вам групп изоморфна группа

вращений спичечного коробка?

Вычисление коммутанта группы вращений куба удобно провести, вписав в куб тетраэдр, как это показано на рисунке (рис. 8). При этом, если соединить оставшиеся вершины  $B$ ,  $D$ ,  $A_1$  и  $C_1$ , то получится второй тетраэдр. Любое вращение куба либо переводит каждый тетраэдр в себя, либо меняет их местами.

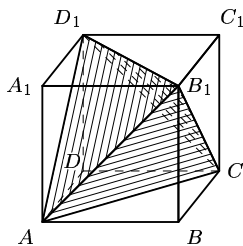


Рис. 8

**127.** Доказать, что все вращения куба, переводящие оба тетраэдра в себя, образуют: а) подгруппу, б) нормальную подгруппу группы вращений куба.

**128.** Доказать, что коммутант группы вращений куба изоморфен группе вращений тетраэдра.

Докажем теперь следующие 3 свойства коммутанта, которые понадобятся нам в дальнейшем.

**129.** Доказать, что факторгруппа произвольной группы  $G$  по ее коммутанту коммутативна.

**130.** Пусть  $N$  — нормальная подгруппа группы  $G$  и факторгруппа  $G/N$  коммутативна. Доказать, что  $N$  содержит коммутант группы  $G$ .

**131.** Пусть  $N$  — нормальная подгруппа группы  $G$  и  $K(N)$  — коммутант группы  $N$ . Доказать, что  $K(N)$  является нормальной подгруппой в  $G$  (сравните с примером на стр. 35).

## § 13. Гомоморфизм

*Гомоморфизмом* группы  $G$  в группу  $F$  называется отображение  $\varphi: G \rightarrow F$  такое, что  $\varphi(ab) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$  для любых элементов  $a$  и  $b$  группы  $G$  (здесь произведение  $ab$  берется в группе  $G$ , а произведение  $\varphi(a) \cdot \varphi(b)$  в группе  $F$ ). Гомоморфизм отличается от изоморфизма тем, что при гомоморфизме не требуется взаимной однозначности.

**Пример 12.** Пусть  $G$  — группа вращений куба, а  $\mathbb{Z}_2$  — группа подстановок двух тетраэдров, вписанных в него (см. стр. 39). Каждому вращению куба соответствует определенная подстановка тетраэдров; при последовательном выполнении двух вращений куба соответствующие подстановки тетраэдров перемножаются. Таким образом, отобра-

жение группы вращений куба на группу подстановок двух тетраэдров — гомоморфизм.

**132.** Пусть  $\varphi: G \rightarrow F$  — гомоморфизм группы  $G$  на группу  $F$ . Если группа  $G$  коммутативна, то и  $F$  коммутативна. Доказать. Верно ли обратное утверждение?

**133.** Доказать, что при гомоморфизме группы  $G$  в группу  $F$  единица группы  $G$  переходит в единицу группы  $F$ .

**134.** Доказать, что  $\varphi(a^{-1}) = [\varphi(a)]^{-1}$  где  $\varphi: G \rightarrow F$  — гомоморфизм, и в левой части обратный берется в группе  $G$ , а в правой части — в группе  $F$ .

**135.** Пусть  $\varphi_1: G \rightarrow F$  и  $\varphi_2: F \rightarrow H$  — гомоморфизмы. Доказать, что  $\varphi_2\varphi_1: G \rightarrow H$  — гомоморфизм.

Важные примеры гомоморфизмов получаются с помощью следующей конструкции «естественного гомоморфизма».

Пусть  $N$  — нормальная подгруппа группы  $G$ . Рассмотрим следующее отображение  $\varphi$  группы  $G$  на факторгруппу  $G/N$ : сопоставим каждому элементу  $g$  группы  $G$  тот смежный класс  $T$ , который содержит элемент  $g$ .

**136.** Доказать, что  $\varphi: G \rightarrow G/N$  — гомоморфизм группы  $G$  на группу  $G/N$ .

Отображение  $\varphi$  называют *естественным гомоморфизмом* группы  $G$  на факторгруппу  $G/N$ . Мы показали, что с каждой нормальной подгруппой связан некоторый гомоморфизм. Покажем, что и, наоборот, каждый гомоморфизм группы  $G$  на группу  $F$  можно рассматривать как естественный гомоморфизм  $G$  на факторгруппу  $G/N$  по подходящей нормальной подгруппе.

Пусть  $\varphi: G \rightarrow F$  — гомоморфизм, тогда множество элементов  $g$  таких, что  $\varphi(g) = e_F$ , называется *ядром гомоморфизма*  $\varphi$  и обозначается  $\text{Ker } \varphi$ .

**137.** Доказать, что  $\text{Ker } \varphi$  — подгруппа группы  $G$ .

**138.** Доказать, что  $\text{Ker } \varphi$  — нормальная подгруппа группы  $G$ .

Рассмотрим разложение группы  $G$  по ядру  $\text{Ker } \varphi$ .

**139.** Доказать, что  $g_1$  и  $g_2$  лежат в одном смежном классе тогда и только тогда, когда  $\varphi(g_1) = \varphi(g_2)$ .

**Теорема 3.** Пусть  $\varphi: G \rightarrow F$  — гомоморфизм группы  $G$  на группу  $F$ , тогда отображение  $\psi: G/\text{Ker } \varphi \rightarrow F$ , сопоставляющее каждому смежному классу значе-



ние  $\varphi(g)$  на каком-нибудь (и тогда любым (см. 139)) его элементе  $g$ , является изоморфизмом.

Доказательство этой теоремы содержится в решениях следующих задач.

**140.** Докажите, что  $\psi$  есть отображение **на**.

**141.** Докажите, что  $\psi$  — взаимно однозначное отображение.

**142.** Докажите, что  $\psi$  — изоморфизм.

Приведем пример применения доказанной теоремы.

**Пример 13.** В задаче **110** требовалось выяснить изоморфна ли факторгруппа группы симметрий квадрата по нормальной подгруппе отражений относительно центра группе вращений квадрата или группе симметрий ромба. Каждому элементу группы симметрий квадрата соответствует, некоторая подстановка осей симметрии  $l_1, l_2, l_3, l_4$  (рис. 9). При этом диагонали  $l_1$  и  $l_3$  могут переходить только друг в друга, а оси  $l_2$  и  $l_4$  — также друг в друга. Мы получаем таким образом отображение группы симметрий квадрата

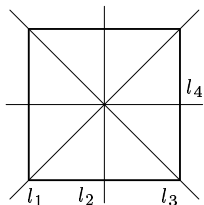


Рис. 9

в группу подстановок четырех элементов:  $l_1, l_2, l_3$  и  $l_4$ .

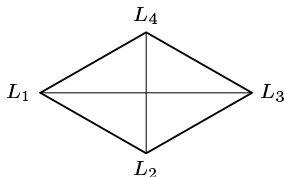


Рис. 10

Это отображение является гомоморфизмом **на** всю группу таких подстановок, что  $l_1$  и  $l_3$  переходят в  $l_1$  и  $l_3$ , а  $l_2$  и  $l_4$  в  $l_2$  и  $l_4$  (проверьте). Эта группа состоит из четырех подстановок и изоморфна группе симметрий ромба  $L_1L_2L_3L_4$  (рис 10). Ядром построенного гомоморфизма являются все симметрии квадрата, переводящие каждую из четырех осей симметрии в себя. Нетрудно проверить, что такими преобразованиями являются только  $e$  и центральная симметрия  $a$ . Следовательно, по теореме 3 подгруппа отражений относительно центра  $\{e, a\}$  — нормальная подгруппа в группе симметрий квадрата, и соответствующая факторгруппа изоморфна группе симметрий ромба.

Подобным образом можно решить следующие задачи.

**143.** Доказать, что вращения тетраэдра на  $180^\circ$  вокруг

осей, проходящих через середины противоположных ребер, вместе с тождественным преобразованием образуют нормальную подгруппу в группе симметрий тетраэдра, и найти соответствующую факторгруппу.

**144.** Доказать, что вращения куба на  $180^\circ$  вокруг осей, проходящих через центры противоположных граней, вместе с тождественным преобразованием образуют нормальную подгруппу в группе вращений куба, и найти соответствующую факторгруппу.

**145.** Пусть на плоскости дан правильный  $n$ -угольник с центром  $O$ . Пусть  $R$  — группа всех вращений плоскости вокруг точки  $O$ . Рассмотрим подгруппу  $\mathbb{Z}_n$  всех вращений плоскости, переводящих правильный  $n$ -угольник в себя. Доказать, что это нормальная подгруппа группы  $R$  и что  $R/\mathbb{Z}_n \cong R$ .

**146.** Пусть  $N_1$  и  $N_2$  — нормальные подгруппы соответственно в группах  $G_1$  и  $G_2$ . Доказать, что  $N_1 \times N_2$  — нормальная подгруппа в  $G_1 \times G_2$  и  $(G_1 \times G_2)/(N_1 \times N_2) \cong (G_1/N_1) \times (G_2/N_2)$ .

**147.** Могут ли две неизоморфные группы иметь изоморфные нормальные подгруппы и изоморфные факторгруппы по ним?

**148.** Может ли группа иметь две изоморфные нормальные подгруппы, факторгруппы по которым неизоморфны?

**149.** Может ли группа иметь неизоморфные нормальные подгруппы, факторгруппы по которым изоморфны?

Посмотрим теперь, что происходит при гомоморфизме с подгруппами, нормальными подгруппами, коммутантами. Пусть  $\varphi: G \rightarrow F$  — гомоморфизм, и пусть в  $G$  выбрано некоторое подмножество  $M$ , тогда *образом множества  $M$*  при гомоморфизме  $\varphi$  (обозначается  $\varphi(M)$ ) будет называться множество всех элементов из  $F$ , имеющих хотя бы один прообраз в  $M$ . Обратно, пусть  $P$  — подмножество в  $F$ , тогда *полным прообразом  $P$*  (обозначается  $\varphi^{-1}(P)$ ) будет называться множество всех элементов из  $G$ , образы которых попадают в  $P$ . Заметим, что знак  $\varphi^{-1}$  отдельно от  $P$  не имеет смысла: для гомоморфизма, вообще говоря, не существует обратного преобразования. Заметим также, что если  $\varphi(M) = P$ , то  $\varphi^{-1}(P)$  содержит  $M$ , но не обязательно с ним совпадает (рис. 11).

**150.** Доказать, что образ подгруппы  $H$  группы  $G$  при

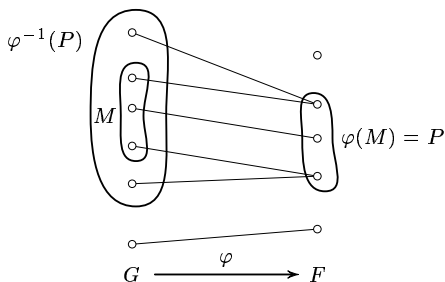


Рис. 11

гомоморфизме  $\varphi: G \rightarrow F$  является подгруппой в группе  $F$ .

**151.** Пусть  $H$  — подгруппа в  $F$  и  $\varphi: G \rightarrow F$  — гомоморфизм. Доказать, что  $\varphi^{-1}(H)$  — подгруппа в  $G$ .

**152.** Пусть  $N$  — нормальная подгруппа группы  $F$  и  $\varphi: G \rightarrow F$  — гомоморфизм. Доказать, что  $\varphi^{-1}(N)$  — нормальная подгруппа группы  $G$ .

**153.** Пусть  $\varphi: G \rightarrow F$  — гомоморфизм,  $K_1$  и  $K_2$  коммутанты групп  $G$  и  $F$ . Доказать, что  $\varphi(K_1)$  содержится в  $K_2$  и  $K_1$  содержится в  $\varphi^{-1}(K_2)$ .

**154.** Пусть  $N$  — нормальная подгруппа группы  $G$  и  $\varphi$  — гомоморфизм группы  $G$  на группу  $F$ . Доказать, что  $\varphi(N)$  — нормальная подгруппа группы  $F$ .

**155.** Пусть  $K_1$  и  $K_2$  — коммутанты групп  $G$  и  $F$  и  $\varphi$  — гомоморфизм группы  $G$  на группу  $F$ . Доказать, что  $\varphi(K_1) = K_2$ . Верно ли, что  $K_1 = \varphi^{-1}(K_2)$ ?

## § 14. Разрешимые группы

Существует важный класс групп, близких к коммутативным, — так называемые разрешимые группы. Разрешимыми они называются потому, что возможность решить алгебраическое уравнение в радикалах, как мы увидим, зависит от разрешимости некоторой группы.

Пусть  $G$  — некоторая группа и  $K(G)$  — ее коммутант. Коммутант  $K(G)$  сам является группой, и в нем также можно рассмотреть коммутант  $K(K(G))$ . В полученной группе снова можно рассмотреть коммутант и т. д. Группу  $((\dots K(G)) \dots)$  будем для краткости обозначать  $K_r(G)$ .

Таким образом,  $K_{r+1}(G) = K(K_r(G))$ .

**О п р е д е л е н и е.** Группа  $G$  называется разрешимой, если цепочка групп  $G, K(G), K_2(G), K_3(G), \dots$  заканчивается при некотором конечном  $n$  единичной группой, т. е. при некотором  $n$  получаем  $K_n(G) = \{e\}$ .

Например, любая коммутативная группа разрешима, так как если  $G$  — коммутативная группа, то уже на первом шаге получаем  $K(G) = \{e\}$  (см. 117). Также группа  $G$  разрешима, если ее коммутант коммутативен, так как тогда  $K_2(G) = \{e\}$ .

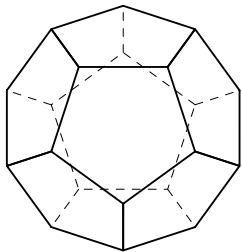


Рис. 12

**156.** Выяснить, разрешимы или нет следующие группы: а) циклическая группа  $\mathbb{Z}_n$ , б) группа симметрий треугольника, в) группа симметрий квадрата, г) группа кватернионов (стр. 125), д) группа вращений тетраэдра, е) группа симметрий тетраэдра, ж) группа вращений куба.

Все группы, рассмотренные в задаче 156, оказываются разрешимыми, поэтому естественно возникает вопрос, а бывают ли вообще неразрешимые группы. Ниже мы покажем, что группа вращений правильного додекаэдра (рис. 12) неразрешима.

**157.** Сколько элементов в группе вращений додекаэдра?

Все вращения додекаэдра можно разбить на 4 класса: 1) тождественное преобразование; 2) вращения вокруг осей, проходящих через центры противоположных граней; 3) вращения вокруг осей, проходящих через противоположные вершины; 4) вращения вокруг осей, проходящих через середины противоположных ребер.

**158.** Сколько элементов содержится в каждом классе (в классы 2–4 тождественное преобразование не входит)?

**159.** Пусть  $N$  — произвольная нормальная подгруппа в группе вращений додекаэдра и пусть в  $N$  содержится хотя бы один элемент из некоторого класса 1–4. Доказать, что тогда в  $N$  содержится весь соответствующий класс.

Таким образом, каждый из классов 1–4 либо полностью не входит, либо полностью входит в  $N$ .

**160.** Доказать, что в группе вращений додекаэдра не существует других нормальных подгрупп, кроме  $\{e\}$  и всей

группы.

**161.** Пусть группа  $G$  некоммутативна и не имеет нормальных подгрупп, отличных от  $\{e\}$  и  $G$ . Доказать, что группа  $G$  неразрешима.

Из задач **160** и **161** вытекает, что группа вращений додекаэдра неразрешима.

Рассмотрим еще несколько задач, результаты которых потребуются нам в дальнейшем.

**162.** Доказать, что всякая подгруппа разрешимой группы разрешима.

**163.** Пусть  $\varphi: G \rightarrow F$  — гомоморфизм группы  $G$  на группу  $F$  и группа  $G$  разрешима; доказать, что и группа  $F$  разрешима.

**164.** Привести пример, когда группа  $F$  разрешима, а группа  $G$  неразрешима (см. предыдущую задачу).

**165.** Пусть группа  $G$  разрешима и  $N$  — нормальная подгруппа в  $G$ . Доказать, что факторгруппа  $G/N$  разрешима.

**166.** Доказать, что если группы  $N$  и  $G/N$  разрешимы, то и группа  $G$  разрешима.

**167.** Пусть группы  $G$  и  $F$  разрешимы. Доказать, что группа  $G \times F$  разрешима.

**168.** Пусть группа  $G$  разрешима. Доказать, что тогда существует цепочка групп,  $G_0, G_1, \dots, G_n$  такая, что: 1)  $G_0 = G$ ; 2) каждая группа  $G_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) является нормальной подгруппой в группе  $G_{i-1}$ , и все факторгруппы  $G_{i-1}/G_i$  коммутативны; 3) группа  $G_n$  коммутативна.

**169.** Пусть для группы  $G$  существует цепочка групп со свойствами, указанными в условии предыдущей задачи. Доказать, что группа  $G$  разрешима.

Результаты задач **168** и **169** показывают, что существование для группы  $G$  цепочки групп с указанными в условии задачи **168** свойствами равносильно понятию разрешимости и само может быть принято за определение разрешимости. Еще одно эквивалентное определение разрешимости можно получить, используя результаты двух следующих задач.

**170.** Пусть группа  $G$  разрешима. Доказать, что тогда существует цепочка групп  $G_0, G_1, \dots, G_n$  такая, что: 1)  $G_0 = G$ ; 2) каждая группа  $G_i$  ( $0 \leq i \leq n-1$ ) содержит некоторую коммутативную нормальную подгруппу  $N_i$  такую, что  $G_i/N_i \cong G_{i+1}$ , 3) группа  $G_n$  коммутативна.

**171.** Пусть для группы  $G$  существует цепочка групп со свойствами, указанными в предыдущей задаче. Доказать, что группа  $G$  разрешима.

## § 15. Подстановки

Рассмотрим сейчас более подробно *подстановки* (т. е. преобразования) на множестве первых  $n$  натуральных чисел  $1, 2, \dots, n$ ; эти подстановки мы будем называть *подстановками  $n$ -й степени*. Заметим, что подстановки на произвольном множестве с  $n$  элементами можно свести к рассматриваемым подстановкам, для чего достаточно занумеровать элементы множества натуральными числами  $1, 2, \dots, n$ . Произвольную подстановку  $n$ -й степени можно записать в виде  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$ , где  $i_m$  — это образ элемента  $m$  при данной подстановке. Напомним, что подстановка — взаимно однозначное отображение, поэтому все элементы в нижней строке различны.

**172.** Сколько существует различных подстановок  $n$ -й степени?

**О п р е д е л е н и е.** Группу всех подстановок  $n$ -й степени с обычной операцией умножения (т. е. композиции подстановок<sup>\*)</sup> называют *симметрической группой степени  $n$*  и обозначают  $S_n$ .

**173.** Доказать, что при  $n \geq 3$  группа  $S_n$  некоммутативна.

Подстановка может некоторые элементы перемещать, а некоторые оставлять на месте; при этом может оказаться, что перемещаемые элементы перемещаются как бы по кругу. Например, подстановка

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 2 & 6 & 3 & 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

оставляет на месте элементы 2, 5 и 7, а остальные элементы перемещаются по кругу:  $1 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 6, 6 \rightarrow 1$ . Подстановки такого типа называются *циклическими подстановками* или просто *циклами*. Для циклических подстановок мы

---

<sup>\*)</sup> Согласно нашему определению произведения преобразований (стр. 19) мы будем рассматривать произведение подстановок справа налево. Иногда произведение подстановок рассматривают слева направо. Получаемые в обоих случаях группы изоморфны.

будем использовать еще другую запись. Например, выражение (1436) будет обозначать подстановку, переводящую  $1 \rightarrow 4$ ,  $4 \rightarrow 3$ ,  $3 \rightarrow 6$ ,  $6 \rightarrow 1$  и оставляющую остальные элементы рассматриваемого множества на месте. Так, если эта подстановка 7-й степени, то она совпадает с подстановкой, рассмотренной выше.

Не всякая подстановка является циклической. Например, подстановка

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

циклической не является, но ее можно представить как произведение двух циклов:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} = (1\ 3\ 4) \cdot (2\ 5)$$

Полученные циклы перемещают разные элементы, такие циклы называются *независимыми*. Легко видеть, что произведение независимых циклов не зависит от порядка их следования. Если не различать произведения независимых циклов, отличающиеся лишь порядком следования, то будет верно следующее утверждение.

**174.** Любая подстановка единственным образом (с точностью до порядка сомножителей) разлагается в произведение нескольких независимых циклов. Доказать.

Циклы вида  $(i, j)$ , переставляющие только два элемента, называются *транспозициями*.

**175.** Доказать, что произвольный цикл можно разложить в произведение транспозиций (не обязательно независимых).

Транспозиции  $(1, 2)$ ,  $(2, 3)$ ,  $\dots$ ,  $(n - 1, n)$  называются *элементарными транспозициями*.

**176.** Доказать, что произвольная транспозиция представляется в виде произведения элементарных транспозиций.

Из результатов задач **174–176** вытекает, что произвольная подстановка  $n$ -й степени может быть представлена как произведение элементарных транспозиций. Иными словами, верна следующая теорема.

**Теорема 4.** Если некоторая подгруппа симметрической группы  $S_n$  содержит все элементарные транспози-

ции, то эта подгруппа совпадает со всей группой  $S_n$ .

Пусть числа  $1, 2, \dots, n$  записаны в строку в некотором произвольном порядке. Скажем, что пара чисел  $i, j$  образует инверсию в этой строке, если  $i < j$  но  $j$  встречается в строке раньше, чем  $i$ . Число инверсий характеризует беспорядок в данной строке по отношению к обычному порядку чисел  $1, 2, \dots, n$ .

**177.** Найти число инверсий в строке 3, 2, 5, 4, 1.

В дальнейшем нас будет интересовать не само число инверсий, а только четность этого числа.

**178.** Доказать, что четность числа инверсий в строке меняется, если поменять местами два произвольных числа.

**О п р е д е л е н и е.** Подстановка  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$  называется четной или нечетной в зависимости от того, четное или нечетное число инверсий имеется в нижней строке. Например, тождественная подстановка  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$  является четной подстановкой, так как число инверсий в нижней строке равно нулю.

**179.** Определить четность подстановки  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ .

**180.** Доказать, что при умножении четной подстановки справа на произвольную транспозицию получается нечетная подстановка и, наоборот, при умножении нечетной подстановки справа на транспозицию получается четная подстановка.

**181.** Доказать, что четная подстановка может быть разложена в произведение только четного числа транспозиций, а нечетная в произведение только нечетного числа транспозиций.

**182.** Определить четность произвольного цикла длины: а) 3, б) 4, в)  $m$ .

**183.** Доказать, что при умножении двух подстановок одинаковой четности получается четная подстановка, а при умножении двух подстановок разной четности получается нечетная подстановка.

**184.** Доказать, что подстановки  $a$  и  $a^{-1}$  имеют одинаковую четность, где  $a$  — произвольная подстановка.



Из результатов задач **183, 184** вытекает, что множество всех четных подстановок образует подгруппу группы  $S_n$ .

**О п р е д е л е н и е.** Группа всех четных подстановок  $n$ -й степени называется *знакопеременной группой степени  $n$*  и обозначается  $A_n$ .

**185.** Доказать, что при  $n \geq 4$  группа  $A_n$  некоммутативна.

**186.** Доказать, что знакопеременная группа  $A_n$  является нормальным делителем симметрической группы  $S_n$ , и построить разложение группы  $S_n$  по подгруппе  $A_n$ .

**187.** Определить число элементов в группе  $A_n$ .

**188.** Доказать, что группы  $S_2$ ,  $S_3$  и  $S_4$  разрешимы.

Докажем теперь, что знакопеременная группа  $A_5$ , неразрешима. Один из способов доказательства этого состоит в следующем. Необходимо в додекаэдр так вписать 5 тетраэдров, занумерованных числами 1, 2, 3, 4, 5, чтобы каждому вращению додекаэдра соответствовала четная подстановка тетраэдров, причем чтобы разным вращениям соответствовали разные подстановки. Этим будет установлен изоморфизм между группой вращений додекаэдра и группой четных подстановок 5-й степени  $A_5$ . Тогда неразрешимость группы  $A_5$  будет следовать из неразрешимости группы вращений додекаэдра.

**189.** Вписать в додекаэдр 5 тетраэдров требуемым выше способом.

Другой способ доказательства неразрешимости группы  $A_5$  состоит в повторении идеи доказательства неразрешимости группы вращений додекаэдра. Для этого надо решить следующие задачи.

**190.** Доказать, что любая четная подстановка 5-й степени, отличная от тождественной подстановки, разлагается на независимые циклы одним из следующих трех способов: а)  $(i_1 i_2 i_3 i_4 i_5)$ , б)  $(i_1 i_2 i_3)$ , в)  $(i_1 i_2)(i_3 i_4)$ .

**191.** Пусть  $N$  — нормальная подгруппа группы  $A_5$ . Доказать, что если в  $N$  содержится хотя бы одна подстановка, определенным образом разлагающаяся на независимые циклы (см. **190**), то в  $N$  содержатся все подстановки, таким же образом разлагающиеся на независимые циклы.

**192.** Доказать, что группа  $A_5$  не содержит нормальных подгрупп, кроме единичной подгруппы и всей группы.

Из утверждения задач **192, 161** и из того, что группа  $A_5$  некоммутативна, вытекает неразрешимость группы  $A_5$ .

**193.** Доказать, что симметрическая группа  $S_n$  при  $n \geq 5$  содержит подгруппу, изоморфную группе  $A_5$ .

Из утверждений задач **193** и **162** получаем теорему.

**Теорема 5.** При  $n \geq 5$  симметрическая группа  $S_n$  неразрешима.

Доказанная теорема, а также другие результаты первой главы потребуются нам в следующей главе для доказательства неразрешимости в радикалах общих алгебраических уравнений степени выше четвертой.

Тем, кто захочет изучить теорию групп более глубоко, можно рекомендовать книги:

Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И., Основы теории групп, изд. 4-е, М., Физматлит, 1996.

Винберг Э. Б., Курс алгебры, М., Факториал Пресс, 2000.

# Комплексные числа

При изучении чисел в курсе средней школы мы постепенно расширяли рассматриваемое числовое множество. При этом основное ударение делалось на тот факт, что такие расширения позволяют нам более свободно оперировать с числами. Так, при переходе от натуральных чисел к целым становится возможным вычитать любые числа, при переходе к рациональным числам становится возможным делить любые числа и т. д. На самом деле более важным результатом таких расширений оказывается тот факт, что свойства расширенной системы часто позволяют получать новые результаты об исходной системе. Так, например, многие трудные задачи теории чисел, касающиеся только натуральных чисел, были решены с использованием действительных и даже комплексных чисел.

Исторически комплексные числа появились, именно как средство для решения некоторых задач о действительных числах. Так, например, итальянский математик Кардано (1501–1576) при решении кубических уравнений находил правильные действительные корни, используя в промежуточных вычислениях «несуществующие» квадратные корни из отрицательных чисел.

Со временем комплексные числа занимали все более важное положение в математике и ее приложениях. В первую очередь они глубоко проникли в теорию алгебраических уравнений, так как в области комплексных чисел изучение таких уравнений оказалось намного более удобным. Например, любое алгебраическое уравнение степени  $n$  ( $n \geq 1$ ) с действительными или комплексными коэффициентами имеет по крайней мере один комплексный корень (см. ниже «основную теорему алгебры комплексных

чисел», стр. 80), — в то же время не всякое алгебраическое уравнение с действительными коэффициентами имеет хотя бы один действительный корень.

После того как появилась интерпретация комплексных чисел с помощью точек плоскости и векторов на плоскости, стало возможным применять к изучению комплексных чисел геометрические понятия, такие, например, как непрерывность и геометрическое преобразование. Связь комплексных чисел с векторами позволила сводить к комплексным числам и уравнениям для них многие задачи механики, особенно гидро- и аэродинамики, а также теории электричества, теории теплоты и т. д.

К настоящему времени изучение комплексных чисел развилось в большой и важный раздел современной математики — теорию функций комплексного переменного.

Довольно глубокое знакомство с комплексными числами и функциями комплексного переменного и предстоит читателю в этой главе.

## § 1. Поля и многочлены

Действительные числа можно складывать и умножать, при этом возможны и обратные операции — вычитание и деление. В суммах можно произвольным образом переставлять слагаемые, произвольным образом расставлять скобки. Так же можно поступать с сомножителями в произведениях. Все эти свойства, а также связь между сложением и умножением можно кратко выразить следующим образом.

Действительные числа обладают следующими 3 свойствами:

1. Образуют коммутативную группу (см. главу I, § 3) по сложению (единичный элемент этой группы обозначается через 0 и называется нулем).

2. Если отбросить 0, то оставшиеся числа образуют коммутативную группу по умножению.

3. Сложение и умножение связаны законом дистрибутивности: для любых чисел  $a, b, c$

$$a(b + c) = ab + ac.$$

Наличие этих 3 свойств очень важно, так как они позволяют упрощать арифметические и алгебраические

выражения, решать многие уравнения и т. д. Действительные числа — не единственное множество, обладающее этими тремя свойствами. Для выделения всех таких множеств в математике введено специальное понятие.

**Определение.** Если на некотором множестве определены две бинарные операции (сложение и умножение), обладающие выписанными выше тремя свойствами, то такое множество называется *полем*.

**194.** Выяснить, являются ли полями следующие подмножества действительных чисел с обычными операциями сложения и умножения: а) все натуральные числа; б) все целые числа; в) все рациональные числа; г) все числа вида  $r_1 + r_2\sqrt{2}$ , где  $r_1$  и  $r_2$  — произвольные рациональные числа.

**195.** Доказать, что в любом поле  $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$  для любого элемента  $a$ .

**196.** Доказать, что в любом поле: 1)  $(-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$ , 2)  $(-a) \cdot (-b) = ab$  для любых элементов  $a$  и  $b$ .

**197.** Пусть  $a, b$  — элементы произвольного поля и  $a \cdot b = 0$ . Доказать, что либо  $a = 0$ , либо  $b = 0$ .

**Пример 14.** Пусть на множестве  $\{0, 1, \dots, n-1\}$  кроме операции сложения по модулю  $n$  (см. пример 9, стр. 25), задано еще *умножение по модулю  $n$* , при котором в качестве результата при умножении двух чисел берется остаток от деления их обычного произведения на  $n$ .

**198.** Построить таблицы умножения по модулю 2, 3 и 4.

**199.** Доказать, что остатки с операциями сложения и умножения по модулю  $n$  образуют поле тогда и только тогда, когда  $n$  — простое число.

**Определение.** Разностью элементов  $b$  и  $a$  в произвольном поле (обозначается  $b - a$ ) называется элемент, являющийся решением уравнения  $x + a = b$  (или  $a + x = b$ ). Частным от деления элемента  $b$  на  $a$  при  $a \neq 0$  (обозначается  $b/a$ ) называется элемент, являющийся решением уравнения  $ya = b$  (или  $ay = b$ ).

Из результата задачи 24 и того, что в поле сложение и умножение коммутативны, вытекает, что элементы  $b - a$  и  $\frac{b}{a}$  (при  $a \neq 0$ ) определяются в любом поле однозначно.

Так как поле является группой по сложению, а без нуля и по умножению, то равенство  $x + a = b$  равносильно

равенству  $x = b + (-a)$ , а равенство  $ya = b$  при  $a \neq 0$  равносильно равенству  $y = ba^{-1}$ . Таким образом,  $b - a = b + (-a)$  и  $b/a = ba^{-1}$ .

Читатель легко может доказать, что операции сложения, вычитания, умножения и деления в любом поле обладают всеми основными свойствами этих операций в поле действительных чисел. В частности, в любом поле обе части любого равенства можно умножить или разделить на любой элемент, отличный от нуля; любой член можно перенести из одной части равенства в другую с противоположным знаком и т. д. Для примера рассмотрим одно из свойств, связывающих вычитание и умножение.

**200.** Доказать, что в любом поле  $(a - b)c = ac - bc$  для любых элементов  $a, b, c$ .

Если  $K$  — некоторое поле, то можно, так же как для поля действительных чисел, рассматривать многочлены с коэффициентами из поля  $K$  или, другими словами, многочлены над полем  $K$ .

**О п р е д е л е н и е.** *Многочленом степени  $n$  ( $n$  — натуральное число) от одной переменной  $x$  над полем  $K$  называется любое выражение вида*

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n, \quad (1.1)$$

где  $a_0, a_1, \dots, a_n$  — элементы поля  $K$ , причем  $a_0 \neq 0$ . Если  $a$  — элемент поля  $K$ , то выражение  $a$  также считается многочленом над полем  $K$ , причем если  $a \neq 0$ , то это многочлен нулевой степени, если же  $a = 0$ , то степень такого многочлена считается неопределенной.

Элементы  $a_0, a_1, \dots, a_n$  называются *коэффициентами* многочлена (1.1),  $a_0$  — *старшим коэффициентом*.

Два многочлена от переменной  $x$  считаются равными в том и только в том случае, если все их соответствующие коэффициенты попарно равны.

Пусть

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n.$$

Если в правую часть этого равенства вместо  $x$  подставить некоторый элемент  $a$  поля  $K$  и произвести указанные вычисления, понимая операции сложения и умножения как операции в поле  $K$ , то в результате получится некоторый элемент  $b$  поля  $K$ . В этом случае записывают  $P(a) = b$ .

Если  $P(a) = 0$ , где  $0$  — нулевой элемент поля  $K$ , то говорят, что  $a$  — *корень уравнения*  $P(x) = 0$ ; в этом случае говорят также, что  $a$  — *корень многочлена*  $P(x)$ .

Многочлены над произвольным полем  $K$  можно складывать, вычитать и умножать.

*Суммой* многочленов  $P(x)$  и  $Q(x)$  называется многочлен  $R(x)$ , в котором коэффициент при  $x^k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) равен сумме (в поле  $K$ ) коэффициентов при  $x^k$  в многочленах  $P()$  и  $Q(x)$ . Так же определяется *разность* двух многочленов. Очевидно, что степень суммы или разности двух многочленов не больше, чем максимальная из степеней данных многочленов.

Чтобы вычислить *произведение* многочленов  $P(x)$  и  $Q(x)$ , нужно каждое слагаемое  $ax^k$  многочлена  $P(x)$  умножить на каждое слагаемое  $bx^l$  многочлена  $Q(x)$  по правилу:  $ax^k \cdot bx^l = abx^{k+l}$  где  $ab$  — произведение в поле  $K$ , а  $k + l$  — обычная сумма натуральных чисел. После этого все полученные выражения надо сложить, приводя подобные члены, т. е. собирая все слагаемые, содержащие одну и ту же степень  $r$  переменной  $x$ , и заменяя сумму  $d_1x^r + d_2x^r + \dots + d_sx^r$  выражением  $(d_1 + d_2 + \dots + d_s)x^r$ .

Если

$$\begin{aligned} P(x) &= a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n, \\ Q(x) &= b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \dots + b_m, \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} P(x) \cdot Q(x) &= a_0b_0x^{n+m} + (a_0b_1 + a_1b_0)x^{n+m-1} + \\ &+ (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^{n+m-2} + \dots + a_nb_m^*). \end{aligned}$$

Так как  $a_0 \neq 0$  и  $b_0 \neq 0$ , то и  $a_0b_0 \neq 0$  (см. **197**), поэтому степень многочлена  $P(x) \cdot Q(x)$  равна  $n + m$ , т. е. степень произведения двух многочленов (отличных от 0) равна сумме степеней данных многочленов.

Учитывая, что операции сложения и умножения элементов в поле  $K$  обладают свойствами коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности, нетрудно получить, что введенные нами операции сложения и умножения

---

\*) Коэффициент при  $x^{n+m-k}$  в произведении  $P(x) \cdot Q(x)$  равен  $a_0b_k + a_1b_{k-1} + \dots + a_{k-1}b_1 + a_kb_0$ , причем здесь надо положить  $a_i = 0$  при  $i > n$  и  $b_j = 0$  при  $j > m$ .

многочленов над полем  $K$  также обладают свойствами коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности.

Если

$$\begin{aligned} P(x) + Q(x) &= R_1(x), & P(x) - Q(x) &= R_2(x), \\ P(x) \cdot Q(x) &= R_3(x) \end{aligned}$$

и  $a$  — произвольный элемент поля  $K$ , то легко получить, что

$$\begin{aligned} P(a) + Q(a) &= R_1(a), & P(a) - Q(a) &= R_2(a), \\ P(a) \cdot Q(a) &= R_3(a). \end{aligned}$$

Многочлены над произвольным полем  $K$  можно делить друг на друга с остатком. Разделить многочлен  $P(x)$  на многочлен  $Q(x)$  с остатком — это значит найти многочлены  $S(x)$  (частное) и  $R(x)$  (остаток) такие, что

$$P(x) = S(x) \cdot Q(x) + R(x),$$

причем степень многочлена  $R(x)$  должна быть меньше, чем степень многочлена  $Q(x)$ , либо должно быть  $R(x) = 0$ .

Пусть  $P(x)$  и  $Q(x)$  — произвольные многочлены над полем  $K$  и  $Q(x) \neq 0$ . Покажем, что можно поделить многочлен  $P(x)$  на многочлен  $Q(x)$  с остатком.

Пусть

$$\begin{aligned} P(x) &= a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n, \\ Q(x) &= b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m. \end{aligned}$$

Если  $n < m$ , то положим  $S(x) = 0$  и  $R(x) = P(x)$  и получаем требуемые частное и остаток. Если  $n \geq m$ , то рассмотрим многочлен

$$P(x) - \frac{a_0}{b_0}x^{n-m}Q(x) = R_1(x).$$

Многочлен  $R_1(x)$  не содержит члена с  $x^n$ , поэтому его степень не более чем  $n - 1$  или  $R_1(x) = 0$ . Если

$$R_1(x) = c_0x^k + c_1x^{k-1} + \dots + c_k$$

и  $k \geq m$ , то рассмотрим многочлен

$$R_1(x) - \frac{c_0}{b_0}x^{k-m}Q(x) = R_2(x)$$

и т. д. Так как степень получающегося многочлена строго меньше, чем степень предыдущего многочлена, то этот процесс должен закончиться, т. е. на некотором шаге получим

$$R_{s-1}(x) - \frac{d_0}{b_0}x^{l-m}Q(x) = R_s(x),$$



и степень многочлена  $R_s(x)$  будет меньше, чем степень многочлена  $Q(x)$  или  $R_s(x) = 0$ . Тогда получим

$$\begin{aligned} P(x) &= \frac{a_0}{b_0} x^{n-m} Q(x) + R_1(x) = \\ &= \frac{a_0}{b_0} x^{n-m} Q(x) + \frac{c_0}{b_0} x^{k-m} Q(x) + R_2(x) = \dots = \\ &= \frac{a_0}{b_0} x^{n-m} Q(x) + \frac{c_0}{b_0} x^{k-m} Q(x) + \dots + \\ &\quad + \frac{d_0}{b_0} x^{l-m} Q(x) + R_s(x) = \\ &= \left( \frac{a_0}{b_0} x^{n-m} + \frac{c_0}{b_0} x^{k-m} + \dots + \frac{d_0}{b_0} x^{l-m} \right) \cdot Q(x) + R_s(x). \end{aligned}$$

Таким образом, выражение, стоящее в скобках, является частным от деления многочлена  $()$  на  $Q(x)$  и  $R_s(x)$  — остатком. Описанный здесь процесс деления многочлена на многочлен представляет собой процесс деления столбиком.

Следующая задача показывает, что если  $()$  и  $Q(x)$  — два многочлена и  $Q(x) \neq 0$ , то каким бы способом мы не делили  $()$  на  $Q(x)$  с остатком, частное и остаток определяются однозначно.

**201.** Пусть

$$\begin{aligned} P(x) &= S_1(x) \cdot Q(x) + R_1(x), \\ P(x) &= S_2(x) \cdot Q(x) + R_2(x), \end{aligned}$$

причем степени многочленов  $R_1(x)$  и  $R_2(x)$  меньше, чем степень многочлена  $Q(x)$  (может быть  $R_1(x) = 0$  или  $R_2(x) = 0$ ). Доказать, что

$$S_1(x) = S_2(x), \quad R_1(x) = R_2(x).$$

## § 2. Поле комплексных чисел

Из решения задачи **194** вытекает, что существуют поля, более узкие, чем поле действительных чисел, например, поле рациональных чисел. Мы же сейчас построим поле более широкое, чем поле действительных чисел, а именно, поле комплексных чисел.

Рассмотрим всевозможные упорядоченные пары действительных чисел, т. е. пары вида  $(a, b)$ , где  $a$  и  $b$  — произвольные действительные числа. Будем считать, что  $(a, b) = (c, d)$  тогда и только тогда, когда  $a = c$  и  $b = d$ .

На множестве всех таких пар определим две бинарные операции — сложение и умножение — следующим образом:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d), \quad (2.1)$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc) \quad (2.2)$$

(здесь в скобках в правых частях равенств обычные операции над действительными числами). Например, получаем

$$(\sqrt{2}, 3) + (\sqrt{2}, -1) = (2\sqrt{2}, 2),$$

$$(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0).$$

**О п р е д е л е н и е.** Множество всевозможных упорядоченных пар действительных чисел с операциями сложения и умножения, определенными согласно (2.1) и (2.2), называется *множеством комплексных чисел*.

Из этого определения видно, что в комплексных числах нет ничего «сверхестественного»: комплексные числа — это вполне реально существующие пары действительных чисел. Однако может возникнуть вопрос: правомерно ли называть такие объекты числами? Этот вопрос мы обсудим в конце данного параграфа. Другой вопрос, который может возникнуть у читателя, — почему именно так, а не иначе определяются операции сложения и умножения комплексных чисел (особенно странной выглядит операция умножения)? На этот вопрос мы ответим в § 3.

Выясним, какими хорошими свойствами обладает определенное выше множество комплексных чисел.

**202.** Доказать, что комплексные числа образуют по сложению коммутативную группу. Какое комплексное число является единичным элементом (нулем) этой группы?

В дальнейшем комплексные числа будет удобно обозначать одной буквой, например  $z$  (или  $w$ ).

**203.** Доказать, что операция умножения комплексных чисел коммутативна и ассоциативна, т. е.  $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$  и  $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$  для любых комплексных чисел  $z_1, z_2, z_3$ .

Легко проверить, что

$$(a, b) \cdot (1, 0) = (1, 0) \cdot (a, b) = (a, b)$$

для любого комплексного числа  $(a, b)$ . Таким образом, комплексное число  $(1, 0)$  является единичным элементом в множестве комплексных чисел относительно умножения.

**204.** Пусть  $z$  — произвольное комплексное число и  $z \neq (0, 0)$ . Доказать, что существует комплексное число  $z^{-1}$  такое, что

$$z \cdot z^{-1} = z^{-1} \cdot z = (1, 0).$$

Результаты задач **203** и **204** показывают, что комплексные числа образуют относительно операции умножения коммутативную группу.

**205.** Доказать, что для операций сложения и умножения комплексных чисел выполняется закон дистрибутивности, т. е.  $(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3$  для любых комплексных чисел  $z_1, z_2, z_3$ .

Из результатов задач **202–205** вытекает, что комплексные числа с операциями сложения и умножения, определенными согласно (2.1) и (2.2), образуют поле. Это и есть *поле комплексных чисел*.

Для комплексных чисел вида  $(a, 0)$ , где  $a$  — произвольное действительное число, формулы (2.1) и (2.2) дают

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0),$$

$$(a, 0) \cdot (b, 0) = (a \cdot b, 0).$$

Таким образом, если сопоставить каждому комплексному числу вида  $(a, 0)$  действительное число  $a$ , то операциям над числами вида  $(a, 0)$  будут соответствовать обычные операции над действительными числами. Поэтому мы просто отождествим комплексное число  $(a, 0)$  и действительное число  $a^*$  и будем говорить, что поле комплексных чисел содержит в себе поле действительных чисел.

Комплексное число  $(0, 1)$  не является действительным (при нашем отождествлении), и мы обозначим его через  $i$ , т. е.  $i = (0, 1)$ . Так как поле комплексных чисел содержит все действительные числа и число  $i$ , то оно содержит также числа вида  $b \cdot i$  и  $a + b \cdot i$ , где  $a$  и  $b$  — произвольные действительные числа и операции сложения и умножения понимаются как операции над комплексными числами.

**206.** Пусть  $(a, b)$  — комплексное число. Доказать, что

$$(a, b) = a + b \cdot i.$$

---

\*) Точно так же, например, рациональное число  $\frac{n}{1}$  отождествляется с целым числом  $n$ .

Из результата задачи **206**, очевидно, получаем, что  $a + bi = c + di$  тогда и только тогда, когда  $a = c$  и  $b = d$ .

Таким образом, любое комплексное число можно, и причем единственным образом, представить в виде  $a + bi$ , где  $a$  и  $b$  — действительные числа. Если  $z = a + bi$ , то, следуя историческим традициям, принято  $a$  называть *действительной частью* комплексного числа  $z$ ,  $bi$  — *мнимой частью*,  $b$  — *коэффициентом при мнимой части*.

Представление комплексного числа  $z$  в виде  $z = a + bi$  называют *алгебраической формой* комплексного числа  $z$ .

Для комплексных чисел в алгебраической форме формулы (2.1) и (2.2) переписутся следующим образом:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i, \quad (2.3)$$

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i. \quad (2.4)$$

**207.** Решить уравнение (найти формулу разности)

$$(a + bi) + (x + yi) = (c + di).$$

**208.** Решить уравнение (найти формулу частного)

$$(a + bi) \cdot (x + yi) = (c + di), \quad \text{где } a + bi \neq 0.$$

Легко проверить, что

$$i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1.$$

т. е.  $i^2 = -1$ . Таким образом, в поле комплексных чисел извлекаются квадратные корни и из некоторых отрицательных действительных чисел.

**209.** Вычислить: а)  $i^3$ , б)  $i^4$ , в)  $i^n$ .

**210.** Найти все комплексные числа  $z = x + yi$  такие, что: а)  $z^2 = 1$ , б)  $z^2 = -1$ , в)  $z^2 = a^2$ , г)  $z^2 = -a^2$  ( $a$  — некоторое действительное число).

**О п р е д е л е н и е.** Комплексное число  $a - bi$  называется *сопряженным* комплексному числу  $z = a + bi$  и обозначается  $\bar{z}$ . Легко проверить, что

$$z + \bar{z} = 2a, \quad z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2.$$

**211.** Пусть  $z_1$  и  $z_2$  — произвольные комплексные числа. Доказать, что: а)  $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ , б)  $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$ , в)  $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ , г)  $\overline{z_1 / z_2} = \bar{z}_1 / \bar{z}_2$ .

**212.** Пусть

$$P(z) = a_0 z^2 + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n,$$

$z$  — комплексное число и все  $a_i$ , — действительные числа. Доказать, что  $\overline{P(z)} = P(\overline{z})$ .

Переход к комплексным числам является очередным шагом в последовательности: натуральные числа — целые числа — рациональные числа — действительные числа — комплексные числа. У читателя может сложиться мнение, что до действительных чисел это на самом деле числа, а комплексные числа — это уже не числа, а объекты более сложной природы. Конечно, терминология может быть принята любая, однако в действительности комплексные числа вполне заслуживают, чтобы их называли числами.

Первое возражение против этого может состоять в том, что это не числа, а пары чисел. Вспомним, однако, что подобным же образом вводятся рациональные числа. Рациональное число — это класс равных дробей, а дроби — это пары целых чисел, записываемых в виде  $m/n$  (где  $n \neq 0$ ); при этом действия над рациональными числами — это просто действия над парами целых чисел. Поэтому первое возражение оказывается несостоятельным. Другое возражение может состоять в том, что числа — это то, чем можно что-то измерять. Если понимать под этим, что числа — это то, чем можно измерять все, что угодно, то тогда надо запретить, например, отрицательные числа, так как не бывает отрезков длиной  $-3$  см, а поезд не может ехать  $-4$  дня. Если же считать, что числа — это то, чем можно (или удобно) измерять хоть что-нибудь, то тогда комплексные числа оказываются ничем не хуже других чисел — ими очень удобно описывать, например, ток, напряжение и сопротивление в электрических цепях переменного тока и это широко используется в электротехнике<sup>\*)</sup>). Комплексные числа также очень полезны, а порой и незаменимы в гидро- и аэромеханике<sup>\*)</sup>).

Таким образом, переход от действительных чисел к комплексным является таким же естественным, как, например,

---

\*) См., например, «Теоретические основы электротехники», под общей редакцией Поливанова К. М., т. 1., Линейные электрические цепи с сосредоточенными постоянными, «Энергия», 1972.

\*) Маркушевич А. И., Краткий курс теории аналитических функций, М., Наука, 1979.

переход от целых чисел к рациональным.

### § 3. Единственность поля комплексных чисел

Перейдем теперь к рассмотрению вопроса о том, почему именно так, а не иначе определялись комплексные числа. Ответ на этот вопрос таков: мы хотели, чтобы получилось поле, являющееся расширением поля действительных чисел. А нельзя ли построить другое поле, также являющееся расширением поля действительных чисел? На этот вопрос мы и ответим в этом параграфе.

**Определение.** *Изоморфным отображением* (или просто *изоморфизмом*) одного поля на другое называется взаимно однозначное отображение  $\varphi$ , которое является изоморфизмом одновременно и относительно сложения и относительно умножения, т. е.  $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$  и  $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ . Поля, между которыми можно установить изоморфизм, называются изоморфными.

Если изучаются только сами операции сложения и умножения в поле, то у изоморфных полей все свойства оказываются одинаковыми. Поэтому, так же как в случае групп, изоморфные поля можно не различать.

Как мы видели в предыдущем параграфе, в поле комплексных чисел есть элемент  $i$  такой, что  $i^2 = -1$ . Следующая задача показывает, что добавление такого элемента к полю действительных чисел с необходимостью приводит к полю комплексных чисел.

**213.** Пусть  $M$  — некоторое поле, содержащее в себе поле действительных чисел и некоторый элемент  $i_0$ , такой, что  $i_0^2 = -1$ . Доказать, что  $M$  содержит некоторое поле  $M'$ , изоморфное полю комплексных чисел.

Будем говорить, что некоторое поле является *минимальным полем с данными свойствами*, если оно обладает этими свойствами и не содержит в себе других полей с теми же свойствами.

В этом случае результат задачи **213** можно сформулировать так: минимальным полем, содержащим поле действительных чисел и элемент  $i_0$  такой, что  $i_0^2 = -1$ , является поле комплексных чисел. Этот результат доказывает в некотором смысле единственность поля комплексных чисел. Однако имеет место существенно более сильный результат. А именно, откажемся от требования, чтобы поле  $M$

содержало элемент  $i_0$  такой, что  $i_0^2 = -1$ , и поставим задачу найти все поля, являющиеся минимальными расширениями поля действительных чисел. Оказывается, что таких расширений всего два (с точностью до изоморфизма), одно из них — поле комплексных чисел. Покажем это.

Пусть поле  $M$  содержит поле действительных чисел, т. е.  $M$  содержит все действительные числа и операции над ними в поле  $M$  совпадают с обычными операциями над действительными числами. Пусть, кроме того, поле  $M$  содержит элемент  $j$ , отличный от всех действительных чисел. Тогда для любых действительных чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n$  в  $M$  содержится элемент, равный

$$j^n + a_1 j^{n-1} + a_2 j^{n-2} + \dots + a_n. \quad (3.1)$$

Будем называть  $n$  степенью выражения (3.1).

Может быть 2 случая:

а) некоторое выражение вида (3.1) при  $n \geq 1$  задает элемент, равный 0;

б) никакое выражение вида (3.1) при  $n \geq 1$  не равно 0.

Предположим сначала, что имеет место случай а).

**О п р е д е л е н и е.** Многочлен с коэффициентами из некоторого поля  $K$  называется *приводимым над полем  $K$* , если он может быть представлен как произведение двух многочленов меньшей степени с коэффициентами из  $K$ . В противном случае он называется *неприводимым над полем  $K$*  (\*).

Например, многочлены  $x^3 - 1$  и  $x^2 - x - 1$  приводимы над полем действительных чисел, так как  $x^3 - 1 = (x - 1) \times (x^2 + x + 1)$  и  $x^2 - x - 1 = \left(x - \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) \left(x - \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)$ , а многочлены  $x^2 + 1$  и  $x^2 + x + 1$  неприводимы над полем действительных чисел. Очевидно, что многочлены первой степени над любым полем являются неприводимыми.

**214.** Выберем среди выражений вида (3.1), равных 0, выражение наименьшей степени  $n$  ( $n \geq 1$ ). Пусть это будет выражение

$$j^n + a_1 j^{n-1} + a_2 j^{n-2} + \dots + a_n = 0.$$

---

\*) Многочлены, неприводимые над полем  $K$ , являются аналогом простых чисел в множестве натуральных чисел.

Доказать, что многочлен

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n$$

неприводим над полем действительных чисел.

В дальнейшем мы покажем (см. **272**), что любой многочлен с действительными коэффициентами степени выше второй приводим над полем действительных чисел. Поэтому  $n$  в задаче **214** должно быть не больше 2. А так как  $n \neq 1$  (иначе мы получили бы, что  $j + a = 0$  и  $j$  равно действительному числу  $-a$ ), то  $n = 2$ .

Таким образом, в случае а) (см. стр. **63**) для некоторых действительных чисел  $p$  и  $q$  в поле  $M$  должно выполняться равенство

$$j^2 + pj + q = 0$$

причем многочлен  $x^2 + px + q$  должен быть неприводим над полем действительных чисел.

**215.** Доказать, что в случае а) (стр. **63**) поле  $M$  содержит элемент  $i_0$  такой, что  $i_0^2 = -1$ .

Из результатов задач **215** и **213** вытекает, что в случае а) поле  $M$  содержит поле  $M'$ , изоморфное полю комплексных чисел. Следовательно, если поле  $M$  — минимальное расширение поля действительных чисел, то поле  $M$  должно совпадать с  $M'$ . Таким образом, в случае а) любое минимальное поле, являющееся расширением поля действительных чисел, совпадает (т. е. изоморфно) с полем комплексных чисел. Итак, в случае а) имеется единственное (с точностью до изоморфизма) поле, являющееся минимальным расширением поля действительных чисел, а именно, поле комплексных чисел.

**216.** Найти все поля, являющиеся минимальными расширениями поля действительных чисел в случае б) (см. стр. **63**).

#### § 4. Геометрические представления комплексных чисел

Введем на плоскости прямоугольную систему координат  $ХОУ$  и поставим в соответствие каждому комплексному числу  $a + bi$  точку плоскости с координатами  $(a, b)$ . Получим взаимно однозначное соответствие между всеми комплексными числами и всеми точками плоскости. Это



дает нам *первое геометрическое представление* комплексных чисел.

**217.** Какие комплексные числа соответствуют точкам, указанным на рис. 13?

**218.** Пусть комплексные числа изображаются точками плоскости. Каков геометрический смысл преобразования  $\varphi$ , если для любого комплексного числа  $z$ : а)  $\varphi(z) = -z$ , б)  $\varphi(z) = 2z$ , в)  $\varphi(z) = \bar{z}$  ( $\bar{z}$  — сопряженное  $z$ ).

Пусть  $A(x_A, y_A)$  и  $B(x_B, y_B)$  — две точки плоскости (рис. 14). Отрезок  $AB$  с указанным на нем направлением от  $A$  к  $B$  называют вектором  $\vec{AB}$ . Координаты вектора  $\vec{AB}$  по определению вычисляются следующим образом:

$$x_{\vec{AB}} = x_B - x_A, \quad y_{\vec{AB}} = y_B - y_A.$$

Два вектора считаются равными, если они параллельны, одинаково направлены и равны по длине.

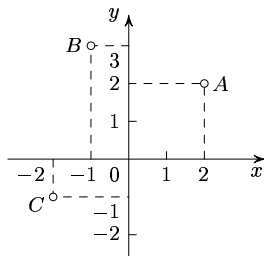


Рис. 13

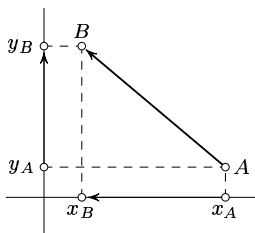


Рис. 14

**219.** Доказать, что два вектора равны тогда и только тогда, когда равны их соответствующие координаты.

Множество равных векторов рассматривают обычно как один и тот же вектор, характеризующий лишь своими координатами, — так называемый *свободный вектор*. Поставив в соответствие каждому комплексному числу  $a + bi$  свободный вектор с координатами  $(a, b)$ , мы получим *второе геометрическое представление* комплексных чисел.

**220.** Пусть комплексным числам  $z_1$ ,  $z_2$  и  $z_3$  соответствуют свободные векторы  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{w}$ . Доказать, что  $z_1 + z_2 = z_3$  тогда и только тогда, когда  $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{w}$ , где сумма векторов вычисляется по правилу параллелограмма.

**221.** Доказать следующую взаимосвязь между двумя геометрическими представлениями комплексных чисел:

если  $z_A, z_B, z_{\overrightarrow{AB}}$  — комплексные числа, соответствующие точкам  $A, B$  и вектору  $\overrightarrow{AB}$ , то  $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$ .

Из определения равных векторов получаем, что равные векторы имеют равную длину. Эта длина принимается также за длину свободного вектора, соответствующего данному множеству равных векторов.

**О п р е д е л е н и е.** *Модулем* комплексного числа  $z$  (обозначается  $|z|$ ) называется длина соответствующего ему свободного вектора\*).

**222.** Пусть  $z = a + bi$ . Доказать, что

$$|z|^2 = a^2 + b^2 = z \cdot \bar{z},$$

где  $\bar{z}$  — число, сопряженное  $z$ .

**223.** Доказать неравенства:

$$\text{а) } |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|,$$

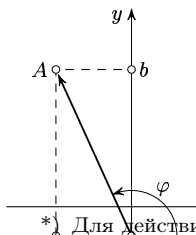
$$\text{б) } |z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||,$$

где  $z_1, z_2$  — произвольные комплексные числа. В каких случаях имеет место равенство?

**224.** Докажите с помощью комплексных чисел, что в произвольном параллелограмме сумма квадратов длин диагоналей равна сумме квадратов длин всех сторон.

## § 5. Тригонометрическая форма комплексных чисел

Напомним, что углом между лучами  $OA$  и  $OB$  называется угол, на который надо повернуть луч  $OA$  вокруг точки против часовой стрелки, чтобы получить луч  $OB$  (если вращение происходит по часовой стрелке, то углу приписывается знак «минус»). При этом угол определяется не однозначно,



\*). Для действительных чисел (как частного случая комплексных чисел) введенное здесь понятие модуля совпадает с понятием абсолютной величины. В самом деле, действительному числу  $a + 0i$  соответствует вектор с координатами  $(a, 0)$ , параллельный оси  $x$ , и длина его равна  $|a|$  — абсолютной величине числа  $a$ .

Рис. 15

а с точностью до слагаемого  $2k\pi$ , где  $k$  — любое целое число.

**Определение.** Пусть точка  $O$  — начало координат, и пусть вектор  $OA$  с координатами  $(a, b)$  соответствует комплексному числу  $z = a + bi$  (рис. 15). *Аргументом* комплексного числа  $z$  (обозначается  $\text{Arg } z$ ) называется угол между положительным направлением оси  $OX$  и лучом  $OA$  (рис. 15) (если  $z = 0$ , то  $\text{Arg } z$  не определен).

Так как для данного числа  $z \neq 0$  указанный угол определяется неоднозначно, то под записью  $\text{Arg } z$  мы будем понимать многозначную функцию, принимающую для каждого  $z \neq 0$  бесконечное множество значений, разность которых кратна  $2\pi$ .

Запись  $\text{Arg } z = \varphi$  будет означать, что одно из значений аргумента равно  $\varphi$ .

Пусть  $z = a + bi \neq 0$  и  $|z| = r$ . Вектор  $\overrightarrow{OA}$  с координатами  $(a, b)$  соответствует комплексному числу  $a + bi$ , и поэтому его длина равна  $r$ . Пусть, кроме того,  $\text{Arg } z = \varphi$ . Тогда по определению тригонометрических функций (см. рис. 15)

$$\cos \varphi = a/r, \quad \sin \varphi = b/r.$$

Отсюда

$$z = a + bi = r \cdot \cos \varphi + i \cdot r \cdot \sin \varphi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

где  $r = |z|$ ,  $\varphi = \text{Arg } z$  и мы получаем *тригонометрическое представление* комплексного числа  $z$ .

Например, если  $z = -1 + \sqrt{3}i$ , то  $|z| = \sqrt{1+3} = 2$  (см. 222) и  $\cos \varphi = -\frac{1}{2}$ ,  $\sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Можно взять  $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ , тогда  $z = -1 + \sqrt{3}i = 2\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right)$ .

**225.** Представить в тригонометрической форме следующие комплексные числа: а)  $1 + i$ , б)  $-\sqrt{3} - i$  в)  $3i$ , г)  $-5$ , д)  $1 + 2i$ .

**226.** Пусть  $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$  и  $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ . Доказать, что

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)) \quad (z_2 \neq 0).$$

Таким образом, при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, аргументы складываются, при делении модули делятся, аргументы вычитаются.

**227.** Доказать *формулу Муавра*<sup>\*)</sup>:

$$[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

для любого натурального числа  $n$ .

**228.** Вычислить  $\frac{(1 - \sqrt{3}i)^{100}}{2^{100}}$ .

**229.** Пусть  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  — фиксированное комплексное число и  $n$  — натуральное число. Найти все комплексные числа  $w$ , удовлетворяющие равенству

$$w^n = z. \quad (5.1)$$

**О п р е д е л е н и е.** Запись  $\sqrt[n]{z}$  (корень степени  $n$  из  $z$ ) мы будем понимать как многозначную функцию, ставящую в соответствие каждому комплексному числу  $z \neq 0$  все  $n$  решений уравнения (5.1). При  $z = 0$  будет  $\sqrt[n]{0} = 0$ .

**230.** Найти все значения корней:

а)  $\sqrt{-1}$ , б)  $\sqrt[3]{8}$ , в)  $\sqrt[4]{\cos 100^\circ + i \sin 100^\circ}$ , г)  $\sqrt[3]{1+i}$ .

Для дальнейшего удобно ввести следующее обозначение:

$$\epsilon_n = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}.$$

**231.** Доказать, что все значения  $\sqrt[n]{1}$  — это  $1, \epsilon_n, \epsilon_n^2, \dots, \epsilon_n^{n-1}$ .

**З а м е ч а н и е.** Так как  $\epsilon_n^n = 1$ , то множество элементов  $1, \epsilon_n, \epsilon_n^2, \dots, \epsilon_n^{n-1}$  является циклической группой относительно умножения.

**232.** Пусть  $z_1$  — одно из значений  $\sqrt[n]{z_0}$ . Найти все значения  $\sqrt[n]{z_0}$ .

В дальнейшем мы будем в основном использовать представление комплексных чисел точками плоскости, т. е. комплексному числу  $z = a + bi$  будем ставить в соответствие точку с координатами  $(a, b)$ . При этом вместо «точка, соответствующая комплексному числу  $z$ » мы будем говорить просто «точка  $z$ ».

**233.** Пусть комплексные числа изображаются точками плоскости. Каков геометрический смысл выражений: а)  $|z|$ , б)  $\text{Arg } z$ , в)  $|z_1 - z_2|$ , г)  $\text{Arg } \frac{z_1}{z_2}$ ?

---

<sup>\*)</sup> Муавр (1667–1754) — английский математик.

**234.** Найти геометрическое место точек  $z$ , удовлетворяющих следующим условиям ( $z_0, z_1, z_2$  — фиксированные комплексные числа,  $R$  — фиксированное действительное число):

- а)  $|z| = 1$ , б)  $|z| = R$ , в)  $|z - z_0| = R$ , г)  $|z - z_0| \leq R$ ,  
 д)  $|z - z_1| = |z - z_2|$ , е)  $\operatorname{Arg} z = \pi$ , ж)  $\operatorname{Arg} z = \frac{9\pi}{4}$ , з)  $\operatorname{Arg} z = \varphi$ .

**235.** Как располагаются на плоскости все значения  $\sqrt[n]{z}$ , где  $z$  — фиксированное комплексное число?

## § 6. Непрерывность

В дальнейшем важную роль для нас будет играть понятие непрерывности и, в частности, понятие непрерывной кривой. Если читатель не знает строгого определения этих понятий, то он, по-видимому, все же интуитивно понимает, что такое непрерывная кривая, а также непрерывная функция действительного переменного (на интуитивном уровне можно сказать, что это такая функция, у которой график — непрерывная кривая). Однако если функция действительного переменного является достаточно сложной (например,  $f(x) = \frac{x^3 - 2x}{x^2 - \sin x + 1}$ ), то установить, непрерывна ли она, используя лишь интуитивное понятие непрерывности, довольно тяжело. Поэтому мы дадим строгое определение непрерывности и с помощью него докажем несколько основных исходных утверждений о непрерывных функциях. При этом мы дадим определение непрерывности как для функций действительного аргумента, так и для функций комплексного аргумента.

Если мы рассмотрим график некоторой функции действительного аргумента, то этот график в некоторых точках может быть непрерывным, а в некоторых точках может иметь разрывы. Поэтому естественно ввести сначала определение не вообще непрерывности функции, а непрерывности функции в данной точке.

Если мы попытаемся более точно определить наше интуитивное представление о непрерывности функции  $f(x)$  в данной точке  $x_0$ , то получим, что непрерывность означает следующее: при малых изменениях аргумента вблизи точки  $x_0$  функция тоже изменяется мало относительно зна-

чения  $f(x_0)$ . Причем можно добиться сколь угодно малого изменения функции, выбирая достаточно малый интервал изменения аргумента. Более строго это можно сформулировать следующим образом.

**О п р е д е л е н и е.** Пусть  $f(z)$  функция, действительного или комплексного аргумента  $z$ . Говорят, что функция  $f(z)$  *непрерывна в точке  $z_0$* , если для любого действительного числа  $\varepsilon > 0$  можно подобрать такое действительное число  $\delta > 0$  (зависящее от  $z_0$  и от  $\varepsilon$ ), что для всех чисел  $z$ , удовлетворяющих условию  $|z - z_0| < \delta$ , будет выполняться неравенство  $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon^*$ .

**П р и м е р 15.** Докажем, что функция комплексного аргумента  $f(z) = 2z$  непрерывна в любой точке  $z_0$ . Пусть заданы точка  $z_0$  и произвольное действительное число  $\varepsilon > 0$ . Нужно подобрать такое действительное число  $\delta > 0$ , чтобы для всех чисел  $z$ , удовлетворяющих условию  $|z - z_0| < \delta$  выполнялось неравенство  $|f(z) - f(z_0)| = |2z - 2z_0| < \varepsilon$ . Нетрудно видеть, что можно выбрать  $\delta = \varepsilon/2$  (независимо от точки  $z_0$ ). Действительно, тогда из условия  $|z - z_0| < \delta$  будет вытекать:

$$|2z - 2z_0| = |2(z - z_0)| = (\text{см. 226}) = |2| \cdot |z - z_0| < 2\delta = \varepsilon,$$

т. е.  $|2z - 2z_0| < \varepsilon$ . Таким образом, функция  $f(z) = 2z$  непрерывна в любой точке  $z_0$ . В частности, она непрерывна при всех действительных значениях аргумента  $z$ . Поэтому, если мы ограничимся только действительными значениями аргумента, то получим, что функция действительного аргумента  $f(x) = 2x$  непрерывна при всех действительных значениях  $x$ .

**236.** Пусть  $a$  — фиксированное комплексное (или, в частности, действительное) число. Доказать, что функция комплексного (или действительного) аргумента  $f(z) \equiv a$  непрерывна при всех значениях аргумента.

**237.** Доказать, что функция комплексного аргумента  $f(z) = z$  и функция действительного аргумента  $f(x) = x$  непрерывны при всех значениях аргумента.

**238.** Доказать, что функция комплексного аргумента  $f(z) = z^2$  непрерывна при всех значениях аргумента  $z$ .

---

\*) Геометрический смысл неравенств  $|z - z_0| < \delta$  и  $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$  см. в задачах 233 в) и 234 г).

**Определение.** Пусть  $f(z)$  и  $g(z)$  — две функции комплексного (или действительного) аргумента. Функция комплексного (или действительного) аргумента  $h(z)$  называется *суммой* функций  $f(z)$  и  $g(z)$ , если в каждой точке  $z_0$  выполняется равенство  $h(z_0) = f(z_0) + g(z_0)$ . При этом, если значение  $f(z_0)$  или  $g(z_0)$  не определено, то значение  $h(z_0)$  также не определено. Точно так же определяются *разность*, *произведение* и *частное* двух функций.

**239.** Пусть функции комплексного или действительного аргумента  $f(z)$  и  $g(z)$  непрерывны в точке  $z_0$ . Доказать, что в точке  $z_0$  непрерывны функции: а)  $h(z) = f(z) + g(z)$ , б)  $h(z) = f(z) - g(z)$ , в)  $h(z) = f(z) \cdot g(z)$ .

Из результата задачи **239** в) получаем, в частности, что если функция  $f(z)$  непрерывна в точке  $z_0$  и  $n$  — натуральное число, то функция  $[f(z)]^n$  также непрерывна в точке  $z_0$ .

**240.** Пусть функции комплексного или действительного аргумента  $f(z)$  и  $g(z)$  непрерывны в точке  $z_0$  и  $g(z_0) \neq 0$ . Доказать, что в точке  $z_0$  непрерывны функции: а)  $h(z) = \frac{1}{g(z)}$ , б)  $h(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$ .

**Определение.** Пусть  $f(z)$  и  $g(z)$  — две функции комплексного или действительного аргумента. Функция  $h(z)$  называется *суперпозицией* функций  $f(z)$  и  $g(z)$ , если в каждой точке  $z_0$  выполняется равенство  $h(z_0) = f(g(z_0))$ . При этом, если  $g(z_0)$  не определено или функция  $f(z)$  в точке  $g(z_0)$  не определена, то и  $h(z_0)$  не определено.

**241.** Пусть  $f(z)$  и  $g(z)$  — функции комплексного или действительного аргумента. Пусть  $g(z_0) = z_1$  и пусть функция  $g(z)$  непрерывна в точке  $z_0$ , а функция  $f(z)$  непрерывна в точке  $z_1$ . Доказать, что функция  $h(z) = f(g(z))$  непрерывна в точке  $z_0$ .

Из результатов задач **239–241** вытекает, в частности, что если из нескольких функций комплексного (или действительного) аргумента, непрерывных при всех значениях аргумента, построено некоторое выражение с помощью операций сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в натуральную степень и суперпозиции, то полученное выражение будет задавать функцию, непрерывную всюду, где ни один из знаменателей не обращается в 0.

Например, учитывая результаты задач **236** и **237**, получаем, что функции  $f(z) = z^n$ ,  $f(z) = az^n$  и вообще

$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$  являются непрерывными функциями аргумента  $z$  при любых комплексных числах  $a, a_0, a_1, \dots, a_n$ .

**242.** Доказать, что функции действительного аргумента  $f(x) = \sin x$  и  $f(x) = \cos x$  непрерывны при всех значениях аргумента  $x$ .

**243.** Рассмотрим при всех действительных значениях  $x \geq 0$  функцию  $f(x) = \sqrt[n]{x}$ , где  $n$  — некоторое натуральное число и  $\sqrt[n]{x}$  берется неотрицательным. Доказать, что эта функция непрерывна при всех  $x > 0$ .

При изучении непрерывности приходится сталкиваться с некоторыми утверждениями, которые интуитивно кажутся совершенно очевидными, но строгое доказательство которых сопряжено с большими техническими трудностями и требует более строгого, чем это делается в школе, определения действительных чисел, а также изучения основ теории множеств и топологии. Примером такого утверждения может служить следующее утверждение: если функция действительного аргумента  $f(x)$  непрерывна на некотором отрезке и принимает на этом отрезке только целочисленные значения, то она принимает на всем отрезке одно и то же значение. Действительно, интуитивно кажется очевидным, что при движении точки  $x$  по отрезку значение функции  $f(x)$  должно изменяться непрерывно и не может «перескочить» из одного целочисленного значения в другое. Однако доказать это утверждение строго довольно тяжело.

В дальнейшем изложении мы будем больше ориентироваться на интуицию читателя и примем несколько «интуитивно ясных» утверждений, связанных с непрерывностью, без доказательства. В частности, без доказательства мы примем утверждение, сформулированное выше в качестве примера. Строгое доказательство этого утверждения в популярном изложении можно найти, например, в книге: С т и н р о д Н. и Ч и н н У., Первые понятия топологии, «Мир», 1967. См. также Б о р и с о в и ч Ю. Г. и др., Введение в топологию, М., Физматлит, 1995.



## § 7. Непрерывные кривые

Пусть параметр  $t$  принимает действительные значения на отрезке  $0 \leq t \leq 1$ , и пусть каждому такому значению  $t$  поставлено в соответствие некоторое комплексное число

$$z(t) = x(t) + iy(t).$$

Плоскость, на которой изображаются значения  $z$ , мы будем в дальнейшем называть просто «плоскость  $z$ ». Если функции  $x(t)$  и  $y(t)$  непрерывны при  $0 \leq t \leq 1$ , то при изменении  $t$  от 0 до 1 точка  $z(t)$  будет описывать некоторую *непрерывную кривую* на плоскости  $z$ . При этом мы будем рассматривать эту кривую с направлением, принимая точку  $z_0 = z(0)$  за начальную, а точку  $z_1 = z(1)$  за конечную. Функцию  $z(t)$  мы будем называть *параметрическим уравнением* этой кривой.

**Пример 16.** Пусть  $z(t) = t + it^2$ . Тогда  $x(t) = t$  и  $y(t) = t^2$ . Поэтому  $y(t) = x^2(t)$  при любом  $t$ , т. е. точка  $z(t)$  при любом  $t$  лежит на параболе  $y = x^2$ . При изменении  $t$  от 0 до 1  $x(t)$  также меняется от 0 до 1 и точка  $z(t)$  пробегает дугу параболы  $y = x^2$  от точки  $z_0 = 0$  до точки  $z_1 = 1 + i$  (рис. 7).

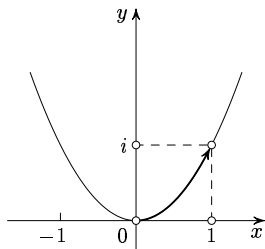


Рис. 16

**244.** Построить на плоскости  $z$  кривые, задаваемые следующими параметрическими уравнениями: а)  $z(t) = 2t$ ; б)  $z(t) = it$ ; в)  $z(t) = it^2$ ; г)  $z(t) = t - it$ ; д)  $z(t) = t^2 + it$ ; е)  $z(t) = R(\cos 2\pi t + i \sin 2\pi t)$ ; ж)  $z(t) = R(\cos 4\pi t + i \sin 4\pi t)$ ; з)  $z(t) = R(\cos \pi t + i \sin \pi t)$ ;

и)  $z(t) = \begin{cases} \cos 2\pi t + i \sin 2\pi t & \text{при } 0 \leq t \leq 1/2, \\ 4t - 3 & \text{при } 1/2 < t \leq 1. \end{cases}$

**245.** Написать какое-нибудь параметрическое уравнение отрезка, соединяющего точки  $z_0 = a_0 + b_0 i$  и  $z_1 = a_1 + b_1 i$ .

**З а м е ч а н и е.** В последующих задачах параметрические уравнения имеют индексы. Эти индексы указывают лишь на номер кривой, но рассматриваются данные кривые на одной и той же плоскости  $z$ .

**246.** С помощью каких геометрических преобразований

из кривой  $C_1$  с уравнением  $z_1(t)$  получается кривая  $C_2$  с уравнением  $z_2(t)$ , если:

а)  $z_2(t) = z_1(t) + z_0$  ( $z_0$  — фиксированное комплексное число);

б)  $z_2(t) = a \cdot z_1(t)$ , где  $a$  — действительное положительное число;

в)  $z_2(t) = z_0 \cdot z_1(t)$ , где  $|z_0| = 1$ ;

г)  $z_2(t) = z_0 \cdot z_1(t)$ , где  $z_0$  — произвольное комплексное число?

**247.** Пусть  $z_1(t)$  — параметрическое уравнение кривой  $C$ . Какая кривая описывается уравнением  $z_2(t)$ , если  $z_2(t) = z_1(1 - t)$ ?

**248.** Пусть  $z_1(t)$  и  $z_2(t)$  — параметрические уравнения кривых  $C_1$  и  $C_2$ , и пусть  $z_1(t) = z_2(0)$ . Какая кривая описывается уравнением  $z_3(t)$ , если

$$z_3(t) = \begin{cases} z_1(2t) & \text{при } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ z_2(2t - 1) & \text{при } \frac{1}{2} < t \leq 1? \end{cases}$$

**249.** Пусть  $z(t) = \cos \pi t + i \sin \pi t$  (рис. 7). Найти все значения  $\text{Arg } z(t)$  в зависимости от  $t$ .

**250.** Пусть  $z(t) = \cos \pi t + i \sin \pi t$ . Как нужно выбрать одно из значений  $\text{Arg } z(t)$  при каждом  $t$ , чтобы выбранные значения изменялись непрерывно при изменении  $t$  от 0 до 1, при условии, что  $\text{Arg } z(0)$  выбран равным: а) 0, б)  $2\pi$ , в)  $-4\pi$ , г)  $2\pi k$  ( $k$  — фиксированное целое число).

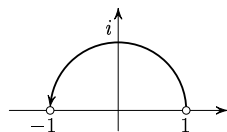


Рис. 17

Следующее утверждение интуитивно кажется достаточно очевидным, и

мы приведем его без доказательства.

**Теорема 6.** Пусть непрерывная кривая  $C$  с параметрическим уравнением  $z(t)$  не проходит через начало координат (т. е.  $z(t) \neq 0$  при  $0 \leq t \leq 1$ ), и пусть аргумент начальной точки кривой  $C$  (т. е.  $\text{Arg } z(0)$ ) выбран равным  $\varphi_0$ . Тогда можно так выбрать одно из значений аргумента для всех точек кривой  $C$ , чтобы при движении точки по кривой ее аргумент изменялся непрерывно, начиная со значения  $\varphi_0$ .

Другими словами, можно при каждом  $t$  выбрать  $\varphi(t)$  —

одно из значений  $\operatorname{Arg} z(t)$  так, чтобы функция  $\varphi(t)$  была непрерывна при  $0 \leq t \leq 1$  и чтобы  $\varphi(0) = \varphi_0^*)$ .

**251.** Пусть  $\varphi(t)$  и  $\varphi'(t)$  — две функции, описывающие непрерывное изменение  $\operatorname{Arg} z(t)$  вдоль кривой  $C$ . Доказать, что  $\varphi(t) - \varphi'(t) = 2\pi k$ , где  $k$  — некоторое фиксированное целое число, не зависящее от  $t$ .

**252.** Доказать, что если выбрано некоторое значение  $\varphi(0) = \varphi_0$ , то функция  $\varphi(t)$ , описывающая непрерывное изменение  $\operatorname{Arg} z(t)$  вдоль кривой  $C$ , определяется однозначно.

**253.** Пусть функция  $\varphi(t)$  описывает непрерывное изменение  $\operatorname{Arg} z(t)$ . Доказать, что функция  $\psi(t) = \varphi(t) - \varphi(0)$  однозначно определяется функцией  $z(t)$  и не зависит от выбора  $\varphi(0)$ .

Из утверждения задачи **253** вытекает, в частности, при  $t = 1$ , что для данной непрерывной кривой  $C$ , не проходящей через точку  $z = 0$ , величина  $\varphi(1) - \varphi(0)$  однозначно определяется условием непрерывного изменения  $\varphi(t)$ .

**О п р е д е л е н и е.** Величину  $\varphi(1) - \varphi(0)$  будем называть *изменением аргумента вдоль кривой  $C$* .

**254.** Чему равно изменение аргумента вдоль кривых со следующими параметрическими уравнениями:

- а)  $z(t) = \cos \pi t + i \sin \pi t$ ,
- б)  $z(t) = \cos 2\pi t + i \sin 2\pi t$ ,
- в)  $z(t) = \cos 4\pi t + i \sin 4\pi t$ ,
- г)  $z(t) = (1 - t) + it$ ?

**255.** Чему равно изменение аргумента вдоль кривых, изображенных на рис. 18?

Если непрерывная кривая  $C$  замкнута, т. е.  $z(1) = z(0)$ , то величина  $\varphi(1) - \varphi(0)$  имеет вид  $2\pi k$ , где  $k$  — целое число.

**О п р е д е л е н и е.** Если для непрерывной замкнутой кривой  $C$ , не проходящей через точку  $z = 0$ , изменение аргумента равно  $2\pi k$ , то будем говорить, что кривая  $C$  обходит  $k$  раз вокруг точки  $z = 0$ .

**256.** Сколько раз обходят вокруг точки  $z = 0$  следующие кривые:

---

\*) В книге: Стинрод Н., Чинн У., Первые понятия топологии, «Мир», 1967, §§ 20–23, строго и доступно определяется угол, закрученный данной кривой. Используя это понятие, легко получить утверждение теоремы 6: достаточно положить  $\varphi(t) = \varphi_0(t) + \varphi_1(t)$ , где  $\varphi_1(t)$  — угол, закрученный частью данной кривой от  $z(0)$  до  $z(t)$ .

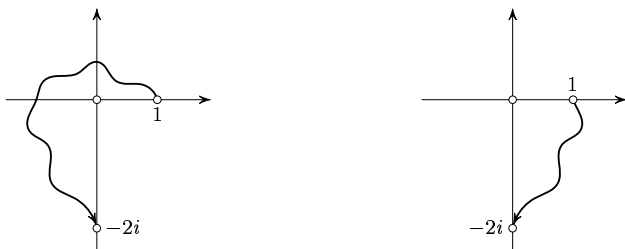


Рис. 18

- а)  $z(t) = 2 \cos 2\pi t + 2i \sin 2\pi t$  (рис. 19),  
 б)  $z(t) = \frac{1}{2} \cos 4\pi t - \frac{1}{2}i \sin 4\pi t$  (рис. 20),  
 в) кривая на рис. 21,  
 г) кривая на рис. 22?

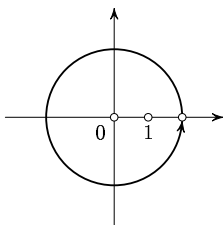


Рис. 19

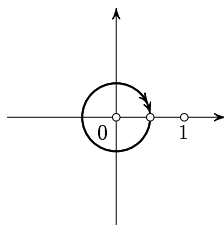


Рис. 20

**257.** Доказать, что число обходов непрерывной замкнутой кривой вокруг точки  $z = 0$  не зависит от выбора начальной точки, а зависит только от направления кривой.

**258.** Пусть кривая  $C$  с уравнением  $z_1(t)$  обходит  $k$  раз вокруг точки  $z = 0$ . Сколько раз обходит вокруг точки  $z = 0$  кривая с уравнением  $z_2(t)$ , если: а)  $z_2(t) = 2 \cdot z_1(t)$ ; б)  $z_2(t) = -z_1(t)$ ; в)  $z_2(t) = z_0 \cdot z_1(t)$ , где  $z_0 \neq 0$ ; г)  $z_2(t) = \bar{z}_1(t)$ , где  $\bar{z}$  — число сопряженное  $z$ ?

**Определение.** Пусть замкнутая непрерывная кривая  $C$  с уравнением  $z_1(t)$  не проходит через точку  $z = z_0$ . Тогда будем говорить, что кривая  $C$  обходит  $k$  раз вокруг точки  $z_0$ , если кривая с уравнением  $z_2(t) = z_1(t) - z_0$  обходит  $k$  раз вокруг точки  $z = 0$  (рис. 23).

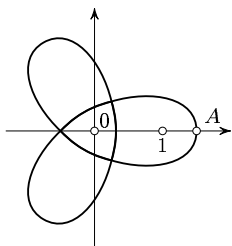


Рис. 21

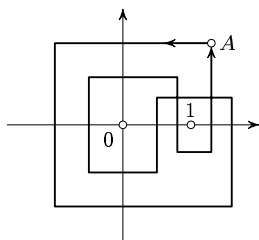


Рис. 22

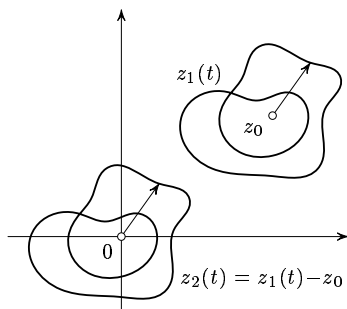


Рис. 23

Таким образом, для определения числа обходов кривой вокруг точки  $z = z_0$  нужно следить за вращением вектора  $z_1(t) - z_0$ , который можно рассматривать как вектор, соединяющий точки  $z_0$  и  $z_1(t)$  (см. 221).

**259.** Сколько раз обходят вокруг точки  $z = 1$  кривые, описанные в задаче 256?

**260.** Пусть  $z_1(t)$  и  $z_2(t)$  — уравнения кривых  $C_1$  и  $C_2$ , не проходящих через точку  $z = 0$ . Пусть изменения аргумента вдоль этих кривых равны соответственно  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ . Чему равно изменение аргумента вдоль кривой  $C$  с уравнением  $z(t)$ , если: а)  $z(t) = z_1(t) \cdot z_2(t)$ , б)  $z(t) = \frac{z_1(t)}{z_2(t)}$ ?

## § 8. Отображение кривых. Основная теорема алгебры комплексных чисел

Пусть даны две плоскости комплексных чисел — плоскость  $z$  и плоскость  $w$ , и пусть задана функция  $w = f(z)$ , ко-

торая каждому значению  $z$  ставит в соответствие однозначно определенное значение  $w$ . Если на плоскости  $z$  имеется непрерывная кривая  $C$  с уравнением  $z(t)$ , то посредством функции  $w = f(z)$  каждая точка этой кривой отображается в некоторую точку плоскости  $w$ . Если при этом функция  $f(z)$  непрерывна, то на плоскости  $w$  мы также получим непрерывную кривую с уравнением  $w_0(t) = f(z(t))$ . Эту кривую мы будем обозначать  $f(C)$ .

**261.** Что представляет собой кривая  $f(C)$ , если  $w = f(z) = z^2$ , и кривая  $C$ :

а) четверть окружности:

$$z(t) = R \left( \cos \frac{\pi t}{2} + i \sin \frac{\pi t}{2} \right),$$

б) полуокружность:  $z(t) = R(\cos \pi t + i \sin \pi t)$ ,

в) окружность:  $z(t) = R(\cos 2\pi t + i \sin 2\pi t)$ ?

**262.** Пусть изменение аргумента вдоль кривой  $C$  равно  $\varphi$ . Чему равно изменение аргумента вдоль кривой  $f(C)$ , если: а)  $f(z) = z^2$ , б)  $f(z) = z^3$ , в)  $f(z) = z^n$ , где  $n$  — произвольное натуральное число?

**263.** Пусть кривая  $C$  обходит  $k$  раз вокруг точки  $z = z_0$ . Сколько раз обходит вокруг точки  $w = 0$  кривая  $f(C)$ , если  $f(z) = (z - z_0)^n$ ?

**264.** Пусть кривая  $C$  обходит вокруг точек  $z = 0$ ,  $z = 1$ ,  $z = i$ ,  $z = -i$  соответственно  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$ ,  $k_4$  раз. Сколько раз обходит вокруг точки  $w = 0$  кривая  $f(C)$ , если: а)  $f(z) = z^2 - z$ , б)  $f(z) = z^2 + 1$ , в)  $f(z) = (z^2 + iz)^4$ , г)  $f(z) = z^3 - z^2 + z - 1$ ?

Рассмотрим уравнение

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n = 0,$$

где все  $a_i$  — произвольные комплексные числа,  $n \geq 1$  и  $a_0 \neq 0$ . Наша ближайшая цель — показать, что это уравнение имеет хотя бы один комплексный корень. Если  $a_n = 0$ , то уравнение имеет корень  $z = 0$ . Поэтому в дальнейшем мы будем предполагать, что  $a_n \neq 0$ .

Обозначим наибольшее из чисел  $|a_0|$ ,  $|a_1|$ ,  $\dots$ ,  $|a_n|$  через  $A$ . Так как  $a_0 \neq 0$ , то  $A > 0$ . Выберем положительные действительные числа  $R_1$  и  $R_2$ , причем  $R_1$  выберем настолько малым, чтобы выполнялись два неравенства:  $R_1 \leq 1$  и  $R_1 < \frac{|a_n|}{10An}$ , а  $R_2$  настолько большим, чтобы

выполнялись два неравенства:  $R_1 \geq 1$  и  $R_2 > \frac{10An}{|a_0|}$ .

**265.** Пусть  $|z| = R_1$ . Доказать, что

$$|a_0 z^n + \dots + a_{n-1} z| < \frac{|a_n|}{10}.$$

**266.** Пусть  $|z| = R_2$ . Доказать, что

$$\left| \frac{a_1}{z} + \dots + \frac{a_n}{z^n} \right| < \frac{|a_0|}{10}.$$

Кривую с уравнением  $z(t) = R(\cos 2\pi t + i \sin 2\pi t)$  (т. е. окружность радиуса  $R$ , проходимую против часовой стрелки) обозначим  $C_R$ . Так как кривая  $C_R$  замкнута ( $z(1) = z(0)$ ), то и кривая  $f(C_R)$ , где  $f(z) = a_0 z^n + \dots + a_n$ , также замкнута ( $f(z(1)) = f(z(0))$ ). Пусть  $\nu(R)$  — число обходов кривой  $f(C_R)$  вокруг точки  $w = 0$  (если  $f(C_R)$  не проходит через точку  $w = 0$ ).

**267.** Чему равны значения  $\nu(R_1)$  и  $\nu(R_2)$ ?

Будем теперь изменять радиус  $R$  непрерывно от  $R_1$  до  $R_2$ . При этом кривая  $f(C_R)$  будет непрерывно деформироваться от положения  $f(C_{R_1})$  до положения  $f(C_{R_2})$ . Если при некотором значении  $R$  кривая  $f(C_R)$  не проходит через точку  $w = 0$ , то при достаточно малых изменениях  $R$  кривая  $f(C_R)$  будет деформироваться так мало, что число ее обходов вокруг точки  $w = 0$  не изменится, т. е. при данном значении  $R$  функция  $\nu(R)$  непрерывна. Если бы кривые  $f(C_R)$  при всех значениях  $R_1 \leq R \leq R_2$  не проходили через точку  $w = 0$ , то  $\nu(R)$  было бы непрерывной функцией при всех  $R_1 \leq R \leq R_2$ . Так как функция  $\nu(R)$  принимает только целочисленные значения, то она может быть непрерывна, только если  $\nu(R)$  при всех  $R$  из отрезка  $R_1 \leq R \leq R_2$  принимает одно и то же значение; в частности, должно быть  $\nu(R_1) = \nu(R_2)$ . Но из решения задачи **267** следует, что  $\nu(R_1) = 0$ , а  $\nu(R_2) = n$ . Следовательно, предположение о том, что кривые  $f(C_R)$  при всех  $R_1 \leq R \leq R_2$  не проходят через точку  $w = 0$ , неверно. Значит, при некотором  $z$  должно быть  $f(z) = 0$ . Тем самым мы получаем теорему\*).

---

\*) Наше рассуждение содержит некоторые нестрогости и должно рассматриваться, вообще говоря, как идея доказательства. Однако это рассуждение можно (хотя и не просто) сделать абсолютно строгим

Теорема 7 (основная теорема алгебры комплексных чисел<sup>\*\*)</sup> ). *Всякое уравнение*

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n = 0,$$

где все  $a_i$  — произвольные комплексные числа,  $n \geq 1$  и  $a_0 \neq 0$ , имеет по крайней мере один комплексный корень.

**268.** Доказать теорему Безу<sup>\*\*\*)</sup>: если  $z_0$  — корень уравнения  $a_0 z^n + \dots + a_{n-1} z + a_n = 0$ , то многочлен  $a_0 z^n + \dots + a_{n-1} z + a_n$  делится на двучлен  $z - z_0$  без остатка.

**269.** Доказать, что многочлен  $a_0 z^n + \dots + a_{n-1} z + a_n$  где  $a_0 \neq 0$ , представим в виде

$$a_0 z^n + \dots + a_{n-1} z + a_n = a_0 (z - z_1)(z - z_2) \cdot \dots \cdot (z - z_n).$$

**З а м е ч а н и е.** Пусть многочлен  $P(z)$  разложен на множители:

$$P(z) = a_0 (z - z_1)(z - z_2) \cdot \dots \cdot (z - z_n).$$

Правая часть равна 0 тогда и только тогда, когда хотя бы одна из скобок равна 0 (см. **195, 197**). Поэтому корнями уравнения  $P(z) = 0$  являются числа  $z_1, z_2, \dots, z_n$  и только они.

**270.** Пусть  $z_0$  — корень уравнения

$$a_0 z^n + \dots + a_{n-1} z + a_n = 0,$$

где все  $a_i$  — действительные числа. Доказать, что число  $\bar{z}_0$ , сопряженное  $z_0$ , — также корень этого уравнения.

**271.** Пусть уравнение с действительными коэффициентами

$$a_0 z^n + \dots + a_{n-1} z + a_n = 0$$

имеет комплексный корень  $z_0$ , не являющийся действительным числом. Доказать, что многочлен

$$a_0 z^n + \dots + a_{n-1} z + a_n$$

делится на некоторый многочлен второй степени с действительными коэффициентами.

---

(см., например, С т и н р о д Н., Ч и н н У., Первые понятия топологии, «Мир», 1967). См. также Б о р и с о в и ч Ю. Г. и др., Введение в топологию, М., Физматлит, 1995.

<sup>\*\*)</sup>  Эта теорема доказана в 1799 году немецким математиком К. Гауссом (1777–1855).

<sup>\*\*\*)</sup>  Безу (1730–1783) — французский математик.



**272.** Доказать, что всякий многочлен с действительными коэффициентами можно представить в виде произведения многочленов первой и второй степени с действительными коэффициентами.

**З а м е ч а н и е.** Из результата задачи **272** вытекает, что неприводимыми многочленами (см. стр. **63**) над полем действительных чисел являются только многочлены первой степени и многочлены второй степени без действительных корней. Мы воспользовались этим в § 3 этой главы. Над полем комплексных чисел неприводимыми многочленами, как следует из результата задачи **269**, являются только многочлены первой степени.

Вернемся снова к многочленам с произвольными комплексными коэффициентами.

**О п р е д е л е н и е.** Пусть  $z_0$  — корень уравнения

$$a_0 z^n + \dots + a_{n-1} z + a_n = 0.$$

Говорят, что  $z_0$  — *корень кратности  $k$* , если многочлен  $a_0 z^n + \dots + a_{n-1} z + a_n$  делится на  $(z - z_0)^k$  и не делится на  $(z - z_0)^{k+1}$ .

**273.** Какова кратность корней  $z = 1$  и  $z = -1$  в уравнении

$$z^5 - z^4 - 2z^3 + 2z^2 + z - 1 = 0?$$

**О п р е д е л е н и е.** *Производной многочлена*

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_k z^{n-k} + \dots + a_{n-1} z + a_n$$

называется многочлен

$$P'(z) = a_0 n z^{n-1} + a_1 (n-1) z^{n-2} + \dots \\ \dots + a_k (n-k) z^{n-k-1} + \dots + a_{n-1}.$$

Производная обычно обозначается штрихом.

**274.** Пусть  $P(z)$  и  $Q(z)$  — два многочлена. Доказать равенства: а)  $(P(z) + Q(z))' = P'(z) + Q'(z)$ ; б)  $(c \cdot P(z))' = c \cdot P'(z)$ , где  $c$  — произвольное постоянное комплексное число; в)  $(P(z) \cdot Q(z))' = P'(z) \cdot Q(z) + P(z) \cdot Q'(z)$ .

**275.** Пусть  $P(z) = (z - z_0)^n$  ( $n \geq 1$  — целое). Доказать, что  $P'(z) = n(z - z_0)^{n-1}$ .

**276.** Доказать, что если уравнение  $P(z) = 0$  имеет корень  $z_0$  кратности  $k > 1$ , то уравнение  $P'(z) = 0$  имеет корень  $z_0$  кратности  $k - 1$ , если же уравнение  $P(z) = 0$  имеет корень  $z_0$  кратности 1, то  $P'(z_0) \neq 0$ .

## § 9. Риманова поверхность функции $w = \sqrt{z}$

Выше мы рассматривали однозначные функции, при которых каждому значению аргумента соответствует единственное значение функции. Однако в дальнейшем нас будут особенно интересовать многозначные функции, при которых некоторым значениям аргумента соответствует несколько значений функции\*). Наш интерес к таким функциям легко объяснить. Действительно, конечной целью нашего изложения является доказательство теоремы Абеля о том, что функция, выражающая корни общего уравнения 5-й степени через коэффициенты, не выражается в радикалах. Но эта функция является многозначной, так как уравнение 5-й степени при фиксированных коэффициентах имеет, вообще говоря, 5 корней. Также многозначными являются и функции, выражающиеся в радикалах.

Общая идея доказательства теоремы Абеля состоит в следующем. Многозначной функции комплексного аргумента мы сопоставим некоторую группу — так называемую *группу Галуа*\*\*) . При этом окажется, что группа Галуа для функции, выражающей корни некоторого уравнения 5-й степени через параметр  $z$ , не может совпадать ни с какой группой Галуа для функций, выражающихся в радикалах, и, следовательно сама эта функция не может выражаться в радикалах.

Для того чтобы ввести понятие группы Галуа, мы введем сначала другое очень важное в теории функций комплексного переменного понятие — понятие *римановой*\*) *поверхности* многозначной функции. При этом мы начнем с построения римановой поверхности для одного из простейших примеров многозначной функции, а именно функции  $w = \sqrt{z}$ .

Как мы знаем, функция  $w = \sqrt{z}$  принимает одно значе-

---

\*) В тех случаях, когда это не вызывает недоразумений, мы слово «многозначные» будем часто опускать.

\*\*) Эварист Галуа (1811–1832) — французский математик, установивший общие условия разрешимости уравнений в радикалах, заложивший основы теории групп. Советуем прочесть: Инфельд Л., Эварист Галуа (Избранник богов), М., «Молодая гвардия», 1958. См. также Галуа Э., Сочинения, М., ГИТТЛ, 1936.

\*) Названы по имени Б. Римана (1826–1866) — немецкого математика.

ние  $w = 0$  при  $z = 0$  и два значения при всех  $z \neq 0$  (см. 229). При этом, если  $w_0$  — одно из значений  $\sqrt{z_0}$ , то другое значение  $\sqrt{z_0}$  равно  $-w_0$ .

**277.** Найти все значения:

а)  $\sqrt{1}$ , б)  $\sqrt{-1}$ , в)  $\sqrt{i}$ , г)  $\sqrt{1 + i\sqrt{3}}$  (здесь  $\sqrt{3}$  — положительное значение корня).

Проведем на плоскости  $z$  разрез по отрицательной части действительной оси от 0 до  $-\infty$  и для всех  $z$ , не лежащих на разрезе, выберем то значение  $w = \sqrt{z}$ , которое лежит в правой полуплоскости плоскости  $w$ . При этом мы получим некоторую функцию, однозначную и непрерывную на всей плоскости  $z$ , исключая разрез, которую мы обозначим  ${}_1\sqrt{z}$ . Эта функция задает однозначное и непрерывное отображение плоскости  $z$ , исключая разрез, на правую полуплоскость плоскости  $w$  (рис. 24).

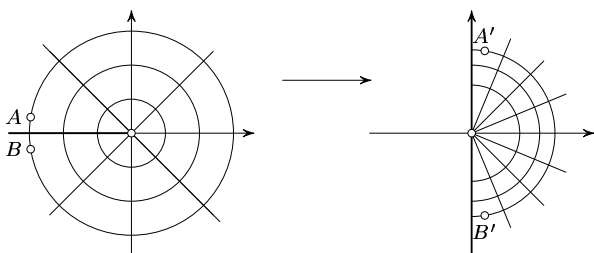


Рис. 24

**Замечание.** Если мы выберем  $\text{Arg } z$  так, что  $-\pi < \text{Arg } z < \pi$  то для функции  ${}_1\sqrt{z}$  получим  $\text{Arg } {}_1\sqrt{z} = \frac{1}{2} \text{Arg } z$  (см. 229). Поэтому при отображении  $w = {}_1\sqrt{z}$  плоскость  $z$  стягивается наподобие веера к положительной части действительной оси с уменьшением угла «веера» вдвое и некоторым изменением длин вдоль лучей «веера».

Если мы теперь для всех  $z$ , не лежащих на разрезе, выберем то значение  $w = \sqrt{z}$ , которое лежит в левой полуплоскости плоскости  $w$ , то получим другую функцию, также однозначную и непрерывную на всей плоскости  $z$ , исключая разрез. Эта функция, которую мы обозначим  ${}_2\sqrt{z}$ , задает однозначное и непрерывное отображение плоскости  $z$ , исключая разрез, на левую полуплоскость плоскости  $w$  (рис. 25). Здесь  ${}_2\sqrt{z} = -{}_1\sqrt{z}$ .

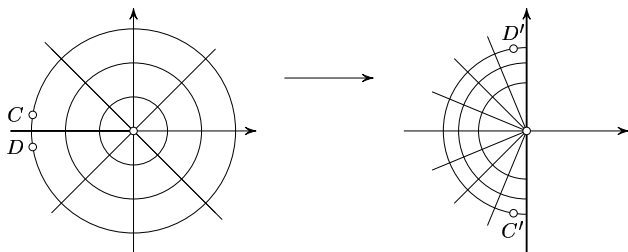


Рис. 25

Построенные нами функции  ${}_1\sqrt{z}$  и  ${}_2\sqrt{z}$  называются *однозначными непрерывными ветвями* функции  $w = \sqrt{z}$  (при данном разрезе).

Возьмем теперь два экземпляра плоскости  $z$ , которые мы будем называть *листами*, и на каждом проведем разрез по отрицательной части действительной оси от 0 до  $-\infty$  (рис. 26). Зададим на первом листе функцию  ${}_1\sqrt{z}$ , а

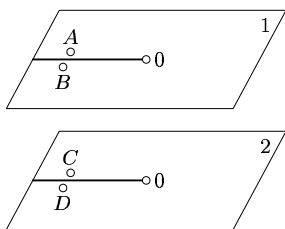


Рис. 26

на втором листе функцию  ${}_2\sqrt{z}$ . Тогда функции  ${}_1\sqrt{z}$  и  ${}_2\sqrt{z}$  мы можем рассматривать вместе как некоторую единую однозначную функцию, но заданную не на плоскости  $z$ , а на более сложной поверхности, состоящей из двух отдельных листов.

При этом, если точка  $z$  движется непрерывно по первому листу (или по второму листу), не пересекая разреза, то построенная нами однозначная функция изменяется непрерывно. Если же точка  $z$ , двигаясь, например, по первому листу, переходит через разрез, то непрерывность нарушается. Это видно, например, из того, что близкие точки  $A$  и  $B$  плоскости  $z$  переходят при отображении  $w = {}_1\sqrt{z}$  в далекие друг от друга точки  $A'$  и  $B'$  (см. рис. 24).

С другой стороны, из рис. 24 и 25 легко заметить, что образ точки  $A$  при отображении  $w = {}_1\sqrt{z}$  (точка  $A'$ ) оказывается близко с образом точки  $D$  при отображении  $w = {}_2\sqrt{z}$  (точка  $D'$ ).

Таким образом, если при пересечении разреза точка  $z$

будет переходить с верхнего берега разреза на одном листе на нижний берег разреза на другом листе, то построенная нами однозначная функция будет изменяться непрерывно. Для того чтобы обеспечить нужное нам движение точки  $z$ , будем считать верхний берег разреза первого листа склеенным с нижним берегом разреза второго листа, а верхний берег разреза второго листа склеенным с нижним берегом разреза первого листа (рис. 9). При этом во время склейки мы будем между склеиваемыми берегами добавлять луч из точки 0 в  $-\infty$ . Во время первой склейки для точек  $z$ , лежащих на этом луче, мы будем выбирать значения  $w = \sqrt{z}$ , лежащие на положительной части мнимой оси, а при второй склейке значения  $w = \sqrt{z}$ , лежащие на отрицательной части мнимой оси.

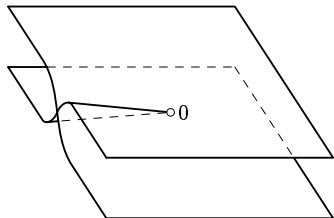


Рис. 27

После проведения указанных склеек мы получим, что двузначная функция  $w = \sqrt{z}$  заменилась некоторой другой функцией, которая однозначна и непрерывна, но только не на плоскости  $z$ , а на некоторой новой более сложной поверхности. Эта поверхность и называется *римановой поверхностью функции*  $w = \sqrt{z}$ .

Попытки произвести указанные склейки без пересечений (не переворачивая плоскости) заканчиваются неудачей. Несмотря на это, мы будем считать, что рис. 9 является изображением римановой поверхности функции  $w = \sqrt{z}$ , принимая дополнительное соглашение, что пересечение по отрицательной части действительной оси является кажущимся. Для сравнения рассмотрим следующий пример. На рис. 7 (стр. 38) изображен остов куба. Хотя некоторые отрезки на рисунке пересекаются, но мы легко соглашаемся с тем, что это пересечение кажущееся, и это позволяет нам избегать ошибок.

Риманову поверхность произвольной многозначной функции  $w(z)$  можно строить подобно тому, как мы построили риманову поверхность функции  $w = \sqrt{z}$ . Для этого надо сначала выделить однозначные непрерывные ветви функции  $w(z)$ , при этом некоторые точки  $z$  (разрезы) ис-

ключаются из рассмотрения. После этого полученные ветви надо склеить, восстанавливая разрезы, так чтобы получилась однозначная и непрерывная функция на построенной поверхности. Полученная поверхность и будет называться римановой поверхностью многозначной функции  $w(z)$  \*).

Таким образом, остается выяснить, как же выделять непрерывные однозначные ветви произвольной многозначной функции  $w(z)$  и как затем их склеивать. Для выяснения этих вопросов рассмотрим еще раз более подробно функцию  $w = \sqrt{z}$ .

Пусть  $w(z)$  — многозначная функция, и пусть зафиксировано одно из значений  $w_0$  функции  $w(z)$  в некоторой точке  $z_0$ . Пусть  $w'(z)$  — непрерывная однозначная ветвь функции  $w(z)$ , выделенная в некоторой области плоскости  $z$  (например, на всей плоскости, исключая какие-то разрезы), и такая, что  $w'(z_0) = w_0$ . Пусть, кроме того,  $C$  — непрерывная кривая, идущая из точки  $z_0$  в некоторую точку  $z_1$  и лежащая целиком в рассматриваемой нами области плоскости  $z$ . Тогда при движении точки  $z$  вдоль кривой  $C$  функция  $w'(z)$  будет изменяться непрерывно от  $w'(z_0)$  до  $w'(z_1)$ .

Этим свойством можно воспользоваться и в обратную сторону, а именно для определения функции  $w'(z)$ .

Действительно, пусть в некоторой точке  $z_0$  зафиксировано одно из значений  $w_0$  функции  $w(z)$ , и пусть  $C$  — непрерывная кривая, идущая из точки  $z_0$  в некоторую точку  $z_1$ . Будем двигаться по кривой  $C$ , выбирая для каждой точки  $z$ , лежащей на  $C$ , одно из значений функции  $w(z)$  так, чтобы выбираемые значения изменялись непрерывно при движении  $z$  по кривой  $C$ , начиная со значения  $w_0$ . При этом, когда мы достигнем точки  $z_1$ , мы будем иметь вполне определенное значение  $w_1 = w(z_1)$ . Мы будем говорить, что  $w_1$  — значение  $w(z_1)$ , *определенное по непрерывности вдоль кривой  $C$*  при условии  $w(z_0) = w_0$ . Если значения функции  $w(z)$ , выбираемые для всех точек кривой  $C$ , изобразить на плоскости  $w$ , то должна получиться непрерывная кривая, которая начинается в

---

\*) Такие построения можно провести не для каждой многозначной функции, однако для тех функций, которые будут рассматриваться в дальнейшем, такие построения провести действительно можно. См. Маркушевич А. И., Краткий курс теории аналитических функций, М., Наука, 1978.

точке  $w_0$  и оканчивается в точке  $w_1$ . Эта кривая является одним из непрерывных образов кривой  $C$  при отображении  $w = w(z)$ .

**278.** Пусть для функции  $w(z) = \sqrt{z}$  выбрано  $w(1) = \sqrt{1} = 1$ . Определить  $w(-1) = \sqrt{-1}$  по непрерывности вдоль: а) верхней полуокружности радиуса 1 с центром в начале координат, б) нижней полуокружности (рис. 28).

В действительности при определении функции по непрерывности вдоль некоторой кривой мы можем столкнуться с некоторыми неприятностями. Рассмотрим соответствующий пример.

**279.** Найти все непрерывные образы  $w_0(t)$  кривой  $C$  с параметрическим уравнением  $z(t) = 2t - 1$  (рис. 29) при отображении  $w = \sqrt{z}$ , начинающиеся: а) в точке  $i$ , б) в точке  $-i$ .

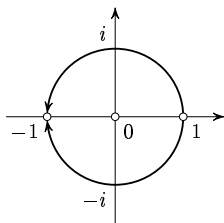


Рис. 28

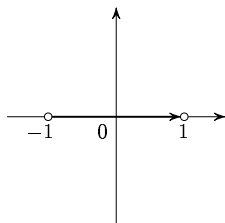


Рис. 29

Из решения задачи **279** мы получаем, что даже при фиксировании образа начальной точки кривой  $C$  непрерывный образ кривой  $C$  при отображении  $w = \sqrt{z}$  может определяться неоднозначно. Причем однозначность нарушается там, где кривая  $C$  проходит через точку  $z = 0$ . Оказывается, что только в этом случае и может нарушаться однозначность образа для функции  $w = \sqrt{z}$ , так как только в этом случае оба образа точки  $z(t)$  подходят близко друг к другу, сливаясь в одну точку.

Для того чтобы избежать неоднозначности непрерывных образов кривых при отображении  $w = \sqrt{z}$ , можно выколоть точку  $z = 0$  и запретить кривым проходить через эту точку. Но и это ограничение не дает нам пока возможности выделять однозначные непрерывные ветви функции  $w = \sqrt{z}$ .

Действительно, если мы зафиксируем в некоторой точке  $z_0$  одно из значений  $w_0 = w(z_0)$  и будем определять  $w(z_1)$

в некоторой точке  $z_1$  по непрерывности вдоль различных кривых, идущих из  $z_0$  в  $z_1$ , то мы можем получать разные значения  $w(z_1)$  (см., например, 278). Посмотрим, как можно избежать такой неоднозначности.

**280.** Пусть изменение аргумента  $z(t)$  вдоль кривой  $C$  равно  $\varphi$ . Найти изменение аргумента  $w_0(t)$  вдоль любого непрерывного образа кривой при отображении  $w(z) = \sqrt{z}$ .

**281.** Пусть  $w(z) = \sqrt{z}$  и пусть выбрано  $w(1) = \sqrt{1} = -1$ . Определить значение  $w(i) = \sqrt{i}$  по непрерывности вдоль: а) отрезка, соединяющего точки  $z = 1$  и  $z = i$ ; б) кривой с параметрическим уравнением  $z(t) = \cos \frac{3}{2}\pi t - i \sin \frac{3}{2}\pi t$ ; в) кривой с параметрическим уравнением  $z(t) = \cos \frac{5\pi}{2}t + i \sin \frac{5\pi}{2}t$ .

**282.** Пусть  $w(z) = \sqrt{z}$  и пусть в начальной точке кривой  $C$  выбрано  $w(1) = \sqrt{1} = 1$ . Определить по непрерывности вдоль кривой  $C$  значение  $w(1) = \sqrt{1}$  в конечной точке, если кривая  $C$  имеет уравнение: а)  $z(t) = \cos 2\pi t + i \sin 2\pi t$ , б)  $z(t) = \cos 4\pi t - i \sin 4\pi t$ , в)  $z(t) = 2 - \cos 2\pi t - i \sin 2\pi t$ .

**283.** Пусть  $C$  — замкнутая кривая на плоскости  $z$  (т. е.  $z(1) = z(0)$ ). Доказать, что значение функции  $\sqrt{z}$  в конечной точке кривой  $C$ , определенное по непрерывности, будет совпадать со значением в начальной точке тогда и только тогда, когда кривая  $C$  обходит вокруг точки  $z = 0$  четное число раз.

Для дальнейшего удобно ввести следующую символику.

**Определение.** Пусть  $C$  — непрерывная кривая с параметрическим уравнением  $z(t)$ . Через  $C^{-1}$  будет обозначаться кривая, геометрически совпадающая с  $C$ , но проходимая в противоположном направлении; ее уравнение (см. 247)  $z_1(t) = z(1 - t)$ .

**Определение.** Пусть начальная точка кривой  $C_2$  совпадает с конечной точкой кривой  $C_1$ . Тогда под  $C_1C_2$  будет пониматься кривая, которая получится, если сначала пройти  $C_1$  и затем  $C_2$  (см. 248).

**284.** Пусть  $C_1$  и  $C_2$  — две кривые, соединяющие точку  $z_0$  с точкой  $z_1$ , и пусть выбрано одно из значений  $\sqrt{z_0} = w_0$ . Доказать, что значения  $\sqrt{z_1}$ , определенные по непрерывности вдоль кривых  $C_1$  и  $C_2$ , будут одинаковыми тогда и



только тогда, когда кривая  $C_1^{-1}C_2$  (рис. 30) обходит вокруг точки  $z = 0$  четное число раз.

Из утверждения последней задачи следует, в частности, что если кривая  $C_1^{-1}C_2$  обходит 0 раз вокруг точки  $z = 0$ , то значения функции  $\sqrt{z}$  в конечных точках кривых  $C_1$  и  $C_2$ , определенные по непрерывности, будут одинаковы, если одинаковы значения в начальных точках.

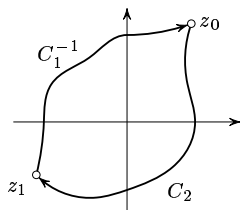


Рис. 30

Таким образом, для того чтобы выделялись однозначные непрерывные ветви функции  $w = \sqrt{z}$ , достаточно сделать так, чтобы кривая  $C_1^{-1}C_2$  не могла обойти ни разу вокруг точки  $z = 0$ . Для этого достаточно провести какой-нибудь разрез из точки  $z = 0$  в бесконечность и запретить кривым пересекать этот разрез. Именно так мы и поступили выше, проведя разрез из точки  $z = 0$  в  $-\infty$  по отрицательной части действительной оси.

Если после проведения разреза зафиксировать в некоторой точке  $z_0$  одно из значений  $w'_0 = \sqrt{z_0}$ , а значение в любой другой точке  $z_1$  определить по непрерывности вдоль какой-нибудь кривой  $C$ , идущей из  $z_0$  в  $z_1$  и не проходящей через разрез, то на всей плоскости, исключая разрез, определится некоторая однозначная непрерывная ветвь  ${}_1\sqrt{z}$  функции  $w = \sqrt{z}$ . Если в точке  $z_0$  зафиксировать другое значение  $w''_0 = \sqrt{z_0}$ , то этим определится другая ветвь  ${}_2\sqrt{z}$  функции  $w = \sqrt{z}$ .

**285.** Доказать, что для любой точки  $z$ , не лежащей на разрезе,  ${}_1\sqrt{z} \neq {}_2\sqrt{z}$ .

**286.** Зафиксируем в некоторой точке  $z'$  значение  $w' = {}_1\sqrt{z}$  и определим значения функции  $w = \sqrt{z}$  в остальных точках плоскости  $z$  (исключая разрез) по непрерывности вдоль кривых, идущих из точки  $z'$  и не проходящих через разрез. Доказать, что получающаяся однозначная непрерывная ветвь, совпадает с функцией  ${}_1\sqrt{z}$  (определенной из точки  $z_0$ ).

Из результата задачи **286** вытекает, что, выбирая в качестве начальной точки при выделении однозначных непрерывных ветвей различные точки плоскости  $z$ , мы будем получать один и тот же набор однозначных непрерывных

ветвей, который зависит, таким образом, только от того, как проведены разрезы.

**287.** Пусть точки  $z_0$  и  $z_1$  не лежат на разрезе и пусть кривая  $C$ , соединяющая точку  $z_0$  с  $z_1$ , один раз пересекает разрез (рис. 31). Пусть выбрано значение  $w_0 = \sqrt{z_0}$  и по непрерывности вдоль кривой  $C$  определено значение  $w_1 = \sqrt{z_1}$ . Доказать, что значения  $w_0$  и  $w_1$  соответствуют разным ветвям функции  $w = \sqrt{z}$ .

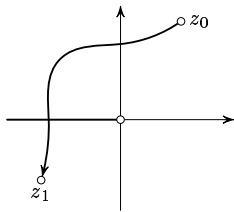


Рис. 31

Таким образом, пересекая разрез, мы с одной ветви функции  $w = \sqrt{z}$  переходим на другую ветвь, т. е. ветви соединяются между собой именно так, как мы соединили их раньше (см. рис. 9). При этом образуется риманова поверхность функции  $w = \sqrt{z}$ .

Будем говорить, что некоторое свойство выполняется при обходе вокруг точки  $z_0$ , если оно выполняется при однократном обходе против часовой стрелки по всем окружностям с центром в точке  $z_0$ , имеющим достаточно малый радиус\*).

**288.** Доказать, что при обходе вокруг точки  $z_0$  мы остаемся на том же листе римановой поверхности функции  $w = \sqrt{z}$ , если  $z_0 \neq 0$ , и переходим на другой лист, если  $z_0 = 0$ .

Следующее понятие очень важно для дальнейшего.

**Определение.** Точки, при обходе которых может происходить переход с одних листов на другие (т. е. изменяться значение функции), называются *точками разветвления\** данной многозначной функции.

Риманову поверхность функции  $w = \sqrt{z}$  можно изобразить в виде схемы (рис. 32). Эта схема показывает, что риманова поверхность функции  $w = \sqrt{z}$  имеет 2 листа, что точка  $z = 0$  является точкой разветвления функции  $w = \sqrt{z}$  и что при об-

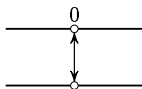


Рис. 32

\*) Более строго это означает следующее: найдется такое действительное число  $\delta > 0$ , что указанное свойство выполняется при обходе по всем окружностям с центром  $z_0$ , радиус которых меньше  $\delta$ .

\*) В математической литературе встречаются два названия этого понятия — точка разветвления и точка ветвления.

ходе вокруг точки  $z = 0$  мы с любого листа переходим на противоположный лист. При этом стрелки в точке  $z = 0$  показывают переходы с листа на лист не только при обходе точки  $z = 0$ , но и при пересечении в любом месте разреза, идущего из точки  $z = 0$  в бесконечность. Ниже мы увидим, что такая связь между точками разветвления и разрезами, проведенными из них, не случайна.

В дальнейшем мы в основном будем изображать не саму риманову поверхность некоторой многозначной функции, а ее схему.

## § 10. Римановы поверхности более сложных функций

Рассмотрим многозначную функцию  $w = \sqrt[3]{z}$ .

**289.** Пусть изменение аргумента вдоль кривой  $z(t)$  равно  $\varphi$ , и пусть  $w_0(t)$  — непрерывный образ кривой  $z(t)$  при отображении  $w = \sqrt[3]{z}$ . Найти изменение аргумента вдоль кривой  $w_0(t)$ .

**290.** Найти точки разветвления функции  $w = \sqrt[3]{z}$ .

**291.** Пусть разрез проведен из точки  $z = 0$  в  $-\infty$  по отрицательной части действительной оси, и пусть непрерывные однозначные ветви функции  $w = \sqrt[3]{z}$  заданы условиями:  $f_1(1) = 1$ ,

$$f_2(1) = \cos(2\pi/3) + i \sin(2\pi/3) = -1/2 + i\sqrt{3}/2,$$

$$f_3(1) = \cos(4\pi/3) + i \sin(4\pi/3) = -1/2 - i\sqrt{3}/2.$$

Найти: а)  $f_1(i)$ , б)  $f_2(i)$ , в)  $f_1(8)$ , г)  $f_3(8)$ , д)  $f_3(-i)$ .

**292.** Построить риманову поверхность и ее схему для функции  $w = \sqrt[3]{z}$ .

**293.** Пусть  $C$  — непрерывная кривая с параметрическим уравнением  $z(t)$ , и пусть  $w_0$  — одно из значений  $\sqrt[n]{z(0)}$ . Доказать, что имеется хотя бы один непрерывный образ кривой  $C$  при отображении  $w(z) = \sqrt[n]{z}$ , начинающийся в точке  $w_0$ .

**294.** Пусть изменение аргумента вдоль кривой  $z(t)$  равно  $\varphi$ , и пусть  $w_0(t)$  — непрерывный образ кривой  $z(t)$  при отображении  $w(z) = \sqrt[n]{z}$ . Найти изменение аргумента вдоль кривой  $w_0(t)$ .

**295.** Найти точки разветвления функции  $\sqrt[n]{z}$ .

Ранее (см. стр. 68) мы ввели обозначение:

$$\varepsilon_n = \cos(2\pi/n) + i \sin(2\pi/n).$$

Там же рассмотрены некоторые свойства этого комплексного числа.

**296.** Пусть кривая  $z(t)$  не проходит через точку  $z = 0$ , и пусть  $w_0(t)$  — один из непрерывных образов кривой  $z(t)$  при отображении  $w = \sqrt[n]{z}$ . Найти все непрерывные образы кривой  $z(t)$  при отображении  $w = \sqrt[n]{z}$ .

Пусть две непрерывные кривые  $C_1$  и  $C_2$  идут из некоторой точки  $z_0$  в некоторую точку  $z_1$ . Так же, как для функции  $w = \sqrt{z}$  (см. 284), доказывается, что если кривая  $C_1^{-1}C_2$  ни разу не обходит вокруг точки  $z = 0$ , то функция  $w = \sqrt[n]{z}$  определяется по непрерывности одинаково вдоль кривых  $C_1$  и  $C_2$ . Поэтому, так же как для функции  $w = \sqrt{z}$ , если мы проведем какой-нибудь разрез из точки  $z = 0$  в бесконечность, то функция  $w = \sqrt[n]{z}$  распадается на непрерывные однозначные ветви.

**297.** Проведем какой-либо разрез из точки  $z = 0$  в  $\infty$ , не проходящий через точку  $z = 1$ , и определим непрерывные однозначные ветви функции  $\sqrt[n]{z}$  условиями:  $f_i(1) = \varepsilon_n^i$ , где  $i$  пробегает значения от 0 до  $n - 1$ . Как выражаются ветви  $f_i(z)$  через  $f_0(z)$ ?

**298.** Построить схему римановой поверхности функции  $\sqrt[n]{z}$ .

**299.** Для функции  $\sqrt{z-1}$  найти точки разветвления и построить схему римановой поверхности.

**300.** Найти точки разветвления и построить схему римановой поверхности для функции  $\sqrt[n]{z+i}$ .

В тех случаях, когда многозначная функция будет иметь несколько точек разветвления, мы будем для выделения непрерывных однозначных ветвей проводить разрезы из каждой точки разветвления в бесконечность по каким-либо непересекающимся линиям.

При этом схема римановой поверхности данной функции может существенно зависеть от того, по каким именно линиям проведены разрезы из точек разветвления в бесконечность (соответствующий пример будет рассмотрен ниже в задачах 327 и 328). В тех случаях, когда такая ситуация имеет место, мы будем указывать, как проводятся разрезы.

Если же это не существенно, то указывать их не будем.

Схемы римановых поверхностей, построенные читателем при решении предлагаемых ниже задач, могут отличаться от схем, приведенных в решениях, за счет различной нумерации листов. При соответствующей перенумерации листов эти схемы должны совпадать.

**301.** Пусть  $f(z)$  — однозначная непрерывная функция и  $C$  — непрерывная кривая на плоскости  $z$ , начинающаяся в точке  $z_0$ . Пусть  $w_0$  — одно из значений  $\sqrt[n]{f(z_0)}$ . Доказать, что существует хотя бы один непрерывный образ кривой  $C$  при отображении  $w = \sqrt[n]{f(z)}$  начинающийся в точке  $w_0$ .

Из результата задачи **301** вытекает возможность определения функции  $w = \sqrt[n]{f(z)}$  по непрерывности вдоль любой кривой, не проходящей через точки, в которых нарушается однозначность непрерывных образов.

**302.** Пусть  $f(z)$  — однозначная непрерывная функция и  $w_0(z)$  — одна из непрерывных однозначных ветвей (при соответствующих разрезах) функции  $w(z) = \sqrt[n]{f(z)}$ . Найти все однозначные непрерывные ветви (при тех же разрезах) функции  $w(z)$ .

**303.** Найти все точки разветвления и построить схемы римановых поверхностей для функций: а)  $\sqrt{z(z-i)}$ , б)  $\sqrt{z^2+1}$ .

**304.** Построить схемы римановых поверхностей следующих функций:

а)  $\sqrt[3]{z^2-1}$ , б)  $\sqrt[3]{(z-1)^2z}$ , в)  $\sqrt[3]{(z^2+1)^2}$ .

**305.** Выделить непрерывные однозначные ветви и построить схему римановой поверхности для функции  $\sqrt{z^2}$ .

**З а м е ч а н и е.** Из решения задачи **305** мы получаем, что точка  $z = 0$  не является точкой разветвления функции  $\sqrt{z^2}$ . В то же время образы кривых, проходящих через точку  $z = 0$ , определяются не однозначно. Например, непрерывными образами ломаной (рис. **33**) при отображении  $w = \sqrt{z^2}$  являются ломаные  $COD$ ,  $COF$ ,  $EOD$  и  $EOF$  (рис. **33**). Проходя через точку  $z = 0$ , мы можем остаться на том же листе (ломаные  $COD$  и  $EOF$ ) или перейти на другой лист (ломаные  $COF$  и  $EOD$ ). Риманова поверхность функции  $w(z) = \sqrt{z^2}$  имеет вид, показанный на рис. **34**. Предельные точки, в которых нарушается однозначность непрерывных образов кривых, но которые не

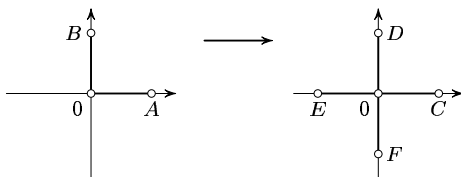


Рис. 33

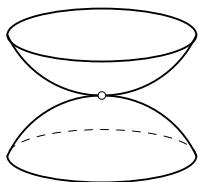


Рис. 34

являются точками разветвления, мы будем называть *точками неоднозначности* данной функции.

При построении схем римановых поверхностей из точек неоднозначности можно не проводить разрезы в бесконечность, достаточно эти точки выколоть, т. е. не проводить через них кривые.

**306.** Построить схемы римановых поверхностей следующих функций: а)  $\sqrt[4]{z^2 + 2}$ , б)  $\sqrt[4]{z^2}$ , в)  $\sqrt[4]{(z-1)^2(z+1)^3}$ , г)  $\sqrt[4]{(z^2-1)^3(z+1)^3}$ , д)  $\sqrt[4]{z(z^3-1)}$ .

Ниже мы будем рассматривать и такие функции, которые не определены в некоторых точках. При этом такие точки могут оказаться точками разветвления.

**307.** Построить схему римановой поверхности функции  $\sqrt{1/z}$ .

**308.** Построить схемы римановых поверхностей следующих функций: а)  $\sqrt{\frac{1}{z-i}}$ , б)  $\sqrt[3]{\frac{z-1}{z+1}}$ , в)  $\sqrt[4]{\frac{(z+i)^2}{z(z-1)^3}}$ .

При решении задач этого параграфа мы везде получали, что после проведения непересекающихся разрезов из всех точек разветвления в бесконечность рассматриваемая функция распадается на однозначные непрерывные ветви, которые затем определенным образом соединяются по разрезам. Оказывается, что этим свойством обладает довольно широкий класс многозначных функций. В частности, таким свойством обладают все рассматриваемые ниже функции, а именно функции, выражающиеся в радикалах (§ 11), и алгебраические функции (§ 14) (и те, и другие функции являются частными случаями более широкого класса так называемых аналитических функций, также обладающих

указанным свойством).

Доказательство этого утверждения выходит за рамки данной книги. Поэтому мы могли бы просто сослаться на существующую по этому вопросу литературу\*) и принять сформулированное выше утверждение без доказательства. (Читатель может так и поступить, перейдя сразу к чтению § 11).

Однако при этом у читателя может остаться некоторое чувство неудовлетворенности. И хотя мы не сможем полностью избавить читателя от этого чувства, мы все же покажем, что сформулированное выше свойство вытекает из другого свойства — так называемого *свойства монодромии*, которое выглядит более очевидным.

Мы знаем, что для выделения однозначных непрерывных ветвей многозначной функции  $w(z)$  (в некоторой области плоскости  $z$ ) необходимо, чтобы функция  $w(z)$  определялась по непрерывности одинаково, вдоль любых двух кривых  $C_1$  и  $C_2$ , лежащих в этой области и идущих из произвольной точки  $z_0$  в некоторую другую точку  $z_1$ . Свойство монодромии и связано с этим условием.

Пусть многозначная функция  $w(z)$  такова, что при фиксировании любого ее значения  $w_0$  в произвольной точке  $z_0$  функция  $w(z)$  может быть определена по непрерывности (возможно, неоднозначно) вдоль любой непрерывной кривой, выходящей из точки  $z_0$  (и не проходящей через точки, в которых функция  $w(z)$  не определена). Скажем, что многозначная функция  $w(z)$  обладает свойством монодромии, если для нее справедливо следующее утверждение.

**Свойство монодромии.** Пусть  $C_1$  и  $C_2$  — непрерывные кривые на плоскости  $z$ , начинающиеся в некоторой точке  $z_0$ , кончающиеся в некоторой точке  $z_1$  и не проходящие через точки разветвления и неоднозначности многозначной функции  $w(z)$ . Пусть, кроме того, кривую  $C_1$  можно непрерывно деформировать в кривую  $C_2$  так, чтобы кривые, получающиеся при деформации, не проходили через точки разветвления функции  $w(z)$  и чтобы концы их оставались неподвижными (рис. 35,  $a$ ,  $b$  — точки разветв-

---

\*) См., например, Спрингер Дж., Введение в теорию римановых поверхностей, ИЛ, 1960, а также Гурвиц А., Курант Р., Теория функций, М., Наука, 1968.

ления). Тогда значение  $w(z_1)$  одинаково определяется по непрерывности вдоль кривых  $C_1$  и  $C_2$  (если зафиксировано некоторое значение  $w_0 = w(z_0)$ ).

Выясним, какие следствия вытекают из свойства монодромии.

**309.** Пусть функция  $w(z)$  обладает свойством монодромии. Проведем на плоскости  $z$  непересекающиеся разрезы

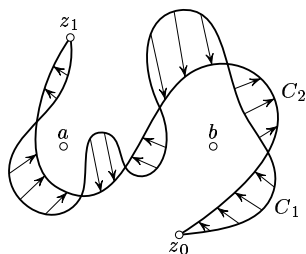


Рис. 35

из всех точек разветвления функции  $w(z)$  в бесконечность и выколем точки неоднозначности функции  $w(z)$ . Доказать, что при этом функция  $w(z)$  распадается на однозначные непрерывные ветви.

**310.** Пусть при условиях предыдущей задачи разрезы не проходят через точки неоднозначности функции  $w(z)$  и

у  $w(z)$  конечное число точек разветвления. Доказать, что при пересечении некоторого разреза (в определенную сторону) мы с любой фиксированной ветви функции  $w(z)$  будем переходить на одну и ту же ветвь независимо от того, в каком именно месте мы пересекаем разрез.

**З а м е ч а н и е 1.** При обходе вокруг точки разветвления мы один раз пересекаем разрез, идущий из этой точки в бесконечность. Поэтому в силу результата задачи **310** переходы с одних ветвей на другие при пересечении некоторого разреза в произвольном месте совпадают с переходами, получающимися при обходе (в соответствующую сторону) точки разветвления, из которой проведен разрез, и, следовательно, совпадают с переходами, указанными в этой точке в схеме римановой поверхности.

**З а м е ч а н и е 2.** Из результатов задач **309** и **310** вытекает, что если многозначная функция  $w(z)$  обладает свойством монодромии, то для  $w(z)$  можно построить риманову поверхность. Причем для выяснения структуры этой поверхности достаточно найти точки разветвления функции  $w(z)$  и установить переходы между ветвями функции  $w(z)$  при обходе этих точек.

Все функции, которые будут рассматриваться ниже, обладают свойством монодромии. Строго доказать это утвер-



ждение мы здесь не сможем, так как для этого требуется привлечение понятия аналитической функции. Однако мы дадим идею доказательства того, что некоторая многозначная функция  $w(z)$  обладает свойством монодромии, предполагая, что эта функция является «достаточно хорошей». Что это означает — будет видно из идеи доказательства.

Итак, пусть выполняются условия из свойства монодромии. Пусть  $C'_1$  и  $C'_2$  — непрерывные образы кривых  $C_1$  и  $C_2$  при отображении  $w(z)$ , начинающиеся в точке  $w_0 = w(z_0)$ . Надо доказать, что кривые  $C'_1$  и  $C'_2$  оканчиваются в одной и той же точке.

Предположим сначала, что кривые, получающиеся при деформации  $C_1$  в  $C_2$ , не проходят не только через точки разветвления, но и через точки неоднозначности функции  $w(z)$  (см. стр. 93). Пусть  $C$  — любая из таких кривых. Тогда существует единственный непрерывный образ  $C'$  кривой  $C$  при отображении  $w(z)$ , начинающийся в точке  $w_0 = w(z_0)$ . Если функция  $w(z)$  «достаточно хорошая»<sup>\*)</sup>, то при непрерывной деформации кривой  $C$  от положения  $C_1$  до положения  $C_2$  кривые  $C'$  непрерывно деформируются от положения  $C'_1$  до положения  $C'_2$ . При этом конечная точка кривой  $C'$  также должна деформироваться непрерывно. Но кривая  $C$  оканчивается в точке  $z_1$ , поэтому конечная точка кривой  $C'$  должна совпадать с одним из образов  $w(z_1)$  точки  $z_1$ . Если функция  $w(z)$  принимает при каждом  $z$  (в частности, при  $z_1$ ) лишь конечное число значений (а мы рассматриваем только такие функции), то конечная точка кривой  $C'$  не может перескочить из одного образа точки  $z_1$  в другой образ, так как при этом нарушится непрерывность деформации. Следовательно, конечные точки всех кривых  $C'$  и, в частности, кривых  $C'_1$  и  $C'_2$ , совпадают.

Посмотрим теперь, что происходит, когда кривая  $C$  переходит через точку неоднозначности функции  $w(z)$ , которая не является точкой разветвления. Рассмотрим только частный случай, когда кривая изменяется лишь вблизи точки неоднозначности  $a$  (рис. 36). Если в точке  $z_0$  зафиксировано значение  $w_0 = w(z_0)$ , то по непрерывно-

---

\*) Обычно теорема монодромии доказывается для произвольных аналитических функций. См., например, С п р и н г е р Дж., Введение в теорию римановых поверхностей, ИЛ, 1960, стр. 97.

сти однозначно определится значение  $w(z)$  в точке  $A$ .

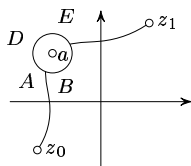


Рис. 36

После этого одинаково определятся по непрерывности вдоль кривых  $ADE$  и  $ABE$  значения  $w(z)$  в точке  $E$ , так как иначе при обходе по кривой  $EDABE$  изменялось бы значение функции  $w(z)$  и точка  $a$  была бы точкой разветвления функции  $w(z)$ . После того как значения  $w(z)$  в точке  $E$  определились

одинаково по обоим кривым, одинаково определяются по непрерывности вдоль кривой  $Ez_1$  и значения  $w(z)$  в точке  $z_1$ .

Таким образом, «темным» местом в нашем изложении осталось утверждение о том, что все рассматриваемые ниже функции являются «достаточно хорошими».

Здесь уж читателю придется либо принять это утверждение на веру, либо обратиться к более глубокому изучению аналитических функций<sup>\*)</sup>.

## § 11. Функции, выражающиеся в радикалах

**Определение.** Пусть  $f(z)$  и  $g(z)$  — две многозначные функции. Под  $f(z) + g(z)$  будет пониматься многозначная функция, все значения которой в точке  $z_0$  получатся, если каждое значение  $f(z_0)$  сложить с каждым значением  $g(z_0)$ . Так же определяются функции  $f(z) - g(z)$ ,  $f(z) \cdot g(z)$ ,  $f(z)/g(z)$ .

Под  $[f(z)]^n$ , где  $n$  — натуральное число, будет пониматься функция, все значения которой в точке  $z_0$  получатся, если каждое значение  $f(z_0)$  возвести в степень  $n$ .

Под  $\sqrt[n]{f(z)}$ , где  $n$  — натуральное число, будет пониматься функция, все значения которой в точке  $z_0$  получатся, если для каждого значения  $f(z_0)$  вычислить все  $n$  значений  $\sqrt[n]{f(z_0)}$ .

**311.** Найти все значения: а)  $\sqrt[3]{-8} + \sqrt{2i}$ , б)  $\frac{1 - \sqrt{-2i}}{\sqrt{-4}}$ , в)  $\sqrt{i + \sqrt{-1}}$ , г)  $(\sqrt[4]{(1+i)^2})$ , д)  $(\sqrt{i} + \sqrt{i})^2$ .

<sup>\*)</sup> См., например, Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, М., Наука, 1985 и Маркушевич А. И., Краткий курс теории аналитических функций, М., Наука, 1978.

**Определение.** Будем говорить, что многозначная функция  $h(z)$  *выражается в радикалах*, если она может быть получена из функции  $f(z) = z$  и постоянных функций  $g(z) = a$  ( $a$  — произвольное фиксированное комплексное число) с помощью операций сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в натуральную степень и извлечения корней натуральной степени.

Например, функция  $h(z) = \left( \sqrt[3]{\sqrt{z} + 3z^2} - \frac{3}{\sqrt{z}} \right)^4$  выражена в радикалах. Некоторые функции, выражающиеся в радикалах, мы уже рассматривали выше.

**312.** Пусть функция  $h(z)$  выражается в радикалах, и пусть  $C$  — непрерывная кривая на плоскости  $z$ , начинающаяся в точке  $z_0$  и не проходящая через точки, в которых функция  $h(z)$  не определена. Доказать, что если  $w_0$  — одно из значений  $h(z_0)$ , то имеется хотя бы один непрерывный образ кривой  $C$  при отображении  $w = h(z)$ , начинающийся в точке  $w_0$ . (Считаем, что параметрическое уравнение  $w(t) = a$ , где  $a$  — фиксированное комплексное число, задает непрерывную кривую, вырождающуюся в точку.)

Из результата задачи **312** получаем, что произвольная функция  $h(z)$ , выражающаяся в радикалах, может быть определена по непрерывности вдоль любой непрерывной кривой  $C$ , не проходящей через точки, в которых функция  $h(z)$  не определена. Если при этом кривая  $C$  не проходит через точки разветвления и неоднозначности (см. стр. **93**) функции  $h(z)$ , то функция  $h(z)$  определяется по непрерывности вдоль кривой  $C$  однозначно.

Мы уже отмечали в предыдущем параграфе, что функции, выражающиеся в радикалах, являются «достаточно хорошими»<sup>\*)</sup>, т. е. они обладают свойством монодромии. Поэтому для любой функции, выражающейся в радикалах, можно построить риманову поверхность (см. **309** и **310**)<sup>\*\*)</sup>. Выясним структуру этих римановых поверхностей.

В дальнейшем всюду в этом параграфе можно предполагать, что речь идет о функциях, выражающихся в радикалах.

---

\*) Функции, выражающиеся в радикалах, являются аналитическими.

\*\*) Любая функция, выражающаяся в радикалах, имеет конечное число точек разветвления.

**313.** Пусть  $h(z) = f(z) + g(z)$ . Выколем из плоскости все точки неоднозначности функции  $h(z)$  и проведем непересекающиеся разрезы в бесконечность из всех точек, которые являются точками разветвления хотя бы одной из функций  $f(z)$  или  $g(z)$ . Пусть  $f_1(z), \dots, f_n(z)$  и  $g_1(z), \dots, g_n(z)$  — непрерывные однозначные ветви функций  $f(z)$  и  $g(z)$  на полученной плоскости с разрезами. Найти непрерывные однозначные ветви функции  $h(z)$ .

Если при обходе точки  $z_0$  мы с ветви  $f_{i_1}(z)$  переходим на ветвь  $f_{i_2}(z)$  и с ветви  $g_{j_1}(z)$  на ветвь  $g_{j_2}(z)$ , то, очевидно, с ветви  $h_{i_1, j_1}(z) = f_{i_1}(z) + g_{j_1}(z)$  мы перейдем на ветвь  $h_{i_2, j_2}(z) = f_{i_2}(z) + g_{j_2}(z)$ . Это подсказывает нам следующий формальный метод построения схемы римановой поверхности функции  $h(z) = f(z) + g(z)$  при условии, что построены (при тех же разрезах) схемы римановых поверхностей функций  $f(z)$  и  $g(z)$ . Каждой паре ветвей  $f_i(z)$  и  $g_j(z)$  ставим в соответствие лист, на котором считаем заданной ветвь  $h_{i, j}(z) = f_i(z) + g_j(z)$ . Если в схемах римановых поверхностей функции  $f(z)$  и  $g(z)$  в точке  $z_0$  указаны переходы с ветви  $f_{i_1}(z)$  на ветвь  $f_{i_2}(z)$  и с ветви  $g_{j_1}(z)$  на ветвь  $g_{j_2}(z)$ , то в схеме римановой поверхности функции  $h(z)$  указываем в точке  $z_0$  переход с ветви  $h_{i_1, j_1}(z)$  на ветвь  $h_{i_2, j_2}(z)$ .

**314.** Построить схемы римановых поверхностей следующих функций: а)  $\sqrt{z} + \sqrt{z-1}$ , б)  $\sqrt[3]{z^2-1} + \sqrt{1/z}$ , в)  $\sqrt{z} + \sqrt[3]{z}$ , г)  $\sqrt{z^2-1} + \sqrt[4]{z-1}$ .

Описанный выше формальный метод построения схемы римановой поверхности функции  $h(z) = f(z) + g(z)$  не всегда дает правильный результат, так как он не учитывает, что некоторые из ветвей  $h_{i, j}(z)$  могут оказаться равными. Для простоты будем считать, что разрезы не проходят через точки неоднозначности функции  $h(z)$ . В таком случае при пересечении любого разреза мы с листов, соответствующих равным ветвям функции  $h(z)$ , будем переходить, в силу однозначности, на листы, также соответствующие равным ветвям. Следовательно, если мы склеим листы, соответствующие одинаковым ветвям функции  $h(z)$ , т. е. заменим каждое множество таких листов одним листом, то однозначно определятся переходы между полученными листами при обходе любой точки разветвления  $z_0$ .

**315.** Найти все значения  $f(1)$ , если: а)  $f(z) = \sqrt{z} + \sqrt{z}$ , б)  $f(z) = \sqrt{z} + \sqrt[4]{z^2}$ , в)  $f(z) = \sqrt[3]{z} + \sqrt[3]{z}$ .

**316.** Для указанных функций построить схему римановой поверхности формальным методом и истинную схему римановой поверхности: а)  $\sqrt{z} + \sqrt{z}$ , б)  $\sqrt{z} + \sqrt[4]{z^2}$ , в)  $\sqrt[3]{z} + \sqrt[3]{z}$ .

Окончательно получаем, что для построения схемы римановой поверхности функции  $h(z) = f(z) + g(z)$  по схемам римановых поверхностей функций  $f(z)$  и  $g(z)$  (построенным при тех же разрезах) достаточно построить схему описанным выше формальным методом и затем произвести соответствующие склейки.

Легко видеть, что этот алгоритм можно применять и при построении схемы римановой поверхности функций  $h(z) = f(z) - g(z)$ ,  $h(z) = f(z) \cdot g(z)$ ,  $h(z) = f(z)/g(z)$ .

**317.** Построить схемы римановых поверхностей следующих функций:

а)  $i\sqrt{z} - \sqrt[4]{z^2}$ , б)  $\sqrt{z-1} \cdot \sqrt[4]{z}$ , в)  $\frac{\sqrt{z^2-1}}{\sqrt[4]{z+1}}$ , г)  $\frac{\sqrt{z} + \sqrt{z}}{\sqrt[3]{z(z-1)}}$ .

**318.** Пусть  $f_1(z), f_2(z), \dots, f_m(z)$  — все непрерывные однозначные ветви функции  $f(z)$ . Найти при тех же разрезах все непрерывные однозначные ветви функции  $h(z) = [f(z)]^n$ , где  $n$  — некоторое натуральное число.

Из результата последней задачи легко вытекает, что схема римановой поверхности функции  $h(z) = [f(z)]^n$  совпала бы со схемой римановой поверхности функции  $f(z)$ , если бы все ветви  $h_i(z) = [f_i(z)]^n$  были различными. Однако это не всегда так. Если получатся равные ветви, то при переходе через разрезы, мы в силу однозначности будем с равных ветвей переходить на равные ветви.

Окончательно получаем, что для построения схемы римановой поверхности функции  $h(z) = [f(z)]^n$  достаточно на схеме римановой поверхности функции  $f(z)$  рассмотреть вместо ветвей  $f_i(z)$  ветви  $h_i(z) = [f_i(z)]^n$ . Если при этом появятся одинаковые ветви, то нужно склеить соответствующие листы.

**319.** Построить схемы римановых поверхностей следующих функций: а)  $(\sqrt[4]{z})^2$ , б)  $(\sqrt{z} + \sqrt{z})^2$ , в)  $(\sqrt{z} \cdot \sqrt[3]{z-1})^3$ .

Изучим теперь, как связана схема римановой поверхности функции  $\sqrt[n]{f(z)}$  со схемой римановой поверхности

функции  $f(z)$ .

**320.** Какие точки могут быть точками разветвления функции  $\sqrt[n]{f(z)}$ ?

Проведем на плоскости  $z$  разрезы из точек разветвления функции  $f(z)$  в бесконечность так, чтобы они не проходили через точки, в которых одно из значений функции  $f(z)$  равно 0, и выделим непрерывные однозначные ветви функции  $f(z)$ . Пусть это будут (однозначные) функции  $f_1(z)$ ,  $f_2(z)$ , ...,  $f_m(z)$ . Проведем дополнительно разрезы в бесконечность из точек, в которых одно из значений функции  $f(z)$  равно 0. Пусть  $g(z)$  — одна из непрерывных однозначных ветвей функции  $\sqrt[n]{f(z)}$  при этих разрезах.

**321.** Доказать, что функция  $[g(z)]^n$  совпадает с одной из функций  $f_i(z)$  всюду, кроме разрезов.

Из результата предыдущей задачи вытекает, что каждая ветвь функции  $\sqrt[n]{f(z)}$  соответствует некоторой ветви функции  $f(z)$ .

**322.** Пусть  $g(z)$  — непрерывная однозначная ветвь функции  $\sqrt[n]{f(z)}$ , соответствующая ветви  $f_i(z)$  функции  $f(z)$ . Найти все соответствующие ветви  $f_i(z)$  непрерывные однозначные ветви функции  $\sqrt[n]{f(z)}$ .

Из результата последней задачи мы получаем, что каждой ветви  $f_i(z)$  функции  $f(z)$  соответствует «пачка», состоящая из  $n$  ветвей функции  $\sqrt[n]{f(z)}$ . Мы занумеруем ветви в этой пачке  $f_{i,0}(z)$ ,  $f_{i,1}(z)$ , ...,  $f_{i,n-1}(z)$  причем так, чтобы для любого  $k$  выполнялось равенство  $f_{i,k}(z) = f_{i,0}(z) \cdot \epsilon_n^k$ .

Пусть  $z_0$  — точка разветвления функции  $f(z)$ , и пусть при обходе вокруг точки  $z_0$  мы с ветви  $f_i(z)$  переходим на ветвь  $f_j(z)$ . Тогда, очевидно, для функции  $\sqrt[n]{f(z)}$  мы получим следующее: со всех листов пачки, соответствующей ветви  $f_i(z)$ , мы при обходе вокруг точки  $z_0$  будем переходить на листы пачки, соответствующей ветви  $f_j(z)$ .

**323.** Пусть  $C$  — кривая на плоскости  $z$  с параметрическим уравнением  $z(t)$ , и пусть кривая на плоскости  $w$  с уравнением  $w_0(t)$  является непрерывным образом кривой  $C$  при отображении  $w = \sqrt[n]{f(z)}$ . Доказать, что кривая с уравнением  $w_k(t) = w_0(t) \cdot \epsilon_n^k$  также является непрерывным образом кривой  $C$  при отображении  $w = \sqrt[n]{f(z)}$ .

**324.** Пусть кривая  $C$  на плоскости  $z$  не проходит че-

рез точки разветвления и точки неоднозначности функции  $\sqrt[n]{f(z)}$ . Доказать, что если мы при движении вдоль кривой  $C$  переходим с ветви  $f_{i,s}(z)$  на ветвь  $f_{j,r}(z)$ , то с ветви  $f_{i,s+k}(z)$  мы перейдем на ветвь  $f_{j,r+k}(z)$ , где суммы  $s+k$  и  $r+k$  вычисляются по модулю  $n$  (см. 40).

Таким образом, для определения того, куда мы перейдем с листов данной пачки при обходе данной точки разветвления функции  $\sqrt[n]{f(z)}$  достаточно определить, куда мы перейдем с одного из листов данной пачки, а для других листов этой пачки переходы определятся автоматически в силу результата задачи 324.

**325.** Построить схему римановой поверхности функции  $\sqrt{\sqrt{z}-1}$ .

**326.** Построить схемы римановых поверхностей следующих функций: а)  $\sqrt[3]{\sqrt{z}-2}$ , б)  $\sqrt{\sqrt[3]{z}-1}$ .

В следующих двух задачах рассматривается пример, когда схема римановой поверхности функции зависит от того, как проведены разрезы.

**327.** Построить схему римановой поверхности функции  $f(z) = \sqrt{z^2+1} - 2$  при разрезах, изображенных: а) на рис. 37, б) на рис. 38. В обоих случаях определить, на одном или на разных листах лежат точки  $z$  такие, что  $f(z) = 0$ .

**328.** Построить схему римановой поверхности функции  $h(z) = \sqrt{\sqrt{z^2+1}-2}$  при разрезах, изображенных: а) на рис. 39, б) на рис. 40.

Сформулируем еще раз те результаты этого параграфа, которые потребуются нам в дальнейшем.

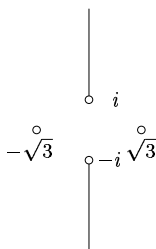


Рис. 37

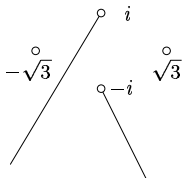


Рис. 38

**Теорема 8.** Для построения схемы римановой поверхности функций  $h(z) = f(z) + g(z)$ ,  $h(z) = f(z) - g(z)$ ,  $h(z) = f(z) \cdot g(z)$ ,  $h(z) = f(z)/g(z)$  по схемам римановых поверхностей функций  $f(z)$  и  $g(z)$ , построенных при тех же разрезах, достаточно: а) каждой паре ветвей  $f_i(z)$  и  $g_j(z)$  сопоставить лист, на котором считать заданной ветвь  $h_{i,j}(z)$ , равную соответственно  $f_i(z) + g_j(z)$ ,  $f_i(z) - g_j(z)$ ,  $f_i(z) \cdot g_j(z)$ ,  $f_i(z)/g_j(z)$ ;

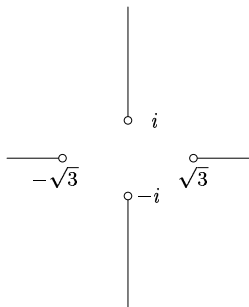


Рис. 39

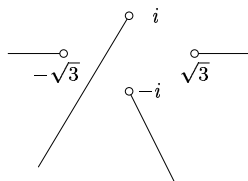


Рис. 40

б) если при обходе вокруг точки  $z_0$  имеется переход с ветви  $f_{i_1}(z)$  на ветвь  $f_{i_2}(z)$  и с ветви  $g_{j_1}(z)$  на ветвь  $g_{j_2}(z)$ , то для функции  $h(z)$  при том же обходе указать переход с ветви  $h_{i_1,j_1}(z)$  на ветвь  $h_{i_1,j_2}(z)$ ;

в) листы, на которых заданы одинаковые ветви  $h_{i,j}(z)$ , склеить.

**Теорема 9.** Для построения схемы римановой поверхности функции  $h(z) = [f(z)]^n$  по схеме римановой поверхности функции  $f(z)$ , построенной при тех же разрезах, достаточно:

а) на схеме римановой поверхности функции  $f(z)$  считать заданными вместо  $f_i(z)$  ветви  $h_i(z) = [f_i(z)]^n$ ;

б) листы, на которых оказываются заданными одинаковые ветви  $h_i(z)$ , склеить.

**Теорема 10.** При построении схемы римановой поверхности функции  $h(z) = \sqrt[n]{f(z)}$  по схеме римановой поверхности функции  $f(z)$ , построенной при тех же разрезах:

а) каждый лист схемы римановой поверхности функ-



ции  $f(z)$  заменяется пачкой из  $n$  листов;

б) при обходе вокруг любой точки разветвления функции  $h(z)$  мы с листов одной пачки переходим на листы одной и той же пачки;

в) эти переходы с одной пачки на другую совпадают с переходами между соответствующими листами римановой поверхности функции  $f(z)$ ;

г) если листы в пачках перенумерованы так, что  $f_{i,k}(z) = f_{i,0}(z) \cdot \varepsilon_n^k$ , то переходы с одной пачки на другую происходят без перемешивания листов, а только с циклическим сдвигом (см. **324**).

## § 12. Группы Галуа многозначных функций

Свяжем теперь с каждой схемой римановой поверхности некоторую группу подстановок.

**329.** Пусть кривая  $C$  на плоскости  $z$  не проходит через точки разветвления и точки неоднозначности функции  $w(z)$ . Доказать, что при движении вдоль кривой мы с разных листов схемы римановой поверхности функции  $w(z)$  будем переходить на разные листы.

Таким образом, в силу результата задачи **329**, обходу (против часовой стрелки) вокруг любой точки разветвления функции  $w(z)$  соответствует подстановка листов схемы римановой поверхности функции  $w(z)$ , которая указывает, на какой лист мы переходим с каждого листа.

**330.** Пусть схемы римановых поверхностей для функций, перечисленных в задаче **314**, построены так, как это сделано в «Указаниях, решениях, ответах» (стр. **175**), и пусть листы на этих схемах занумерованы снизу вверх числами  $1, 2, \dots$ . Записать для каждой функции подстановки листов, соответствующие обходам вокруг каждой точки разветвления.

**331.** Пусть  $g_1, \dots, g_s$  — некоторые элементы произвольной группы  $G$ . Рассмотрим все элементы группы  $G$ , которые могут быть получены из  $g_1, \dots, g_s$  путем многократного применения операций умножения и взятия обратного элемента. Доказать, что полученное множество элементов образует подгруппу в группе  $G$ .

**О п р е д е л е н и е.** Подгруппа, полученная в задаче **331**, называется *подгруппой, порожденной элементами*  $g_1,$

$\dots\dots, g_s$ .

**О п р е д е л е н и е.** Пусть  $g_1, \dots, g_s$  — подстановки листов некоторой схемы римановой поверхности, соответствующие обходам (против часовой стрелки) вокруг всех точек разветвления. Подгруппу, порожденную элементами  $g_1, \dots, g_s$ , будем называть *группой подстановок листов данной схемы римановой поверхности*.

**З а м е ч а н и е 1.** Если число листов в схеме конечно (а мы рассматриваем только такие схемы), то при построении группы подстановок листов этой схемы достаточно использовать операцию умножения подстановок, а операцию взятия обратной подстановки можно исключить. Действительно, в этом случае любая подстановка листов  $g$  имеет некоторый конечный порядок  $k$ :  $g^k = e$ , поэтому

$$g^{-1} = g^{k-1} = \underbrace{g \cdot g \cdot \dots \cdot g}_{k-1}$$

**З а м е ч а н и е 2.** Группы подстановок листов, которые будут строиться ниже, будут рассматриваться, как обычно, с точностью до изоморфизма. Поэтому нумерация листов будет не важна, так как при разных нумерациях получаются хотя и различные, но изоморфные подгруппы группы  $S_n$ .

**332.** Каким из известных вам групп изоморфны группы подстановок листов схем римановых поверхностей следующих функций: а)  $\sqrt{z}$ , б)  $\sqrt[3]{z}$ , в)  $\sqrt[n]{z}$ , г)  $\sqrt[3]{(z^2 - 1)}$  (см. **304**), д)  $\sqrt[4]{(z - 1)^2(z + 1)^3}$  (см. **306**).

**333.** Каким из известных вам групп изоморфны группы подстановок листов схем римановых поверхностей функций, перечисленных в задачах: 1) **314**, 2) **317**, 3) **319**?

**334.** Описать группу подстановок листов для обеих схем римановой поверхности функции  $h(z) = \sqrt{\sqrt{z^2 + 1} - 2}$ , построенных при решении задачи **328**.

Пусть точка  $z_0$  не является точкой разветвления и неоднозначности многозначной функции  $w(z)$ , и пусть  $w_1, w_2, \dots, w_n$  — все значения функции  $w(z)$  в точке  $z_0$ . Рассмотрим некоторую непрерывную кривую  $C$ , начинающуюся и кончающуюся в точке  $z_0$  и не проходящую через точки разветвления и неоднозначности функции  $w(z)$ . Если мы выберем некоторое значение  $w_i = w(z_0)$  и определим

новое значение  $w(z_0)$  по непрерывности вдоль кривой  $C$ , то получим некоторое новое значение  $w_j = w(z_0)$ . При этом, начиная с разных значений  $w_i$ , мы будем получать различные значения  $w_j$  (иначе по кривой  $C^{-1}$  нарушилась бы однозначность). Следовательно, кривой  $C$  соответствует некоторая подстановка значений  $w_1, w_2, \dots, w_n$ . При этом, если кривой  $C$  соответствует подстановка  $g$ , то кривой  $C^{-1}$  соответствует подстановка  $g^{-1}$  и если кривым  $C_1$  и  $C_2$  (с концами в точке  $z_0$ ) соответствуют подстановки  $g_1$  и  $g_2$ , то кривой  $C_1 C_2$  соответствует подстановка  $g_2 g_1$  (напомним, что подстановки выполняются справа налево).

Таким образом, если мы рассмотрим всевозможные кривые, начинающиеся и кончающиеся в точке  $z_0$ , то соответствующие им подстановки будут образовывать некоторую *группу подстановок значений  $w(z_0)$* .

**335.** Пусть  $G_1$  — группа подстановок значений  $w(z_0)$  и  $G_2$  — группа подстановок листов некоторой схемы римановой поверхности функции  $w(z)$ . Доказать, что группы  $G_1$  и  $G_2$  изоморфны.

Заметим, что при определении группы подстановок значений  $w(z_0)$  не использовалась никакая схема римановой поверхности функции  $w(z)$ . Поэтому из результата задачи **335** вытекает, что группа подстановок значений  $w(z_0)$  для **произвольной** точки  $z_0$  и группа подстановок листов **произвольной** схемы римановой поверхности функции  $w(z)$  изоморфны. Следовательно, группы подстановок значений  $w(z_0)$  для **всех** точек  $z_0$  и группы подстановок листов **всех** схем римановых поверхностей функции  $w(z)$  изоморфны, т. е. являются фактически одной и той же группой. Эту группу будем называть *группой Галуа* многозначной функции  $w(z)$ <sup>\*</sup>.

### § 13. Группы Галуа функций, выражающихся в радикалах

Перейдем теперь к доказательству одного из основных утверждений этой книги, а именно следующей теоремы.

**Теорема 11.** Если многозначная функция  $h(z)$  выражается в радикалах, то группа Галуа функции  $h(z)$  раз-

---

<sup>\*</sup>) Эту группу называют также *группой монодромии*.

решима (см. главу I, § 14).

Доказательство теоремы 11 заключено в решениях следующих задач.

**336.** Пусть  $h(z) = f(z) + g(z)$ , или  $h(z) = f(z) - g(z)$ , или  $h(z) = f(z) \cdot g(z)$ , или  $h(z) = f(z)/g(z)$ , и пусть схема римановой поверхности функции  $h(z)$  построена из схем римановых поверхностей функций  $f(z)$  и  $g(z)$  формальным методом (теорема 8, пункты а), б), стр. 104). Доказать, что если  $F$  и  $G$  — группы подстановок листов исходных схем, то группа подстановок листов построенной схемы изоморфна некоторой подгруппе в прямом произведении  $F \times G$  (см. главу I, § 7).

**337.** Пусть при условиях предыдущей задачи  $H_1$  — группа подстановок листов схемы, построенной формальным методом, а  $H_2$  — группа подстановок листов истинной схемы римановой поверхности функции  $h(z)$ . Доказать, что существует гомоморфизм (см. главу I, § 13) группы  $H_1$  на группу  $H_2$ .

**338.** Пусть группы Галуа функций  $f(z)$  и  $g(z)$  разрешимы. Доказать, что тогда разрешимы группы Галуа следующих функций:

$$\begin{aligned} h(z) &= f(z) + g(z), & h(z) &= f(z) - g(z), \\ h(z) &= f(z) \cdot g(z), & h(z) &= f(z)/g(z). \end{aligned}$$

**339.** Пусть группа Галуа функции  $f(z)$  разрешима. Доказать, что группа Галуа функции  $h(z) = [f(z)]^n$  также разрешима.

**340.** Пусть  $H$  — группа подстановок листов схемы римановой поверхности функции  $h(z) = \sqrt[n]{f(z)}$ , а  $F$  — группа подстановок листов схемы римановой поверхности функции  $f(z)$ , построенной при тех же разрезах. Построить гомоморфизм группы  $H$  на группу  $F$ .

**341.** Доказать, что ядро гомоморфизма (см. главу I, § 13), построенного в решении предыдущей задачи, коммутативно.

**342.** Пусть группа Галуа функции  $f(z)$  разрешима. Доказать, что группа Галуа функции  $h(z) = \sqrt[n]{f(z)}$  также разрешима.

Функции константы  $h(z) = a$  и функция  $h(z) = z$  являются функциями однозначными и непрерывными во всей

плоскости  $z$ . Поэтому их римановы поверхности состоят только из одного листа, и, следовательно, соответствующие им группы Галуа состоят только из одного элемента  $\{e\}$  и, значит, разрешимы. Отсюда, учитывая определение функций, выражающихся в радикалах (стр. 99), и результаты задач **338**, **339** и **342**, получаем утверждение теоремы 11.

**Замечание 1.** Для читателей, знакомых с теорией аналитических функций, отметим следующее. Если группу Галуа функции  $h(z)$  определять как группу подстановок значений функции  $h(z)$  в некоторой точке  $z_0$  (см. стр. 107), то теорема 11 будет справедливой и для более широкого класса функций. Например, при построении функции  $h(z)$  кроме констант, тождественной функции, арифметических операций и радикалов, можно разрешить использовать любые однозначные аналитические функции (например,  $e^z$ ,  $\sin z$  и т. д.), многозначную функцию  $\operatorname{Ln} z$  и некоторые другие функции. При этом группа Галуа функции  $h(z)$  будет разрешимой, хотя уже не обязательно будет конечной.

## § 14. Теорема Абеля

Рассмотрим уравнение

$$3w^5 - 25w^3 + 60w - z = 0. \quad (14.1)$$

Мы будем считать  $z$  параметром и для каждого комплексного значения  $z$  будем искать все комплексные корни  $w$  этого уравнения. В силу результата задачи **269** данное уравнение при каждом  $z$  имеет 5 корней (с учетом кратности), некоторые из которых могут совпадать.

**343.** Какие значения  $w$  могут быть кратными корнями (кратности больше 1, см. стр. 81) уравнения

$$3w^4 - 25w^3 + 60w - z = 0?$$

При каких значениях  $z$  они будут кратными корнями?

Из решения предыдущей задачи вытекает, что при  $z = \pm 38$  и  $z = \pm 16$  уравнение (14.1) имеет 4 различных корня, при остальных значениях  $z$  это уравнение имеет 5 различных корней. Таким образом, функция  $w(z)$ , выражающая корни уравнения (14.1) через параметр  $z$ , принимает 4 различных значения при  $z = \pm 38$  и  $z = \pm 16$  и принимает 5 различных значений при остальных значениях  $z$ . Изучим эту функцию  $w(z)$ .

Докажем сначала, что при малом изменении параметра  $z$  корни уравнения (14.1) изменяются также мало. Более точно это свойство выражено в следующей задаче.

**344.** Пусть  $z_0$  — произвольное комплексное число и  $w_0$  — один из корней уравнения (14.1) при  $z = z_0$ . Рассмотрим круг сколь угодно малого радиуса  $r$  с центром в точке  $w_0$ . Доказать, что существует такое действительное число  $\rho > 0$ , что если  $|z'_0 - z_0| < \rho$ , то в рассматриваемом круге лежит хотя бы один корень уравнения (14.1) и при  $z = z'_0$ .

Пусть функция  $w(z)$  выражает корни уравнения (14.1) через параметр  $z$  и пусть  $w_0$  — одно из значений  $w(z_0)$ . Тогда из результата задачи 344 вытекает, что если  $z$  движется непрерывно по некоторой кривой, начинающейся в точке  $z_0$ , то можно так выбирать одно из значений  $w(z)$ , чтобы точка  $w$  также двигалась непрерывно по некоторой кривой, начинающейся в точке  $w_0$ . Другими словами, функцию  $w(z)$  можно определить по непрерывности вдоль любой кривой  $C$ . Если при этом кривая  $C$  не проходит через точки разветвления и неоднозначности (стр. 93) функции  $w(z)$ , то функция  $w(z)$  определяется по непрерывности вдоль кривой  $C$  однозначно.

**345.** Доказать, что точки, отличные от  $z = \pm 38$  и  $z = \pm 16$ , не могут быть точками разветвления и точками неоднозначности функции  $w(z)$ , выражающей корни уравнения (14.1) через параметр  $z$ .

Пусть  $w(z)$  — функция, выражающая корни уравнения (14.1) через параметр  $z$ . Являясь одной из алгебраических функций\*), функция  $w(z)$  является «достаточно хорошей» (см. § 10, стр. 96), т. е. она обладает свойством монодромии. Поэтому для функции  $w(z)$  можно построить риманову поверхность (см. 309 и 310). Эта риманова поверхность будет иметь, очевидно, 5 листов.

В силу результата задачи 345 точками разветвления и неоднозначности функции  $w(z)$  могут быть только точки  $z = \pm 38$ , и  $z = \pm 16$ , но пока не ясно, являются ли они тако-

---

\*) Многозначная функция  $w(z)$  называется алгебраической, если она выражает через параметр  $z$  все корни некоторого уравнения

$$a_0(z)w^n + a_1(z)w^{n-1} + \dots + a_n(z) = 0,$$

в котором все  $a_i(z)$  — многочлены от  $z$ . Все алгебраические функции являются аналитическими.

выми.

**346.** Пусть известно, что точка  $z_0 = +38$  (или  $z_0 = -38$ , или  $z_0 = \pm 16$ ) является точкой разветвления функции  $w(z)$ , выражающей корни уравнения (14.1) через параметр  $z$ . Как соединяются листы римановой поверхности функции  $w(z)$  в точке  $z_0$  (точнее, на разрезе, проведенном из точки  $z_0$  в бесконечность; см. замечание 2 на стр. 96)?

**347.** Пусть  $w(z)$  — функция, выражающая корни уравнения (14.1) через параметр  $z$ . Пусть, кроме того,  $z_0$  и  $z_1$  — произвольные точки, отличные от  $z = \pm 38$  и  $z = \pm 16$ , и  $w_0, w_1$  — любые их образы при отображении  $w(z)$ . Доказать, что можно провести непрерывную кривую из точки  $z_0$  в точку  $z_1$  так, чтобы она не проходила через точки  $z = \pm 38$  и  $z = \pm 16$  и чтобы ее непрерывный образ, начинающийся в точке  $w_0$ , оканчивался в точке  $w_1$ .

**348.** Доказать, что все четыре точки  $z = \pm 38$  и  $z = \pm 16$  являются точками разветвления функции  $w(z)$ . Как может выглядеть схема римановой поверхности функции  $w(z)$ ? Нарисовать все различные варианты. (Различными считаем те схемы, которые нельзя получить друг из друга перестановкой листов и точек разветвления).

**349.** Найти группу Галуа функции  $w(z)$ , выражающей корни уравнения

$$3w^5 - 25w^3 + 60w - z = 0$$

через параметр  $z$ .

**350.** Доказать, что функция  $w(z)$ , выражающая корни уравнения

$$3w^5 - 25w^3 + 60w - z = 0$$

через параметр  $z$ , не может быть выражена в радикалах.

**351.** Доказать, что общее алгебраическое уравнение 5-й степени

$$a_0 w^5 + a_1 w^4 + a_2 w^3 + a_3 w^2 + a_4 w + a_5 = 0$$

( $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  — комплексные параметры,  $a_0 \neq 0$ ) неразрешимо в радикалах, т. е. не существует формулы, выражающей корни этого уравнения через коэффициенты с помощью операций сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в натуральную степень и извлечения корней натуральной степени.

### 352. Рассматривая уравнение

$$(3w^5 - 25w^3 + 60w - z)w^{n-5} = 0 \quad (14.2)$$

доказать, что при  $n > 5$  общее алгебраическое уравнение степени  $n$  неразрешимо в радикалах.

Результаты задач **351** и **352** составляют основное утверждение данной книги. Нами доказана следующая теорема.

**Теорема Абеля.** *При  $n \geq 5$  общее алгебраическое уравнение степени  $n$*

$$a_0 w^n + a_1 w^{n-1} + \dots + a_{n-1} w + a_n = 0$$

*неразрешимо в радикалах.*

**З а м е ч а н и е 1.** Во «Введении» была получена формула Кардано для решения общего алгебраического уравнения 3-й степени. При этом корнями уравнения являлись не все значения, задаваемые этой формулой, а лишь те, для которых выполнялось некоторое дополнительное условие. Поэтому может возникнуть вопрос, нельзя ли и для общего уравнения степени  $n$  ( $n > 5$ ) построить формулу в радикалах так, чтобы его корни являлись бы лишь частью значений, задаваемых формулой. Покажем, что этого нельзя сделать уже для уравнения (14.1).

Действительно, если значения функции  $w(z)$ , выражающей корни уравнения (14.1) через параметр  $z$ , являются частью значений некоторой функции  $w_1(z)$ , выражающейся в радикалах, то риманова поверхность функции  $w(z)$  является отдельной частью римановой поверхности функции  $w_1(z)$ . Если  $G$  — группа Галуа функции  $w_1(z)$ , то каждой подстановке группы  $G$  соответствует подстановка пяти листов, относящихся к  $w(z)$ . Это отображение является гомоморфизмом группы  $G$  на группу  $S_5$ . Так как группа  $S_5$  неразрешима, то и группа  $G$  неразрешима (см. **163**). С другой стороны, группа  $G$  должна быть разрешима как группа Галуа для функции, выражающейся в радикалах. Противоречие.

**З а м е ч а н и е 2.** Из замечания на стр. **109** вытекает, что теорема Абеля останется справедливой, если кроме радикалов разрешить использовать и некоторые другие функции, например любые однозначные аналитические функции ( $e^z$ ,  $\sin z$  и т. д.), функцию  $\operatorname{Ln} z$  и некоторые другие.

**З а м е ч а н и е 3.** Рассмотрим уравнение (14.1) только в



области действительных чисел. Пусть функция  $y()$  выражает действительные корни уравнения

$$3y^5 - 25y^3 + 60y - x = 0$$

через действительный параметр  $x$ . Нельзя ли функцию  $y()$  выразить в радикалах? Оказывается, что нельзя. Для тех, кто знаком с курсом теории аналитических функций, укажем, что это вытекает из теоремы об аналитическом продолжении. Действительно, функция  $w(z)$ , выражающая корни уравнения (14.1) через параметр  $z$ , является аналитической функцией. Поэтому, если бы функция  $y()$  выражалась в радикалах, то соответствующая формула, рассматриваемая в области комплексных чисел, задавала бы, в силу теоремы об аналитическом продолжении, функцию  $w(z)$ , т. е. функция  $w(z)$  выражалась бы в радикалах.

Следовательно, теорема Абеля останется справедливой и в том случае, если рассматривать только действительные корни общего уравнения степени  $n$  ( $n \geq 5$ ) при всевозможных действительных значениях коэффициентов. При этом, в силу замечания 2, она останется справедливой даже в том случае, если кроме радикалов разрешить использовать некоторые другие функции, например любые функции, допускающие однозначное аналитическое продолжение ( $e^x$ ,  $\sin$  и т. д.), функцию  $\ln$  и некоторые другие.

**З а м е ч а н и е 4.** Класс алгебраических функций (см. сноску на стр. 110) является достаточно богатым и интересным классом. В частности, можно показать, что все функции, выражающиеся в радикалах, являются алгебраическими. Мы доказали, что любая функция, выражающаяся в радикалах, имеет разрешимую группу Галуа (теорема 11, стр. 107). Оказывается, что если ограничиться алгебраическими функциями, то будет верно и обратное утверждение: если группа Галуа некоторой алгебраической функции разрешима, то эта функция выражается в радикалах. Таким образом, алгебраическая функция выражается в радикалах тогда и только тогда, когда ее группа Галуа разрешима. Этот результат является частным случаем общей теории Галуа (см. например, Чеботарев Н. Г., Основы теории Галуа, ОНТИ-ГТТИ, 1934).

# Указания, решения, ответы

## Глава 1

1. *Ответ.* В случаях 1 а), 1 в), 2 в), 3 а).
2. См. табл. 3.
3. См. табл. 4.
4. См. табл. 5.
5. См. табл. 6.
6. См. табл. 7, где  $e$  и  $a$  — вращения ромба вокруг центра соответственно на  $0^\circ$  и  $180^\circ$ ,  $b$  и  $c$  — отражения ромба относительно диагоналей.

Таблица 3

	$e$	$a$	$b$
$e$	$e$	$a$	$b$
$a$	$a$	$b$	$e$
$b$	$b$	$e$	$a$

Таблица 4

	$e$	$a$	$b$	$c$	$d$	$f$
$e$	$e$	$a$	$b$	$c$	$d$	$f$
$a$	$a$	$b$	$e$	$f$	$c$	$d$
$b$	$b$	$e$	$a$	$d$	$f$	$c$
$c$	$c$	$d$	$f$	$e$	$a$	$b$
$d$	$d$	$f$	$c$	$b$	$e$	$a$
$f$	$f$	$c$	$d$	$a$	$b$	$e$

Таблица 5

	$e$	$a$	$b$	$c$
$e$	$e$	$a$	$b$	$c$
$a$	$a$	$e$	$c$	$b$
$b$	$b$	$c$	$a$	$e$
$c$	$c$	$b$	$e$	$a$

Таблица 6

	$e$	$a$	$b$	$c$	$d$	$f$	$g$	$h$
$e$	$e$	$a$	$b$	$c$	$d$	$f$	$g$	$h$
$a$	$a$	$e$	$c$	$b$	$f$	$d$	$h$	$g$
$b$	$b$	$c$	$a$	$e$	$g$	$h$	$f$	$d$
$c$	$c$	$b$	$e$	$a$	$h$	$g$	$d$	$f$
$d$	$d$	$f$	$h$	$g$	$e$	$a$	$c$	$b$
$f$	$f$	$d$	$g$	$h$	$a$	$e$	$b$	$c$
$g$	$g$	$h$	$d$	$f$	$b$	$c$	$e$	$a$
$h$	$h$	$g$	$f$	$d$	$c$	$b$	$a$	$e$

Таблица 7

	$e$	$a$	$b$	$c$
$e$	$e$	$a$	$b$	$c$
$a$	$a$	$e$	$c$	$b$
$b$	$b$	$c$	$e$	$a$
$c$	$c$	$b$	$a$	$e$

7. См. табл. 7, где  $e$  и  $a$  — вращения прямоугольника вокруг центра соответственно на  $0^\circ$  и  $180^\circ$ ,  $b$  и  $c$  — отражения прямоугольника относительно прямых, проходящих через середины противоположных сторон.

8. Нет. Так как ни у одного города название не начинается с буквы  $з$ , то у этой буквы не будет прообразов.

9. *Ответ.* а)  $\varphi$  не является отображением **на**, так как, например, не существует целого  $n$  такого, что  $\varphi(n) = 5$ , т. е. у числа 5 нет прообразов; б)  $\varphi$  является отображением **на**, но не является взаимно однозначным отображением, так как у каждого неотрицательного целого

числа имеется при отображении  $\varphi(n) = |n|$  два прообраза, например, у числа 5 прообразы 5 и  $-5$  ( $\varphi(5) = \varphi(-5) = 5$ ); в)  $\varphi$  является взаимно однозначным отображением, так как числа 0, 1, 2, ... отображаются в числа 0, 2, 4, ..., а числа  $-1, -2, -3, \dots$  отображаются в числа 1, 3, 5, ...

10. Ответ.  $e^{-1} = e, a^{-1} = b, b^{-1} = a, c^{-1} = , d^{-1} = d, f^{-1} = f$ .

11. Ответ.  $g^{-1}(x) = x/2$ .

12. Пусть данная группа преобразований содержит преобразование  $g$ . Тогда по определению группы преобразований она содержит также преобразование  $g^{-1}$  и преобразование  $g^{-1} \cdot g = e$ .

13. Из определений преобразования  $e$  и произведения преобразований получаем  $(eg)(A) = e(g(A)) = g(A)$  и  $(ge)(A) = g(e(A)) = g(A)$  для любого элемента  $A$ . Поэтому  $eg = g$  и  $ge = g$ .

14.  $((g_1 g_2) g_3)(A) = (g_1 g_2)(g_3(A)) = g_1(g_2(g_3(A)))$ ;

$(g_1(g_2 g_3))(A) = g_1((g_2 g_3)(A)) = g_1(g_2(g_3(A)))$

15. 1) Нет. Единичным элементом здесь может быть только 1, и не существует элемента  $0^{-1}$ , т. е. элемента  $x$  такого, что  $0 \cdot x = x \cdot 0 = 1$ .

2) Да.

16. Да.

17. а) Нет. Среди натуральных чисел нет единичного элемента  $x$  такого, что  $n + x = x + n = n$  для любого натурального  $n$ . (Если же рассматривать натуральные числа вместе с нулем, то у всех элементов, кроме 0, не будет противоположных.) б) Нет. Единичным элементом может быть только 1, но тогда у всех элементов, кроме 1, не будет обратных.

18. Пусть  $e_1$  и  $e_2$  — два единичных элемента. Тогда  $e_1 a = a$  и  $a e_2 = a$  для любого элемента  $a$ . Поэтому  $e_1 e_2 = e_2$  и  $e_1 e_2 = e_1$ . Отсюда  $e_1 = e_2$ .

19. Пусть элемент  $a$  имеет два обратных элемента  $a_1$  и  $a_2$ . Тогда  $(a_1 a) a_2 = e a_2 = a_2$  и  $a_1 (a a_2) = a_1 e = a_1$ . Но в силу ассоциативности  $(a_1 a) a_2 = a_1 (a a_2)$ . Поэтому  $a_1 = a_2$ .

20. 1)  $ee = e$ . 2)  $a^{-1} a = a a^{-1} = e$ .

21. Проведем доказательство методом математической индукции. Для  $n = 3$  утверждение задачи верно, так как в этом случае можно построить только два произведения:  $(a_1 a_2) a_3$  и  $a_1 (a_2 a_3)$  и по условию задачи  $(a_1 a_2) a_3 = a_1 (a_2 a_3)$ . Пусть утверждение задачи верно для всех  $n$  таких, что  $3 \leq n < k$ . Докажем, что тогда оно верно и для  $n = k$ . Пусть дано произвольное правильно построенное произведение  $A$ , содержащее  $k$  сомножителей  $a_1, a_2, \dots, a_k$ . В нем имеется операция умножения, которая выполняется последней, и, следовательно, произведение  $A$  представимо в виде  $A = (A_1) \cdot (A_2)$ , где  $A_1$  и  $A_2$  — правильно построенные произведения, содержащие соответственно  $l$  и  $k - l$  сомножителей, причем  $l < k$  и  $k - l < k$ . Так как  $l < k$  и  $k - l < k$ , то по предположению индукции произведение  $A_1$  задает тот же элемент, что и произведение  $(\dots((a_1 \cdot a_2) \cdot a_3) \cdot \dots \cdot a_{l-1}) \cdot a_l$ , а  $A_2$  — тот же элемент, что и произведение  $(\dots((a_{l+1} \cdot a_{l+2}) \cdot a_{l+3}) \cdot \dots \cdot a_{k-1}) \cdot a_k$ . Следовательно, произведение  $A$  задает тот же элемент, что и произведение

$$(\dots((a_1 \cdot a_2) \cdot a_3) \cdot \dots \cdot a_l) \cdot (\dots((a_{l+1} \cdot a_{l+2}) \cdot a_{l+3}) \cdot \dots \cdot a_k).$$

Пусть

$$\begin{aligned} & (\dots((a_1 \cdot a_2) \cdot a_3) \cdot \dots \cdot a_{l-1}) \cdot a_l = a, \\ & (\dots((a_{l+1} \cdot a_{l+2}) \cdot a_{l+3}) \cdot \dots \cdot a_{k-2}) \cdot a_{k-1} = b. \end{aligned}$$

Тогда  $A$  задает элемент  $a \cdot (b \cdot a_k)$ . Но в силу ассоциативности  $a \cdot (b \times a_k) = (a \cdot b) \cdot a_k$ . Произведение  $a \cdot b$  задано у нас как правильно построенное произведение, содержащее  $k-1 < k$  сомножителей. Поэтому по предположению индукции

$$ab = (\dots((a_1 \cdot a_2) \cdot a_3) \cdot \dots \cdot a_{k-2}) \cdot a_{k-1}.$$

Отсюда произведение  $A$  задает элемент

$$a \cdot (b \cdot a_k) = (a \cdot b) \cdot a_k = (\dots((a_1 \cdot a_2) \cdot a_3) \cdot \dots \cdot a_{k-1}) \cdot a_k.$$

Что и требовалось доказать.

**22.** Ответ. 1) Да, 2) да, 3) нет, 4) да, 5) да.

**23.** 1)  $(ab)(b^{-1}a^{-1}) = a(bb^{-1})a^{-1} = aea^{-1} = aa^{-1} = e$  и  $(b^{-1}a^{-1}) \times (ab) = b^{-1}(a^{-1}a)b = b^{-1}eb = b^{-1}b = e$ . 2) Доказывается индукцией по  $n$ : если для  $n-1$  уже доказано, то  $(a_1 \cdot \dots \cdot a_n)^{-1} = (\text{по пункту 1}) = = a_n^{-1} \cdot (a_1 \cdot \dots \cdot a_{n-1})^{-1} = a_n^{-1} \cdot a_{n-1}^{-1} \cdot \dots \cdot a_1^{-1}$ .

**24.** Пусть  $ax = b$  для некоторого элемента  $x$ . Тогда, умножая обе части равенства на  $a^{-1}$  слева, получим  $a^{-1}ax = a^{-1}b$  и  $x = a^{-1}b$ . Таким образом, решением уравнения  $ax = b$  может быть только один элемент  $a^{-1}b$ . Этот элемент действительно является решением, так как  $a(a^{-1}b) = (aa^{-1})b = b$ . Точно так же доказывается, что уравнение  $ya = b$  имеет единственное решение  $y = ba^{-1}$ .

**25.** Так как  $aa = e$  для любого элемента  $a$ , то для любых элементов  $b$  и  $c$  имеем  $(bc)(bc) = e$ . Умножим обе части этого равенства слева на  $b$  и справа на  $c$ . Получим  $bcbcc = bec$ . Так как  $bb = e$  и  $cc = e$ , то получаем  $(ec)(be) = (be)c$  и  $cb = bc$ . Так как  $b$  и  $c$  — любые элементы группы  $G$ , то эта группа коммутативная.

**26.** Надо доказать, что  $a^m \cdot (a^{-1})^m = (a^{-1})^m \cdot a^m = e$ . Имеем  $a^m (a^{-1})^m = a^{m-1}a \cdot a^{-1} \cdot (a^{-1})^{m-1} = a^{m-1} \cdot e \cdot (a^{-1})^{m-1} = a^{m-1} \times (a^{-1})^{m-1} = \dots = a \cdot a^{-1} = e$ . Точно так же доказывается, что  $(a^{-1})^m \cdot a^m = e$ . (Для большей строгости надо применить принцип математической индукции.)

**27.** Рассмотрим несколько случаев: а)  $m > 0$ ,  $n > 0$ , тогда  $a^m \times a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_m \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m+n} = a^{m+n}$ ; б)  $m < 0$ ,  $n < 0$ ,

$m = -k$  ( $k > 0$ ),  $n = -l$  ( $l > 0$ ), тогда  $a^m \cdot a^n = a^{-k} \cdot a^{-l} = (a^{-1})^k \times (a^{-1})^l = (\text{см. случай а)}) = (a^{-1})^{k+l} = a^{-(k+l)} = a^{m+n}$ ; в)  $m > 0$ ,  $n < 0$ ,  $m+n \geq 0$ , тогда  $a^m \cdot a^n = (\text{см. случай а)}) = (a^{m+n} \cdot a^{-n}) \times a^{-(-n)} = a^{m+n} \cdot a^{-n} \cdot (a^{-n})^{-1} = a^{m+n}$ ; г)  $m > 0$ ,  $n < 0$ ,  $m+n < 0$ , тогда  $a^m \cdot a^n = (\text{см. б)}) = a^m \cdot (a^{-m} \cdot a^{m+n}) = a^m \cdot (a^m)^{-1} \cdot a^{m+n} = a^{m+n}$ . Случай  $m < 0$ ,  $n > 0$  разбирается аналогично случаям в) и г). Случай  $m = 0$ , или  $n = 0$  легко проверяются.

**28.** Рассмотрим несколько случаев:

а)  $n > 0$ , тогда  $(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot \dots \cdot a^m}_n = (\text{см. 27}) = \overbrace{a^{m+m+\dots+m}}^n = a^{mn}$ ; б)  $n < 0$ ,  $m > 0$ ,  $n = -l$  ( $l > 0$ ), тогда  $(a^m)^n = ((a^m)^l)^{-1} = (\text{см. случай а)}) = (a^{ml})^{-1} = (\text{так как } ml > 0) = a^{-ml} = a^{mn}$ ; в)  $n < 0$ ,  $m < 0$ ,  $n = -l$  ( $l > 0$ ),  $m = -k$  ( $k > 0$ ), тогда  $(a^m)^n = (((a^k)^{-1})^{-1})^l =$

$= (\text{см. 20}) = (a^k)^l = (\text{см. случай а)}) = a^{kl} = a^{mn}$ . Случаи  $m = 0$  или  $n = 0$  легко проверяются.

**29. Ответ.** В группе симметрий треугольника (см. 3)  $a, b$  порядка 3,  $c, d, f$  порядка 2; квадрата (см. 5)  $b, c$  порядка 4,  $a, d, f, g, h$  порядка 2; ромба (см. решение 6) все элементы (отличные от  $e$ ) порядка 2.

**30.** 1) Пусть  $a^k = a^l$ , где  $0 \leq k \leq n-1$ ,  $0 \leq l \leq n-1$  и  $k > l$ . Умножим обе части равенства справа на  $a^{-l}$ . Получим  $a^k \cdot a^{-l} = a^l \cdot a^{-l}$  и (см. 27)  $a^{k-l} = e$ . Так как  $0 < k-l \leq n-1$ , то получаем противоречие с тем, что порядок элемента  $a$  равен  $n$ .

2) Любое целое число  $m$  можно представить в виде  $m = nt + r$ , где  $0 \leq r \leq n-1$  и  $t$  — некоторое целое число. Тогда  $a^m = a^{nt+r} = (\text{см. 27}) = a^{nt} \cdot a^r = (\text{см. 28}) = (a^n)^t \cdot a^r = (\text{так как } a^n = e) = a^r$ , где  $0 \leq r \leq n-1$ .

**31. Указание.** Образующий элемент — поворот на угол  $2\pi/n$ .

**32. Ответ.** В группе вращений треугольника образующие:  $a$  — вращение на  $120^\circ$  и  $b$  — вращение на  $240^\circ$ , в группе вращений квадрата:  $b$  — вращение на  $90^\circ$  и  $c$  — вращение на  $270^\circ$ .

**33.** Пусть  $m = nd + r$ , где  $0 \leq r \leq n-1$ . Тогда (см. решение 30 2))  $a^m = a^r$ . Но  $a^r = e$  тогда и только тогда (см. 30 1)), когда  $r = 0$ . Отсюда  $a^m = e$  тогда и только тогда, когда  $m = nd$ .

**34.**  $(a^m)^p = a^{mp} = (a^p)^m = e^m = e$ . Поэтому (см. 33) порядок элемента  $a^m$  должен быть делителем числа  $p$ . Так как  $p$  — простое число, то отсюда следует утверждение задачи.

**35.**  $n/d$  и  $m/d$  — целые числа, поэтому  $(a^m)^{n/d} = a^{mn/d} = (a^n)^{m/d} = e^{m/d} = e$ . Если же  $k$  — такое натуральное число, что  $(a^m)^k = a^{mk} = e$ , то (см. 33)  $mk$  должно делиться на  $n$  и  $m/d \cdot k$  должно делиться на  $n/d$ . Так как числа  $m/d$  и  $n/d$  взаимно просты, то  $k$  должно делиться на  $n/d$ . Следовательно, наименьшим натуральным  $k$  таким, что  $(a^m)^k = e$  является  $k = n/d$ .

**36.** Пусть  $a$  — поворот против часовой стрелки на угол  $2\pi/12$ . Тогда все элементы рассматриваемой группы — это  $e, a, a^2, \dots, a^{11}$ . Для того чтобы элемент  $a^m$  был образующим, надо, чтобы его порядок был равен 12, и, следовательно, числа  $m$  и 12 (см. 35) должны быть взаимно просты. Поэтому  $a^m$  будет образующим при  $m = 1, 5, 7, 11$ .

**Ответ.** Образующими являются повороты на углы  $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$ .

**37.** Пусть  $a^k = a^l$  и  $k > l$ . Тогда  $a^k \cdot a^{-l} = a^l \cdot a^{-l}$  и  $a^{k-l} = e$ , в противоречие с тем, что  $a$  — элемент бесконечного порядка.

**38. Указание.** Если рассматривается группа по сложению, то под  $a^m$  понимается сумма  $a + a + \dots + a$  ( $m$  слагаемых) и под  $a^{-1}$  понимается  $-a$ . Образующими будут 1 и  $-1$ .

**39.** а) См. табл. 8, б) см. табл. 9, в) см. табл. 10.

Таблица 8

+	0	1
0	0	1
1	1	0

Таблица 9

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

Таблица 10

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

**40.** Докажем, что выполняются все свойства группы: 1) для любых

остатков  $a, b, c$  имеем  $(a + b) + c = a + (b + c)$  по модулю  $n$ , так как и справа и слева получится остаток от деления на  $n$  числа  $a + b + c$ ; 2) единичным элементом является 0, так как  $m + 0 = 0 + m = m$  для любого остатка  $m$ ; 3) если  $m \neq 0$ , то обратным (противоположным) для  $m$  элементом будет  $n - m$ , так как по модулю  $n$  имеем  $m + (n - m) = (n - m) + m = 0$ ; обратным для элемента 0 будет он сам. Эта группа циклическая с образующим 1, так как наименьшее  $k$  такое, что  $\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_k = 0$  по модулю  $n$ , равно  $n$ .

**41.** Так как  $a^m \cdot a^r = a^k$ , то  $a^m \cdot a^r \cdot a^{-k} = a^k \cdot a^{-k}$  и  $a^{(m+r)-k} = e$ . Следовательно (см. **33**),  $(m + r) - k$  делится на  $n$ , т. е.  $m + r$  и  $k$  дают при делении на  $n$  одинаковые остатки.

**42.** *Ответ.* Изоморфны 1) и 4) (рассмотрите отображение  $\varphi$ :  $\varphi(e) = 0, \varphi(a) = 2, \varphi(b) = 1, \varphi(c) = 3$ ) и изоморфны 2) и 3) (рассмотрите отображение  $\varphi$ :  $\varphi(e) = e, \varphi(a) = a, \varphi(b) = b, \varphi(c) = c$  (см. решения **6** и **7**)).

**43.** Так как  $\varphi$  — взаимно однозначное отображение, то  $\varphi^{-1}$  существует и является взаимно однозначным отображением. Пусть  $c$  и  $d$  — произвольные элементы группы  $G_2$ . Существуют (единственные) элементы  $a$  и  $b$  в группе  $G_1$  такие, что  $\varphi(a) = c$  и  $\varphi(b) = d$ . Так как  $\varphi$  — изоморфизм, то  $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) = cd$  (произведения берутся в соответствующих группах). Отсюда  $\varphi^{-1}(cd) = ab = \varphi^{-1}(c)\varphi^{-1}(d)$ . Так как  $c$  и  $d$  — произвольные элементы группы  $G_2$ , то  $\varphi^{-1}$  — изоморфизм.

**44.** Так как  $\varphi_1: G_1 \rightarrow G_2$  и  $\varphi_2: G_2 \rightarrow G_3$  — взаимно однозначные отображения, то и  $\varphi_2\varphi_1: G_1 \rightarrow G_3$  — взаимно однозначное отображение. Пусть  $a$  и  $b$  — произвольные элементы группы  $G_1$ . Тогда  $(\varphi_2\varphi_1)(ab) = \varphi_2(\varphi_1(ab)) = \varphi_2(\varphi_1(a) \cdot \varphi_1(b)) = \varphi_2(\varphi_1(a)) \cdot \varphi_2(\varphi_1(b)) = ((\varphi_2\varphi_1)(a)) \cdot ((\varphi_2\varphi_1)(b))$  и, следовательно,  $\varphi_2\varphi_1$  — изоморфизм (произведения берутся в соответствующих группах).

**45.** У к а з а н и е. Воспользуйтесь результатом задачи **41**. Изоморфизм:  $\varphi(a^m) = m$ .

**46.** У к а з а н и е. Воспользуйтесь результатом задачи **27**. Изоморфизм:  $\varphi(a^m) = m$ .

**47.** Пусть  $\varphi(e_G) = x$ . Тогда  $x \cdot x = \varphi(e_G) \cdot \varphi(e_G) =$  (так как  $\varphi$  — изоморфизм)  $= \varphi(e_G \cdot e_G) = \varphi(e_G) = x$ , т. е.  $x^2 = x$ . Умножив обе части этого равенства на  $x^{-1}$  в группе  $F$ , получим  $x^2x^{-1} = xx^{-1}$  и  $x = e_F$ .

**48.**  $\varphi(g)\varphi(g^{-1}) =$  (так как  $\varphi$  — изоморфизм)  $= \varphi(g \cdot g^{-1}) = \varphi(e_G) =$  (см. **47**)  $= e_F$ . Отсюда  $\varphi(g^{-1}) = [\varphi(g)]^{-1}$ .

**49.** Пусть  $n$  — натуральное число. Тогда  $\varphi(g^n) = \varphi(\underbrace{g \cdot \dots \cdot g}_n) =$  (так как  $\varphi$  — изоморфизм)  $= \underbrace{\varphi(g) \cdot \dots \cdot \varphi(g)}_n = h^n$ . Пусть  $n_1$  и  $n_2$  —

порядки элементов  $g$  и  $h$ . Тогда  $\varphi(g^{n_2}) = h^{n_2} = e_F$  и (см. **47**)  $g^{n_2} = e_G$ . Отсюда  $n_1 \leq n_2$ . С другой стороны,  $h^{n_1} = \varphi(g^{n_1}) = \varphi(e_G) = e_F$ , откуда  $n_2 \leq n_1$ . Следовательно,  $n_1 = n_2$ .

**50.** *Ответ.* а) одна группа —  $\mathbb{Z}_2$ , б) одна группа  $\mathbb{Z}_3$ .

Решение. а) Пусть  $a$  — элементы группы и  $e$  — единичный элемент. Тогда  $e \cdot e = e, e \cdot a = a \cdot e = a$  и остается задать только  $a \cdot a$ . Если  $a \cdot a = a = a \cdot e$ , то (см. **24**)  $a = e$  — противоречие. Значит,  $a^2 = e$  и имеется только одна группа, содержащая 2 элемента. Это цикличе-

ская группа  $\mathbb{Z}_2$ .

б) Пусть  $e, a, b$  — элементы группы и  $e$  — единичный элемент. Нужно задать, чему равны произведения  $ab, ba, aa, bb$ . Если  $ab = a$ , то  $b = e$  — противоречие, если  $ab = b$ , то  $a = e$  — противоречие. Значит,  $ab = e$  и точно так же  $ba = e$ . Если  $a^2 = a$ , то  $a = e$  — противоречие; если  $a^2 = e = ab$ , то  $a = b$  — противоречие. Значит  $a^2 = b$  и точно так же  $b^2 = a$ . Следовательно, существует только одна группа, содержащая три элемента. Так как  $a^3 = a^2 \cdot a = ba = e$ , то эта группа с элементами  $e, a, b = a^2$  — циклическая группа  $\mathbb{Z}_3$ .

**51.** Ответ. Например, группа вращений квадрата не изоморфна группе симметрий ромба, так как в первой есть элемент порядка 4, а во второй нет (см. 49).

**52.** Рассмотрим отображение  $\varphi(x) = 2^x$ . Если  $x$  принимает всевозможные действительные значения, то  $2^x$  при этом принимает ровно по одному разу все положительные действительные значения. Поэтому  $\varphi$  — взаимно однозначное отображение множества всех действительных чисел на множество всех положительных действительных чисел. При этом для любых действительных чисел  $x$  и  $y$  имеем  $\varphi(x + y) = 2^{x+y} = 2^x \cdot 2^y = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$  и, следовательно,  $\varphi$  — изоморфизм группы всех действительных чисел по сложению на группу всех положительных действительных чисел по умножению \*).

**53.** Пусть  $y$  — произвольный элемент группы  $G$ , тогда  $\varphi_a(a^{-1}y) = aa^{-1}y = y$ , поэтому  $\varphi_a$  — отображение группы  $G$  на всю группу  $G$ . Если  $\varphi_a(x) = \varphi_a(y)$ , то  $ax = ay$  и  $x = y$ , поэтому  $\varphi_a$  — взаимно однозначное отображение группы  $G$  на себя.

**54.**  $(\varphi_a \varphi_b)(x) = \varphi_a(\varphi_b(x)) = \varphi_a(bx) = abx = \varphi_{ab}(x)$  для любого элемента  $x$ , поэтому  $\varphi_a \varphi_b = \varphi_{ab}$ . Так как  $\varphi_a(a^{-1}x) = aa^{-1}x = x$ , то  $(\varphi_a)^{-1}(x) = a^{-1}x = \varphi_{a^{-1}}(x)$  для любого элемента  $x$ , поэтому  $(\varphi_a)^{-1} = \varphi_{a^{-1}}$ . Следовательно, мы имеем группу преобразований (см. определение группы преобразований, стр. 20).

**55.** Рассмотрим отображение  $\psi$  такое, что  $\psi(a) = \varphi_a$ . Так как  $\varphi_a(e) = ae = a$  и  $\varphi_b(e) = be = b$ , то  $\varphi_a \neq \varphi_b$  при  $a \neq b$ . Поэтому  $\psi$  — взаимно однозначное отображение. Кроме того,  $\psi(ab) = \varphi_{ab} = (\varphi_a \varphi_b) = \psi(a)\psi(b)$ . Следовательно,  $\psi$  — изоморфизм.

**56.** а) Пусть  $e_G$  и  $e_H$  — единичные элементы соответственно в группе  $G$  и в подгруппе  $H$ . В подгруппе  $H$  имеет место равенство  $e_H e_H = e_H$ . По определению подгруппы это равенство верно также и в группе  $G$ . Кроме того, в группе  $G$  выполняется равенство  $e_G e_H = e_H$ . Отсюда в группе  $G$  получаем  $e_H e_H = e_G e_H$  и (см. 24)  $e_H = e_G$ .

б) Пусть  $a$  — произвольный элемент подгруппы  $H$ , и пусть  $a_G^{-1}$  и  $a_H^{-1}$  — обратные к нему элементы соответственно в группе  $G$  и в подгруппе  $H$ . Тогда в подгруппе  $H$  имеем  $a_H^{-1}a = e_H = (\text{см. выше}) = e_G$ . По определению подгруппы это равенство верно также и в

---

\*) Вместо основания 2 можно было взять любое основание  $a > 0$  ( $a \neq 1$ ), так как любое отображение  $\varphi(x) = a^x$  является изоморфизмом.

группе  $G$ . Кроме того, в группе  $G$  имеем  $a_G^{-1}a = e_G$ . Отсюда в группе  $G$  получаем  $a_H^{-1}a = a_G^{-1}a$  и  $a_H^{-1} = a_G^{-1}$ .

**57.** Необходимость вытекает из результата задачи **56** и определения подгруппы.

Достаточность. По свойству 1 бинарная операция группы  $G$  является также бинарной операцией и для  $H$ . Элемент  $e_G$ , который содержится в  $H$  по свойству 2, является единичным элементом в  $H$ , так как  $e_G a = a e_G = a$  для любого элемента  $a$  группы  $G$  и, в частности, для всех элементов из  $H$ . Если  $a$  — произвольный элемент из  $H$ , то элемент  $a_G^{-1}$ , который содержится в  $H$  по свойству 3), является обратным к  $a$  в  $H$ , так как  $a_G^{-1}a = aa_G^{-1} = e_G = e_H$ . Ассоциативность, очевидно, имеет место. Следовательно,  $H$  — подгруппа группы  $G$ .

**58.** Ответ (обозначения см. в примерах 1–4). 1) Подгруппа вращений  $\{e, a, b\}$ , 3 подгруппы отражений относительно высот:  $\{e, c\}$ ,  $\{e, d\}$ ,  $\{e, f\}$ , 2 тривиальные подгруппы:  $\{e\}$  и вся группа; 2) подгруппа вращений  $\{e, a, b, c\}$ , подгруппа центральных симметрий  $\{e, a\}$ , 4 подгруппы отражений относительно осей симметрии:  $\{e, d\}$ ,  $\{e, f\}$ ,  $\{e, g\}$ ,  $\{e, h\}$ , еще 2 подгруппы:  $\{e, a, d, f\}$  и  $\{e, a, g, h\}$ , 2 тривиальные подгруппы:  $\{e\}$  и вся группа.

**59.** Ответ. Пусть данные группы содержат элементы  $\{e, a, a^2, \dots, a^{n-1}\}$  ( $n = 5, 8, 15$ ). Тогда подгруппами будут: а)  $\{e\}$ ,  $\mathbb{Z}_5$ ; б)  $\{e\}$ ,  $\{e, a^4\} \cong \mathbb{Z}_2$ ,  $\{e, a^2, a^4, a^6\} \cong \mathbb{Z}_4$ ,  $\mathbb{Z}_8$ ; в)  $\{e\}$ ,  $\{e, a^5, a^{10}\} \cong \mathbb{Z}_3$ ,  $\{e, a^3, a^6, a^9, a^{12}\} \cong \mathbb{Z}_5$ ,  $\mathbb{Z}_{15}$  (см. **60**).

**60.** Пусть подгруппа  $H$  отлична от  $\{e\}$  и пусть  $a^d$  — элемент с наименьшим положительным показателем степени среди всех элементов подгруппы  $H$ . Тогда в  $H$  содержатся также все элементы вида  $a^{kd} = (a^d)^k$  при любом целом  $k$ . Пусть  $a^m$  — произвольный элемент подгруппы  $H$ . Разделим  $m$  на  $d$  с остатком:  $m = td + r$ , где  $0 \leq r \leq d - 1$ . Тогда в  $H$  содержится элемент  $a^m \cdot a^{-td} = a^{m-td} = a^r$ . Если  $r > 0$ , то получаем противоречие с тем, что  $d$  — наименьший показатель в  $H$ . Значит,  $r = 0$  и  $m$  делится на  $d$ . Так как элемент  $a^n = e$  входит в  $H$ , то  $d$  является делителем  $n$ . Таким образом, подгруппа  $H$  имеет вид, указанный в задаче.

**61.** Решение такое же, как и у задачи **60**.

**62.** Если некоторый элемент группы имеет бесконечный порядок, то порожденная им бесконечная циклическая подгруппа содержит бесконечно много подгрупп (см. **61**), которые также являются подгруппами исходной группы. Если же порядки всех элементов конечны, то рассмотрим циклические подгруппы, порожденные следующими элементами: сначала произвольным элементом  $a_1$ , затем элементом  $a_2$ , не вошедшим в построенную подгруппу, затем элементом  $a_3$ , не вошедшим в обе построенные подгруппы, и т. д. Этот процесс можно будет продолжать неограниченно, так как все построенные подгруппы конечны.

**63.** Пусть  $H_1, H_2, \dots, H_m$  — подгруппы некоторой группы  $G$  и  $H$  — их пересечение. Тогда (см. **57**): 1) если  $a$  и  $b$  содержатся в  $H$ , то  $a$  и  $b$  содержатся во всех  $H_i$ . Поэтому  $ab$  также содержится во всех  $H_i$  и, следовательно, в  $H$ ; 2)  $e$  содержится во всех подгруппах  $H_i$  и, следовательно, содержится в  $H$ ; 3) если  $a$  — произвольный элемент



из  $H$ , то  $a$  содержится во всех  $H_i$ . Тогда  $a^{-1}$  также содержится во всех  $H_i$  и, следовательно, в  $H$ . В силу результата задачи 57  $H$  — подгруппа группы  $G$ .

64. Ответ.  $a$  — да,  $b$  — да,  $c$  — нет,  $d$  — нет,

65. Вершина  $A$  может перейти в любую вершину,  $B$  — в любую из оставшихся,  $C$  — в любую из двух оставшихся. Ответ.  $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ .

66. Ответ. а) Все симметрии, оставляющие на месте вершину  $D$ ;  
б)  $\left\{ e = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A & B & C & D \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & C & D & A \end{pmatrix}, d^2 = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ C & D & A & B \end{pmatrix}, d^3 = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & A & B & C \end{pmatrix} \right\}$ .

67. Придадим сначала нашему определению ориентации более симметричную форму. Мы определили ориентацию с помощью вершины  $D$ , но если задано расположение треугольника  $ABC$  относительно вершины  $D$ , то этим, как легко видеть, однозначно определяется расположение любого треугольника относительно четвертой вершины. Поэтому преобразование, сохраняющее ориентацию тетраэдра, сохраняет расположение любого треугольника относительно четвертой вершины, а преобразование, меняющее ориентацию, изменяет расположение любого треугольника относительно четвертой вершины. Ясно теперь, что произведение двух преобразований тетраэдра, сохраняющих ориентацию, так же как и произведение двух преобразований, меняющих ориентацию, сохраняет ориентацию. Если же одно преобразование сохраняет ориентацию, а второе меняет ее, то произведение этих преобразований меняет ориентацию. Так как  $e$ , очевидно, ориентацию сохраняет и  $a^{-1}a = e$  для любого преобразования  $a$ , то если  $a$  сохраняет ориентацию, то и  $a^{-1}$  сохраняет ориентацию. Следовательно (см. 57), все симметрии тетраэдра, сохраняющие ориентацию, образуют подгруппу в группе всех симметрий тетраэдра. Так как вершина  $D$  может перейти в любую вершину, после чего треугольник  $ABC$  может занять любое из трех положений, то эта подгруппа содержит  $4 \cdot 3 = 12$  элементов.

68. Ответ. а) Подгруппа вращений относительно оси, проходящей через середины противоположных ребер; б) подгруппа вращений вокруг высоты, опущенной из вершины  $D$  на плоскость треугольника  $ABC$ .

69. Используя ассоциативность в  $G$  и  $H$ , докажем ассоциативность в  $G \times H$ . Имеем

$$\begin{aligned} ((g_1, h_1)(g_2, h_2))(g_3, h_3) &= (g_1g_2, h_1h_2)(g_3, h_3) = \\ &= ((g_1g_2)g_3, (h_1h_2)h_3) = (g_1(g_2g_3), h_1(h_2h_3)) = \\ &= (g_1, h_1)(g_2g_3, h_2h_3) = (g_1, h_1)((g_2, h_2)(g_3, h_3)). \end{aligned}$$

Далее  $(e_G, e_H)(g, h) = (e_Gg, e_Hh) = (g, h)$  и  $(g, h)(e_G, e_H) = (ge_G, he_H) = (g, h)$ . Поэтому пара  $(e_G, e_H)$  — единичный элемент в  $G \times H$ . Кроме того,  $(g^{-1}, h^{-1})(g, h) = (g^{-1}g, h^{-1}h) = (e_G, e_H)$  и  $(g, h)(g^{-1}, h^{-1}) = (gg^{-1}, hh^{-1}) = (e_G, e_H)$ . Поэтому  $(g^{-1}, h^{-1})$  — элемент, обратный к  $(g, h)$  в  $G \times H$ . Таким образом,  $G \times H$  обладает всеми свойствами группы.

70. Ответ.  $nk$ .

71. Указание. Проверьте, что отображение  $\varphi$  такое, что  $\varphi((g, h)) = (h, g)$ , — изоморфизм группы  $G \times H$  на группу  $H \times G$ .

**72. Ответ.** Все элементы вида  $(g, e_H)$  образуют подгруппу в  $G$ , изоморфную группе  $G$ . Все элементы вида  $(e_G, h)$  образуют подгруппу, изоморфную группе  $H$ .

**73.** Имеем:  $(g_1, h_1)(g_2, h_2) = (g_1g_2, h_1h_2) = (g_2g_1, h_2h_1) = (g_2, h_2) \times (g_1, h_1)$ .

**74.** 1) Если:  $(g_1, h_1)$  и  $(g_2, h_2)$  содержатся в  $G_1 \times H_1$ , то  $g_1, g_2$  и  $g_1g_2$  содержатся в  $G_1$  и  $h_1, h_2$  и  $h_1h_2$  содержатся в  $H_1$ . Поэтому в  $G_1 \times H_1$  содержится элемент  $(g_1g_2, h_1h_2) = (g_1, h_1)(g_2, h_2)$ .

2) Так как  $G_1$  и  $H_1$  — подгруппы соответственно в  $G$  и  $H$ , то  $e_G$  содержится в  $G_1$  и  $e_H$  содержится в  $H_1$ . Поэтому в  $G_1 \times H_1$  содержится  $(e_G, e_H)$  — единственный элемент группы  $G \times H$ .

3) Если элемент  $(g, h)$  содержится в  $G_1 \times H_1$ , то  $g$  содержится в  $G_1$  и  $h$  содержится в  $H_1$ . Так как  $G_1$  и  $H_1$  — подгруппы, то  $g_G^{-1}$  содержится в  $G_1$  и  $h_H^{-1}$  содержится в  $H_1$ . Поэтому в  $G_1 \times H_1$  содержится  $(g_G^{-1}, h_H^{-1})$  — элемент, обратный к  $(g, h)$  в группе  $G \times H$ .

В силу результата задачи **57**  $G_1 \times H_1$  — подгруппа группы  $G \times H$ .

**75.** Нет. Рассмотрим следующий пример. Пусть  $G = \{e_1, c\}$  и  $H = \{e_2, d\}$  — две циклические группы второго порядка. Тогда  $\{(e_1, e_2), (c, d)\}$  — подгруппа группы  $G \times H$ , не представляемая указанным в задаче способом.

**76.** Пусть данный ромб имеет вершины  $ABCD$ . Пусть  $G = \{e_1, g\}$  — группа преобразований элементов  $A$  и  $C$ , а  $H = \{e_2, h\}$  — группа преобразований элементов  $B$  и  $D$ . Тогда отображение  $\varphi$  такое, что (обозначения см. в решении **6**)

$$\varphi(e) = (e_1, e_2), \quad \varphi(a) = (g, h), \quad \varphi(b) = (e_1, h), \quad \varphi(c) = (g, e_2)$$

будет, легко видеть, изоморфизмом группы симметрий ромба на группу  $G \times H \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ .

**77.** 1) Пусть  $(e_1, g)$  и  $(e_2, h, h^2)$  — данные группы. Найдем порядок элемента  $a = (g, h)$ :  $a^2 = (g^2, h^2) = (e_1, h^2) \neq (e_1, e_2)$ ,  $a^3 = (g, e_2) \neq (e_1, e_2)$ ,  $a^4 = (e_1, h) \neq (e_1, e_2)$ ,  $a^5 = (g, h^2) \neq (e_1, e_2)$ ,  $a^6 = (e_1, e_2)$ . Так как группа  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$  содержит только 6 элементов, то  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \cong \mathbb{Z}_6$ .

2) Пусть  $(g, h)$  — произвольный элемент группы  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ . Тогда  $(g, h)^4 = (g^4, h^4) = (e_1, e_2)$ . Поэтому в  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$  нет элемента порядка 8 и, следовательно, группа  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$  не изоморфна  $\mathbb{Z}_8$ .

**78.** Пусть  $g$  — образующий в  $\mathbb{Z}_m$ , а  $h$  — образующий в  $\mathbb{Z}_n$ , и пусть  $r$  — порядок элемента  $(g, h)$  в группе  $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ . Так как  $(g, h)^{mn} = (g^{mn}, h^{mn}) = (e_1, e_2)$ , то  $r \leq mn$ . А так как  $(g^r, h^r) = (g, h)^r = (e_1, e_2)$ , то (см. **33**)  $r$  делится на  $m$  и на  $n$ . Если  $m$  и  $n$  взаимно просты, то получаем, что  $r = mn$  и  $(g, h)$  — образующий в группе  $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ . Следовательно,  $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{mn}$ .

Если же  $m$  и  $n$  не взаимно просты, то для их наименьшего общего кратного  $k$  имеем  $k < mn$ . Пусть  $k = mk_1$  и  $k = nk_2$ . Если  $g$  и  $h$  — произвольные элементы групп  $\mathbb{Z}_m$  и  $\mathbb{Z}_n$ , то  $g^m = e_1$  и  $h^n = e_2$ . Поэтому  $(g, h)^k = (g^{mk_1}, h^{nk_2}) = (e_1, e_2)$ . Так как  $k < mn$ , то получаем, что в этом случае в группе  $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$  нет элементов порядка  $mn$  и, следовательно, группы  $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$  и  $\mathbb{Z}_{mn}$  не изоморфны.

**79. Ответ** (см. § 1, примеры 1 и 2), а)  $\{e, a, b\}$ ,  $\{c, d, f\}$ ; б)  $\{e, c\}$ ,  $\{a, f\}$ ,  $\{b, d\}$ .

**80.** Так как  $x = xe$  и  $e$  содержится в  $H$ , то элемент  $x$  содержится в классе  $xH$ .

**81.** По условию  $y = xh_1$ , где  $h_1$  — некоторый элемент подгруппы  $H$ . Отсюда  $x = yh_1^{-1}$ . Пусть  $h$  — произвольный элемент подгруппы  $H$ . Тогда элементы  $h_1h$  и  $h_1^{-1}h$  принадлежат  $H$ . Поэтому элемент  $yh = (xh_1)h = x(h_1h)$  содержится в  $xH$ , а элемент  $xh = (yh_1^{-1})h = y(h_1^{-1}h)$  содержится в  $yH$ . Так как каждый элемент из  $yH$  содержится в  $xH$  и наоборот, то  $xH = yH$ .

**82.** Пусть элемент  $z$  входит в  $xH$  и в  $yH$ . Тогда (см. **81**)  $xH = zH$  и  $yH = zH$ . Отсюда  $xH = yH$ .

**83.** Указание. Порядок любого элемента равен порядку порожденной им циклической подгруппы. Далее воспользуйтесь теоремой Лагранжа.

**84.** Указание. Если порядок группы  $p$  — простое число, то порядок любого элемента, отличного от  $e$  (см. **83**), равен  $p$ .

**85.** Воспользуйтесь теоремой Лагранжа. *Ответ.* Две —  $\{e\}$  и вся группа.

**86.** Указание. Воспользуйтесь результатами задач **84** и **45**.

**87.** Пусть  $G$  — данная группа порядка  $m$  и  $n = md$ . *Ответ.*  $G \times \mathbb{Z}_d$  (см. **72**).

**88.** *Ответ.* Может. Например, в группе вращений тетраэдра, содержащей 12 элементов (см. **67**), нет подгрупп, содержащих 6 элементов. Доказательство см. ниже.

**Доказательство.** Группа вращений тетраэдра (см. **67**) содержит 12 элементов: тождественное преобразование  $e$ , 8 вращений (на  $120^\circ$  и  $240^\circ$ ) вокруг высот, опущенных из каждой вершины на противоположную грань, и 3 вращения (на  $180^\circ$ ) вокруг осей, проходящих через середины противоположных ребер. Предположим, что группа вращений тетраэдра содержит подгруппу, имеющую 6 элементов. Эта подгруппа должна, очевидно, содержать хотя бы одно вращение  $a$  вокруг некоторой высоты, например, опущенной из вершины  $A$ . Если  $a$  — вращение на  $120^\circ$  (или на  $240^\circ$ ), то  $a^2$  — вращение на  $240^\circ$  (на  $120^\circ$ ). Поэтому наша подгруппа должна содержать оба вращения вокруг высоты, опущенной из вершины  $A$ . Так как имеется только 3 вращения (включая тождественное преобразование), оставляющие на месте вершину  $A$ , то наша подгруппа должна содержать вращения  $b$ , переводящее вершину  $A$  в некоторую другую вершину, например в  $B$ . Тогда в подгруппе содержится также элемент  $bab^{-1}$ . Это вращение переводит вершину  $B$  в  $B$  и, кроме того,  $bab^{-1} \neq e$  (иначе  $a = b^{-1}b = e$ ). Поэтому наша подгруппа должна содержать хотя бы одно, а следовательно, и оба вращения вокруг высоты, опущенной из вершины  $B$ . Эти вращения переводят вершину  $A$  в  $C$  и в  $D$ . Отсюда, как и выше, получаем, что наша подгруппа должна содержать все вращения вокруг высот, опущенных из вершин  $C$  и  $D$ . Получили уже 9 элементов (вместе с  $e$ ). Противоречие. Значит, в группе вращений тетраэдра нет подгрупп порядка 6.

**89.** *Ответ.*

а) Левое и правое разложения совпадают —  $\{e, a, b\}, \{c, d, f\}$ ;

б) левое разложение —  $\{e, c\}, \{a, f\}, \{b, d\}$ , правое разложение —  $\{e, c\}, \{a, d\}, \{b, f\}$ .

90. Ответ. а) Оба разложения совпадают —  $\{e, a\}, \{b, c\}, \{d, f\}, \{g, h\}$ ;

б) левое разложение —  $\{e, d\}, \{b, g\}, \{a, f\}, \{c, h\}$ , правое разложение —  $\{, d\}, \{b, h\}, \{a, f\}, \{c, g\}$ .

91. Ответ. Оба разложения совпадают и содержат по 3 смежных класса: 1) все числа вида  $3k$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), 2) все числа вида  $3k + 1$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), 3) все числа вида  $3k + 2$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ).

92. Ответ. а) Две группы:  $\mathbb{Z}_4$  и  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ .

б) две группы:  $\mathbb{Z}_8$  и группа симметрий треугольника;

в) пять групп:  $\mathbb{Z}_8, \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2, (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \times \mathbb{Z}_2$ , группа симметрий квадрата, группа кватернионов с элементами  $\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k$  и таблицей умножения, показанной в табл. 11.

Таблица 11

	1	-1	$i$	$-i$	$j$	$-j$	$k$	$-k$
1	1	-1	$i$	$-i$	$j$	$-j$	$k$	$-k$
-1	-1	1	$-i$	$i$	$-j$	$j$	$-k$	$k$
$i$	$i$	$-i$	-1	1	$k$	$-k$	$-j$	$j$
$-i$	$-i$	$i$	1	-1	$-k$	$k$	$j$	$-j$
$j$	$j$	$-j$	$-k$	$k$	-1	1	$i$	$-i$
$-j$	$-j$	$j$	$k$	$-k$	1	-1	$-i$	$i$
$k$	$k$	$-k$	$j$	$-j$	$-i$	$i$	-1	1
$-k$	$-k$	$k$	$-j$	$j$	$i$	$-i$	1	-1

Решение. а) Пусть  $\{e, a, b, c\}$  — элементы искомой группы. Тогда порядки элементов  $a, b, c$  либо 2, либо 4 (см. 83). Рассмотрим несколько случаев.

1) Среди  $a, b$ , есть элемент порядка 4, тогда данная группа — циклическая группа  $\mathbb{Z}_4$ .

2) Порядки элементов  $a, b$  и  $c$  равны 2, т. е.  $a^2 = b^2 = c^2 = e$ . Посмотрим, чему в этом случае может равняться  $ab$ . Не может быть  $ab = e$  (иначе  $ab = a^2$  и  $b = a$ ),  $ab = a$  (иначе  $b = e$ ) и  $ab = b$  (иначе  $a = e$ ). Значит, может быть только  $ab = c$ . Точно так же  $ba = c$ ,  $ac = ca = b$  и  $bc = cb = a$ . Таблица умножения полностью задана и мы получаем (см. 6) группу симметрий ромба, изоморфную группе  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  (см. 76).

б) Элементы искомой группы могут иметь порядки 1, 2, 3 или 6 (см. 83). Рассмотрим несколько случаев.

1) Есть элемент порядка 6, тогда данная группа — циклическая группа  $\mathbb{Z}_6$ .

2) Все неединичные элементы порядка 2, тогда группа коммутативна (см. 25), и если  $a, b$  — элементы искомой группы, то элементы  $\{e, a, b, ab\}$  образуют подгруппу в ней. Этого быть не может (см. теорему Лагранжа) и, следовательно, этот случай не может иметь места.

3) Все неединичные элементы имеют порядок 2 или 3 и есть элемент порядка 3. Пусть  $a$  — элемент порядка 3 и  $c$  — элемент, не являющийся степенью элемента  $a$ . Тогда  $\{e, a, a^2\}$  и  $\{c, c, ca^2\}$  — два левых смежных класса по подгруппе  $\{e, a, a^2\}$  и, следовательно, все 6 элементов  $e, a, a^2, c, ca, ca^2$  различны (см. 82). Докажем, что на

этом множестве из 6 элементов можно только одним способом задать таблицу умножения. Докажем, во-первых, что  $c^2 = e$ . Действительно, не может быть  $c^2 = ca^k$  (иначе  $c = a^k$ ). Если бы было  $c^2 = a$  (или  $c^2 = a^2$ ), то было бы  $c^3 = cc^2 = ca \neq e$  (или  $c^3 = ca^2 \neq e$ ), но мы предполагаем, что все элементы имеют порядок 2 или 3. Следовательно,  $c^2 = e$ . Так как  $c$  — произвольный элемент, не входящий в подгруппу  $\{e, a, a^2\}$ , то также  $(ca)^2 = e$  и  $(ca^2)^2 = e$ . Теперь однозначно определяется произведение любых двух из выписанных выше 6 элементов. Действительно,  $a^k a^l = a^{k+l}$ ,  $(ca^k)a^l = ca^{k+l}$ ,  $(ca^k)(ca^l) = (ca^k)(ca^l)a^{l-k} = ea^{l-k} = a^{l-k}$ ,  $a^k(ca^l) = c(ca^k)(ca^l) =$  (см. выше)  $= ca^{l-k}$ . Таким образом, таблицу умножения в этом случае можно задать только одним способом так, чтобы получилась группа. Следовательно, существует только одна группа с 6 элементами, порядка всех элементов которой равны 2 и 3. Мы знаем такую группу — это группа симметрий треугольника.

в) Элементы искомой группы могут иметь порядки 1, 2, 4 или 8 (см. 83). Рассмотрим несколько случаев.

1) Есть элемент порядка 8, тогда данная группа — циклическая группа  $\mathbb{Z}_8$ .

2) Все неединичные элементы имеют порядок 2. Тогда данная группа коммутативна (см. 25). Пусть в этом случае  $a$  и  $b$  — различные элементы искомой группы, отличные от  $e$ . Тогда  $\{e, a, b, ab\}$  — подгруппа искомой группы. Если элемент  $c$  не входит в эту подгруппу, то элементы  $\{c, ac, bc, abc\}$  образуют второй правый смежный класс по подгруппе  $\{e, a, b, ab\}$  и, следовательно, все 8 элементов  $e, a, b, c, ab, ac, bc, abc$  различны. Произведение этих элементов однозначно определяется, так как группа должна быть коммутативна и  $a^2 = b^2 = c^2 = e$  (например,  $(ac)(abc) = a^2bc^2 = b$ ). Таким образом, если все элементы имеют порядок 2, то может быть только одна группа. Такая группа действительно есть — это  $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \times \mathbb{Z}_2$ .

3) Есть элемент  $a$  порядка 4 и среди элементов, отличных от  $e, a, a^2, a^3$ , есть элемент  $b$  порядка 2, т. е.  $b^2 = e$ . В этом случае  $\{e, a, a^2, a^3\}$  и  $\{b, ba, ba^2, ba^3\}$  — два левых смежных класса по подгруппе  $\{e, a, a^2, a^3\}$  и, следовательно, все 8 выписанных элементов различны. Посмотрим, какому из этих элементов может равняться произведение  $ab$ . Не может быть  $ab = a^k$  (иначе  $b = a^{k-1}$ ) и  $ab = b$  (иначе  $a = e$ ). Если  $ab = ba^2$ , то  $ab^2 = ba^2b$  и (так как  $b^2 = e$ )  $a = ba^2b$ . Тогда  $a^2 = (ba^2b)(ba^2b) = ba^2a^2b = bb = e$  — противоречие. Значит, либо  $ab = ba$ , либо  $ab = ba^3$ .

Рассмотрим 2 подслучая:

а)  $ab = ba$ . Тогда таблица умножения однозначно определяется. Действительно,  $a^k a^l = a^{k+l}$ ,  $a^k (ba^l) = ba^{k+l}$ ,  $(ba^k)a^l = ba^{k+l}$ ,  $(ba^k)(ba^l) = b^2 a^{k+l} = a^{k+l}$ . Значит, в этом случае может быть только одна группа. Такая группа действительно есть. Это группа  $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$ . Если  $e_1$  и  $g$  — единица и образующий группы  $\mathbb{Z}_4$ ,  $e_2$  и  $h$  — единица и образующий группы  $\mathbb{Z}_2$ , то достаточно положить  $a = (g, e_2)$ ,  $b = (e_1, h)$  и все указанные выше свойства будут выполняться.

б)  $ab = ba^3$ . В этом случае таблица умножения также однозначно определяется. Действительно,  $a^k a^l = a^{k+l}$ ,  $(ba^k)a^l = ba^{k+l}$ ,  $a^k b = ba^{3k}$ ,  $a^k (ba^l) = ba^{3k+l}$ ,  $(ba^k)(ba^l) = b(a^k ba^l) = b^2 a^{3k+l} = a^{3k+l}$ .

Значит, в этом случае может быть только одна группа. Такая группа действительно есть. Это группа симметрий квадрата. Достаточно положить:  $a$  — вращение на  $90^\circ$ ,  $b$  — симметрия относительно диагонали, и будут выполняться выше свойства.

4) Есть элемент  $a$  порядка 4 и все элементы, отличные от  $e$ ,  $a$ ,  $a^2$ ,  $a^3$ , также имеют порядок 4. Пусть  $b$  — произвольный из элементов, отличных от  $e$ ,  $a$ ,  $a^2$ ,  $a^3$ . Тогда элементы  $e$ ,  $a$ ,  $a^2$ ,  $a^3$ ,  $b$ ,  $ba$ ,  $ba^2$ ,  $ba^3$  все различны. Посмотрим, какому из элементов может равняться произведение  $bb$ . Не может быть  $b^2 = ba^k$  (иначе  $b = a^k$ ) и  $b^2 = e$  (так как порядок  $b$  равен 4). Если  $b^2 = a$  (или  $b^2 = a^3$ ), то  $b^4 = a^2 \neq e$  — противоречие. Значит,  $b^2 = a^2$ . Так как  $b$  — произвольный элемент, отличный от  $e$ ,  $a$ ,  $a^2$ ,  $a^3$ , то также  $(ba)^2 = (ba^2)^2 = (ba^3)^2 = a^2$ . Так как  $baba = a^2 = b^2$ , то  $aba = b$ ,  $aba^4 = ba^3$  и  $ab = ba^3$ . Таблица умножения теперь однозначно определяется. Действительно,  $a^k a^l = a^{k+l}$ ,  $(ba^k)a^l = ba^{k+l}$ ,  $a^k b = ba^{3k}$ ,  $a^k (ba^l) = ba^{3k+l}$ ,  $(ba^k)(ba^l) = b^2 a^{3k+l} = a^2 a^{3k+l} = a^{3k+l+2}$ . Итак, в этом случае может быть только одна группа. Можно проверить, что наша таблица умножения действительно задает группу. Эта группа называется группой кватернионов. Элементы ее удобно переобозначить следующим образом: вместо  $e$ ,  $a$ ,  $a^2$ ,  $a^3$ ,  $b$ ,  $ba$ ,  $ba^2$ ,  $ba^3$  — соответственно  $1$ ,  $i$ ,  $-1$ ,  $-i$ ,  $j$ ,  $-k$ ,  $-j$ ,  $k$ . Тогда умножение на  $1$ ,  $-1$  и операции со знаками будут такими же, как в алгебре. Кроме того, будет  $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ ,  $ij = -k$ ,  $ji = -k$ ,  $jk = i$ ,  $kj = -i$ ,  $ki = j$ ,  $ik = -j$ . Таблица умножения для группы кватернионов показана в табл. 11 (стр. 125).

93. Возьмем вершину, новое обозначение которой  $A$ . Тогда ее старое обозначение  $g^{-1}(A)$ . Под действием рассматриваемого преобразования эта вершина переходит в вершину, старое обозначение которой  $hg^{-1}(A)$  и новое обозначение которой  $ghg^{-1}(A)$ . Точно так же в новых обозначениях вершина  $B$  переходит в вершину  $ghg^{-1}()$  и  $C$  в  $ghg^{-1}(C)$ . Следовательно, этому преобразованию в новых обозначениях соответствует подстановка  $ghg^{-1}$ .

94.  $ghg^{-1} = h_1$  тогда и только тогда, когда  $h = g^{-1}h_1g$ . Поэтому у каждого элемента  $h_1$  при отображении  $\varphi_g$  есть, и притом единственный, прообраз. Следовательно, отображение  $\varphi_g(h) = ghg^{-1}$  — взаимно однозначное отображение группы на себя. Кроме того,  $\varphi_g(h_1h_2) = g(h_1h_2)g^{-1} = gh_1(g^{-1}g)h_2g^{-1} = (gh_1g^{-1})(gh_2g^{-1}) = \varphi_g(h_1)\varphi_g(h_2)$ . Поэтому  $\varphi_g$  — изоморфизм.

95. Ответ. В отражения относительно всех высот,

96. Ответ. Во вращения на  $120^\circ$  и на  $240^\circ$ .

97. Ответ. Разобьем все элементы группы симметрий тетраэдра на следующие классы: 1)  $e$ ; 2) все вращения вокруг высот, отличные от  $e$ ; 3) все вращения на  $180^\circ$  вокруг осей, проходящих через середины противоположных ребер; 4) все отражения относительно плоскостей, проходящих через какое-либо ребро и середину противоположного ребра; 5) все преобразования, порождающие циклическую подстановку вершин  $\left( \begin{smallmatrix} A & B & C & D \\ B & C & D & A \end{smallmatrix} \right)$ . Тогда 2 элемента могут переходить друг в друга при внутренних автоморфизмах группы симметрий тетраэдра в том и только в том случае, если они со-

держатся в одном классе.

В случае группы вращений тетраэдра классов 4 и 5 не будет, а класс 2 разобьется на 2 подкласса: 2а) все вращения вокруг высот на  $120^\circ$  против часовой стрелки (если смотреть со стороны вершины, из которой опущена высота); 2б) все вращения вокруг высот на  $240^\circ$ .

**Решение.** Пусть все элементы группы симметрий тетраэдра разбиты на классы так, как это сделано выше. Тогда эти классы характеризуются следующими свойствами: 2) все элементы порядка 3 и сохраняют ориентацию тетраэдра, 3) все элементы порядка 2 и сохраняют ориентацию, 4) все элементы порядка 2 и меняют ориентацию, 5) все элементы порядка 4 и меняют ориентацию. Так как внутренний автоморфизм является изоморфизмом (см. 94), то элементы разного порядка не могут переходить друг в друга (см. 49). Кроме того,  $h$  и  $ghg^{-1}$  либо оба меняют ориентацию, либо оба сохраняют ее (достаточно рассмотреть два случая:  $g$  сохраняет ориентацию и  $g$  меняет ориентацию). Таким образом, элементы разных классов не могут переходить друг в друга.

Пусть  $h_1$  и  $h_2$  — любые вращения на  $180^\circ$  вокруг осей, проходящих через середины противоположных ребер, и пусть  $g$  — произвольное вращение, переводящее первую ось во вторую. Тогда вращение  $gh_1g^{-1}$  переводит вторую ось в себя, не переворачивая ее, причем  $gh_1g^{-1} \neq e$  (иначе  $h_1 = g^{-1}eg = e$ ). Поэтому  $gh_1g^{-1}$  совпадает с  $h_2$ . Следовательно, любые два элемента класса 3 можно перевести друг в друга внутренним автоморфизмом в группе вращений (тем более в группе симметрий) тетраэдра.

Пусть  $h_1$  и  $h_2$  — любые отражения тетраэдра относительно плоскостей симметрии, и пусть  $g$  — произвольное вращение, переводящее первую плоскость во вторую. Тогда так же, как и выше,  $gh_1g^{-1} = h_2$ .

Если  $g_1hg_1^{-1} = h_1$  и  $g_2hg_2^{-1} = h_2$ , то  $h = g_1^{-1}h_1g_1$  и  $g_2(g_1^{-1}h_1g_1)g_2^{-1} = h_2$ . Отсюда  $(g_2g_1^{-1})h_1(g_2g_1^{-1})^{-1} = h_2$  следовательно, если  $h$  может переходить в  $h_1$  и в  $h_2$ , то  $h_1$  и  $h_2$  могут переходить друг в друга. Поэтому достаточно показать, что какой-нибудь один элемент данного класса переходит во все остальные элементы данного класса.

Возьмем  $a = \begin{pmatrix} ABCD \\ BCDA \end{pmatrix}$  — элемент класса 5 и пусть  $g_i$  ( $i = 1, \dots, 5$ ) — вращения такие, что  $g_1 = \begin{pmatrix} ABCD \\ ACDB \end{pmatrix}$ ,  $g_2 = \begin{pmatrix} ABCD \\ ADBC \end{pmatrix}$ ,  $g_3 = \begin{pmatrix} ABCD \\ CBDA \end{pmatrix}$ ,  $g_4 = \begin{pmatrix} ABCD \\ BDC A \end{pmatrix}$ ,  $g_5 = \begin{pmatrix} ABCD \\ BAD C \end{pmatrix}$ . Тогда (проверьте) элементы  $g_iag_i^{-1}$  ( $i = 1, \dots, 5$ ) вместе с элементом  $a$  дают весь класс 5.

Пусть  $b = \begin{pmatrix} ABCD \\ ACDB \end{pmatrix}$  — вращение тетраэдра на  $120^\circ$  вокруг высоты, опущенной из вершины  $A$ . Докажем, что в группе симметрий тетраэдра это вращение может переходить при внутренних автоморфизмах во все остальные вращения вокруг высот. В силу симметрии достаточно показать, что  $b$  может переходить во второе вращение вокруг той же высоты  $b^2 = \begin{pmatrix} ABCD \\ ADBC \end{pmatrix}$  и в какое-нибудь вращение

вокруг другой высоты, например,  $c = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & B & A & C \end{pmatrix}$ . Пусть  $g_1$  — симметрия и  $g_2$  — вращения такие, что  $g_1 = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A & D & B & C \end{pmatrix}$ ,  $g_2 = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & C & A & D \end{pmatrix}$ . Тогда  $g_1 b g_1^{-1} = b^2$  и  $g_2 b g_2^{-1} = c$ .

Если же в качестве  $g$  брать только вращения тетраэдра, то нетрудно проверить, что вращение вокруг некоторой высоты на  $120^\circ$  против часовой стрелки (если смотреть со стороны вершины, из которой опущена высота) не может перейти во вращение вокруг той же высоты на  $240^\circ$ . Поэтому вращения вокруг высот на  $120^\circ$  могут переходить только во вращения вокруг высот на  $120^\circ$ , а вращения на  $240^\circ$  — только во вращения на  $240^\circ$ .

**98.**  $\varphi_b(ab) = b(ab)b^{-1} = ba$ . Так как  $\varphi_b$  — изоморфизм (см. **94**), то  $ab$  и  $ba$  имеют одинаковые порядки (см. **49**).

**99.** У к а з а н и е. В этом случае для любого элемента  $a$  из подгруппы  $N$  и любого элемента  $g$  из группы  $G$  элемент  $gag^{-1} = agg^{-1} = a$  содержится в  $N$ .

**100.** Ответ. Да. Проверьте, что для любого элемента  $g$  группы симметрий квадрата  $geg^{-1} = e$  и  $gag^{-1} = a$ .

**101.** Пусть левое и правое разложения совпадают, и пусть  $a$  — произвольный элемент из  $N$ , а  $g$  — произвольный элемент группы  $G$ . Так как классы  $gN$  и  $Ng$  имеют общий элемент  $g$ , то они должны совпадать. Поэтому элемент  $ga$ , который содержится в  $gN$ , содержится также и в  $Ng$ , т. е. существует элемент  $b$  из  $N$  такой, что  $ga = bg$ . Отсюда элемент  $gag^{-1}$  содержится в  $N$  и, следовательно,  $N$  — нормальная подгруппа группы  $G$ .

Пусть теперь  $N$  — нормальная подгруппа группы  $G$ . Докажем, что  $gN = Ng$  для любого элемента  $g$  группы  $G$ . Пусть  $ga$  — произвольный элемент из  $gN$ . Тогда  $gag^{-1} = b$ , где  $b$  — некоторый элемент из  $N$ , поэтому  $ga = bg$  и, следовательно,  $ga$  (а значит, и все  $gN$ ) содержится в  $Ng$ . Пусть теперь  $cg$  — произвольный элемент из  $Ng$ . Тогда  $(g^{-1})c(g^{-1})^{-1} = d$ , где  $d$  — некоторый элемент из  $N$ . Отсюда  $cg = gd$  и, следовательно,  $cg$  (а значит, и все  $Ng$ ) содержится в  $gN$ . Таким образом,  $gN$  и  $Ng$  совпадают.

**102.** У к а з а н и е. В этом случае и левое и правое разложение содержат два класса: один — данная подгруппа, второй — все остальные элементы. Далее см. теорему 2 (стр. **35**).

**103.** Пусть  $N_1, N_2, \dots, N_s$  — нормальные подгруппы группы  $G$  и  $N$  — их пересечение. Если  $a$  — произвольный элемент из  $N$ , то  $a$  содержится во всех  $N_i$ . Поэтому если  $g$  — произвольный элемент группы  $G$ , то  $gag^{-1}$  содержится во всех  $N_i$ , и, следовательно, в  $N$ . Значит,  $N$  — нормальная подгруппа в  $G$ .

**104.** Пусть  $g$  — произвольный элемент группы  $G$ . Так как  $eg = ge$  то  $e$  входит в центр. Если  $a$  входит в центр, то  $ag = ga$ . Умножив обе части этого равенства слева и справа на  $a^{-1}$ , получим  $ga^{-1} = a^{-1}g$ . Поэтому  $a^{-1}$  также входит в центр. Если  $a$  и  $b$  входят в центр, то  $ag = ga$  и  $bg = gb$ . Поэтому  $g(ab) = (ga)b = a(gb) = (ab)g$  и, следовательно,  $ab$  также входит в центр. В силу результата задачи **57** центр — подгруппа.

Пусть  $a$  — произвольный элемент из центра и  $g$  — произвольный



элемент группы  $G$ . Тогда элемент  $gag^{-1} = agg^{-1} = a$  также принадлежит центру. Поэтому центр — нормальная подгруппа группы.

**105.** Пусть  $h_1, h_2$  — произвольные элементы соответственно из  $N_1$  и  $N_2$  и  $g_1, g_2$  — произвольные элементы соответственно из  $G_1$  и  $G_2$ . Тогда элемент  $g_1 h_1 g_1^{-1}$  содержится в  $N_1$ , а элемент  $g_2 h_2 g_2^{-1}$  содержится в  $N_2$ . Поэтому элемент  $(g_1, g_2)(h_1, h_2)(g_1, g_2)^{-1} = (g_1 h_1 g_1^{-1}, g_2 h_2 g_2^{-1}) \times (g_1^{-1}, g_2^{-1}) = (g_1 h_1 g_1^{-1}, g_2 h_2 g_2^{-1})$  содержится в  $N_1 \times N_2$ . Следовательно,  $N_1 \times N_2$  — нормальная подгруппа в  $G_1 \times G_2$ .

**106.** Так как  $x_1$  содержится в классе  $x_1 N$ , то (по условию)  $x_2$  также содержится в  $x_1 N$ . Значит, существует элемент  $h_1$  из  $N$  такой, что  $x_2 = x_1 h_1$ . Точно так же существует элемент  $h_2$  из  $N$  такой, что  $y_2 = y_1 h_2$ . Так как  $N$  — нормальная подгруппа, то  $N y_1 = y_1 N$ . Поэтому существует элемент  $h_3$  из  $N$  такой, что  $h_1 y_1 = y_1 h_3$ . Тогда  $x_2 y_1 = x_1 h_1 y_1 h_2 = x_1 y_1 h_3 h_2$ . Так как элемент  $h_3 h_2$  содержится в  $N$ , то  $x_1 y_1$  и  $x_2 y_2$  содержатся в одном смежном классе  $x_1 y_1 N$ .

**107.** Пусть  $a, b, c$  — произвольные элементы соответственно из  $T_1, T_2, T_3$ . По определению умножения смежных классов  $(T_1 T_2) T_3$  и  $T_1 (T_2 T_3)$  — это смежные классы, которые содержат соответственные элементы  $(ab)c$  и  $a(bc)$ . Так как  $(ab)c = a(bc)$ , то  $(T_1 T_2) T_3 = T_1 (T_2 T_3)$ .

**108.** Указание. В качестве представителя из класса  $E$  возьмите  $e$ .

**109.** Указание. Пусть  $a$  — произвольный элемент из класса  $T$ . В качестве  $T^{-1}$  возьмите смежный класс, который содержит элемент  $a^{-1}$ .

**110.** Легко проверить (см. табл. 2, стр. 36), что  $A^2 = B^2 = C^2 = E$ . Поэтому эта факторгруппа изоморфна группе симметрий ромба.

**111.** Будут указываться только нормальные подгруппы, отличные от  $\{e\}$  и всей группы.

а) см. **58** (1), **95**, **96**, **102**. Ответ. Нормальная подгруппа — подгруппа вращений треугольника, факторгруппа по ней изоморфна  $\mathbb{Z}_2$ .

б) см. **99**, **74**, **75**. Пусть  $\{e_1, c\} \times \{e_2, d\}$  — данная группа.

Ответ. Нормальные подгруппы: 1)  $\{(e_1, e_2), (c, e_2)\}$ , 2)  $\{(e_1, e_2), (e_1, d)\}$  3)  $\{(e_1, e_2)(c, d)\}$ . Факторгруппы во всех случаях изоморфны  $\mathbb{Z}_2$ .

в) Обозначения см. в примерах 3, 4 (стр. 17). Если нормальная подгруппа в группе симметрий квадрата содержит элемент  $b$  или  $c$ , то она содержит всю подгруппу вращений квадрата. Получаем нормальную подгруппу  $\{e, a, b, c\}$  (см. **102**), факторгруппа по которой  $\mathbb{Z}_2$ .

Имеем  $bdb^{-1} = f$  и  $bfb^{-1} = d$ . Поэтому если один из элементов  $d, f$  входит в нормальную подгруппу, то и второй также входит. Так как  $df = a$ , то в этом случае элемент  $a$  также входит в нормальную подгруппу. Получаем нормальную подгруппу  $\{e, a, d, f\}$  (см. **102**), факторгруппа по которой  $\mathbb{Z}_2$ .

Так как  $bgb^{-1} = h, bhb^{-1} = g$  и  $hg = a$ , то так же, как выше, получаем нормальную подгруппу  $\{e, a, g, h\}$ , факторгруппа по которой  $\mathbb{Z}_2$ .

Если же нормальная подгруппа не содержит элементов  $b, c, d, f, g, h$ , то она совпадает с нормальной подгруппой  $\{e, a\}$ , факторгруппа по которой изоморфна группе  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  (см. **100**, **110**).

Ответ. Нормальные подгруппы: 1)  $\{e, a, b, c\}$ , 2)  $\{e, a, d, f\}$ , 3)  $\{e,$

$a, g, h\}$ , 4)  $\{e, a\}$ . Факторгруппа в случаях 1 – 3 изоморфна  $\mathbb{Z}_2$  в случае 4 изоморфна  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ .

г) Пусть  $\{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$  данная группа. Если  $h$  – любой элемент, отличный от 1 и  $-1$ , то  $h^2 = -1$ . Поэтому любая нормальная подгруппа (отличная от  $\{1\}$ ) содержит элемент  $-1$ . Первую нормальную подгруппу получаем, если ограничимся элементами  $\{1 - 1\}$ . Разложение по ней показано в табл. 12. Так как  $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ ,

Таблица 12

1	$i$	$j$	$k$
$-1$	$-i$	$-j$	$-k$
$E$	$A$	$B$	$C$

то  $A^2 = B^2 = C^2 = E$  и следовательно, факторгруппа в этом случае изоморфна  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ . Так как элемент  $-1$  входит в любую (нетривиальную) нормальную подгруппу, то элементы  $i$  и  $-i$  либо оба входят, либо оба не входят в нормальную подгруппу. То же верно

для  $j$  и  $-j$ ,  $k$  и  $-k$ . Так как (нетривиальная) нормальная подгруппа в группе кватернионов может содержать только 2 или 4 элемента (см. теорему Лагранжа), то мы получаем еще только 3 нормальные подгруппы (см. 102):  $\{1, -1, i, -i\}$ ,  $\{1, -1, j, -j\}$ ,  $\{1, -1, k, -k\}$ . Факторгруппа в этих случаях изоморфна  $\mathbb{Z}_2$ .

Ответ. Нормальные подгруппы: 1)  $\{1, -1\}$ , 2)  $\{1, -1, i, -i\}$ , 3)  $\{1, -1, j, -j\}$ , 4)  $\{1, -1, k, -k\}$ . Факторгруппа в случае 1 изоморфна  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ , в случаях 2–4 изоморфна  $\mathbb{Z}_2$ .

112. а) См. 99, 60. Пусть  $n = dk$ . В табл. 13 показано разложение группы  $\mathbb{Z}_n = \{e, a, a^2, \dots, a^{n-1}\}$  по подгруппе  $\{e, a^d, a^{2d}, \dots, a^{(k-1)d}\}$  ( $l$  пробегает все значения от 0 до  $k - 1$ ). Элемент  $a$  принадлежит классу  $A_1$  и наименьшее положительное  $m$  такое, что  $a^m$  принадлежит классу  $E$ , равно  $d$ . Поэтому порядок элемента  $A_1$  в факторгруппе равен  $d$  и, следовательно, факторгруппа изоморфна  $\mathbb{Z}_d$ .

б) См. 99, 61. Табл. 13 дает разложение группы  $\mathbb{Z} = \{\dots, a^{-2}, a^{-1}, a, a^2, \dots\}$  по подгруппе  $\{\dots, a^{-2d}, a^{-d}, e, a^d, a^{2d}, \dots\}$  ( $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ). Так же как в случае а) получаем, что факторгруппа изоморфна  $\mathbb{Z}_d$ .

Таблица 13

$a^{dl}$	$a^{dl+1}$	$a^{dl+2}$	$\dots$	$a^{dl+(d-1)}$
$E$	$A_1$	$A_2$	$\dots$	$A_{d-1}$

113. См. 97. Некоторое множество вращений будет нормальной подгруппой группы вращений тетраэдра тогда и только тогда, когда оно состоит из нескольких классов, построенных при решении задачи 97 (для группы вращений), и является подгруппой. Если нормальная подгруппа содержит вращение (на  $120^\circ$  или  $240^\circ$ ) относительно некоторой высоты тетраэдра, то она содержит и второе вращение вокруг этой высоты и, следовательно, содержит все вращения вокруг всех высот тетраэдра. Если  $a = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A & C & D & B \end{pmatrix}$  и  $b = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ C & B & D & A \end{pmatrix}$  – вращения вокруг высот, опущенных соответственно из вершин  $A$  и  $B$ , то  $ab = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & C & B & A \end{pmatrix}$  – вращение на  $180^\circ$  вокруг оси, проходящей через

середины ребер  $AD$  и . Поэтому в этом случае нормальная подгруппа содержит также все вращения на  $180^\circ$  вокруг осей, проходящих через середины противоположных ребер и, следовательно, совпадает со всей группой вращений тетраэдра.

Таким образом, в группе вращений тетраэдра имеется только одна (нетривиальная) нормальная подгруппа, состоящая из тождественного преобразования и трех вращений на  $180^\circ$  вокруг осей, проходящих через середины противоположных ребер. Факторгруппа по этой нормальной подгруппе содержит 3 элемента и, следовательно, изоморфна  $\mathbb{Z}_3$  (см. 50).

**114.** Пусть  $(g_1, g_2)$  — произвольный элемент из  $G_1 \times G_2$  и  $(g_3, e_2)$  — произвольный элемент подгруппы  $G_1 \times \{e_2\}$ . Тогда элемент  $(g_1, g_2) \times (g_3, e_2) \cdot (g_1, g_2)^{-1} =$  (см. решение 69)  $= (g_1 g_3, g_2) \cdot (g_1^{-1}, g_2^{-1}) = = (g_1 g_3 g_1^{-1}, e_2)$  содержится в  $G_1 \times \{e\}$ . Поэтому  $G_1 \times \{e\}$  — нормальная подгруппа в  $G_1 \times G_2$ .

Пусть  $(g_1, a)$  — произвольный элемент группы  $G_1 \times G_2$ . Посмотрим, какой смежный класс по нормальной подгруппе  $G_1 \times \{e_2\}$  порождается этим элементом. Если умножить элемент  $(g_1, a)$  на все элементы нормальной подгруппы  $G_1 \times \{e_2\}$  (например, справа), то получим все элементы вида  $(g, a)$ , где  $g$  пробегает все элементы из  $G_1$ .

Обозначим этот смежный класс  $T_a$ . Таким образом, смежные классы по нормальной подгруппе  $G_1 \times \{e_2\}$  — это классы вида  $T_a$ , где  $a$  пробегает все элементы из группы  $G_2$ . Так как  $(e_1, a), (e_1, b)$  и  $(e_1, ab)$  содержатся соответственно в классах  $T_a, T_b, T_{ab}$  и  $(e_1, a) \cdot (e_1, b) = = (e_1, ab)$ , то  $T_a \cdot T_b = T_{ab}$ . Взаимно однозначное отображение  $\varphi$  группы  $G_2$  на построенную факторгруппу такое, что  $\varphi(a) = T_a$  для любого  $a$  из  $G_2$ , является изоморфизмом, так как  $\varphi(ab) = T_{ab} = T_a \cdot T_b = = \varphi(a)\varphi(b)$ .

Таким образом, факторгруппа группы  $G_1 \times G_2$  по нормальной подгруппе  $G_1 \times \{e_2\}$  изоморфна группе  $G_2$ .

**115.** См. 57. Свойство 1 из задачи 57, очевидно, выполняется. 2)  $eee^{-1}e^{-1} = e$ , поэтому  $e$  входит в коммутант. 3) Если  $k$  — коммутатор  $aba^{-1}b^{-1}$ , то  $k^{-1} = (aba^{-1}b^{-1})^{-1} =$  (см. 23)  $= bab^{-1}a^{-1}$ , т. е.  $k^{-1}$  является коммутатором. По определению коммутанта любой его элемент  $a$  представляется в виде  $a = k_1 \cdot k_2 \cdot \dots \cdot k_n$ , где все  $k_i$  — коммутаторы. Тогда  $a^{-1} = (k_1 \cdot k_2 \cdot \dots \cdot k_n)^{-1} = k_n^{-1} \cdot \dots \cdot k_2^{-1} \cdot k_1^{-1}$ , но все  $k_i^{-1}$  — коммутаторы, поэтому  $a^{-1}$  принадлежит коммутанту.

**116.** Если  $g$  — произвольный элемент группы,  $k$  — коммутатор  $aba^{-1}b^{-1}$ , то и  $gkg^{-1}$  является коммутатором. Действительно:

$$\begin{aligned} gkg^{-1} &= gaba^{-1}b^{-1}g^{-1} = ga(g^{-1}g)b(g^{-1}g)a^{-1}(g^{-1}g)b^{-1}g^{-1} = \\ &= (gag^{-1})(gbg^{-1})(gag^{-1})^{-1}(gbg^{-1})^{-1}. \end{aligned}$$

Если  $a$  — любой элемент коммутанта, то  $a = k_1 \cdot k_2 \cdot \dots \cdot k_n$ , где все  $k_i$  — коммутаторы. Поэтому  $gag^{-1} = g(k_1 \cdot k_2 \cdot \dots \cdot k_n)g^{-1} = = gk_1(g^{-1}g)k_2(g^{-1}g) \cdot \dots \cdot (g^{-1}g) \cdot k_n g^{-1} = (gk_1 g^{-1})(gk_2 g^{-1}) \cdot \dots \cdot (gk_n g^{-1})$  является произведением коммутаторов и, следовательно, содержится в коммутанте. Так как  $g$  — произвольный элемент группы, то получаем, что коммутант является нормальной подгруп-

пой группы,

**117.** У к а з а н и е. Докажите, что  $aba^{-1}b^{-1} = e$  тогда и только тогда, когда  $ab = ba$ .

**118.** а) Так как группа симметрий треугольника не коммутативна, то коммутант в ней отличен от  $\{e\}$ . Если  $g$  — произвольное преобразование треугольника, то преобразования  $g$  и  $g^{-1}$  либо оба «переворачивают» треугольник, либо оба его не переворачивают. Поэтому в произведении  $g_1g_2g_1^{-1}g_2^{-1}$  либо 0, либо 2, либо 4 сомножителя, переворачивающих треугольник, и, следовательно, всегда элемент  $g_1g_2g_1^{-1}g_2^{-1}$  не переворачивает треугольник, т. е. является вращением. Поэтому в коммутант могут входить только вращения треугольника. Так как коммутант отличен от  $\{e\}$  и является подгруппой, то получаем (см. 58), что коммутант в группе симметрий треугольника совпадает с подгруппой всех вращений треугольника.

б) Так же как в случае а), получаем, что коммутант отличен от  $\{e\}$  и содержит только вращения квадрата. Если  $g$  — произвольное преобразование квадрата, то  $g$  и  $g^{-1}$  либо оба меняют местами диагонали квадрата, либо оба переводят каждую диагональ в себя. Поэтому всегда элемент  $g_1g_2g_1^{-1}g_2^{-1}$  переводит обе диагонали в себя. Так как, кроме того, любой коммутатор является вращением квадрата, то он совпадает либо с  $e$ , либо с центральной симметрией  $a$ . Поэтому коммутант может содержать только элементы  $e$  и  $a$ , а так как он отличен от  $\{e\}$ , то он совпадает с подгруппой центральных симметрий  $\{e, a\}$ .

в) Элементы 1 и  $-1$  перестановочны со всеми остальными элементами группы кватернионов. Поэтому если один из элементов  $g_1, g_2$  совпадает с 1 или  $-1$ , то  $g_1g_2g_1^{-1}g_2^{-1} = 1$ . Если  $g$  — любой элемент, отличный от 1 и  $-1$ , то  $g \cdot (-g) = -g^2 = -(-1) = 1$ , т. е.  $g^{-1} = -g$ . Поэтому, если  $g_1$  и  $g_2$  — элементы, отличные от 1 и  $-1$ , то  $g_1g_2g_1^{-1}g_2^{-1} = g_1g_2(-g_1)(-g_2) = g_1g_2g_1g_2 = (g_1g_2)^2$ . Но квадрат любого элемента в группе кватернионов равен 1 или  $-1$ . Поэтому коммутант может содержать только элементы 1 и  $-1$ , а так как группа кватернионов не коммутативна, то коммутант отличен от  $\{1\}$ . Следовательно, коммутант —  $\{1, -1\}$ .

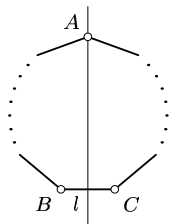


Рис. 41

**119.** Так же как при решении задачи 118 а), б), получаем, что коммутант в группе симметрий правильного  $n$ -угольника содержит только вращения.

Пусть  $n$  нечетно, и пусть  $a$  — отражение  $n$ -угольника относительно оси  $l$  (рис. 41),  $b$  — вращение  $n$ -угольника на угол  $\pi - \pi/n$  против часовой стрелки (переводящее вершину  $A$  в  $B$ ). Тогда  $aba^{-1}b^{-1}$  — вращение  $n$ -угольника, переводящее (проверьте) вершину  $B$  в  $C$ , т. е. вращение против часовой стрелки на угол  $2\pi/n$ . Так как коммутант — подгруппа, то получаем, что при  $n$  нечетном он содержит вращения на все углы, кратные  $2\pi/n$ . Так как коммутант содержит только вращения  $n$ -угольника, то при  $n$  нечетном он совпадает с подгруппой всех вращений правильного  $n$ -угольника, изоморфной  $\mathbb{Z}_n$  (см. 31).

Пусть теперь  $n = 2k$ . Впишем в правильный  $n$ -угольник  $k$ -угольник, соединив вершины через одну. Соединив через одну оставшиеся вершины, получим второй правильный  $k$ -угольник. Если  $g$  — любая

симметрия правильного  $n$ -угольника, то преобразования  $g$  и  $g^{-1}$  либо оба меняют местами построенные 2 правильных  $k$ -угольника, либо оба переводят каждый  $k$ -угольник в себя. Поэтому любой коммутатор  $g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}$  переводит каждый  $k$ -угольник в себя. Таким образом, при  $n = 2k$  коммутант может содержать только вращения на углы, кратные  $2\pi/k$ . Пусть  $c$  — вращение  $n$ -угольника против часовой стрелки на угол  $2\pi/nd$ ,  $d$  — отражение относительно оси  $m$  (рис. 42). Тогда  $cdc^{-1}d^{-1}$  является вращением, переводящим (проверьте) вершину  $C$  в  $B$ , т. е. вращением против часовой стрелки на угол  $4\pi/n = 2\pi/k$ . Поэтому коммутант содержит все вращения на углы, кратные  $2\pi/k$ , и только их. Это подгруппа вращений плоскости, переводящих правильный  $k$ -угольник в себя. Она изоморфна  $\mathbb{Z}_k = \mathbb{Z}_{n/2}$  (см. 31).

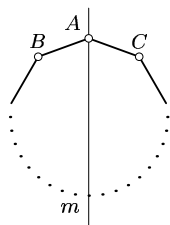


Рис. 42

**120.** Пусть  $k, l, m$  — оси, проходящие через середины противоположных ребер тетраэдра. Сопоставим им соответственно вершины  $K, L$  и  $M$  правильного треугольника  $KLM$ . При любом вращении тетраэдра либо все оси  $k, l$  и  $m$  переходят в себя, либо ни одна ось в себя не переходит (проверьте). Сопоставив подстановке осей  $k, l$  и  $m$  подстановку вершин  $K, L$  и  $M$  треугольника  $KLM$ , получим, что каждому вращению тетраэдра будет соответствовать преобразование правильного треугольника  $KLM$ , которое обязательно будет вращением треугольника. Каждому коммутатору в группе вращений тетраэдра будет при этом соответствовать коммутатор в группе вращений треугольника  $KLM$ . Так как группа вращений треугольника коммутативна, то любой коммутатор в ней равен  $e$ . Поэтому любой коммутатор в группе вращений тетраэдра должен переводить каждую из осей  $k, l, m$  в себя. Следовательно, коммутант в группе вращений тетраэдра может содержать только тождественное преобразование и вращения на  $180^\circ$  вокруг осей, проходящих через середины противоположных ребер. Так как группа вращений тетраэдра некоммутативна, то коммутант в ней отличен от  $\{e\}$ , а так как коммутант является нормальной подгруппой, то (см. 113) он совпадает с подгруппой, содержащей тождественное преобразование и все вращения на  $180^\circ$  вокруг осей, проходящих через середины противоположных ребер.

**121.** См. решение 113.

**122.** Симметрии тетраэдра  $g$  и  $g^{-1}$  либо обе меняют ориентацию тетраэдра, либо обе не меняют (см. решение 67). Поэтому любой коммутатор  $g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}$  сохраняет ориентацию тетраэдра. Таким образом, коммутант в группе симметрий тетраэдра содержит только вра-

щения тетраэдра. Если  $a = \begin{pmatrix} ABCD \\ ACDB \end{pmatrix}$  и  $b = \begin{pmatrix} ABCD \\ ABDC \end{pmatrix}$  — две сим-

метрии тетраэдра, то  $aba^{-1}b^{-1} = \begin{pmatrix} ABCD \\ ADBC \end{pmatrix}$  вращение вокруг оси, проходящей через вершину  $A$ . Так как коммутант является нормальной подгруппой (см. 116), то (см. 121) коммутант в группе симметрий тетраэдра совпадает с подгруппой вращений тетраэдра.

**123. Ответ.** 24. Для куба: 1) тождественное преобразование; 2) вращения (их 9) на  $90^\circ$ ,  $180^\circ$  и  $270^\circ$  вокруг осей, проходящих через центры противоположных граней; 3) вращения (их 6) на  $180^\circ$  вокруг осей, проходящих через середины противоположных ребер; 4) вращения (их 8) на  $120^\circ$  и  $240^\circ$  вокруг осей, проходящих через противоположные вершины.

**124.** Если соединить центры соседних граней куба, то получим октаэдр. Тогда каждому вращению куба будет соответствовать вращение октаэдра и наоборот. При этом композиции вращений куба будет соответствовать композиция вращений октаэдра и мы получаем изоморфизм группы вращений куба на группу вращений октаэдра.

**125.** Если зафиксировать положение куба и различными считать раскраски, при которых хотя бы одна грань окрашена по-разному, то всего раскрасок будет  $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 720$ , так как первой краской можно закрасить любую из 6 граней, второй краской — любую из 5 оставшихся и т. д. Так как из одной раскраски можно с помощью вращений получить 24 раскраски (см. **123**), то для куба ответ  $720/24 = 30$  способов.

Так как существует лишь 4 вращения, переводящих спичечный коробок в себя (тождественное преобразование и 3 вращения на  $180^\circ$  вокруг осей, проходящих через центры противоположных граней), то для спичечного коробка ответ  $720/4 = 180$  способов.

**126. Ответ.** Группе симметрий ромба и группе  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ .

**127. Указание.** а) см. **57**. б) Воспользуйтесь тем, что  $g$  и  $g^{-1}$  либо оба меняют тетраэдры местами, либо оба переводят каждый тетраэдр в себя.

**128.** Вращения куба  $g$  и  $g^{-1}$  либо оба меняют местами тетраэдры  $ACB_1D_1$  и  $A_1C_1BD$  (см. рис. 8), либо оба переводят каждый тетраэдр в себя. Поэтому любой коммутатор переводит оба тетраэдра в себя. Отсюда любому элементу коммутанта группы вращений куба соответствует вращение тетраэдра  $ACB_1D_1$ .

Пусть  $a$  — вращение куба на  $90^\circ$  вокруг оси, проходящей через центры граней  $ABCD$  и  $A_1B_1C_1D_1$ , и такое, что вершина  $B$  переходит в  $A$ . И пусть  $b$  — вращение куба на  $120^\circ$  вокруг оси, проходящей через вершины  $A_1$  и  $C$ , и такое, что вершина  $A$  переходит в  $D_1$ . Тогда вращение  $aba^{-1}b^{-1}$  переводит (проверьте) вершину  $A$  в себя, а вершину  $A_1$ , в  $D$ , т. е. является нетождественным вращением куба вокруг оси, проходящей через вершины  $A$  и  $C_1$ . Это вращение является также вращением тетраэдра  $ACB_1D_1$  вокруг оси, проходящей через вершину  $A$ . Отсюда легко показать (см. **121**), что коммутант в группе вращений куба содержит все вращения, переводящие тетраэдр  $ACB_1D_1$  в себя. А так как он содержит только такие вращения, получаем, что коммутант в группе вращений куба изоморфен группе вращений тетраэдра.

**129.** Пусть  $A, B$  — два произвольных смежных класса и  $a, b$  — их представители. Так как элемент  $aba^{-1}b^{-1}$  содержится в коммутанте, то  $ABA^{-1}B^{-1} = E$ . Отсюда  $AB = BA$ .

**130.** Пусть  $a, b$  — произвольные элементы группы и  $A, B$  — смежные классы, в которые они входят. Так как  $AB = BA$ , то  $ABA^{-1}B^{-1} = E$ . Поэтому коммутатор  $aba^{-1}b^{-1}$  содержится в нормальной подгруп-

не  $N$ . Таким образом,  $N$  содержит все коммутаторы, а значит, и весь коммутант.

**131.** Пусть  $h_1, h_2$  — произвольные элементы из  $N$  и  $g$  — произвольный элемент группы  $G$ . Так как  $N$  — нормальная подгруппа, то элементы  $gh_1g^{-1}$  и  $gh_2g^{-1}$  принадлежат  $N$ . Поэтому  $g(h_1h_2h_1^{-1}h_2^{-1})g^{-1} = gh_1(g^{-1}g)h_2(g^{-1}g)h_1^{-1}(g^{-1}g)h_2^{-1}g^{-1} = (gh_1g^{-1})(gh_2g^{-1})(gh_1g^{-1})^{-1} \times (gh_2g^{-1})^{-1}$  — коммутатор в нормальной подгруппе  $N$ , т. е. содержится в  $K(N)$ . Произвольный элемент  $a$  из  $K(N)$  представим в виде  $a = k_1 \cdot k_2 \cdot \dots \cdot k_s$ , где все  $k_i$  — коммутаторы в  $N$ . Но  $gag^{-1} = g(k_1 \cdot k_2 \cdot \dots \cdot k_s)g^{-1} = (gk_1g^{-1})(gk_2g^{-1}) \cdot \dots \cdot (gk_sg^{-1})$ , т. е.  $gag^{-1}$  содержится в  $K(N)$  и, следовательно,  $K(N)$  — нормальная подгруппа группы  $G$ .

**132.** Пусть  $f_1$  и  $f_2$  — произвольные элементы группы  $F$ . Так как  $\varphi$  — гомоморфизм группы  $G$  на группу  $F$ , то найдутся элементы  $g_1$  и  $g_2$  группы  $G$  такие, что  $\varphi(g_1) = f_1$  и  $\varphi(g_2) = f_2$ . Тогда  $f_1f_2 = \varphi(g_1)\varphi(g_2) = \varphi(g_1g_2) = \varphi(g_2g_1) = \varphi(g_2)\varphi(g_1) = f_2f_1$ . Значит, группа  $F$  коммутативна.

Обратное утверждение неверно. См. пример 12 (стр. 39).

**133.** Пусть  $\varphi(e_G) = x$ . Тогда  $x \cdot x = \varphi(e_G)\varphi(e_G) = \varphi(e_Ge_G) = \varphi(e_G) = x$ . Отсюда  $x \cdot x = x$  и  $x = e_F$ .

**134.**  $\varphi(a)\varphi(a^{-1}) = \varphi(aa^{-1}) = \varphi(e_G) =$  (см. 133)  $= e_F$ . Отсюда  $\varphi(a^{-1}) = [\varphi(a)]^{-1}$ .

**135.** Пусть  $a$  и  $b$  — произвольные элементы группы  $G$ . Тогда  $(\varphi_2\varphi_1)(ab) = \varphi_2(\varphi_1(ab)) = \varphi_2(\varphi_1(a) \cdot \varphi_1(b)) = \varphi_2(\varphi_1(a)) \cdot \varphi_2(\varphi_1(b)) = ((\varphi_2\varphi_1)(a)) \cdot ((\varphi_2\varphi_1)(b))$ .

**136.** Если  $\varphi(a) = A$  и  $\varphi(b) = B$ , то  $\varphi(a) \cdot \varphi(b) = A \cdot B$  (по определению умножения смежных классов)  $= \varphi(ab)$ .

**137.** см. 57. 1) Если  $a$  и  $b$  содержатся в  $\text{Кег } \varphi$ , то  $\varphi(a) = e_F$ ,  $\varphi(b) = e_F$  и  $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) = e_Fe_F = e_F$  и, следовательно,  $ab$  также содержится в  $\text{Кег } \varphi$ . 2)  $\varphi(e_G) =$  (см. 133)  $= e_F$ . Поэтому  $e_G$  содержится в  $\text{Кег } \varphi$ . 3) Если  $\varphi(a) = e_F$ , то  $\varphi(a^{-1}) =$  (см. 134)  $= [\varphi(a)]^{-1} = e_F^{-1} = e_F$ . Поэтому, если  $a$  содержится в  $\text{Кег } \varphi$ , то и  $a^{-1}$  содержится в  $\text{Кег } \varphi$ .

**138.** Пусть  $a$  — произвольный элемент из ядра  $\text{Кег } \varphi$  и  $g$  — произвольный элемент группы  $G$ . Тогда  $\varphi(a) = e_F$  и  $\varphi(gag^{-1}) = \varphi(g)\varphi(a)\varphi(g^{-1}) =$  (см. 134)  $= \varphi(g) \cdot e_F \cdot [\varphi(g)]^{-1} = e_F$ . Поэтому элемент  $gag^{-1}$  также содержится в  $\text{Кег } \varphi$  и, следовательно,  $\text{Кег } \varphi$  — нормальная подгруппа группы  $G$ .

**139.** Пусть элементы  $g_1$  и  $g_2$  лежат в одном и том же смежном классе  $g \text{ Кег } \varphi$ . Тогда найдутся элементы  $r_1$  и  $r_2$  в  $\text{Кег } \varphi$  такие, что  $g_1 = gr_1$  и  $g_2 = gr_2$ . Тогда  $\varphi(g_1) = \varphi(gr_1) = \varphi(g)\varphi(r_1) = \varphi(g)e_F = \varphi(g)\varphi(r_2) = \varphi(gr_2) = \varphi(g_2)$ .

Обратно, пусть  $\varphi(g_1) = \varphi(g_2)$ . Тогда имеем  $\varphi(g_1^{-1}g_2) = \varphi(g_1^{-1}) \times \varphi(g_2) =$  (см. 134)  $= [\varphi(g_1)]^{-1} \cdot \varphi(g_1) = e_F$ . Следовательно,  $g_1^{-1}g_2 = r$ , где  $r$  — некоторый элемент из ядра  $\text{Кег } \varphi$ . Отсюда  $g_2 = g_1r$  и поэтому оба элемента  $g_1$  и  $g_2$  содержатся в смежном классе  $g_1 \text{ Кег } \varphi$ .

**140.** Пусть  $f$  — произвольный элемент из  $F$ . Так как  $\varphi$  — отображение на, то существует элемент  $a$  группы  $G$  такой, что  $\varphi(a) = f$ . Пусть  $A$  — смежный класс, содержащий  $a$ . Тогда по определению  $\psi(A) = \varphi(a) = f$ .

**141.** Пусть  $\psi(A) = \psi(B)$ , и пусть  $a, b$  — представители классов  $A$

и  $B$ . Тогда  $\varphi(a) = \psi(A) = \psi(B) = \varphi(b)$ . Отсюда (см. 139)  $A = B$ .

**142.** Пусть  $A$  и  $B$  — произвольные смежные классы и  $a, b$  — их представители. Тогда элемент  $ab$  содержится в классе  $AB$ . Учитывая определение отображения  $\psi$ , получаем  $\psi(AB) = \varphi(ab) = (\varphi \text{ — гомоморфизм}) = \varphi(a) \cdot \varphi(b) = \psi(A) \cdot \psi(B)$ . Так как  $\psi$  — взаимно однозначное отображение (см. 141), то  $\psi$  — изоморфизм.

**143.** Пусть  $k, l, m$  — оси, проходящие через середины противоположных ребер тетраэдра. При каждой симметрии тетраэдра эти оси некоторым образом переставляются, т. е. мы имеем некоторое отображение  $\varphi_1$  группы симметрий тетраэдра в группу подстановок трех осей  $k, l, m$ . Это отображение является отображением на всю группу таких подстановок, так как нетрудно проверить (проверьте), что любую подстановку осей можно получить, подбирая подходящую симметрию тетраэдра. Легко видеть, что для любых симметрий тетраэдра  $g_1$  и  $g_2$  подстановка осей  $k, l, m$ , соответствующая симметрии  $g_1 g_2$ , является композицией подстановок, соответствующих симметриям  $g_1$  и  $g_2$ , т. е.  $\varphi_1(g_1 g_2) = \varphi_1(g_1) \varphi_1(g_2)$  и, следовательно,  $\varphi_1$  — гомоморфизм.

Каждой подстановке осей  $k, l, m$  можно естественным образом поставить в соответствие симметрию правильного треугольника  $KLM$ . Получим изоморфизм  $\varphi_2$  группы подстановок трех осей  $k, l, m$  на группу симметрий треугольника  $KLM$ .

Отображение  $\varphi_2 \varphi_1$  будет гомоморфизмом (см. 135) группы симметрий тетраэдра на всю группу симметрий треугольника  $KLM$ . Ядром этого гомоморфизма являются все симметрии тетраэдра, переводящие каждую из осей  $k, l, m$  в себя. Такими симметриями являются только тождественное преобразование тетраэдра и вращения на  $180^\circ$  вокруг осей  $k, l, m$ . Из результата задачи 138 и теоремы 3 получаем, что эти 4 симметрии образуют нормальную подгруппу в группе симметрий тетраэдра и соответствующая факторгруппа изоморфна группе симметрий треугольника.

**144.** Пусть  $k, l, m$  — оси, проходящие через центры противоположных граней куба. Так же как при решении задачи 143, построим гомоморфизм группы вращений куба на группу симметрий правильного треугольника  $KLM$ . Ядром этого гомоморфизма будут все вращения куба, переводящие каждую из осей  $k, l, m$  в себя. Такими вращениями являются только тождественное преобразование и вращения на  $180^\circ$  вокруг осей, проходящих через центры противоположных граней. Из результата задачи 138 и теоремы 3 получаем, что эти 4 вращения образуют нормальную подгруппу в группе вращений куба и соответствующая факторгруппа изоморфна группе симметрий треугольника.

**145.** Обозначим через  $r_\alpha$  вращение плоскости вокруг точки на угол  $\alpha$  против часовой стрелки. Отображение  $\varphi(r_\alpha) = r_{n\alpha}$  является гомоморфизмом группы  $R$  на себя, так как

$$\varphi(r_\alpha r_\beta) = \varphi(r_{\alpha+\beta}) = r_{n(\alpha+\beta)} = r_{n\alpha} r_{n\beta} = \varphi(r_\alpha) \varphi(r_\beta)$$

и для любого вращения  $r_\alpha$  есть вращение  $r_{\alpha/n}$  такое, что  $\varphi(r_{\alpha/n}) = r_\alpha$ . Ядром гомоморфизма  $\varphi$  являются все вращения  $r$  такие, что  $n\alpha = 2\pi k$ , т. е.  $\alpha = 2\pi k/n$ . Это те и только те вращения плоскости, которые переводят правильный  $n$ -угольник в себя. Из результата задачи 138



и теоремы 3 получаем утверждение данной задачи.

**146.** Пусть  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  — естественные гомоморфизмы (см. стр. 40) групп  $G_1$  и  $G_2$  соответственно на факторгруппы  $G_1/N_1$  и  $G_2/N_2$ . Пусть  $\varphi$  — отображение группы  $G_1 \times G_2$  на группу  $(G_1/N_1) \times (G_2/N_2)$  такое, что  $\varphi((g_1, g_2)) = (\varphi_1(g_1), \varphi_2(g_2))$ . Это отображение является гомоморфизмом; действительно,

$$\begin{aligned}\varphi((g_1, g_2) \cdot (g_3, g_4)) &= \varphi((g_1 g_3, g_2 g_4)) = \\ &= (\varphi_1(g_1 g_3), \varphi_2(g_2 g_4)) = (\varphi_1(g_1) \varphi_1(g_3), \varphi_2(g_2) \varphi_2(g_4)) = \\ &= (\varphi_1(g_1), \varphi_2(g_2)) \cdot (\varphi_1(g_3), \varphi_2(g_4)) = \varphi((g_1, g_2)) \cdot \varphi((g_3, g_4)).\end{aligned}$$

Ядром гомоморфизма  $\varphi$  будут все пары  $(g_1, g_2)$  такие, что  $\varphi((g_1, g_2)) = (E_1, E_2)$ , где  $E_1$  и  $E_2$  — единичные элементы соответственно в факторгруппах  $G_1/N_1$  и  $G_2/N_2$ . Так как  $\varphi((g_1, g_2)) = (\varphi_1(g_1), \varphi_2(g_2))$ , то ядром гомоморфизма  $\varphi$  будут все пары  $(g_1, g_2)$  такие, что  $\varphi_1(g_1) = E_1$  и  $\varphi_2(g_2) = E_2$ . Так как  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  — естественные гомоморфизмы, то получаем, что ядром гомоморфизма  $\varphi$  будет подгруппа  $N_1 \times N_2$ . Из результата задачи 138 и теоремы 3 получаем утверждение данной задачи.

**147.** Могут. Например, группа  $\mathbb{Z}_4 = \{e, a, a^2, a^3\}$  и группа  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  содержат нормальные подгруппы соответственно  $\{e, a^2\}$  и  $\mathbb{Z}_2 \times \{e_2\}$ , изоморфные группе  $\mathbb{Z}_2$ , факторгруппы по которым также изоморфны  $\mathbb{Z}_2$ .

**148.** Может. Например, группа  $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$  где  $\mathbb{Z}_4 = \{e, a, a^2, a^3\}$ , содержит две изоморфные нормальные подгруппы  $\{e_1\} \times \mathbb{Z}_2$  и  $\{e_1\} \times \{e_2\}$ , факторгруппы по которым  $(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2)/(\{e_1\} \times \mathbb{Z}_2) \cong (\mathbb{Z}_4/\{e_1\}) \times (\mathbb{Z}_2/\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_4$  и  $(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2)/(\{e_1, a^2\} \times \{e_2\}) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  соответственно (см. 146).

**149.** Может. Пример такой бесконечной группы дан в задаче 145, где  $R/\mathbb{Z}_n \cong R$  и, очевидно,  $R/\{e\} \cong R$ .

Примером конечной группы, является, например, группа  $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$ , которая содержит нормальные подгруппы вида  $\mathbb{Z}_4 \times \{e_2\}$  и  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  факторгруппы по которым изоморфны  $\mathbb{Z}_2$  (см. 146).

**150.** см. 57. 1) Пусть  $f_1$  и  $f_2$  содержатся в  $\varphi(H)$ . Это означает, что в  $H$  найдутся элементы  $h_1$  и  $h_2$  такие, что  $\varphi(h_1) = f_1$  и  $\varphi(h_2) = f_2$ . Тогда элемент  $h_1 h_2$  содержится в  $H$  и  $\varphi(h_1 h_2) =$  (так как  $\varphi$  — гомоморфизм)  $= \varphi(h_1) \varphi(h_2) = f_1 f_2$ . Значит  $f_1 f_2$  также содержится в  $\varphi(H)$ .

2) Так как  $e_G$  содержится в  $H$  и  $\varphi(e_G) = e_F$  (см. 133), то  $e_F$  содержится в образе  $\varphi(H)$  подгруппы  $H$ .

3) Пусть элемент  $f$  содержится в  $\varphi(H)$ . Это означает, что в  $H$  найдется элемент  $h$  такой, что  $\varphi(h) = f$ . Тогда элемент  $h^{-1}$  содержится в  $H$  и  $\varphi(h^{-1}) =$  (см. 134)  $= [\varphi(h)]^{-1} = f^{-1}$ . Поэтому  $f^{-1}$  также содержится в  $\varphi(H)$ .

**151.** См. 57. 1) Пусть  $g_1$  и  $g_2$  содержатся в  $\varphi^{-1}(H)$ . Это означает, что элементы  $\varphi(g_1) = h_1$  и  $\varphi(g_2) = h_2$  содержатся в  $H$ . Тогда элемент  $h_1 h_2$  также содержится в  $H$  и  $\varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_1) \varphi(g_2) = h_1 h_2$ . Поэтому  $g_1 g_2$  содержится в  $\varphi^{-1}(H)$ .

2) Так как  $\varphi(e_G) = e_F$  (см. 133) и  $e_F$  содержится в  $H$ , то  $e_G$  содержится в  $\varphi^{-1}(H)$ .

3) Пусть  $g$  содержится в  $\varphi^{-1}(H)$ . Это означает, что элемент  $\varphi(g) = h$  содержится в  $H$ . Тогда элемент  $h^{-1}$  также содержится в  $H$  и  $\varphi(g^{-1}) = (\text{см. 134}) = [\varphi(g)]^{-1} = h^{-1}$ . Поэтому  $g^{-1}$  содержится в  $\varphi^{-1}(H)$ .

**152.** Пусть  $a$  — произвольный элемент из  $\varphi^{-1}(N)$ . Это означает, что элемент  $\varphi(a) = h$  содержится в  $N$ . Если  $g$  — произвольный элемент группы  $G$  и  $\varphi(g) = f$ , то  $\varphi(g^{-1}) = (\text{см. 134}) = [\varphi(g)]^{-1} = f^{-1}$ . Тогда элемент  $\varphi(gag^{-1}) = \varphi(g)\varphi(a)\varphi(g^{-1}) = fhf^{-1}$  содержится в  $N$ , так как  $N$  — нормальная подгруппа группы  $F$ . Поэтому элемент  $gag^{-1}$  содержится в  $\varphi^{-1}(N)$  и, следовательно,  $\varphi^{-1}(N)$  — нормальная подгруппа в группе  $G$ .

**153.** Если  $g_1$  и  $g_2$  — произвольные элементы группы  $G$  и  $\varphi(g_1) = f_1$ ,  $\varphi(g_2) = f_2$ , то (см. 134)  $\varphi(g_1^{-1}) = f_1^{-1}$ ,  $\varphi(g_2^{-1}) = f_2^{-1}$ . Отсюда  $\varphi(g_1g_2g_1^{-1}g_2^{-1}) = \varphi(g_1)\varphi(g_2)\varphi(g_1^{-1})\varphi(g_2^{-1}) = f_1f_2f_1^{-1}f_2^{-1}$ , т. е. образ любого коммутатора группы  $G$  является коммутатором в группе  $F$ . Любой элемент коммутанта  $K_1$  представим в виде  $k_1 \cdot k_2 \cdot \dots \cdot k_n$ , где все  $k_i$  — коммутаторы. Элемент  $\varphi(k_1 \cdot k_2 \cdot \dots \cdot k_n) = \varphi(k_1)\varphi(k_2) \cdot \dots \cdot \varphi(k_n)$  является произведением коммутаторов в группе  $F$  и, следовательно, содержится в коммутанте  $K_2$ . Значит,  $\varphi(K_1)$  содержится в  $K_2$ . Отсюда вытекает также, что  $K_1$  содержится в  $\varphi^{-1}(K_2)$ .

**154.** Пусть  $a$  — произвольный элемент из  $\varphi(N)$ . Это означает, что в  $N$  найдется элемент  $h$  такой, что  $\varphi(h) = a$ . Пусть  $f$  — произвольный элемент группы  $F$ . Так как  $\varphi$  — гомоморфизм **на**, то в группе  $G$  найдется элемент  $g$  такой, что  $\varphi(g) = f$ . Тогда  $\varphi(g^{-1}) = f^{-1}$  (см. 134) и  $\varphi(ghg^{-1}) = faf^{-1}$ . Так как  $N$  — нормальная подгруппа в группе  $G$ , то элемент  $ghg^{-1}$  содержится в  $N$ . Поэтому элемент  $faf^{-1}$  содержится в  $\varphi(N)$  и, следовательно,  $\varphi(N)$  — нормальная подгруппа группы  $F$ .

**155.** Пусть  $f_1f_2f_1^{-1}f_2^{-1}$  — произвольный коммутатор в  $F$ . Так как  $\varphi$  — гомоморфизм **на**, то в  $G$  найдутся элементы  $g_1$  и  $g_2$  такие, что  $\varphi(g_1) = f_1$  и  $\varphi(g_2) = f_2$ . Тогда (см. 134)  $\varphi(g_1^{-1}) = f_1^{-1}$ ,  $\varphi(g_2^{-1}) = f_2^{-1}$  и  $\varphi(g_1g_2g_1^{-1}g_2^{-1}) = \varphi(g_1)\varphi(g_2)\varphi(g_1^{-1})\varphi(g_2^{-1}) = f_1f_2f_1^{-1}f_2^{-1}$ . Так как элемент  $g_1g_2g_1^{-1}g_2^{-1}$  содержится в  $K_1$ , то коммутатор  $f_1f_2f_1^{-1}f_2^{-1}$  содержится в  $\varphi(K_1)$ . Так как  $\varphi(K_1)$  — подгруппа в  $F$  (см. 150) и содержит все коммутаторы, то  $\varphi(K_1)$  содержит весь коммутант  $K_2$ . С другой стороны,  $\varphi(K_1)$  содержится в  $K_2$  (см. 153). Поэтому  $\varphi(K_1) = K_2$ .

Равенство  $K_1 = \varphi^{-1}(K_2)$  в общем случае неверно. Например, отображение  $\varphi$  группы  $\mathbb{Z}_2 = \{e_1, a\}$  на группу  $\{e_2\}$ , состоящую из одного элемента, такое, что  $\varphi(e_1) = e_2$  и  $\varphi(a) = e_2$ , является гомоморфизмом **на**. При этом  $K_1 = \{e_1\}$ ,  $K_2 = \{e_2\}$  и  $\varphi^{-1}(K_2) = \{e_1, a\} \neq K_1$ .

**156.** *Ответ,* а) Да: группа  $\mathbb{Z}_n$  коммутативна, б) да (см. 118), в) да (см. 118), г) да (см. 118), д) да (см. 120), е) да (см. 122 и д)), ж) да (см. 128 и д)).

**157.** Произвольную фиксированную грань можно совместить с любой из 12 граней, причем пятью способами.

*Ответ.* 60.

**158.** *Ответ.* 1) 1, 2) 24, 3) 20, 4) 15.

**159.** Пусть  $l_1$  и  $l_2$  — оси одинакового типа (т. е. либо обе проходят через середины противоположных граней, либо обе проходят через противоположные вершины, либо обе проходят через середины противоположных ребер). Существует вращение  $g$  додекаэдра, переводящее

ось  $l_1$  в ось  $l_2$ . Если  $a$  — некоторое (нетождественное) вращение вокруг оси  $l_1$ , то вращение  $gag^{-1}$  переводит (проверьте) ось  $l_2$  в себя, не меняя ее направления. Поэтому  $gag^{-1}$  — это нетождественное (иначе  $a = g^{-1}g = e$  вращение вокруг оси  $l_2$ ). Таким образом, если нормальная подгруппа в группе вращений додекаэдра содержит хотя бы одно вращение вокруг некоторой оси, то она содержит хотя бы по одному вращению вокруг каждой оси того же типа. Подгруппа вращений додекаэдра вокруг некоторой оси имеет порядок (в зависимости от типа оси) 5, 3 или 2. Так как 5, 3 и 2 — простые числа, то любой элемент (отличный от  $e$ ) в такой подгруппе является образующим (см. **34**), т. е. порождает всю подгруппу. Таким образом, если нормальная подгруппа в группе вращений додекаэдра содержит хотя бы одно вращение вокруг некоторой оси, то она содержит все вращения вокруг осей того же типа.

**160.** Из результата задачи **159** следует, что нормальная подгруппа в группе вращений додекаэдра должна состоять из нескольких классов 1–4, причем класс 1 обязательно входит в нормальную подгруппу. Порядок нормальной подгруппы должен быть делителем порядка группы вращений додекаэдра (60) (см. теорему Лагранжа, стр. **31**). Легко проверить (см. **158**), что это возможно лишь в том случае, если нормальная подгруппа содержит только класс 1 или все классы.

**161.** Так как группа  $G$  некоммукативна, то коммутант  $K(G) \neq \{e\}$ . Так как  $K(G)$  — нормальная подгруппа в  $G$  (см. **116**), то при условии задачи  $K(G) = G$ . Поэтому в цепочке  $G, K(G), K_2(G) = K(K(G)), \dots$  все группы совпадают с  $G$  и, следовательно, эта цепочка никогда не заканчивается единичной группой. Отсюда группа  $G$  не является разрешимой.

**162.** Пусть группа  $G$  разрешима. Тогда существует  $n$  такое, что подгруппа  $K_n(G) = \underbrace{K(K \dots (K(G)) \dots)}_n$  является единичной.

Если  $H$  — подгруппа группы  $G$ , то  $K(H)$  содержится в  $K(G)$ , подгруппа  $K(K(H))$  содержится в  $K(K(G))$  и т. д. Так как подгруппа  $K_n(H)$  содержится в  $K_n(G)$  и подгруппа  $K_n(G)$  единичная, то и  $K_n(H)$  — единичная подгруппа. Поэтому подгруппа  $H$  разрешима.

**163.** Обозначим через  $K(G)$  коммутант в группе  $G$  и через  $K_r(G)$  подгруппу  $\underbrace{K(K \dots (K(G)) \dots)}_r$ .

на группу  $F$ , то  $\varphi(K(G)) = K(F)$  (см. **155**). Отсюда  $\varphi(K_2(G)) = K_2(F)$  и вообще  $\varphi(K_r(G)) = K_r(F)$ . Так как группа  $G$  разрешима, то для некоторого  $n$  подгруппа  $K_n(G)$  является единичной. Так как  $\varphi(K_n(G)) = K_n(F)$ , то и подгруппа  $K_n(F)$  единичная. Поэтому группа  $F$  разрешима.

**164. Ответ.** Например,  $\varphi: G \rightarrow \{e\}$ , где  $G$  — группа вращений додекаэдра.

**165.** У к а з а н и е. Рассмотрите естественный гомоморфизм (см. стр. **40**) группы  $G$  на факторгруппу  $G/N$ . Далее воспользуйтесь результатом задачи **163**.

**166.** Пусть  $K(G)$  — коммутант в группе  $G$  и

$$K_r(G) = \underbrace{K(K \dots (K(G)) \dots)}_r.$$

Рассмотрим естественный гомоморфизм  $\varphi$  (см. стр. 40) группы  $G$  на факторгруппу  $G/N$ . Тогда (см. 155)  $\varphi(K(G)) = K(G/N)$ ,  $\varphi(K_2(G)) = K_2(G/N)$  и вообще  $\varphi(K_r(G)) = K_r(G/N)$ . Так как группа  $G/N$  разрешима, то для некоторого  $n$  подгруппа  $K_n(G/N)$  будет единичной, т. е.  $K_n(G/N) = \{E\}$ . Так как  $\varphi(K_n(G)) = K_n(G/N) = \{E\}$ , то подгруппа  $K_n(G)$  содержится в нормальной подгруппе  $N$ . Группа  $N$  разрешима, поэтому для некоторого  $s$  подгруппа  $K_s(N)$  единичная. Так как  $K_n(G)$  содержится в  $N$ , то подгруппа  $K_{n+s}(G)$  содержится в  $K_s(N)$  и поэтому является единичной. Следовательно, группа  $G$  разрешима.

**167.** Из задачи 146 получаем  $(G \times F)/(G \times \{e_2\}) \cong \{e\} \times F$ . Так как группы  $G \times \{e_2\}$  и  $\{e\} \times F$  изоморфны соответственно группам  $G$  и  $F$ , а поэтому разрешимы, то (см. 166) и группа  $G \times F$  разрешима.

**168.** Так как группа  $G$  разрешима, то в цепочке коммутантов  $G, K(G), K_2(G), \dots$  при некотором  $n$  будет  $K_n(G) = \{e\}$ . Рассмотрим цепочку групп  $G, K(G), K_2(G), \dots, K_n(G)$ . Эта цепочка групп является искомой, так как каждая следующая группа является коммутантом и, следовательно, нормальной подгруппой (см. 116) в предыдущей группе, причем все факторгруппы  $K_i(G)/K_{i+1}(G)$ , а также  $G/K(G)$  коммутативны (см. 129); группа  $K_n(G) = \{e\}$  также коммутативна.

**169.** Так как по условию факторгруппа  $G_{i-1}/G_i$  коммутативна, то коммутант  $K(G_{i-1})$  содержится в  $G_i$  (см. 130). Отсюда подгруппа  $K_2(G_{i-1})$  содержится в  $K(G_i)$  и вообще подгруппа  $K_r(G_{i-1})$  содержится в  $K_{r-1}(G_i)$  при любых  $r \geq 1$  и  $1 \leq i \leq n$ . Поэтому подгруппа  $K_{n+1}(G_0)$  содержится в подгруппе  $K_n(G_1)$ , которая в свою очередь содержится в  $K_{n-1}(G_2)$ , и т. д. до  $K(G_n)$ . Следовательно, подгруппа  $K_{n+1}(G)$  содержится в  $K(G_n)$ . Но  $K(G_n) = \{e\}$  так как группа  $G_n$  по условию коммутативна. Поэтому и  $K_{n+1}(G) = \{e\}$ , т. е. группа  $G$  разрешима.

Результат задачи 169 можно также получить с помощью метода математической индукции, переходя от  $G_n$  к  $G_{n-1}$ , затем к  $G_{n-2}$  и т. д. и используя результат задачи 166.

**170.** По условию группа  $G$  разрешима. Это означает, что при некотором  $n$  подгруппа  $K_n(G)$  является единичной и, следовательно, подгруппа  $K_{n-1}(G)$  является коммутативной. Так как  $K_{n-1}(G)$  — нормальная подгруппа в группе  $G$  (см. 131), то можно рассмотреть факторгруппу  $G_1 = G/K_{n-1}(G)$ . Докажем, что подгруппа  $K_{n-2}(G_1)$  коммутативна. Рассмотрим для этого естественный гомоморфизм (см. стр. 40)  $\varphi: G \rightarrow G_1$  с ядром  $K_{n-1}(G)$ . Так как  $\varphi$  — гомоморфизм на, то (см. 155)  $\varphi(K(G)) = K(G_1)$ . Отсюда  $\varphi(K_2(G)) = K_2(G_1)$  и т. д. Таким образом,  $K_{n-1}(G_1) = \varphi(K_{n-1}(G)) = \{e\}$  (так как  $K_{n-1}(G)$  — ядро гомоморфизма  $\varphi$ ) =  $\{e_{G_1}\}$ . Так как  $K_{n-1}(G_1) = K(K_{n-2}(G_1)) = \{e_{G_1}\}$ , то (см. 117) подгруппа  $K_{n-2}(G_1)$  коммутативна.

Обозначим через  $G_2$  факторгруппу  $G_1/K_{n-2}(G_1)$ . Так же как выше, можно показать, что подгруппа  $K_{n-3}(G_2)$  коммутативна. Положим  $G_3 = G_2/K_{n-3}(G_2)$  и т. д. При этом факторгруппа  $G_{n-1} = G_{n-2}/K(G_{n-2})$  будет коммутативна (см. 129). Цепочка групп  $G, G_1, G_2, \dots, G_{n-1}$  вместе с нормальными подгруппами  $K_{n-1}(G),$

$K_{n-2}(G_1), K_{n-3}(G_2), \dots, K(G_{n-2})$  является искомой.

**171.** Пусть  $G_0, G_1, \dots, G_n$  — цепочка групп с указанными в задаче **170** свойствами. Докажем, что все группы в этой цепочке и, в частности,  $G_0$  разрешимы. Доказательство проведем индукцией от  $n$  к 0. Группа  $G_n$  разрешима, так как по условию она коммутативна и, следовательно,  $K(G_n) = \{e\}$ . Пусть уже доказано, что группа  $G_i$  разрешима. Докажем, что тогда и группа  $G_{i-1}$  разрешима. Группа  $G_{i-1}$  содержит по условию коммутативную и, следовательно, разрешимую, нормальную подгруппу  $N_{i-1}$ , причем факторгруппа  $G_{i-1}/N_{i-1} \cong G_i$  разрешима по предположению индукции. Но тогда группа  $G_{i-1}$  также разрешима в силу результата задачи **166**. Таким образом, по принципу математической индукции можно утверждать, что все группы в цепочке  $G_0, G_1, \dots, G_n$  разрешимы. В частности, разрешима группа  $G_0$ .

**172.** Произвольную подстановку степени  $n$  можно записать в виде  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$ , где все  $i_m$  различны и принимают значения от 1 до  $n$ . В качестве  $i_1$  можно выбрать любое из  $n$  значений. После этого в качестве  $i_2$  можно выбрать любое из  $n-1$  оставшихся значений и т. д. Поэтому число различных подстановок степени  $n$  равно  $n(n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$

**173.** Если  $a = \begin{pmatrix} 1234\dots n \\ 2314\dots n \end{pmatrix}$  и  $b = \begin{pmatrix} 1234\dots n \\ 1324\dots n \end{pmatrix}$ , то  $ab = \begin{pmatrix} 1234\dots n \\ 2134\dots n \end{pmatrix}$ , а  $ba = \begin{pmatrix} 1234\dots n \\ 3214\dots n \end{pmatrix}$ , т. е.  $ab \neq ba$  (Напомним, что в произведении  $ab$  сначала выполняется подстановка  $b$ , затем  $a$ .)

**174.** Пусть элемент  $i_1$  переходит в  $i_2, i_2$  в  $i_3$  и т. д. Пусть  $i_r$  — первый повторившийся элемент. Если предположить, что  $i_r = i_k$ , где  $2 \leq k \leq r-1$ , то получим, что два различных элемента  $i_{k-1}$  и  $i_{r-1}$  переходят при подстановке в один и тот же элемент — противоречие. Следовательно,  $i_r = i_1$ , и мы получаем один цикл. Начиная с любого элемента, не вошедшего в этот цикл, построим второй цикл и т. д. Нетрудно понять, что данная подстановка является произведением полученных независимых циклов.

Пусть теперь данная подстановка является произведением каких-нибудь независимых циклов. Если один из циклов переводит элемент  $i_1$  в  $i_2$  и элементы  $i_1$  и  $i_2$  не встречаются в других циклах, то все произведение будет также переводить  $i_1$  в  $i_2$ . Поэтому элемент  $i_2$ , следующий за  $i_1$  в цикле, содержащем  $i_1$ , однозначно определяется данной подстановкой. Таким образом, все циклы однозначно определяются. Заметим, что если циклы не обязательно независимы, то разложение может быть не единственным. Например,

$$\begin{pmatrix} 123 \\ 231 \end{pmatrix} = (12) \cdot (23) \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 123 \\ 231 \end{pmatrix} = (13) \cdot (12).$$

**175. Указание.** Проверьте, что выполняется равенство

$$(i_1 i_2 \dots i_m) = (i_1 i_m) \cdot (i_1 i_{m-1}) \cdot \dots \cdot (i_1 i_3) \cdot (i_1 i_2).$$

**176. Указание.** Пусть  $i < j$ . Проверьте, что выполняется равен-

$$(i, j) = (i, i+1) \cdot (i+1, i+2) \cdot \dots \cdot (j-2, j-1) \cdot (j-1, j) \times \\ \times (j-2, j-1) \cdot (j-3, j-2) \cdot \dots \cdot (i+1, i+2) \cdot (i, i+1).$$

**177.** Пары, образующие инверсии — (3, 2), (3, 1), (2, 1) (5, 4), (5, 1), (4, 1). *Ответ.* 6.

**178.** Если числа  $i$  и  $j$  меняются местами и  $k_1, k_2, \dots, k_s$  — все числа, стоящие между  $i$  и  $j$ , то свойство образовывать или не образовывать инверсию заменяется на противоположное только у следующих пар чисел:  $(i, j)$ ,  $(i, k_r)$ ,  $(k_r, j)$  где  $r = 1, 2 \dots s$ , т. е. у  $2s + 1$  пар. Так как число  $2s + 1$  нечетное, то в результате четность числа инверсий изменится.

**179.** *Ответ.* Подстановка четная (6 инверсий).

**180.** Так как

$$\begin{pmatrix} \dots & r & \dots & s & \dots \\ \dots & i_r & \dots & i_s & \dots \end{pmatrix} \cdot (r, s) = \begin{pmatrix} \dots & r & \dots & s & \dots \\ \dots & i_s & \dots & i_r & \dots \end{pmatrix},$$

то нижняя строка в произведении получается из нижней строки исходной подстановки перестановкой двух чисел  $i_r$  и  $i_s$ . В силу результата задачи **178** полученная и исходная подстановки имеют разную четность.

**181.** Любая подстановка разлагается в произведение транспозиций (см. **174**, **175**). Пусть произвольная подстановка  $a$  разложена в произведение  $m$  транспозиций  $a = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_m$ . Можно записать  $a = e \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_m$ . Так как четная подстановка  $e$   $m$  раз умножается на транспозиции, то получаем (см. **180**), что при  $m$  четном  $a$  — четная подстановка, при  $m$  нечетном  $a$  — нечетная подстановка.

**182.** См. указание к **175**. *Ответ.* а) Четная; б) нечетная; в) четная при нечетном  $m$ , нечетная при четном  $m$ .

**183.** У к а з а н и е. Разложите данные подстановки в произведение транспозиций (см. **181**). Посмотрите, какое число транспозиций будет в произведении данных подстановок.

**184.** Если бы подстановки  $a$  и  $a^{-1}$  имели разную четность, то (см. **183**) подстановка  $aa^{-1} = e$  была бы нечетной, что неверно.

**185.** Например,

$$(1\ 2\ 3) \cdot (2\ 3\ 4) = \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4\ 5 \dots n \\ 2\ 1\ 4\ 3\ 5 \dots n \end{pmatrix}, \\ (2\ 3\ 4) \cdot (1\ 2\ 3) = \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4\ 5 \dots n \\ 3\ 4\ 1\ 2\ 5 \dots n \end{pmatrix}.$$

**186.** Если  $a$  — четная подстановка, то и  $gag^{-1}$  — четная подстановка независимо от четности подстановки  $g$ . Поэтому  $A_n$  — нормальная подгруппа в группе  $S_n$ . Пусть  $b$  — произвольная нечетная подстановка. Докажем, что смежный класс  $bA_n$  содержит все нечетные подстановки. Пусть  $c$  — произвольная нечетная подстановка. Тогда  $b^{-1}c$  — четная подстановка. Поэтому подстановка  $c = b(b^{-1}c)$  содержится в смежном классе  $bA_n$ . Таким образом, группа  $S_n$  разлагается на два смежных класса по подгруппе  $A_n$  — все четные подстановки и все нечетные подстановки.

**187. Ответ.** Так как группа  $S_n$  разлагается на 2 смежных класса по подгруппе  $A_n$  (имеющих одинаковое число элементов), то число элементов в группе  $A_n$  равно (см. 172)

$$\frac{n!}{2} = \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n}{2}.$$

**188.** Группа  $S_2$  содержит 2 элемента и, следовательно, изоморфна коммутативной группе  $\mathbb{Z}_2$ . Группы  $S_3$  и  $S_4$  изоморфны соответственно группе симметрий треугольника и группе симметрий тетраэдра. Обе эти группы разрешимы (см. 156).

**189.** Занумеруем вершины додекаэдра так, как показано на рис. 43. В качестве искоемых тетраэдров можно взять, например, тетраэдры со следующими наборами вершин: (1, 8, 14, 16), (2, 9, 15, 17), (3, 10, 11, 18), (4, 6, 12, 19), (5, 7, 13, 20).

**190.** Подстановки 5-й степени могут разлагаться в произведение независимых циклов только следующими способами: а)  $(i_1 i_2 i_3 i_4 i_5)$  б)  $(i_1 i_2 i_3)$ , в)  $(i_1 i_2)(i_3 i_4)$ , г)  $(i_1 i_2 i_3 i_4)$ , д)  $(i_1 i_2 i_3)(i_4 i_5)$ , е)  $(i_1 i_2)$ . Учитывая результаты задач 182 и 183, получаем, что в случаях а), б), в) подстановка является четной, а в случаях г), д), е) подстановка является нечетной.

**191.** Пусть нормальная подгруппа  $N$  в группе  $A_5$  содержит некоторую подстановку  $h$  вида а) (см. 190). Без ограничения общности можно считать, что  $h = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$ . Докажем, что произвольная подстановка  $(i_1 i_2 i_3 i_4 i_5)$  вида а) также содержится в  $N$ . Если в строке  $i_1, i_2, i_3, i_4, i_5$  четное число инверсий, то подстановка  $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ i_1 & i_2 & i_3 & i_4 & i_5 \end{pmatrix}$  четная. Тогда по определению нормальной подгруппы в  $N$  содержится подстановка  $ghg^{-1} = (i_1 i_2 i_3 i_4 i_5)$ . Если в строке  $i_1, i_2, i_3, i_4, i_5$  нечетное число инверсий, то в строке  $i_1, i_4, i_2, i_5, i_3$  четное число инверсий (так как в трех парах поменялся порядок элементов). В этом случае подстановка  $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ i_1 & i_4 & i_2 & i_5 & i_3 \end{pmatrix}$  четная. Поэтому  $N$  содержит подстановку  $ghg^{-1} = (i_1 i_4 i_2 i_5 i_3)$ , а вместе с ней и подстановку  $(ghg^{-1})^2 = (i_1 i_2 i_3 i_4 i_5)$ .

Пусть теперь нормальная подгруппа  $N$  содержит подстановку  $h = (1\ 2\ 3)$  вида б) (см. 190), и пусть  $(i_1 i_2 i_3)$  — произвольная подстановка. Возьмем элементы  $i_4$  и  $i_5$  из множества  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ , не совпадающие с элементами  $i_1, i_2, i_3$ . Либо в строке  $i_1, i_2, i_3, i_4, i_5$  либо в строке  $i_1, i_2, i_3, i_5, i_4$  четное число инверсий. Поэтому одна из подстановок  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ i_1 & i_2 & i_3 & i_4 & i_5 \end{pmatrix}$  или  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ i_1 & i_2 & i_3 & i_5 & i_4 \end{pmatrix}$  является четной. Обозначив эту подстановку  $g$ , получим, что в любом случае в  $N$  содержится подстановка  $ghg^{-1} = (i_1 i_2 i_3)$ .

Если нормальная подгруппа  $N$  содержит подстановку вида в) (см. 190), например подстановку  $h = (1\ 2)(3\ 4)$ , то она содержит и произвольную подстановку  $(i_1 i_2)(i_3 i_4)$  вида в). Действительно, в этом

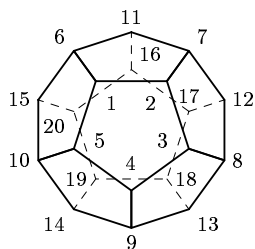


Рис. 43

случае одна из подстановок  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ i_1 & i_2 & i_3 & i_4 & i_5 \end{pmatrix}$  или  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ i_2 & i_1 & i_3 & i_4 & i_5 \end{pmatrix}$  является четной. Если  $g$  — эта подстановка, то в  $N$  содержится подстановка  $ghg^{-1} = (i_1 i_2)(i_3 i_4)$ .

**192.** Подсчитаем число подстановок каждого из видов а), б) и в) (см. 190).

а) Существует  $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$  различных последовательностей из элементов 1, 2, 3, 4, 5. Так как каждая подстановка вида а) может быть записана пятью способами (в зависимости от выбора первого элемента), то число подстановок вида а) равно  $\frac{120}{5} = 24$ .

б) Таким же рассуждением, как и в случае а), получаем, что число подстановок вида б) равно  $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3} = 20$ .

в) Подстановка вида в) может быть записана 8 способами (4 способами можно выбрать  $i_1$  и затем 2 способами  $i_2$ ). Поэтому число подстановок вида в) равно  $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{8} = 15$ .

Любая нормальная подгруппа  $N$  содержит единичный элемент. Кроме того, из результата задачи 191 следует, что в любой нормальной подгруппе группы  $A_5$  все подстановки одного истога же вида (см. 190) либо одновременно содержатся, либо одновременно не содержатся. Порядок нормальной подгруппы должен быть делителем порядка группы  $A_5(60)$ . Но при добавлении к 1 чисел 24, 20, 15 только в двух случаях получаются делители числа 60: когда ничего не добавляется и когда добавляются все три числа. Первый случай соответствует единичной подгруппе, второй случай соответствует всей группе  $A_5$ .

**193.** Такой подгруппой является, например, подгруппа, содержащая все подстановки вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \dots n \\ i_1 & i_2 & i_3 & i_4 & i_5 & 6 \dots n \end{pmatrix},$$

с четным числом инверсий в строке  $i_1, i_2, i_3, i_4, i_5$ .

## Глава II

**194.** а) *Ответ.* Нет, так как натуральные числа не образуют группы по сложению (см. 17).

б) *Ответ.* Нет, так как целые числа без нуля не образуют группу по умножению (у всех чисел кроме 1 и  $-1$  нет обратных).

в) *Ответ.* Да. Воспользуйтесь результатом задачи 57.

Решение. Так как действительные числа образуют коммутативную группу по сложению, а без нуля также коммутативную группу по умножению, то достаточно проверить, что все рациональные числа образуют подгруппу в множестве действительных чисел по сложению, а без нуля и по умножению. А это легко получить, используя результат задачи 57. Действительно: 1) если  $a$  и  $b$  — рациональные числа, то  $a + b$  и  $a \cdot b$  также рациональные числа; 2) 0 и 1 — рациональные числа; 3) если  $a$  — рациональное число, то  $-a$  и  $\frac{1}{a}$  (при  $a \neq 0$ ) — также рациональные числа. Дистрибутивность, очевидно, имеет место.



Следовательно, рациональные числа образуют поле.

г) *Ответ.* Да. Воспользуйтесь результатом задачи 57.

**Решение.** Если  $r_1 + r_2\sqrt{2} = 0$  где  $r_1$  и  $r_2$  — рациональные числа и  $r \neq 0$ , то  $\sqrt{2} = -r_1/r_2$  чего не может быть, так как  $\sqrt{2}$  не является рациональным числом. Значит, если  $r_1 + r_2\sqrt{2} = 0$  и  $r_1, r_2$  — рациональные числа, то  $r_1 = r_2 = 0$ . Все числа вида  $r_1 + r_2\sqrt{2}$  при разных парах  $(r_1, r_2)$  различны, так как если  $r_1 + r_2\sqrt{2} = r_3 + r_4\sqrt{2}$ , то  $(r_1 - r_3) + (r_2 - r_4)\sqrt{2} = 0$  и  $r_1 = r_3, r_2 = r_4$ . Докажем, что все числа вида  $r_1 + r_2\sqrt{2}$ , где  $r_1$  и  $r_2$  — рациональные числа, образуют поле. Для этого докажем, что числа вида  $r_1 + r_2\sqrt{2}$  образуют подгруппу в группе действительных чисел по сложению, а без нуля и по умножению. Воспользуемся результатом задачи 57: 1) если  $a = r_1 + r_2\sqrt{2}$  и  $b = r_3 + r_4\sqrt{2}$ , то  $a + b = (r_1 + r_3) + (r_2 + r_4)\sqrt{2}$  и  $ab = (r_1r_3 + 2r_2r_4) + (r_1r_4 + r_2r_3)\sqrt{2}$ ; 2) 0 и 1 содержатся в рассматриваемом множестве, так как  $0 = 0 + 0 \cdot \sqrt{2}$  и  $1 = 1 + 0 \cdot \sqrt{2}$ ; 3) если  $a = r_1 + r_2\sqrt{2}$ , то  $-a = (-r_1) + (-r_2)\sqrt{2}$  и (при  $r_1 + r_2\sqrt{2} \neq 0$ )  $a^{-1} = \frac{1}{r_1 + r_2\sqrt{2}} = \frac{r_1 - r_2\sqrt{2}}{(r_1 + r_2\sqrt{2})(r_1 - r_2\sqrt{2})} = \frac{r_1 - r_2\sqrt{2}}{r_1^2 - 2r_2^2} = \frac{r_1}{r_1^2 - 2r_2^2} + \left(-\frac{r_2}{r_1^2 - 2r_2^2}\right)\sqrt{2}$ . Так как дистрибутивность имеет место для всех действительных чисел, то рассматриваемое множество является полем.

**195.** Имеем  $a0 + a0 = a(0 + 0) = a0$ . Так как поле является группой по сложению, то можно к обеим частям равенства  $a0 + a0 = a0$  прибавить  $-a0$ . Получим  $a0 = 0$ . Так как умножение в поле коммутативно, то и  $0a = 0$ .

**196.** 1)  $ab + (-a)b = (a + (-a))b = 0b =$  (см. 195)  $= 0$ . Отсюда  $(-a)b = -(ab)$ . Точно так же доказывается, что  $a(-b) = -ab$ ; 2)  $(-a) \times (-b) =$  (см. пункт 1)  $= -(a(-b)) = -(-(ab)) =$  (см. 20)  $= ab$ .

**197.** Если  $ab = 0$  и  $a \neq 0$ , то существует элемент  $a^{-1}$ , обратный к  $a$ . Тогда  $a^{-1}ab = a^{-1}0 =$  (см. 195)  $= 0$ . Но  $a^{-1}ab = 1 \cdot b = b$ . Отсюда  $b = 0$ .

**198.** Ответ см. в табл. 14.

Таблица 14

$\cdot$	0	1		$\cdot$	0	1	2		$\cdot$	0	1	2	3
0	0	0		0	0	0	0		0	0	0	0	0
1	0	1		1	0	1	2		1	0	1	2	3
				2	0	2	1		1	0	2	0	2
									3	0	3	2	1

**199.** Пусть  $n$  составное, т. е.  $n = n_1n_2$ , где  $n_1 < n$  и  $n_2 < n$ . Тогда по модулю  $n$  получаем  $n_1n_2 = 0$ , но  $n_1 \neq 0$  и  $n_2 \neq 0$ . Так как в поле такого быть не может (см. 197), то при  $n$  составном остатки с операциями по модулю  $n$  не образуют поля.

Заметим теперь следующее. Пусть  $x$  и  $y$  — два натуральных числа,  $r_1, r_2$  — остатки от деления их на  $n$ , т. е.  $x = k_1n + r_1$  и  $y = k_2n + r_2$ . Тогда  $x + y = (k_1 + k_2)n + (r_1 + r_2)$  и  $xy = (k_1k_2n + k_1r_2 + k_2r_1)n + r_1r_2$ , откуда получаем, что числа  $x + y$  и  $r_1 + r_2$ , а также числа  $xy$  и  $r_1r_2$  дают при делении на  $n$  одинаковые остатки. Другими словами, мы получим одинаковый результат, если мы сначала возьмем остат-

ки от деления  $x$  и  $y$  на  $n$  и потом сложим (или умножим) их по модулю  $n$  или если мы сначала сложим (или умножим)  $x$  и  $y$  как обычные натуральные числа, а затем возьмем остаток от деления полученного числа на  $n$ . Таким образом, при вычислении некоторого выражения с операциями по модулю  $n$  можно не брать остаток от деления на  $n$  после каждой операции, а произвести вычисления сначала как с обычными натуральными числами и обычными операциями и только в конце взять остаток от деления полученного числа на  $n$ . Воспользуемся этим.

Относительно сложения по модулю  $n$  остатки образуют коммутативную группу (см. 40). Так как для любых натуральных чисел  $a, b$ ,  $c$  равны числа  $(a + b)c$  и  $ac + bc$ , а следовательно, равны и остатки от деления их на  $n$ , то по модулю  $n$  выполняется равенство  $(a + b)c = ac + bc$ , т. е. имеет место дистрибутивность. Точно так же по модулю  $n$  имеет место ассоциативность и коммутативность умножения:  $(ab)c = a(bc)$  и  $ab = ba$ . Единичным элементом по умножению является 1. Остается показать, что при  $n$  простом у каждого остатка  $a$ , отличного от 0, есть обратный, т. е. что найдется остаток  $x$  такой, что  $ax = 1$  по модулю  $n$ .

Итак, пусть  $0 < a < n$ . Рассмотрим числа  $a \cdot 0, a \cdot 1, \dots, a(n - 1)$  (умножение обычное). Разность любых двух из этих чисел  $ak - al = a(k - l)$  не делится на  $n$ , так как  $n$  простое, а  $a < n$  и  $0 < |k - l| < n$ . Таким образом, все эти  $n$  чисел дают разные и, следовательно, всевозможные остатки при делении на  $n$ . Значит, одно из этих чисел дает при делении на  $n$  остаток 1, т. е.  $ax = 1$  по модулю  $n$  для некоторого остатка  $x$ . Таким образом, при  $n$  простом все свойства поля выполняются.

**200.** Так как  $a - b = a + (-b)$ , то  $(a - b)c = (a + (-b))c = ac + (-b)c$  (см. 196)  $= ac + (-bc) = ac - bc$ .

**201.** Вычтем из равенства

$$P(x) = S_1(x)Q(x) + R_1(x)$$

равенство

$$P(x) = S_2(x)Q(x) + R_2(x).$$

Получим

$$0 = (S_1(x) - S_2(x))Q(x) + (R_1(x) - R_2(x))$$

и

$$(S_1(x) - S_2(x))Q(x) = R_2(x) - R_1(x). \quad (1)$$

Если  $S_1(x) - S_2(x) \neq 0$ , то степень многочлена, стоящего в левой части равенства (1), не меньше, чем степень многочлена  $Q(x)$ , в то время как степень многочлена, стоящего в правой части, строго меньше, чем степень многочлена  $Q(x)$ . Из этого противоречия вытекает, что должно быть  $S_1(x) - S_2(x) = 0$  и, следовательно,  $R_2(x) - R_1(x) = 0$ , т. е.  $S_1(x) = S_2(x)$  и  $R_1(x) = R_2(x)$ .

**202.** Эта группа является прямым произведением группы действительных чисел по сложению на себя (см. 69 и 73). Единичным элементом (нулем) в ней является пара  $(0, 0)$ .

**203.** Пусть  $z_1 = (a, b)$ ,  $z_2 = (c, d)$ ,  $z_3 = (e, f)$ . Тогда  $z_1 \cdot z_2 = (ac - bd, ad + bc)$  и  $z_2 \cdot z_1 = (ca - db, cb + da)$ . Но  $ac - bd = ca - db$  и  $ad + bc = cb + da$ , поэтому  $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$ .

Далее имеем:  $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = (ac - bd, ad + bc) \cdot (e, f) = (ace - bde - adf - bcf, acf - bdf + ade + bce)$  и  $z_1(z_2 \cdot z_3) = (a, b) \cdot (ce - df, cf + de) = (ace - adf - bcf - bde, acf + ade + bce - bdf)$ , т. е.  $(z_1 \cdot z_2) \times \times z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$ .

**204.** Пусть  $z = (a, b) \neq (0, 0)$ , и пусть искомое комплексное число имеет вид  $z^{-1} = (x, y)$ . Тогда  $z \cdot z^{-1} = z^{-1} \cdot z = (ax - by, ay + bx)$ . Для того чтобы было  $z \cdot z^{-1} = (1, 0)$  должны выполняться два равенства:

$$\begin{cases} ax - by = 1, \\ bx + ay = 0. \end{cases}$$

Эта система уравнений имеет ровно одно решение:

$$x = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad y = -\frac{b}{a^2 + b^2},$$

причем  $a^2 + b^2 \neq 0$ , так как  $(a, b) \neq (0, 0)$ . Таким образом,

$$(a, b)^{-1} = \left( \frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2} \right).$$

**205.** Пусть  $z_1 = (a, b)$ ,  $z_2 = (c, d)$ ,  $z_3 = (e, f)$ . Тогда  $(z_1 + z_2) \cdot z_3 = (a + c, b + d) \cdot (e, f) = (ae + ce - bf - df, af + cf + be + de) =$  и  $z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3 = (ae - bf, af + be) + (ce - df, cf + de) = (ae - bf + ce - df, af + be + cf + de)$ , откуда видно, что  $(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3$ .

**206.** Имеем  $a + bi = (a, 0) + (b, 0)(0, 1) = (a, 0) + (0, b) = (a, b)$ .

**207.** Ответ.  $(c + di) - (a + bi) = (c - a) + (d - b)i$ .

$$\begin{aligned} \text{208. } x + yi &= \frac{c + di}{a + bi} = \frac{(c + di)(a - bi)}{(a + bi)(a - bi)} = \\ &= \frac{(ac + bd) + (ad - bc)i}{a^2 + b^2} = \frac{ac + bd}{a^2 + b^2} + \frac{ad - bc}{a^2 + b^2}i \end{aligned}$$

(так как  $a + bi \neq 0$ , то  $a^2 + b^2 \neq 0$ ).

**209.** Ответ. а)  $i^3 = -i$ ; б)  $i^4 = 1$ ;

$$\text{в) } i^n = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 4k, \\ i, & \text{если } n = 4k + 1, \\ -1, & \text{если } n = 4k + 2, \\ -i, & \text{если } n = 4k + 3. \end{cases}$$

**210.** У к а з а н и е. Уравнение  $(x + yi)^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi = b$ , где  $b$  — действительное число, равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = b, \\ 2xy = 0. \end{cases}$$

Ответ. а)  $z = \pm 1$ , б)  $z = \pm i$ , в)  $z = \pm a$ , г)  $z = \pm ai$ .

**211.** а) Пусть  $z_1 = a + bi$ ,  $z_2 = c + di$ . Тогда

$$\begin{aligned} \overline{z_1 + z_2} &= \overline{(a + bi) + (c + di)} = \overline{(a + c) + (b + d)i} = \\ &= (a + c) - (b + d)i = (a - bi) + (c - di) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2. \end{aligned}$$

б)  $(z_1 - z_2) + z_2 = z_1$ . В силу а)  $\bar{z}_1 = \overline{(z_1 - z_2) + z_2} = (\overline{z_1 - z_2}) + \bar{z}_2$ . Отсюда  $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$ .

$$\text{в) } \overline{z_1 z_2} = \overline{(a+bi)(c+di)} = \overline{(ac-bd) + (bc+ad)i} = (ac-bd) - (bc+ad)i = \overline{(a-bi)(c-di)} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}.$$

$$\text{г) } \overline{z_1} = \overline{\left(\frac{z_1}{z_2} \cdot z_2\right)} = (\text{по в)}) = \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} \cdot \overline{z_2}$$

$$\text{Отсюда } \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}.$$

**212.** Из результата задачи **211** получаем

$$\begin{aligned} \overline{P(z)} &= \overline{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n} = \\ &= \overline{a_0 z^n} + \overline{a_1 z^{n-1}} + \dots + \overline{a_{n-1} z} + \overline{a_n} = \\ &= \overline{a_0} \overline{z}^n + \overline{a_1} \overline{z}^{n-1} + \dots + \overline{a_{n-1}} \overline{z} + \overline{a_n} = \\ &= (\overline{a_i} = a_i, \text{ так как все } a_i \text{ — действительные числа}) = \\ &= a_0 \overline{z}^n + a_1 \overline{z}^{n-1} + \dots + a_{n-1} \overline{z} + a_n = P(\overline{z}). \end{aligned}$$

**213.** Так как поле  $M$  содержит все действительные числа и элемент  $i_0$ , то оно содержит всевозможные элементы вида  $a + bi_0$ , где  $a, b$  — произвольные действительные числа. Обозначим множество всех элементов поля  $M$ , представимых в виде  $a + bi_0$ , через  $M'$ . Тогда, используя коммутативность, ассоциативность и дистрибутивность сложения и умножения в поле  $M$ , получим для элементов из  $M'$ :

$$(a + bi_0) + (c + di_0) = (a + c) + (bi_0 + di_0) = (a + c) + (b + d)i_0, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} (a + bi_0) \cdot (c + di_0) &= ac + adi_0 + bci_0 + bdi_0^2 = \\ &= (\text{так как } i_0^2 = -1) = (ac - bd) + (ad + bc)i_0. \end{aligned} \quad (2)$$

Пусть  $C$  — поле комплексных чисел. Рассмотрим отображение поля  $C$  в поле  $M'$  такое, что

$$\varphi(a + bi) = a + bi_0.$$

Сравнивая формулы (1), (2) с формулами (2.3), (2.4) на стр. 60, получаем, что  $\varphi$  — гомоморфизм (см. стр. 39)  $C$  в  $M$  относительно сложения и относительно умножения. Так как при этом  $\varphi(C) = M'$ , то (см. 150)  $M'$  является подгруппой в  $M$  и относительно сложения и относительно умножения. Так как в  $M$  операции сложения и умножения обладают свойствами коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности, то эти же свойства имеют место, очевидно, и в  $M'$ . Таким образом,  $M'$  — поле.

Если  $a + bi_0 = c + di_0$ , то  $(b - d)i_0 = c - a$ . Если при этом  $b - d \neq 0$ , то  $i_0 = \frac{c-a}{b-d}$  — действительное число, чего не может быть, так как квадрат никакого действительного числа не может быть равен  $-1$ . Следовательно,  $b - d = 0$ , а тогда и  $c - a = 0$ . Отсюда  $b = d$ ,  $a = c$ . Таким образом, элементы вида  $a + bi_0$  в поле  $M$  различны при различных парах  $(a, b)$ . Отсюда вытекает, что построенное выше отображение  $\varphi$  является взаимно однозначным отображением поля  $C$  на поле  $M'$ . Так как, кроме того,  $\varphi$  — гомоморфизм, то  $\varphi$  — изоморфное отображение поля  $C$  на поле  $M'$ , т. е. поле  $M'$  изоморфно полю комплексных чисел.

**214.** Пусть рассматриваемый многочлен приводим, т. е.

$$\begin{aligned} x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n = \\ = (b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m) \cdot (c_0x^k + c_1x^{k-1} + \dots + c_k), \end{aligned}$$

где  $m < n$ ,  $k < n$ , все  $b_i$  и  $c_l$  — действительные числа и  $b_0 \neq 0$ ,  $c_0 \neq 0$ . Подставим вместо  $x$  в правую часть этого равенства  $j$ . Так как  $M$  — поле, то можно будет обычным способом раскрыть скобки и привести подобные (относительно степеней  $j$ ) члены. При этом мы получим исходный многочлен, в котором  $x$  будет заменено на  $j$ .

Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} j^n + a_1j^{n-1} + a_2j^{n-2} + \dots + a_n = \\ = (b_0j^m + b_1j^{m-1} + \dots + b_m) \cdot (c_0j^k + c_1j^{k-1} + \dots + c_k). \end{aligned}$$

По условию

$$j^n + a_1j^{n-1} + a_2j^{n-2} + \dots + a_n = 0,$$

поэтому (см. **197**) хотя бы одна из двух выписанных выше скобок равна 0. Разделив соответствующую скобку на  $b_0$  или  $c_0$ , получим выражение вида (3.1), равное 0 и имеющее степень меньше, чем  $n$ . Получаем противоречие с тем, что  $n$  — наименьшая степень у выражений вида (3.1), равных 0. Следовательно, предположение о том, что рассматриваемый многочлен приводим, неверно.

**215.** Как было доказано, в случае а) элемент  $j$  в поле  $m$  удовлетворяет равенству

$$j^2 + pj + q = 0,$$

где  $p$  и  $q$  — некоторые действительные числа, и многочлен  $x^2 + px + q$  неприводим над полем действительных чисел. Имеем

$$x^2 + px + q = \left(x^2 + px + \frac{p^2}{4}\right) - \left(\frac{p^2}{4} - q\right) = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p^2}{4} - q\right).$$

Если  $\frac{p^2}{4} - q \geq 0$  то  $\frac{p^2}{4} - q = a^2$  для некоторого действительного числа  $a$ . Тогда

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - a^2 = \left(x + \frac{p}{2} + a\right)\left(x + \frac{p}{2} - a\right),$$

т. е. многочлен  $x^2 + px + q$  был бы приводим над полем действительных чисел. Значит,  $\frac{p^2}{4} - q < 0$  и  $\frac{p^2}{4} - q = -b^2$  для некоторого действительного числа  $b$ , отличного от 0. Так как в поле  $M$   $j^2 + pj + q = 0$ , то в поле  $M$

$$j^2 + pj + \frac{p^2}{4} = \frac{p^2}{4} - q \text{ и } \left(j + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q = -b^2.$$

Отсюда

$$\left(\frac{j}{b} + \frac{p}{2b}\right)^2 = \frac{-b^2}{b^2} = -1.$$

Таким образом, элемент

$$i_0 = \frac{j}{b} + \frac{p}{2b},$$

лежащий в поле  $M$ , является искомым.

**216.** *Ответ.* Единственным (с точностью до изоморфизма) искомым полем является поле, элементы которого — дроби, в числителе

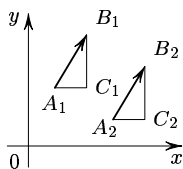


Рис. 44

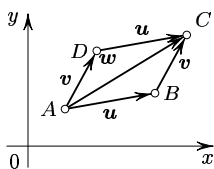


Рис. 45

и знаменателе которых стоят многочлены от  $j$ , причем операции над этими дробями производятся как обычно.

**217.** *Ответ.* A:  $2 + 2i$ , B:  $-1 + 3i$ , C:  $-2 - i$ .

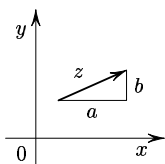


Рис. 46

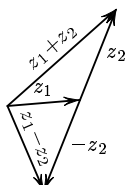


Рис. 47

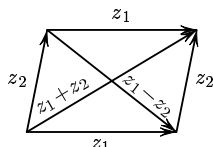


Рис. 48

**218.** *Ответ.* а) Отражение относительно начала координат (или что то же самое, поворот вокруг начала координат на  $180^\circ$ ). б) Растяжение плоскости в 2 раза от начала координат. в) Отражение относительно оси  $x$ .

**219.** Указание. Воспользуйтесь равенством треугольников  $A_1B_1C_1$  и  $A_2B_2C_2$  (рис. 44).

**220.** По условию задачи  $z_1 = x_u + iy_u$ ,  $z_2 = x_v + iy_v$ ,  $z_3 = x_w + iy_w$ . Поэтому равенство  $z_3 = z_1 + z_2$  равносильно двум равенствам:

$$\begin{cases} x_w = x_u + x_v \\ y_w = y_u + y_v. \end{cases} \quad (1)$$

С другой стороны, если  $w = u + v$ , то (рис. 45)  $x_w =$  (по определению)  $= x_C - x_A = (x_C - x_D) + (x_D - x_A) = x_u + x_v$  и точно так же  $y_w = y_u + y_v$ . Поэтому равенство  $w = u + v$  также равносильно равенствам (1).

**221.** По определению  $x_{\overline{AB}} = x_B - x_A$  и  $y_{\overline{AB}} = y_B - y_A$ .

**222.** Равенство  $|z|^2 = a^2 + b^2$  — это теорема Пифагора (рис. 46). Равенство  $z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$  легко проверяется.

**223.** См. рис. 47. Указание. Неравенства, указанные в задаче, следуют из того, что в треугольнике любая сторона меньше суммы, но больше разности двух других сторон. Равенство в обоих случаях имеет место тогда и только тогда, когда  $z_2 = kz_1$ , где  $k$  — неотрицательное действительное число.

**224.** См. рис. 48.

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 &= (\text{см. 222}) = \\ &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) + (z_1 - z_2)(\overline{z_1 - z_2}) = (\text{см. 211}) = \\ &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) + (z_1 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2}) = \\ &= 2z_1\overline{z_2} + 2z_2\overline{z_1} = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2. \end{aligned}$$

**225.** Ответ. а)  $\sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$ ; б)  $2(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6})$ ; в)  $3(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})$ ; г)  $5(\cos \pi + i \sin \pi)$ ; д)  $\sqrt{5}(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ , где  $\varphi = \arctg 2$ .

**226.** Имеем:  $z_1 z_2 = r_1 r_2 [(\cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2) + i(\sin \varphi_1 \times \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2)] = (\text{по формулам сложения из тригонометрии}) = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$ . Второе равенство в задаче равносильно равенству

$$z_1 = z_2 \cdot \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)),$$

которое легко вытекает из первого равенства.

**227.** У к а з а н и е. Воспользуйтесь результатом задачи 226.

**228.**  $1 - \sqrt{3}i = 2(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i) = 2(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i \sin(-\frac{\pi}{3}))$ . Поэтому  $(1 - \sqrt{3}i)^{100} = [2(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i \sin(-\frac{\pi}{3}))]^{100} = (\text{см. 227}) = 2^{100} \times [\cos(-\frac{100}{3}\pi) + i \sin(-\frac{100}{3}\pi)] = 2^{100} \cdot (\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3})$ . Отсюда

$$\frac{(1 - \sqrt{3}i)^{100}}{2^{100}} = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ.  $-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$ .

**229.** Если  $z = 0$ , то и  $w = 0$  (см. 197). Если же  $z \neq 0$  то и  $w \neq 0$ . Пусть в этом случае  $w = \rho(\cos \psi + i \sin \psi)$ . Тогда по формуле Муавра (см. 227)

$$w^n = \rho^n (\cos n\psi + i \sin n\psi) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Отсюда  $\rho^n = r$  и  $n\psi = \varphi + 2\pi k$ , где  $k$  — некоторое целое число. Следовательно,  $\psi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}$  и

$$w = \sqrt[n]{r} (\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n}). \quad (1)$$

Если  $k_1 - k_2 = ln$ , где  $l$  — целое число, то выражения  $\frac{\varphi + 2\pi k_1}{n}$  и  $\frac{\varphi + 2\pi k_2}{n}$  различаются на  $2\pi l$ . При этом формула (1) дает одно и то же значение  $w$ . Поэтому все различные значения  $w$  можно получить, придавая параметру  $k$  в формуле (1) значения  $k = 0, 1, \dots, n-1$ .

**230.** У к а з а н и е. Представьте подкоренные выражения в тригонометрической форме, затем воспользуйтесь формулой (1) из решения задачи 229.

*Ответ.* а)  $+i, -i$ ; б)  $2, -1 + \sqrt{3}i, -1 - \sqrt{3}i$  (здесь  $\sqrt{3}$  — действительное положительное значение корня); в)  $\cos(25^\circ + 90^\circ n) + i \sin(25^\circ + 90^\circ n)$ , где  $n = 0, 1, 2, 3$ ; г)  $\sqrt[6]{2}(\cos(15^\circ + 120^\circ n) + i \sin(15^\circ + 120^\circ n))$ , где  $n = 0, 1, 2$  (здесь  $\sqrt[6]{2}$  — действительное положительное значение корня).

**231.** Указание. См. формулу (1) из решения задачи **229**;  $1 = 1(\cos 0 + i \sin 0)$ ;  $\varepsilon_n^k = \cos(2\pi k/n) + i \sin(2\pi k/n)$  (см. **227**).

**232.** Указание. Если  $z_1^n = z_0$  и  $z_2^n = z_0$ , то  $(z_2/z_1)^n = z_2^n/z_1^n = 1$ .

*Ответ.*  $z_1, z_1 \cdot \varepsilon_n, z_1 \cdot \varepsilon_n^2, \dots, z_1 \cdot \varepsilon_n^{n-1}$  (см. **231**).

**233.** В силу результата задачи **221**  $z_A = z \mathbb{P}_{\vec{OA}}$ , где  $O$  — начало координат. *Ответ.* а) Расстояние от точки  $z$  до начала координат; б) угол между положительным направлением оси  $Ox$  и лучом  $Oz$ ; в) расстояние между точками  $z_1$  и  $z_2$  (так как  $z_B - z_A = z \mathbb{P}_{\vec{AB}}$  (см. **221**); г) угол между лучами  $Oz_2$  и  $Oz_1$  (см. **226**).

**234.** См. **233**. *Ответ.* а), б) Окружность радиуса 1 (и  $R$ ) с центром в начале координат; в) окружность радиуса  $R$  с центром в точке  $z_0$ ; г) круг радиуса  $R$  с центром в точке  $z_0$  вместе с окружностью; д) перпендикуляр к отрезку, соединяющему точки  $z_1$  и  $z_2$ , проходящий через его середину; е) отрицательная часть действительной оси; ж) биссектриса первого координатного угла; з) луч, образующий с положительным направлением оси  $Ox$  угол  $\varphi$ .

**235.** См. **229** и **232**. *Ответ.* В вершинах некоторого правильного  $n$ -угольника с центром в начале координат.

**236.** Пусть заданы точка  $z_0$  и произвольное действительное число  $\varepsilon > 0$ . Выберем  $\delta = 1$  (независимо от  $z_0$ , и от  $\varepsilon$ ). Тогда для всех  $z$ , удовлетворяющих условию  $|z - z_0| < 1$ , выполняется неравенство  $|f(z) - f(z_0)| = |a - a| = 0 < \varepsilon$ . Следовательно, функция  $f(z) \equiv a$  непрерывна при любом значении аргумента  $z$ . (В качестве  $\delta$  можно было взять любое положительное действительное число.)

**237.** Пусть заданы точка  $z_0$  и произвольное действительное число  $\varepsilon > 0$ . Выберем  $\delta = \varepsilon$  (независимо от  $z_0$ ). Тогда для всех  $z$ , удовлетворяющих условию  $|z - z_0| < \delta$ , будет выполняться неравенство  $|f(z) - f(z_0)| = |z - z_0| < \delta = \varepsilon$ , т. е.  $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ . Следовательно, функция комплексного аргумента  $f(z) = z$  непрерывна при всех значениях аргумента. Рассматривая только действительные значения аргумента  $z$ , получаем, что функция действительного аргумента  $f(x) = x$  также непрерывна при всех значениях аргумента.

**238.** Пусть заданы точка  $z_0$  и произвольное действительное число  $\varepsilon > 0$ . Если  $\delta$  — произвольное положительное действительное число и  $|z - z_0| < \delta$ , то  $|f(z) - f(z_0)| = |z^2 - z_0^2| = |(z - z_0)(z + z_0)| =$  (см. **226**)  $= |z - z_0| \cdot |z + z_0| \leq \delta |z + z_0|$ . Но  $|z + z_0| = |(z - z_0) + 2z_0| \leq$  (см. **223**)  $\leq |z - z_0| + |2z_0| < \delta + 2|z_0|$ . Таким образом, при  $|z - z_0| < \delta$  получаем

$$|f(z) - f(z_0)| < \delta \cdot (\delta + 2|z_0|).$$

Подберем теперь  $\delta$  так, чтобы выполнялось неравенство

$$\delta \cdot (\delta + 2|z_0|) \leq \varepsilon.$$

Если  $z_0 = 0$ , то положим  $\delta = \sqrt{\varepsilon}$  (имеется в виду положительный корень из  $\varepsilon$ ). Если  $z_0 \neq 0$ , то рассмотрим два положительных дей-



ствительных числа  $|z_0|$  и  $\frac{\varepsilon}{3|z_0|}$  и выберем в качестве  $\delta$  наименьшее из этих двух чисел. Тогда будут выполняться неравенства  $\delta \leq |z_0|$  и  $\delta \leq \frac{\varepsilon}{3|z_0|}$ . Отсюда

$$\delta(\delta + 2|z_0|) \leq \frac{\varepsilon}{3|z_0|} \cdot (|z_0| + 2|z_0|) = \varepsilon.$$

Таким образом, при  $|z - z_0| < \delta$ , где  $\delta$  — выбранное нами число,  $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ . Следовательно, функция комплексного аргумента  $f(z) = z^2$  непрерывна при всех значениях аргумента.

**239.** а) Пусть задано произвольное действительное число  $\varepsilon > 0$ . Имеем

$$\begin{aligned} |h(z) - h(z_0)| &= |(f(z) + g(z)) - (f(z_0) + g(z_0))| = \\ &= |(f(z) - f(z_0)) + (g(z) - g(z_0))| \leq (\text{см. } \mathbf{223}) \leq \\ &\leq |f(z) - f(z_0)| + |g(z) - g(z_0)|. \end{aligned}$$

Рассмотрим вместо  $\varepsilon$  число  $\frac{\varepsilon}{2}$ . Тогда, в силу непрерывности функции  $f(z)$  в точке  $z_0$ , можно подобрать такое действительное число  $\delta_1 > 0$ , что для всех  $z$ , удовлетворяющих условию  $|z - z_0| < \delta_1$ , будет выполняться неравенство  $|f(z) - f(z_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Точно так же, в силу непрерывности функции  $g(z)$  в точке  $z_0$ , можно подобрать такое действительное число  $\delta_2 > 0$ , что для всех  $z$ , удовлетворяющих условию  $|z - z_0| < \delta_2$ , будет выполняться неравенство  $|g(z) - g(z_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Выберем в качестве  $\delta$  наименьшее из чисел  $\delta_1$  и  $\delta_2$ . Тогда для всех  $z$ , удовлетворяющих условию  $|z - z_0| < \delta$ , будут выполняться оба неравенства:  $|f(z) - f(z_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$  и  $|g(z) - g(z_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Поэтому для всех  $z$ , удовлетворяющих условию  $|z - z_0| < \delta$ , будет

$$|h(z) - h(z_0)| \leq |f(z) - f(z_0)| + |g(z) - g(z_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

т. е.  $|h(z) - h(z_0)| < \varepsilon$ . Следовательно, функция  $h(z) = f(z) + g(z)$  непрерывна в точке  $z_0$ .

б) Если  $h(z) = f(z) - g(z)$ , то

$$\begin{aligned} |h(z) - h(z_0)| &= |(f(z) - g(z)) - (f(z_0) - g(z_0))| = \\ &= |(f(z) - f(z_0)) + (-g(z) + g(z_0))| \leq (\text{см. } \mathbf{223}) \leq \\ &\leq |f(z) - f(z_0)| + |-1| \cdot |g(z) - g(z_0)| = \\ &= |f(z) - f(z_0)| + |g(z) - g(z_0)|. \end{aligned}$$

Получаем неравенство

$$|h(z) - h(z_0)| \leq |f(z) - f(z_0)| + |g(z) - g(z_0)|$$

такое же, как в случае а), и далее задача решается точно так же, как в случае а).

в) Пусть задано произвольное действительное число  $\varepsilon > 0$ . Имеем

$$\begin{aligned} |h(z) - h(z_0)| &= |f(z)g(z) - f(z_0)g(z_0)| = \\ &= |f(z)g(z) - f(z)g(z_0) + f(z)g(z_0) - f(z_0)g(z_0)| \leq (\text{см. 223}) \leq \\ &\leq |f(z)(g(z) - g(z_0))| + |g(z_0)(f(z) - f(z_0))| = (\text{см. 226}) = \\ &= |f(z)| \cdot |g(z) - g(z_0)| + |g(z_0)| \cdot |f(z) - f(z_0)|. \end{aligned}$$

Подберем теперь действительное число  $\delta > 0$  так, чтобы для всех  $z$ , удовлетворяющих условию  $|z - z_0| < \delta$ , оба полученных слагаемых были меньше, чем  $\frac{\varepsilon}{2}$ .

1) Если  $f(z_0) \neq 0$ , то рассмотрим число  $\varepsilon_1 = |f(z_0)| > 0$ . Так как функция  $f(z)$  непрерывна в точке  $z_0$ , то для некоторого действительного числа  $\delta' > 0$  из условия  $|z - z_0| < \delta'$  будет вытекать  $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon_1 = |f(z_0)|$ . Тогда при  $|z - z_0| < \delta'$  будет

$$\begin{aligned} |f(z)| &= |f(z) - f(z_0) + f(z_0)| \leq (\text{см. 223}) \leq \\ &\leq |f(z) - f(z_0)| + |f(z_0)| < |f(z_0)| + |f(z_0)| = 2|f(z_0)|, \end{aligned}$$

т. е.

$$|f(z)| < 2|f(z_0)|.$$

Рассмотрим действительное число  $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{4 \cdot |f(z_0)|}$ . Так как функция  $g(z)$  непрерывна в точке  $z_0$ , то для некоторого действительного числа  $\delta'' > 0$  из условия  $|z - z_0| < \delta''$  будет вытекать  $|g(z) - g(z_0)| < \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{4 \cdot |f(z_0)|}$ . Выберем в качестве  $\delta_1$  наименьшее из чисел  $\delta'$  и  $\delta''$ .

Тогда для всех  $z$ , удовлетворяющих условию  $|z - z_0| < \delta_1$ , будут выполняться два неравенства:

$$|f(z)| < 2|f(z_0)| \quad \text{и} \quad |g(z) - g(z_0)| < \frac{\varepsilon}{4 \cdot |f(z_0)|}$$

и, следовательно, будет выполняться неравенство

$$|f(z)| \cdot |g(z) - g(z_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Если  $f(z_0) = 0$ , то проведем рассуждение иначе. В качестве  $\varepsilon_1$  рассмотрим число  $\varepsilon_1 = 1$ . Тогда для некоторого действительного числа  $\delta' > 0$  из условия  $|z - z_0| < \delta'$  будет вытекать  $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon_1 = 1$ , и, учитывая, что  $f(z_0) = 0$  получаем  $|f(z)| < 1$ . В качестве  $\varepsilon_2$  рассмотрим число  $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2}$ . Тогда для некоторого действительного числа  $\delta'' > 0$  из условия  $|z - z_0| < \delta''$  будет вытекать  $|g(z) - g(z_0)| < \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2}$ . Если в качестве  $\delta_1$  взять наименьшее из чисел  $\delta'$  и  $\delta''$ , то для всех  $z$ , удовлетворяющих условию  $|z - z_0| < \delta_1$ , будут выполняться два неравенства:

$$|f(z)| < 1 \quad \text{и} \quad |g(z) - g(z_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

и, следовательно, будет выполняться неравенство

$$|f(z)| \cdot |g(z) - g(z_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

2) Если  $g(z_0) \neq 0$ , то рассмотрим  $\varepsilon_3 = \frac{\varepsilon}{2|g(z_0)|}$ . Найдется такое действительное число  $\delta_2$ , что для всех  $z$ , удовлетворяющих условию

$|z - z_0| < \delta_2$ , будет выполняться неравенство

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon_3 = \frac{\varepsilon}{2|g(z_0)|}$$

и, следовательно, будет выполняться неравенство

$$|g(z_0)| \cdot |f(z) - f(z_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Если  $g(z_0) = 0$ , то в качестве  $\delta_2$  можно взять любое положительное действительное число, так как в этом случае при любом  $z$

$$|g(z_0)| \cdot |f(z) - f(z_0)| = 0 < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Выберем теперь в качестве  $\delta$  наименьшее из чисел  $\delta_1$  и  $\delta_2$ . Тогда для всех  $z$ , удовлетворяющих условию  $|z - z_0| < \delta$ , будут выполняться два неравенства:

$$|f(z)| \cdot |g(z) - g(z_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

и

$$|g(z_0)| \cdot |f(z) - f(z_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

и, следовательно, будет выполняться неравенство

$$|h(z) - h(z_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Таким образом, функция  $h(z) = f(z) \cdot g(z)$  непрерывна в точке  $z_0$ .

**240.** а) Пусть задано произвольное действительное число  $\varepsilon > 0$ . Имеем

$$\begin{aligned} |h(z) - h(z_0)| &= \left| \frac{1}{g(z)} - \frac{1}{g(z_0)} \right| = \left| \frac{g(z_0) - g(z)}{g(z)g(z_0)} \right| = \\ &= (\text{см. 226}) = \frac{|g(z_0) - g(z)|}{|g(z)g(z_0)|} = \frac{|g(z) - g(z_0)|}{|g(z)| \cdot |g(z_0)|}. \end{aligned}$$

Рассмотрим число  $\varepsilon_1 = \frac{|g(z_0)|}{2} > 0$ . Так как функция  $g(z)$  непрерывна в точке  $z_0$ , то для некоторого действительного числа  $\delta_1 > 0$  из условия  $|z - z_0| < \delta_1$  будет вытекать  $|g(z) - g(z_0)| < \varepsilon_1 = \frac{|g(z_0)|}{2}$ . Тогда получим, что для всех  $z$ , удовлетворяющих условию  $|z - z_0| < \delta_1$ , выполняется неравенство

$$\begin{aligned} |g(z)| &= |g(z_0) - (g(z_0) - g(z))| \geq (\text{см. 223}) \geq |g(z_0)| - \\ &- |g(z_0) - g(z)| \geq |g(z_0)| - \frac{|g(z_0)|}{2} = \frac{|g(z_0)|}{2}. \end{aligned}$$

Рассмотрим число  $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon \cdot |g(z_0)|^2}{2} > 0$ . Найдется действительное число  $\delta_2 > 0$  такое что из условия  $|z - z_0| < \delta_2$  будет вытекать  $|g(z) - g(z_0)| < \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon |g(z_0)|^2}{2}$ . Выберем в качестве  $\delta$  наименьшее из чисел  $\delta_1$  и  $\delta_2$ . Тогда для всех  $z$ , удовлетворяющих условию  $|z - z_0| < \delta$ , будут выполняться два неравенства

$$|g(z)| \geq \frac{|g(z_0)|}{2} \quad \text{и} \quad |g(z) - g(z_0)| < \frac{\varepsilon \cdot |g(z_0)|^2}{2}$$

и, следовательно, будет выполняться неравенство

$$|h(z) - h(z_0)| = \frac{|g(z) - g(z_0)|}{|g(z)| \cdot |g(z_0)|} < \frac{\varepsilon \cdot |g(z_0)|^2}{2} \cdot \frac{2}{|g(z_0)|^2} = \varepsilon.$$

Таким образом, функция  $h(z) = \frac{1}{g(z)}$  непрерывна в точке  $z_0$ .

б) Так как функции  $f(z)$  и  $g(z)$  непрерывны в точке  $z_0$ , то в точке  $z_0$  непрерывна функция  $\frac{1}{g(z)}$  (см. а)) и, следовательно, непрерывна функция  $h(z) = \frac{f(z)}{g(z)} = f(z) \cdot \frac{1}{g(z)}$  (см. 239 в)).

**241.** Пусть задано произвольное действительное число  $\varepsilon > 0$ . Так как функция  $f(z)$  непрерывна в точке  $z_1$ , то найдется такое действительное число  $\delta_1 > 0$ , что из условия  $|z - z_1| < \delta_1$  будет вытекать  $|f(z) - f(z_1)| < \varepsilon$ . Рассмотрим далее число  $\delta_1 > 0$ . Так как функция  $g(z)$  непрерывна в точке  $z_0$ , то найдется такое действительное число  $\delta > 0$ , что из  $|z - z_0| < \delta$  будет вытекать  $|g(z) - g(z_0)| < \delta_1$ , т. е.  $|g(z) - z_1| < \delta_1$ . Но тогда будет выполняться неравенство  $|f(g(z)) - f(z_1)| < \varepsilon$ , т. е.  $|f(g(z)) - f(g(z_0))| < \varepsilon$ . Таким образом, для всех  $z$ , удовлетворяющих условию  $|z - z_0| < \delta$ , будет выполняться неравенство  $|h(z) - h(z_0)| < \varepsilon$  и, следовательно, функция  $h(z) = f(g(z))$  непрерывна в точке  $z_0$ .

**242.** Пусть заданы точка  $x_0$  и действительное число  $\varepsilon > 0$ . Для функции  $f(x) = \sin x$  получим  $|f(x) - f(x_0)| = |\sin x - \sin x_0| =$  (по формуле тригонометрии)  $= \left| 2 \sin \frac{x - x_0}{2} \cos \frac{x + x_0}{2} \right| = 2 \cdot \left| \sin \frac{x - x_0}{2} \right| \times \left| \cos \frac{x + x_0}{2} \right| \leq$  (так как  $\left| \cos \frac{x + x_0}{2} \right| \leq 1$ )  $\leq 2 \left| \sin \frac{x - x_0}{2} \right|$ . Для  $f(x) = \cos x$  получим  $|f(x) - f(x_0)| = |\cos x - \cos x_0| =$  (по формуле тригонометрии)  $= \left| -2 \sin \frac{x - x_0}{2} \sin \frac{x + x_0}{2} \right| = 2 \cdot \left| \sin \frac{x - x_0}{2} \right| \times \left| \sin \frac{x + x_0}{2} \right| \leq$  (так как  $\left| \sin \frac{x + x_0}{2} \right| \leq 1$ )  $\leq 2 \left| \sin \frac{x - x_0}{2} \right|$ . Таким образом, в обоих случаях

$$|f(x) - f(x_0)| \leq 2 \left| \sin \frac{x - x_0}{2} \right|.$$

Подберем теперь  $\delta > 0$  так, чтобы при всех  $x$ , удовлетворяющих условию  $|x - x_0| < \delta$ , выполнялось неравенство  $\left| \sin \frac{x - x_0}{2} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$ .

Если  $\frac{\varepsilon}{2} > 1$ , то неравенство  $\left| \sin \frac{x - x_0}{2} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$  выполняется при всех  $x$  и  $\delta$  можно взять любым. Если  $\frac{\varepsilon}{2} \leq 1$ , то рассмотрим на плоскости с координатными осями  $x$  и  $y$  окружность радиуса 1 с центром в начале координат и проведем прямые  $y = \frac{\varepsilon}{2}$  и  $y = -\frac{\varepsilon}{2}$  (рис. 49). Для указанных на рисунке углов  $\alpha$  и  $\beta$  получим  $\sin \alpha = \frac{\varepsilon}{2}$ ,  $\sin \beta = \frac{\varepsilon}{2}$ , причем, очевидно,  $\beta = -\alpha$ .

В качестве  $\delta$  выберем  $\delta = 2\alpha$ . Тогда из  $|x - x_0| < \delta$  будет вытекать  $\left| \frac{x - x_0}{2} \right| < \frac{\delta}{2}$ , т. е.  $-\alpha < \frac{x - x_0}{2} < \alpha$ . Отсюда  $\sin(-\alpha) < \sin \frac{x - x_0}{2} < \sin \alpha$  т. е.  $-\frac{\varepsilon}{2} < \sin \frac{x - x_0}{2} < \frac{\varepsilon}{2}$  и  $\left| \sin \frac{x - x_0}{2} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Тогда

$$|f(x) - f(x_0)| \leq 2 \left| \sin \frac{x - x_0}{2} \right| < \varepsilon.$$

Следовательно, функции  $f(x) = \sin x$  и  $f(x) = \cos x$  непрерывны при любом действительном значении аргумента  $x$ .

**243.** Пусть заданы точка  $x_0 > 0$  и положительное действительное число  $\varepsilon > 0$ . Надо подобрать такое действительное число  $\delta > 0$ , чтобы для всех  $x$ , удовлетворяющих неравенству  $|x - x_0| < \delta$  (и, конечно,  $x \geq 0$ ), выполнялось неравенство

$$|\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{x_0}| < \varepsilon. \quad (1)$$

Последнее неравенство равносильно неравенствам

$$-\varepsilon < \sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{x_0} < \varepsilon$$

и

$$\sqrt[n]{x_0} - \varepsilon < \sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{x_0} + \varepsilon. \quad (2)$$

Так как функция  $\sqrt[n]{x}$  монотонно возрастает с ростом  $x$  (при  $x \geq 0$ ), то неравенство (2) в случае, когда  $\sqrt[n]{x_0} - \varepsilon \geq 0$ , равносильно неравенствам

$$(\sqrt[n]{x_0} - \varepsilon)^n < x < (\sqrt[n]{x_0} + \varepsilon)^n$$

и

$$(\sqrt[n]{x_0} - \varepsilon)^n - x_0 < x - x_0 < (\sqrt[n]{x_0} + \varepsilon)^n - x_0. \quad (3)$$

В этом случае, взяв в качестве  $\delta$  наименьшее из чисел  $x_0 - (\sqrt[n]{x_0} - \varepsilon)^n$  и  $(\sqrt[n]{x_0} + \varepsilon)^n - x_0$  получим, что из условия  $|x - x_0| < \delta$  вытекает неравенство (3), а вместе с ним и неравенство (1). Если в неравенстве (2)  $\sqrt[n]{x_0} - \varepsilon < 0$ , то левая часть неравенства (2) всегда выполняется (при  $x \geq 0$ ) и неравенство (2) равносильно неравенствам

$$x < (\sqrt[n]{x_0} + \varepsilon)^n$$

и

$$x - x_0 < (\sqrt[n]{x_0} + \varepsilon)^n - x_0. \quad (4)$$

В этом случае достаточно взять

$$\delta = (\sqrt[n]{x_0} + \varepsilon)^n - x_0$$

и при всех  $x$ , удовлетворяющих условию  $|x - x_0| < \delta$ , будет выполняться неравенство (4), а вместе с ним и неравенства (2) и (1).

**244.** Ответ. а) См. рис. 50. Указание.  $y(t) \equiv 0$ . б), в) См. рис. 50. Указание.  $x(t) \equiv 0$ . г) См. рис. 50;  $x(t) = t$ ,  $y(t) = -t$ ,

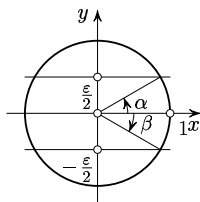


Рис. 49

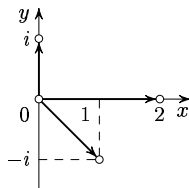


Рис. 50

$y = -x$ . д) См. рис. 51;  $x(t) = t^2$ ,  $y(t) = t$ ,  $x = y^2$ . е), ж) Окружность радиуса  $R$ , проходимая против часовой стрелки соответственно один раз (в е)) и два раза (в ж)) с началом в точке  $z = R + 0i$  (рис. 52). Указание.  $|z(t)| = R$ ,  $\text{Arg } z(t) = 2\pi t$  (в е)) и  $\text{Arg } z(t) = 4\pi t$  (в ж)). з) Полуокружность радиуса  $R$  (рис. 53). и) См. рис. 54.

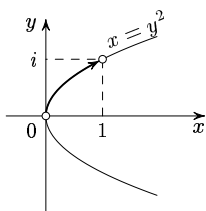


Рис. 51

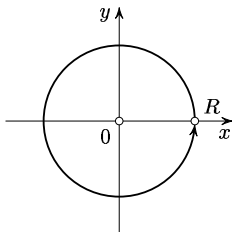


Рис. 52

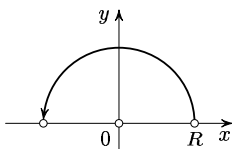


Рис. 53

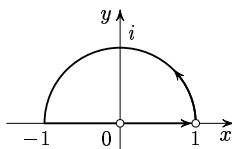


Рис. 54

**245.** См. рис. 55. Из подобия получаем  $\frac{x - a_0}{a_1 - a_0} = \frac{y - b_0}{b_1 - b_0}$ . При движении точки  $z$  по отрезку от положения  $z_0 = a_0 + b_0 i$  до положения  $z_1 = a_1 + b_1 i$  выписанные отношения меняются от 0 до 1. Поэтому можно, например, положить  $t = \frac{x - a_0}{a_1 - a_0} = \frac{y - b_0}{b_1 - b_0}$ . Отсюда  $x = a_0 + (a_1 - a_0)t$ ,  $y = b_0 + (b_1 - b_0)t$ ,  $z(t) = (a_0 + (a_1 - a_0)t) + (b_0 + (b_1 - b_0)t)i$ . Нетрудно проверить что эта формула описывает искомый отрезок при любом расположении точек  $z_0$  и  $z_1$ , в частности, при  $a_0 = a_1$  или  $b_0 = b_1$ .

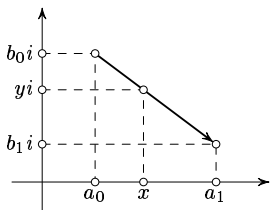


Рис. 55

**246.** Так как  $z_A + z_{\overline{AB}} = z_B$  (см. 221), то а) — сдвиг кривой  $C_1$  на вектор, соответствующий комплексному числу  $z_0$  (рис. 56). Если  $z_2 = z_0 z_1$  и  $\text{Arg } z_0 = \varphi_0$ ,  $\text{Arg } z_1 = \varphi_1$  то (см. 226)  $|z_2| = |z_0| \cdot |z_1|$  и  $\text{Arg } z_2 = \varphi_0 + \varphi_1$ . Поэтому б) — растяжение кривой  $C_1$  относительно начала координат в  $a$  раз (рис. 57); в) — поворот кривой  $C_1$  вокруг начала координат на

угол  $\varphi_0 = \text{Arg } z_0$  (рис. 58); г) растяжение в  $|z_0|$  раз с одновременным поворотом на угол  $\varphi_0 = \text{Arg } z_0$  (рис. 59).

**247.** Когда  $t$  меняется непрерывно от 0 до 1, то  $1 - t$  непрерывно меняется от 1 до 0. Поэтому функция  $z_2(t) = z_1(1 - t)$  задает геометрически ту же кривую  $C$ , но проходящую в противоположном направлении.

**248.** Когда  $t$  меняется непрерывно от 0 до  $1/2$ , то  $2t$  непрерывно меняется от 0 до 1. Когда  $t$  меняется непрерывно от  $1/2$  до 1, то  $2t - 1$  непрерывно меняется от 0 до 1. Поэтому функция  $z_3(t)$ , указанная в задаче, задает кривую, которая получится, если сначала пройти кривую  $C_1$  затем кривую  $C_2$ . Условие  $z_1(1) = z_2(0)$  обеспечи-

вает непрерывность полученной кривой.

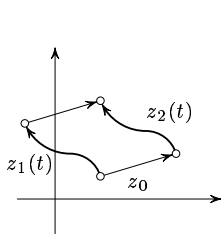


Рис. 56

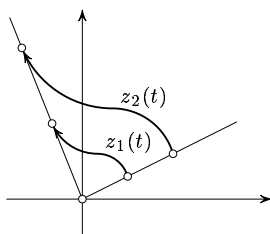


Рис. 57

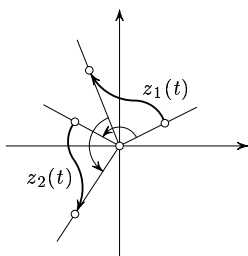


Рис. 58

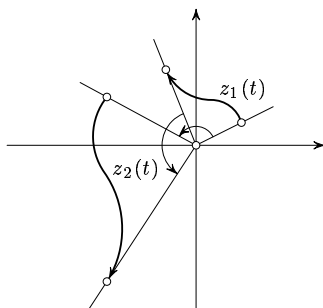


Рис. 59

**249.** Ответ.  $\pi t + 2\pi k$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

**250.** Ответ. а)  $\pi t$ , б)  $2\pi + \pi t$ , в)  $-4\pi + \pi t$ , г)  $2\pi k + \pi t$ .

**251.** При каждом  $t$   $\varphi(t) - \varphi'(t) = 2\pi k$ , где  $k$ , возможно, свое для каждого  $t$ . Поэтому запишем  $\varphi(t) - \varphi'(t) = 2\pi k(t)$ . Отсюда  $k(t) = \frac{\varphi(t) - \varphi'(t)}{2\pi}$ . Так как функции  $\varphi(t)$  и  $\varphi'(t)$  непрерывны при  $0 \leq t \leq 1$ , то и функция  $k(t)$  непрерывна при  $0 \leq t \leq 1$  (см. **239**, **240**). Но так как функция  $k(t)$  принимает только целочисленные значения, то она непрерывна лишь в том случае, если она постоянная, т. е.  $k(t) = k$  где  $k$  — некоторое фиксированное целое число, не зависящее от  $t$ . Отсюда  $\frac{\varphi(t) - \varphi'(t)}{2\pi} = k$  и  $\varphi(t) \equiv \varphi'(t) - \varphi'(t) = 2\pi k$ .

**252.** Пусть  $\varphi(t)$  и  $\varphi'(t)$  — две функции, описывающие непрерывное изменение  $\text{Arg } z(t)$  и  $\varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi_0$ . Тогда (см. **251**)  $\varphi(t) - \varphi'(t) = 2\pi k$ , где  $k$  — фиксированное целое число. Но  $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$ . Поэтому  $k = 0$ . Отсюда  $\varphi(t) - \varphi'(t) \equiv 0$  и  $\varphi(t) \equiv \varphi'(t)$ .

**253.** Пусть  $\varphi(t)$  и  $\varphi'(t)$  — две функции, описывающие непрерывное изменение  $\text{Arg } z(t)$ . Тогда (см. **251**)  $\varphi(t) - \varphi'(t) = 2\pi k$ , где  $k$  — фиксированное целое число. В частности  $\varphi(0) - \varphi'(0) = 2\pi k$ . Отсюда  $\varphi(t) - \varphi'(t) = \varphi(0) - \varphi'(0)$  и  $\varphi(t) - \varphi'(0) = \varphi'(t) - \varphi'(0)$ .

**254.** а) Можно взять  $\varphi(t) = \pi t$ . Ответ.  $\varphi(1) - \varphi(0) = \pi$  (см. рис. 53);

б)  $\varphi(t) = 2\pi t$ . Ответ.  $2\pi$  (см. рис. 52); в)  $\varphi(t) = 4\pi t$ .  
 Ответ.  $4\pi$ ; г) Ответ.  $\frac{\pi}{2}$  (рис. 60).

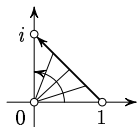


Рис. 60

изменение аргумента вдоль кривой  $C$  на участке  $AB$  (по направлению кривой  $C$ ) равно  $\varphi_1$ , а на участке  $BA$  равно  $\varphi_2$ , то изменение аргумента вдоль всей кривой  $C$  в обоих случаях, очевидно, равно  $\varphi_1 + \varphi_2$ .

**258.** а), б), в) Если  $z_2(t) = z_0 \cdot z_1(t)$  и  $\varphi_1(t)$  — функция, описывающая непрерывное изменение  $\text{Arg } z_1(t)$ , то функция  $\varphi_2(t) = \varphi_1(t) + \varphi_0$ , где  $\varphi_0 = \text{Arg } z_0$ , описывает непрерывное изменение  $\text{Arg } z_2(t)$  (см. 226, 239). Поэтому  $\varphi_2(1) - \varphi_2(0) = \varphi_1(1) - \varphi_1(0)$ .

Ответ.  $k$  раз. Этот результат, очевидно, следует также из результата задачи 246.

г) Если  $\text{Arg } z = \varphi$ , то  $\text{Arg } \bar{z} = -\varphi$  (см. 218 в)). Поэтому, если  $\varphi_1(t)$  — функция, описывающая непрерывное изменение  $\text{Arg } z_1(t)$ , то функция  $\varphi_2(t) = \varphi_1(t)$  описывает непрерывное изменение  $\text{Arg } z_2(t)$ . Поэтому  $\varphi_2(1) - \varphi_2(0) = -(\varphi_1(1) - \varphi_1(0))$ .

Ответ.  $-k$  раз.

**259.** а) 1, б) 0, в) 1, г) 2.

**260.** Решение. Если  $\varphi_1(t)$  и  $\varphi_2(t)$  — функции, описывающие непрерывное изменение аргумента вдоль кривых  $C_1$  и  $C_2$ , то в качестве функции  $\varphi(t)$ , описывающей непрерывное изменение аргумента вдоль кривой  $C$ , можно взять в случае а)  $\varphi(t) = \varphi_1(t) + \varphi_2(t)$ , в случае б)  $\varphi(t) = \varphi_1(t) - \varphi_2(t)$  (см. 226, 239). Отсюда  $\varphi(1) - \varphi(0) = (\varphi_1(1) \pm \varphi_2(1)) - (\varphi_1(0) \pm \varphi_2(0)) = (\varphi_1(1) - \varphi_1(0)) \pm (\varphi_2(1) - \varphi_2(0)) = \varphi_1 \pm \varphi_2$ .

Ответ. а)  $\varphi_1 + \varphi_2$  б)  $\varphi_1 - \varphi_2$ .

**261.**  $w_0(t) = [z(t)]^2$  (воспользуйтесь формулой Муавра; см. 227):

а)  $w_0(t) = R^2(\cos \pi t + i \sin \pi t)$  — полуокружность радиуса  $R^2$ ;

б)  $w_0(t) = R^2(\cos 2\pi t + i \sin 2\pi t)$  — окружность радиуса  $R^2$ ;

в)  $w_0(t) = R^2(\cos 4\pi t + i \sin 4\pi t)$  — окружность радиуса  $R^2$ , проходящая дважды.

**262.** Воспользуйтесь результатом задачи 260 а). Ответ. а)  $2\varphi$  б)  $3\varphi$ , в)  $n\varphi$ .

**263.** Пусть  $z(t)$  — параметрическое уравнение кривой  $C$  и  $z_1(t) = z(t) - z_0$ . По условию изменение  $\text{Arg } z_1(t)$  равно  $2\pi k$ . Кривая  $f(C)$  имеет параметрическое уравнение  $w_0(t) = (z(t) - z_0)^n = [z_1(t)]^n$ . Поэтому (см. 262 в)) изменение аргумента  $w_0(t)$  равно  $2\pi kn$ . Следовательно, кривая  $f(C)$  обходит вокруг точки  $w = 0$   $kn$  раз.

Ответ.  $kn$  раз.

**264.** По условию изменение аргумента  $z(t)$  равно  $2\pi k_1$ , аргумента  $z(t) - 1$  равно  $2\pi k_2$ , аргумента  $z(t) - i$  равно  $2\pi k_3$  и аргумента  $z(t) + i$  равно  $2\pi k_4$ . Воспользуемся результатом задачи 260 а). Получим:



а)  $w_0(t) = z(t) \cdot (z(t) - 1)$ . Изменение аргумента  $w_0(t)$  равно  $2\pi k_1 + 2\pi k_2 = 2\pi(k_1 + k_2)$ . Ответ. Кривая  $f(C)$  обходит вокруг точки  $w = 0$   $k_1 + k_2$  раз.

б)  $w_0(t) = (z(t) - i)(z(t) + i)$ . Ответ.  $k_3 + k_4$  раз.

в)  $w_0(t) = [z(t)]^4 \cdot [z(t) + i]^4$ . Ответ.  $4(k_1 + k_4)$  раз.

г)  $w = (z - 1)(z^2 + 1) = (z - 1)(z + i)(z - i)$ . Ответ.  $(k_1 + k_3 + k_4)$  раз.

$$\begin{aligned} 265. \quad & |a_0 z^n + \dots + a_{n-1} z| \leq (\text{см. 223 а)}) \leq \\ & \leq |a_0 z^n| + \dots + |a_{n-1} z| = (\text{см. 226}) = |a_0| \cdot |z|^n + \\ & + \dots + |a_{n-1}| \cdot |z| = |a_0| \cdot R_1^n + \dots + |a_{n-1}| \cdot R_1 \leq \\ & \leq (\text{так как } R_1 < 1) \leq |a_0| \cdot R_1 + \dots + |a_{n-1}| \cdot R_1 \leq \\ & \leq (\text{так как } |a_i| \leq A) \leq nAR_1 < \\ & < \left( \text{так как } R_1 < \frac{|a_n|}{10nA} \right) < nA \frac{|a_n|}{10nA} = \frac{|a_n|}{10}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 266. \quad & \left| \frac{a_1}{z} + \dots + \frac{a_n}{z^n} \right| \leq (\text{см. 223 а)}) \leq \\ & \leq \left| \frac{a_1}{z} \right| + \dots + \left| \frac{a_n}{z^n} \right| = (\text{см. 226}) = \\ & = \frac{|a_1|}{|z|} + \dots + \frac{|a_n|}{|z^n|} = \frac{|a_1|}{R_2} + \dots + \frac{|a_n|}{R_2^n} \leq \\ & \leq (\text{так как } R_2 > 1) \leq \frac{|a_1|}{R_2} + \dots + \frac{|a_n|}{R_2} \leq \\ & \leq (\text{так как } |a_i| \leq A) \leq \frac{nA}{R_2} < \\ & < \left( \text{так как } R_2 > \frac{10nA}{|a_0|} \right) < \frac{nA \cdot |a_0|}{10nA} = \frac{|a_0|}{10}. \end{aligned}$$

267. Если  $|z| = R_1$ , то (см. 265)  $|f(z) - a_n| < \frac{|a_n|}{10}$ . Поэтому вся кривая  $f(C_R)$  находится в круге радиуса  $\frac{|a_n|}{10}$  с центром в точке  $w = a_n$  (рис. 62). Очевидно, такая кривая ни разу не обходит вокруг точки  $w = 0$ . Поэтому  $\nu(R_1) = 0$ .

Докажем, что  $\nu(R_2) = n$ . Приведем сначала не совсем строгое, но красивое доказательство, называемое «дама с собачкой». Из результата задачи 266 получаем, что при  $|z| = R_2$

$$\begin{aligned} |f(z) - a_0 z^n| &= |a_1 z^{n-1} + \dots + a_n| = \\ &= \left| z^n \left( \frac{a_1}{z} + \dots + \frac{a_n}{z^n} \right) \right| = (\text{см. 226}) = \\ &= |z^n| \cdot \left| \frac{a_1}{z} + \dots + \frac{a_n}{z^n} \right| < \frac{|a_0| \cdot |z^n|}{10} = \frac{|a_0| \cdot |z|^n}{10} = \frac{|a_0| \cdot R_2^n}{10}. \end{aligned}$$

Обозначим  $|a_0| \cdot R_2^n = R$ . Тогда  $|f(z) - a_0 z^n| < \frac{R}{10}$  при  $|z| = R_2$ . Когда  $z$  один раз пробегает окружность радиуса  $R_2$ , то точка  $w = a_0 z^n$  («дама») пробегает  $n$  раз окружность радиуса  $R$ . Так как при этом  $|f(z) - a_0 z^n| < \frac{R}{10}$ , то точка  $w = f(z)$  («собачка») может отстоять от «дамы» не более чем на  $\frac{R}{10}$ . Но тогда если «дама» обходит вокруг точки  $w = 0$   $n$  раз по окружности радиуса  $R$ , то и «собачка» вместе

с ней вынуждена обойти  $n$  раз вокруг точки  $w = 0$  (рис. 63). То есть  $v(R_2) = n$ .

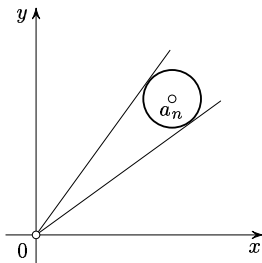


Рис. 62

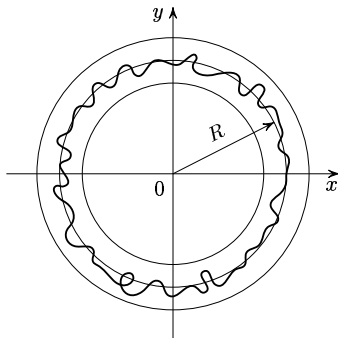


Рис. 63

Более строгое доказательство равенства  $v(R_2) = n$  можно провести следующим образом. Если  $|z| = R_2$ , то (см. 266)  $\left| \frac{f(z)}{z^n} - a_0 \right| < \frac{|a_0|}{10}$ . Поэтому так же, как при доказательстве равенства  $v(R_1) = 0$ , получаем, что когда точка  $z(t)$  пробегает окружность  $C_{R_2}$ , изменение аргумента  $\frac{f(z)}{z^n}$  равно 0. Изменение аргумента  $z$  при этом равно  $2\pi$  и, следовательно, изменение аргумента  $z^n$  равно  $2\pi n$  (см. 262). Так как  $f(z) = \frac{f(z)}{z^n} \cdot z^n$ , то (см. 260) изменение аргумента  $f(z)$  равно  $2\pi n$ , т. е. кривая  $f(C_{R_2})$  обходит вокруг точки  $w = 0$   $n$  раз. Поэтому  $v(R_2) = n$ .  
 Ответ.  $v(R_1) = 0$ ,  $v(R_2) = n$ .

**268.** Разделим многочлен  $P(z) = a_0 z^n + \dots + a_{n-1} z + a_n$  на двучлен  $z - z_0$  с остатком (например, столбиком; см. стр. 56). Остаток будет некоторым комплексным числом  $r$ , а частное некоторым многочленом  $Q(z)$ . Тогда справедливо тождество

$$P(z) = Q(z) \cdot (z - z_0) + r.$$

Подставив в это тождество вместо  $z$  значение  $z_0$ , получим

$$P(z_0) = Q(z_0) \cdot (z_0 - z_0) + r = 0 + r = r.$$

Но  $P(z_0) = 0$ , так как по условию  $z_0$  — корень уравнения  $P(z) = 0$ . Поэтому из равенства  $P(z_0) = r$  получаем  $r = 0$ . Таким образом,  $P(z) = Q(z) \cdot (z - z_0)$ .

**269.** Обозначим  $P(z) = a_0 z^n + \dots + a_{n-1} z + a_n$ . По основной теореме алгебры комплексных чисел уравнение  $P(z) = 0$  имеет некоторый корень  $z_1$ . По теореме Безу (см. 268)  $P(z) = (z - z_1)Q(z)$ , причем легко видеть, что  $Q(z)$  имеет вид  $Q(z) = a_0 z^{n-1} + b_1 z^{n-2} + \dots + b_{n-1}$ . Если  $n - 1 \geq 1$  то уравнение  $Q(z) = 0$  имеет некоторый корень  $z_2$ , откуда  $Q(z) = (z - z_2)R(z)$  и  $R(z) = a_0 z^{n-2} + \dots$ . При этом  $P(z) = (z - z_1)(z - z_2)R(z)$ . Продолжая этот процесс дальше, получим на  $n$ -м шаге частное, являющееся постоянным комплексным числом, рав-

ным, очевидно,  $a_0$ . В результате получим разложение, указанное в задаче.

**270.** Обозначив  $P(z) = a_0 z^n + \dots + a_{n-1} z + a_n$ , получим (см. **212**)  $\overline{P(z)} = P(\bar{z})$ . По условию  $P(z_0) = 0$ . Отсюда  $P(\bar{z}_0) = \overline{P(z_0)} = \overline{0} = 0$ , т. е.  $\bar{z}_0$  — корень уравнения  $P(z) = 0$ .

**271.** Обозначим  $P(z) = a_0 z^n + \dots + a_{n-1} z + a_n$ . Так как все  $a_i$  — действительные числа и  $z_0$  — корень уравнения  $P(z) = 0$ , то  $\bar{z}_0$  также корень уравнения  $P(z) = 0$  (см. **270**).

Поскольку  $z_0$  — не действительное число, то  $z_0 \neq \bar{z}_0$ . Так как  $z_0$  и  $\bar{z}_0$  — корни уравнения  $P(z) = 0$ , то в разложении (см. **269**)  $P(z) = a_0(z - z_1)(z - z_2) \cdot \dots \cdot (z - z_n)$  должны быть сомножители  $(z - z_0)$  и  $(z - \bar{z}_0)$ . Можно записать:  $P(z) = (z - z_0)(z - \bar{z}_0)Q(z) = (z^2 - (z_0 + \bar{z}_0)z + z_0\bar{z}_0) \cdot Q(z)$ . Таким образом, многочлен  $P(z)$  делится на многочлен второй степени  $z^2 - (z_0 + \bar{z}_0)z + z_0\bar{z}_0$ , коэффициенты которого действительны (см. равенства перед задачей **211**, стр. **60**).

**272.** Пусть  $P(z)$  — данный многочлен. Если степень многочлена  $P(z)$  больше 2, то уравнение  $P(z) = 0$  имеет по основной теореме алгебры комплексных чисел некоторый корень  $z_0$ . Если  $z_0$  — действительное число, то разделим  $P(z)$  на  $z - z_0$ . Получим  $P(z) = (z - z_0)Q(z)$  (см. **268**). Если  $z_0$  — не действительное число, то многочлен  $P(z)$  делится на некоторый многочлен второй степени с действительными коэффициентами (см. **271**). В обоих случаях частное является многочленом, коэффициенты которого действительны, что видно, например, из процесса деления столбиком (см. стр. **56**). Это частное снова делится на некоторый многочлен с действительными коэффициентами первой или второй степени и т. д. Этот процесс продолжим до тех пор, пока очередное частное не будет иметь степень 1 или 2. В результате получим искомое разложение.

**273.**  $z^5 - z^4 - 2z^3 + 2z^2 + z - 1 = (z - 1)(z^4 - 2z^2 + 1) = (z - 1) \times (z^2 - 1)^2 = (z - 1)^3(z + 1)^2$ . *Ответ.* 1 — корень кратности 3; -1 — корень кратности 2.

**274.** Сравним коэффициенты при одинаковых степенях в левых и правых частях указанных равенств. Пусть

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n, \\ Q(z) = b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_{m-1} z + b_m.$$

Тогда  $P'(z) = a_0 n z^{n-1} + a_1(n-1)z^{n-2} + \dots + a_{n-1}$  и  $Q'(z) = b_0 m z^{m-1} + b_1(m-1)z^{m-2} + \dots + b_{m-1}$ . Легко видеть, что в случае а) коэффициенты при любой степени  $z^k$  в обеих частях равенства равны  $(a_{n-1-k} + b_{m-1-k})(k+1)$ , а в случае б) коэффициенты при  $z^k$  в обеих частях равенства равны  $ca_{n-1-k}(k+1)$ .

Докажем в). Для удобства введем широко распространенный в математике символ суммы  $\sum$ . Запись  $\sum_{i=0}^n \left( \sum_{i+j=r} \right)$  означает, что нужно рассмотреть выражение, стоящее справа от этого знака, при  $i = 0, 1, 2, \dots, n$  (соответственно при всех парах  $i, j$  таких, что  $i + j = r$ ) и все полученные выражения сложить. В этих

обозначениях получаем

$$P(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^{n-i}, \quad Q(z) = \sum_{j=0}^m b_j z^{m-j},$$

$$P'(z) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i (n-i) z^{n-i-1}, \quad Q'(z) = \sum_{j=0}^m b_j (m-j) z^{m-j-1}.$$

Пусть  $k$  — произвольное целое число от 0 до  $n+m-1$ . Найдем коэффициент при  $z^{k+1}$  в произведении  $(z) \cdot Q(z)$ . Так как  $(n-i) + (m-j) = k+1$  тогда и только тогда, когда  $i+j = n+m-k-1$ , то коэффициент при  $z^{k+1}$  после раскрытия скобок и приведения подобных членов в многочлене  $P(z) \cdot Q(z)$  будет равен  $\sum_{\substack{i+j= \\ =n+m-k-1}} a_i b_j$ .

Поэтому коэффициент при  $z^k$  в многочлене  $(P(z) \cdot Q(z))'$  равен  $\sum_{\substack{i+j= \\ =n+m-k-1}} a_i b_j (k+1)$ . Точно так же получаем, что коэффициент

при  $z^k$  в многочлене  $P'(z) \cdot Q(z)$  равен  $\sum_{\substack{i+j= \\ =n+m-k-1}} a_i b_j (n-i)$ , а в многочлене  $P(z) \cdot Q'(z)$  равен  $\sum_{\substack{i+j= \\ =n+m-k-1}} a_i b_j (m-j)$ . Таким образом,

коэффициент при  $z^k$  в многочлене  $P'(z) \cdot Q(z) + P(z) \cdot Q'(z)$  равен

$$\sum_{\substack{i+j= \\ =n+m-k-1}} a_i b_j ((n-i) + (m-j)) =$$

$$= (\text{так как } (n-i) + (m-j) = k+1) = \sum_{\substack{i+j= \\ =n+m-k-1}} a_i b_j (k+1),$$

что совпадает с коэффициентом при  $z^k$  в многочлене  $(P(z) \cdot Q(z))'$ .

**275.** При  $n=1$  утверждение верно, так как  $(z-z_0)' = 1 = 1 \times (z-z_0)^0$ . При  $n=2$  оно также верно:  $((z-z_0)^2)' = (z^2 - 2z_0z + z_0^2)' = 2z - 2z_0 = 2(z-z_0)'$ . Пусть утверждение верно при  $n=k$  т. е.  $((z-z_0)^k)' = k(z-z_0)^{k-1}$ . Докажем, что оно верно тогда и при  $n=k+1$ . Получаем  $((z-z_0)^{k+1})' = ((z-z_0)^k \cdot (z-z_0))' = (\text{см. 274 в}) = ((z-z_0)^k)' \cdot (z-z_0) + (z-z_0)^k \cdot (z-z_0)' = k(z-z_0)^{k-1} \cdot (z-z_0) + (z-z_0)^k = (k+1)(z-z_0)^k$ . Таким образом, если наше утверждение верно при  $n=k$ , то оно верно и при  $n=k+1$ . Так как оно верно при  $n=1$  и  $n=2$ , то оно верно при всех целых  $n \geq 1$ .

**276.** По условию  $P(z) = (z-z_0)^k \cdot Q(z)$ , где многочлен  $Q(z)$  не делится на  $z-z_0$ . Отсюда  $P'(z) = (\text{см. 274 в}) = ((z-z_0)^k)' \cdot Q(z) + (z-z_0)^k \cdot Q'(z) = (\text{см. 275}) = k(z-z_0)^{k-1}Q(z) + (z-z_0)^k Q'(z) = (z-z_0)^{k-1}(kQ(z) + (z-z_0)Q'(z))$ . Многочлен, стоящий в последней скобке, не делится на  $z-z_0$ , так как иначе многочлен  $Q(z)$  должен был бы делиться на  $z-z_0$ . Таким образом, многочлен  $P'(z)$  делится на  $(z-z_0)^{k-1}$  и не делится на  $(z-z_0)^k$ . Что и требовалось доказать.

**277.** Ответ. а)  $\pm 1$ , б)  $\pm i$ , в)  $\pm(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2})$ , г)  $\pm(\frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2})$

(здесь  $\sqrt{2}$  и  $\sqrt{6}$  — положительные значения корней).

**278.** Непрерывным образом верхней (соответственно нижней) полуокружности при отображении  $w = \sqrt{z}$ , начинающимся в точке  $w = 1$ , является дуга  $AB$  (соответственно дуга  $AC$ ) (рис. 64). Кривая  $AB$  оканчивается в точке  $i$ , кривая  $AC$  — в точке  $-i$ .

Ответ. а)  $w(-1) = i$ , б)  $w(-1) = -i$ .

**279.** При  $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$   $w_0(t)$  может принимать два значения:  $w_0(t) = \pm i\sqrt{1-2t}$  (значение корня берется положительным). При  $\frac{1}{2} < t \leq 1$

$w_0(t)$  может принимать также два значения:  $w_0(t) = \pm\sqrt{2t-1}$ . При  $t = \frac{1}{2}$   $w_0(t)$  принимает одно значение:  $w(\frac{1}{2}) = 0$ .

Ответ (см. рис. 65). а) Непрерывные образы — ломаные  $AOB$  и  $AOC$ , б) непрерывные образы — ломаные  $DOB$  и  $DOC$ .

**280.** Пусть  $C_1$  — непрерывный образ кривой  $C$  при отображении  $w = \sqrt{z}$ , и пусть изменение аргумента вдоль кривой  $C_1$  равно  $\varphi_1$ . Тогда кривая  $C$  является образом кривой  $C_1$  при отображении  $z = w^2$ , поэтому (см. 262 а))  $\varphi = 2\varphi_1$ . Отсюда  $\varphi_1 = \frac{\varphi}{2}$ .

Ответ.  $\frac{\varphi}{2}$ .

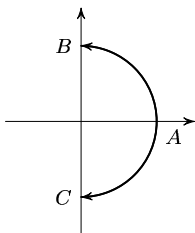


Рис. 64

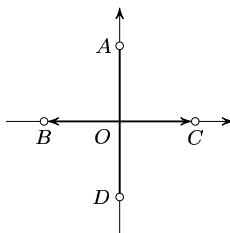


Рис. 65

**281.** Пусть  $w = \sqrt{z}$  и  $w_0(t)$  — непрерывный образ данной кривой. Так как  $i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$ , то  $\sqrt{i}$  (и  $w_0(1)$ ) может принимать два значения:  $\cos \frac{\pi}{4} + i \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$  и  $\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}$ . По условию  $w_0(0) = -1$ , и можно считать  $\text{Arg } w_0(0) = \pi$ .

а) Изменение аргумента вдоль данного отрезка равно, очевидно,  $\frac{\pi}{2}$ .

Поэтому (см. 280) изменение аргумента вдоль кривой  $w_0(t)$  равно  $\frac{\pi}{4}$  и аргумент  $w_0(1)$  равен  $\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$ .

Ответ.  $\sqrt{i} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

б)  $z(t) = \cos\left(-\frac{3\pi t}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{3\pi t}{2}\right)$ . Чтобы  $\text{Arg } z(t)$  изменялся непрерывно, можно выбрать  $\varphi(t) = -\frac{3\pi t}{2}$ . Изменение аргумента вдоль кривой:  $\varphi(1) - \varphi(0) = -\frac{3\pi}{2}$ . Следовательно, изменение аргумента вдоль кривой  $w_0(t)$  (см. 280) равно  $-\frac{3\pi}{4}$  и аргумент  $w_0(1)$  равен  $\pi + \left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$ .

Ответ.  $\sqrt{i} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

в)  $\varphi(t) = \frac{5\pi t}{2}$ . Изменение аргумента вдоль данной кривой:  $\varphi(1) - \varphi(0) = \frac{5\pi}{2}$ . Изменение аргумента вдоль кривой  $w_0(t)$  равно  $\frac{5\pi}{4}$ . Аргумент  $w_0(1)$  равен  $\pi + \frac{5\pi}{4} = \frac{9\pi}{4}$ .

Ответ.  $\sqrt{i} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

**282.** Пусть  $w = \sqrt{z}$ ,  $w_0(t)$  — непрерывный образ данной кривой и  $w_0(0) = 1$ . Надо определить  $w_0(1)$ . Можно считать  $\text{Arg } w_0(0) = 0$ .

а) Изменение  $\text{Arg } z(t)$  равно  $2\pi$ . Поэтому изменение  $\text{Arg } w_0(t)$  равно  $\pi$  (см. 280).  $\text{Arg } w_0(1) = 0 + \pi = \pi$ .

Ответ.  $\sqrt{1} = -1$ .

б)  $z(t) = \cos(-4\pi t) + i \sin(-4\pi t)$ . Изменение  $\text{Arg } z(t)$  равно  $-4\pi$ . Изменение  $\text{Arg } w_0(t)$  равно  $-2\pi$ .  $\text{Arg } w_0(1) = 0 - 2\pi = -2\pi$ .

Ответ.  $\sqrt{1} = 1$ .

в) Данная кривая — окружность единичного радиуса, центр которой сдвинут в точку  $z = 2$  (см. 246 а)). Эта кривая ни разу не обходит вокруг точки  $z = 0$ , поэтому изменение  $\text{Arg } z(t)$  равно 0. Отсюда изменение  $\text{Arg } w_0(t)$  также равно 0.

Ответ.  $\sqrt{1} = 1$ .

**283.** Пусть  $w_0(t)$  — непрерывный образ кривой  $C$  при отображении  $w = \sqrt{z}$ . Так как  $z(1) = z(0)$ , то  $w_0(1) = w_0(0)$ , или  $w_0(1) = -w_0(0)$ , и для выполнения равенства  $w_0(1) = w_0(0)$  необходимо и достаточно, чтобы изменение  $\text{Arg } w_0(t)$  было равно  $2\pi k$ , где  $k$  — целое число. Для этого изменение  $\text{Arg } z(t)$  должно быть равным  $4\pi k$  (см. 280), т. е. кривая  $C$  должна обходить вокруг точки  $z = 0$   $2k$  раз.

**284.** Пусть кривая  $L_1$  — непрерывный образ кривой  $C_1$ , а  $L_2$  — непрерывный образ кривой  $C_2$  при отображении  $w = \sqrt{z}$ . Если кривые  $L_1$  и  $L_2$  начинаются в одной и той же точке  $w_0$  (рис. 66), то кривая  $L_1^{-1}L_2$ , является непрерывным образом кривой  $C_1^{-1}C_2$ . Начало и конец кривой  $L_1^{-1}L_2$  (точки  $A$  и  $B$ ) будут совпадать тогда и только тогда, когда кривая  $C_1^{-1}C_2$  обходит вокруг точки  $z = 0$  четное число раз (см. 283).

**285.** Пусть  $C$  — некоторая кривая, не проходящая через разрез и идущая из точки  $z_0$  в точку  $z_1$ . Предположим, что, выбирая разные значения в точке  $z_0$  и определяя функцию  $\sqrt{z}$  по непрерывности вдоль кривой  $C$ , мы получили одинаковые значения в точке  $z$ . Рассмотрим тогда кривую  $C^{-1}$ , т. е. кривую  $C$ , проходимую в противоположном

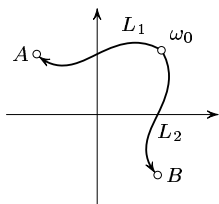


Рис. 66

направлении. Получим, что значение в начальной точке кривой  $C^{-1}$  (в точке  $z$ ) в обоих случаях одно и то же, но значения в конечной точке (в точке  $z_0$ ), определенные по непрерывности, различны. Этого не может быть в силу однозначности образа, так как кривая  $C$  не проходит через точку  $z = 0$ . Значит, наше предположение о том, что  $1\sqrt{z} = 2\sqrt{z}$ , неверно.

**286.** Пусть  $z$  — произвольная точка, не лежащая на разрезе, и пусть  $C_1$  — непрерывная кривая, идущая из точки  $z'$  в точку  $z$  и не пересекающая разрез. Проведем непрерывную кривую  $C_2$ , не пересекающую разрез, из точки  $z_0$  в точку  $z'$ . (рис. 67) По условию выбрано значение  $w' = 1\sqrt{z'}$ . Это означает, что если мы выберем  $\sqrt{z_0} = w'_0$  и определим  $\sqrt{z'}$  по непрерывности вдоль кривой  $C_2$ , то получим именно  $w'$ . Но тогда значение  $\sqrt{z}$ , определенное по непрерывности вдоль кривой  $C_1$  при условии  $\sqrt{z'} = w'$  совпадает, как легко видеть, со значением  $\sqrt{z}$ , определенным по непрерывности вдоль кривой  $C_2C_1$  при условии  $\sqrt{z_0} = w'_0$ . То есть значение  $\sqrt{z}$  при любом  $z$ , не лежащем на разрезе, оказывается равным  $1\sqrt{z}$ .

**287.** Пусть  $C_1$  — непрерывная кривая, идущая из точки  $z_0$  в точку  $z_1$ , и не пересекающая разрез (рис. 68). Пусть  $w'_1 = \sqrt{z_1}$  — значение функции  $\sqrt{z}$ , определенное по непрерывности вдоль кривой  $C_1$  при условии  $\sqrt{z_0} = w_0$ . Так как кривая  $C_1$  не пересекает разрез, то значения  $w_0$  и  $w'_1$  соответствуют одной и той же ветви функции  $\sqrt{z}$ . Кривая  $C_1^{-1}C_2$  один раз обходит вокруг точки  $z = 0$ . Поэтому значения  $w_1$  и  $w'_1$ , различны (см. 283). Так как  $w_0$  и  $w'_1$  соответствуют одной и той же ветви функции  $\sqrt{z}$ , то  $w_0$  и  $w_1$  соответствуют разным ветвям.

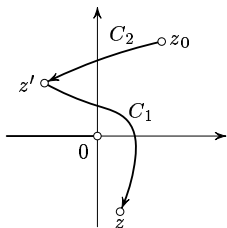


Рис. 67

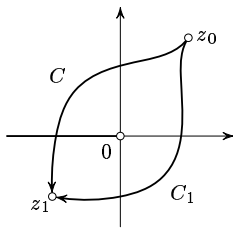


Рис. 68

**288.** Если  $z_0 \neq 0$ , то окружности с центром в точке  $z_0$  и с достаточно малым радиусом ни разу не обходят вокруг точки  $z = 0$ . Поэтому изменение  $\text{Arg } z(t)$  вдоль таких окружностей равно 0 и, следовательно, изменение  $\text{Arg } w_0(t)$  равно 0, т. е. значение  $\sqrt{z}$  не изменяется. Изменение  $\text{Arg } z(t)$  вдоль окружностей с центром в точке  $z = 0$  равно  $2\pi$ . В этом случае изменение  $\text{Arg } w_0(t)$  равно  $\pi$ . Поэтому значение  $\sqrt{z}$  при обходе вокруг точки  $z = 0$  меняется на противоположное.

**289.** Кривая  $z(t)$  является образом кривой  $w_0(t)$  при отображении  $z(w) = w^3$ . Поэтому, если  $\varphi_1$  — изменение аргумента вдоль кривой  $w_0(t)$ , то  $\varphi = 3\varphi_1$  (см. 262 б)). Отсюда  $\varphi_1 = \frac{\varphi}{3}$ .

**290.** Если  $z_0 \neq 0$ , то окружности с центром в точке  $z_0$  и с достаточно малым радиусом ни разу не обходят вокруг точки  $z = 0$ .

Поэтому изменение  $\operatorname{Arg} z(t)$  вдоль таких окружностей равно 0. Но тогда и изменение  $\operatorname{Arg} w_0(t)$  равно 0 (см. 289), т. е. значение функции  $w = \sqrt[3]{z}$  не изменяется. Значит, любая точка  $z \neq 0$  не является точкой разветвления.

Изменение  $\operatorname{Arg} z(t)$  вдоль любой окружности с центром в точке  $z = 0$  равно  $2\pi$ . Поэтому изменение  $\operatorname{Arg} w_0(t)$  в этом случае равно  $\frac{2\pi}{3}$ . Следовательно, при однократном обходе вокруг точки  $z = 0$  значение функции  $w = \sqrt[3]{z}$  умножается на  $\varepsilon_3 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$ , т. е. точка  $z = 0$  является точкой разветвления многозначной функции  $\sqrt[3]{z}$ .

Ответ.  $z = 0$ .

**291.** Пусть  $z(t)$  — непрерывная кривая, не проходящая через разрез и идущая из точки  $z = 1$  в данную точку. Пусть  $w_0(t)$  — непрерывный образ этой кривой при отображении  $w = \sqrt[3]{z}$  и  $\operatorname{Arg} w_0(0)$  выбран равным  $\varphi_0$ . Если изменение  $\operatorname{Arg} z(t)$  равно  $\varphi$ , то изменение  $\operatorname{Arg} w_0(t)$  равно  $\frac{\varphi}{3}$  (см. 289). Поэтому  $\operatorname{Arg} w_0(1) = \varphi_0 + \frac{\varphi}{3}$ . По условию можно считать  $\varphi_0 = 0$  для ветви  $f_1(z)$ ,  $\varphi_0 = \frac{2\pi}{3}$  для ветви  $f_2(z)$  и  $\varphi_0 = -\frac{2\pi}{3}$  для ветви  $f_3(z)$ .

а)  $\varphi_0 = 0$ ,  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ,  $\operatorname{Arg} w_0(1) = \frac{\pi}{6}$ .

Ответ.  $f_1(i) = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$ .

б)  $\varphi_0 = \frac{2\pi}{3}$ ,  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ,  $\operatorname{Arg} w_0(1) = \frac{5\pi}{6}$ .

Ответ.  $f_2(i) = \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$ .

в)  $\varphi_0 = 0$ ,  $\varphi = 0$ ,  $\operatorname{Arg} w_0(1) = 0$ .

Ответ.  $f_1(8) = 2$ .

г)  $\varphi_0 = -\frac{2\pi}{3}$ ,  $\varphi = 0$ ,  $\operatorname{Arg} w_0(1) = -\frac{2\pi}{3}$ .

Ответ.  $f_3(8) = 2(\cos \frac{2\pi}{3} - i \sin \frac{2\pi}{3}) = -1 - i\sqrt{3}$ .

д)  $\varphi_0 = -\frac{2\pi}{3}$ ,  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ ,  $\operatorname{Arg} w_0(1) = -\frac{5\pi}{6}$ .

Ответ.  $f_3(-i) = \cos \frac{5\pi}{6} - i \sin \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$ .

**292.** Так же как для функции  $w = \sqrt{z}$ , доказывается, что после проведения разреза из точки  $z = 0$  в  $\infty$ , например, по отрицательной части действительной оси функция  $w = \sqrt[3]{z}$  распадается на три однозначные непрерывные ветви. При однократном обходе вокруг точки  $z = 0$  (против часовой стрелки)  $\operatorname{Arg} w$  изменяется на  $\frac{2\pi}{3}$ , при двукратном обходе на  $\frac{4\pi}{3}$  и только после обхода точки  $z = 0$  три раза значение функции  $w = \sqrt[3]{z}$  становится равным исходному. Поэтому схема римановой поверхности функции  $w = \sqrt[3]{z}$  выглядит так, как показано на рис. 69. Саму риманову поверхность можно условно изобразить так, как показано на рис. 70 (на самом деле 3 выделенные точки должны быть склеены в одну точку).

**293.** Предположим сначала, что кривая  $C$  не проходит через точку  $z = 0$ . Пусть  $\varphi(t)$  — функция, описывающая непрерывное изменение  $\operatorname{Arg} z(t)$  (см. теорему 6, стр. 74), и  $r(t) = |z(t)|$ . Тогда  $\varphi(t)$  и  $r(t)$  —



непрерывные функции и

$$z(t) = r(t)(\cos \varphi(t) + i \sin \varphi(t)).$$

Пусть  $\rho(t)$  — положительное действительное значение  $\sqrt[n]{r(t)}$ . Тогда  $\rho(t)$  — непрерывная функция (см. **243**) и  $n$  непрерывных кривых с параметрическими уравнениями

$$w_k(t) = \rho(t) = \left( \cos\left(\frac{\varphi(t)}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\varphi(t)}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) \right),$$

$$k = 0, 1, \dots, n-1,$$

являются, непрерывными образами кривой  $z(t)$  при отображении  $w(z) = \sqrt[n]{z}$  (см. **229**). Так как  $w_k(0)$  для этих кривых принимает все  $n$  значений  $\sqrt[n]{z(0)}$ , то одна из этих кривых начинается в точке  $w_0$ .

Если кривая  $C$  проходит через точку  $z = 0$ , то точки, в которых  $z(t) = 0$ , разбивают кривую  $C$  на части. В этом случае построим, как выше, по одному непрерывному образу для каждой части, причем для начальной части возьмем образ, начинающийся в точке  $w_0$ . Если  $z(t) = 0$ , то и  $w(z(t)) = 0$ . Поэтому полученные образы можно объединить в единую непрерывную кривую, которая и будет искомой.

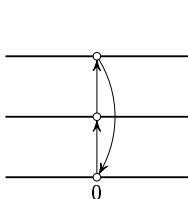


Рис. 69

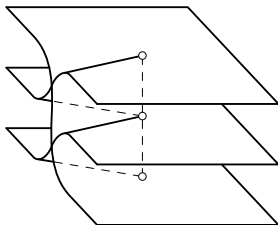


Рис. 70

**294.** См. решения **280** и **289**. Ответ.  $\varphi/n$ .

**295.** См. решение **290**. Ответ.  $z = 0$ .

**296.**  $w_0(t)$  при каждом  $t$  является одним из значений  $\sqrt[n]{z(t)}$ . Поэтому все значения  $\sqrt[n]{z(t)}$  при данном  $t$  — это (см. **232**)  $w_0(t)$ ,  $w_0(t) \times \varepsilon_n$ ,  $w_0(t) \cdot \varepsilon_n^2$ ,  $\dots$ ,  $w_0(t) \cdot \varepsilon_n^{n-1}$ . Так как значение  $\sqrt[n]{z}$  в начальной точке кривой  $z(t)$  может быть выбрано  $n$  способами, то имеется ровно  $n$  непрерывных образов кривой  $z(t)$  при отображении  $w = \sqrt[n]{z}$  (однозначность может нарушаться только в точке  $z = 0$ , но кривая  $z(t)$  через нее не проходит). Такими  $n$  непрерывными образами являются кривые  $w_0(t)$ ,  $w_1(t) = w_0(t)\varepsilon_n$ ,  $w_2(t) = w_0(t)\varepsilon_n^2$ ,  $\dots$ ,  $w_{n-1}(t) = w_0(t) \cdot \varepsilon_n^{n-1}$ .

Ответ.  $w_0(t)$ ,  $w_1(t) = w_0(t) \cdot \varepsilon_n$ ,  $w_2(t) = w_0(t) \cdot \varepsilon_n^2$ ,  $\dots$ ,  $w_{n-1}(t) = w_0(t) \cdot \varepsilon_n^{n-1}$ .

**297.** Ответ.  $f_i(z) = f_0(z) \cdot \varepsilon_n^i$ .

Решение. Пусть  $z(t)$  — любая кривая, не проходящая через разрез и идущая из точки  $z = 1$  в произвольную точку. Из решения задачи **296** получаем, что если значение функции в начальной точке этой кривой умножить на  $\varepsilon_n^k$ , то значение в конечной точке, определенное по непрерывности, также умножится на  $\varepsilon_n^k$ . Поэтому  $f_i(z) = f_0(z) \cdot \varepsilon_n^i$ .

**298.** При решении задачи **297** мы получили, что  $n$  ветвей функции  $\sqrt[n]{z}$  связаны следующим соотношением:  $f_i(z) = f_0(z) \cdot \epsilon_n^i$  ( $i = 0, 1, \dots, n-1$ ). Единственной точкой разветвления функции  $\sqrt[n]{z}$  является точка  $z = 0$ . При однократном обходе этой точки аргумент функции  $\sqrt[n]{z}$  изменяется на  $\frac{2\pi}{n}$  (см. **294**), т. е. значение функции умножается на  $\epsilon_n$ . Поэтому схема римановой поверхности функции  $\sqrt[n]{z}$  имеет вид, указанный на рис. **71**.

**299.**  $\text{Arg}(z-1)$  изменяется на  $2\pi$  при обходе вокруг точки  $z = 1$  и не изменяется при обходе вокруг любой другой точки (по окружности достаточно малого радиуса). Поэтому  $\text{Arg} \sqrt{z-1}$  изменяется на  $\pi$  при обходе вокруг точки  $z = 1$  и не изменяется при обходе вокруг любой другой точки. Следовательно, единственной точкой разветвления является точка  $z = 1$ , при обходе которой значение функции  $\sqrt{z-1}$  умножается на  $-1$ . Так же как для функции  $w = \sqrt{z}$ , доказывается, что после проведения какого-либо разреза из точки  $z = 1$  в  $\infty$  на полученной плоскости с разрезом выделяются однозначные непрерывные ветви функции  $w = \sqrt{z-1}$ . Схема римановой поверхности функции  $\sqrt{z-1}$  показана на рис. **72**.

**300.** См. решение **299**. Единственной точкой разветвления является точка  $-i$  (так как  $z+i = z-(-i)$ ), при обходе которой значение функции  $\sqrt[n]{z+i}$  умножается на  $\epsilon_n$ . Схема римановой поверхности функции  $\sqrt[n]{z+i}$  показана на рис. **73**.

**301.** У к а з а н и е. Рассмотрите отображение  $w = \sqrt[n]{f(z)}$  как композицию двух отображений:  $\tau = f(z)$  и  $w = \sqrt[n]{\tau}$  (см. **293**).

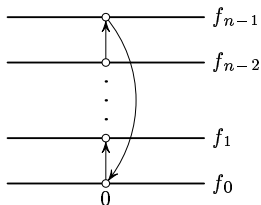


Рис. 71

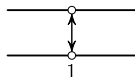


Рис. 72

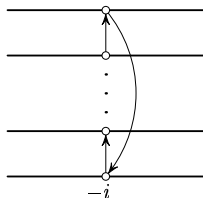


Рис. 73

**302.** Отображение  $w(z) = \sqrt[n]{f(z)}$  можно представить как композицию двух отображений:

$$\tau(z) = f(z) \quad \text{и} \quad w(\tau) = \sqrt[n]{\tau}.$$

Если  $C$  — непрерывная кривая на плоскости  $z$ , то на плоскости  $\tau$  имеется ровно один образ  $C' = f(C)$  этой кривой. Так как  $f(z)$  — непрерывная функция, то  $C'$  — непрерывная кривая. Если кривая  $C''$  с уравнением  $w_0(t)$  — один из непрерывных образов кривой  $C'$  при отображении  $w(\tau) = \sqrt[n]{\tau}$ , то кривые с уравнениями  $w_i(t) = w_0(t)\epsilon_n^i$  ( $i = 1, \dots, n-1$ ) также являются непрерывными образами кривой  $C'$  при отображении  $w(\tau) = \sqrt[n]{\tau}$  (см. **296**) и, следовательно, являются непрерывными образами кривой  $C$  при отображении  $w(z) = \sqrt[n]{f(z)}$ . Поэтому, если значение функции  $w(z) = \sqrt[n]{f(z)}$  в начальной точке

кривой  $C$  умножить на  $\epsilon_n^i$ , то значение в конечной точке кривой  $C$ , определенное по непрерывности, также умножится на  $\epsilon_n^i$ . Таким образом, если  $w_0(z)$  — непрерывная однозначная ветвь функции  $\sqrt[n]{f(z)}$ , то все непрерывные однозначные ветви — это  $w_0(z)$ ,  $w_0(z)\epsilon_n$ ,  $w_0(z) \cdot \epsilon_n^2$ ,  $\dots$ ,  $w_0(z) \cdot \epsilon_n^{n-1}$ .

Ответ.  $w_0(z)$ ,  $w_1(z) = w_0(z)\epsilon_n$ ,  $w_2(z) = w_0(z) \cdot \epsilon_n^2$ ,  $\dots$ ,  $w_{n-1}(z) = w_0(z) \cdot \epsilon_n^{n-1}$ .

**303.** а) При обходе точек  $z = 0$  или  $z = i \operatorname{Arg}(z(z-i))$  изменяется на  $2\pi$  (см. **260**), а  $\operatorname{Arg} \sqrt{z(z-i)}$  изменяется на  $\pi$  (см. **280**), т. е. значение функции  $\sqrt{z(z-i)}$  умножается на  $-1$ . Для выделения однозначных непрерывных ветвей функции  $\sqrt{z(z-i)}$  достаточно провести непересекающиеся разрезы из точек  $z = 0$  и  $z = i$  в  $\infty$  (доказательство такое же, как для функции  $w = \sqrt{z}$ ). Схема римановой поверхности функции  $\sqrt{z(z-i)}$  показана на рис. **74**.

б) См. рис. **75**. Указание.  $z^2 + 1 = (z-i)(z+i)$ .

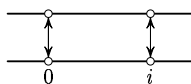


Рис. 74

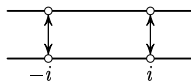


Рис. 75

**304.** См. **303**. а) Так как  $z^2 - 1 = (z-1)(z+1)$ , то при обходе точек  $z = 1$  и  $z = -1$  значение функции  $\sqrt[3]{z^2 - 1}$  умножается на  $\epsilon_3 = \cos 2\pi/3 + i \sin 2\pi/3$ . Искомая схема изображена на рис. **76**.

б) При обходе точки  $z = 0$  значение функции  $\sqrt[3]{(z-1)^2 z}$  умножается на  $\epsilon_3$ . При обходе точки  $z = 1 \operatorname{Arg}((z-1)^2 z)$  изменяется на  $4\pi$  и  $\operatorname{Arg} \sqrt[3]{(z-1)^2 z}$  изменяется на  $4\pi/3$  т. е. значение функции  $\sqrt[3]{(z-1)^2 z}$  умножается на  $\epsilon_3^2$ . Искомая схема изображена на рис. **77**.

в) См. рис. **78**. Указание.  $z^2 + 1 = (z-i)(z+i)$ .

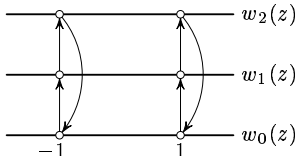


Рис. 76

**305.** Однозначными непрерывными ветвями функции  $\sqrt{z^2}$  во всей плоскости  $z$  являются  $w_0(z) = z$ ,  $w_1(z) = -z$ . При обходе вокруг точки  $z = 0 \operatorname{Arg} z^2$  изменяется на  $4\pi$  и  $\operatorname{Arg} \sqrt{z^2}$  на  $2\pi$ , т. е. значение функции  $\sqrt{z^2}$  не изменяется. Искомая схема состоит из двух несоединяющихся листов.

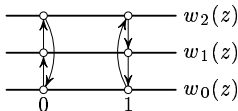


Рис. 77

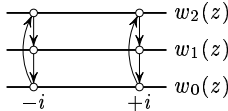


Рис. 78

**306.** Задача решается так же, как и задача **304**. а) См. рис. **79**. Указание.  $z^2 + 2 = (z - i\sqrt{2})(z + i\sqrt{2})$ . б) См. рис. **80**. в) См. рис. **81**.

г) См. рис. 82. Указание.  $(z^2 - 1)^3(z + 1)^3 = (z - 1)^3(z + 1)^6$ . д) См. рис. 83. Указание.  $z^3 - 1 = (z - 1)(z - \epsilon_3)(z - \epsilon_3^2)$ .

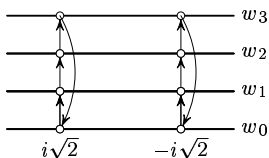


Рис. 79

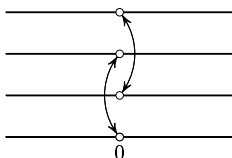


Рис. 80

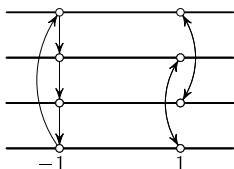


Рис. 81

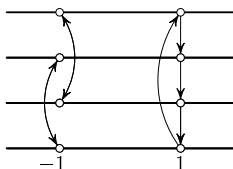


Рис. 82

**307.** См. рис. 84. Указание. При обходе вокруг точки  $z = 0$   $\text{Arg } z$  изменяется на  $2\pi$ ,  $\text{Arg } 1/z$  — на  $-2\pi$  (см. 260 б)) и  $\text{Arg } \sqrt{1/z}$  на  $-\pi$ , т. е. значение функции  $\sqrt{1/z}$  умножается на  $-1$ .

**308.** а) См. рис. 85. б) При обходе точки  $z = 1$   $\text{Arg } \frac{z-1}{z+1}$  изменяется

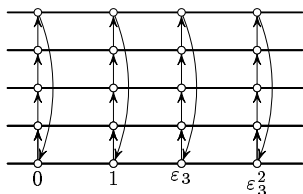


Рис. 83

на  $2\pi$ , а при обходе точки  $z = -1$  — на  $-2\pi$  (см. 260). Поэтому при обходе точки  $z = 1$  значение функции  $\sqrt[3]{\frac{z-1}{z+1}}$  умножается на  $\epsilon_3$  а при обходе точки  $z = -1$  умножается на  $\epsilon_3^{-1} = \epsilon_3^2$ . Искомая схема изображена на рис. 86. в) См. рис. 87.

**309.** Пусть в некоторой точке  $z_0$  зафиксировано произвольное значение  $w_0 = w(z_0)$ , и пусть  $z_1$  — некоторая другая точка. Если  $C_1$  и  $C_2$  — произвольные непрерывные кривые, идущие из  $z_0$  в  $z_1$  и не пересекающие разрез (рис. 88), то, очевидно, кривую  $C_1$  можно непрерывно деформировать в кривую  $C_2$ ,

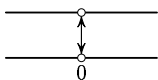


Рис. 84

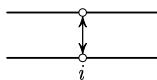


Рис. 85

не проходя через точки разветвления. Так как функция  $w(z)$  обладает свойством монодромии, то значения  $w(z_1)$ , определенные по непрерывности вдоль кривых  $C_1$  и  $C_2$  совпадают. Следовательно,

значение  $w(z_1)$  определяется по непрерывности одинаково вдоль любой кривой, идущей из  $z_0$  в  $z_1$  и не пересекающей разрезов.

**310.** См. рис. 89. Пусть с  $i$ -й ветви при движении по  $AB$  мы переходим на  $j$ -ю ветвь. Посмотрим на какую ветвь мы перейдем с  $i$ -й ветви при движении по  $CD$ . Так как у функции  $w(z)$  конечное число точек разветвления, то кривые  $AB$  и  $CD$  можно выбрать настолько короткими, а кривые  $CA$  и  $BD$  настолько близкими к разрезу, что внутри кривой  $CABDC$  не будет точек разветвления функции  $w(z)$ . В таком случае кривую  $CABD$  можно, очевидно, непрерывно деформировать в кривую  $CD$ , не проходя через точки разветвления. Так как функция  $w(z)$  обладает свойством монодромии, то функция  $w(z)$  в точке  $D$  одинаково определяется по непрерывности вдоль кривых  $CD$  и  $CABD$ . Начиная с  $i$ -й ветви и двигаясь по кривой  $CABD$ , мы сначала находимся на  $i$ -й ветви, затем переходим на  $j$ -ю ветвь и затем движемся по  $j$ -й ветви. Таким образом, по кривой  $CABD$ , а следовательно, и по кривой  $CD$  мы с  $i$ -й ветви переходим на  $j$ -ю ветвь, т. е. так же, как и по кривой.

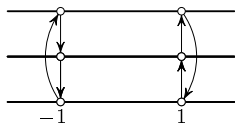


Рис. 86

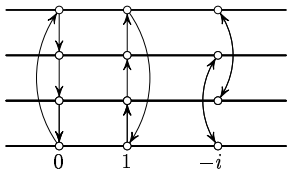


Рис. 87

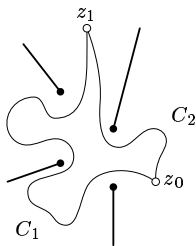


Рис. 88

**311.** а) Указание.  $\sqrt[3]{-8} = -2\epsilon_3^i$  ( $i = 0, 1, 2$ ),  $\sqrt{2i} = \pm(1 + i)$ .  
 Ответ. (здесь  $\sqrt{3}$  — положительное значение корня).  $-1 + i$ ,  $-3 - i$ ,  $2 + (\sqrt{3} + 1)i$ ,  $(\sqrt{3} - 1)i$ ,  $2 + (1 - \sqrt{3})i$ ,  $-(\sqrt{3} + 1)$ ; б)  $\pm(1/2 + i)$ ,  $\pm 1/2$ ; в)  $\pm(1 + i) \geq 0$ ; г)  $\pm(1 + i)$  д)  $4i, 0$ .

**312.** Указание. Достаточно доказать, что указанным в задаче свойством обладают функции  $h(z) = z$  и  $h(z) = a$ , и что если указанным свойством обладают функции  $f(z)$  и  $g(z)$ , то им обладают также функции  $f(z) + g(z)$ ,  $f(z) - g(z)$ ,  $f(z) \cdot g(z)$ ,  $f(z)/g(z)$ ,  $[f(z)]^n$ ,  $\sqrt[n]{f(z)}$  ( $n$  — натуральное число).

Решение. 1) Если  $h(z) = z$ , то  $w_0 = h(z_0) = z_0$ . Искомой кривой является кривая с параметрическим уравнением  $w_0(t) = z(t)$ , где  $z(t)$  — параметрическое уравнение кривой  $C$ .

2) Если  $h(z) = a$ , то  $w_0 = a$  и искомой кривой является кривая с уравнением  $w_0(t) = a$  (вырождающаяся в точку).

3) Пусть  $h(z) = f(z) + g(z)$  и для  $f(z)$  и  $g(z)$  утверждение задачи верно. По определению суммы двух многозначных функций  $w_0 = w'_0 + w''_0$ , где  $w'_0$  — одно из значений  $f(z_0)$  и  $w''_0$  — одно из значений

$g(z_0)$ . Так как для  $f(z)$  и  $g(z)$  утверждение задачи верно, то существуют непрерывные образы  $C' = f(C)$  и  $C'' = g(C)$ , начинающиеся соответственно в точках  $w'_0$  и  $w''_0$ . Если  $w'(t)$  и  $w''(t)$  — параметрические уравнения кривых  $C'$  и  $C''$ , то функция  $w_0(t) = w'(t) + w''(t)$  (она

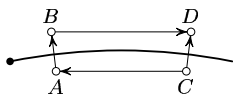


Рис. 89

непрерывна как сумма непрерывных функций) является параметрическим уравнением искомой кривой, так как  $w_0(0) = w'(0) + w''(0) = w'_0 + w''_0 = w_0$ . Точно так же рассматриваются случаи  $h(z) = f(z) - g(z)$ ,

$$h(z) = f(z) \cdot g(z), h(z) = [f(z)]^n, h(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$$

(в последнем случае искомая функция непрерывна  $w_0(t) = \frac{w'(t)}{w''(t)}$  так как по условию кривая  $C$  не проходит через точки, в которых функция  $h(z)$  не определена, и, следовательно,  $w''(t) \neq 0$ ).

4) Пусть  $h(z) = \sqrt[n]{f(z)}$  и для  $f(z)$  утверждение задачи верно. По определению функции  $\sqrt[n]{f(z)}$  имеем  $w_0^n = \tau_0$ , где  $\tau_0$  — одно из значений  $f(z_0)$ . Отображение  $h(z) = \sqrt[n]{f(z)}$  можно рассматривать как композицию двух отображений  $\tau = f(z)$  и  $w = \sqrt[n]{\tau}$ . Так как для функции  $f(z)$  утверждение задачи верно, то существует хотя бы один непрерывный образ  $C'$  кривой  $C$  при отображении  $\tau = f(z)$ , начинающийся в точке  $\tau_0$ . В силу утверждения задачи **293** существует хотя бы один непрерывный образ  $C''$  кривой  $C'$  при отображении  $w = \sqrt[n]{\tau}$ , начинающийся в точке  $w_0$ . Кривая  $C''$  является искомой.

**313.** В произвольной точке  $z_0$  функция  $h(z)$  может принимать  $nm$  значений:  $h_{i,j}(z_0) = f_i(z_0) + g_j(z_0)$ , где  $i = 1, \dots, n$ ;  $j = 1, \dots, m$ . Так как сумма непрерывных функций является непрерывной функцией, то искомыми однозначными непрерывными ветвями функции  $h(z)$  будут следующие  $nm$  функций:  $h_{i,j}(z) = f_i(z) + g_j(z)$ , где  $i = 1, \dots, n$ ;  $j = 1, \dots, m$ .

**314.** а) См. рис. **90**. Указание. Воспользуйтесь схемами римановых поверхностей функций  $\sqrt{z}$  и  $\sqrt{z-1}$  (см. **288**, **299**). б) См. рис. **91**. Указание. см. **304**, **307**. в) См. рис. **92**. Указание. см. **288**, **292**. г) См. рис. **93**. Указание. Постройте сначала схемы римановых поверхностей функций  $\sqrt{z^2-1}$  и  $\sqrt[4]{z-1}$ .

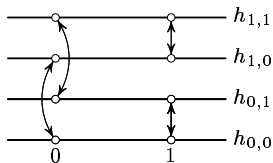


Рис. 90

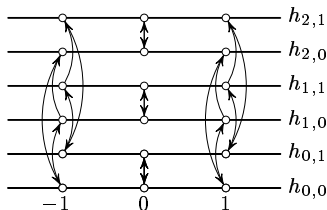


Рис. 91

**315.** Ответ. а) Три значения: 2, -2, 0. б) Семь значений: 2, 0,  $1+i$ ,  $-1+i$ , -2,  $1-i$ ,  $-1-i$ . в) Шесть значений: 2,  $2\varepsilon_3$ ,  $2\varepsilon_3^2$ ,  $1+\varepsilon_3$ ,  $1+\varepsilon_3^2$ , -1.

6) Пусть  $f_0(z)$  и  $f_1(z) = -f_0(z)$  — однозначные непрерывные ветви функции  $\sqrt{z}$ . Тогда  $f_0(z)^2 = z$ , поэтому  $[f_0(z)]^4 = z^2$ . Следовательно,  $f_0(z)$  — одна из однозначных непрерывных ветвей функции  $\sqrt[4]{z^2}$ . Все ветви этой функции:  $g_0(z) = f_0(z)$ ,  $g_1(z) = i \cdot f_0(z)$ ,  $g_2(z) = -f_0(z)$ ,  $g_3(z) = -i \cdot f_0(z)$ . Схема римановой поверхности функции  $h(z) = \sqrt{z} + \sqrt[4]{z^2}$ , построенная формальным методом, показана на рис. 96. Истинная схема (рис. 97) получается склейкой совпадающих ветвей  $h_{0,2}(z) \equiv 0$  и  $h_{1,0}(z) \equiv 0$ .

в) Пусть  $f_0(z)$  — одна из непрерывных однозначных ветвей функции  $\sqrt[3]{z}$ . Тогда все ветви:  $f_0(z)$ ,  $f_1(z) = f_0(z) \cdot \varepsilon_3$ ,  $f_2(z) = f_0(z) \cdot \varepsilon_3^2$ . Схема римановой поверхности функции  $h(z) = \sqrt[3]{z} + \sqrt[3]{z}$ , построенная формальными методом, показана на рис. 98. Для получения истинной схемы (рис. 99) необходимо склеить совпадающие ветви  $h_{0,1}(z)$  и  $h_{1,0}(z)$ ,  $h_{0,2}(z)$  и  $h_{2,0}(z)$ ,  $h_{1,2}(z)$  и  $h_{2,1}(z)$ .

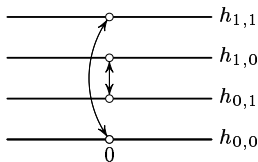


Diagram illustrating a three-level system with energy levels  $h_{0,1}$ ,  $h_{1,1}$ , and  $h_{0,0}$ . A vertical double-headed arrow between  $h_{1,1}$  and  $h_{0,0}$  is labeled 0.

**317.** а) Пусть  $f_0(z)$  и  $f_1(z) = -f_0(z)$  — однозначные непрерывные ветви функции  $\sqrt{z}$ . Тогда  $[f_0(z)]^2 = z$  и  $[f_0(z)]^4 = z^2$ . Поэтому однозначными непрерывными ветвями функции  $g(z) = \sqrt[4]{z^2}$  будут  $g_0(z) = f_0(z)$ ,  $g_1(z) = i \cdot f_0(z)$ ,  $g_2(z) = -f_0(z)$ ,  $g_3(z) = -i f_0(z)$ . Строим схему римановой поверхности функции  $h(z) = i\sqrt{z} - \sqrt[4]{z^2}$  формальным

методом и склеиваем совпадающие ветви:  $h_{0,1}(z) = h_{1,3}(z) \equiv 0$ . Оставшиеся ветви различны — достаточно вычислить их значения в точке  $z = 1$ . Искомая схема показана на рис. 100.

б) Пусть  $f_0(z)$  и  $f_1(z) = -f_0(z)$  — однозначные непрерывные ветви функции  $f(z) = \sqrt{z-1}$ , а  $g_0(z)$ ,  $g_1(z) = i \cdot g_0(z)$ ,  $g_2(z) = -g_0(z)$ ,  $g_3(z) = -i \cdot g_0(z)$  — однозначные непрерывные ветви функции  $g(z) = \sqrt[4]{z}$ . Строим схему римановой поверхности функции  $h(z) = \sqrt{z-1} \times \sqrt[4]{z}$  формальным методом (рис. 101) и склеиваем совпадающие ветви:  $h_{0,0}(z) = h_{1,2}(z)$ ,  $h_{0,1}(z) = h_{1,3}(z)$ ,  $h_{0,2}(z) = h_{1,0}(z)$ ,  $h_{0,3}(z) = h_{1,1}(z)$ . Остальные ветви различны — достаточно вычислить их значения в точке  $z = 2$ . Искомая схема показана на рис. 102.

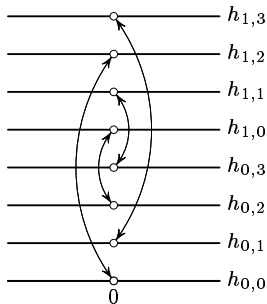


Рис. 96

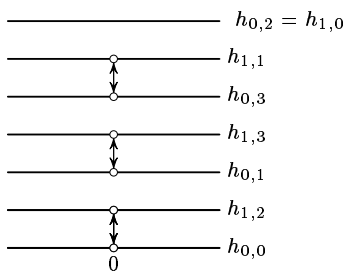


Рис. 97

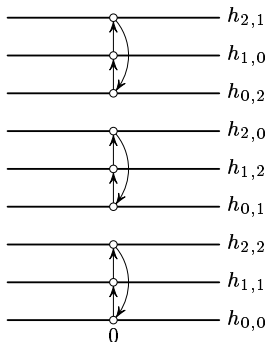


Рис. 98

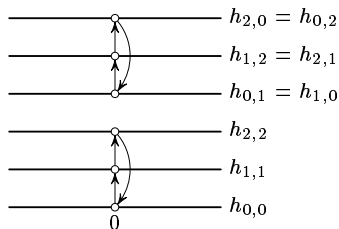


Рис. 99

в) См. рис. 103. Решение такое же, как в случае б).

г) Функция  $f(z) = \sqrt{z} + \sqrt{z}$  имеет 3 однозначные непрерывные ветви:  $f_0(z) \equiv 0$ ,  $f_1(z)$  и  $f_2(z) = -f_1(z)$  (см. решение 316 а)). Функция  $g(z) = \sqrt[3]{z(z-1)}$  имеет также 3 однозначные непрерывные ветви:  $g_0(z)$ ,  $g_1(z) = \varepsilon_3 \cdot g_0(z)$ ,  $g_2(z) = \varepsilon_2 \cdot g_0(z)$ . Ветви  $h_{0,0}(z)$ ,  $h_{0,1}(z)$  и  $h_{0,2}(z)$



совпадают:  $h_{0,0}(z) = h_{0,1}(z) = h_{0,2}(z) \equiv 0$ . Остальные ветви различны — достаточно вычислить их значения в точке  $z = 2$ . Искомая схема показана на рис. 104.

**318. Ответ.** Искомыми однозначными непрерывными ветвями являются функции  $h_i(z) = [f_i(z)]^n$ , где  $i = 1, 2, \dots, m$ .

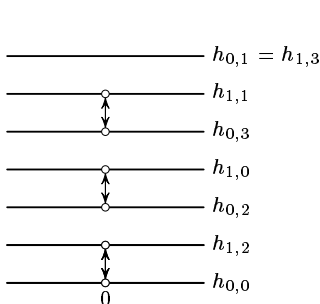


Рис. 100

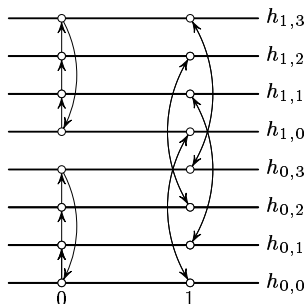


Рис. 101

**319. а)** Если  $f_0(z)$ ,  $f_1(z) = i \cdot f_0(z)$ ,  $f_2(z) = -f_0(z)$ ,  $f_3(z) = -i \times f_0(z)$  — однозначные непрерывные ветви функции  $f(z) = \sqrt[4]{z}$ , то  $[f_0(z)]^2 = [f_2(z)]^2$  и  $[f_1(z)]^2 = [f_3(z)]^2$ . Искомая схема показана на рис. 32, стр. 90.

**б)** см. 316 а). Если  $f_0(z) \equiv 0$ ,  $f_1(z)$  и  $f_2(z) = -f_1(z)$  — непрерывные ветви функции  $f(z) \equiv \sqrt{z} + \sqrt{z}$ , то  $[f_1(z)]^2 = [f_2(z)]^2$ . Искомая схема показана на рис 105.

**в)** Если  $f_0(z)$  — одна из однозначных непрерывных ветвей функции  $f(z) = \sqrt{z} \cdot \sqrt[3]{z-1}$ , то все ветви — это  $f_0(z)$ ,  $f_1(z) = f_0(z) \cdot \varepsilon_3$ ,  $f_2(z) = f_0(z) \cdot \varepsilon_3^2$ ,  $f_3(z) = -f_0(z)$ ,  $f_4(z) = -f_0(z) \cdot \varepsilon_3$ ,  $f_5(z) = -f_0(z) \cdot \varepsilon_3^2$ . При этом  $[f_0(z)]^3 = [f_1(z)]^3 = [f_2(z)]^3$  и  $[f_3(z)]^3 = [f_4(z)]^3 = [f_5(z)]^3$ . Искомая схема показана на рис 32, стр. 90.

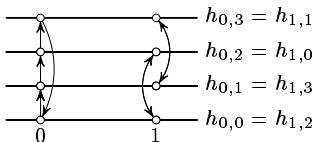


Рис. 102

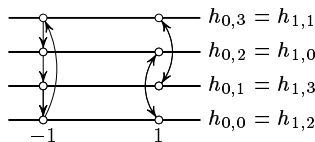


Рис. 103

**320.** Пусть точка  $z_0$  не является точкой разветвления функции  $f(z)$ . Тогда при обходе вокруг точки  $z_0$  по окружности достаточно малого радиуса значение функции  $f(z)$  не изменится.

Пусть, кроме того, все значения  $f(z_0)$  не равны 0. Тогда при отображении  $w = f(z)$  непрерывными образами окружностей с центром в точке  $z_0$  и с достаточно малыми радиусами будут являться некоторые непрерывные замкнутые кривые, находящиеся вблизи значений  $w = f(z_0)$ . Так как все значения  $f(z_0)$  не равны 0, то все такие кривые

при достаточно малых радиусах окружностей не обходят точки  $w = 0$ , т. е.  $\operatorname{Arg} f(z)$  не изменяется. Но тогда не изменяется также значение функции  $\sqrt[n]{f(z)}$ . Поэтому точками разветвления функции  $\sqrt[n]{f(z)}$  могут быть только точки разветвления функции  $f(z)$  и точки, в которых одно из значений функции  $f(z)$  равно 0.

*Ответ.* Точки разветвления функции  $f(z)$  и точки, в которых одно из значений функции  $f(z)$  равно 0.

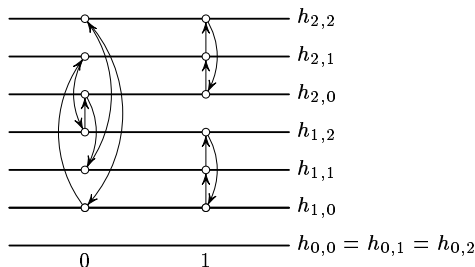


Рис. 104

**321.** Так как  $g(z)$  — непрерывная функция на плоскости с указанными разрезами, то и  $[g(z)]^n$  — также непрерывная функция. Так как при каждом  $z$   $g(z)$  — это одно из значений  $\sqrt[n]{f(z)}$ , то  $[g(z)]^n$  при каждом  $z$  — это одно из значений функции  $f(z)$ . Таким образом,  $[g(z)]^n$  — это однозначная непрерывная ветвь функции  $f(z)$  при указанных разрезах.

**322.** см. **302.** *Ответ.*  $g(z)$ ,  $g(z) \cdot \varepsilon_n$ ,  $g(z) \cdot \varepsilon_n^2$ , ...,  $g(z) \cdot \varepsilon_n^{n-1}$ .

**323.** Указание. Так как  $w_0(t)$  — непрерывная функция, то и  $w_k(t)$  — непрерывная функция; кроме того,  $[w_k(t)]^n = [w_0(t)]^n \times \varepsilon_n^{kn} = [w_0(t)]^n$  и, следовательно,  $[w_k(t)]^n$  равно одному из значений  $f(z(t))$ .

**324.** Указание. Из результата задачи **323** следует, что если значение функции  $\sqrt[n]{f(z)}$  в начальной точке кривой  $C$  умножить на  $\varepsilon_n^k$ , то значение функции  $\sqrt[n]{f(z)}$  в конечной точке кривой  $C$ , определенное по непрерывности, также умножится на  $\varepsilon_n^k$ .

**325.** Пусть  $f_0(z)$  и  $f_1(z) = -f_0(z)$  — однозначные непрерывные ветви функции  $\sqrt{z}$ , причем  $f_0(1) = 1$ , а  $f_1(1) = -1$ . Тогда  $f_0(z) - 1$  и  $f_1(z) - 1$  — однозначные непрерывные ветви функции  $\sqrt{z} - 1$ , каждой из которых соответствуют две ветви функции  $\sqrt{\sqrt{z} - 1}$ . Если  $\sqrt{z} - 1 = 0$ , то  $\sqrt{z} = 1$  и  $z = 1$ . Поэтому точкой разветвления, кроме точки  $z = 0$ , может быть только точка  $z = 1$ , причем разветвление может происходить только в пачке, соответствующей ветви  $f_0(z) - 1$  (так как должно быть  $\sqrt{1} = 1$ ). Имеем

$$f_0(z) - 1 = \frac{(f_0(z) - 1)(f_0(z) + 1)}{f_0(z) + 1} = \frac{[f_0(z)]^2 - 1}{f_0(z) + 1} = \frac{z - 1}{f_0(z) + 1}.$$

При обходе точки  $z = 1$  аргумент знаменателя не изменяется, так как

$f_0(1) + 1 = 2 \neq 0$ . Аргумент числителя при обходе точки  $z = 1$  изменяется на  $2\pi$ . Поэтому  $\text{Arg}(f_0(z) - 1)$  изменяется на  $2\pi$ , а  $\text{Arg} \sqrt{f_0(z) - 1}$  на  $\pi$ , т. е. значение  $\sqrt{f_0(z) - 1}$  изменяется. При обходе точки  $z = 0$  изменяется значение функции  $\sqrt{z}$ , поэтому мы с листов пачки, соответствующей  $f_0(z) - 1$  переходим на листы пачки, соответствующей  $f_1(z) - 1$ , и наоборот. При двукратном обходе вокруг точки  $z = 0$  конечное значение функции  $\sqrt{z}$  совпадает с начальным значением этой функции и  $\text{Arg}(\sqrt{z} - 1)$  не изменяется (так как  $\sqrt{0} - 1 \neq 0$ ). Поэтому при двукратном обходе вокруг точки  $z = 0$  мы возвращаемся на исходный лист. Суммируя полученные результаты, мы получаем схему римановой поверхности функции  $\sqrt{\sqrt{z} - 1}$ , показанную на рис. 106.

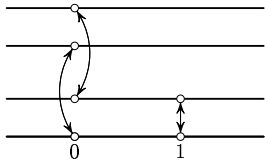


Рис. 106

**326.** Эта задача решается так же, как задача **325**: а) см. рис. 107; б) см. рис. 108.

Указание. Если  $f_0(z)$  — однозначная непрерывная ветвь функции  $\sqrt[3]{z}$  и  $f_0(1) = 1$ , то

$$f_0(z) - 1 = \frac{f_0^3(z) - 1}{f_0^2(z) + f_0(z) + 1} = \frac{z - 1}{f_0^2(z) + f_0(z) + 1},$$

где  $f_0^2(1) + f_0(1) + 1 = 3 \neq 0$ .

**327.** Так как  $z^2 + 1 = (z - i)(z + i)$ , то значение  $\sqrt{z^2 + 1}$  изменяется при обходе точек  $z = i$  и  $z = -i$ , т. е. эти точки являются точками разветвления функции  $\sqrt{z^2 + 1} - 2$ . Искомая схема в обоих случаях а) и б) показана на рис. 75, стр. 172.

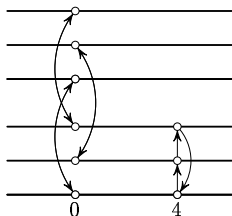


Рис. 107

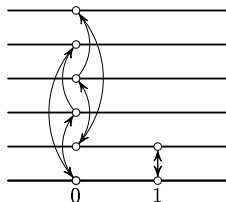


Рис. 108

Если  $\sqrt{z^2 + 1} - 2 = 0$ , то  $z^2 + 1 = 4$  и  $z = \pm\sqrt{3}$  ( $\sqrt{3}$  — положительное значение корня). Пусть  $f_0(\sqrt{3}) = 0$ , т. е. в этом случае выбрано  $\sqrt{4} = 2$ . Найдем  $f_0(-\sqrt{3})$ . Для этого соединим точку  $z = \sqrt{3}$  с точкой  $z = -\sqrt{3}$  непрерывной кривой, не проходящей через разрезы.

В случае а) можно взять, например, отрезок, соединяющий точки  $z = \sqrt{3}$  и  $z = -\sqrt{3}$ . Нетрудно видеть, что при движении вдоль этого отрезка  $\text{Arg}(z + i) = \text{Arg}(z - (-i))$  увеличивается на  $2\pi/3$ , а  $\text{Arg}(z - i)$  уменьшается на  $2\pi/3$ . Поэтому  $\text{Arg}(z^2 + 1)$  не изменяется и, следовательно, не изменяется значение  $\sqrt{z^2 + 1} - 2$ . Таким образом, в случае а)  $f_0(-\sqrt{3}) = f_0(\sqrt{3}) = 0$ .

В случае б) при движении по любой кривой, идущей из точки  $z = \sqrt{3}$  в точку  $z = -\sqrt{3}$  и не проходящей через разрез,  $\text{Arg}(z + i)$  увеличивается на  $\frac{2\pi}{3}$ , а  $\text{Arg}(z - i)$  увеличивается на  $\frac{4\pi}{3}$ . Таким образом,  $\text{Arg}(z^2 + 1)$  увеличивается на  $2\pi$ , а  $\text{Arg} \sqrt{z^2 + 1}$  увеличивается на  $\pi$ , т. е. значение  $\sqrt{z^2 + 1}$  изменяется на противоположное. Поэтому в случае б)  $f_0(-\sqrt{3}) = -2 - 2 = -4 \neq 0$ , а  $f_1(-\sqrt{3}) = 2 - 2 = 0$ .

**328.** Пусть  $g_0(z)$  и  $g_1(z)$  — однозначные непрерывные ветви функции  $g(z) = \sqrt{z^2 + 1}$ , причем  $g_0(z) - 2 = f_0(z)$  (см. решение **327**) и  $g_1(z) - 2 = f_1(z)$ . В случае а) имеем  $g_0(\sqrt{3}) = g_0(-\sqrt{3}) = 2$  (см. решение **327**) и

$$g_0(z) - 2 = \frac{g_0^2(z) - 4}{g_0(z) + 2} = \frac{z^2 - 3}{g_0(z) + 2} = \frac{(z - \sqrt{3})(z + \sqrt{3})}{g_0(z) + 2}.$$

При обходе точек  $z = \sqrt{3}$  и  $z = -\sqrt{3}$  аргумент знаменателя не изменяется, так как  $g_0(\sqrt{3}) + 2 = g_0(-\sqrt{3}) + 2 = 4 \neq 0$ , а аргумент числителя возрастает на  $2\pi$ . При этом  $\text{Arg}(g_0(z) - 2)$  увеличивается на  $2\pi$ , а  $\text{Arg} \sqrt{g_0(z) - 2}$  увеличивается на  $\pi$ , т. е. значение  $\sqrt{f_0(z)}$  изменяется. Следовательно, в случае а) разветвления в точках  $z = \sqrt{3}$  и  $z = -\sqrt{3}$  оказываются в одной пачке листов. Точно так же показывается, что в случае б) эти разветвления оказываются в разных пачках. Остается выяснить, как согласуются между собой переходы между листами при обходе точек  $z = i$  и  $z = -i$ . Непрерывным образом окружности  $C_R$  радиуса  $R = 1,1$  с центром в точке  $z = 0$  при отображении  $w = \sqrt{z^2 + 1}$  является кривая, показанная на рис. 109 (рассмотрите это отображение по частям:  $w = z^2$ ,  $w = z^2 + 1$ ,  $w = \sqrt{z^2 + 1}$ ). Эта кривая ни разу не обходит вокруг точки  $z = 2$ . Поэтому при обходе по окружности  $C_R$   $\text{Arg}(\sqrt{z^2 + 1} - 2)$  не изменяется и не изменяется значение функции  $h(z) = \sqrt{\sqrt{z^2 + 1} - 2}$ . Следовательно, при обходе точки  $z = i$  и затем точки  $z = -i$  мы должны вернуться на тот же лист (см. замечание 1 на стр. 96). Искомые схемы показаны на рис. 110 и рис. 111.

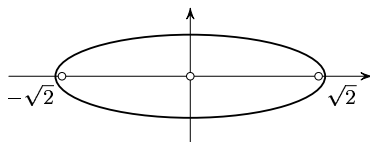


Рис. 109

**329.** Указание. В противном случае при движении по обратной кривой  $C^{-1}$  нарушалась бы однозначность.

**330.** Ответ. а)  $z = 0$ :  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $z = 1$ :  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ ;

б)  $z = 0$ :  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ ,  $z = 1, -1$ :  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ;

в)  $z = 0$ :  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ ;

$$\text{г) } z = 1: \begin{pmatrix} 12345678 \\ 67852341 \end{pmatrix}, z = -1: \begin{pmatrix} 12345678 \\ 56781234 \end{pmatrix}.$$

**331.** Указание. Воспользуйтесь результатом задачи **57**:  $e = g_1 \cdot g_1^{-1}$ ; условия 1) и 3), очевидно, выполняются.

**332.** Ответ. а) циклическая группа  $\mathbb{Z}_2$ , б) циклическая группа  $\mathbb{Z}_3$ , в) циклическая группа  $\mathbb{Z}_n$ , г)  $\mathbb{Z}_3$ , д)  $\mathbb{Z}_4$ .

**333.** Для функции  $\sqrt{z} + \sqrt{z-1}$ , указанной в задаче **314** а), получаем, что обход вокруг точки  $z = 0$  порождает подстановку первых индексов в номерах ветвей  $h_{i,j}(z)$ , а обход вокруг точки  $z = 1$  порождает подстановку вторых индексов. Поэтому искомая группа является прямым произведением двух групп  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  (см. § 7 главы 1).

Для функции  $\sqrt{z^2 - 1} + \sqrt[4]{z-1}$ , указанной в задаче **314** г), пусть  $g_1$  — подстановка листов, соответствующая обходу вокруг точки  $z = 1$ , а  $g_2$  — подстановка листов, соответствующая обходу вокруг точки  $z = -1$ . Тогда подстановка  $g_2$  дает циклический сдвиг первых индексов в номерах ветвей  $h_{i,j}(z)$ , а подстановка  $g_1 g_2^{-1}$  дает циклический сдвиг вторых индексов. Так как  $g_1 = (g_1 g_2^{-1}) g_2$ , то подгруппа, порожденная подстановками  $g_1$  и  $g_2$ , совпадает с подгруппой, порожденной подстановками  $g_2$ , и  $g_1 g_2^{-1}$ . Поэтому искомая группа является прямым произведением  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ .

Подобным образом задача **333** решается и в остальных случаях.

Ответ. 1. а) Прямое произведение (§ 7 главы 1)  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ , б)  $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_6$  (см. **77**), в)  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \cong \mathbb{Z}_6$ , г)  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ . 2. а)  $\mathbb{Z}_2$ , б)  $\mathbb{Z}_4$ , в)  $\mathbb{Z}_4$ , г)  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \cong \mathbb{Z}_6$ . 3. а)  $\mathbb{Z}_2$ , б)  $\{e\}$ , в)  $\mathbb{Z}_2$ .

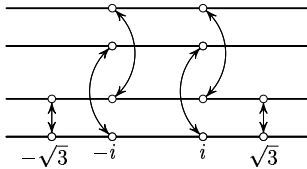


Рис. 110

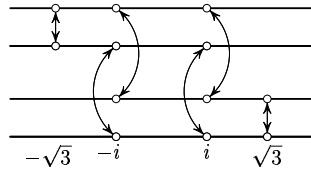


Рис. 111

**334.** Если подстановка  $g_1$  некоторым образом переставляет пачки, а подстановка  $g_2$  меняет местами листы в одной пачке, то легко видеть, что подстановка  $g_1 g_2 g_1^{-1}$  меняет местами листы в другой пачке. Поэтому группа подстановок листов для обеих схем содержит некоторую подстановку, переставляющую пачки, подстановку, меняющую местами листы в одной пачке, и подстановку, меняющую местами листы в другой пачке. Искомая группа, порожденная этими подстановками, содержит те и только те подстановки, при которых пачки переходят в себя или меняются местами, а листы внутри пачек переставляются произвольным образом. Занумеровав листы в одной пачке числами 1 и 3, а листы в другой пачке — числами 2 и 4, получим, что каждой подстановке построенной группы соответствует симметрия квадрата с вершинами 1, 2, 3, 4 и, наоборот, каждой симметрии такого квадрата соответствует подстановка в построенной группе под-

становок листов. Поэтому искомая группа в обоих случаях изоморфна группе симметрий квадрата.

**335.** Пусть  $w_1, w_2, \dots, w_n$  — все значения  $w(z_0)$ , и пусть  $z_1, \dots, z_s$  — точки разветвления функции  $w(z)$ . Занумеруем листы схемы римановой поверхности функции  $w(z)$  так, чтобы значение  $w_i = w(z_0)$  соответствовало  $i$ -му листу. Тогда каждой подстановке значений  $w_i$  естественным образом соответствует подстановка листов. Докажем, что при таком соответствии группы  $G_1$  и  $G_2$  практически совпадают. Пусть подстановка  $g$  из группы  $G_1$  порождена некоторой непрерывной кривой  $C$ , начинающейся и кончающейся в точке  $z_0$ . И пусть кривая  $C$  пересекает по порядку разрезы (при которых строилась риманова поверхность), идущие из точек разветвления  $z_{i_1}, z_{i_2}, \dots, z_{i_m}$ . Если точке разветвления  $z_j$  соответствует подстановка листов  $g_j$ , то легко понять, что кривой  $C$  соответствует подстановка листов (а вместе с этим и значений  $w_i$ ), равная  $g_{i_m}^{\sigma_m} \cdot \dots \cdot g_{i_2}^{\sigma_2} \cdot g_{i_1}^{\sigma_1}$ , где  $\sigma_i = 1$ , если разрез пересекается против часовой стрелки, и  $\sigma_i = -1$ , если разрез пересекается по часовой стрелке (см. замечание 1 на стр. 96). Отсюда  $g = g_{i_m}^{\sigma_m} \cdot \dots \cdot g_{i_1}^{\sigma_1}$  и  $g$  содержится в  $G_2$ . Обратное, если дан элемент  $g = g_{i_m}^{\sigma_m} \cdot \dots \cdot g_{i_1}^{\sigma_1}$  группы  $G_2$  (здесь  $\sigma_i = \pm 1$ )\*), то легко построить кривую  $C$ , порождающую такую же подстановку значений  $w_i$  в группе  $G_1$ . Например, на рис. 112 показана кривая, соответствующая подстановке  $g_2^{-1} g_3 g_1^{-1}$ .

**336.** Пусть  $z_0$  — точка разветвления функции  $h(z)$ , и пусть обходу вокруг точки  $z_0$  соответствуют подстановки  $d_1$  и  $d_2$  листов схем

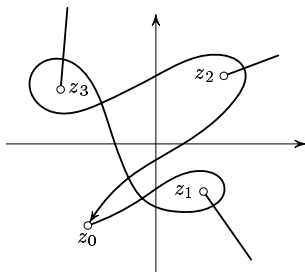


Рис. 112

римановых поверхностей функций  $f(z)$  и  $g(z)$ . Если  $z_0$  не является точкой разветвления какой-нибудь из функций  $f(z)$  или  $g(z)$ , то соответствующая подстановка  $d_1$  или  $d_2$  будет тождественной. Если ветви функции  $h(z)$  занумерованы двумя индексами  $h_{i,j}(z)$  так, как сказано в теореме 8, утверждение а) (стр. 104), то при обходе вокруг точки  $z_0$  первые и вторые индексы переставляются независимо (теорема 8, утверждение б)). Причем подстановка первых индексов есть  $d_1$ , подстановка вторых индексов  $d_2$ . Таким образом, об-

ходу вокруг точки разветвления  $z_0$  соответствует подстановка листов схемы римановой поверхности функции  $h(z)$ , которую можно рассматривать как пару подстановок  $(d_1, d_2)$ . Так как  $d_1$  и  $d_2$  являются соответственно элементами групп  $F$  и  $G$ , то пара  $(d_1, d_2)$  является элементом прямого произведения  $F \times G$ . Такие пары, соответствующие всем точкам разветвления функции  $h(z)$ , порождают некоторую подгруппу в группе  $F \times G$ .

\*) Из определения группы  $G_2$  (стр. 106) легко вывести, что любой элемент этой группы может быть представлен в указанной форме.

**337.** Схема, построенная формальным методом, может иметь листы, на которых заданы совпадающие ветви. Объединим такие листы в пачки. В силу однозначности при обходе любой точки разветвления мы с листов одной пачки будем переходить в схему, построенной формальным методом, на листы одной и той же пачки. Следовательно, любая подстановка  $d$  листов схемы, построенной формальным методом, соответствующая обходу вокруг некоторой точки разветвления, переводит пачки друг в друга, не разрывая их. Если подстановки  $d_1$  и  $d_2$  переводят пачки друг в друга, не разрывая их, то легко видеть, что и подстановка  $d_1 d_2$  также переставляет пачки, не разрывая их. Поэтому все подстановки  $d_i$  листов схемы, построенной формальным методом, входящие в группу  $H_1$ , переставляют пачки, не разрывая их. Поставим в соответствие каждой подстановке  $d_i$  подстановку  $d'_i$  пачек. Легко видеть, что если подстановке  $d_i$  соответствует подстановка пачек  $d'_i$  а подстановке  $d_j$  — подстановка пачек  $d'_j$ , то подстановке  $d_i d_j$  соответствует подстановка пачек  $d'_i d'_j$ . То есть построенное отображение группы  $H_1$  на порожденную ею группу подстановок пачек является гомоморфизмом. Так как каждой пачке соответствует лист истинной схемы римановой поверхности функции  $h(z)$  (теорема 8, утверждение в)) и переходы между листами истинной схемы — это в точности переходы между пачками, то построенный нами гомоморфизм можно рассматривать, как гомоморфизм группы  $H_1$  на группу  $H_2$ .

**338.** См. **336** и **337**. По условию группы  $F$  и  $G$  (см. **336**) разрешимы. Но тогда разрешима также группа  $F \times G$  (см. **167**). Так как группа  $H_1$  — группа подстановок листов схемы, построенной формальным методом, — может рассматриваться как подгруппа в группе  $F \times G$  (см. **336**), то группа  $H_1$  также разрешима (см. **162**). Так как существует гомоморфизм группы  $H_1$  на группу  $2$  — группу подстановок листов истинной схемы римановой поверхности функции  $h(z)$  (см. **337**), то группа  $H_2$  также разрешима (см. **163**).

**339.** Указание. См. теорему 9 (стр. **104**). Если  $F$  и  $H$  — группы Галуа для схем римановых поверхностей функций  $f(z)$  и  $h(z)$ , то так же, как в задаче **337**, доказывается существование гомоморфизма группы  $F$  на группу  $H$ . Далее воспользуйтесь результатом задачи **163**.

**340.** Каждому листу схемы римановой поверхности функции  $f(z)$  соответствует пачка из  $n$  листов в схеме римановой поверхности функции  $h(z) = \sqrt[n]{f(z)}$  (теорема 10, утверждение а), стр. **104**). Подстановки листов схемы римановой поверхности функции  $h(z)$ , соответствующие обходам вокруг точек разветвления функции  $h(z)$ , переставляют пачки, не разрывая их (теорема 10, утверждение б)). Но тогда и все подстановки группы  $H$  переставляют пачки, не разрывая. Поэтому каждой подстановке  $d$  группы  $H$  соответствует подстановка  $d'$  пачек. Причем, если подстановке  $d_1$  соответствует подстановка пачек  $d'_1$  подстановке  $d_2$  — подстановка пачек  $d'_2$ , то подстановке  $d_1 d_2$  соответствует подстановка пачек  $d'_1 d'_2$ . Мы получаем гомоморфизм группы  $H$  на порожденную ею группу подстановок пачек. Подстановка пачек, соответствующая обходу вокруг произвольной точки  $z_0$ , совпадает с подстановкой листов при обходе вокруг точки  $z_0$  в схеме римановой поверхности функции  $f(z)$  (теорема 10, утверждение в)). Поэтому

группа подстановок пачек, порожденная группой  $H$ , совпадает с группой  $F$  (точнее, изоморфна  $F$ ).

Таким образом, построенный выше гомоморфизм является, по существу, гомоморфизмом группы  $H$  на группу  $F$ .

**341.** Ядром гомоморфизма, построенного в решении задачи **340** являются подстановки группы  $H$ , переводящие каждую пачку в себя. Пусть  $d_1$  и  $d_2$  — две такие подстановки. Если листы в пачках перенумерованы так, что  $f_{i,k}(z) = f_{i,0}(z) \cdot \varepsilon_n^k$ , то обе подстановки,  $d_1$  и  $d_2$ , циклически сдвигают листы в каждой пачке (см. теорему 10, утверждение г)). Рассмотрим произвольную пачку. Если подстановка  $d_1$  циклически сдвигает листы в этой пачке на  $l$  листов, а подстановка  $d_2$  — на  $k$  листов, то обе подстановки,  $d_1 d_2$  и  $d_2 d_1$ , циклически сдвигают листы в данной пачке на  $l + k$  листов. Таким образом, подстановки  $d_1 d_2$  и  $d_2 d_1$  одинаково переставляют листы в каждой пачке, т. е.  $d_1 d_2 = d_2 d_1$ .

**342.** Если  $\varphi$  — гомоморфизм, построенный в решении задачи **340**, и  $\text{Ker } \varphi$  — его ядро, то факторгруппа  $H/\text{Ker } \varphi$  изоморфна группе  $F$  (теорема 3, стр. 40). Так как группа  $\text{Ker } \varphi$  коммутативна (см. **341**), а группа  $F$  разрешима, то разрешима также и группа  $H$  (см. **166**).

**343.** Обозначим  $P_z(w) = 3w^5 - 25w^3 + 60w - z$ . Если  $w_0$  — кратный корень уравнения  $P_z(w) = 0$ , то  $w_0$  является корнем уравнения  $P'_z(w) = 0$ , где  $P'_z(w)$  — многочлен, являющийся производной от многочлена  $P_z(w)$  (относительно  $w$ ) (см. **276**). Имеем  $P'_z(w) = 15w^4 - 75w^2 + 60 = 15(w^4 - 5w^2 + 4) = 15(w - 2)(w - 1)(w + 1) \times (w + 2)$ . Так как уравнение  $P'_z(w) = 0$  имеет 4 корня кратности 1:  $w_0 = -2, -1, 1, 2$ , то кратными корнями уравнения  $P_z(w) = 0$  (кратности 2) могут быть только значения  $w_0 = -2, -1, 1, 2$ .

Подставляя эти значения в уравнения

$$3w^5 - 25w^3 + 60w - z = 0,$$

получаем, что они будут корнями (кратности 2) соответственно при  $z = -16, -38, 38, 16$ .

*Ответ.* Корнями кратности 2 являются значения:  $w_0 = -2$  при  $z = -16$ ,  $w_0 = -1$  при  $z = -38$ ,  $w_0 = 1$  при  $z = 38$ ,  $w_0 = 2$  при  $z = 16$ .

**344.** Обозначим  $P_z(w) = 3w^5 - 25w^3 + 60w - z$ . Положим  $z = z_0$  и рассмотрим однозначное отображение плоскости  $w$  в некоторую комплексную плоскость  $\tau$ , задаваемое равенством  $\tau = P_{z_0}(w)$ . Пусть  $C$  — окружность радиуса  $r$  на плоскости  $w$  с центром в точке  $w_0$  (рис. **113**) и  $C'$  — образ окружности  $C$  при отображении  $\tau = P_{z_0}(w)$ . Разложим многочлен  $P_{z_0}(w) = 3w^5 - 25w^3 + 60w - z_0$  на линейные множители (см. **269**). Получим  $P_{z_0}(w) = 3(w - w_1)(w - w_2)(w - w_3)(w - w_4) \times (w - w_5)$ , где все  $w_i$  — корни уравнения  $P_{z_0}(w) = 0$ . При обходе по окружности  $C$  против часовой стрелки аргумент сомножителя  $w - w_i$  не изменяется, если  $w_i$  лежит вне окружности  $C$ , и увеличивается на  $2\pi$ , если  $w_i$  лежит внутри окружности  $C$ . Поэтому при обходе окружности  $C$  против часовой стрелки аргумент функции  $P_{z_0}(w)$  увеличивается на  $2\pi m$ , где  $m$  — число корней (с учетом кратностей) уравнения  $P_{z_0}(w) = 0$ , лежащих внутри окружности  $C$ . Поэтому кривая  $C'$  — образ окружности  $C$  при отображении  $\tau = P_{z_0}(w)$  — обходит вокруг точки  $\tau = 0$   $m$  раз (рис. **114**). Так как по условию задачи центр окружности  $C$  — точка  $w_0$  — является корнем уравнения  $P_{z_0}(w) = 0$ ,



то  $m \geq 1$ . Существует такое  $\rho > 0$ , что окружность радиуса  $\rho$  с центром в точке  $\tau = 0$  целиком содержится внутри кривой  $C'$  (рис. 114). Возьмем теперь другое комплексное число  $z'_0$  и рассмотрим еще одно отображение  $\tau = P_{z'_0}(w)$ . Пусть  $C''$  — образ окружности  $C$  при отображении  $\tau = P_{z'_0}(w)$ . Так как  $P_{z'_0}(w) = 3w^5 - 25w^3 + 60w - z'_0 = = 3w^5 - 25w^3 + 60w - z_0 + (z_0 - z'_0) = P_{z_0}(w) + (z_0 - z'_0)$ , то кривая  $C''$  получается из кривой  $C'$  сдвигом на вектор  $z_0 - z'_0$  (см. 246). Если длина вектора  $z_0 - z'_0$  меньше  $\rho$ , то кривая  $C''$  будет обходить вокруг точки  $\tau = 0$  столько же раз, сколько и кривая  $C'$ . (Представьте себе, что, наоборот, сдвигается точка  $\tau = 0$ ; рис. 114.) Так как кривая  $C'$  обходит вокруг точки  $\tau = 0$   $m$  раз, то и кривая  $C''$  будет обходить вокруг точки  $\tau = 0$   $m$  раз. Отсюда, рассуждая как и выше, получаем, что внутри окружности  $C$  лежит  $m \geq 1$  корней уравнения  $P_{z'_0}(w) = 0$  (с учетом кратностей).

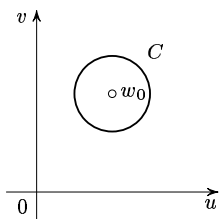


Рис. 113

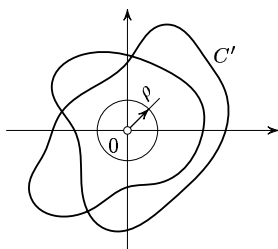


Рис. 114

**345.** Пусть  $z_0$  — произвольная точка, отличная от  $z = \pm 38$  и  $z = \pm 16$ . Тогда имеется ровно 5 различных образов точки  $z$  при отображении  $w(z)$ . Пусть это будут точки  $w_1, w_2, w_3, w_4, w_5$ . Если непрерывная кривая  $C$  выходит из точки  $z_0$ , то из каждой точки  $w_i$  ( $i = 1, \dots, 5$ ) выходит хотя бы один непрерывный образ кривой  $C$  при отображении  $w(z)$ . Если бы из некоторой точки  $w_i$  выходило два непрерывных образа кривой  $C$  (расходящихся именно в точке  $w_i$ ), то кривая  $C$  имела бы по крайней мере 6 непрерывных образов. Этого не может быть, так как уравнение 5-й степени не может иметь более пяти корней. Следовательно, точка  $z_0$  не является точкой неоднозначности функции  $w(z)$ .

Рассмотрим теперь 5 кругов:  $D_1, D_2, D_3, D_4, D_5$  некоторого радиуса  $r$  с центрами в точках  $w_i$ . Выберем  $r$  настолько малым, чтобы эти круги не пересекались и не касались друг друга. В силу результата задачи 344 существует круг  $D_0$  с центром в точке  $z_0$  такого радиуса  $\rho$ , что у любой точки  $z'_0$  из этого круга имеется по крайней мере по одному и, следовательно, ровно по одному образу в каждом из кругов  $D_1, D_2, D_3, D_4, D_5$ , построенных на плоскости  $w$ . Если  $C$  — непрерывная кривая, целиком лежащая в круге  $D_0$ , то все образы всех ее точек лежат в кругах  $D_i$  ( $i = 1, \dots, 5$ ). Но тогда непрерывный образ кривой  $C$  при отображении  $w(z)$  не может перескочить из одного

круга в другой, т. е. любой непрерывный образ  $C'$  кривой  $C$  целиком содержится в одном из кругов  $D_i$  ( $i = 1, \dots, 5$ ). Если кривая  $C$ , лежащая целиком в круге  $D_0$ , начинается и кончается в одной и той же точке  $z'_0$ , то ее непрерывный образ  $C'$  должен начинаться и кончаться в некоторых точках, являющихся образами точки  $z'_0$  при отображении  $w(z)$ . Так как кривая  $C'$  лежит целиком в некотором круге  $D_i$  ( $i = 1, \dots, 5$ ) и в этом круге имеется ровно один образ точки  $z'_0$ , то кривая  $C'$  начинается и кончается в одной и той же точке.

Таким образом, если  $C$  — замкнутая кривая, целиком лежащая в круге  $D_0$ , то значение функции  $w(z)$  в конечной точке кривой  $C$ , определенное по непрерывности, совпадает со значением в начальной точке. В частности, это справедливо для всех окружностей с центром в точке  $z_0$  радиуса, меньшего, чем  $\rho$ . Следовательно, точка  $z_0$  не является точкой разветвления функции  $w(z)$ .

**346.** Из решения задачи **343** следует, что при  $z = z_0 = 38$  уравнение (14.1) имеет четыре корня:  $w_1, w_2, w_3, w_4$  причем один из них (пусть, например,  $w_1$ ) имеет кратность 2, остальные корни простые. Пусть точка  $z'_0$  лежит вблизи точки  $z_0$ . Тогда из решения задачи **344** получаем, что вблизи точки  $w_1$  лежат два образа точки  $z'_0$  при отображении  $w(z)$ , а вблизи точек  $w_2, w_3$  и  $w_4$  лежит по одному образу точки  $z'_0$ . Пусть окружность  $C$  малого радиуса с центром в точке  $z_0$  начинается и кончается в точке  $z'_0$ . Так же как при решении задачи **345**, получаем, что непрерывные образы окружности  $C$  при отображении  $w(z)$ , начинающиеся вблизи точек  $w_2, w_3$  и  $w_4$ , оканчиваются в исходной точке, а непрерывные образы, начинающиеся вблизи точки  $w_1$  в одном из образов точки  $z'_0$ , могут заканчиваться в другом образе точки  $z'_0$ , также лежащем вблизи точки  $w_1$ . Поэтому в точке  $z_0$  с трех листов римановой поверхности нет переходов на другие листы и только два листа могут соединяться между собой.

**347.** Проведем какую-нибудь непрерывную кривую  $C'$  из точки  $w_0$  в точку  $w_1$  так, чтобы она не проходила через образы  $w(z)$  точек  $z = \pm 38$  и  $z = \pm 16$ . Такую кривую провести можно, так как точки  $z = \pm 38$  и  $z = \pm 16$  имеют конечное число образов. Пусть теперь  $C$  — образ кривой  $C'$  при однозначном отображении  $z(w) = 3w^5 - 25w^3 + 60w$ . Так как  $z(w)$  — непрерывная функция и  $C'$  — непрерывная кривая, то и  $C$  — непрерывная кривая. Так как  $z$  и  $w$  при отображении  $z(w)$  связаны соотношением  $3w^5 - 25w^3 + 60w - z = 0$ , таким же, как при отображении  $w(z)$ , то кривая  $C'$  в свою очередь является непрерывным образом кривой  $C$  при отображении  $w(z)$ . Так как кривая  $C'$  не проходит через образы точек  $z = \pm 38$  и  $z = \pm 16$ , то кривая  $C$  не проходит через точки  $z = \pm 38$  и  $z = \pm 16$ . Начальная и конечная точки кривой  $C$  — это  $z(w_0) = z_0$  и  $z(w_1) = z_1$ . Таким образом, кривая  $C$  — искомая.

**348.** В силу результата задачи **347** с любого листа римановой поверхности функции  $w(z)$  можно перейти на любой другой лист по некоторой кривой, не проходящей через точки  $z = \pm 38$  и  $z = \pm 16$ . При этом переходы с листа на лист при пересечении разрезов совпадают с переходами, указанными в той точке разветвления, из которой проведен данный разрез (см. замечание 1 на стр. 96). Следовательно,

соединения листов в точках разветвления должны быть такими, чтобы получалась единая связная схема. Так как точки, отличные от  $z = \pm 38$  и  $z = \pm 16$ , не являются точками разветвления (см. **345**), а в каждой из точек  $z = \pm 38$  и  $z = \pm 16$  могут соединяться только 2 листа (см. **346**), то для получения связной схемы необходимо, чтобы соединения были в каждой из точек  $z = \pm 38$  и  $z = \pm 16$ , т. е. все четыре точки являются точками разветвления. Все различные связные схемы показаны на рис. **115**. Любые связные схемы римановой поверхности функции  $w(z)$  приводятся к этим трем схемам перестановкой листов и точек разветвления. (Мы здесь не утверждаем, что все 3 схемы могут быть реализованы.)

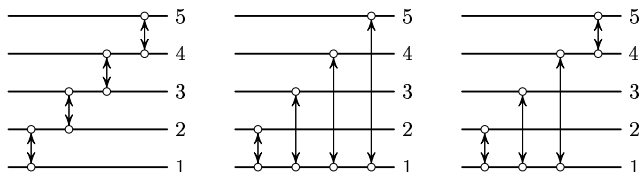


Рис. 115

**349.** Докажем, что группа подстановок листов для всех трех схем, показанных на рис. **115**, содержит все элементарные транспозиции (см. стр. **47**), т. е. транспозиции  $(1, 2)$ ,  $(2, 3)$ ,  $(3, 4)$ ,  $(4, 5)$ . Для первой схемы это очевидно, так как эти транспозиции просто соответствуют точкам разветвления. Во второй и третьей схемах одной из точек разветвления соответствует транспозиция  $(1, 2)$ . Транспозиции  $(2, 3)$  и  $(3, 4)$  получаются в обоих случаях как произведения  $(2, 3) = (1, 2) \times (1, 3) \cdot (1, 2)$  и  $(3, 4) = (1, 3) \cdot (1, 4) \cdot (1, 3)$ . Транспозиция  $(4, 5)$  получается для второй схемы как произведение  $(4, 5) = (1, 4) \cdot (1, 5) \cdot (1, 4)$ , а для третьей схемы она просто соответствует одной из точек разветвления.

Таким образом, искомая группа во всех трех случаях содержит все элементарные транспозиции и, следовательно (теорема 4, стр. **47**), совпадает со всей группой подстановок 5-й степени.

**350.** Из результата задачи **349** получаем, что группа Галуа для функции  $w(z)$  — это группа  $S_5$  всех подстановок 5-й степени, которая неразрешима (см. теорему 5, стр. **50**). С другой стороны, если функция  $w(z)$  выражается в радикалах, то соответствующая ей группа Галуа должна быть разрешимой (теорема 11, стр. **107**). Из полученного противоречия и вытекает, что функция  $w(z)$  не может быть выражена в радикалах.

**351.** У к а з а н и е. Если бы такая формула существовала, то, подставив в нее значения  $a_0 = 3$ ,  $a_2 = -25$ ,  $a_4 = 60$ ,  $a_1 = a_3 = 0$  и  $a_5 = z$ , мы получили бы, что функция  $w(z)$  (см. **350**) выражается в радикалах.

**352.** Функция  $w_1(z)$ , выражающая корни уравнения **(14.2)** через параметр  $z$ , имеет риманову поверхность, которая состоит из отдельного листа, на котором  $w_1(z) \equiv 0$ , и 5 листов, которые составляют схему римановой поверхности функции  $w(z)$ , выражающей корни

уравнения

$$3w^5 - 25w^3 + 60w - z = 0$$

через параметр  $z$ . Поэтому группа Галуа, соответствующая функции  $w_1(z)$ , совпадает с группой Галуа, соответствующей функции  $w(z)$ , т. е. с группой  $S_5$ , всех подстановок 5-й степени, которая неразрешима (см. **349**). С другой стороны, если функция  $w_1(z)$  выражается в радикалах, то соответствующая ей группа Галуа должна быть разрешимой (см. теорему 11, стр. **107**). Из полученного противоречия вытекает, что функция  $w_1(z)$  не выражается в радикалах и общее алгебраическое уравнение степени  $n$  при  $n > 5$  неразрешимо в радикалах.

Абеля теорема 12, 112  
 алгебраическая форма комплексного числа 60  
 алгебраическое уравнение с одним неизвестным степени  $n$  общее 7  
 аргумент комплексного числа 67  
 ассоциативность 21

Безу теорема 80  
 бинарная операция 14

Вектор 65  
 — свободный 65  
 ветвь функции 84  
 взаимно однозначное отображение 19

Виета теорема 9  
 внутренний автоморфизм 34

Гомоморфизм 39  
 — естественный 40  
 группа 21  
 — бесконечная 21  
 — — циклическая 25  
 — вращений додекаэдра 44  
 — — квадрата 17  
 — — куба 38  
 — — тетраэдра 29  
 — — треугольника 15  
 — Галуа 108  
 — знакопеременная 49  
 — коммутативная 23  
 — конечная 21  
 — подстановок значений функции 107  
 — — листов схемы римановой поверхности 106  
 — преобразований 20  
 — разрешимая 44  
 — симметрий квадрата 18  
 — — прямоугольника 18  
 — — ромба 18  
 — — тетраэдра 29  
 — — треугольника 17  
 — симметрическая 46  
 — целых чисел по сложению 21  
 — циклическая порядка  $n$  24  
 группы изоморфные 26

Действительная часть комплексного числа 60  
 деление многочленов с остатком 56  
 дистрибутивность 52

Естественный гомоморфизм 40  
 единица группы 21

Знакопеременная группа 49

Изменение аргумента вдоль кривой 75  
 изоморфизм групп 26  
 — полей 62

Кардано формула 11  
 коммутант 38  
 коммутативная группа 23  
 коммутатор 38  
 коммутирующие элементы 23, 37  
 комплексного числа алгебраическая форма 60  
 — — геометрические представления 65  
 — — тригонометрическая форма 67  
 комплексное число 58  
 корень алгебраического уравнения 55  
 — — кратности  $k$  81  
 — многочлена 55

Лагранжа теорема 31  
 левое разложение группы по подгруппе 31  
 левый смежный класс 31  
 лист 84

Метод Феррари 11  
 мнимая часть комплексного числа 60  
 многочлен 54  
 — неприводимый 63  
 — приводимый 63  
 модуль комплексного числа 66  
 Муавра формула 68

Непрерывная кривая 73  
 — функция 70

непрерывный образ кривой 87  
нечетная подстановка 48  
нормальная подгруппа 34

**Образ подмножества 42**

— элемента 18  
образующий 24, 25  
обратное преобразование 19  
обратный элемент 21  
общее алгебраическое уравнение с одним неизвестным степени  $n$  7  
однозначная непрерывная ветвь 84  
основная теорема алгебры комплексных чисел 80  
отображение 18  
— взаимно однозначное 19  
— на 18

**Параметрическое уравнение кривой 73**

перестановочные элементы 23, 37  
подгруппа 27  
— нормальная 34  
подстановка 19, 46  
— нечетная 48  
— циклическая 47  
— четная 48  
поле 53  
полный прообраз подмножества 42  
порядок группы 21  
— подгруппы 31  
— элемента 24  
правое разложение группы по подгруппе 32  
правый смежный класс 32  
преобразование множества 19  
— обратное 19  
— тождественное 20  
произведение многозначных функций 98  
— многочленов 55  
— преобразований 19  
— функций 71  
производная многочлена 81  
прообраз элемента 18  
прямое произведение 30

**Разложение группы по нормальной подгруппе 35**

— по подгруппе левое 31  
— — правое 32  
разность в поле 53  
— многозначных функций 98

— многочленов 55  
— функций 71  
разрешимая группа 44  
риманова поверхность 85, 86

**Свойство монодромии 96**

симметрическая группа 46  
симметрия фигуры 16  
сложение по модулю  $n$  25  
смежный класс левый 31  
— правый 32  
сопряженные комплексные числа 60  
сумма многозначных функций 98  
— многочленов 55  
— функций 71  
суперпозиция функций 71  
схема римановой поверхности 91

**Теорема Абеля 12, 112**

— Безу 80  
— Виета 9  
— Лагранжа 31  
точка неоднозначности 94  
— разветвления 91  
транспозиция 47  
— элементарная 47  
тригонометрическая форма комплексного числа 67

**Умножение по модулю  $n$  53**  
**уравнение кривой параметрическое 73**

**Факторгруппа 37**

Феррари метод 11  
формула Кардано 11  
— Муавра 68  
функция, выражающаяся в радикалах 99

**Центр группы 35**

цикл 47  
циклическая группа 25

**Частное в поле 53**

— двух многозначных функций 98  
— — функций 71  
четная подстановка 48

**Элементарная транспозиция 47**

**Ядро гомоморфизма 40**

*Валерий Борисович Алексеев*

## ТЕОРЕМА АБЕЛЯ В ЗАДАЧАХ И РЕШЕНИЯХ

Верстка *А. Переверзевой*

Издательство Московского Центра  
непрерывного математического образования.  
121002, Москва, Б. Власьевский пер., 11.

Лицензия ИД №01335 от 24.03.2000 г.

Подписано в печать 28.02.2001 г.

Формат  $84 \times 108 \frac{1}{32}$ . Бумага офсетная.

Печать офсетная. Печ. л. 6,0. Тираж 3000.

Заказ № .

Отпечатано ОАО «Типография „Новости“»  
107005, Москва, ул. Фридриха Энгельса, 46.

Вы можете приобрести книги издательства МЦНМО  
в «Математическом библиоклубе» по адресу  
Большой Власьевский пер., д. 11.  
Тел. (095) 241–72–85. E-mail: mbc@mccme.ru