

ИЗБРАННЫЕ ГЛАВЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ
ДЛЯ ИНЖЕНЕРОВ И СТУДЕНТОВ ВТУЗОВ

А. Ф. БЕРМАНТ

ОТОБРАЖЕНИЯ.
КРИВОЛИНЕЙНЫЕ КООРДИНАТЫ.
ПРЕОБРАЗОВАНИЯ.
ФОРМУЛЫ ГРИНА

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1958

АННОТАЦИЯ

В книге излагается учение о преобразованиях аналитических выражений к криволинейным координатам, о некоторых других важных преобразованиях и дается совокупность сведений и знаний по дифференциальному и интегральному исчислению для систем функций, опирающихся на учение о преобразованиях. Содержание книги в основном относится к классическому анализу, но всему изложению придается, по возможности, характер современных геометрических представлений.

Книга должна заполнить пробел между общим втузовским курсом математического анализа и такими науками, как векторный анализ, теория функций комплексной переменной, дифференциальные уравнения математической физики и т. п., необходимыми для специальных дисциплин.

Книга написана подробно и обстоятельно с расчетом на то, что по имеющимся в ней вопросам она сможет служить развернутым справочным пособием.

Круг читателей: инженеры, физики, механики, студенты старших курсов вузов и аспиранты.

ОГЛАВЛЕНИЕ

<i>Предисловие</i>	7
------------------------------	---

ГЛАВА I

ОТОБРАЖЕНИЯ. ЯКОБИАН

§ 1. Отображения в линейном случае	11
1. Определения. Аффинные отображения (11). 2. Графики (13). 3. Обращение. Гомеоморфизм (14). 4. Суперпозиция (16).	
§ 2. Коэффициент искажения и производная	18
5. Коэффициент искажения (18). 6. Направление перемещения. Обратное отображение (21). 7. Суперпозиция (23).	
§ 3. Отображения в плоском случае	24
8. Определения (24). 9. Обращение (26). 10. Гомеоморфизм (28). 11. Суперпозиция (29).	
§ 4. Аффинные отображения	32
12. Определения (32). 13. Равномерно распределенные точки (33). 14. Коэффициент искажения (35). 15. Направление перемещения (36). 16. Отображение круга (36).	
§ 5. Некоторые частные аффинные отображения. Свойства определителя	38
17. Сохранение площади. Движение (38). 18. Отображения гомететий и подобия (41). 19. Свойства определителя (44).	
§ 6. Коэффициент искажения (общий случай) и якобиан. Регулярные отображения	45
20. Коэффициент искажения (45). 21. Обобщение (51). 22. Направление перемещения (52). 23. Регулярные отображения (55).	

§ 7. Свойства якобиана	57
24. Обращение. Локальный гомеоморфизм (58). 25. Якобиан обратного отображения (61). 26. Суперпозиция (63).	
§ 8. Вырождение отображения. Зависимость функций . . .	65
27. Вырождение (65). 28. Зависимость функций (68).	
§ 9. Отображения в пространственном случае	70
29. Основные понятия. Якобиан (70). 30. Свойства якобиана. Зависимость функций (72).	

Г Л А В А II

КРИВОЛИНЕЙНЫЕ КООРДИНАТЫ

§ 1. Линейный случай	75
31. Определение (75). 32. Функциональная шкала (76).	
§ 2. Плоский случай	78
33. Определения. Координатные линии (78). 34. Ортогональность системы (81). 35. Коэффициенты Ламе (83). 36. Элементы длины и площади (84). 37. Другой вывод (87).	
§ 3. Важнейшие системы криволинейных координат на плоскости	88
38. Декартовы координаты (89). 39. Полярные координаты (93). 40. Обобщенные полярные координаты (97).	
§ 4. Эллиптические координаты и их вырождения	97
41. Общие эллиптические координаты (97). 42. Вырожденные эллиптические координаты. Униформизация (102).	
§ 5. Другие системы криволинейных ортогональных координат на плоскости	107
43. Параболические координаты (107). 44. Биполярные координаты (109).	
§ 6. Пространственный случай	111
45. Определения. Координатные поверхности и линии (111). 46. Ортогональность системы (115). 47. Коэффициенты Ламе (117).	
§ 7. Элементы длины, объема и площади поверхности . . .	118
48. Элемент длины (118). 49. Элемент объема (120). 50. Другой вывод (121). 51. Элемент площади поверхности. Направляющие косинусы нормали (123). 52. Элемент площади поверхности в криволинейных координатах в пространстве (129).	

- § 8. Важнейшие системы криволинейных координат в пространстве** 131
53. Декартовы координаты (132) 54. Цилиндрические координаты (137). 55. Сферические координаты (139). 56. Телесный угол (142). 57. Обобщенные сферические координаты (143).
- § 9. Эллипсоидальные координаты и их вырождения** . . 144
58. Общие эллипсоидальные координаты (144). 59. Вырожденные эллипсоидальные координаты. Униформизация (152). 60. Сферические координаты (153). 61. Вырожденные эллипсоидальные «вытянутые» координаты (155). 62. Вырожденные эллипсоидальные «сплюснутые» координаты (157).
- § 10. Другие системы криволинейных ортогональных координат в пространстве** 159
63. Сферо-конические координаты (159). 64. Параболоидальные координаты (160). 65. Тороидальные координаты (162). 66. Биполярные координаты (163). 67. Цилиндрические координаты (164).

ГЛАВА III

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
ВЫРАЖЕНИЙ

- § 1. Случай одной независимой переменной** 166
68. Замена независимой переменной (166). 69. Замена функции (171). 70. Замена независимой переменной и функции (172).
- § 2. Случай двух независимых переменных** 177
71. Замена независимых переменных (177). 72. Замена функции (184). 73. Замена независимых переменных и функции (185).
- § 3. Преобразования «дифференциальных параметров» и «условий регулярности»** 190
74. Параметр первого порядка (190). 75. Параметр второго порядка (лапласиан) (193). 76. Условия регулярности (196).
- § 4. Случай трех независимых переменных. Преобразования «дифференциальных параметров»** 198
77. Общие преобразования (198). 78. Преобразования «дифференциальных параметров» (203). 79. Выражения лапласиана в известных криволинейных координатах (209).

ГЛАВА IV

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ И ИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

§ 1. Интеграл по мере области	212
80. Определения (212). 81. Основные свойства (214). 82. Вычисление интегралов (218). 83. Несобственные интегралы (221).	
§ 2. Замена переменных в интеграле по мере	223
84. Постановка вопроса (223). 85. Преобразования в декартовых координатах (225). 86. Преобразования в криволинейных координатах (228).	
§ 3. Вычисление интегралов в криволинейных координатах. Примеры	231
87. О вычислении преобразованного интеграла (231). 88. Двойной интеграл (232). 89. Тройной интеграл (238).	
§ 4. Криволинейный интеграл по координате	245
90. Постановка вопроса. Ориентация линии (245). 91. Определение и свойства интеграла (247). 92. Способы вычисления (250). 93. Интеграл как функционал. Дополнительные замечания (253).	
§ 5. Поверхностный интеграл по координатам	255
94. Ориентация поверхности (255). 95. Определение и свойства интеграла (259). 96. Способы вычисления (263). 97. Дополнительные замечания (265).	
§ 6. Основная формула Грина и следствия из нее	266
98. Основная формула Грина (266). 99. Независимость интеграла от контура интегрирования (270). 100. Условие полного дифференциала. Формула Ньютона—Лейбница (273). 101. Применения. Задача термодинамики (277).	
§ 7. Формулы Стокса и Остроградского и следствия из них	281
102. Формула Стокса (281). 103. Независимость интеграла от контура интегрирования. Условие полного дифференциала. Формула Ньютона — Лейбница (285). 104. Формула Остроградского (288). 105. Независимость интеграла от поверхности интегрирования (294).	
§ 8. Формулы Грина и их обобщения	295
106. Линейный случай (295). 107. Плоский случай (298). 108. Пространственный случай (302).	

ПРЕДИСЛОВИЕ

Подлинное понимание и овладение различными современными физическими и техническими науками немислимы без таких специальных разделов математического анализа, как теория поля, теория функций комплексной переменной, теория дифференциальных и интегральных уравнений математической физики и т. п. Вместе с тем между этими разделами анализа и общим его курсом, обычно изучаемым в высших технических учебных заведениях (в течение первых двух лет обучения), имеется серьезный разрыв. В то время как общий курс состоит из основ дифференциального и интегрального исчисления для «функций одной переменной» (что обычно является предметом занятий на 1-м году обучения) и для «функций многих переменных» (что является предметом занятий на 2-м году обучения), упомянутые специальные разделы требуют знания дополнительных вопросов, не предусматриваемых общей программой. К этим вопросам относятся: криволинейные координаты, преобразования дифференциальных и интегральных выражений к новой системе координат (т. е. замена переменных), понятия интегралов по ориентированным областям, связь между интегральными выражениями различных видов (преобразования типа формул Грина) и т. п.

При изложении специальных разделов эти важные пробелы, в сущности говоря, никак не восполняются: на нужные сведения или делаются просто ссылки, или, в лучшем случае, они высказываются такой «скороговоркой», что понять суть дела бывает трудно не только инженеру, но и математику. Так, очень содержательная и отнюдь не легкая идея «преобразования» (и в аналитическом и в геометрическом аспектах), являющаяся стержневой идеей многочисленных и разнообразных математических приемов и способов решения прикладных задач, не раскрывается в соответствующей литературе.

В частности, о методе криволинейных координат, несмотря на значительные его применения в технических дисциплинах и совсем не такую уж его очевидность и простоту, можно найти лишь самые скудные (и иногда невразумительные) данные в книгах по математике и также «скороговорку» в книгах по технике, и то в очень ограниченном числе таких книг. Не существует, насколько мне известно, сводного и обстоятельного математического обзора хотя бы наиболее употребительных систем криволинейных координат. Невозможно согласиться с мнением, что достаточно подготовленный по общему курсу анализа читатель в состоянии самостоятельно, по самым кратким намекам, разобраться в нужном вспомогательном материале. Следствием этих обстоятельств является или чисто формальное изложение, или изложение, полное загадок и ребусов, разгадывание которых отвлекает вдумчивого читателя-инженера от главных целей изучения специального раздела анализа.

Итак, как видно, и в системе математического образования инженера (и даже физика) и в подходящей литературе действительно есть важные пробелы. Если говорить в самом общем виде, то они проистекают из-за отсутствия в курсе анализа основ дифференциального и интегрального исчисления для «систем функций». Дополнение этим материалом курса анализа должно послужить для серьезной математической подготовки, если и не каждого инженера, то, во всяком случае, того, который намерен вести научную работу или, вообще, склонен к более углубленному и осознанному восприятию теории по своей специальности.

В этой книге я стремился изложить в едином плане самые основные проблемы и задачи анализа для «систем функций», группирующиеся вокруг идеи «преобразований» (дифференциальных и интегральных выражений), причем, имея в виду поставленные цели, я придаю изложению, по возможности, геометрический характер. Для этого в самом начале дается целая глава, посвященная понятию отображения и связанным с ним понятиям. Во второй главе изучается другая важная геометрическая интерпретация систем функций — криволинейные координаты. Сравнительно небольшая третья глава отводится рассмотрению преобразований дифференциальных выражений, а четвертая — интегральных выражений. На базе изученных в двух первых главах геометрических

интерпретаций систем функций вопросы, разбираемые в двух последних главах, могут быть, как мне кажется, восприняты без всяких трудностей.

Начиная со второй главы, широко используются коэффициенты Ламе. Привлечение их чрезвычайно симметризует выкладки и делает их легко обозримыми и понятными. Этими соображениями оправдывается та важная роль, которую конструкции Ламе должны, на мой взгляд, играть в «оперативном» математическом анализе вообще, подобно той роли, какую они играют в некоторых технических науках.

Очень многие вопросы, затронутые здесь, довольно часто связываются в учебном изложении с векторным анализом и теорией поля. Хотя криволинейные координаты, преобразования интегралов и т. п. действительно имеют большое значение для векторного анализа и теории поля, но этими разделами анализа отнюдь не исчерпывается область применения указанных вопросов. Поэтому я считаю правильным дать координатное, классическое изложение их, с тем, чтобы затем воспользоваться его результатами в различных специальных главах анализа, в том числе (и, быть может, в наибольшей мере) в векторном анализе и теории поля.

Книга предназначена для инженеров, физиков, а также студентов старших курсов высших учебных заведений, знающих или знавших общий курс анализа *). Мой опыт по руководству математической подготовкой аспирантов-инженеров и инженеров на курсах и циклах усовершенствования показал, что время, затрачиваемое на изучение материала этой книги, не пропадает даром и окупается с лихвой в дальнейшем. Кроме того, это изучение позволяет эффективно повторить (или даже заново освоить) фундаментальные понятия общего курса анализа, переосмыслить их с новой, более общей точки зрения. Ведь не секрет, что инженер начинает свою повышенную математическую подготовку в большинстве случаев почти «с нуля», основательно растеряв все, что было приобретено на первых двух курсах вуза.

Настоящая книга содержит (правда, в значительно расширенном виде) курс лекций, который в течение ряда лет я

*) Изложение опирается на мой учебник «Курс математического анализа», ч. I и II, изд. 1953—1958 гг. Ссылки в тексте делаются без указания названия учебника; в скобках на первом месте римской цифрой обозначается часть (I или II), а затем номер пункта.

читаю аспирантам-инженерам Московского инженерно-строительного института им. В. В. Куйбышева.

Передо мной стояла цель придать изложению ясный и доходчивый характер, вполне доступный для внимательного читателя, владеющего втузовским курсом анализа или способного более или менее свободно разобраться в его вопросах. Если такой читатель будет в каких-нибудь местах книги испытывать большие затруднения, то я, значит, не достиг того, чего хотел. Я буду весьма благодарен за указания всяких погрешностей изложения, неясностей, ошибок, опечаток, вообще всего того, что должно быть устранено для улучшения книги.

Корректность и известная строгость математических рассуждений были также одним из тех принципов, которых я старался придерживаться в моей работе. Однако не всегда имелась возможность провести рассуждения исчерпывающим образом и довести их до логического конца (к ним относятся, например, рассуждения в теоремах существования). В таких случаях, и при любой другой надобности, я позволяю себе отослать читателя за консультацией к более полным, во многих отношениях замечательным, курсам анализа Э. Гурса, Р. Куранта, В. И. Смирнова, Г. М. Фихтенгольца, имеющим, однако, иную предназначенность.

Упомяну еще об одной особенности. Я не стремился во что бы то ни стало к экономии бумаги, будучи убежденным, что нередко такая экономия приводит к нерациональной растрате сил и внимания читателя. Кроме того, я не предполагаю, что все содержание книги должно быть предметом последовательного изучения. Конечно, нет никакой нужды, например, рассматривать подряд все описанные системы криволинейных координат. Поэтому рассуждения в пространственном случае, повторяющие аналогичные рассуждения в плоском случае, довольно часто проводятся полностью, а не опускаются с соответствующей ссылкой. Читатель, заинтересованный в каком-нибудь одном вопросе, может получить, как правило, необходимую ему справку без того, чтобы «поднять» весь предыдущий материал. Таким образом, вообще, имеется в виду, что эта книга может служить развернутым справочным пособием по затронутым в ней вопросам.

А. Ф. Бермант

ГЛАВА I

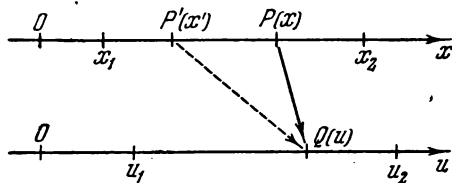
ОТОБРАЖЕНИЯ. ЯКОБИАН

§ 1. ОТОБРАЖЕНИЯ В ЛИНЕЙНОМ СЛУЧАЕ

1. Определения. Аффинные отображения. Рассмотрим функцию

$$u = f(x) \quad (1.1)$$

одной независимой переменной x . Допустим, что она определена, однозначна и непрерывна в некотором интервале I изменения переменной x (этим интервалом может быть вся ось Ox , а также какая-нибудь ее полуось *). Каждой точке $P(x)$ интервала I оси Ox функция $f(x)$ ставит в соответствие единственную (вследствие однозначности функции $f(x)$) точку $Q(u)$ оси Ou ; координата этой



Черт. 1.

точки находится из равенства (1.1) по координате точки P (черт. 1). Если $f(x)$ не константа, то множеству всех точек P интервала I на оси Ox соответствует множество всех точек Q некоторого интервала λ на оси Ou . Действительно, так как функция $f(x)$ непрерывна, то она в данном интер-

*) Если не делается дополнительных замечаний, то числовая ось в дальнейшем всегда предполагается горизонтальной, причем направление слева направо считается положительным.

вале l принимает все значения, заключенные между любыми двумя ее значениями (I, 37), и следовательно, точки Q , изображающие значения функции, заполняют без пустот некоторый интервал на оси Ou .

Определение. Точка $Q(u)$, изображающая на оси Ou значение функции $u = f(x)$, соответствующая точке $P(x)$ на оси Ox , называется отображением (или образом) точки P , а точка P — оригиналом (или прообразом) точки Q . Интервал λ — множество точек Q , соответствующих всем точкам P интервала l , называется отображением (или образом) интервала l оси Ox на оси Ou , а интервал l — оригиналом (или прообразом) интервала λ .

О функции $u = f(x)$ говорят, что она *отображает* или *преобразует* точку P (интервал l) в точку Q (интервал λ).

Таким образом, под термином *отображение* понимают как сам интервал λ , т. е. образ данного интервала l , так и операцию перехода от интервала l к интервалу λ . Если функция (1.1) рассматривается с точки зрения осуществляемого ею отображения, то она иногда называется просто отображением; например, можно сказать: «возьмем отображение $u = f(x)$ ».

Отображение $u = f(x)$, где $f(x)$ — однозначная и непрерывная функция, называется *однозначным* и *непрерывным*. При непрерывном отображении бесконечно близкие точки из интервала l переходят в бесконечно близкие же точки интервала λ .

Указание только интервала l и его образа — интервала λ ни в коей мере еще не устанавливает отображения, т. е. еще не определяет функции $u = f(x)$. Каковы бы ни были интервалы l и λ , всегда имеется бесчисленная совокупность различных функций, непрерывно отображающих интервал l в интервал λ . Эта совокупность содержит, например, линейные функции. Так, линейная функция

$$u = ax + b, \quad a, b = \text{const}, \quad (1.2)$$

непрерывно отображает интервал $[x_1, x_2]$ в интервал $[u_1, u_2]$, $x_1 < x_2$, $u_1 < u_2$, причем

если

$$u|_{x=x_1} = u_1, \quad u|_{x=x_2} = u_2, \\ a = \frac{u_2 - u_1}{x_2 - x_1}, \quad b = \frac{u_1 x_2 - u_2 x_1}{x_2 - x_1},$$

и

$$u|_{x=x_1} = u_2, \quad u|_{x=x_2} = u_1,$$

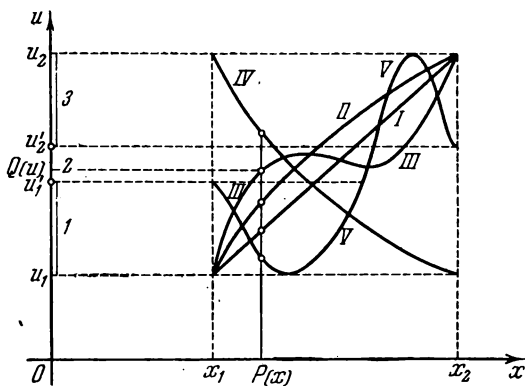
если

$$a = \frac{u_1 - u_2}{x_2 - x_1}, \quad b = \frac{u_2 x_2 - u_1 x_1}{x_2 - x_1} *).$$

В первом случае функция (1.2) возрастающая и точка $Q(u)$ непрерывно пробегает слева направо интервал $[u_1, u_2]$, когда прообраз-точка $P(x)$ непрерывно пробегает также слева направо интервал $[x_1, x_2]$; во втором случае функция (1.2) убывающая и точка $Q(u)$ непрерывно пробегает справа налево интервал $[u_1, u_2]$, когда прообраз-точка $P(x)$ непрерывно пробегает слева направо интервал $[x_1, x_2]$.

Отображения, определяемые линейными функциями (1.2), называются аффинными. Это — простейшие отображения.

2. Графики. Задание отображения интервала I в интервал λ означает исчерпывающее задание соответствия точек



Черт. 2.

отображаемых интервалов. Это соответствие точек двух интервалов весьма наглядно иллюстрируется графиком отображающей функции $u = f(x)$ (I, 10). На черт. 2 приведены

*) Значения a и b в первом случае получаются из системы равенств $ax_1 + b = u_1$, $ax_2 + b = u_2$, а во втором — из системы равенств $ax_1 + b = u_2$, $ax_2 + b = u_1$.

в системе декартовых координат графики I, II, III, IV, V пяти функций:

$$I: u = f_1(x); \quad II: u = f_2(x); \quad III: u = f_3(x);$$

$$IV: u = f_4(x); \quad V: u = f_5(x),$$

каждая из которых непрерывно отображает интервал $[x_1, x_2]$ оси Ox в интервал $[u_1, u_2]$ оси Ou . Функция $f_1(x)$ линейная и возрастающая; функция $f_2(x)$ также возрастающая, но не линейная; функция $f_3(x)$ меняет в интервале $[x_1, x_2]$ характер своего роста. Эти три функции удовлетворяют таким, как говорят, граничным условиям (одним и тем же):

$$f_1(x_1) = f_2(x_1) = f_3(x_1) = u_1, \quad f_1(x_2) = f_2(x_2) = f_3(x_2) = u_2.$$

Функция $f_4(x)$ убывающая в интервале $[x_1, x_2]$, причем

$$f_4(x_1) = u_2, \quad f_4(x_2) = u_1;$$

функция же $f_5(x)$ (как и $f_3(x)$) не является монотонной в интервале $[x_1, x_2]$, причем его граничные точки x_1 и x_2 отображаются не в граничные точки интервала $[u_1, u_2]$.

Теперь, конечно, должно быть вполне очевидным все бесконечное разнообразие непрерывных отображений интервала $[x_1, x_2]$ в интервал $[u_1, u_2]$.

Геометрическая интерпретация — в виде графика отображающей функции $u = f(x)$ очень наглядна и удобна. Она осуществима благодаря тому, что оси Ox , Ou , по которым изменяются соответствующие друг другу точки $P(x)$ и $Q(u)$, можно расположить в виде координатных осей в плоскости и совместность точек P и Q — изобразить одной точкой, пробегающей по линии $u = f(x)$ в этой плоскости. График предоставляет простой способ для перехода от данной точки $P(x)$ к ее образу $Q(u)$: из точки P мы двигаемся по прямой, параллельной оси Ou , до точки пересечения с графиком, а затем из нее по прямой, параллельной оси Ox , до точки пересечения с осью Ou (т. е. до точки Q); точка Q и является искомым образом.

3. Обращение. Гомеоморфизм. Пусть задано отображение интервала I оси Ox в интервал λ оси Ou . Под обращением данного отображения понимают отображение, которое приводит в соответствие те же точки, что и данное отображение, но в обратном порядке, т. е. точкам интервала λ

оси Ou ставятся в соответствие точки интервала l оси Ox . Сами отображения при этом называются *взаимно-обратными*. Оригинал (образ) в данном отображении делается в обратном отображении образом, а образ — оригиналом. Ясно, что отображение, обратное данному, осуществляемому функцией $u = f(x)$, производится функцией $x = \varphi(u)$, обратной функции $u = f(x)$ (I, 20); значит, $\varphi = f^{-1}$ (так обозначается обратная функция).

Может случиться, что отображение, обратное данному однозначному отображению, уже не будет однозначным. Так, если двум различным точкам $P(x)$ и $P'(x')$ оси Ox соответствует одна и та же точка $Q(u)$ оси Ou (см. черт. 1), то при обратном отображении (с оси Ou на ось Ox) одной точке $Q(u)$ будут соответствовать по меньшей мере две точки $P(x)$ и $P'(x')$ и, следовательно, это отображение уже не будет однозначным. Еще пример: отображение, обратное отображению $u = f_5(x)$ (см. черт. 2), не будет однозначным; в интервале $[u_1, u'_1]$ оно двузначно, в интервале $[u'_1, u'_2]$ — однозначно, в интервале $[u'_2, u_2]$ — двузначно.

В первом примере точка $Q(u)$ служит образом двух точек оси Ox : $P(x)$ и $P'(x')$; говорят в этом случае, что точка $Q(u)$ при отображении *покрывается дважды*. Вообще, говорят, что *данная точка $Q(u)$ оси Ou покрывается при отображении $u = f(x)$ интервала l оси Ox n раз, если она является образом n точек (различных или нет) интервала l , т. е. если уравнение*

$$u = f(x)$$

относительно x имеет n действительных (различных или равных) корней, принадлежащих интервалу l . Поэтому во втором примере интервал $[u_1, u'_1]$ при отображении $u = f_5(x)$ (черт. 2) покрыт дважды (так как дважды покрыта каждая его точка), интервал (u'_1, u'_2) покрыт однократно, интервал $[u'_2, u_2]$ покрыт дважды. Интервал $[u_1, u_2]$ — образ интервала $[x_1, x_2]$ мы можем представлять себе как бы слоистым: одна его часть, первая (черт. 2), состоит из двух, лежащих друг на друге интервалов $[u_1, u'_1]$, вторая — из одного интервала (u'_1, u'_2) , третья — из двух интервалов $[u'_2, u_2]$.

Если обратное отображение также однозначно, то такие отображения называют *взаимно-однозначными* или

одно-однозначными. Ясно, что данное отображение интервала на оси Ox будет взаимно-однозначным, если каждой точке этого интервала соответствует одна точка на оси Oy и каждому двум различным точкам этого интервала соответствуют две различные же точки на оси Oy .

Определение. Взаимно-однозначное и взаимно-непрерывное отображение интервала (в интервал) называется гомеоморфным.

Мы будем говорить, что *отображение гомеоморфно в точке $P(x)$ (локально гомеоморфно), если существует такая окрестность точки P , что в ней данное отображение гомеоморфно.*

При гомеоморфном отображении интервал I на оси Ox преобразуется в некоторый однократно покрытый интервал λ на оси Oy .

Вопрос о гомеоморфизме непрерывного отображения $u = f(x)$ есть, очевидно, вопрос об однозначности (и непрерывности) функции $x = \varphi(u) = f^{-1}(u)$, или, как говорят, об однозначной обратимости функции $u = f(x)$ (см. п° 6).

Например, аффинное отображение

$$u = ax + b,$$

если $a \neq 0$, гомеоморфно на всей оси Ox , причем

$$x = \frac{1}{a} u - \frac{1}{a} b.$$

Если $a = 0$, то отображение ($u = b$) не только не гомеоморфно, но и не обратимо; вся ось Ox отображается в одну точку. Это пример так называемого вырожденного отображения (см. п° 27).

Отображение $u = x^2$ непрерывно на всей оси Ox , но не гомеоморфно. Оно, однако, гомеоморфно в каждой точке, кроме точки $x = 0$, и в каждом интервале, не содержащем точку $x = 0$. Все это легко усмотреть по графику функции $u = x^2$.

4. Суперпозиция. Пусть функция

$$u = F(x)$$

задана как сложная функция независимой переменной x посредством промежуточного аргумента ξ :

$$u = f(\xi), \quad \xi = f_1(x),$$

т. е.

$$u = F(x) = f[f_1(x)],$$

причем f и f_1 — непрерывные функции своих аргументов.

Можно считать, что функция $u = F(x)$ отображает некоторый интервал l оси Ox в интервал λ оси Ou посредством двух промежуточных отображений: 1) интервала l в интервал λ' оси $O\xi$ с помощью функции $\xi = f_1(x)$; 2) интервала λ' в интервал λ оси Ou с помощью функции $u = f(\xi)$. Результирующее отображение интервала l в интервал λ называется *суперпозицией* (или *произведением*) двух этих *промежуточных* (или *вспомогательных*) отображений. Суперпозиция отображений может состоять не из двух, а из большего числа промежуточных отображений.

Ясно, что если все промежуточные отображения гомеоморфны, то и их суперпозиция будет давать гомеоморфное отображение.

Понятием суперпозиции пользуются для того, чтобы представить данное отображение как результат последовательности более простых отображений. Например, линейное (аффинное) отображение

$$u = ax + b, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0$$

можно представить как суперпозицию двух еще более простых (также аффинных) отображений:

$$1) \xi = ax,$$

что осуществляется посредством изменения масштаба, и

$$2) u = \xi + b,$$

что осуществляется посредством сдвига на расстояние, равное $|b|$, вправо, если $b > 0$, и влево, если $b < 0$ (см. I, 16).

В заключение заметим, что систему двух функций одной независимой переменной, например

$$u = f(x), \quad v = g(x), \quad (1.3)$$

заданную в некотором интервале I оси Ox , можно рассматривать как систему, определяющую линию в плоскости $Ouvw$. Действительно, отнесем каждой точке интервала I точку в плоскости $Ouvw$ с координатами u, v , вычисленными по формулам (1.3). Совокупность всех таких точек, соответствующих всем точкам интервала I , и образует, вообще говоря, линию. Эта линия является *отображением* в плоскости $Ouvw$ интервала I оси Ox посредством системы функций (1.3). Если каждая из функций f и g — постоянная (отображения (1.3) вырожденные), то пара функций (1.3) отображает интервал I в точку плоскости $Ouvw$, и можно сказать, что при этом система (1.3) дает также вырожденное отображение интервала I .

Уравнения (1.3) называют *параметрическими уравнениями плоской линии*, а переменную x — *параметром* (I, 55).

Буквально то же самое относится к системе трех функций:

$$u = f(x), \quad v = g(x), \quad w = h(x). \quad (1.4)$$

Эта система отображает некоторый интервал оси Ox , вообще говоря, в линию в пространстве $Ouvw$. Уравнения (1.4) называют *параметрическими уравнениями пространственной линии*, а переменную x — *параметром*.

§ 2. КОЭФФИЦИЕНТ ИСКАЖЕНИЯ И ПРОИЗВОДНАЯ

Б. Коэффициент искажения. Если функция $f(x)$ дифференцируема в интервале I , то отображение (1.1) называется также *дифференцируемым*. В дальнейшем всегда предполагается, что функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема, т. е. имеет непрерывную производную $f'(x)$. Для дифференцируемых отображений $u = f(x)$ важной характеристикой служат производная $f'(x)$, точнее, модуль производной $|f'(x)|$, и ее знак.

Вывясним это. Рассмотрим отображение (1.1) в точке $P_0(x_0)$ (т. е. в ее окрестности). Функция $u = f(x)$ преобразует точки этой окрестности в точки $Q(u)$, распределенные, вообще говоря, иначе, чем исходные точки. Так, если взять точки оси Ox , распределенные равномерно (т. е. с неизменным расстоянием между каждыми двумя соседними точками), то они отобразятся в точки, распределенные, вообще

говоря, неравномерно: функция $u=f(x)$ указанные точки оси Ox в различных местах сгустит (или разрядит) по-разному. Только в одном случае всякое равномерно распределенное множество точек на оси Ox преобразуется в равномерно же распределенное множество точек на оси Ou , а именно только в случае аффинного отображения (1.2)*). При этом отношение длины отображенного интервала (образа) к длине отображаемого интервала (прообраза) сохраняется постоянным. В самом деле, из равенства (1.2) имеем (I, 17):

$$\Delta u = a \Delta x$$

и, значит,

$$k = \left| \frac{\Delta u}{\Delta x} \right| = |a| = \left| \frac{u_2 - u_1}{x_2 - x_1} \right|.$$

Это число k (равное модулю производной $\frac{du}{dx}$) показывает, во сколько раз изменяется длина любого интервала при аффинном его отображении (1.2); оно называется *коэффициентом искажения* (или *коэффициентом растяжения*) аффинного отображения

$$u = ax + b. \quad (1.2)$$

Если отображение (1.1) не аффинное, то «разброс» равномерно распределенных точек будет не одинаков и длины интервалов при отображении будут изменяться различно

*) Совсем легко убедиться, что аффинное отображение обладает этим свойством. В самом деле, если $u = ax + b$, то $\Delta u = a \Delta x$ и, стало быть, расстояние Δx между соседними точками полностью определяет расстояние Δu между образами этих точек.

Покажем, что таким свойством обладает только аффинное отображение. Действительно, пусть функция (1.1) отображает всякое равномерно распределенное множество точек оси Ox в равномерно распределенное множество точек оси Ou . Докажем, что тогда функция (1.1) линейная, т. е. отображение аффинное. Для этого возьмем произвольную точку $P(x)$ и придадим ее координате x произвольное приращение dx ; мы получим другую точку $P(x+dx)$. В силу сделанного предположения приращение Δu должно быть при заданном dx одно и то же для любой точки $P(x)$, т. е. Δu не должно зависеть от x . Так как du является главной частью Δu , то и du не может зависеть от x . Поэтому в формуле $du = a dx$ a постоянно. Отсюда и следует, что

$$u = ax + b.$$

для различных интервалов. Поэтому необходимо ввести локальное (т. е. относящееся к точке) понятие коэффициента искажения (или растяжения).

Определение. Коэффициентом искажения $k(x_0)$ в точке $P_0(x_0)$ отображения $u = f(x)$, гомеоморфного в точке P_0 , называется предел отношения длины отображенного интервала (на оси Ou) к длине соответствующего отображаемого интервала (на оси Ox) с началом в точке P_0 при неограниченном стягивании этого интервала к точке P_0 .

Найдем выражение для коэффициента искажения. Вследствие гомеоморфности отображения в точке P_0 существует δ -окрестность, $|x - x_0| < \delta$, такая, что любой ее интервал с началом в точке P_0 преобразуется в однократно покрытый интервал оси Ou ; длина его равна:

$$|\Delta u| = |f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)|, \quad |\Delta x| < \delta.$$

Следовательно,

$$k(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta u}{\Delta x} \right| = |f'(x_0)| = \left| \frac{du}{dx} \right|_{x=x_0},$$

т. е. коэффициент искажения в данной точке равен модулю производной отображающей функции в этой точке. В частности, в случае аффинного отображения коэффициент искажения оказывается величиной постоянной.

Итак, мы видим, что модуль производной отображающей функции показывает с точностью до бесконечно малых величин высших порядков, во сколько раз изменяется («искажается») бесконечно малая длина интервала (с началом в данной точке) при его отображении*). Точно так же изменяется и длина любого другого бесконечно малого интервала, содержащего данную точку. Действительно,

*) В точном смысле это относится лишь к случаю, когда производная в данной точке отлична от нуля (что, как будет дальше показано, обеспечивает и гомеоморфизм отображения). Если же производная равна нулю, то при условии гомеоморфности в точке (см. ниже) коэффициент искажения также считают равным модулю производной, т. е. нулю, понимая под этим, что интервал бесконечно малой длины отображается в интервал, длина которого есть бесконечно малая величина высшего порядка (условно говорят еще, что при отображении интервал «бесконечно сжимается»).

всякий отрезок, содержащий данную точку P_0 , является суммой двух интервалов с началом в этой точке; поэтому можно записать:

$$|\Delta\lambda_1| = k_0 |\Delta I_1| + \varepsilon_1 \quad \text{и} \quad |\Delta\lambda_2| = k_0 |\Delta I_2| + \varepsilon_2,$$

где $|\Delta I_1|$ и $|\Delta I_2|$ — длины первого и второго бесконечно малых интервалов с началом в точке P_0 , $|\Delta\lambda_1|$ и $|\Delta\lambda_2|$ — длины их образов, k_0 — коэффициент искажения в точке P_0 , ε_1 и ε_2 — бесконечно малые величины высших порядков. Складывая, получаем:

$$|\Delta\lambda| = k_0 |\Delta I| + \varepsilon,$$

где $|\Delta I|$ — длина данного интервала, $|\Delta\lambda|$ — длина его образа, ε — бесконечно малая величина высшего порядка. Но отсюда и следует *), что

$$\lim_{\Delta I \rightarrow 0} \frac{|\Delta\lambda|}{|\Delta I|} = k_0.$$

6. Направление перемещения. Обратное отображение.

Покажем теперь, что знак производной отображающей функции обуславливает направление перемещения точки Q — образа перемещающейся точки P . Именно, *если $f'(x_0) > 0$, то при перемещении точки $P(x)$ в некоторой окрестности точки $P_0(x_0)$ в положительном направлении — слева направо — точка $Q(u)$ перемещается тоже в положительном направлении, т. е. слева направо; если же $f'(x_0) < 0$, то точка $Q(u)$ перемещается в обратном — отрицательном направлении, т. е. справа налево.*

В самом деле, в силу предположенной непрерывности $f'(x)$, существует окрестность точки $P_0(x_0)$, в которой производная сохраняет положительный знак в первом случае и отрицательный — во втором. Но тогда функция $u = f(x)$ в этой окрестности монотонно возрастает или (соответственно) монотонно убывает (I, 67) и, значит, точка $Q(u)$ перемещается слева направо в первом случае и справа налево — во втором.

Монотонность же функции обеспечивает, как известно (I, 20), однозначную (и непрерывную) ее обратимость.

*) Это легко показать также с помощью формулы Лагранжа (I, 65).

Итак, если $\left. \frac{du}{dx} \right|_{x=x_0} \neq 0$, то отображение $u = f(x)$ в точке $P_0(x_0)$ гомеоморфно, т. е. если $u_0 = f(x_0)$, то существуют такая окрестность точки $Q_0(u_0)$ и такая непрерывная в ней функция $x = \varphi(u)$, что $x_0 = \varphi(u_0)$ и $u \equiv f[\varphi(u)]$.

Совершенно такое же рассуждение показывает, что если $\frac{du}{dx}$ не меняет знака в целом интервале, то в этом интервале отображение $u = f(x)$ гомеоморфно, причем если $\frac{du}{dx} > 0$, то направления перемещения точек P и Q — оба и прообраза — одинаковы, а если $\frac{du}{dx} < 0$, то эти направления противоположны.

Этот вывод остается справедливым, как легко убедиться, и при более широком предположении что производная $f'(x)$, не меняя в интервале знака, обращается в нуль в конечном числе точек этого интервала.

Отсюда следует интересное замечание: из локального гомеоморфизма отображения интервала в интервал вытекает гомеоморфизм в целом интервале.

Полученные результаты становятся очень наглядными, если заметить, что в бесконечно малой окрестности точки $P_0(x_0)$ с точностью до бесконечно малых величин высших порядков дифференцируемое отображение $u = f(x)$ является аффинным. Действительно, мы имеем:

$$\begin{aligned} u &= f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \varepsilon = \\ &= f'(x_0)x + [f(x_0) - f'(x_0)x_0] + \varepsilon, \end{aligned}$$

где ε — величина высшего порядка малости, чем $|x - x_0|$. Отбрасывая здесь ε и сравнивая полученную линейную функцию с общей формой аффинного отображения (1.2), находим:

$$a = f'(x_0), \quad b = f(x_0) - f'(x_0)x_0.$$

Отображение $x = \varphi(u)$, обратное непрерывно дифференцируемому гомеоморфному отображению $u = f(x)$, также непрерывно дифференцируемо, за исключением точек $Q(u)$, соответствующих точкам $P(x)$, в которых $f'(x) = 0$ (см. ниже); при этом, предполагая, что $f'(x) \neq 0$, мы имеем (I, 49):

$$\varphi'(u) = \frac{1}{f'(x)},$$

т. е.

$$\frac{dx}{du} \frac{du}{dx} = 1.$$

Таким образом, непрерывная дифференцируемость обратного отображения может быть нарушена только в точках, соответствующих точкам, в которых коэффициент искажения данного отображения равен нулю (хотя гомеоморфизм может сохраняться; пример: $y = x^3$ при $x = 0$).

Соотношение $\varphi'(u) = \frac{1}{f'(x)}$ вполне ясно с точки зрения отображений: при переходе с оси Ou на ось Ox коэффициент искажения должен быть, разумеется, обратным коэффициенту искажения при переходе с оси Ox на ось Ou , а знаки $\varphi'(u)$ и $f'(x)$ должны быть одинаковыми.

7. Суперпозиция. Если отображение $u = F(x)$ является суперпозицией отображений $u = f(\xi)$, $\xi = f_1(x)$, причем функции f и f_1 в соответствующих интервалах дифференцируемы, то (I, 47)

$$F'(x) = f'(\xi) f_1'(x) \quad (1.5)$$

и, следовательно, в частности,

$$|F'(x)| = |f'(\xi)| |f_1'(x)|,$$

т. е. *коэффициент искажения суперпозиции (произведения) отображений равен произведению коэффициентов искажений промежуточных (вспомогательных) отображений*. Этот результат очевиден, если принять во внимание описанный выше смысл коэффициента искажения.

Применим теперь равенство (1.5) к случаю, когда функция f_1 обратна функции f , т. е. в наших обозначениях, когда $f_1 = \varphi$. Итак, пусть

$$u = f(x), \quad x = \varphi(u).$$

причем эта обратная функция, так же как и данная функция, дифференцируема в рассматриваемых точках.

Имеем: $u = f[\varphi(u)] \equiv u$, и так как $\frac{du}{du} = 1$, то

$$1 = \frac{du}{dx} \frac{dx}{du}.$$

Это соотношение выведено уже без предварительного условия, что $f'(x) \neq 0$. Отсюда следует, что если $f'(x) = 0$, то обратное отображение в соответствующих точках действительно недифференцируемо, ибо в противном случае мы пришли бы к невозможному равенству:

$$1 = 0 \frac{dx}{du},$$

Равенство (1.5) опять-таки вполне ясно с точки зрения известного нам смысла производной, как характеристики отображения.

§ 3. ОТОБРАЖЕНИЯ В ПЛОСКОМ СЛУЧАЕ

8. Определения. Рассмотрим теперь пару функций u и v :

$$u = f(x, y), \quad v = g(x, y), \quad (1.6)$$

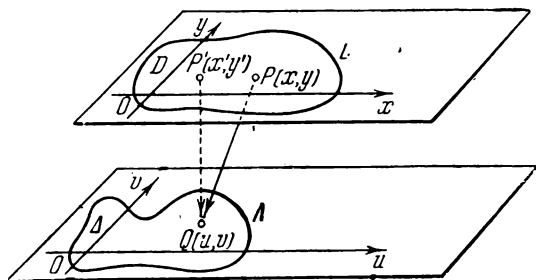
двух независимых переменных x и y . Допустим, что каждая из этих функций определена, однозначна и непрерывна в некоторой области D изменения точки $P(x, y)$ плоскости, снабженной системой декартовых координат Oxy (областью D может быть вся плоскость Oxy , а также какая-нибудь ее бесконечная часть).

Каждой точке $P(x, y)$ области D система функций $f(x, y)$ и $g(x, y)$ ставит в соответствие единственную точку $Q(u, v)$ плоскости, снабженной системой декартовых координат Ouv ; координаты точки $Q(u, v)$ находятся из равенств (1.6) по координатам точки $P(x, y)$ (черт. 3).

Множеству всех точек P области D соответствует некоторое множество Δ точек Q плоскости Ouv . Если функции f и g — константы, то множество Δ состоит из одной точки. Если константой является одна из этих функций, скажем g , то множество Δ есть интервал оси, параллельной оси Ou (в частности, при $g \equiv 0$ совпадающей с осью Ou). Может также случиться, что множество будет лежать вообще на какой-нибудь линии, не обязательно прямой. Но при соблюдении

известных условий относительно функций f и g (см. § 8), исключающих, между прочим, указанные только что случаи, множество точек Δ является также областью. Обычно именно это и встречается. Заметим еще, что мы предполагаем границы L и Λ задаваемых областей, также как и любые употребляемые в книге линии, кусочно-гладкими кривыми линиями (I, 54).

Определение. Точка $Q(u, v)$, изображающая на плоскости Ouv систему значений функций $u=f(x, y)$, $v=g(x, y)$ и соответствующая точке $P(x, y)$ на плоскости



Черт. 3.

Oxu , называется отображением (или образом) точки P , а точка P —оригиналом (или прообразом) точки Q . Область Δ —множество точек Q , соответствующих всем точкам P области D , называется отображением (или образом) области D плоскости Oxu на плоскость Ouv , а область D —оригиналом (или прообразом) области Δ .

О функциях $u=f(x, y)$, $v=g(x, y)$ говорят, что они отображают или преобразуют точку P (область D) в точку Q (в область Δ).

Термином *отображение* обозначают как самую область Δ , т. е. образ данной области, так и операцию перехода от области D к области Δ . Если пара функций (1.6) рассматривается с точки зрения осуществляемого ею отображения, то она иногда называется просто отображением; например, можно сказать: «возьмем отображение $u=f(x, y)$, $v=g(x, y)$ ».

Отображение $u=f(x, y)$, $v=g(x, y)$, где $f(x, y)$ и $g(x, y)$ —однозначные и непрерывные функции,

называется *однозначным и непрерывным*. При непрерывном отображении непрерывные протяжения точек из области D переходят в непрерывные же протяжения точек области Δ . Как и в линейном случае, указание только области D и ее образа—области Δ еще не устанавливает отображения, т. е. еще не определяет системы функций $u = f(P)$ и $v = g(P)$. В действительности имеется бесчисленная совокупность пар функций, непрерывно отображающих данную область D на другую заданную область Δ . Однако в рассматриваемом плоском случае дело обстоит значительно сложнее, чем в линейном случае, и доказательство здесь существования отображений (при различных дополнительных условиях) составляет важную и трудную проблему математического анализа.

Усложнение вопроса в плоском случае видно хотя бы из того факта, что отображение данной области D в другую заданную область Δ посредством линейных функций возможно только при особо благоприятных обстоятельствах (интервал же в интервал, как мы видели в § 1, всегда может быть отображен и с помощью линейной функции). Мы столкнемся еще и с другими проявлениями усложнений в плоском случае. Здесь мы лишены также и наглядной геометрической интерпретации, позволяющей видеть совместность точек $P(x, y)$ и $Q(u, v)$, соответствующих друг другу; для этой интерпретации потребовалось бы обратиться к пространству четырех измерений, не обладающему свойством физической наглядности.

Заметим, что к отображению одной области в другую область (в любом случае: линейном, плоском, пространственном) приводят различные физические задачи. Укажем, например, одну общую схему физического явления, связанную с отображением: непрерывно распределенная в одной области среда подвергается некоторым воздействиям, вследствие которых она изменяется и распределяется в другой области. Переход от одной области к другой, т. е. соответствующее отображение первой области во вторую, и характеризует с известной стороны совокупность имевших место воздействий.

9. Обращение. Пусть задано отображение (1.6):

$$u = f(x, y), \quad v = g(x, y).$$

Под обращением данного отображения понимают отображение, которое приводит в соответствие те же точки пло-

скостей Oxu и Oyv , что и данное отображение, но в обратном порядке, т. е. точкам плоскости Oyv ставятся в соответствие точки плоскости Oxu . Сами отображения при этом называются взаимно-обратными. Оригинал (образ) в данном отображении делается в обратном отображении образом, а образ — оригиналом. Отображение, обратное отображению (1.6), находится решением системы уравнений (1.6) относительно x и y :

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v). \quad (1.6')$$

Может случиться, что отображение, обратное данному однозначному отображению, уже не будет однозначным. Так, если двум различным точкам $P(x, y)$ и $P'(x', y')$ плоскости Oxu соответствует одна и та же точка $Q(u, v)$ плоскости Oyv (см. черт. 3), то при обратном отображении (с плоскости Oyv на плоскость Oxu) одной точке $Q(u, v)$ будут соответствовать по меньшей мере две точки $P(x, y)$ и $P'(x', y')$ и, следовательно, это отображение не будет однозначным.

Говорят, что точка $Q(u, v)$ плоскости Oyv покрывается n раз при отображении $u = f(x, y)$, $v = g(x, y)$ области D плоскости Oxu , если она является образом n точек (различных или нет) области D , т. е. если система уравнений

$$u = f(x, y), \quad v = g(x, y)$$

имеет относительно x, y n пар действительных корней, принадлежащих области D .

Область Δ — образ области D — мы можем представлять себе слоистой: любая ее часть состоит из такого числа листов (или пластин), сколько раз покрывается при отображении каждая точка этой части.

Рассмотрим, например, отображение

$$u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy$$

круга $x^2 + y^2 \leq R^2$. Ясно, что каждым двум точкам $P(x, y)$ и $P'(-x, -y)$ этого круга соответствует одна и та же точка $Q(u, v)$. Значит, обратное отображение двузначное, что легко проверяется и непосредственно: для этого стоит только выразить x и y через u и v .

Остановимся еще на этом наглядном примере. Так как

$$u^2 + v^2 = (x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2 = (x^2 + y^2)^2,$$

то при $x^2 + y^2 = r^2 \leq R^2$ имеем:

$$u^2 + v^2 = r^4.$$

Отсюда следует, что окружность радиуса r (с центром в начале координат) отображается также в окружность (с центром в начале координат) радиуса r^2 . Последняя окружность будет дважды покрыта (верхняя полуокружность $x^2 + y^2 = r^2$, $y \geq 0$, преобразуется в одну окружность $u^2 + v^2 = r^4$, нижняя полуокружность $x^2 + y^2 = r^2$, $y \leq 0$, — во вторую окружность $u^2 + v^2 = r^4$). Таким образом, заданный круг $x^2 + y^2 \leq R^2$ отображается в двулистный круг $u^2 + v^2 \leq R^4$.

Характер этого отображения делается еще более ясным, если заметим, что луч $y = kx$ отображается также в луч:

$$v = \frac{2k}{1 - k^2} u, \text{ угол наклона которого к оси } Oи \text{ равен удвоенному}$$

углу наклона к оси Ox луча-прообраза. Значит, рассматриваемое отображение любую точку плоскости Oxy преобразует в такую точку плоскости $Oиv$, что ее полярный радиус равен квадрату полярного радиуса прообраза, а ее полярный угол — удвоенному полярному углу прообраза.

10. Гомеоморфизм. Если обратное отображение также однозначное, то такие отображения называют *взаимно-однозначными* или *одно-однозначными*. Взаимно-однозначное отображение области D в плоскости Oxy характеризуется тем, что каждой точке этой области соответствует одна точка на плоскости $Oиv$, а каждым двум различными точкам этой области соответствуют две различные же точки на плоскости $Oиv$.

Определение. *Взаимно-однозначное и взаимно-непрерывное отображение области называется гомеоморфным.*

Мы будем говорить, что *отображение гомеоморфно в точке $P(x, y)$ (локально гомеоморфно)*, если существует такая окрестность точки P , что в ней данное отображение гомеоморфно.

При гомеоморфном отображении область D плоскости Oxy преобразуется в некоторую однократно покрытую (однолистную) область Δ плоскости $Oиv$.

Доказательство этого предложения (собственно говоря, только того факта, что образом области будет также область) мы приводить не будем, так как оно выходит за рамки нашей книги.

Вопрос о гомеоморфизме непрерывного отображения (1.6):

$$u = f(x, y), \quad v = g(x, y),$$

есть, очевидно, вопрос об однозначности (и непрерывности *) функций (1.6'):

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v),$$

или, как говорят, об однозначной обратимости системы $u = f(x, y)$, $v = g(x, y)$. Этого вопроса мы еще коснемся в §§ 7, 8.

11. Суперпозиция. Пусть функции

$$u = F(x, y), \quad v = G(x, y)$$

заданы как сложные функции независимых переменных x и y посредством промежуточных аргументов ξ и η :

$$u = f(\xi, \eta), \quad v = g(\xi, \eta),$$

$$\xi = f_1(x, y), \quad \eta = g_1(x, y),$$

т. е.

$$u = F(x, y) = f[f_1(x, y), g_1(x, y)],$$

$$v = G(x, y) = g[f_1(x, y), g_1(x, y)].$$

Можно считать, что система $u = F(x, y)$, $v = G(x, y)$ отображает некоторую область D плоскости Oxy в область Δ плоскости Ouv посредством двух промежуточных отображений: 1) области D — в область Δ' плоскости $O\xi\eta$ с помощью системы $\xi = f_1(x, y)$, $\eta = g_1(x, y)$; 2) области Δ' — в область Δ с помощью системы $u = f(\xi, \eta)$, $v = g(\xi, \eta)$. Результирующее отображение области D в область Δ называется *суперпозицией* (или *произведением*) двух этих *промежуточных* (или *вспомогательных*) отображений. Суперпозиция отображений может состоять не из двух, а из большего числа промежуточных отображений.

*) Справедливо предложение: из однозначности отображения, обратного непрерывному отображению, следует и непрерывность этого обратного отображения.

Очевидно, что суперпозиция гомеоморфных отображений является также гомеоморфным отображением.

Понятием суперпозиции пользуются для того, чтобы представить данное отображение как результат последовательности более простых отображений.

К числу особенно простых отображений относятся отображения, в которых одна из координат (абсцисса или ордината) остается неизменной; такие отображения называются *примитивными*. Оказывается, что при довольно общих и простых условиях всякое отображение можно представить как суперпозицию двух примитивных отображений, или, как говорят, можно *разложить на два примитивных отображения*.

Теорема. *Если дана система*

$$u = F(x, y), \quad v = G(x, y), \quad (1.7)$$

причем из второго равенства можно выразить y как однозначную и непрерывную функцию от x и v (II, 151, см. также § 7), то существует такая функция $f(\xi, \eta)$, что

$$u = f(\xi, \eta), \quad v = \eta, \quad (1.7')$$

$$\xi = x, \quad \eta = G(x, y) \quad (1.7'')$$

и

$$u = F(x, y) \equiv f[x, G(x, y)], \quad v = G(x, y).$$

Доказательство. Пусть из второго равенства (1.7) найдено:

$$y = \psi(x, v);$$

это значит, что $y \equiv \psi[x, G(x, y)]$. Тогда искомой функцией $f(\xi, \eta)$ будет:

$$f(\xi, \eta) = F[\xi, \psi(\xi, \eta)].$$

Действительно:

$$f(\xi, \eta) = F[x, \psi[x, G(x, y)]] = F(x, y),$$

ч. т. д.

Каждое из примитивных отображений (1.7') и (1.7'') изменяет соответствующую область только в одном направлении: отображение (1.7'') преобразует данную область D в направлении оси ординат, оставляя неизменной абсциссу каждой точки, а отображение (1.7') преобразует полученную область Δ' в направлении оси абсцисс, оставляя неизменной ординату каждой точки (черт. 4). Этими двумя шагами достигается, в конечном счете, отображение данной области D в область Δ , которое изменяет, вообще, и абсциссу и ординату каждой точки. Таким образом, всякое отображение мы можем представить себе как известную совокупность отображений интервала в интервал, ибо любое примитивное отображение есть зависящее от параметра отображение интервала прямой линии в интервал прямой линии.

Точно так же, если из первого равенства (1.7) можно выразить x как однозначную и непрерывную функцию от y и u , пусть

$x = \varphi(u, y)$, то данное отображение

$$u = F(x, y), \quad v = G(x, y)$$

можно разложить на два других примитивных отображения, а именно:

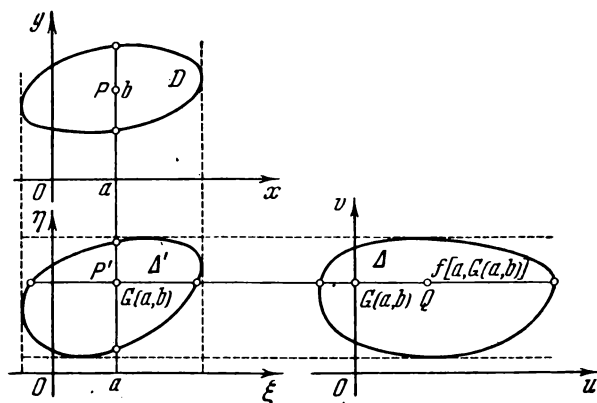
$$u = \xi, \quad v = g(\xi, \eta),$$

$$\xi = F(x, y), \quad \eta = y,$$

где

$$g(\xi, \eta) = G[\varphi(\xi, \eta), \eta].$$

Здесь область сначала преобразуется в направлении оси абсцисс, а полученная область затем преобразуется в направлении оси ординат.



Черт. 4.

Указанные разложения отображения на два примитивных позволяют образ Q точки P получить как бы «ходом коня»: сначала ее передвинуть по вертикали, а потом по горизонтали или наоборот: сначала по горизонтали, а потом по вертикали.

Пример. Пусть

$$u = y^2, \quad v = \sqrt{x^2 - y^2}.$$

Имеем из второго равенства:

$$y = \sqrt{x^2 - v^2};$$

заменяя здесь x через ξ , а v — через η , находим два промежуточных примитивных отображения:

$$u = \xi^2 - \eta^2, \quad v = \eta,$$

$$\xi = x, \quad \eta = \sqrt{x^2 - y^2}.$$

§ 4. АФФИННЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

12. Определения. Рассмотрим прежде всего простейшие среди всех непрерывных отображений (1.6) — так называемые *аффинные отображения*, определяемые линейными функциями:

$$u = a_1x + b_1y + c_1, \quad v = a_2x + b_2y + c_2, \quad (1.8)$$

$a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2$ — постоянные. Изучим характер перехода от точек области D плоскости Oxy к соответствующим точкам области Δ плоскости Ouv при аффинном отображении.

Будем считать определитель системы (1.8) отличным от нуля:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0.$$

При этом любой паре значений u и v соответствует единственная пара значений x и y , т. е. отображение (1.8) однозначно обратимо, и мы получаем для x и y линейные выражения:

$$x = a'_1u + b'_1v + c'_1, \quad y = a'_2u + b'_2v + c'_2, \quad (1.8')$$

где $a'_1, b'_1, c'_1; a'_2, b'_2, c'_2$ — постоянные. Мы приходим к выводу, что отображение, обратное аффинному, также аффинное.

Функции (1.8) и (1.8') непрерывны в соответствующих плоскостях, и таким образом, аффинное отображение при неравенстве нулю его определителя гомеоморфно во всей плоскости.

Если же определитель системы (1.8) равен нулю: $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, то мы имеем дело со случаем так называемого *вырожденного* или *несобственного* отображения (см. п° 27); читатель легко проверит, что вся плоскость Oxy отображается в одну прямую линию в плоскости Ouv (как бы «сжимается») и каждой точке этой прямой соответствует (т. е. является ее прообразом) бесконечное множество точек плоскости Oxy , составляющих прямую линию. Итак, при $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ аффинное отображение однозначно необратимо и, значит, не гомеоморфно.

Оказывается, что модуль определителя системы (1.8): $|a_1b_2 - a_2b_1|$ и его знак существенно связаны с данным аффинным отображением. Это мы выясним в п°п° 14 и 15.

13. Равномерно распределенные точки. Остановимся на одном важном свойстве аффинного отображения. Пусть в плоскости даны две системы прямых линий, каждая из которых состоит из параллельных между собой равноудаленных прямых; если угол между линиями первой системы и линиями второй системы отличен от нуля, то вся плоскость разобьется этими двумя системами на области, ограниченные равными параллелограммами. Мы говорим, что точки, лежащие в вершинах этих параллелограммов, *равномерно распределены* в плоскости.

Покажем теперь, что *при аффинном отображении равномерно распределенные точки переходят снова в равномерно распределенные*. Для этого возьмем в плоскости Oxy прямую линию

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad (1.9)$$

и найдем ее образ в плоскости Ouv при аффинном отображении (1.8). Мы получим уравнение этого образа, если в уравнение (1.9) подставим вместо x и y их выражения (1.8') через u и v :

$$A_1(a'_1u + b'_1v + c'_1) + B_1(a'_2u + b'_2v + c'_2) + C_1 = 0,$$

т. е.

$$A_2u + B_2v + C_2 = 0, \quad (1.9')$$

где

$$A_2 = A_1a'_1 + B_1a'_2, \quad B_2 = A_1b'_1 + B_1b'_2, \quad C_2 = A_1c'_1 + B_1c'_2 + C_1$$

— постоянные коэффициенты. Но это есть уравнение прямой линии в плоскости Ouv ; так как для параллельных и равноудаленных прямых линий в плоскости Oxy можно считать A_1 и B_1 постоянными, а коэффициент C_1 — в качестве параметра, образующего арифметическую прогрессию, то, как легко видеть, в уравнении (1.9') коэффициенты A_2 и B_2 будут также постоянными, а коэффициент C_2 будет параметром, образующим также арифметическую прогрессию. Отсюда следует, что параллельные и равноудаленные прямые отображаются в прямые, параллельные и равноудаленные, и, значит, что образом параллелограмма при аффинном

отображении является также параллелограмм. Из этого вытекает, что вершины параллелограмма переходят в вершины отображенного параллелограмма, а это мы и хотели показать.

В частности, «координатные линии»

$$x = m = \text{const}$$

отображаются в одну систему прямых линий, а именно:

$$b_2u - b_1v = (a_1b_2 - a_2b_1)m + (c_1b_2 - c_2b_1),$$

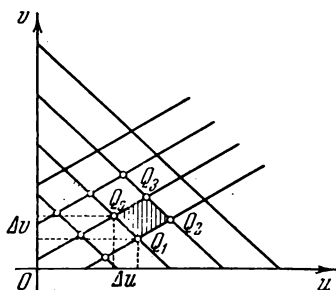
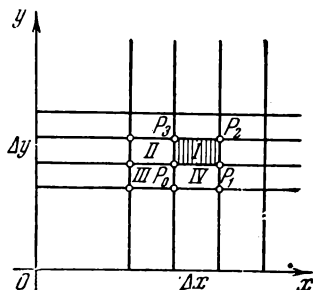
а «координатные линии»

$$y = n = \text{const}$$

— в другую систему прямых линий:

$$a_2u - a_1v = (a_2b_1 - a_1b_2)n + (a_2c_1 - a_1c_2).$$

Прямоугольник $P_0P_1P_2P_3$ (черт. 5) с начальной вершиной в точке $P_0(x_0, y_0)$ и сторонами, равными $|\Delta x|$ и $|\Delta y|$, преобразуется в параллелограмм $Q_0Q_1Q_2Q_3$ с начальной вершиной



Черт. 5.

в точке $Q_0(u_0, v_0)$ и сторонами, проекции которых на оси Ou и Ov соответственно равны:

$$\Delta u = a_1 \Delta x, \quad \Delta v = a_2 \Delta x$$

для стороны Q_0Q_1 , соответствующей стороне P_0P_1 , и

$$\Delta u = b_1 \Delta y, \quad \Delta v = b_2 \Delta y$$

для стороны Q_0Q_3 , соответствующей стороне P_0P_3 .

14. Коэффициент искажения. Итак, при аффинном отображении равномерно распределенные точки остаются равномерно распределенными. Это наводит на предположение, что отношение площади образа к площади прообраза должно оставаться постоянным при аффинном преобразовании.

Покажем справедливость высказанного предположения. Для этого найдем сначала площадь параллелограмма $Q_0Q_1Q_2Q_3$ — образа прямоугольника $P_0P_1P_2P_3$ (черт. 5). Так как алгебраическая величина $\Delta\sigma$ площади параллелограмма $Q_0Q_1Q_2Q_3$ равна удвоенной площади треугольника $Q_0Q_1Q_2$, а координаты вершин этого треугольника соответственно равны:

$$(u_0, v_0), (u_0 + a_1\Delta x, v_0 + a_2\Delta x), \\ (u_0 + a_1\Delta x + b_1\Delta y, v_0 + a_2\Delta x + b_2\Delta y),$$

то

$$\Delta\sigma = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ u_0 & u_0 + a_1\Delta x & u_0 + a_1\Delta x + b_1\Delta y \\ v_0 & v_0 + a_2\Delta x & v_0 + a_2\Delta x + b_2\Delta y \end{vmatrix}. \quad (1.10)$$

При этом алгебраическая величина $\Delta\sigma$ площади параллелограмма имеет знак $+$, если обход вершин в порядке $Q_0Q_1Q_2Q_3$ происходит в положительном направлении (т. е. так, что область, ограниченная параллелограммом, остается слева), и знак $-$, если он происходит в отрицательном направлении. Согласно правилам действий над определителями имеем:

$$\Delta\sigma = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ u_0 & a_1\Delta x & b_1\Delta y \\ v_0 & a_2\Delta x & b_2\Delta y \end{vmatrix} = (a_1b_2 - a_2b_1)\Delta x\Delta y = (a_1b_2 - a_2b_1)\Delta s, \quad (1.10')$$

где $\Delta s = \Delta x\Delta y$ — алгебраическая площадь прямоугольника $P_0P_1P_2P_3$. Отсюда

$$k = \left| \frac{\Delta\sigma}{\Delta s} \right| = |a_1b_2 - a_2b_1|.$$

Ввиду того, что отношение площади параллелограмма $Q_0Q_1Q_2Q_3$ к площади прямоугольника $P_0P_1P_2P_3$ есть величина постоянная (равная k), то и отношение площади («аффинного») образа в плоскости Ouv к площади прообраза в плоскости Oxy

будет также постоянным и равным k независимо от характера преобразования (см. п^о 21).

Число k , равное модулю определителя системы (1.8), показывает, во сколько раз изменяется площадь любой области при аффинном ее отображении (1.8); оно называется *коэффициентом искажения* (или *коэффициентом растяжения*) аффинного отображения (1.8). (Растяжение с коэффициентом, меньшим 1, является фактически «сжатием».)

15. Направление перемещения. Выясним теперь связь между знаком определителя системы (1.8) и соответствующим аффинным отображением. Из соотношения (1.10'):

$$a_1b_2 - a_2b_1 = \frac{\Delta\sigma}{\Delta s},$$

следует, что $a_1b_2 - a_2b_1$ имеет знак $+$, если $\Delta\sigma$ и Δs одного знака, и знак $-$, если они разных знаков.

Рассмотрев четыре возможных случая в расположении прямоугольника $P_0P_1P_2P_3$ (с начальной вершиной в точке P_0) и два возможных случая обхода вершин параллелограмма $Q_0Q_1Q_2Q_3$, приходим к следующему выводу:

Если $a_1b_2 - a_2b_1 > 0$, то при аффинном отображении (1.8) «направление перемещения точки» (или «направление вращения») сохраняется, т. е. положительному перемещению точки P вдоль прямоугольника $P_0P_1P_2P_3$ соответствует положительное же перемещение ее образа — точки Q — вдоль отображенного контура — параллелограмма $Q_0Q_1Q_2Q_3$, а отрицательному перемещению точки P — отрицательное перемещение точки Q . Если же $a_1b_2 - a_2b_1 < 0$, то, наоборот, «направление перемещения точки» меняется, т. е. положительному перемещению точки P соответствует отрицательное перемещение ее образа Q , а отрицательному перемещению точки P — положительное перемещение точки Q .

Этот вывод относится не только к прямоугольнику $P_0P_1P_2P_3$ и параллелограмму $Q_0Q_1Q_2Q_3$, но вообще к любым двум соответствующим друг другу при аффинном отображении замкнутым контурам.

16. Отображение круга. Смысл коэффициента искажения делается особенно наглядным, если исходить не из прямоугольника (с начальной вершиной в точке P_0) в пло-

скости Oxy , а из окружности (с центром в точке P_0). Возьмем эту окружность:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2. \quad (1.11)$$

Уравнение «аффинного» образа этой окружности в плоскости Ouv мы получим, если подставим сюда вместо $x - x_0$ и $y - y_0$ их выражения через u и v (см. (1.8')). Так как

$$x_0 = a'_1 u_0 + b'_1 v_0 + c'_1, \quad y_0 = a'_2 u_0 + b'_2 v_0 + c'_2,$$

то

$$x - x_0 = a'_1(u - u_0) + b'_1(v - v_0),$$

$$y - y_0 = a'_2(u - u_0) + b'_2(v - v_0).$$

Следовательно, уравнение линии, в которую отображается окружность (1.11), примет вид

$$[a'_1(u - u_0) + b'_1(v - v_0)]^2 + [a'_2(u - u_0) + b'_2(v - v_0)]^2 = r^2.$$

Преобразуем это уравнение:

$$(a_1'^2 + a_2'^2)(u - u_0)^2 + (b_1'^2 + b_2'^2)(v - v_0)^2 + 2(a'_1 b'_1 + a'_2 b'_2)(u - u_0)(v - v_0) = r^2. \quad (1.11')$$

Так как дискриминант старших членов уравнения (1.11') отрицательный:

$$\begin{aligned} (a'_1 b'_1 + a'_2 b'_2)^2 - (a_1'^2 + a_2'^2)(b_1'^2 + b_2'^2) = \\ = 2a'_1 b'_1 a'_2 b'_2 - a_1'^2 b_2'^2 - a_2'^2 b_1'^2 = -(a'_1 b'_2 - a'_2 b'_1)^2 < 0, \end{aligned}$$

то это — уравнение эллипса, причем с центром в точке $Q_0(u_0, v_0)$.

Выразим теперь коэффициенты a' и b' через данные коэффициенты a и b . Имеем:

$$u - u_0 = a_1(x - x_0) + b_1(y - y_0),$$

$$v - v_0 = a_2(x - x_0) + b_2(y - y_0),$$

откуда

$$x - x_0 = \frac{b_2(u - u_0) - b_1(v - v_0)}{a_1 b_2 - a_2 b_1},$$

$$y - y_0 = \frac{a_1(v - v_0) - a_2(u - u_0)}{a_1 b_2 - a_2 b_1},$$

так что

$$\begin{aligned} a'_1 &= \frac{b_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, & b'_1 &= -\frac{b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \\ a'_2 &= -\frac{a_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, & b'_2 &= \frac{a_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}. \end{aligned}$$

Подставляя в уравнение (1.11'), получим:

$$\begin{aligned} &(a_2^2 + b_2^2)(u - u_0)^2 + (a_1^2 + b_1^2)(v - v_0)^2 - \\ &- 2(a_1 a_2 + b_1 b_2)(u - u_0)(v - v_0) = (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 r^2. \quad (1.11'') \end{aligned}$$

Итак, *аффинным отображением любой окружности является эллипс*. Вычисляя площадь эллипса (1.11'') или (1.11'), найдем, что эта площадь равна $\pi r^2 |a_1 b_2 - a_2 b_1|$, и мы снова приходим к тому заключению, что отношение площади всякого эллипса (1.11'') к площади (πr^2) его прообраза — окружности, равно $|a_1 b_2 - a_2 b_1|$.

§ 5. НЕКОТОРЫЕ ЧАСТНЫЕ АФФИННЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ. СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ

Рассмотрим два замечательных частных случая «аффинного отображения».

17. Сохранение площади. Движение. Представляют интерес аффинные отображения, которые происходят без «искажения» площади т. е. для которых коэффициент искажения равен единице:

$$|a_1 b_2 - a_2 b_1| = 1. \quad (1.12)$$

Например, таким отображением будет всякое отображение вида:

$$u = a_1 x + c_1, \quad v = a_2 x \pm \frac{1}{a_1} y + c_2, \quad a_1 \neq 0.$$

Аффинные отображения, сохраняющие площадь, изменяют, вообще говоря, и форму и положение (относительно системы координат) отображаемой области. Но если отображение сохраняет неизменной область, меняя лишь ее расположение на плоскости, то оно, разумеется, не изменяет и площадь области. К числу таких отображений принадлежат аффинные отображения, сохраняющие расстояния между точками.

Покажем сейчас, что если аффинное отображение (1.8) таково, что *расстояние между двумя любыми точками плоскости равно расстоянию между их образами, то оно сохраняет и форму области, а значит, и ее площадь.*

Возьмем в плоскости Oxu две точки $P_0(x_0, y_0)$, $P(x, y)$; пусть их образами в плоскости Ouv будут соответственно точки: $Q_0(u_0, v_0)$, $Q(u, v)$. Тогда должно быть:

$$(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2,$$

т. е.

$$(a_1^2 + a_2^2)(x - x_0)^2 + 2(a_1b_1 + a_2b_2)(x - x_0)(y - y_0) + (b_1^2 + b_2^2)(y - y_0)^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2;$$

так как это равенство тождественное, то

$$\left. \begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 &= 1, \\ b_1^2 + b_2^2 &= 1, \\ a_1b_1 + a_2b_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$

Можно положить:

$$a_1 = \cos \varphi,$$

тогда

$$a_2 = \pm \sin \varphi$$

и в силу двух последних равенств (1.13)

$$b_1 = \mp \sin \varphi,$$

$$b_2 = \pm \cos \varphi,$$

причем комбинация знаков должна быть такой, чтобы

$$\frac{a_1}{a_2} \frac{b_1}{b_2} < 0$$

(это вытекает из последнего уравнения (1.13)).

Следовательно, аффинные отображения, сохраняющие расстояния, можно записать так:

$$\left. \begin{aligned} u &= x \cos \varphi \mp y \sin \varphi + c_1, \\ v &= \pm x \sin \varphi + y \cos \varphi + c_2; \end{aligned} \right\} \quad (1.14)$$

$$\left. \begin{aligned} u &= x \cos \varphi \mp y \sin \varphi + c_1, \\ v &= \mp x \sin \varphi - y \cos \varphi + c_2. \end{aligned} \right\} \quad (1.15)$$

Легко видеть, что равенства (1.14) представляют собой формулы преобразования координат на плоскости: параллельного переноса осей координат в новое начало $O'(c_1, c_2)$ и поворота системы относительно точки O' либо на угол φ (при верхних знаках), либо на угол $-\varphi$ (при нижних знаках). Отсюда вытекает, что если совместить плоскость Ouv с плоскостью Oxy , то при отображении (1.14) точку $Q(u, v)$ можно следующим образом построить по ее прообразу $P(x, y)$: радиус-вектор \overline{OP} точки P поворачиваем либо на угол φ , либо на угол $-\varphi$ и находим вектор-сумму \overline{OQ} полученного нового вектора OP' с вектором $\overline{OO'}$; конец вектора OQ и будет искомой точкой $Q(u, v)$.

Совсем легко прийти к этому же результату, если обратиться не к готовым формулам преобразования в аналитической геометрии, а к простейшим правилам векторной алгебры. Возьмем для примера отображение (1.14) при верхних знаках. Проведем из начала координат взаимно-перпендикулярные единичные векторы \overline{OA} и \overline{OB} соответственно под углами $-\varphi$ и $\frac{\pi}{2} - \varphi$ к оси Ox (черт. 6).

Вектор \overline{OA} имеет относительно системы Oxy координаты, равные $\cos \varphi$ и $-\sin \varphi$ ($= \cos(\varphi + \frac{\pi}{2})$).

Поэтому

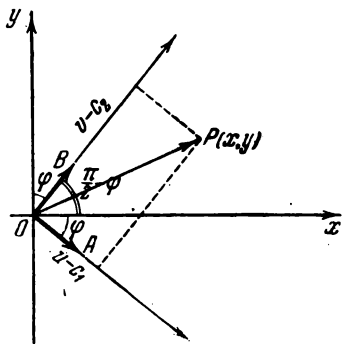
$$u - c_1 = x \cos \varphi - y \sin \varphi$$

есть скалярное произведение вектора \overline{OA} и вектора \overline{OP} , имеющего

координаты x и y . Значит, $u - c_1$ равно проекции вектора \overline{OP} на направление вектора \overline{OA} . Точно так же.

$$v - c_2 = x \sin \varphi + y \cos \varphi$$

есть скалярное произведение векторов \overline{OB} и \overline{OP} , и значит, $v - c_2$ равно проекции вектора \overline{OP} на направление вектора \overline{OB} . Таким образом, если оси, имеющие направления векторов \overline{OA} и \overline{OB} , принять за оси координат, то относительно этой системы точка P будет иметь своими координатами как раз числа $u - c_1$ и $v - c_2$ (см. черт. 6). Если же новую систему координат совместить с системой Oxy (т. е. повернуть ее в положительном направлении на угол φ), то $u - c_1$ и $v - c_2$ и будут координатами (относительно системы Oxy



Черт. 6.

и совмещенной с ней системы Ouv точки, в которую перейдет точка P при повороте вектора \overline{OP} на угол φ в положительном направлении вокруг начала координат.

Следовательно, при отображениях (1.14) образ данной области получается передвижением ее как твердого тела: сначала вращением вокруг начала координат, а затем переносом параллельно самой себе. Поэтому аффинное отображение (1.14) называют *плоским движением твердой пластины (области)* (или просто *движением*).

При отображениях (1.15) производятся те же операции, что и при отображении (1.14), только после поворота вектор $\overline{OP}(x, y)$ еще симметрично отражается относительно оси Ou . (Отображения (1.15) не следует называть «движением», поскольку при этих отображениях приходится симметрично отражать области относительно координатной оси, что передвижением области в плоскости осуществить нельзя.)

Итак, мы убедились, что аффинные отображения, сохраняющие расстояния, сохраняют самую область, а следовательно, и ее площадь. (Сохранение площади вытекает, впрочем, сразу и из того, что коэффициенты, удовлетворяющие условиям (1.13), удовлетворяют и условию (1.12).)

Обратное предложение очевидно: *всякое плоское движение «твердой пластины» является аффинным отображением (1.14).*

18. Отображения гомотетии и подобия. Аффинное отображение вида

$$u = ax; \quad v = ay,$$

где $a = \text{const}$, определяет преобразование гомотетии с центром в точке $(0, 0)$. Если считать плоскость Ouv совмещенной с плоскостью Oxy , то гомотетия есть отображение, при котором образ $Q(u, v)$ любой точки $P(x, y)$ лежит на том же (при $a > 0$) или на противоположном (при $a < 0$) луче, что и точка P , а отношение отрезков OQ и OP , т. е. расстояний образа и прообраза от центра гомотетии остается постоянным, равным $|a|$. Число a называется коэффициентом гомотетии.

Преобразование гомотетии

$$u = ax, \quad v = ay$$

отображает любую фигуру (область) в подобную фигуру (область) с коэффициентом подобия $|a|$.

Вообще, фигурой, подобной данной с коэффициентом подобия $|a|$, называется фигура, которая имеет ту же форму, что и данная, только все ее линейные размеры изменены в $|a|$ раз. Более точно: *подобная фигура получается из данной равномерным растяжением ($|a| > 1$) или сжатием ($|a| < 1$) последней в $|a|$ раз; при этом она может быть параллельно перемещена в плоскости, а также симметрично отражена от какой-нибудь прямой.* Такое преобразование называется преобразованием подобия с коэффициентом подобия $|a|$.

Отображение гомотетии является частным случаем отображения подобия.

Заметим теперь, что аффинные отображения (1.14) и (1.15), сохраняющие расстояния, являются частными случаями также и замечательных аффинных отображений, которые любую окружность преобразуют в окружность же. Для таких отображений уравнение (1.11") должно выражать именно окружность, а это возможно лишь при наличии равенств:

$$\begin{aligned} a_1^2 + b_1^2 &= a_2^2 + b_2^2, \\ a_1 a_2 + b_1 b_2 &= 0. \end{aligned}$$

Эти условия осуществляются только в двух случаях:

1) когда

$$a_1 = b_2, \quad a_2 = -b_1;$$

2) когда

$$a_1 = -b_2, \quad a_2 = b_1.$$

Итак, аффинные отображения следующих двух видов:

$$\left. \begin{aligned} u &= a_1 x + b_1 y + c_1, \\ v &= -b_1 x + a_1 y + c_2; \end{aligned} \right\} \quad (1.16)$$

$$\left. \begin{aligned} u &= a_1 x + b_1 y + c_1, \\ v &= b_1 x - a_1 y + c_2 \end{aligned} \right\} \quad (1.17)$$

и только таких), при любых значениях коэффициентов a_1 , b_1 , c_1 , c_2 преобразуют любую окружность в окружность. При этом определитель системы (1.16) ($= a_1^2 + b_1^2$) положи-

телен, а определитель системы (1.17) ($= -a_1^2 - b_1^2$) отрицателен. Значит, отображение только первого вида (1.16) преобразует окружность в окружность, сохраняя и направление перемещения точки; отображение же второго вида (1.17), хотя и преобразует окружность в окружность, но меняет при этом направление перемещения точки на противоположное. Читатель легко обнаружит и по уравнению (1.11''), что отношение радиуса отображенной окружности к радиусу отображаемой окружности равно корню квадратному из модуля определителя системы.

Итак, мы установили, что аффинное отображение, сохраняющее расстояния, сохраняет и окружности, причем оно будет отображением вида (1.16), если является «движением», и отображением вида (1.17), если не является «движением».

С другой стороны, всякое аффинное отображение (1.16) или (1.17), сохраняющее окружности, изменяет расстояния между точками лишь в одном и том же отношении.

В самом деле, разделим, например, равенства (1.16) на

$$\sqrt{a_1^2 + b_1^2}:$$

$$u' = \frac{u}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} x + \frac{b_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} y + \frac{c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}},$$

$$v' = \frac{v}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = -\frac{b_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} x + \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} y + \frac{c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}.$$

Полученные линейные функции устанавливают аффинное отображение вида (1.14) с плоскости Oxu на плоскость $Ou'v'$, сохраняющее расстояния и поэтому преобразующее данную область в точно такую же область, но, возможно, иначе расположенную относительно системы координат $Ou'v'$.

Но преобразование

$$u = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} u',$$

$$v = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} v'$$

есть отображение гомотетии (подобия) с плоскости $Ou'v'$ на плоскость Ouv и, значит, отображение (1.16) преобразует данную область в подобную ей с коэффициентом

подобия, равным $\sqrt{a_1^2 + b_1^2}$ (т. е. корню квадратному из определителя системы (1.16)).

Таким образом, *аффинное отображение, сохраняющее окружности, есть просто так называемое преобразование подобия* (обратное предложение, конечно, справедливо).

19. Свойства определителя. Рассмотрим два свойства определителя системы линейных функций, задающих аффинное отображение.

I. Найдем связь между определителями систем (1.8) и (1.8'), т. е. между определителями двух взаимно-обратных аффинных отображений. Имеем, в силу выражений для a'_1, b'_1, a'_2, b'_2 (стр. 38),

$$a'_1 b'_2 - a'_2 b'_1 = \frac{a_1 b_2}{(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2} - \frac{a_2 b_1}{(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2} = \frac{1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}.$$

Мы видим, что *определители взаимно-обратных отображений взаимно-обратны*.

II. Возьмем суперпозицию аффинных отображений. Пусть отображения

$$u = d_1 \xi + e_1 \eta + f_1, \quad v = d_2 \xi + e_2 \eta + f_2 \quad (1.18)$$

и

$$\xi = g_1 x + h_1 y + k_1, \quad \eta = g_2 x + h_2 y + k_2 \quad (1.19)$$

служат промежуточными отображениями; они образуют суперпозицию, которая также является аффинным отображением. Действительно, подставляя выражения (1.19) для ξ и η в выражения (1.18), получим:

$$u = a_1 x + b_1 y + c_1, \quad v = a_2 x + b_2 y + c_2, \quad (1.20)$$

где

$$a_1 = d_1 g_1 + e_1 g_2, \quad b_1 = d_1 h_1 + e_1 h_2,$$

$$a_2 = d_2 g_1 + e_2 g_2, \quad b_2 = d_2 h_1 + e_2 h_2.$$

Обратно, всякое данное аффинное отображение (1.20) можно представить бесчисленным множеством способов в виде суперпозиции других аффинных отображений, в частности можно разложить его на примитивные аффинные отображения. Например, в соответствии со сказанным в п. 11 об отыскании промежу-

точных примитивных отображений нетрудно указать примитивные аффинные отображения (считая $b_2 \neq 0$):

$$u = \left(a_1 - \frac{b_1}{b_2} a_2\right) \xi + \frac{b_1}{b_2} \eta + \left(c_1 - \frac{b_1}{b_2} c_2\right), \quad v = \eta.$$

$$\xi = x, \quad \eta = a_2 x + b_2 y + c_2,$$

суперпозицией которых будет данное аффинное отображение (1.20).

Каждое примитивное аффинное отображение представляет собой зависящее от параметра линейное отображение, преобразующее монотонным образом отрезок координатной линии (прямой) в отрезок координатной линии (также прямой).

Вычислим определитель системы (1.20) как суперпозиции систем (1.18) и (1.19):

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_1 g_1 + e_1 g_2 & d_1 h_1 + e_1 h_2 \\ d_2 g_1 + e_2 g_2 & d_2 h_1 + e_2 h_2 \end{vmatrix}.$$

Определитель справа, в силу известных свойств определителей, равен произведению определителей систем (1.18) и (1.19). Впрочем, здесь легко убедиться в этом и непосредственно, а именно: так как

$$\begin{aligned} (d_1 g_1 + e_1 g_2)(d_2 h_1 + e_2 h_2) - (d_1 h_1 + e_1 h_2)(d_2 g_1 + e_2 g_2) = \\ = d_1 g_1 e_2 h_2 + e_1 g_2 d_2 h_1 - d_1 h_1 e_2 g_2 - e_1 h_2 d_2 g_1 = \\ = (d_1 e_2 - d_2 e_1)(g_1 h_2 - g_2 h_1), \end{aligned}$$

то

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_1 & e_1 \\ d_2 & e_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} g_1 & h_1 \\ g_2 & h_2 \end{vmatrix}.$$

Таким образом, определитель системы (1.20) равен произведению определителей систем (1.18) и (1.19). В частности, коэффициент искажения суперпозиции (произведения) аффинных отображений равен произведению коэффициентов искажений промежуточных аффинных отображений.

§ 6. КОЭФФИЦИЕНТ ИСКАЖЕНИЯ (ОБЩИЙ СЛУЧАЙ) И ЯКОБИАН. РЕГУЛЯРНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

20. Коэффициент искажения. Если функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$ дифференцируемы в области D , то отображение (1.6):

$$u = f(x, y), \quad v = g(x, y),$$

называется также дифференцируемым. В дальнейшем всегда предполагается, что функции $f(x, y)$, $g(x, y)$ непрерывно дифференцируемы, т. е. имеют непрерывные частные производные по обоим переменным.

Важной характеристикой дифференцируемого отображения $u = f(x, y)$, $v = g(x, y)$ служит следующий определитель, составленный из производных данных функций:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}.$$

Этот определитель называется *функциональным определителем* или *якобианом* *) отображения (1.6) (или системы функций (1.6)); он обозначается через $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$ **, т. е.

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Говоря точнее, важными характеристиками дифференцируемого отображения (1.6) служат модуль якобиана $\left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right|$ и его знак.

Выясним это. Рассмотрим отображение (1.6):

$$u = f(x, y), \quad v = g(x, y),$$

в окрестности точки $P_0(x_0, y_0)$. Система функций (1.6) преобразует точки этой окрестности в точки $Q(u, v)$, распределенные, вообще говоря, иначе, чем исходные точки. Так, если взять точки плоскости Oxy , распределенные равномерно

*) По имени выдающегося немецкого математика К. Якоби (1804—1851), который ввел эти определители в систематическое употребление.

**) Целесообразность такого дифференциального обозначения для якобиана вытекает из того факта, что якобиан $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$ во многих отношениях играет для системы функций (1.6) роль, аналогичную той, которую играет производная $\frac{du}{dx}$ для одной функции (1.1).

(см. § 4), то они отобразятся в точки, распределенные, вообще говоря, неравномерно: система функций (1.6) указанные точки плоскости Oxy в различных местах сгустит (или разрядит) по-разному. Только в одном случае всякое равномерно распределенное множество точек на плоскости Oxy преобразуется в равномерно же распределенное множество точек на плоскости Ouv , а именно только в случае аффинного отображения (1.8)*). При этом отношение площади образа к площади прообраза (коэффициент искажения) остается постоянным.

Если отображение (1.6) не аффинное, то «разброс» равномерно распределенных точек будет неодинаков и, например, площади прямоугольников $P_0P_1P_2P_3$ (см. черт. 5) при отображении будут изменяться различно для различных прямоугольников. Поэтому здесь необходимо (как и в линейном случае) ввести локальное (т. е. относящееся к точке) понятие коэффициента искажения (или растяжения).

Определение. Коэффициентом искажения $k(x_0, y_0)$ в точке $P_0(x_0, y_0)$ отображения $u = f(x, y)$, $v = g(x, y)$ гомеоморфного в точке P_0 , называется предел

*) Что этим свойством действительно обладает аффинное отображение, мы видели выше (п° 13). Покажем теперь, что оно присуще только аффинному отображению. Пусть система (1.6) отображает всякое равномерно распределенное множество точек плоскости Oxy в равномерно распределенное множество точек плоскости Ouv . Докажем, что тогда функции (1.6) — линейные, т. е. отображение аффинное. Для этого возьмем произвольную точку $P(x, y)$ и придадим ее координатам x и y произвольные приращения dx и dy ; мы получим другую точку $P(x + dx, y + dy)$. В силу сделанного предположения приращение Δu (проекция прямолинейного отрезка, соединяющего образы точек $P(x, y)$ и $P(x + dx, y + dy)$, на ось Ou) должно быть при заданных dx и dy одно и то же для любой точки $P(x, y)$, т. е. Δu не должно зависеть от x и y . Так как du есть главная часть Δu , то и du не может зависеть от x и y . Поэтому в формуле

$$du = a_1 dx + b_1 dy$$

a_1 и b_1 постоянны. Отсюда и следует, что

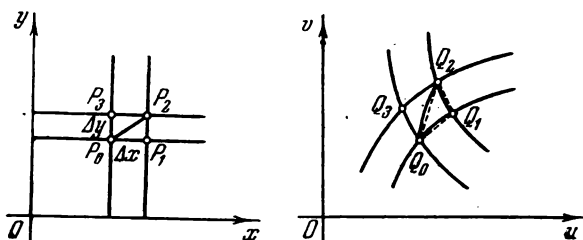
$$u = a_1 x + b_1 y + c_1.$$

Аналогично доказывается, что

$$v = a_2 x + b_2 y + c_2.$$

отношения площади отображенной области (в плоскости Ouv) к площади соответствующего отображаемого прямоугольника (в плоскости Oxy) с вершиной в точке P_0 и со сторонами, параллельными осям Ox и Oy , при неограниченном стягивании этого прямоугольника к точке P_0 .

Найдем выражение для коэффициента искажения. Вследствие гомеоморфности отображения в точке P_0 существует область $|x - x_0| < \delta$, $|y - y_0| < \delta$ такая, что принадлежащий ей прямоугольник $P_0P_1P_2P_3$ (черт. 7) преобразуется в однократно покрытую область в плоскости Ouv .



Черт. 7.

Пусть координаты вершин прямоугольника $P_0P_1P_2P_3$ таковы: $P_0(x_0, y_0)$, $P_1(x_0 + \Delta x, y_0)$, $P_2(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$, $P_3(x_0, y_0 + \Delta y)$. Этим точкам соответствуют в плоскости Ouv точки $Q_0[f(x_0, y_0), g(x_0, y_0)]$, $Q_1[f(x_0 + \Delta x, y_0), g(x_0 + \Delta x, y_0)]$, $Q_2[f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y), g(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)]$, $Q_3[f(x_0, y_0 + \Delta y), g(x_0, y_0 + \Delta y)]$. Координатные линии $x = m = \text{const}$, $y = n = \text{const}$ отображаются с помощью системы (1.6) в некоторые, вообще говоря, кривые линии в плоскости Ouv , параметрические уравнения которых суть соответственно:

$$u = f(m, y), \quad v = g(m, y),$$

$$u = f(x, n), \quad v = g(x, n).$$

Таким образом, прямоугольник $P_0P_1P_2P_3$ отображается в криволинейный четырехугольник $Q_0Q_1Q_2Q_3$ (черт. 7).

Рассмотрим прежде всего отображение треугольника $P_0P_1P_2$; его образом служит некоторый криволинейный треугольник $Q_0Q_1Q_2$ (черт. 7). Вычислим предел отношения Δs_1 — алгебраической величины площади криволинейного треугольника $Q_0Q_1Q_2$ к Δs_1 — алгебраической величине пло-

шади треугольника $P_0P_1P_2$ ($\Delta s_1 = \frac{1}{2} \Delta x \Delta y$). В силу непрерывности отображения площадь криволинейного треугольника $Q_0Q_1Q_2$ при $\Delta x \rightarrow 0$ и $\Delta y \rightarrow 0$ (а значит, и при $\Delta s_1 \rightarrow 0$) будет отличаться от площади прямолинейного треугольника $Q_0Q_1Q_2$ на бесконечно малую величину α высшего порядка, чем Δs_1 . Что же касается алгебраической величины площади прямолинейного $\triangle Q_0Q_1Q_2$, то мы имеем:

$$\text{пл. } \triangle Q_0Q_1Q_2 = \\ = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ f(x_0, y_0) & f(x_0 + \Delta x, y_0) & f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \\ g(x_0, y_0) & g(x_0 + \Delta x, y_0) & g(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \end{vmatrix}.$$

Так как (II, 147):

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = \\ = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0) \Delta x + f'_y(x_0, y_0) \Delta y + \varepsilon_1,$$

$$f(x_0 + \Delta x, y_0) = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0) \Delta x + \varepsilon_2,$$

$$g(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = \\ = g(x_0, y_0) + g'_x(x_0, y_0) \Delta x + g'_y(x_0, y_0) \Delta y + \eta_1,$$

$$g(x_0 + \Delta x, y_0) = g(x_0, y_0) + g'_x(x_0, y_0) \Delta x + \eta_2,$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \eta_1, \eta_2$ — бесконечно малые порядка, высшего чем $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ (и чем Δx и Δy), то на основании правил действия над определителями получаем:

$$\text{пл. } \triangle Q_0Q_1Q_2 = \\ = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ f(x_0, y_0) & f'_x(x_0, y_0) \Delta x + \varepsilon_2 & f'_y(x_0, y_0) \Delta y + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \\ g(x_0, y_0) & g'_x(x_0, y_0) \Delta x + \eta_2 & g'_y(x_0, y_0) \Delta y + (\eta_1 - \eta_2) \end{vmatrix} = \\ = \frac{1}{2} [f'_x(x_0, y_0) g'_y(x_0, y_0) - f'_y(x_0, y_0) g'_x(x_0, y_0)] \Delta x \Delta y + \frac{1}{2} \varepsilon,$$

причем

$$\varepsilon = (\eta_1 - \eta_2) f'_x(x_0, y_0) \Delta x + \varepsilon_2 (\eta_1 - \eta_2) + \varepsilon_2 g'_y(x_0, y_0) \Delta y - \\ - (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) g'_x(x_0, y_0) \Delta x - \eta_2 (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) - \eta_2 f'_y(x_0, y_0) \Delta y,$$

очевидно, является бесконечно малой величиной порядка высшего, чем Δs_1 . Находим:

$$\frac{\Delta \sigma_1}{\Delta s_1} = \frac{\text{пл. } \triangle Q_0 Q_1 Q_2 + \alpha}{\Delta s_1} = f'_x(x_0, y_0) g'_y(x_0, y_0) - \\ - f'_y(x_0, y_0) g'_x(x_0, y_0) + \frac{\varepsilon}{\Delta x \Delta y} + \frac{2\alpha}{\Delta x \Delta y};$$

переходя к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$ и $\Delta y \rightarrow 0$, получим:

$$\lim \frac{\Delta \sigma_1}{\Delta s_1} = f'_x(x_0, y_0) g'_y(x_0, y_0) - f'_y(x_0, y_0) g'_x(x_0, y_0),$$

т. е.

$$\lim \frac{\Delta \sigma_1}{\Delta s_1} = \left. \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}.$$

Возьмем, далее, отображение $Q_0 Q_2 Q_3$ треугольника $P_0 P_2 P_3$ и вычислим предел отношения $\Delta \sigma_2$ — алгебраической величины площади треугольника $Q_0 Q_2 Q_3$ к Δs_2 — алгебраической величине площади треугольника $P_0 P_2 P_3$ ($\Delta s_2 = \frac{1}{2} \Delta x \Delta y$). Рассуждая так же, как и выше, и имея в виду, что

$$\text{пл. } \triangle Q_0 Q_2 Q_3 =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ f(x_0, y_0) & f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) & f(x_0, y_0 + \Delta y) \\ g(x_0, y_0) & g(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) & g(x_0, y_0 + \Delta y) \end{vmatrix},$$

получим:

$$\lim \frac{\Delta \sigma_2}{\Delta s_2} = \left. \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}.$$

Теперь совсем просто найти и предел отношения $\Delta \sigma$ — алгебраической величины площади криволинейного четырехугольника $Q_0 Q_1 Q_2 Q_3$ к Δs — алгебраической величине площади прямоугольника $P_0 P_1 P_2 P_3$:

$$\lim \frac{\Delta \sigma}{\Delta s} = \lim \frac{\Delta \sigma_1 + \Delta \sigma_2}{\Delta s} = \lim \left(\frac{\Delta \sigma_1}{2\Delta s_1} + \frac{\Delta \sigma_2}{2\Delta s_2} \right) = \left. \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}.$$

Это значит, что коэффициент искажения $k(x_0, y_0)$ в точке $P(x_0, y_0)$ равен:

$$k_0 = k(x_0, y_0) = \left| \left. \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right|_{P_0} \right|,$$

т. е. коэффициент искажения в данной точке равен модулю якобиана отображения в этой точке. В частности, в случае аффинного отображения коэффициент искажения оказывается величиной постоянной, равной определителю системы линейных функций, определяющих отображение.

Итак, мы видим, что модуль якобиана отображения, гомеоморфного в точке, показывает с точностью до бесконечно малых величин высших порядков, во сколько раз изменяется при отображении площадь бесконечно малого прямоугольника (с вершиной в данной точке).

Если якобиан отличен от нуля, то, как это доказывается ниже (п° 24), отображение будет гомеоморфным в данной точке, и высказанный результат не вызывает никаких сомнений; если же якобиан равен нулю, то при условии гомеоморфности отображения в точке (см. п° 26) коэффициент искажения также считают равным модулю якобиана, т. е. нулю, понимая под этим, что бесконечно малый прямоугольник отображается в область, площадь которой есть бесконечно малая величина высшего порядка (условно говорят еще, что при отображении область «бесконечно сжимается»).

21. Обобщение. Справедливо следующее предложение, более общее, чем сформулированное выше:

Модуль якобиана отображения, гомеоморфного в точке, показывает с точностью до бесконечно малых величин высших порядков, во сколько раз изменяется при отображении площадь бесконечно малой области), содержащей (внутри или на границе) данную точку.*

Ход рассуждений здесь может быть, например, таким. Доказываем сначала, что предел отношения площади образа любого треугольника с вершиной в данной точке к площади этого треугольника при стремлении к нулю всех его измерений равен модулю якобиана. Это доказательство не представляет затруднений: оно проводится точно так же, как и в изложенном выше частном случае, когда две стороны треугольника параллельны осям координат (три вершины треугольника $P_0P_1P_2$ теперь характеризуются координатами $P_0(x_0, y_0)$, $P_1(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$, $P_2(x_0 + \Delta x_1, y_0 + \Delta y_1)$, причем Δx , Δy , Δx_1 , Δy_1 стремятся к нулю). Далее, обнаруживаем, что тот же предел имеет и отношение площадей образа

*) Предполагается, что переменная область имеет бесконечно малый диаметр, т. е. наибольшее расстояние между точками области стремится к нулю.

к прообразу, когда последним служит n -угольник. Действительно, для каждого из n треугольников с вершиной в данной точке P_0 , составляющих многоугольник, имеем:

$$|\Delta\sigma_i| = k_0 |\Delta s_i| + \varepsilon_i,$$

где $|\Delta s_i|$ — площадь i -го треугольника, $|\Delta\sigma_i|$ — площадь его отображения, k_0 — коэффициент искажения в точке P_0 , ε_i — бесконечно малая величина высшего порядка. Складывая n таких равенств, найдем:

$$|\Delta\sigma| = k_0 |\Delta s| + \varepsilon,$$

где $|\Delta s|$ — площадь многоугольника, $|\Delta\sigma|$ — площадь его отображения, ε — бесконечно малая величина высшего порядка (важным обстоятельством является независимость порядка бесконечно малой ε от числа n сторон многоугольника). Отсюда и следует, что

$$\lim \left| \frac{\Delta\sigma}{\Delta s} \right| = k_0.$$

Наконец, убеждаемся, что предел отношения площади образа к площади прообраза при стягивании этого прообраза к точке P_0 всегда равен k_0 . В самом деле, запишем:

$$\left| \frac{\Delta\sigma}{\Delta s} \right| = \left| \frac{\Delta\sigma_p}{\Delta s_p} \right| \left| \frac{\Delta s_p}{\Delta s} \right| \left| \frac{\Delta\sigma}{\Delta\sigma_p} \right|,$$

где $|\Delta s|$ — площадь данной области, $|\Delta\sigma|$ — площадь ее образа, $|\Delta s_p|$ — площадь многоугольника, вписанного в данную область,

$|\Delta\sigma_p|$ — площадь его образа. Отношение $\left| \frac{\Delta\sigma_p}{\Delta s_p} \right|$ при достаточно сильном стягивании области к точке P_0 как угодно близко к k_0

(независимо от числа сторон многоугольника), а $\left| \frac{\Delta s_p}{\Delta s} \right|$ и $\left| \frac{\Delta\sigma}{\Delta\sigma_p} \right|$

как угодно близки к 1 при достаточно хорошем приближении вписанного в область многоугольника к самой области (что достигается подходящим увеличением числа сторон многоугольника и неограниченным уменьшением наибольшей из сторон). Поэтому отношение

$\left| \frac{\Delta\sigma}{\Delta s} \right|$ может быть сделано как угодно близким к k_0 , а это и значит, что при стягивании области к точке P_0

$$\lim \left| \frac{\Delta\sigma}{\Delta s} \right| = k_0.$$

22. Направление перемещения. Покажем теперь, что знак якобиана отображающей системы функций обуславливает направление перемещения отображенной точки.

Именно, если

$$\left. \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right|_{P_0} > 0,$$

то при перемещении точки $P(x, y)$ в положительном (отрицательном) направлении по какому-нибудь замкнутому контуру l в некоторой окрестности точки $P_0(x_0, y_0)$ образ точки P — точка $Q(u, v)$ — перемещается в том же положительном (отрицательном) направлении по замкнутому контуру λ — образу контура l ; если же

$$\left. \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right|_{P_0} < 0,$$

то точка $Q(u, v)$ перемещается в обратном, т. е. в отрицательном (положительном), направлении по контуру λ .

В самом деле, будем рассуждать от противного. Пусть, например,

$$\left. \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right|_{P_0} > 0,$$

а при положительном перемещении точки P вдоль некоторого замкнутого контура l в достаточно малой окрестности точки P_0 точка Q на каком-нибудь малом участке η контура λ передвигается не в положительном, а в отрицательном направлении, т. е. оставляет область, ограниченную контуром λ , не слева, а справа. Покажем, что этого быть не может. Построим такой треугольник с вершиной в точке P_0 , чтобы одна его сторона с нужной степенью точности заменяла прообраз участка η . Взятый треугольник достаточно мал и его образ с как угодно малой ошибкой мы можем считать также прямолинейным треугольником: одна из его сторон с назначенной точностью заменяет участок η и, значит, вдоль этой стороны отображенная точка Q передвигается в отрицательном направлении. Если обозначить теперь через $\Delta\sigma_\eta$ и $\Delta\sigma_\eta$ алгебраические величины площадей указанных треугольников соответственно в плоскостях Oxy и Ouv , то мы можем записать соотношение:

$$\Delta\sigma_\eta = \left. \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right|_{P_0} \Delta\sigma_\eta + \varepsilon,$$

где ε — бесконечно малая величина высшего порядка. Из него следует, в силу оговоренных условий, что $\Delta\sigma_\eta > 0$ (ибо на знак правой части не оказывает влияния ε — слагаемое высшего порядка малости), а это противоречит предположению об отрицательном направлении обхода точкой Q треугольника в плоскости Ouv .

Из сформулированного локального свойства вытекает следующее аналогичное свойство для целой области:

Если $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} > 0$ всюду в области D , то направление перемещения («вращения») точки $Q(u, v)$ в области Δ совпадает с направлением перемещения («вращения») ее прообраза — точки $P(x, y)$ — в области D , а если $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} < 0$, то эти направления противоположны.

Это свойство сохраняется, как легко понять, и при более широком допущении, что $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$, сохраняя в области D знак, обращается в нуль в конечном числе точек этой области.

Полученные результаты становятся сразу понятными, если заметить, что в бесконечно малой окрестности точки $P_0(x_0, y_0)$ с точностью до бесконечно малых величин высших порядков дифференцируемое отображение $u = f(x, y)$, $v = g(x, y)$ является аффинным отображением, определитель которого равен якобиану системы в точке P_0 . Действительно, мы имеем:

$$\begin{aligned} u = f(x, y) &= f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + \\ &\quad + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \epsilon_1, \\ v = g(x, y) &= g(x_0, y_0) + g'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + \\ &\quad + g'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \eta_1, \end{aligned}$$

где ϵ_1 и η_1 — величины высшего порядка малости, чем $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$. Отбрасывая здесь ϵ_1 и η_1 и сравнивая полученные линейные функции с общей формой аффинного отображения (1.8), находим:

$$\begin{aligned} a_1 &= f'_x(x_0, y_0), \quad b_1 = f'_y(x_0, y_0), \\ c_1 &= f(x_0, y_0) - f'_x(x_0, y_0)x_0 - f'_y(x_0, y_0)y_0, \\ a_2 &= g'_x(x_0, y_0), \quad b_2 = g'_y(x_0, y_0), \\ c_2 &= g(x_0, y_0) - g'_x(x_0, y_0)x_0 - g'_y(x_0, y_0)y_0. \end{aligned}$$

Для такого аффинного отображения определитель $a_1b_2 - a_2b_1$ равен $f'_x(x_0, y_0)g'_y(x_0, y_0) - f'_y(x_0, y_0)g'_x(x_0, y_0)$, т. е. как раз якобиану данного отображения в точке $P_0(x_0, y_0)$.

Всякое дифференцируемое отображение является «локально аффинным», и поэтому естественно, что в бесконечно малой области оно обладает теми же свойствами, что и аффинное отображение во всей плоскости.

23. Регулярные отображения. Отметим один употребительный и важный частный класс отображений (1.6). Предположим, что аффинное отображение, к которому в бесконечно малой области данной точки $P_0(x_0, y_0)$ сводится отображение $u = f(x, y)$, $v = g(x, y)$, обладает свойством преобразовывать окружности в окружности (п° 18). Тогда должно быть

$$\begin{aligned} f'_x(x_0, y_0) &= g'_y(x_0, y_0), \\ f'_y(x_0, y_0) &= -g'_x(x_0, y_0) \end{aligned}$$

при сохранении направления вращения или

$$\begin{aligned} f'_x(x_0, y_0) &= -g'_y(x_0, y_0), \\ f'_y(x_0, y_0) &= g'_x(x_0, y_0) \end{aligned}$$

при изменении направления вращения. Можно сказать, что такое отображение преобразует бесконечно малые окружности с центром в точке P_0 в бесконечно малые окружности. Если это обстоятельство имеет место для всякой точки $P(x, y)$ области D , в которой определено отображение, то в области D тождественно будем иметь

$$f'_x(x, y) = g'_y(x, y), \quad f'_x(x, y) = -g'_y(x, y),$$

или

$$f'_y(x, y) = -g'_x(x, y), \quad f'_y(x, y) = g'_x(x, y).$$

Короче это записывают так:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (1.21)$$

или

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (1.21')$$

Допустим, что функции u и v дважды непрерывно дифференцируемы; тогда дифференцируя первые из равенств (1.21) и (1.21') по x , а вторые — по y , находим:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \mp \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \mp \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}.$$

Складывая почленно эти соотношения и принимая во внимание известную теорему о равенстве вторых смешанных частных производных, получим так называемое *уравнение Лапласа*:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Аналогично получим:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Итак, наши функции u и v удовлетворяют уравнению Лапласа.

Определение. Дважды непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие уравнению Лапласа, называются гармоническими.

Определение. Отображения, устанавливаемые гармоническими функциями, подчиненными условиям (1.21), назовем регулярными) (или правильными) I рода, а подчиненными условиям (1.21') — регулярными (или правильными) II рода.*

Таким образом, можно сказать, что вообще регулярными называются дважды непрерывно дифференцируемые отображения, которые преобразуют всякую бесконечно малую окружность в бесконечно малую же окружность**). (Это значит, что отклонения (например, по нормлям) от окружности замкнутой линии, в которую отображается данная бесконечно малая окружность, суть бесконечно малые величины порядка высшего, чем радиус окружности-преобраза.)

*) Иногда термин «регулярное» относят просто к дважды непрерывно дифференцируемому отображению, но гомеоморфному и с отличным от нуля якобианом.

**) Конечно, если взять в качестве функций u и v произвольные гармонические функции, то отображение не будет регулярным, т. е. будет отображать окружность, вообще говоря, не в окружность; для «регулярности» отображения необходимо, чтобы функции u и v удовлетворяли еще равенствам (1.21) или (1.21').

Якобиан регулярного отображения равен:

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2.$$

Так как при регулярном отображении соответствующие аффинные отображения суть отображения подобия, то всякая бесконечно малая область, взятая в окрестности точки, в которой якобиан отличен от нуля, преобразуется в подобную область с коэффициентом подобия, равным корню квадратному из модуля якобиана в указанной точке (т. е. корню квадратному из коэффициента искажения). Значит, мы еще можем сказать, что вообще *регулярные отображения преобразуют всякую бесконечно малую область в подобную бесконечно малую область*. Это обстоятельство выражают, говоря, что регулярные отображения обладают свойством *конформности* (т. е. *подобия*) (если только якобиан отличен от нуля). Конечно, справедливо и обратное предложение: *отображение, обладающее во всякой бесконечно малой области свойством конформности, т. е. преобразующее такую область в подобную ей бесконечно малую область, является регулярным*.

Из сказанного с очевидностью следует, что: 1) *отображение, обратное регулярному отображению, будет также регулярным*; 2) *суперпозиция регулярных отображений будет также регулярным отображением*. (Об аналитическом доказательстве см. § 7.)

Оказывается, что регулярные отображения представляют собой обширный и весьма важный класс отображений, имеющих широкие применения в различных прикладных науках. Мы здесь не будем дальше развивать их теорию, так как это проще и короче может быть сделано на основе изучения регулярных функций комплексной переменной величины.

§ 7. СВОЙСТВА ЯКОБИАНА

Обратимся теперь к изучению связи между свойствами якобиана системы функций и свойствами осуществляемого ею отображения. Мы увидим, что свойства якобиана являются естественным распространением свойств обычной

производной функции одной независимой переменной. Эти свойства совершенно аналогичны соответствующим свойствам определителя системы линейных функций, задающих аффинное отображение (который и служит якобианом этого отображения).

24. Обращение. Локальный гомеоморфизм. Убедимся прежде всего в том, что

если якобиан отображения не равен нулю в точке $P_0(x_0, y_0)$:

$$\left. \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \neq 0,$$

то отображение $u = f(x, y)$, $v = g(x, y)$ в этой точке гомеоморфно.

Это предложение является теоремой об однозначной и непрерывной обратимости системы функций (1.6) в точке P_0 . (См. в п°12 аналогичное свойство в случае аффинных отображений.)

Теорема. Пусть дана система непрерывно дифференцируемых в окрестности точки $P_0(x_0, y_0)$ функций $u = f(x, y)$, $v = g(x, y)$. Если

$$u_0 = f(x_0, y_0), \quad v_0 = g(x_0, y_0)$$

и

$$\left. \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \neq 0,$$

то существует такая окрестность точки $Q_0(u_0, v_0)$ и такие непрерывно дифференцируемые в этой окрестности функции $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, что

$$x_0 = \varphi(u_0, v_0), \quad y_0 = \psi(u_0, v_0)$$

и

$$u \equiv f[\varphi(u, v), \psi(u, v)], \quad v \equiv g[\varphi(u, v), \psi(u, v)].$$

Доказательство. Так как, по условию,

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{array} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \neq 0,$$

то, по крайней мере, одна из частных производных от функции u — пусть $\frac{\partial u}{\partial x}$ — не равна нулю:

$$f'_x(x_0, y_0) \neq 0.$$

Рассмотрим функцию трех независимых переменных x, y, u :

$$F(x, y, u) = u - f(x, y).$$

Эта функция непрерывно дифференцируема в окрестности точки $M_0(x_0, y_0, u_0)$, причем $F(x_0, y_0, u_0) = u_0 - f(x_0, y_0) = 0$, а производная $\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial x}$ не равна нулю в точке M_0 ; поэтому в силу теоремы о неявных функциях *) (II, 151) уравнение $F(x, y, u) = 0$, т. е. $u = f(x, y)$, в некоторой окрестности точки (y_0, u_0) определяет x как непрерывно дифференцируемую функцию y и u :

$$x = \chi(y, u),$$

причем $x_0 = \chi(y_0, u_0)$ и $u \equiv f[\chi(y, u), y]$. Следовательно, в указанной окрестности точки (y_0, u_0) имеем:

$$v = g[\chi(y, u), y]. \quad (1.22)$$

Убедимся, что из этого равенства можно выразить y как однозначную и непрерывно дифференцируемую функцию u и v . Для этого заметим, что

$$\left. \frac{dg}{dy} \right|_{\substack{y=y_0 \\ u=u_0}} = \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \left. \frac{\partial \chi}{\partial y} \right|_{\substack{y=y_0 \\ u=u_0}} + \left. \frac{\partial g}{\partial y} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}$$

($\frac{dg}{dy}$ означает здесь полную частную производную по y , а $\frac{\partial g}{\partial y}$ — частную производную по y как по второму аргументу функции g).

*) Напомним теорему о неявных функциях, на которую мы здесь и в дальнейшем ссылаемся; она состоит (для случая функции двух независимых переменных) в таком утверждении:

Пусть дана непрерывно дифференцируемая в окрестности точки $M_0(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ функция $\Psi(\alpha, \beta, \gamma)$ независимых переменных α, β, γ . Если $\Psi(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0) = 0$ и $\left. \frac{\partial \Psi}{\partial \gamma} \right|_{M_0} \neq 0$, то существует такая окрестность точки $P_0(\alpha_0, \beta_0)$ и такая непрерывно дифференцируемая в этой окрестности функция $\gamma = \psi(\alpha, \beta)$, что

$$\gamma_0 = \psi(\alpha_0, \beta_0) \text{ и } \Psi[\alpha, \beta, \psi(\alpha, \beta)] \equiv 0.$$

Эта теорема указывает условия, при которых уравнение $\Psi(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ определяет (или, как говорят, неявно задает) γ как однозначную и непрерывно дифференцируемую функцию двух независимых переменных α и β (другими словами, условия, при которых это уравнение может быть решено относительно γ). Следую-

Подставляя сюда выражение для $\frac{\partial \gamma}{\partial y}$, находимое из равенства $\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \chi}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ *), а именно:

$$\frac{\partial \chi}{\partial y} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}},$$

получаем:

$$\left. \frac{dg}{dy} \right|_{\substack{y=y_0 \\ u=u_0}} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial x}} \bigg|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} = - \frac{\frac{\partial (u, v)}{\partial (x, y)}}{\frac{\partial f}{\partial x}} \bigg|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}},$$

что не равно нулю по условию, а из этого, в силу той же теоремы о неявных функциях, следует, что равенство (1.22) определяет u в некоторой окрестности точки $Q_0(u_0, v_0)$ как непрерывно дифференцируемую функцию u и v :

$$y = \psi(u, v),$$

еще простое наводящее рассуждение делает прозрачным содержание теоремы.

При оговоренных условиях в бесконечно малой окрестности точки $M_0(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ с точностью до бесконечно малых величин высших порядков имеем:

$$\begin{aligned} \Psi(\alpha, \beta, \gamma) \approx & \Psi(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0) + \Psi'_\alpha(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)(\alpha - \alpha_0) + \\ & + \Psi'_\beta(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)(\beta - \beta_0) + \Psi'_\gamma(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)(\gamma - \gamma_0), \end{aligned}$$

или короче (принимая во внимание также, что $\Psi(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0) = 0$)

$$\Psi(\alpha, \beta, \gamma) \approx \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} \bigg|_{M_0} (\alpha - \alpha_0) + \frac{\partial \Psi}{\partial \beta} \bigg|_{M_0} (\beta - \beta_0) + \frac{\partial \Psi}{\partial \gamma} \bigg|_{M_0} (\gamma - \gamma_0).$$

Если в уравнении $\Psi(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ заменить левую часть — функцию $\Psi(\alpha, \beta, \gamma)$ — ее «неограниченно точным» линейным приближением, то мы получим уравнение относительно γ , из которого, учитывая, что $\frac{\partial \Psi}{\partial \gamma} \bigg|_{M_0} \neq 0$, однозначно находим γ как линейную функцию α и β :

$$\gamma = \gamma_0 - \frac{\frac{\partial \Psi}{\partial \alpha}}{\frac{\partial \Psi}{\partial \gamma}} \bigg|_{M_0} (\alpha - \alpha_0) - \frac{\frac{\partial \Psi}{\partial \beta}}{\frac{\partial \Psi}{\partial \gamma}} \bigg|_{M_0} (\beta - \beta_0),$$

удовлетворяющую в достаточно малой окрестности точки $P_0(\alpha_0, \beta_0)$ с любой степенью точности всем условиям теоремы.

*) Это равенство получается в результате дифференцирования по y тождества $u \equiv f[\chi(y, u), y]$.

причем $y_0 = \psi(u_0, v_0)$. Заменяя в равенстве $x = \chi(y, u)$ переменную y ее выражением через u и v , приходим к функции, непрерывно дифференцируемой в окрестности точки $Q_0(u_0, v_0)$:

$$x = \chi[\psi(u, v), u] = \varphi(u, v),$$

причем $x_0 = \varphi(u_0, v_0)$. Теорема доказана.

Итак, мы видим, что локальные свойства отображений в плоском и в линейном случаях совершенно аналогичны. Роль производной отображающей функции в линейном случае выполняет в плоском случае якобиан отображающей системы функций. Однако существенно различны в этих двух случаях некоторые свойства, относящиеся ко всей области (глобальные свойства). Так, в линейном случае имеет место свойство ($n^\circ 6$): из гомеоморфизма в каждой точке интервала следует гомеоморфизм во всем интервале. Это свойство уже несправедливо в плоском случае: из гомеоморфизма в каждой точке области еще не следует гомеоморфизм во всей области*). Вот пример:

$$u = e^x \cos y, \quad v = e^x \sin y.$$

Для этого отображения имеем:

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{vmatrix} = e^{2x}.$$

Так как $e^{2x} \neq 0$ для любого значения x , то данное отображение, в силу доказанной теоремы, гомеоморфно в каждой точке плоскости. Вместе с тем оно не гомеоморфно во всякой области плоскости Oxy , содержащей вместе с точками $P(x, y)$ и точки $P(x, y + 2k\pi)$ (k — целое число), ибо образами всех этих точек служит одна и та же точка $Q(e^x \cos y, e^x \sin y)$ плоскости Ouv .

25. Якобиан обратного отображения. Отображение (1.6'):

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v),$$

*) Причину этого усложнения следует видеть в особой природе плоскости (и, вообще, всякого пространства с числом измерений, большим 1), допускающей сравнительно с прямой линией большую свободу перемещения отображенной точки: передвигаясь «только вперед», эта точка может возвратиться к прежнему положению.

обратное непрерывно дифференцируемому гомеоморфному отображению (1.6)

$$u = f(x, y), \quad v = g(x, y),$$

как уже было отмечено, также непрерывно дифференцируемо (за исключением, быть может *), точек $Q(u, v)$, соответствующих точкам $P(x, y)$, в которых $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = 0$; при этом между якобианами двух взаимно-обратных отображений (1.6) и (1.6') существует весьма простое соотношение.

Теорема. Если якобиан непрерывно дифференцируемого отображения (1.6) отличен от нуля, то

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{1}{\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}},$$

т. е.

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = 1. \quad (1.23)$$

Доказательство. Продифференцируем равенства (1.6) сначала по u , а затем по v ; считая при этом x и y функциями (1.6') от u и v , получим:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}, & 0 &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}, \\ 0 &= \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}, & 1 &= \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}. \end{aligned}$$

Найдем из первой пары равенств $\frac{\partial x}{\partial u}$ и $\frac{\partial y}{\partial u}$, а из второй — $\frac{\partial x}{\partial v}$ и $\frac{\partial y}{\partial v}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= \frac{\frac{\partial g}{\partial y}}{\frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)}}, & \frac{\partial x}{\partial v} &= -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)}}; \\ \frac{\partial y}{\partial u} &= -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)}}, & \frac{\partial y}{\partial v} &= \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)}} \quad **). \end{aligned}$$

*) Ниже показывается (стр. 65), что в таких точках обратное отображение действительно не может быть дифференцируемым.

**) С помощью этих формул совсем легко показать, что если данное отображение регулярное, то и обратное ему также регулярное (при неравенстве якобиана нулю; см. § 6).

Таким образом,

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y}}{\left[\frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)} \right]^2} - \frac{\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x}}{\left[\frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)} \right]^2} = \frac{1}{\frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)}},$$

ч. т. д.

Соотношение (1.23) между якобианами двух взаимно-обратных систем функций вполне аналогично соотношению между производными двух взаимно-обратных функций от одной независимой переменной (см. стр. 24).

Соотношение (1.23) очень наглядно с точки зрения отображений: при переходе с плоскости Ouv на плоскость Oxy коэффициент искажения должен быть, разумеется, обратным коэффициенту искажения при переходе с плоскости Oxy на плоскость Ouv , а знаки якобианов должны быть одинаковыми.

26. Суперпозиция. Доказанное в предыдущем пункте предложение является частным случаем следующей более общей теоремы:

Теорема. Если дифференцируемое отображение

$$u = F(x, y), \quad v = G(x, y)$$

является суперпозицией отображений

$$u = f(\xi, \eta) \quad v = g(\xi, \eta),$$

$$\xi = f_1(x, y), \quad \eta = g_1(x, y),$$

причем функции f, g, f_1, g_1 в соответствующих областях дифференцируемы*), то

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(\xi, \eta)} \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)}. \quad (1.24)$$

Из равенства (1.24), в частности, следует, что

$$\left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right| = \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(\xi, \eta)} \right| \left| \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} \right|,$$

т. е. коэффициент искажения суперпозиции (произведения) отображений равен произведению коэффициентов искажений промежуточных (вспомогательных) отображений.

*) Дифференцируемость данного отображения является следствием дифференцируемости промежуточных отображений.

Доказательство. Имеем (ср. п° 19):

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}, & \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y}; \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}, & \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y}.*\end{aligned}$$

Прямо вычисляя определитель

$$\begin{aligned}\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) - \\ &\quad - \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right),\end{aligned}$$

получаем:

$$\begin{aligned}\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} - \\ &\quad - \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x},\end{aligned}$$

а это, как легко проверяется, равно

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial v}{\partial \eta} - \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) = \frac{\partial(u, v)}{\partial(\xi, \eta)} \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)},$$

ч. т. д.

Еще проще поступить так: записать в виде определителей три рассматриваемых якобиана; $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$, $\frac{\partial(u, v)}{\partial(\xi, \eta)}$, $\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)}$, и заметить, что первый из них, в силу известных свойств определителей, равен произведению двух других.

Применим доказанную теорему к случаю, когда система функций f_1 и g_1 обратна системе функций f и g , т. е. когда в наших обозначениях $f_1 = \varphi$, $g_1 = \psi$. Итак, пусть

$$u = f(x, y), \quad v = g(x, y)$$

и

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v),$$

*) С помощью этих формул совсем легко доказать, что суперпозиция регулярных отображений также является регулярным отображением (см. п° 23).

причем эта обратная система функций, так же как и данная система, дифференцируема в рассматриваемых точках. Имеем:

$$u = f[\varphi(u, v), \psi(u, v)] \equiv u, \quad v = g[\varphi(u, v), \psi(u, v)] \equiv v,$$

и так как $\frac{\partial(u, v)}{\partial(u, v)} = 1$, то, в силу формулы (1.24) находим:

$$1 = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \cdot \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}.$$

Мы получили снова соотношение (1.23), но уже без дополнительного условия, что $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \neq 0$.

Теперь мы можем заключить, что в точках Q , являющихся образами точек P , в которых $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = 0$, обратное отображение обязательно недифференцируемо. Действительно, если обратное отображение дифференцируемо, то существует $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ и должна иметь место формула (1.23), бессмысленная при $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = 0$.

Нарушение дифференцируемости обратного отображения в точках, являющихся образами точек, в которых якобиан данного отображения равен нулю, не означает еще, как уже нам известно, нарушения и гомеоморфизма отображения. Например, отображение $u = x^3$, $v = y^3$ имеет при $x = 0$, $y = 0$ якобиан, равный нулю, а в то же время оно гомеоморфно в точке $(0, 0)$.

Соотношение (1.24) между якобианами промежуточных отображений и их суперпозиции вполне аналогично соотношению между производными промежуточных функций одной независимой переменной и составленной из них сложной функции (см. стр. 23).

Равенство (1.24) вполне ясно с точки зрения известного нам смысла якобиана как характеристики отображения.

§ 8. ВЫРОЖДЕНИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ. ЗАВИСИМОСТЬ ФУНКЦИИ

27. Вырождение. Мы уже замечали, что если якобиан аффинного отображения (1.8) равен нулю, то отображение будет вырожденным (или несобственным) и вся плоскость преобразуется в прямую линию (или точку). Можно

ожидать, что аналогичное обстоятельство будет иметь место и в общем случае, когда якобиан отображения в данной области тождественно равен нулю.

Опять простое наводящее рассуждение делает такое ожидание вполне оправданным: если якобиан отображения тождественно равен нулю, то якобиан аффинного отображения, к которому локально сводится рассматриваемое отображение, равен нулю, и аффинное отображение оказывается вырожденным; поэтому и данное отображение должно быть вырожденным (несобственным): всякая часть данной области и вся область преобразуются в линии. Точно говоря, справедлива такая теорема:

Теорема. *Необходимым и достаточным условием того, что отображение (1.6):*

$$u = f(x, y), \quad v = g(x, y),$$

дифференцируемое в области D , является вырожденным (несобственным), т. е. преобразующим область D плоскости Oxy в некоторую линию плоскости Ouv :

$$F(u, v) = 0, \quad (1.25)$$

где F — дифференцируемая функция, служит тождественное (в области D) равенство нулю якобиана отображения:

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \equiv 0.$$

Доказательство. Необходимость условия доказывается сразу. Дифференцируя тождество (1.25) по x и по y , будем иметь:

$$\frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Из этой однородной системы могут быть найдены значения $\frac{\partial F}{\partial u}$ и $\frac{\partial F}{\partial v}$ (не оба нулевые *), если только определитель этой системы

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}$$

*) Если оба нулевые, то $F(u, v)$ — константа, чего быть не может (равенство (1.25) бессмысленно).

тождественно равен нулю, а этот определитель и есть якобиан отображения.

Перейдем к доказательству достаточности условия. Итак, пусть

$$\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Предположим, что какая-нибудь его частная производная тождественно равна нулю; пусть, например, $\frac{\partial u}{\partial y} \equiv 0$, тогда или $\frac{\partial u}{\partial x} \equiv 0$, или

(и) $\frac{\partial v}{\partial y} \equiv 0$. В той области, где $\frac{\partial u}{\partial x} \equiv 0$, будем иметь: $u \equiv \text{const}$, т. е. отображение размещается на прямой $u = \text{const}$, и оно вырожденное; в той же области, где $\frac{\partial v}{\partial y} \equiv 0$, переменные u и v не зависят от y , и отображение снова вырожденное, ибо равенства $u = f(x)$ и $v = g(x)$, где f и g суть функции только одного аргумента x , являются параметрическими уравнениями линии в плоскости Ouv . Если же $\frac{\partial u}{\partial y} \neq 0$, то из равенства $u = f(x, y)$ можно однозначно выразить y как дифференцируемую функцию x и u ; положим: $y = \psi(x, u)$. Значит, тождественно

$$u \equiv f[x, \psi(x, u)].$$

Дифференцирование по x дает

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0,$$

что можно записать и так:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} = 0.$$

Сравнивая это равенство с данным по условию равенством, получим:

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} = 0.$$

Далее мы имеем:

$$v = g[x, \psi(x, u)].$$

Производная по x от этой функции равна:

$$\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \text{или} \quad \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x},$$

а это, как мы только что видели, равно нулю. Следовательно, функция $g[x, \psi(x, u)]$ не зависит от x и переменные u и v оказываются связанными между собой соотношением вида (1.25), не зависящим от x и y . Теорема полностью доказана.

28. Зависимость функций.

Определение. Две функции $u = f(x, y)$, $v = g(x, y)$, связанные между собой дифференцируемым соотношением (1.25):

$$F(u, v) = 0,$$

в котором не участвуют переменные x и y , называются зависимыми.

Доказанная в п° 27 теорема поэтому может быть высказана в таких словах:

Необходимым и достаточным условием зависимости в некоторой области двух функций от двух независимых переменных является тождественное в данной области равенство нулю якобиана системы этих функций.

Пример. Якобиан системы функций

$$u = \sin^2(x - y), \quad v = \cos(x - y),$$

как легко подсчитать, при любых значениях x и y равен нулю. Значит, u и v — зависимые функции; действительно, мы имеем:

$$u + v^2 = 1.$$

Таким образом, данное отображение вырожденное: вся плоскость Oxy преобразуется в параболу $u + v^2 = 1$ в плоскости Ouv .

Если отображение вырожденное, то оно необратимо, т. е. не существует отображения, обратного данному. Другими словами, из данной системы двух функций u и v от независимых переменных x и y в этом случае нельзя выразить независимые переменные x и y через функции u и v . Любые попытки разрешить систему относительно x и y приведут к соотношению между u и v без участия x и y .

Заметим, что если якобиан равен нулю лишь в изолированной точке, то заранее ничего нельзя сказать об обратимости (гомеоморфности) отображения: оно может быть обратимо, а может быть и не обратимо. Например, отображение:

$$u = x^3, \quad v = y^3$$

обратимо во всей плоскости (и в окрестности точки $(0, 0)$):

$$x = \sqrt[3]{u}, \quad y = \sqrt[3]{v}.$$

хотя якобиан, равный x^2y^2 , обращается в нуль в точке $P_0(0, 0)$ (он равен нулю и на осях Ox и Oy). Это обратное отображение однозначно и непрерывно во всей плоскости, но не дифференцируемо в точке $Q_0(0, 0)$ (оно не дифференцируемо и на осях Ou и Ov , которые соответствуют осям Ox и Oy).

С другой стороны, отображение (см. стр. 27)

$$u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy,$$

якобиан которого, равный $4(x^2 + y^2)$, также обращается в нуль в точке $P_0(0, 0)$, однозначно необратимо в окрестности этой точки.

Если якобиан системы не обращается тождественно в нуль, то функции u и v независимы, т. е. не существует соотношения вида: $F(u, v) = 0$ между u и v , в котором не участвовали бы и независимые переменные x и y . Кроме того, как нам уже известно (п° 27), отображение будет невырожденным и данная область отображается в область же, состоящую, быть может, из нескольких плоских «листов».

В заключение заметим, что с точки зрения рассматриваемых нами «плоских отображений» одна функция двух независимых переменных, например $u = f(x, y)$, определяет всегда «вырожденное отображение»: область плоскости преобразуется в интервал оси, и ясно, что якобиан в этом случае равен тождественно нулю, ибо следует считать, что $v \equiv 0$.

С другой стороны, систему трех функций двух независимых переменных, например

$$u = f(x, y), \quad v = g(x, y), \quad w = h(x, y), \quad (1.26)$$

заданную в некоторой области D плоскости Oxy (как везде, мы считаем функции f, g, h непрерывными), можно рассматривать как систему, определяющую поверхность в пространстве $Ouvw$. Действительно, отнесем каждой точке области D точку в пространстве $Ouvw$ с координатами u, v, w , вычисленными по формулам (1.26). Совокупность всех таких точек, соответствующих всем точкам области D , и образует, вообще говоря, поверхность. Эта поверхность является *отображением* в пространстве $Ouvw$ области D .

в плоскости Oxy посредством системы функций (1.26). Если каждая пара из функций f , g и h определяет вырожденное отображение области D , то тройка функций (1.26) отображает область D в линию (или точку) пространства $Oxyz$ и можно сказать, что при этом система (1.26) дает также вырожденное отображение области D .

Уравнения (1.26) называют *параметрическими уравнениями поверхности*, а переменные x , y — *параметрами* (II, 152).

§ 9. ОТОБРАЖЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕННОМ СЛУЧАЕ

Для пространства трех и большего числа измерений отображения изучаются совершенно так же, как и для пространства двух измерений (т.е. для плоскости). Поэтому мы ограничимся изложением только важнейших фактов и только для случая пространства трех измерений. Кроме того, мы опускаем и основные определения, так как они являются дословным повторением (с само собой разумеющимися терминологическими изменениями) соответствующих определений, содержащихся в предыдущих параграфах.

29. Основные понятия. Якобиан. Возьмем тройку функций u , v и w :

$$u = f(x, y, z), \quad v = g(x, y, z), \quad w = h(x, y, z), \quad (1.27)$$

трех независимых переменных x , y и z , определенных и непрерывно дифференцируемых в некоторой области δ изменения точки $P(x, y, z)$ пространства, снабженного системой декартовых координат $Oxyz$. Эта тройка функций отображает область δ , вообще говоря, также в область \mathcal{Q} пространства, снабженного системой декартовых координат $Ouvw$ *).

*) Рассматриваемые нами отображения (в линейном, плоском и пространственном случаях), когда положение точки Q -образа определяется на основании заданного закона соответствия ((1.1), (1.6), (1.27)) только по положению точки P -оригинала, называются *точечными отображениями* (или *преобразованиями*). Эти отображения можно в любом из указанных случаев записать так:

$$Q = F(P) \quad (\text{или } P = \Phi(Q)), \quad (1.28)$$

где символом F обозначается закон соответствия между точками P и Q (символ Φ обозначает закон соответствия между точка-

Якобиан системы (1.27) $\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)}$, равный определителю

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix},$$

может служить для характеристики отображения. Его модуль $\left| \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} \right|$ является коэффициентом искажения отображения в рассматриваемой точке: он показывает с точностью до бесконечно малых величин высших порядков, во сколько раз изменяется объем бесконечно малой области, содержащей указанную точку, при ее отображении.

Вопрос о знаке якобиана в пространственном случае мы не затрагиваем, хотя и здесь он обуславливает, в известном смысле, направление перемещения отображенной точки.

В частном случае, когда функции f, g, h линейные:

$$\begin{cases} u = a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1, \\ v = a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2, \\ w = a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3, \end{cases} \quad (1.29)$$

отображение называется *аффинным*; оно определено во всем пространстве $Oxuz$. Якобианом служит просто определитель системы линейных функций (1.29):

$$\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Как видно отсюда, якобиан аффинного отображения постоянный, так что коэффициент искажения точки во всем пространстве один и тот же. Только аффинное

ми Q и P , т. е. закон обратного соответствия). Следовательно, символическое равенство (1.28) заменяет равенство (1.1) в линейном случае, равенства (1.6) в плоском случае, равенства (1.27) в пространственном случае.

отображение преобразует всякую равномерно распределенную *) систему точек в равномерно распределенную же систему точек. Если же отображение не аффинное, то степень «уплотнения» или «разрежения» при отображении равномерно распределенной системы точек локально характеризуется коэффициентом искажения. Аффинное отображение замечательно еще тем, что всякую сферу отображает в эллипсоид и, в частности, в сферу (при некоторых определенных соотношениях между коэффициентами a, b, c); при этом отношение радиуса сферы-образа к радиусу сферы-прообраза равно корню кубическому из модуля якобиана.

Всякое дифференцируемое отображение является «локально аффинным» и поэтому в бесконечно малой области обладает теми же свойствами, что и аффинное отображение во всем пространстве.

Данное отображение

$$u = F(x, y, z), \quad v = G(x, y, z), \quad w = H(x, y, z) \quad (1.30)$$

может быть задано как суперпозиция (произведение) двух (или большего числа) промежуточных отображений:

$$\left. \begin{aligned} u &= f(\xi, \eta, \zeta), & v &= g(\xi, \eta, \zeta), & w &= h(\xi, \eta, \zeta), \\ \xi &= f_1(x, y, z), & \eta &= g_1(x, y, z), & \zeta &= h_1(x, y, z); \end{aligned} \right\} \quad (1.31)$$

таким образом, область \mathcal{B} пространства $Oxyz$ сначала отображается в область \mathcal{B}' пространства $O\xi\eta\zeta$, а затем эта последняя область — в область \mathcal{B} пространства $Ouvw$.

Отображение (1.27) называется *вырожденным* (или *несобственным*), если область пространства отображается не в область же пространства, а в какую-нибудь поверхность или в линию (или в точку).

30. Свойства якобиана. Зависимость функций. Перечислим свойства якобиана системы трех функций.

I. Пусть дана система непрерывно дифференцируемых в окрестности точки $P_0(x_0, y_0, z_0)$ функций $u = f(x, y, z)$, $v = g(x, y, z)$, $w = h(x, y, z)$.

*) То есть находящуюся в вершинах (узлах) сетки, построенной посредством трех систем параллельных и равноотстоящих плоскостей.

Если

$$u_0 = f(x_0, y_0, z_0), \quad v_0 = g(x_0, y_0, z_0), \quad w_0 = h(x_0, y_0, z_0)$$

и

$$\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} \bigg|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0 \\ z=z_0}} \neq 0,$$

то существует такая окрестность точки $Q_0(u_0, v_0, w_0)$ и такие непрерывно дифференцируемые в этой окрестности функции $x = \varphi(u, v, w)$, $y = \psi(u, v, w)$, $z = \chi(u, v, w)$, что

$$x_0 = \varphi(u_0, v_0, w_0), \quad y_0 = \psi(u_0, v_0, w_0), \quad z_0 = \chi(u_0, v_0, w_0),$$

и

$$u \equiv f[\varphi(u, v, w), \psi(u, v, w), \chi(u, v, w)],$$

$$v \equiv g[\varphi(u, v, w), \psi(u, v, w), \chi(u, v, w)],$$

$$w \equiv h[\varphi(u, v, w), \psi(u, v, w), \chi(u, v, w)].$$

Другими словами, эта теорема означает, что при указанных условиях отображение в точке P_0 (т. е. в некоторой окрестности этой точки) гомеоморфно и непрерывно дифференцируемо.

Локальный гомеоморфизм в каждой точке области еще не означает гомеоморфизма отображения во всей области (ср. п° 24).

II. Соотношение между якобианами взаимно-обратных дифференцируемых отображений имеет вид

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \frac{1}{\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)}}.$$

Обратное отображение не дифференцируемо только в точках, являющихся образами точек, в которых якобиан данного отображения равен нулю. Однако гомеоморфизм в этих точках может иметь место.

III. Если отображение (1.30) является суперпозицией дифференцируемых отображений (1.31), то оно также дифференцируемо и

$$\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)} \cdot \frac{\partial(\xi, \eta, \zeta)}{\partial(x, y, z)}.$$

IV. Необходимым и достаточным условием того, что отображение (1.21), дифференцируемое в области B , является вырожденным (несобственным), т. е. преобразующим область B пространства $Oxyz$ в некоторую поверхность пространства $Ouvw$:

$$F(u, v, w) = 0, \quad (1.32)$$

или в некоторую линию пространства $Ouvw$:

$$F(u, v, w) = 0, \quad \Phi(u, v, w) = 0, \quad (1.32')$$

где F и Φ — дифференцируемые функции (или в точку), служит тождественное (в области B) равенство нулю якобиана отображения:

$$\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} \equiv 0.$$

Если функции u, v, w связаны между собой дифференцируемым соотношением (1.32) (или (1.32')), в котором не участвуют независимые переменные, то эти функции называются *зависимыми*. Таким образом, сформулированная теорема дает необходимое и достаточное условие для зависимости между собой трех функций от трех независимых переменных.

Вырожденное отображение необратимо, т. е. не существует отображения, обратного данному. При равенстве же якобиана нулю лишь в изолированных точках заранее ничего нельзя сказать об обратимости (гомеоморфности) отображения: оно может быть обратимо, а может быть и необратимо.

Заметим, что с точки зрения «пространственных отображений» одна функция (или две функции) трех независимых переменных, например $u = f(x, y, z)$ (или $u = f(x, y, z), v = g(x, y, z)$), определяет всегда «вырожденное отображение»: область пространства преобразуется в интервал оси (или в плоскую область) и ясно, что якобиан в этом случае равен тождественно нулю, ибо следует считать, что либо одновременно $v \equiv 0, w \equiv 0$, либо только $w \equiv 0$.

ГЛАВА II

КРИВОЛИНЕЙНЫЕ КООРДИНАТЫ

Систему, в которой столько же функций, сколько и независимых переменных (т. е. одну функцию от одной переменной, пару функций от двух переменных, тройку функций от трех переменных и т. д.), можно интерпретировать иначе, чем это мы делали до сих пор. Мы считали во всем предыдущем, что такая система функций задает отображение некоторой области в соответствующем пространстве, вообще говоря, в область же этого пространства. Но часто употребляется и другая интерпретация, когда считают, что указанная система функций задает систему криволинейных координат в рассматриваемой области. Изучим эту интерпретацию применительно к линейному, плоскому и пространственному случаям, к каждому из них в отдельности.

§ 1. ЛИНЕЙНЫЙ СЛУЧАЙ

31. Определение. Возьмем отображение

$$u = f(x), \quad (2.1)$$

гомеоморфное в некотором интервале I оси Ox , и какую-нибудь его точку $P_0(x_0)$; пусть образом этой точки служит точка $Q_0(u_0)$, а образом интервала I — интервал λ оси Ou . Так как каждой точке Q_0 интервала λ соответствует единственная точка P_0 , то число u_0 (координата точки Q_0) совместно с функцией (2.1) точно указывают положение точки P_0 в интервале I . Число u_0 и называется криволинейной*) координатой точки P_0 , поэтому

*) Смысл такого термина обнаружится несколько дальше (см. II, п. 33) из рассмотрения плоского и пространственного случаев.

точку P_0 можно обозначить так: $P_0(u_0)$. Число u_0 мы вправе назвать координатой точки P_0 (в интервале I), потому что по заданной точке P_0 можно из формулы (2.1) найти ее единственную координату u_0 и, наоборот, по заданной криволинейной координате u_0 можно найти соответствующую ей единственную точку P_0 (в интервале I). Последнее можно сделать, например, предварительно найдя по u_0 из формулы (2.1) единственное значение x_0 — прямолинейную координату точки P_0 . Отметив точку P_0 числом u_0 , мы указываем ее «числовой адрес»; число u_0 дает «расстояние» точки P_0 от начала координат (точки O) в некотором особом «масштабе», определяемом данной функцией f : длина отрезка OP_0 при этом равна $|\varphi(u_0)|$, где $x = \varphi(u)$ — решение уравнения (2.1) относительно x . Прямолинейная же координата x_0 дает «расстояние» точки P_0 от начала координат в равномерном «масштабе», когда длина отрезка OP_0 равна просто $|x_0|$.

32. Функциональная шкала,

Определение. Интервал I оси Ox , точки которого отмечены их криволинейными координатами $u = f(x)$, называется функциональной шкалой для обратной функции $x = \varphi(u)$.

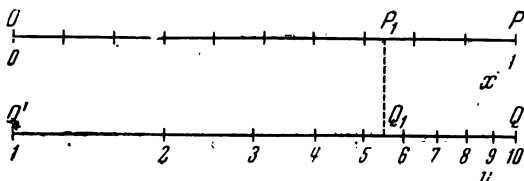
По функциональной шкале значение аргумента u прямо прочитывается, а соответствующее значение функции $x = \varphi(u)$ находится при помощи измерения длины соответствующего интервала шкалы; это проще всего осуществить, если рядом с данной шкалой иметь равномерную шкалу, т. е. шкалу для функции $x = u$.

Функциональную шкалу, так же как и график функции, можно рассматривать как средство для наглядного представления функциональной зависимости. Но, в то время как график удобнее шкалы при исследовании поведения функции, шкала обычно удобнее графика при различных вычислениях, связанных с данной функцией.

Функциональные шкалы особенно часто применяются в *номографии* — дисциплине, использующей различные геометрические приемы для упрощения и автоматизации вычислений. Хорошо известной функциональной шкалой является логарифмическая шкала, т. е. шкала для функции $x = \lg u$. Практически удобное соединение двух логарифмических шкал, расположенных на интервале, длина

которого принята за 1, образует так называемую логарифмическую или счетную линейку — широко употребляемый простейший вспомогательный прибор для вычислительной работы.

На черт. 8, где рядом с логарифмической шкалой и приведена равномерная шкала x , легко найти, например, что



Черт. 8.

$\lg 5,5 = 0,74$, ибо точка $Q_1(5,5)$ отстоит от точки O' на расстоянии OP_1 , равном 0,74 (заметим, что интервал $O'Q$ есть гомеоморфное отображение интервала OP с помощью функции $u = 10^x$).

Итак, в первой изложенной нами интерпретации функции (2.1)

$$u = f(x)$$

(см. гл. I) величина u (подобно величине x) рассматривается в качестве прямолинейной координаты. При этом равенство (2.1) является формулой отображения заданного интервала в новый интервал. Во второй, описанной только что интерпретации величина u рассматривается в качестве новой криволинейной координаты точки, имеющей своей прямолинейной координатой величину x . При этом равенство (2.1) является формулой преобразования (замены) заданной системы координат в новую систему.

Коротко скажем, что на равенство (2.1) можно смотреть либо как на формулу, преобразующую интервал при одной и той же системе координат, либо как на формулу, преобразующую систему координат в одном и том же интервале *).

*). Следует не забывать, что функция (2.1) должна быть в заданном интервале однозначной и обратной.

Заметим также, что параметрические уравнения

$$x = \varphi(u), \quad y = \psi(u)$$

линии l можно рассматривать либо как уравнения, отображающие соответствующий интервал λ оси Ou на линию l , либо как уравнения, определяющие криволинейную координату u точки линии l .

Аналогично дело обстоит в случае пространственной линии L , заданной уравнениями

$$x = \varphi(u), \quad y = \psi(u), \quad z = \chi(u).$$

§ 2. ПЛОСКИЙ СЛУЧАЙ

33. Определения. Координатные линии. Возьмем отображение

$$u = f(x, y), \quad v = g(x, y), \quad (2.2)$$

гомеоморфное в некоторой области D плоскости Oxu , и какую-нибудь ее точку $P_0(x_0, y_0)$; пусть образом этой точки служит точка $Q_0(u_0, v_0)$, а образом области D — область Δ плоскости Ouv . Так как к каждой точке Q_0 области Δ соответствует единственная точка P_0 , то числа u_0, v_0 (прямоугольные декартовы координаты точки Q_0) совместно с системой (2.2) точно указывают положение точки P_0 в области D . Числа u_0, v_0 и называются криволинейными координатами точки P_0 .

Определение. Криволинейными координатами точки P , имеющей в качестве прямоугольных декартовых координат числа x, y , называются прямоугольные декартовы координаты u, v точки Q — образа точки P — при отображении (2.2) (гомеоморфном в некоторой области D).

Числа u, v мы вправе назвать координатами точки P (в области D) потому, что по заданной точке P можно из формул (2.2) найти соответствующие ей единственные значения u, v и, наоборот, по заданным числам u, v можно найти соответствующую им единственную точку P (например, предварительно найдя по u, v из формул (2.2) единствен-

ные значения x, y — прямоугольные координаты точки P^*). Поэтому точку P можно обозначить так: $P(u, v)$.

Определение. Множество точек области D , имеющих одну из своих криволинейных координат постоянной ($u = \text{const}$ или $v = \text{const}$), называется координатной линией в данной системе криволинейных координат.

Координатная линия $u = u_0$ в плоскости Oxy определяется уравнением

$$f(x, y) = u_0,$$

а координатная линия $v = v_0$ — уравнением

$$g(x, y) = v_0.$$

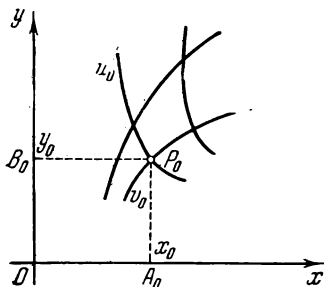
Совершенно ясно, что координатные линии (2.2) в данной системе — это не что иное, как линии уровня (II, 143) соответствующих функций.

Координатными линиями служат, вообще говоря, кривые линии, но в частном случае аффинного отображения (1.8) они — прямые; в заданной декартовой прямоугольной системе Oxy координатные линии — прямые, параллельные осям Ox , Oy , а именно: $y = y_0$, $x = x_0$. Координатные линии криволинейной системы координат в плоскости Oxy суть отображения прямых $u = u_0$, $v = v_0$, параллельных осям Ov , Ou , т. е. координатных линий прямоугольной системы в плоскости Ouv .

При различных значениях u_0 , v_0 (таких, что соответствующая точка P_0 не выходит из области D) образуются две системы координатных линий (т. е. две сети кривых (II, 143) соответствующих функций), покрывающих область D и разбивающих ее на криволинейные четырехугольники (черт. 9); иногда эти сети кривых называются *изотермическими сетями* для данного отображения. Если функции (2.2) линейные (отображение аффинное), то эти четырехугольники — параллелограммы.

*) В конкретной системе криволинейных координат удастся иногда в соответствии с геометрическим смыслом системы указать более простой непосредственный способ отыскания координат по данной точке и построения точки по данным ее координатам (см. § 3).

Каждая из координатных линий отмечена числом u_0 или v_0 , указывающим постоянное значение, которое имеет на этой линии функция $u = f(x, y)$ или $v = g(x, y)$. Эти числа и являются криволинейными координатами точки, лежащей в пересечении соответствующих координатных линий (черт. 9). Можно дать здесь определение функциональной шкалы, аналогичное определению в линейном случае (п° 32).



Черт. 9.

Определение. Область D плоскости Oxy , точки которой отмечены их криволинейными координатами $u = f(x, y)$, $v = g(x, y)$, называется функциональной шкалой для обратной системы функций $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$.

По функциональной шкале значения аргументов u и v прямо прочтываются, а соответствующие значения функций $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ находятся при помощи измерений расстояний этой точки от осей координат Oy и Ox .

В некоторых случаях криволинейные координаты на плоскости имеют простой и наглядный геометрический смысл (см. ниже § 3).

Итак, в первой изложенной нами интерпретации системы функций (2.2):

$$u = f(x, y), \quad v = g(x, y),$$

(см. гл. I) величины u и v (подобно величинам x и y) рассматриваются в качестве прямолинейных (и прямоугольных) координат. При этом равенства (2.2) являются формулами отображения заданной области в новую область. Во второй описанной только что интерпретации величины u и v рассматриваются в качестве новых криволинейных координат точки, имеющей своими прямолинейными координатами величины x и y . При этом равенства (2.2) являются формулами преобразования (замены) заданной системы координат в новую систему.

Коротко скажем, что на равенства (2.2) можно смотреть либо как на формулы, преобразующие область при одной и той же системе координат (декартовой прямоугольной), либо как на формулы, преобразующие систему координат в одной и той же области*).

Иногда могут быть одновременно употреблены обе указанные интерпретации.

Заметим также, что параметрические уравнения

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v)$$

поверхности S можно рассматривать либо как уравнения, отображающие соответствующую область Δ плоскости Ouv на поверхность S , либо как уравнения, определяющие криволинейные координаты u, v точки поверхности S .

34. Ортогональность системы. В том случае, когда всякие две координатные линии из различных систем пересекаются под прямым углом, система криволинейных координат в плоскости называется *прямоугольной* или *ортогональной*. (Криволинейные ортогональные координаты иногда обозначают буквами α, β .)

Найдем условия ортогональности системы (2.2) и выражения для элемента длины и элемента площади в криволинейных ортогональных координатах. Эти выражения часто встречаются в применениях криволинейных координат.

Возьмем точку $P_0(x_0, y_0)$ с криволинейными координатами u_0, v_0 . Уравнение касательной прямой к координатной линии $u = u_0$, очевидно, есть (II, 162):

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{P_0} (x - x_0) + \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{P_0} (y - y_0) = 0. \quad (2.3)$$

Аналогично уравнение

$$\left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{P_0} (x - x_0) + \left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_{P_0} (y - y_0) = 0 \quad (2.3_1)$$

есть уравнение касательной прямой в точке P_0 к координатной линии $v = v_0$. Искомым условием взаимной

*) Следует помнить, что система функций (2.2) должна быть в заданной области однозначно обратимой.

перпендикулярности прямых (2.3) и (2.3₁), как известно, является (если считать точку P_0 произвольной):

$$\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.4)$$

(см., например, И. И. Привалов, Аналитическая геометрия). Это равенство удобно записать с помощью символа \mathbf{S} :

$$\mathbf{S} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0, \quad (2.4)$$

обозначающего здесь сумму двух слагаемых: выражения, заключенного в скобки, и подобного ему, получающегося заменой x на y .

Легко заметить, что всякое регулярное отображение (см. п° 23) определяет систему ортогональных криволинейных координат. Разумеется, обратное не всегда справедливо: системе ортогональных криволинейных координат может соответствовать нерегулярное отображение.

Однако нам важно получить еще и другое условие ортогональности, отличное от условия (2.4). Для этого будем исходить не из системы (2.2), а из системы, обратной ей:

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v). \quad (2.2')$$

Тогда уравнения касательных в точке P_0 к линиям $u = u_0$, $v = v_0$ запишутся соответственно в виде:

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial x}{\partial v} \Big|_{P_0}} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial y}{\partial v} \Big|_{P_0}}, \quad (2.3')$$

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial x}{\partial u} \Big|_{P_0}} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial y}{\partial u} \Big|_{P_0}}; \quad (2.3'_1)$$

поэтому условие ортогональности системы криволинейных координат u, v можно представить так (считая точку P_0 произвольной):

$$\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} = 0, \quad (2.5)$$

или короче

$$\mathbf{S} \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right) = 0. \quad (2.5')$$

35. **Коэффициенты Ламе.** В различных вопросах, связанных с криволинейными координатами на плоскости, используются следующие величины:

$$\left. \begin{aligned} l_u &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2} = \sqrt{S \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2}, \\ l_v &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2} = \sqrt{S \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2}, \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

называемые *коэффициентами Ламе* *) системы криволинейных координат (2.2), и

$$\left. \begin{aligned} h_u &= \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{S \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}, \\ h_v &= \sqrt{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{S \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2}, \end{aligned} \right\} \quad (2.6')$$

называемые *дифференциальными параметрами 1-го порядка* системы криволинейных координат (2.2).

Теорема. Коэффициенты Ламе системы ортогональных координат на плоскости обратны по величине соответствующим дифференциальным параметрам 1-го порядка:

$$l_u = \frac{1}{h_u}, \quad l_v = \frac{1}{h_v}. \quad (2.7)$$

Доказательство. Дифференцируя функции (2.2') по x , найдем:

$$1 = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x},$$

$$0 = \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Умножая первое из этих равенств на $\frac{\partial x}{\partial u}$, а второе — на $\frac{\partial y}{\partial u}$ и складывая, получим:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial u}{\partial x} S \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \frac{\partial v}{\partial x} S \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2,$$

*) Ламе (1795—1870) — известный французский инженер и математик.

что, в силу условия (2.5) ортогональности системы, дает:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial u}{\partial x} l_u^2.$$

Аналогично

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial u}{\partial y} l_u^2.$$

Возводя эти два равенства почленно в квадрат и складывая, находим:

$$l_u^2 = h_u^2 l_u^4, \text{ т. е. } l_u h_u = 1.$$

Таким же образом доказывается и второе из соотношений (2.7).

36. Элементы длины и площади.

Определение. Элементом (дифференциалом) ds длины плоской линии в ее точке M_0 называется длина отрезка касательной к линии в точке M_0 , причем этот отрезок соответствует бесконечно малой части линии l , содержащей точку M_0 *). (Соответствующие друг другу отрезок касательной и часть линии ортогонально проектируются в один и тот же отрезок оси Ox или Oy .)

Теорема. Для элемента длины ds в системе криволинейных ортогональных координат u, v на плоскости имеем выражения:

$$ds = \sqrt{l_u^2 du^2 + l_v^2 dv^2} = \sqrt{\frac{1}{h_u^2} du^2 + \frac{1}{h_v^2} dv^2}. \quad (2.8)$$

Доказательство. Мы можем исходить из выражения для элемента длины ds в декартовых координатах (I, 57):

$$ds = \sqrt{x'^2(\xi) + y'^2(\xi)} d\xi,$$

где ξ — параметр линии или криволинейная координата ее точек. Так как

$$x'(\xi) = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{du}{d\xi} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{dv}{d\xi},$$

$$y'(\xi) = \frac{\partial y}{\partial u} \frac{du}{d\xi} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{dv}{d\xi},$$

*) Таким образом, считая, что длина обладает свойством аддитивности, мы, в силу формулы Ньютона — Лейбница (см. ниже п° 81, IV), устанавливаем понятие длины всей линии.

то

$$\begin{aligned}
 ds &= \sqrt{S \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{du}{d\xi} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{dv}{d\xi} \right)^2} d\xi = \\
 &= \sqrt{S \left[\left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 \left(\frac{du}{d\xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 \left(\frac{dv}{d\xi} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right) \left(\frac{du}{d\xi} \frac{dv}{d\xi} \right) \right]} d\xi = \\
 &= \sqrt{S \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 \left(\frac{du}{d\xi} \right)^2 + S \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 \left(\frac{dv}{d\xi} \right)^2 + 2 S \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right) \left(\frac{du}{d\xi} \frac{dv}{d\xi} \right)} d\xi,
 \end{aligned}$$

что для ортогональной системы, в силу равенства (2.5) и принятых обозначений (2.6) и (2.6'), имеет вид:

$$ds = \sqrt{l_u^2 du^2 + l_v^2 dv^2} = \sqrt{\frac{1}{h_u^2} du^2 + \frac{1}{h_v^2} dv^2},$$

ч. т. д.

Для элементов длины ds_u, ds_v координатных линий $v = v_0, u = u_0$ получаем соответственно выражения:

$$ds_u = l_u du, \quad ds_v = l_v dv.$$

Определение. Элементом (дифференциалом) $d\sigma$ площади области D в ее точке $P_0(u_0, v_0)$ в системе криволинейных ортогональных координат u, v называется площадь прямоугольника, стороны которого равны элементам исходящих из точки $P_0(u_0, v_0)$ сторон криволинейного четырехугольника, ограниченного координатными линиями $u = u_0, u = u_0 + du, v = v_0, v = v_0 + dv$ *) (черт. 10).

Теорема. Для элемента площади $d\sigma$ в системе криволинейных ортогональных координат u, v на плоскости имеем выражения:

$$d\sigma = l_u l_v du dv = \frac{1}{h_u h_v} du dv. \quad (2.9)$$

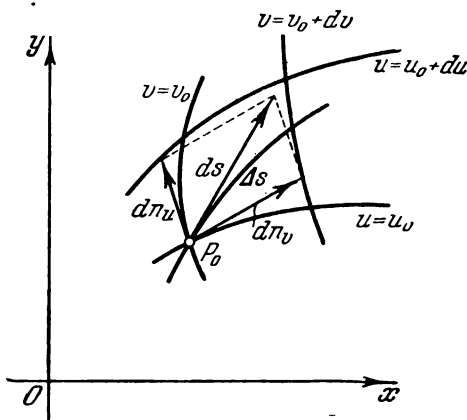
Доказательство. Мы найдем $d\sigma$, если примем указанный в определении четырехугольник за прямоугольник со сторонами ds_u и ds_v . При этом получим:

$$d\sigma = ds_u ds_v = l_u l_v du dv = \frac{1}{h_u h_v} du dv,$$

ч. т. д.

*) Таким образом, считая, что площадь обладает свойством аддитивности, мы, в силу формулы Ньютона — Лейбница (см. ниже п° 81, IV), устанавливаем понятие площади всей области.

Впрочем, нетрудно найти выражение для $d\sigma$ и иначе, без предварительного отыскания элемента длины. Рассмотренный бесконечно малый четырехугольник в плоскости Oxu является образом бесконечно малого прямоугольника в плоскости Ouv , ограниченного прямыми: $u = u_0$, $u = u_0 + du$; $v = v_0$,



Черт. 10.

$v = v_0 + dv$. Значит (см. п° 20), полагая точку P_0 произвольной, найдем:

$$d\sigma = |I| du dv *),$$

где

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Для вычисления этого якобиана возьмем его квадрат и представим по известным правилам:

$$I^2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} S\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 & S\left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v}\right) \\ S\left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v}\right) & S\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 \end{vmatrix}.$$

*) Выражение $|I| du dv$ принимается вообще в качестве элемента площади в системе криволинейных координат u, v независимо от того, является эта система ортогональной или нет.

В силу условий ортогональности имеем:

$$I^2 = \begin{vmatrix} l_u^2 & 0 \\ 0 & l_v^2 \end{vmatrix} = (l_u l_v)^2,$$

т. е. $|I| = l_u l_v$, а это и приводит к формуле (2.9).

37. Другой вывод. С точки зрения некоторых применений криволинейных координат представляет интерес иной ход рассуждений при выводе выражений для ds и $d\sigma$, минуя предварительное выяснение связи между величинами l и h .

Так как проекции на оси Ox и Oy вектора \mathbf{n}_{u_0} , нормального к координатной линии $u = u_0$ в точке P_0 (т. е. к прямой (2.3)), равны соответственно $\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{P_0}$, $\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{P_0}$, то, считая точку P_0 произвольной, получим следующие выражения для направляющих косинусов нормали:

$$\cos(\mathbf{n}_u, x) = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}},$$

$$\cos(\mathbf{n}_u, y) = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}}.$$

Используя введенные выше обозначения (2.6'), перепишем эти равенства в виде:

$$\cos(\mathbf{n}_u, x) = \frac{1}{h_u} \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \cos(\mathbf{n}_u, y) = \frac{1}{h_u} \frac{\partial u}{\partial y},$$

и аналогично:

$$\cos(\mathbf{n}_v, x) = \frac{1}{h_v} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \cos(\mathbf{n}_v, y) = \frac{1}{h_v} \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Теперь возьмем от функции $u = f(x, y)$ производную $\frac{\partial u}{\partial n_u}$ по направлению нормали \mathbf{n}_u к ее линии уровня $u = u_0$. Имеем (II, 148):

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial n_u} &= \frac{\partial u}{\partial x} \cos(\mathbf{n}_u, x) + \frac{\partial u}{\partial y} \cos(\mathbf{n}_u, y) = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{1}{h_u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{1}{h_u} \frac{\partial u}{\partial y} = \\ &= \frac{1}{h_u} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right], \end{aligned}$$

т. е.

$$\frac{\partial u}{\partial n_u} = \frac{1}{h_u} h_u^2 = h_u.$$

Аналогично получим:

$$\frac{\partial v}{\partial n_v} = h_v.$$

По самому смыслу производной по направлению (II, 148) имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial n_u} = \frac{du}{dn_u},$$

где du — дифференциал функции u , соответствующий бесконечно малому перемещению по нормали \mathbf{n}_u , а dn_u — величина этого перемещения (черт. 10). Поэтому из найденных соотношений следует, что расстояние dn_u (или dn_v) между бесконечно близкими координатными линиями $u = \text{const}$ (или $v = \text{const}$) равно:

$$dn_u = \frac{1}{h_u} du \quad \left(\text{или } dn_v = \frac{1}{h_v} dv \right).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} dn_u &= \frac{1}{h_u} \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \right) = \frac{1}{h_u} \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{1}{h_u} \frac{\partial u}{\partial y} dy = \\ &= \cos(\mathbf{n}_u, x) dx + \cos(\mathbf{n}_u, y) dy, \\ dn_v &= \frac{1}{h_v} \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right) = \frac{1}{h_v} \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{1}{h_v} \frac{\partial v}{\partial y} dy = \\ &= \cos(\mathbf{n}_v, x) dx + \cos(\mathbf{n}_v, y) dy. \end{aligned}$$

Так как $\cos(\mathbf{n}_u, x)$, $\cos(\mathbf{n}_u, y)$ суть проекции на оси Ox , Oy единичного нормального вектора, а dx , dy — проекции на те же оси вектора касательной к дуге длиной ds , то на основании свойств скалярного произведения заключаем, что dn_u есть проекция на направление нормали \mathbf{n}_u того же касательного вектора (см. черт. 10). Аналогично dn_v есть проекция этого вектора на нормаль \mathbf{n}_v . Из этого, а также из взаимной ортогональности векторов \mathbf{n}_u , \mathbf{n}_v вытекает, что

$$ds^2 = dn_u^2 + dn_v^2 = \frac{1}{h_u^2} du^2 + \frac{1}{h_v^2} dv^2.$$

С другой стороны, исходя из условий ортогональности (2.5), как и выше (стр. 85), находим другое представление ds^2 :

$$ds^2 = l_u^2 du^2 + l_v^2 dv^2.$$

Сравнивая теперь два полученных выражения для ds^2 , обнаруживаем связь между величинами l и h и независимо от этого находим выражение для элемента площади $d\sigma$.

§ 3. ВАЖНЕЙШИЕ СИСТЕМЫ КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТ НА ПЛОСКОСТИ

В некоторых случаях криволинейные координаты на плоскости имеют простой и наглядный геометрический смысл.

Мы приведем наиболее важные примеры криволинейных координат на плоскости. При этом во всех разбираемых

далее примерах мы задаем систему равенств (2.2'), выражающих декартовы прямоугольные координаты точки через ее криволинейные координаты, а не систему равенств (2.2), дающих обратные зависимости. Это оказывается удобнее потому, что потребность в переходе к криволинейным координатам возникает обычно при рассмотрении выражений, заданных именно в декартовых координатах.

38. Декартовы координаты. Декартовыми координатами на плоскости вообще называются величины u и v , через которые данные декартовы прямоугольные координаты x и y выражаются так:

$$x = a'_1 u + b'_1 v + c'_1, \quad y = a'_2 u + b'_2 v + c'_2, \quad (2.10')$$

где a' , b' , c' — постоянные и якобиан

$$I_1 = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$$

отличен от нуля. Эта система легко обращается:

$$u = a_1 x + b_1 y + c_1, \quad v = a_2 x + b_2 y + c_2, \quad (2.10)$$

где a , b , c — постоянные и якобиан

$$I = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \frac{1}{I_1}$$

также отличен от нуля.

С одной стороны, системы (2.10') и (2.10) определяют невырожденное аффинное отображение плоскости Oxy в плоскость Ouv . С другой стороны, они определяют «криволинейные» координаты u , v во всей плоскости Oxy , которые, впрочем, являются прямолинейными. В самом деле, координатными линиями служат две системы прямых $u = u_0$, $v = v_0$, параллельных соответственно прямым:

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \quad \text{и} \quad a_2 x + b_2 y + c_2 = 0, \quad (2.11)$$

так что декартовой системой можно назвать любую «прямолинейную» систему, т. е. систему, координатными линиями которой служат прямые линии.

Система (2.10) в общем случае не является ортогональной. Действительно, мы имеем выражение (см. (2.4))

$$S \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \right) = a_1 a_2 + b_1 b_2.$$

которое, конечно, не всегда равно нулю. Угол ω между координатными линиями может быть найден из формулы

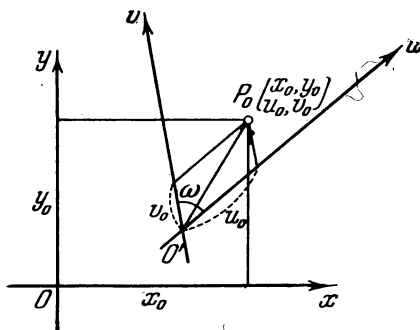
$$\operatorname{tg} \omega = \frac{-\frac{a_2}{b_2} + \frac{a_1}{b_1}}{1 + \frac{a_1 a_2}{b_1 b_2}} = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_1 a_2 + b_1 b_2},$$

откуда снова видно, что условием ортогональности служит равенство $a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0$. В частности, этому условию удовлетворяют коэффициенты всякого «подобного аффинного отображения» (§§ 5, 8 гл. I) и, значит, коэффициенты известных из элементарного курса аналитической геометрии преобразований декартовых координат.

Декартовы координаты имеют простой геометрический смысл. Если прямые (2.11) принять за новые оси координат, то новые координаты u_0, v_0 точки $P_0(x_0, y_0)$ (в системе $O'uv$):

$$u_0 = a_1 x_0 + b_1 y_0 + c_1, \quad v_0 = a_2 x_0 + b_2 y_0 + c_2,$$

выражают проекции (в общем случае косоугольные) радиуса-вектора $\overline{O'P_0}$ на новые оси координат (черт. 11).



Черт. 11.

Это особенно наглядно видно в случае ортогональности систем (2.10), (2.10'). Перепишем первое из уравнений (2.10) так:

$$\frac{u}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} x + \frac{b_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} y + \frac{c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}},$$

и полагая (что возможно)

$$\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \cos \alpha_1, \quad \frac{b_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \cos \beta_1 (= \sin \alpha_1),$$

а также обозначая

$$\frac{u}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = u', \quad \frac{c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \bar{c}_1,$$

получим:

$$u' = \cos \alpha_1 x + \cos \beta_1 y + \bar{c}_1.$$

Можно считать, что $\cos \alpha_1$, $\cos \beta_1$ — направляющие косинусы вектора, нормального к прямой $u' = 0$, т. е. что α_1 — угол между осью $O'u$ и осью Ox .

Аналогично

$$v' = \cos \alpha_2 x + \cos \beta_2 y + \bar{c}_2,$$

где новые обозначения имеют смысл, подобный смыслу обозначений в выражении для u' .

Теперь условие ортогональности запишется так:

$$\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 = 0,$$

т. е.

$$\cos(\alpha_2 - \alpha_1) = 0,$$

откуда $\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{\pi}{2}$, что должно быть понятным без дальнейших разъяснений. Для простоты положим $\bar{c}_1 = \bar{c}_2 = 0$ ($c_1 = c_2 = 0$); это означает, что начало координат O' новой системы $O'u'v'$ совпадает с началом O данной системы $Oxyz$. Но тогда величина

$$u' = \cos \alpha_1 x + \cos \beta_1 y,$$

являясь скалярным произведением единичного вектора $(\cos \alpha_1, \cos \beta_1)$ нормали к прямой $u' = 0$ и вектора $\overline{OP}(x, y)$, выражает проекцию этого вектора на направление указанной нормали, т. е. на ось координат $v' = 0$ и, следовательно, служит обычной (прямоугольной) декартовой координатой точки P по этой оси. То же самое относится и к величине v' .

Итак, система координат $Ou'v'$ есть система декартовых прямоугольных координат, ось Ou' которой образует с осью Ox угол α_1 . Если c_1 или c_2 не равно нулю, то система

координат $O'u'v'$ параллельна системе $Ou'v'$, причем начало координат O имеет такие координаты: $u' = \bar{c}_1$, $v' = \bar{c}_2$. Система координат $O'uv$ отличается от системы $O'u'v'$ только масштабами по осям координат. Единицы длины по осям $O'u'$, $O'v'$ равны соответственно $\sqrt{a_1^2 + b_1^2}$, $\sqrt{a_2^2 + b_2^2}$ единицам длины по осям $O'u$, $O'v$.

Таким образом, любая прямолинейная и ортогональная система координат $O'uv$ (2.10) может быть получена из данной декартовой ортогональной системы координат Oxy передвижением этой системы на плоскости («параллельным сдвигом» и «вращением» вокруг неподвижного начала координат) и изменением масштаба по осям координат.

Если $a_1 = \cos \alpha_1$, $a_2 = \cos \alpha_2$, $b_1 = \cos \beta_1$, $b_2 = \cos \beta_2$, то мы имеем хорошо известный из аналитической геометрии случай преобразования декартовых прямоугольных координат (при этом масштаб сохраняется).

Обычно новые декартовые координаты обозначают буквами x' и y' , т. е. $u = x'$, $v = y'$.

Найдем величины l и h для декартовых (ортогональных) координат:

$$l_u = \sqrt{a_1'^2 + a_2'^2} = \frac{1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}, \quad l_v = \sqrt{b_1'^2 + b_2'^2} = \frac{1}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

и, значит,

$$h_u = \frac{1}{\sqrt{a_1'^2 + a_2'^2}} = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}, \quad h_v = \frac{1}{\sqrt{b_1'^2 + b_2'^2}} = \sqrt{a_2^2 + b_2^2}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{(a_1'^2 + a_2'^2) du^2 + (b_1'^2 + b_2'^2) dv^2} = \\ &= \sqrt{\frac{du^2}{a_1^2 + b_1^2} + \frac{dv^2}{a_2^2 + b_2^2}}, \\ d\sigma &= \sqrt{(a_1'^2 + a_2'^2)(b_1'^2 + b_2'^2)} du dv = \\ &= \frac{1}{\sqrt{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)}} du dv. \end{aligned}$$

Если масштабы не изменяются, т. е. $a_1^2 + b_1^2 = a_2^2 + b_2^2 =$
 $= (a_1'^2 + a_2'^2 = b_1'^2 + b_2'^2) = 1$, то

$$ds = \sqrt{du^2 + dv^2}, \quad d\sigma = du dv.$$

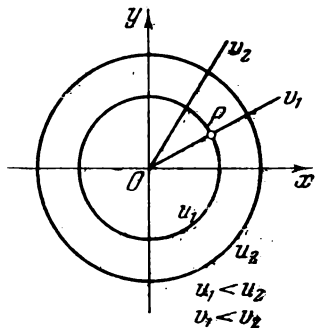
39. Полярные координаты. Полярными координатами на плоскости называются величины u и v , через которые декартовы прямоугольные координаты x и y выражаются так:

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad (2.12')$$

причем $0 \leq u < \infty$, $0 \leq v < 2\pi$.

Координатными линиями служат: концентрические окружности с центром в начале координат и полупрямые, исходящие из начала координат (черт. 12). Действительно, если $u = u_0$, то, исключая v из двух равенств (2.12'), получим:

$$x^2 + y^2 = u_0^2, \quad (*)$$



Черт. 12.

т. е. уравнение окружности с центром в точке $(0, 0)$ с радиусом u_0 . С непрерывным увеличением u_0 от нуля до ∞ переменная окружность $(*)$ один раз выметет всю плоскость, т. е. эта окружность один раз пройдет через каждую точку плоскости. Если $v = v_0$, то два равенства (2.12'):

$$x = u \cos v_0, \quad y = u \sin v_0, \quad **$$

определяют луч, исходящий из точки $(0, 0)$ и наклоненный к оси Ox под углом v_0 ; его обычное уравнение (при $v_0 \neq \frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}$) можно записать в форме $y = (\operatorname{tg} v_0) x$. С непрерывным увеличением v_0 от 0 до 2π (исключая 2π) переменный луч $(**)$ один раз выметет всю плоскость Oxy , но через точку $(0, 0)$ будет проходить всякий луч. Таким образом, в системе полярных координат каждой точке плоскости Oxy , лишенной точки $(0, 0)$, соответствует единственная пара чисел u и v — ее полярных координат, и обратно. В точке $(0, 0)$ первая полярная координата u равна нулю, но вторая v может принять любое значение из интервала $[0, 2\pi)$. Начало координат является особой точкой для системы полярных координат.

Полярные координаты имеют, как известно, такой простой геометрический смысл: если положительную полуось Ox принять за ось, от которой отсчитываются углы (она называется *полярной осью*, а ее начальная точка O — *полюсом*), то координату u точки P можно считать длиной (модулем) радиуса-вектора \overline{OP} (она называется *полярным радиусом* точки P), а координату v — углом между радиусом-вектором \overline{OP} и полярной осью (она называется *полярным углом* точки P).

Полярная координата u часто обозначается через r, ρ, R , а координата v — через φ, ψ, θ . Система полярных координат вследствие своего удобства во многих отношениях употребляется очень часто.

Что касается обращения системы равенств (2.12'), то необходимо сказать следующее: первая координата u (полярный радиус) как функция точки $P(x, y)$, очевидно, непрерывна на всей плоскости Oxy и выражается очень просто через декартовы координаты x и y точки P :

$$u = \sqrt{x^2 + y^2};$$

вторая координата v (полярный угол) как функция точки P на всей плоскости разрывна на положительной полуоси Ox : при переходе точки $P(x, y)$ через эту полуось функция получает приращение, равное 2π .

Координата v как функция от x и y (во всей плоскости без точки $(0, 0)$) не выражается никакой элементарной функцией. Для обозначения этой функции вводится символ: $\arg(x, y)$. Функцию $v = \arg(x, y)$ (полярный угол) можно определить так:

$$\arg(x, y) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} & \text{для } x > 0, y \geq 0, \\ \frac{\pi}{2} & \text{для } x = 0, y > 0, \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \pi & \text{для } x < 0, \\ 3 \frac{\pi}{2} & \text{для } x = 0, y < 0, \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + 2\pi & \text{для } x > 0, y < 0; \end{cases}$$

$\operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, как обычно, есть главное значение $\operatorname{Arctg} \frac{y}{x}$ (I, 26):

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} \frac{y}{x} < \frac{\pi}{2}.$$

Функция $\arg(x, y)$ определена и однозначна во всей плоскости Oxy , за исключением точки $(0, 0)$, где она не определена; эта функция непрерывна всюду в плоскости, кроме положительной полуоси Ox , где она претерпевает конечный разрыв. Ясно, что $0 \leq \arg(x, y) < 2\pi$ *).

Итак, системой функций, выражающих полярные координаты через декартовы, служит система

$$u = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad v = \arg(x, y). \quad (2.12)$$

Система (2.12) или (2.12') гомеоморфно отображает всю плоскость Oxy , из которой удалена положительная полуось Ox , в область плоскости Ouv , являющуюся бесконечной полуполосой, ограниченной полупрямыми:

$$v = 0, u \geq 0; \quad v = 2\pi, u \geq 0; \quad u = 0, v \geq 0.$$

При этом точки положительной полуоси Ox отображаются в точки полуосей $v = 0$ и $v = 2\pi, u \geq 0$; если подходить к точке положительной полуоси Ox сверху (т. е. при $y > 0$),

*) В некоторых разделах анализа иногда предпочитают функцию $\arg(x, y)$ определять несколько иначе:

$$\arg(x, y) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} & \text{для } x > 0, \\ \frac{\pi}{2} & \text{для } x = 0, y > 0, \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \pi & \text{для } x < 0, y \geq 0, \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \pi & \text{для } x < 0, y < 0, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{для } x = 0, y < 0. \end{cases}$$

Эта функция также выражает угол между радиусом-вектором \overline{OP} и положительным направлением оси Ox , но здесь угол отсчитывается при $y \geq 0$ в положительном направлении, а при $y < 0$ — в отрицательном; функция $\arg(x, y)$ при таком определении непрерывна во всей плоскости Oxy , лишенной отрицательной полуоси Ox .

то в плоскости Ouv образ переменной точки будет стремиться к точке полуоси $v=0$, $u \geq 0$, а если подходить к той же точке снизу (т. е. при $y < 0$), то соответствующая точка плоскости Ouv будет приближаться к точке полуоси $v=2\pi$, $u \geq 0$.

Система полярных координат является прямоугольной (ортогональной). Это видно и непосредственно и легко проверяется на основании условий (2.4) или (2.5). Имеем при $x \neq 0$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{-\frac{y}{x^2}}{1 + \frac{y^2}{x^2}}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{y^2}{x^2}},$$

и значит, $S\left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0$. Точно так же $S\left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v}\right) = 0$, ибо

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \cos v, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -u \sin v; \quad \frac{\partial y}{\partial u} = \sin v, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = u \cos v.$$

Отображение (2.12), (2.12') являет собой простой пример нерегулярного отображения с ортогональной изотермической сетью.

Вычислим величины l и h для полярных координат:

$$l_u = \sqrt{\cos^2 v + \sin^2 v} = 1,$$

$$l_v = \sqrt{u^2 \sin^2 v + u^2 \cos^2 v} = u$$

и, значит,

$$h_u = 1, \quad h_v = \frac{1}{u}.$$

Поэтому имеем:

$$ds = \sqrt{du^2 + u^2 dv^2}, \quad d\sigma = u du dv$$

(I, 118; II, 174). Мы видим, что элемент площади $d\sigma$ в полярных координатах равен $u du$, умноженному на элемент dv меры угла, под которым видна из начала координат линия, ограничивающая область. Элемент dv можно рассматривать как меру дуги единичной окружности, в которую центрально (из начала координат) проектируется ограничивающая линия.

40. Обобщенные полярные координаты. Обобщенными полярными координатами на плоскости называются величины u и v , через которые декартсовы прямоугольные координаты x и y выражаются так:

$$x = au \cos v, \quad y = bu \sin v, \quad (2.13')$$

причем $0 \leq u < \infty$, $0 \leq v < 2\pi$, a и b — положительные константы $a \neq b$.

Как видно, u и v можно здесь считать обычными полярными координатами в плоскости $Ox'y'$, которая получается из плоскости Oxy изменением масштабов по осям координат:

$$x' = \frac{1}{a} x, \quad y' = \frac{1}{b} y.$$

Координатными линиями служат: эллипсы

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = u^2$$

с центром в точке $(0, 0)$ и с полюсами au_0 , bu_0 и лучи

$$x = au \cos v_0, \quad y = bu \sin v_0,$$

исходящие из точки $(0, 0)$, с угловыми коэффициентами $\frac{b}{a} \operatorname{tg} v_0$.

Системой, обратной к системе (2.13'), будет:

$$u = \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}, \quad v = \arg \left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b} \right). \quad (2.13)$$

Точка $(0, 0)$ есть особая точка для системы обобщенных полярных координат. Легко описать отображение, производимое системой (2.13'), если воспользоваться тем, что после изменения масштабов по осям Ox и Oy обобщенные полярные координаты становятся обычными полярными координатами. Также нетрудно понять, что система обобщенных полярных координат является ортогональной только при вырождении ее в обычную систему полярных координат ($a = b$). В этом убеждаемся и с помощью критерия (2.5).

Элемент $d\sigma$ площади в системе обобщенных полярных координат равен:

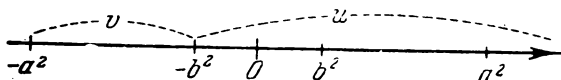
$$d\sigma = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv = abu du dv.$$

§ 4. ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ И ИХ ВЫРОЖДЕНИЯ

41. Общие эллиптические координаты. Криволинейные координаты u и v , связанные с декартовыми прямоугольными координатами x и y соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} x^2 &= \frac{(u+a^2)(v+a^2)}{a^2-b^2}, \\ y^2 &= \frac{(u+b^2)(v+b^2)}{b^2-a^2}, \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

называются *эллиптическими*; при этом заданные постоянные a^2, b^2 подчинены условиям $0 \leq b^2 < a^2$, а координаты u и v принадлежат соответственно интервалам $(-b^2, \infty)$,



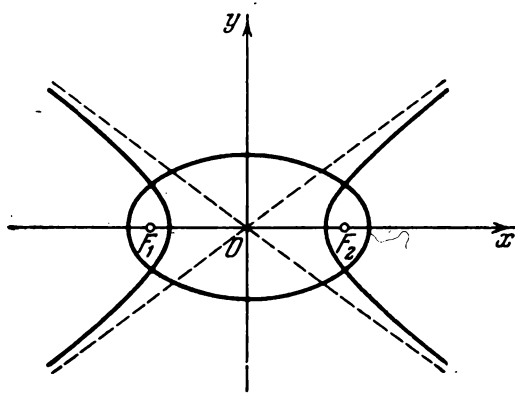
Черт. 13.

$(-a^2, -b^2)$, т. е. $-b^2 < u < \infty$, $-a^2 < v < -b^2$. Следовательно, всегда

$$-a^2 < v < -b^2 < u < \infty$$

(черт. 13).

Координатными линиями служат софокусные (с фокусами в точках $F_1(-\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ и $F_2(\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$)



Черт. 14.

эллипсы и гиперболы, «канонически расположенные» в системе Oxy (черт. 14).

Действительно, если $u = u_0$, $-b^2 < u_0 < \infty$, то, исключая v из двух равенств (2.14), получим:

$$\frac{x^2}{u_0 + a^2} + \frac{y^2}{u_0 + b^2} = \frac{v + a^2}{a^2 - b^2} + \frac{v + b^2}{b^2 - a^2} = 1, \quad (*)$$

т. е. каноническое уравнение эллипса с полуосями $\sqrt{u_0 + a^2}$ и $\sqrt{u_0 + b^2}$ и с фокусами в точках F_1 и F_2 .

С увеличением u_0 от $-b^2$ до ∞ переменный эллипс (*) один раз выметет всю плоскость Oxy . Если $v = v_0$, $-a^2 < v_0 < -b^2$, то, рассуждая в точности, как в случае $u = u_0$, получим:

$$\frac{x^2}{v_0 + a^2} + \frac{y^2}{v_0 + b^2} = 1$$

или

$$\frac{x^2}{v_0 + a^2} - \frac{y^2}{-(v_0 + b^2)} = 1, \quad (**)$$

т. е. каноническое уравнение гиперболы (ибо $-(v_0 + b^2) > 0$) с полуосями $\sqrt{v_0 + a^2}$ и $\sqrt{-(v_0 + b^2)}$ и с фокусами в точках F_1 и F_2 . С увеличением v_0 от $-a^2$ до $-b^2$ переменная гипербола (**) один раз выметет всю плоскость Oxy .

Разумеется, данная система эллиптических координат (2.14) определяется заданием параметров a^2 , b^2 , подчиненных условию $0 \leq b^2 < a^2$.

Из рассмотрения координатных линий и непосредственно из формул (2.14) видно, что каждой паре координат u и v соответствуют четыре точки $P(x, y)$, по одной в каждом квадранте, симметричные друг с другом относительно осей координат. Поэтому для гомеоморфизма необходимо ограничиться, во всяком случае, одним из квадрантов плоскости Oxy , например первым: $x > 0$, $y > 0$. Для утверждения, что этот квадрант, а не какая-нибудь его часть, является областью гомеоморфизма системы эллиптических координат, нужно еще доказать, что каждой точке $P(x, y)$ при $x > 0$, $y > 0$ соответствует одна пара чисел u , v , причем $-b^2 < u < \infty$, $-a^2 < v < -b^2$. Докажем это.

Из системы равенств (2.14), связывающих между собой декартовы и эллиптические координаты, мы получили систему равенств (*), (**), которую можно записать так:

$$\frac{x^2}{p_i + a^2} + \frac{y^2}{p_i + b^2} = 1, \quad i = 1, 2. \quad (***)$$

Нетрудно убедиться, что и обратно, из двух равенств (***) вытекает система (2.14). Следовательно, равенства (***) и (2.14) эквивалентны. Нам остается показать, что при фиксированных x , y уравнение относительно параметра p

$$\frac{x^2}{p + a^2} + \frac{y^2}{p + b^2} = 1 \quad (2.14')$$

имеет два действительных корня p_1, p_2 , причем $-b^2 < p_1 < -\infty$, $-a^2 < p_2 < -b^2$ *). Но это так и есть в силу следующего соображения. Функция

$$F(p) \equiv \frac{x^2}{p+a^2} + \frac{y^2}{p+b^2} - 1 \equiv \frac{\Phi(p)}{(p+a^2)(p+b^2)}$$

в каждом из двух открытых интервалов $(-a^2, -b^2)$, $(-b^2, \infty)$ является непрерывной функцией параметра p и при стремлении p к граничным точкам интервала имеет противоположные знаки. Если $p \rightarrow -a^2 + 0$, то $F(p) \rightarrow +\infty$ (вследствие того, что $\frac{x^2}{p+a^2} \rightarrow +\infty$); если $p \rightarrow -b^2 - 0$,

то $F(p) \rightarrow -\infty$ (вследствие того, что $\frac{y^2}{p+b^2} \rightarrow -\infty$);

значит, $F(p)$ обращается, по меньшей мере один раз, в нуль внутри интервала $(-a^2, -b^2)$. Если $p \rightarrow -b^2 + 0$, то $F(p) \rightarrow +\infty$, а если $p \rightarrow \infty$, то $F(p) \rightarrow -1$; значит, $F(p)$ обращается, по меньшей мере один раз, в нуль внутри интервала $(-b^2, \infty)$. Из этого вытекает, что в каждом из двух указанных интервалов находится точно один корень уравнения $F(p) = 0$, ибо корнями этого уравнения являются корни уравнения $\Phi(p) = 0$, а оно второй степени и, стало быть, имеет ровно два корня. Полагая $u = p_1$, $v = p_2$, мы и находим ту единственную пару эллиптических координат, которая соответствует заданной точке $P(x, y)$ первого квадранта.

Заметим, что система (2.14), задающая эллиптические координаты, гомеоморфно отображает каждый квадрант плоскости Oxy в бесконечную полуполосу Δ плоскости Ouv , ограниченную прямыми:

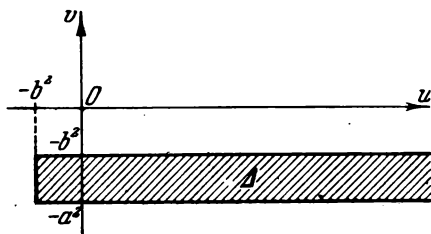
$$u = -b^2, \quad v = -a^2, \quad v = -b^2 \quad (u > -b^2)$$

(черт. 15).

В отличие от рассмотренных выше криволинейных координат на плоскости (декартовых, полярных) эллиптические

*) Часто эллиптические координаты и определяют как корни уравнения (2.14'), а затем уже находят выражения (2.14) для x^2, y^2 через эти координаты.

координаты, в общем случае, не имеют простой геометрической интерпретации. Эллиптические координаты иногда обозначаются через λ , μ (или ρ , μ).



Черт. 15.

Докажем теперь аналитически, что система эллиптических координат — ортогональная; для этого проверим справедливость критерия (2.5). Так как (см. уравнения (2.14))

$$2x \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{v + a^2}{a^2 - b^2}, \quad 2x \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{u + a^2}{a^2 - b^2},$$

то

$$4x^2 \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{(u + a^2)(v + a^2)}{(a^2 - b^2)^2},$$

откуда

$$\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{1}{4} \frac{1}{a^2 - b^2};$$

точно так же

$$\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{1}{4} \frac{1}{b^2 - a^2}.$$

Следовательно,

$$S\left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v}\right) = 0.$$

Найдем величины l и h для эллиптических координат. Имеем:

$$4x^2 \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 = \frac{(v + a^2)^2}{(a^2 - b^2)^2};$$

отсюда

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 = \frac{1}{4} \frac{v + a^2}{(u + a^2)(a^2 - b^2)}.$$

Подобно этому находим:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 = \frac{1}{4} \frac{v + b^2}{(u + b^2)(b^2 - a^2)}.$$

По формуле (2.6) получаем:

$$l_u^2 = \frac{1}{4} \left[\frac{v + a^2}{(u + a^2)(a^2 - b^2)} + \frac{v + b^2}{(u + b^2)(b^2 - a^2)} \right] = \frac{1}{4} \frac{u - v}{m(u)},$$

где $m(t) = (t + a^2)(t + b^2)$.

Аналогично.

$$l_v^2 = \frac{1}{4} \frac{u - v}{-m(v)}, \quad -m(v) > 0,$$

и, значит,

$$h_u^2 = 4 \frac{m(u)}{u - v}, \quad h_v^2 = 4 \frac{-m(v)}{u - v}.$$

Далее, по формулам (2.8) и (2.9) находим выражения для ds и $d\sigma$:

$$ds = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{u - v}{m(u)} du^2 + \frac{u - v}{-m(v)} dv^2},$$

$$d\sigma = \frac{u - v}{4 \sqrt{-m(u)m(v)}} du dv.$$

42. Вырожденные эллиптические координаты. Униформизация. Выражения для ds и $d\sigma$ (в п° 41) упрощаются, если вместо переменных u, v ввести другие переменные — обозначим их через u_*, v_* — связанные с u, v соотношениями:

$$du_* = \frac{du}{\sqrt{4m(u)}}, \quad dv_* = \frac{dv}{\sqrt{-4m(v)}}.$$

Заметим, что связь между u, v и u_*, v_* может быть записана в другом виде, например так:

$$u_* = \int_{-b^2}^u \frac{dt}{\sqrt{4m(t)}}, \quad v_* = \int_{-b^2}^v \frac{dt}{\sqrt{-4m(t)}}. \quad (2.15)$$

Подставляя выражения для du и dv в формулы для ds и $d\sigma$ (п° 41), находим:

$$ds = \sqrt{u - v} \sqrt{du_*^2 + dv_*^2}, \quad d\sigma = (u - v) du_* dv_*;$$

здесь u и v — функции соответственно от u_* и v_* , получаемые посредством обращения интегралов (2.15). Применяя к первому из этих интегралов подстановку $\frac{t + b^2}{t + a^2} = \tau^2$, а ко

второму постановку $-\frac{t+a^2}{t+b^2} = -\tau^2$, без особого труда получим:

$$u_* = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sqrt{\frac{u+b^2}{u+a^2}}}{1 - \sqrt{\frac{u+b^2}{u+a^2}}}, \quad v_* = \operatorname{arccctg} \sqrt{-\frac{v+a^2}{v+b^2}}. \quad (2.15')$$

Выражая из этих равенств u и v , найдем:

$$u = (a^2 - b^2) \operatorname{sh}^2 u_* - b^2; \quad v = -(a^2 - b^2) \sin^2 v_* - b^2 \quad (2.15'')$$

и, значит,

$$u - v = (a^2 - b^2) (\operatorname{sh}^2 u_* + \sin^2 v_*) = (a^2 - b^2) (\operatorname{ch}^2 u_* - \cos^2 v_*);$$

поэтому

$$ds = \sqrt{a^2 - b^2} \sqrt{\operatorname{ch}^2 u_* - \cos^2 v_*} \sqrt{du_*^2 + dv_*^2},$$

$$d\sigma = (a^2 - b^2) (\operatorname{ch}^2 u_* - \cos^2 v_*) du_* dv_*.$$

Оказывается, что введение вместо криволинейных координат u и v криволинейных координат u_* и v_* , определяемых через u и v по формулам (2.15'), позволяет не только упростить выражения для элементов длины и площади, но и расширить область гомеоморфизма в плоскости Oxy . Для того, чтобы убедиться в этом, найдем прямую связь между декартовыми координатами x , y и новыми координатами u_* , v_* . Подставляя в формулы (2.14) вместо u и v их выражения (2.15'') через u_* и v_* , получим:

$$x^2 = (a^2 - b^2) \operatorname{ch}^2 u_* \cos^2 v_*, \quad y^2 = (a^2 - b^2) \operatorname{sh}^2 u_* \sin^2 v_*$$

или, принимая $a = 1$, $b = 0$,

$$x = \operatorname{ch} u_* \cos v_*, \quad y = \operatorname{sh} u_* \sin v_*; \quad (2.16)$$

при этом формулы (2.15'') имеют вид:

$$u = \operatorname{sh}^2 u_*, \quad v = -\sin^2 v_*.$$

В силу этих соотношений каждой точке $Q(u, v)$ в области Δ (черт. 15) могут быть поставлены в соответствие четыре точки $Q_1(u_*, v_*)$; но каждой точке Q соответствуют также четыре точки $P(x, y)$ в плоскости Oxy , и, как мы сейчас увидим, это дает возможность установить гомеоморфное соответствие между всеми точками плоскости Oxy (за исключением

точек лишь некоторого интервала) и точками некоторой полуполосы в плоскости Ou_*v_* .

Формулы (2.15'), (2.15''), связывающие переменные u, v с переменными u_*, v_* и превращающие неоднозначное соответствие между точками $P(x, y)$ плоскости Oxy и точками $Q(u, v)$ плоскости Ouv (в полуполосе Δ) в однозначное соответствие между точками $P(x, y)$ и точками $Q_1(u_*, v_*)$ плоскости Ou_*v_* , называются *униформизирующими формулами*, а переменные u_*, v_* — *униформизирующими переменными*.

Отбрасывая индекс $*$, перепишем формулы (2.16):

$$x = \operatorname{ch} u \cos v, \quad y = \operatorname{sh} u \sin v, \quad (2.16')$$

причем $0 \leq u < \infty, \quad 0 \leq v < 2\pi$.

Именно так заданные криволинейные координаты u и v собственно и называют чаще всего эллиптическими. Ясно, что координатными линиями будут те же софокусные (с фокусами в точках $F_1(-1, 0)$ и $F_2(1, 0)$) взаимно-ортогональные эллипсы и гиперболы (при $u \neq 0, v \neq 0, \frac{\pi}{2}, \pi, 3 \cdot \frac{\pi}{2}$); уравнения их запишутся соответственно так:

$$\frac{x^2}{\operatorname{ch}^2 u_0} + \frac{y^2}{\operatorname{sh}^2 u_0} = 1, \quad u_0 \neq 0, \quad (*)$$

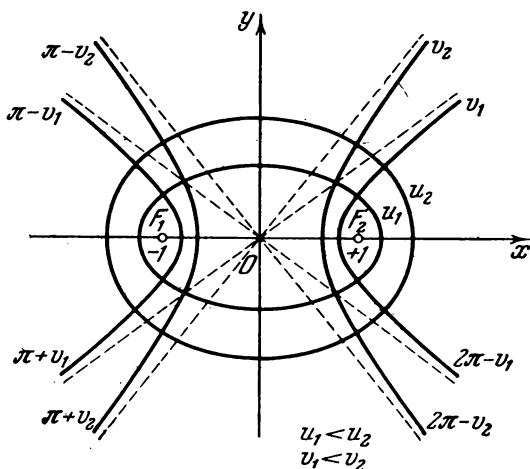
$$\frac{x^2}{\cos^2 v_0} - \frac{y^2}{\sin^2 v_0} = 1, \quad v_0 \neq 0, \frac{\pi}{2}, \pi, 3 \cdot \frac{\pi}{2}. \quad (**)$$

Любой точке $P_0(x_0, y_0)$ соответствует единственное значение координаты u и четыре возможных значения координаты v . Действительно, если v_0 удовлетворяет уравнению (**), то ему удовлетворяют также $\pi - v_0, \pi + v_0, 2\pi - v_0$, причем всегда можно считать, что $0 \leq v_0 \leq \frac{\pi}{2}$. Эти же значения v соответствуют и трем другим точкам $P_1(-x_0, y_0), P_2(-x_0, -y_0), P_3(x_0, -y_0)$, симметричным точке P_0 относительно осей и начала координат. Следовательно, если, разрешая уравнение (**) относительно v_0 , мы отнесем точке P_0 , лежащей в первом квадранте, значение v_0 координаты v , точке P_1 — значение $\pi - v_0$, точке P_2 — значение $\pi + v_0$, точке P_3 — значение $2\pi - v_0$, то тем самым мы установим взаимно-однозначное соответствие между точками плоско-

сти Oxy (за исключением полуоси $(-1, \infty)$) и точками плоскости Ouv , координаты которых подчинены условиям: $0 \leq u < \infty$, $0 \leq v < 2\pi$. Можно сказать, что взаимно-однозначное соответствие здесь достигнуто тем, что частям гиперболы

$$\frac{x^2}{\cos^2 v_0} - \frac{y^2}{\sin^2 v_0} = 1,$$

принадлежащим первому, второму, третьему, четвертому квадрантам, приписываются соответственно индексы v_0 , $\pi - v_0$, $\pi + v_0$, $2\pi - v_0$, $0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}$ (черт. 16).



Черт. 16.

Что касается полуоси $(-1, \infty)$, то в каждой ее точке координата u равна нулю, а координата v может принимать два значения v_0 и $2\pi - v_0$ (для полуоси $[0, \infty)$) или $\pi - v_0$ и $\pi + v_0$ (для интервала $(-1, 0]$), где $0 < v_0 \leq \frac{\pi}{2}$. Если точка P_0 принадлежит интервалу $(-1, 0]$, то при приближении к ней сверху (т. е. при $y > 0$) следует считать (по непрерывности), что $v = \pi - v_0$, а если снизу (т. е. при $y < 0$), то следует считать, что $v = \pi + v_0$ (см. черт. 16). Если точка P_0 принадлежит интервалу $[0, 1]$, то при приближении к ней сверху следует считать, что $v = v_0$, а снизу, что

$v = 2\pi - v_0$. Если же точка P_0 принадлежит полуоси $[1, \infty)$, то при приближении к ней сверху следует считать $v = 0$, а снизу $v = 2\pi$. Эллиптическая координата v как функция точки на плоскости Oxu разрывна на полуоси $(-1, \infty)$: при переходе точки $P(x, y)$ через эту полуось функция получает приращение, равное $2v_0$ для участка $(-1, 0]$, равное $2(\pi - v_0)$ для участка $[0, 1]$ и равное 2π для участка от $+1$ до ∞ ($0 \leq v_0 \leq \frac{\pi}{2}$).

Система (2.16) гомеоморфно отображает всю плоскость Oxu , из которой удалена полуось Ox от точки $x = -1$ до $+\infty$, в область плоскости Ouv , являющуюся бесконечной полуполосой, ограниченной полупрямыми:

$$v = 0, \quad u \geq 0; \quad v = 2\pi, \quad u \geq 0; \quad u = 0, \quad v \geq 0.$$

При этом верхняя сторона полуоси Ox от точки $x = 1$ до $+\infty$ отображается в полуось $v = 0, u \geq 0$, а ее нижней стороне соответствует по непрерывности полуось $v = 2\pi, u \geq 0$; верхняя сторона интервала $[1, -1]$ оси Ox отображается в интервал $[0, \pi]$ оси $u = 0$, а нижняя сторона интервала $[-1, 1]$ — в интервал $[\pi, 2\pi]$ той же оси $u = 0$.

Легко видеть, что

$$l_u = l_v = \sqrt{\operatorname{ch}^2 u - \cos^2 v}.$$

Итак, частный случай ($a = 1, b = 0$) общих эллиптических координат (2.14), когда вместо переменных u и v берутся соответственно функции $\operatorname{sh}^2 u$ и $\sin^2 v$, представляет особый интерес благодаря получающейся простоте выражений для элементов длины и площади и значительному расширению области гомеоморфизма.

Кроме того, как это обнаруживается в теории функций комплексной переменной, система функций (2.16) может быть заменена весьма простой — эквивалентной ей — одной функцией комплексной переменной, в то время как функция комплексной переменной, заменяющая общую систему (2.14), не является достаточно простой. С этим связано то легко проверяемое обстоятельство, что система (2.16) дает регулярное (п° 23) отображение, в то время как отображение (2.14), вообще говоря, не является регулярным.

Эллиптические координаты (2.16) для отличия от эллиптических координат в общем случае (2.14) следовало бы называть *вырожденными эллиптическими координатами*.

Наконец, заметим, что вырождением эллиптических координат являются и полярные координаты. Действительно, если в равенствах (2.14) положить $b=0$, $u=u_*$, $v=-a^2 \sin^2 \varphi_*$, а затем заставить $a \rightarrow 0$, то в пределе мы и придем к системе полярных координат (2.12'); здесь полярные координаты также оказываются униформизирующими переменными.

§ 5. ДРУГИЕ СИСТЕМЫ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ КООРДИНАТ НА ПЛОСКОСТИ

43. Параболические координаты. Рассмотрим криволинейные координаты u и v , заданные такой системой равенств (см. п° 9):

$$x = u^2 - v^2, \quad y = 2uv, \quad (2.17')$$

причем $-\infty < u < \infty$, $0 \leq v < \infty$. Эти координаты называются *параболическими*.

Координатными линиями служат две системы взаимно-ортогональных парабол, с осями симметрии, лежащими на оси Ox и направленными в сторону положительных x для одной системы и в сторону отрицательных x для второй системы. Действительно, если $u = u_0$, $u_0 \neq 0$, то, исключая из двух равенств (2.17') v , получим:

$$x = u_0^2 - \frac{y^2}{4u_0^2}, \quad (*)$$

т. е. уравнение параболы, у которой осью служит интервал $(-\infty, u_0^2)$ оси Ox , а параметр равен $2u_0^2$. С увеличением u_0 от $-\infty$ до 0 и от 0 до $+\infty$ переменная парабола (*) два раза выметет всю плоскость Oxy . Если $v = v_0$, $v_0 \neq 0$, то, исключая из двух равенств (2.17') u , получим:

$$x = \frac{y^2}{4v_0^2} - v_0^2, \quad (**)$$

т. е. уравнение параболы, у которой осью служит интервал $(-v_0^2, +\infty)$ оси Ox , а параметр равен $2v_0^2$. С увеличением v_0 от нуля до $+\infty$ переменная парабола (**) выметет всю плоскость Oxy . Но, приписывая *) частям параболы (*),

) Смысл этого «приписывания» тот же, что и в случае вырожденных эллиптических координат (см. стр. 105): разрешая уравнение () относительно u_0 , мы относим точке P_0 положительное значение этой криволинейной координаты, если точка P_0 лежит в верхней полуплоскости, и — отрицательное значение, если она лежит в нижней полуплоскости.

принадлежащим верхней и нижней полуплоскостям Oxy , соответственно индексы u_0 и $-u_0$, $u_0 \geq 0$ (черт. 17), мы получим систему криволинейных координат (параболических) (2.17'), в которой каждой точке плоскости Oxy соответствует единственная пара чисел u и v , и наоборот; исключение составляет положительная полуось Ox : в каждой ее точке координата v равна нулю, а координата u может принимать два значения, именно u_0 и $-u_0$. Если приближаться к точке положительной полуоси Ox из верхней полуплоскости (т. е. при $y > 0$), то следует считать (по непрерывности), что $u = u_0 > 0$, а если приближаться к этой точке из нижней полуплоскости (т. е. при $y < 0$), то в силу того же соображения следует считать, что $u = -u_0$. Параболическая координата u как функция точки на плоскости Oxy разрывна на полуоси $(0, +\infty)$: при переходе точки $P(x, y)$ через эту полуось функция получает приращение, равное $2u_0$, $u_0 > 0$.

В данном случае легко найти обратную систему функций:

$$\left. \begin{aligned} u &= \pm \sqrt{\frac{1}{2}(x + \sqrt{x^2 + y^2})}, \\ v &= \sqrt{\frac{1}{2}(-x + \sqrt{x^2 + y^2})}, \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

причем берется знак $+$ для $y > 0$ и знак $-$ для $y < 0$. Из рассмотрения системы (2.17) мы приходим к тем же выводам, что и выше.

Система функций (2.17), (2.17') гомеоморфно отображает всю плоскость Oxy , из которой удалена положительная полуось Ox , в верхнюю полуплоскость Ouv (т. е. $v > 0$). При этом верхняя сторона полуоси Ox отображается в положительную полуось Ou , а ее нижняя сторона — в отрицательную полуось Ov . Сравнивая рассмотренную систему (2.17') с примером в п° 9, нетрудно обнаружить, что здесь только поменялись местами плоскости Oxy и Ouv .

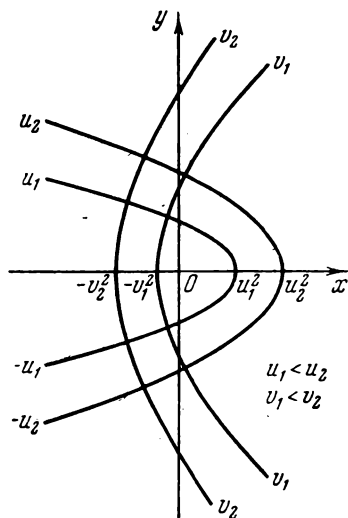
Проверим ортогональность системы параболических координат; имеем:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = 2u, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -2v; \quad \frac{\partial y}{\partial u} = 2v, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = 2u,$$

откуда

$$S\left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v}\right) = 0.$$

Отображение (2.17') — регулярное.



Черт. 17.

Найдем величины l и h для параболических координат:

$$l_u = \sqrt{4u^2 + 4v^2} = 2\sqrt{u^2 + v^2}, \quad l_v = \sqrt{4v^2 + 4u^2} = 2\sqrt{u^2 + v^2}$$

и, значит,

$$h_u = h_v = \frac{1}{2\sqrt{u^2 + v^2}}.$$

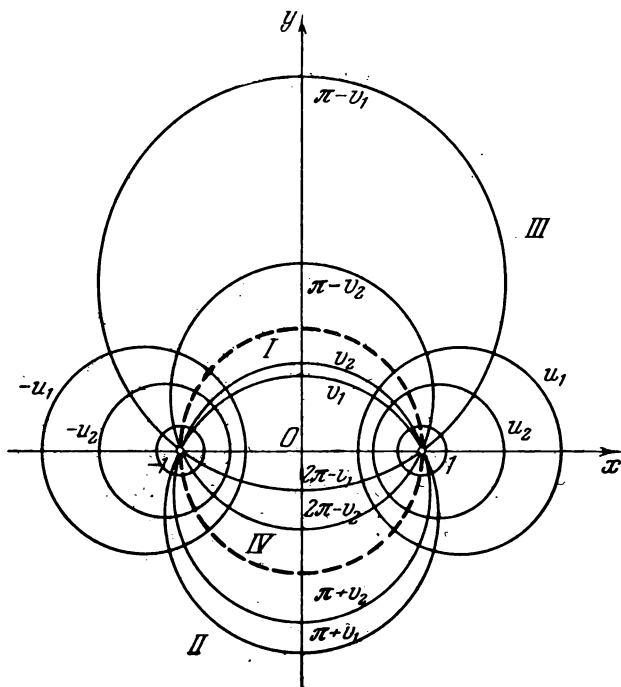
Для ds и $d\sigma$ получаем выражения:

$$ds = 2\sqrt{u^2 + v^2} \sqrt{du^2 + dv^2}, \quad d\sigma = 4(u^2 + v^2) du dv.$$

44. Биполярные координаты. Возьмем систему

$$x = \frac{\operatorname{sh} u}{\operatorname{ch} u + \cos v}, \quad y = \frac{\sin v}{\operatorname{ch} u + \cos v}, \quad (2.18)$$

причем $-\infty < u < \infty$, $0 \leq v < 2\pi$. Криволинейные координаты u и v , определяемые этой системой, называются *биполярными*.



Черт. 18.

Координатными линиями служат две системы взаимно-ортогональных окружностей с центрами соответственно на осях Ox и Oy (черт. 18). Действительно, если $u = u_0$, $u_0 \neq 0$, то,

исключая u из двух равенств (2.18), получим:

$$(x - \operatorname{cth} u_0)^2 + y^2 = \frac{1}{\operatorname{sh}^2 u_0}, \quad (*)$$

т. е. уравнение окружности с центром в точке $(\operatorname{cth} u_0, 0)$ и радиусом, равным $\frac{1}{|\operatorname{sh} u_0|}$. С увеличением u_0 от $-\infty$ до нуля и от нуля до $+\infty$ переменная окружность $(*)$ выметет всю плоскость Oxy .

Если $v = v_0$, $v_0 \neq 0$, то, исключая u из двух равенств (2.18), получим:

$$x^2 + (y + \operatorname{ctg} v_0)^2 = \frac{1}{\sin^2 v_0}, \quad (**)$$

т. е. уравнение окружности с центром в точке $(0, -\operatorname{ctg} v_0)$ и радиусом, равным $\frac{1}{|\sin v_0|}$. (Всякая такая окружность проходит через точки $(-1, 0)$ и $(1, 0)$.)

С увеличением v_0 от 0 до 2π переменная окружность $(**)$ два раза выметет всю плоскость Oxy . В самом деле, при изменении v_0 от 0 до $\frac{\pi}{2}$ окружность $(**)$ пройдет через любую точку верхней полуплоскости, лежащую внутри единичной окружности $x^2 + y^2 = 1$ (область I), и через любую точку нижней полуплоскости, лежащую вне единичной окружности (область II); то же самое произойдет при изменении v_0 от π до $3 \cdot \frac{\pi}{2}$. При изменении v_0 от

$\frac{\pi}{2}$ до π и от $3 \cdot \frac{\pi}{2}$ до 2π окружность $(**)$ пройдет через любую точку верхней полуплоскости Oxy , лежащую вне единичной окружности (область III) и через любую точку нижней полуплоскости, лежащую внутри единичной окружности (область IV). Но приписывая $*$) частям окружности $(**)$, принадлежащим указанным областям I, II, III, IV, соответственно индексы v_0 , $\pi + v_0$, $\pi - v_0$, $2\pi - v_0$, $0 < v_0 \leq \frac{\pi}{2}$ (черт. 18), мы получим систему криволиней-

ных координат (биполярных) (2.18), в которой каждой точке плоскости Oxy , лишенной интервала $[-1, 1]$ оси Ox , соответствует единственная пара чисел u и v , и обратно. Что касается точек интервала $[-1, 1]$, то координата u для каждой из них (кроме граничных) имеет вполне определенное значение (при $x \rightarrow -1$ $u \rightarrow -\infty$, а при $x \rightarrow 1$ $u \rightarrow +\infty$), а координата v стремится к 0 или к 2π в зависимости от того, из верхней или из нижней полуплоскости происходит приближение к данной точке. Биполярная координата v как функция точки на плоскости Oxy разрывна на интервале $[-1, 1]$ оси Ox : при переходе точки $P(x, y)$ через этот интервал функция получает приращение, равное 2π .

$*$) См. стр. 105 и 107.

Система функций (2.18) гомеоморфно отображает всю плоскость Oxu , из которой удален интервал $[-1, 1]$ оси Ox , в область плоскости Ouv , являющуюся бесконечной полосой, ограниченной прямыми: $v=0$, $v=2\pi$. При этом, в силу соображений непрерывности, можно сказать, что верхняя сторона указанного интервала отображается в прямую $v=0$, а его нижняя сторона — в прямую $v=2\pi$.

Проверка ортогональности системы биполярных координат дает:

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial u} &= \frac{1 + \operatorname{ch} u \cos v}{(\operatorname{ch} u + \cos v)^2}, & \frac{\partial x}{\partial v} &= \frac{\operatorname{sh} u \sin v}{(\operatorname{ch} u + \cos v)^2}; \\ \frac{\partial y}{\partial u} &= -\frac{\operatorname{sh} u \sin v}{(\operatorname{ch} u + \cos v)^2}, & \frac{\partial y}{\partial v} &= \frac{1 + \operatorname{ch} u \cos v}{(\operatorname{ch} u + \cos v)^2},\end{aligned}$$

откуда

$$S \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right) = 0.$$

Отображение (2.18) — регулярное.

Вычислим величины l и h для биполярных координат:

$$\begin{aligned}l_u &= \sqrt{\frac{(1 + \operatorname{ch} u \cos v)^2 + \operatorname{sh}^2 u \sin^2 v}{(\operatorname{ch} u + \cos v)^4}} = \frac{\operatorname{ch} u + \cos v}{(\operatorname{ch} u + \cos v)^2} = \\ &= \frac{1}{\operatorname{ch} u + \cos v}, \\ l_v &= \sqrt{\frac{\operatorname{sh}^2 u \sin^2 v + (1 + \operatorname{ch} u \cos v)^2}{(\operatorname{ch} u + \cos v)^4}} = \frac{1}{\operatorname{ch} u + \cos v}\end{aligned}$$

и, значит,

$$h_u = h_v = \operatorname{ch} u + \cos v.$$

Находим выражения для ds и $d\sigma$:

$$ds = \frac{1}{\operatorname{ch} u + \cos v} \sqrt{du^2 + dv^2}, \quad d\sigma = \frac{1}{(\operatorname{ch} u + \cos v)^2} du dv.$$

§ 6. ПРОСТРАНСТВЕННЫЙ СЛУЧАЙ

45. Определения. Координатные поверхности и линии.

Возьмем отображение

$$u = f(x, y, z), \quad v = g(x, y, z), \quad w = h(x, y, z), \quad (2.19)$$

гомеоморфное в некоторой области \mathcal{B} пространства $Oxyz$, и какую-нибудь ее точку $P_0(x_0, y_0, z_0)$; пусть образом этой точки служит точка $Q_0(u_0, v_0, w_0)$, а образом области \mathcal{B} — область \mathcal{Q} пространства $Ouvw$. Так как каждой точке Q_0 области \mathcal{Q} соответствует единственная точка P_0 , то числа u_0 , v_0 , w_0 (прямоугольные декартовы

координаты точки Q_0) совместно с системой (2.19) точно указывают положение точки P_0 в области \mathcal{B} . Числа u_0, v_0, w_0 и называются криволинейными координатами точки P_0 .

Определение. Криволинейными координатами точки P , имеющей в качестве прямоугольных декартовых координат числа x, y, z , называются прямоугольные декартовы координаты u, v, w точки Q — образа точки P — при отображении (2.19) (гомеоморфном в некоторой области \mathcal{B}).

Числа u, v, w мы вправе назвать координатами точки P (в области \mathcal{B}), потому что по заданной точке P можно из формул (2.19) найти соответствующие ей единственные значения u, v, w и, наоборот, по заданным числам u, v, w можно найти соответствующую им единственную точку P (например, предварительно найдя по u, v, w из формул (2.19) единственные значения x, y, z — прямоугольные координаты точки P^*). Поэтому точку P можно обозначить так: $P(u, v, w)$.

Определение. Множество точек области \mathcal{B} , имеющих одну из своих криволинейных координат постоянной ($u = \text{const}$ или $v = \text{const}$, или $w = \text{const}$), называется координатной поверхностью в данной системе криволинейных координат, а множество точек области \mathcal{B} , имеющих две из своих криволинейных координат постоянными ($u = \text{const}$ и $v = \text{const}$, или $u = \text{const}$ и $w = \text{const}$, или $v = \text{const}$ и $w = \text{const}$), называется координатной линией в данной системе криволинейных координат.

Координатные поверхности $u = u_0, v = v_0, w = w_0$ в пространстве $Oxyz$ определяются соответственно уравнениями:

$$f(x, y, z) = u_0, \quad g(x, y, z) = v_0, \quad h(x, y, z) = w_0;$$

координатные же линии $u = u_0, v = v_0; u = u_0, w = w_0; v = v_0, w = w_0$ являются пересечениями соответствующих координатных поверхностей и определяются такими системами уравнений:

$$\begin{cases} f(x, y, z) = u_0, \\ g(x, y, z) = v_0, \end{cases} \quad \begin{cases} f(x, y, z) = u_0, \\ h(x, y, z) = w_0, \end{cases} \quad \begin{cases} g(x, y, z) = v_0, \\ h(x, y, z) = w_0. \end{cases}$$

*) См. подстрочное примечание на стр. 79 и ниже § 8.

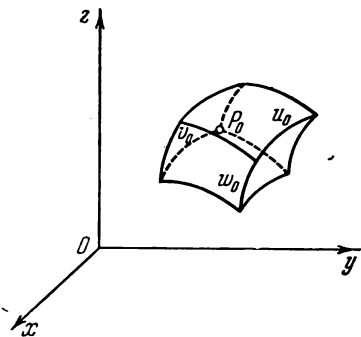
Совершенно ясно, что координатные поверхности (2.19) в данной системе это не что иное, как поверхности уровня (II, 143) соответствующей функции.

Координатными поверхностями (линиями) служат, вообще говоря, кривые поверхности (линии), но в частном случае аффинного отображения (п° 29) они — плоскости (прямые); в заданной декартовой прямоугольной системе $Oxyz$ координатные поверхности суть плоскости, параллельные плоскостям Oyz , Oxz , Oxy , а именно: $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$; координатные линии суть прямые, параллельные осям Oz , Oy , Ox , а именно: $x = x_0$, $y = y_0$; $x = x_0$, $z = z_0$; $y = y_0$, $z = z_0$.

Координатные поверхности криволинейной системы координат в пространстве $Oxyz$ являются отображениями плоскостей $u = u_0$, $v = v_0$, $w = w_0$, параллельных плоскостям Ovw , Ouw , Ouv , т. е. координатных поверхностей прямоугольной системы координат в пространстве $Ouvw$, а координатные линии — отображения прямых $u = u_0$, $v = v_0$; $u = u_0$, $w = w_0$; $v = v_0$, $w = w_0$, параллельных осям Ow , Ov , Ou , т. е. координатных линий прямоугольной системы координат в пространстве $Ouvw$.

При различных значениях u_0 , v_0 и w_0 (таких, что соответствующая точка P_0 не выходит из области δ) образуются три системы координатных поверхностей, покрывающих область δ и разбивающих ее на кривые шестигранники (черт. 19); если функции (2.19) линейные (отображение аффинное), то эти шестигранники — параллелепипеды.

Каждая из координатных поверхностей отмечена числом u_0 или v_0 , или w_0 , указывающим постоянное значение, которое имеет на этой поверхности функция $u = f(x, y, z)$ или $v = g(x, y, z)$, или $w = h(x, y, z)$. Эти числа и являются криволинейными координатами точки, лежащей на пересечении соответствующих координатных поверхностей (или линий) (черт. 19).



Черт. 19.

И здесь можно дать определение, аналогичное определениям в линейном и в плоском случаях (п°п° 32, 33).

Определение. Область в пространстве $Oxyz$, точки которой отмечены их криволинейными координатами $u = f(x, y, z)$, $v = g(x, y, z)$, $w = h(x, y, z)$, называется функциональной шкалой для обратной системы функций $x = \varphi(u, v, w)$, $y = \psi(u, v, w)$, $z = \chi(u, v, w)$.

По функциональной шкале значения аргументов u, v, w прямо прочитываются, а соответствующие значения функций $x = \varphi(u, v, w)$, $y = \psi(u, v, w)$, $z = \chi(u, v, w)$ находятся при помощи измерений расстояний этой точки от плоскостей координат Oyz , Oxz , Oxy .

В некоторых случаях криволинейные координаты в пространстве имеют простой и наглядный геометрический смысл (см. ниже § 8).

Итак, в первой изложенной нами интерпретации системы функций (2.19):

$$u = f(x, y, z), \quad v = g(x, y, z), \quad w = h(x, y, z)$$

(см. гл. I), величины u, v и w (подобно величинам x, y и z) рассматриваются в качестве прямолинейных (и прямоугольных) координат. При этом равенства (2.19) являются формулами отображения заданной области в новую область. Во второй описанной только что интерпретации величины u, v и w рассматриваются в качестве новых криволинейных координат точки, имеющей своими прямолинейными координатами величины x, y и z . При этом равенства (2.19) являются формулами преобразования (замены) заданной системы координат в новую систему.

Коротко скажем, что на равенства (2.19) можно смотреть либо как на формулы, преобразующие область при одной и той же системе координат (декартовой прямоугольной), либо как на формулы, преобразующие систему координат в одной и той же области*).

Иногда могут быть одновременно употреблены обе указанные интерпретации.

*) Нужно помнить, что система функций (2.19) должна быть в заданной области однозначно обратимой.

46. Ортогональность системы. В том случае, когда всякие две координатные поверхности (линии) из различных систем пересекаются под прямым углом, система криволинейных координат в пространстве называется *прямоугольной* или *ортогональной*. (Криволинейные ортогональные координаты иногда обозначают буквами q_1, q_2, q_3 или h_1, h_2, h_3 или α, β, γ .) Обычно употребляются лишь ортогональные системы криволинейных координат.

Выведем условия ортогональности системы (2.19) и затронем некоторые метрические вопросы, в частности найдем выражения для элемента длины, элемента площади поверхности и элемента объема в криволинейных ортогональных координатах. Эти выражения могут часто понадобиться в дальнейшем.

Возьмем точку $P_0(x_0, y_0, z_0)$ с криволинейными координатами u_0, v_0, w_0 . Уравнение касательной плоскости к координатной поверхности $u = u_0$, очевидно, есть (II, 166)

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{P_0} (x - x_0) + \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{P_0} (y - y_0) + \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{P_0} (z - z_0) = 0. \quad (*)$$

Аналогично уравнения

$$\left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{P_0} (x - x_0) + \left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_{P_0} (y - y_0) + \left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{P_0} (z - z_0) = 0, \quad (**)$$

$$\left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{P_0} (x - x_0) + \left. \frac{\partial w}{\partial y} \right|_{P_0} (y - y_0) + \left. \frac{\partial w}{\partial z} \right|_{P_0} (z - z_0) = 0 \quad (***)$$

суть уравнения касательных плоскостей в точке P_0 соответственно к координатным поверхностям: $u = u_0, v = v_0, w = w_0$. Имея эти уравнения, легко получаем условия (считая точку P_0 произвольной) взаимной (попарной) перпендикулярности касательных плоскостей (т. е. ортогональности системы):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

(см., например, И. И. Привалов, Аналитическая геометрия). Эти равенства удобно записать с помощью символа \mathbf{S} :

$$\mathbf{S}\left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0, \quad \mathbf{S}\left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x}\right) = 0, \quad \mathbf{S}\left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x}\right) = 0, \quad (2.20)$$

обозначающего здесь сумму трех слагаемых: выражения, заключенного в скобки, и подобных ему, получающихся заменой x сначала на y , а затем на z .

Однако нам удобно иметь условия ортогональности системы и в другом виде, отличном от вида условий (2.20). Для этого будем исходить не из системы функций (2.19), а из системы функций обратной ей:

$$x = \varphi(u, v, w), \quad y = \psi(u, v, w), \quad z = \chi(u, v, w). \quad (2.19')$$

Считая в равенствах (2.19') $u = u_0$ или $v = v_0$, или $w = w_0$, получим параметрические уравнения соответствующих координатных поверхностей, а полагая $u = u_0$, $v = v_0$, или $u = u_0$, $w = w_0$, или $v = v_0$, $w = w_0$, получим параметрические уравнения соответствующих координатных линий, проходящих через точку $P_0(x_0, y_0, z_0)$.

Уравнения касательной прямой к линии $v = v_0$, $w = w_0$ в точке P_0 таковы:

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial x}{\partial u} \Big|_{P_0}} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial y}{\partial u} \Big|_{P_0}} = \frac{z - z_0}{\frac{\partial z}{\partial u} \Big|_{P_0}}.$$

Написав еще аналогичные уравнения касательных прямых к координатным линиям $u = u_0$, $w = w_0$ и $u = u_0$, $v = v_0$ в точке P_0 , найдем условия взаимной (попарной) перпендикулярности координатных линий (считая точку P_0 произвольной):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} &= 0, \text{ т. е. } \mathbf{S}\left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v}\right) = 0, \\ \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial w} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial w} &= 0, \text{ т. е. } \mathbf{S}\left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial w}\right) = 0, \\ \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial w} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial w} &= 0, \text{ т. е. } \mathbf{S}\left(\frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial w}\right) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.21)$$

47. Коэффициенты Ламе. В различных вопросах, связанных с криволинейными координатами в пространстве, имеют большое значение следующие величины:

$$\left. \begin{aligned} L_u &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2} = \sqrt{S\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2}, \\ L_v &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2} = \sqrt{S\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2}, \\ L_w &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^2} = \sqrt{S\left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)^2}, \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

называемые *коэффициентами Ламе* системы криволинейных координат (2.19), и

$$\left. \begin{aligned} H_u &= \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2} = \sqrt{S\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}, \\ H_v &= \sqrt{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2} = \sqrt{S\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2}, \\ H_w &= \sqrt{\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2} = \sqrt{S\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2}, \end{aligned} \right\} \quad (2.23)$$

называемые *дифференциальными параметрами 1-го порядка* *) системы криволинейных координат (2.19).

Следующая теорема дает простые соотношения между введенными сейчас величинами — важными характеристиками системы криволинейных ортогональных координат в пространстве.

Теорема. Коэффициенты Ламе системы ортогональных координат в пространстве обратны по величине соответствующим дифференциальным параметрам 1-го порядка:

$$L_u = \frac{1}{H_u}, \quad L_v = \frac{1}{H_v}, \quad L_w = \frac{1}{H_w}. \quad (2.24)$$

*) Для коэффициентов Ламе и дифференциальных параметров 1-го порядка в существующей литературе употребляются разнообразные обозначения. Мы везде используем для первых — символ l (на плоскости), символ L (в пространстве), для вторых — символ h (на плоскости), символ H (в пространстве) с соответствующими индексами

Доказательство. Дифференцируя функцию (2,19') по x , найдем:

$$1 = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x},$$

$$0 = \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x},$$

$$0 = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x}.$$

Умножая первое из этих равенств на $\frac{\partial x}{\partial u}$, второе — на $\frac{\partial y}{\partial u}$, третье — на $\frac{\partial z}{\partial u}$ и складывая, получим:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial u}{\partial x} S \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \frac{\partial v}{\partial x} S \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial w}{\partial x} S \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial w}{\partial x} \right),$$

что, в силу первого и второго из равенств (2.21), дает:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial u}{\partial x} L_u^2.$$

Аналогично

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial u}{\partial y} L_u^2, \quad \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial u}{\partial z} L_u^2.$$

Возводя все эти равенства почленно в квадрат и складывая, находим:

$$L_u^2 = H_u^2 L_u^4, \quad \text{т. е.} \quad L_u H_u = 1.$$

Таким же образом доказываются и два других из соотношений (2.24):

$$L_v H_v = 1, \quad L_w H_w = 1.$$

§ 7. ЭЛЕМЕНТЫ ДЛИНЫ, ОБЪЕМА И ПЛОЩАДИ ПОВЕРХНОСТИ

48. Элемент длины. Определение элемента (дифференциала) длины пространственной линии L вполне аналогично определению, данному для плоской линии l (см. п° 36).

Теорема. Для элемента длины ds в системе криволинейных ортогональных координат u, v, w в простран-

стве имеем выражения

$$ds = \sqrt{L_u^2 du^2 + L_v^2 dv^2 + L_w^2 dw^2} = \\ = \sqrt{\frac{1}{H_u^2} du^2 + \frac{1}{H_v^2} dv^2 + \frac{1}{H_w^2} dw^2}. \quad (2.25)$$

Доказательство. Для элемента длины ds в декартовых координатах мы имеем (II, 164):

$$ds = \sqrt{x'^2(\xi) + y'^2(\xi) + z'^2(\xi)} d\xi,$$

где ξ — параметр линии или криволинейная координата ее точек. Так как

$$x'(\xi) = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{du}{d\xi} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{dv}{d\xi} + \frac{\partial x}{\partial w} \frac{dw}{d\xi},$$

$$y'(\xi) = \frac{\partial y}{\partial u} \frac{du}{d\xi} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{dv}{d\xi} + \frac{\partial y}{\partial w} \frac{dw}{d\xi},$$

$$z'(\xi) = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{du}{d\xi} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{d\xi} + \frac{\partial z}{\partial w} \frac{dw}{d\xi},$$

то

$$ds^2 = S \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{du}{d\xi} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{dv}{d\xi} + \frac{\partial x}{\partial w} \frac{dw}{d\xi} \right)^2 d\xi^2 = \\ = S \left[\left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 \left(\frac{du}{d\xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 \left(\frac{dv}{d\xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial w} \right)^2 \left(\frac{dw}{d\xi} \right)^2 + \right. \\ \left. + 2 \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \frac{du}{d\xi} \frac{dv}{d\xi} + \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial w} \frac{du}{d\xi} \frac{dw}{d\xi} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial w} \frac{dv}{d\xi} \frac{dw}{d\xi} \right) \right] d\xi^2 = \\ = \left\{ S \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 \left(\frac{du}{d\xi} \right)^2 + S \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 \left(\frac{dv}{d\xi} \right)^2 + S \left(\frac{\partial x}{\partial w} \right)^2 \left(\frac{dw}{d\xi} \right)^2 + \right. \\ \left. + 2 \left[S \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right) \frac{du}{d\xi} \frac{dv}{d\xi} + S \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial w} \right) \frac{du}{d\xi} \frac{dw}{d\xi} + S \left(\frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial w} \right) \frac{dv}{d\xi} \frac{dw}{d\xi} \right] \right\} d\xi^2;$$

отсюда для ортогональной системы, в силу равенств (2.21) и принятых обозначений (2.22), находим:

$$ds = \sqrt{L_u^2 du^2 + L_v^2 dv^2 + L_w^2 dw^2},$$

ч. т. д.

Для элементов длины ds_u , ds_v , ds_w координатных линий $v = v_0$, $w = w_0$; $u = u_0$, $w = w_0$; $u = u_0$, $v = v_0$ получаем соответственно выражения:

$$ds_u = L_u du, ds_v = L_v dv, ds_w = L_w dw.$$

49. Элемент объема.

Определение. Элементом (дифференциалом) объема $d\omega$ в системе криволинейных ортогональных координат u, v, w области \mathcal{B} в ее точке $P_0(u_0, v_0, w_0)$ называется объем прямого прямоугольного параллелепипеда, ребра которого равны элементам ребер криволинейного шестигранника, ограниченного координатными поверхностями: $u = u_0$, $u = u_0 + du$; $v = v_0$, $v = v_0 + dv$; $w = w_0$, $w = w_0 + dw$ (*), исходящих из точки $P_0(u_0, v_0, w_0)$ (черт. 19).

Теорема. Для элемента объема $d\omega$ в системе криволинейных ортогональных координат u, v, w в пространстве имеем выражения:

$$d\omega = L_u L_v L_w du dv dw = \frac{1}{H_u H_v H_w} du dv dw. \quad (2.26)$$

Доказательство. Мы найдем $d\omega$, если примем указанный в определении шестигранник за прямой прямоугольный параллелепипед с ребрами ds_u , ds_v и ds_w . При этом получим:

$$d\omega = ds_u ds_v ds_w = L_u L_v L_w du dv dw,$$

ч. т. д.

Впрочем, нетрудно найти выражение для $d\omega$ и иначе, без предварительного отыскания элементов длины. Рассмотренный бесконечно малый шестигранник в пространстве $Oxyz$ является образом бесконечно малого параллелепипеда в пространстве $Ouvw$, ограниченного плоскостями: $u = u_0$, $u = u_0 + du$; $v = v_0$, $v = v_0 + dv$; $w = w_0$, $w = w_0 + dw$.

*) Таким образом, считая, что объем обладает свойством аддитивности, мы, в силу формулы Ньютона — Лейбница (см. 81, IV), устанавливаем понятие объема всей области.

Значит (см. п° 29), полагая точку P_0 произвольной, найдем:

$$d\omega = |I| du dv d\omega^*),$$

где

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

Для вычисления этого якобиана представим его квадрат по известным правилам умножения определителей:

$$\begin{aligned} I^2 &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} S\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 & S\left(\frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u}\right) & S\left(\frac{\partial x}{\partial w} \frac{\partial x}{\partial u}\right) \\ S\left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v}\right) & S\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 & S\left(\frac{\partial x}{\partial w} \frac{\partial x}{\partial v}\right) \\ S\left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial w}\right) & S\left(\frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial w}\right) & S\left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)^2 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

В силу условий ортогональности имеем:

$$I^2 = \begin{vmatrix} L_u^2 & 0 & 0 \\ 0 & L_v^2 & 0 \\ 0 & 0 & L_w^2 \end{vmatrix} = (L_u L_v L_w)^2,$$

т. е. $|I| = L_u L_v L_w$, а это и приводит к формуле (2.26).

50. Другой вывод. Так же как и в плоском случае, приведем иной ход рассуждений, минуя предварительное выяснение связи между величинами L и H . Прежде всего, исходя из условий ортогональности (2.20), находим выражение для элемента длины ds

*) Выражение $|I| du dv d\omega$ принимается вообще в качестве элемента объема в системе криволинейных координат u, v, w независимо от того, является эта система ортогональной или нет.

Достигается это так. Проекции на оси Ox , Oy , Oz нормального вектора n_{u_0} к координатной поверхности $u = u_0$ в точке P_0 (т. е. к плоскости $(*)$) равны соответственно $\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{P_0}$, $\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{P_0}$, $\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{P_0}$ и, значит, считая точку P_0 произвольной, получим следующие выражения для направляющих косинусов нормали:

$$\begin{aligned} \cos(n_u, x) &= \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}}, \\ \cos(n_u, y) &= \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}}, \\ \cos(n_u, z) &= \frac{\frac{\partial u}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}}. \end{aligned}$$

В обозначениях (2.23) эти равенства примут вид:

$$\cos(n_u, x) = \frac{1}{H_u} \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \cos(n_u, y) = \frac{1}{H_u} \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \cos(n_u, z) = \frac{1}{H_u} \frac{\partial u}{\partial z}$$

и аналогично

$$\begin{aligned} \cos(n_v, x) &= \frac{1}{H_v} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \cos(n_v, y) = \frac{1}{H_v} \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \cos(n_v, z) = \frac{1}{H_v} \frac{\partial v}{\partial z}, \\ \cos(n_w, x) &= \frac{1}{H_w} \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \cos(n_w, y) = \frac{1}{H_w} \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \cos(n_w, z) = \frac{1}{H_w} \frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned}$$

Теперь возьмем от функции $u = f(x, y, z)$ производную $\frac{\partial u}{\partial n_u}$ по направлению нормали n_u к ее поверхности уровня $u = u_0$. Имеем (II, 148):

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial n_u} &= \frac{\partial u}{\partial x} \cos(n_u, x) + \frac{\partial u}{\partial y} \cos(n_u, y) + \frac{\partial u}{\partial z} \cos(n_u, z) = \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{1}{H_u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{1}{H_u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{1}{H_u} \frac{\partial u}{\partial z} = \\ &= \frac{1}{H_u} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right], \end{aligned}$$

т. е.

$$\frac{\partial u}{\partial n_u} = \frac{1}{H_u} H_u^2 = H_u.$$

Аналогично получим:

$$\frac{\partial v}{\partial n_v} = H_v, \quad \frac{\partial w}{\partial n_w} = H_w.$$

Из этих соотношений следует (см. п° 37), что расстояние dn_u (или dn_v , или dn_w) между бесконечно близкими координатными поверхностями $u = \text{const}$ (или $v = \text{const}$, или $w = \text{const}$) равно:

$$dn_u = \frac{1}{H_u} du \text{ (или соответственно } dn_v = \frac{1}{H_v} dv, dn_w = \frac{1}{H_w} dw \text{)}.$$

Выпишем подробно выражение, например, для dn_u :

$$\begin{aligned} dn_u &= \frac{1}{H_u} du = \frac{1}{H_u} \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{1}{H_u} \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{1}{H_u} \frac{\partial u}{\partial z} dz = \\ &= \cos(n_u, x) dx + \cos(n_u, y) dy + \cos(n_u, z) dz. \end{aligned}$$

Так как $\cos(n_u, x)$, $\cos(n_u, y)$, $\cos(n_u, z)$ суть проекции на оси Ox , Oy , Oz единичного нормального вектора, а dx , dy , dz — проекции на те же оси вектора касательной к дуге длиной ds , то на основании свойств скалярного произведения заключаем, что dn_u есть проекция на направление нормали n_u того же касательного вектора. Аналогично dn_v и dn_w суть проекции этого вектора на нормали n_v и n_w . Из этого, а также из взаимной (попарной) ортогональности векторов n_u , n_v , n_w вытекает, что

$$ds^2 = dn_u^2 + dn_v^2 + dn_w^2 = \frac{1}{H_u^2} du^2 + \frac{1}{H_v^2} dv^2 + \frac{1}{H_w^2} dw^2.$$

С другой стороны, исходя из условий ортогональности (2.21), как и выше (стр. 119) находим другое представление ds^2 :

$$ds^2 = L_u^2 du^2 + L_v^2 dv^2 + L_w^2 dw^2.$$

Сравнивая теперь два полученных выражения для ds^2 , обнаруживаем связь между величинами L и H и независимо от этого находим выражение для элемента объема $d\omega$.

51. Элемент площади поверхности. Направляющие косинусы нормали. Пусть поверхность S в пространстве $Oxyz$ задана параметрическими уравнениями:

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v), \quad (2.27)$$

где параметры u , v можно считать либо прямоугольными координатами точки в некоторой области Δ , отображаемой системой (2.27) на рассматриваемую поверхность S , либо криволинейными координатами точек поверхности S (см. п° п° 28 и 33). Функции x , y , z предполагаются, как всегда, непрерывно дифференцируемыми в области Δ . Возьмем точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ поверхности и обозначим через (n, x) , (n, y) ,

(n, z) углы, образованные направленной нормалью к поверхности S в точке M_0 соответственно с осями Ox , Oy , Oz . Заметим теперь, что уравнением касательной плоскости к поверхности S в точке M_0 служит уравнение *)

$$\left. \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \right|_{P_0} (x - x_0) + \left. \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \right|_{P_0} (y - y_0) + \left. \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|_{P_0} (z - z_0) = 0, \quad (2.28)$$

где точка $P_0(u_0, z_0)$ — прообраз точки M_0 в области Δ . Так как коэффициенты уравнения (2.28) являются проекциями вектора, нормального к плоскости (2.28), то (см., например, И. И. Привалов, Аналитическая геометрия), имеем такие выражения для направляющих косинусов этого вектора:

$$\left. \begin{aligned} \cos(n, x) &= \frac{\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}}{\sqrt{\left[\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right]^2}}, \\ \cos(n, y) &= \frac{\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}}{\sqrt{\left[\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right]^2}}, \\ \cos(n, z) &= \frac{\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}}{\sqrt{\left[\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right]^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (2.29)$$

*) Это уравнение можно вывести по-разному. Поступим так: если уравнение поверхности S записать в виде: $F(x, y, z) = 0$, то уравнением касательной плоскости будет (II, 166):

$$\left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{M_0} (x - x_0) + \left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_{M_0} (y - y_0) + \left. \frac{\partial F}{\partial z} \right|_{M_0} (z - z_0) = 0. \quad (*)$$

Функции (2.27) тождественно удовлетворяют уравнению $F = 0$; поэтому имеем два соотношения:

$$\left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{M_0} \left. \frac{\partial x}{\partial u} \right|_{M_0} + \left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_{M_0} \left. \frac{\partial y}{\partial u} \right|_{M_0} + \left. \frac{\partial F}{\partial z} \right|_{M_0} \left. \frac{\partial z}{\partial u} \right|_{M_0} = 0,$$

$$\left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{M_0} \left. \frac{\partial x}{\partial v} \right|_{M_0} + \left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_{M_0} \left. \frac{\partial y}{\partial v} \right|_{M_0} + \left. \frac{\partial F}{\partial z} \right|_{M_0} \left. \frac{\partial z}{\partial v} \right|_{M_0} = 0.$$

Выражая из этих соотношений, например, $\left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{M_0}$ и $\left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_{M_0}$ и подставляя их в уравнение (*), мы и получим уравнение (2.28).

Мы отбросили индекс (P_0), подчеркивая этим, что введенные формулы относятся к произвольной точке поверхности. Выбор знака перед радикалом означает выбор определенного направления нормалей к поверхности S и, значит, определенной стороны этой поверхности, ибо она предполагается двусторонней (см. п° 94).

Определение. Элементом (дифференциалом) площади dq поверхности S в ее точке M_0 называется площадь части плоскости, касательной к поверхности в точке M_0 , причем эта часть соответствует бесконечно малой части поверхности S , содержащей точку M_0 *). (Соответствующие друг другу части поверхности и касательной к ней плоскости ортогонально проектируются в одну и ту же область плоскости Oxy или Oxz , или Oyz .)

Теорема. Для элемента площади dq поверхности в системе криволинейных координат u, v на этой поверхности имеем выражения:

$$dq = \sqrt{EG - F^2} du dv = \sqrt{d\sigma_{xy}^2 + d\sigma_{xz}^2 + d\sigma_{yz}^2}, \quad (2.30)$$

где

$$\left. \begin{aligned} E &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = S \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2, \\ F &= \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} = S \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v}\right), \\ G &= \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = S \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2, \end{aligned} \right\} \quad (2.31)$$

а $d\sigma_{xy}$, $d\sigma_{xz}$, $d\sigma_{yz}$ — элементы площади в соответствующих координатных плоскостях.

Доказательство. Пусть дана произвольная точка M поверхности S . Возьмем такую содержащую точку M часть поверхности, чтобы она проектировалась на координатную плоскость, например Oxy , в область, площадь которой равна элементу площади $d\sigma_{xy}$. Очевидно мы имеем:

$$d\sigma_{xy} = dq |\cos(n, z)|.$$

*) Таким образом, считая, что площадь обладает свойством аддитивности, мы, в силу теоремы Ньютона — Лейбница (см. п° 81, IV), устанавливаем понятие площади всей поверхности.

Так как (n° 36)

$$d\sigma_{xy} = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv,$$

а $\cos(n, z)$ выражается по формуле (2.29), то

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv = \frac{\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|}{\sqrt{\left[\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \right]^2 + \left[\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \right]^2 + \left[\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right]^2}} dq.$$

причем здесь предполагается, что радикал снабжен знаком $+$. Отсюда находим:

$$dq = \sqrt{\left[\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \right]^2 + \left[\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \right]^2 + \left[\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right]^2} du dv. \quad (2.32)$$

Преобразуем выражение (2.32). Раскрывая якобианы под радикалом, получим:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \right]^2 + \left[\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \right]^2 + \left[\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right]^2 &= \left(\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial u} \right)^2 + \\ &+ \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} \right)^2 + \\ &+ \left(\frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 - \\ &- 2 \left(\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} + \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} + \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} \right) = EG - F^2, \end{aligned}$$

если положить

$$E = S \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2, \quad F = S \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right), \quad G = S \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2. \quad (2.31)$$

Итак

$$dq = \sqrt{EG - F^2} du dv. \quad (2.30)$$

Это и есть обычно употребляемая *общая форма элемента площади поверхности в криволинейных координатах u, v на поверхности.*

Величины E, G, F называются *коэффициентами Гаусса* *) поверхности S в данной системе криволинейных координат u, v .

*) К. Гаусс (1777—1855) — выдающийся немецкий математик.

Заметим, что

$$E = \frac{1}{2} [l_u^2(x, y) + l_u^2(x, z) + l_u^2(y, z)],$$

$$G = \frac{1}{2} [l_v^2(x, y) + l_v^2(x, z) + l_v^2(y, z)],$$

где через $l(x, y)$, $l(x, z)$, $l(y, z)$ обозначены коэффициенты Ламе системы криволинейных координат u, v соответственно в плоскостях Oxy , Oxz , Oyz , причем индекс, как принято нами, указывает криволинейную координату (u или v), относительно которой берется коэффициент Ламе (см. н° 35). Если каждая пара из соотношений (2.27) определяет ортогональную систему криволинейных координат в соответствующей плоскости, то, как легко проверить, $F = 0$. Это соотношение является необходимым и достаточным условием того, что координатные линии на поверхности S $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$ образуют ортогональную сеть, т. е. что данная система ортогональных координат на поверхности S ортогональна.

Отметим, что элемент длины ds линии на поверхности S , заданной своими уравнениями (2.27), записывается так:

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{S \left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \right)^2} = \\ &= \sqrt{E du^2 + 2F du dv + G dv^2}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Подрадикальное выражение называется *первой дифференциальной формой Гаусса*.

Остановимся на важном частном случае, когда параметрами u и v являются сами декартовы координаты, например x и y , и, следовательно, когда уравнением поверхности S служит одно уравнение между координатами x , y и z , разрешенное относительно z . Тогда

$$\begin{aligned} E &= 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2, \quad F = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y}, \quad G = 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2, \\ EG - F^2 &= 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \end{aligned}$$

и, значит,

$$dq = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2} dx dy. \quad (2.30^*)$$

Между прочим, формулы (2.29) для направляющих косинусов нормали в этом частном случае приобретают вид:

$$\left. \begin{aligned} \cos(n, x) &= \frac{-\frac{\partial z}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}, \\ \cos(n, y) &= \frac{-\frac{\partial z}{\partial y}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}, \\ \cos(n, z) &= \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (2.29')$$

Придадим элементу площади поверхности еще другой, легко запоминаемый вид, отличный от вида выражения (2.30). Именно в формуле (2.32) внесем выражение $du dv$ под радикал; получим:

$$dq = \sqrt{\left[\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} du dv\right]^2 + \left[\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} du dv\right]^2 + \left[\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du dv\right]^2}$$

или, записывая слагаемые под радикалом в другом порядке,

$$dq = \sqrt{d\sigma_{xy}^2 + d\sigma_{xz}^2 + d\sigma_{yz}^2}. \quad (2.30')$$

В частности,

$$dq = \sqrt{(dx dy)^2 + (dx dz)^2 + (dy dz)^2}. \quad (2.30'')$$

Общую формулу (2.30') можно представить себе весьма просто полученной следующим образом. Области с площадью dq в касательной плоскости к поверхности S проектируются на координатные плоскости Oxy , Oxz , Oyz в области, площади которых равны соответствующим элементам $d\sigma_{xy}$, $d\sigma_{xz}$, $d\sigma_{yz}$. Поэтому имеем:

$$d\sigma_{xy} = dq |\cos(n, z)|,$$

$$d\sigma_{xz} = dq |\cos(n, y)|,$$

$$d\sigma_{yz} = dq |\cos(n, x)|.$$

Возведя эти равенства в квадрат и складывая, придем к формуле (2.30'), ибо

$$\cos^2(n, x) + \cos^2(n, y) + \cos^2(n, z) = 1.$$

52. Элемент площади поверхности в криволинейных координатах в пространстве. Пусть теперь в область пространства $Oxyz$, в которой находится поверхность S , вводится система криволинейных ортогональных координат u, v, w с помощью равенств

$$x = \varphi(u, v, w), \quad y = \psi(u, v, w), \quad z = \chi(u, v, w). \quad (2.19')$$

Найдем выражение для элемента площади dq поверхности S в криволинейных координатах u, v, w , определяемых системой (2.19').

Теорема. Для элемента площади dq поверхности в системе криволинейных ортогональных координат u, v, w в пространстве имеем выражения:

$$\begin{aligned} dq &= \sqrt{(L_u L_v du dv)^2 + (L_u L_w du dw)^2 + (L_v L_w dv dw)^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{H_u H_v} du dv\right)^2 + \left(\frac{1}{H_u H_w} du dw\right)^2 + \left(\frac{1}{H_v H_w} dv dw\right)^2}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Доказательство. Будем исходить из выражения для элемента площади dq в декартовых координатах

$$dq = \sqrt{EG - F^2} d\xi d\eta,$$

где ξ и η — параметры поверхности или криволинейные координаты ее точек.

Найдем выражения для коэффициентов Гаусса E, G, F . Для коэффициента E получаем:

$$\begin{aligned} E &= S \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 = S \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^2 = \\ &= S \left[\left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial w} \right)^2 \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + 2 \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial w} \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial w} \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial w}{\partial \xi} \right) \right] = \\ &= S \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)^2 + S \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} \right)^2 + S \left(\frac{\partial x}{\partial w} \right)^2 \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^2 + \\ &\quad + 2 \left[S \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) + S \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial w} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial w}{\partial \xi} \right) + \right. \\ &\quad \left. + S \left(\frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial w} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial w}{\partial \xi} \right) \right], \end{aligned}$$

что для ортогональной системы, в силу равенств (2.21) и принятых обозначений (2.22), имеет вид:

$$E = L_u^2 \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)^2 + L_v^2 \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} \right)^2 + L_w^2 \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^2.$$

Для коэффициента G совершенно аналогично получаем:

$$G = L_u^2 \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^2 + L_v^2 \left(\frac{\partial v}{\partial \eta} \right)^2 + L_w^2 \left(\frac{\partial w}{\partial \eta} \right)^2.$$

Для коэффициента F находим:

$$\begin{aligned} F = S \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) &= S \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial \xi} \right) \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \eta} + \right. \\ &+ \left. \frac{\partial x}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial \eta} \right) = S \left[\left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial w} \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial w}{\partial \eta} + \right. \\ &+ \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial v}{\partial \xi} + \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial w} \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial w}{\partial \eta} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial w} \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial w}{\partial \xi} + \\ &+ \left. \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial w} \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial w}{\partial \xi} + \left(\frac{\partial x}{\partial w} \right)^2 \frac{\partial w}{\partial \xi} \frac{\partial w}{\partial \eta} \right] = S \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial \eta} + \\ &+ S \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial v}{\partial \eta} + S \left(\frac{\partial x}{\partial w} \right)^2 \frac{\partial w}{\partial \xi} \frac{\partial w}{\partial \eta} + S \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial v}{\partial \eta} + \right. \\ &+ \left. \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) + S \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial w} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial w}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial w}{\partial \xi} \right) + \\ &+ S \left(\frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial w} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial w}{\partial \eta} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial w}{\partial \xi} \right), \end{aligned}$$

что для ортогональной системы, в силу равенств (2.21) и принятых обозначений (2.22), имеет вид:

$$F = L_u^2 \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial \eta} + L_v^2 \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial v}{\partial \eta} + L_w^2 \frac{\partial w}{\partial \xi} \frac{\partial w}{\partial \eta}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} EG - F^2 &= \left[L_u^2 \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)^2 + L_v^2 \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} \right)^2 + L_w^2 \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^2 \right] \left[L_u^2 \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^2 + \right. \\ &+ \left. L_v^2 \left(\frac{\partial v}{\partial \eta} \right)^2 + L_w^2 \left(\frac{\partial w}{\partial \eta} \right)^2 \right] - \left(L_u^2 \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial \eta} + L_v^2 \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial v}{\partial \eta} + L_w^2 \frac{\partial w}{\partial \xi} \frac{\partial w}{\partial \eta} \right)^2 = \\ &= (L_u L_v)^2 \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial v}{\partial \eta} - \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial v}{\partial \xi} \right)^2 + (L_u L_w)^2 \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial w}{\partial \eta} - \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^2 + \\ &+ (L_v L_w)^2 \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial w}{\partial \eta} - \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^2, \end{aligned}$$

т. е.

$$EG - F^2 = (L_u L_v)^2 \left[\frac{\partial(u, v)}{\partial(\xi, \eta)} \right]^2 + (L_u L_w)^2 \left[\frac{\partial(u, w)}{\partial(\xi, \eta)} \right]^2 + \\ + (L_v L_w)^2 \left[\frac{\partial(v, w)}{\partial(\xi, \eta)} \right]^2$$

и, значит,

$$dq = \sqrt{EG - F^2} d\xi d\eta = \\ = \sqrt{(L_u L_v d\sigma_{uv})^2 + (L_u L_w d\sigma_{uw})^2 + (L_v L_w d\sigma_{vw})^2}, \quad (2.35)$$

ибо элементы площади $d\sigma_{uv}$, $d\sigma_{uw}$, $d\sigma_{vw}$ соответственно в плоскостях Ouv , Ouw , Ovw равны:

$$d\sigma_{uv} = \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(\xi, \eta)} \right| d\xi d\eta, \quad d\sigma_{uw} = \left| \frac{\partial(u, w)}{\partial(\xi, \eta)} \right| d\xi d\eta, \\ d\sigma_{vw} = \left| \frac{\partial(v, w)}{\partial(\xi, \eta)} \right| d\xi d\eta.$$

В частности, из формулы (2.35) и получается доказываемая формула

$$dq = \sqrt{(L_u L_v du dv)^2 + (L_u L_w du dw)^2 + (L_v L_w dv dw)^2}. \quad (2.34)$$

Если поверхность S задана уравнением между u , v , w разрешенным относительно координаты, например w , то формулу (2.34) удобно представить в виде:

$$dq = \sqrt{(L_u L_v)^2 + (L_u L_w)^2 \left(\frac{\partial w}{\partial v} \right)^2 + (L_v L_w)^2 \left(\frac{\partial w}{\partial u} \right)^2}. \quad (2.34')$$

§ 8. ВАЖНЕЙШИЕ СИСТЕМЫ КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТ В ПРОСТРАНСТВЕ

В некоторых случаях криволинейные координаты в пространстве имеют простой и наглядный геометрический смысл.

Мы приведем наиболее важные примеры криволинейных координат в пространстве. При этом во всех разбираемых далее примерах мы задаем, как и в плоском случае, систему равенств (2.19'), выражающих декартовы прямоугольные координаты точки через ее криволинейные координаты, а не систему равенств (2.19), дающих обратные зависимости. Здесь также это оказывается удобнее потому, что обычно

в задачах, где применяются криволинейные координаты, нужно знать, как выражаются именно декартовы координаты точки через ее криволинейные координаты, а не наоборот.

53. Декартовы координаты. Декартовыми координатами в пространстве вообще называются величины u , v и w , через которые данные декартовы прямоугольные координаты x , y и z выражаются так:

$$\begin{aligned}x &= a'_1 u + b'_1 v + c'_1 w + d'_1, & y &= a'_2 u + b'_2 v + c'_2 w + d'_2, \\z &= a'_3 u + b'_3 v + c'_3 w + d'_3,\end{aligned}\quad (2.36')$$

где a' , b' , c' , d' — постоянные и якобиан

$$I_1 = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}$$

отличен от нуля. Эта система легко обращается:

$$\begin{aligned}u &= a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1, & v &= a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2, \\w &= a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3,\end{aligned}\quad (2.36)$$

где a , b , c , d — постоянные и якобиан

$$I = \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = \frac{1}{I_1}$$

также отличен от нуля.

С одной стороны, системы (2.36) и (2.36') определяют невырожденное аффинное отображение пространства $Oxyz$ в пространстве $Ouvw$. С другой стороны, они определяют «криволинейные» координаты u , v , w во всем пространстве $Oxyz$, которые, впрочем, являются прямолинейными. В самом деле, координатными поверхностями служат три системы плоскостей $u = u_0$, $v = v_0$, $w = w_0$, параллельных соответственно плоскостям:

$$\begin{aligned}a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 &= 0, & a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 &= 0, \\a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 &= 0,\end{aligned}\quad (2.37)$$

так что декартовой системой можно назвать любую «прямолинейную» систему, т. е. систему, координатными поверхностями которой служат плоскости.

Система (2.36) в общем случае не является ортогональной. Действительно, мы имеем выражения (см. (2.20)):

$$S\left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x}\right) = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2,$$

$$S\left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x}\right) = a_1 a_3 + b_1 b_3 + c_1 c_3,$$

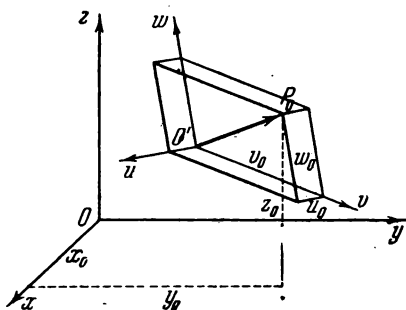
$$S\left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x}\right) = a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3,$$

которые, конечно, не всегда равны нулю.

Декартовы координаты имеют простой геометрический смысл. Если плоскости (2.37) принять за новые плоскости координат, то новые координаты u_0, v_0, w_0 точки $P_0(x_0, y_0, z_0)$ (в системе $O'uvw$):

$$u_0 = a_1 x_0 + b_1 y_0 + c_1 z_0 + d_1, \quad v_0 = a_2 x_0 + b_2 y_0 + c_2 z_0 + d_2, \\ w_0 = a_3 x_0 + b_3 y_0 + c_3 z_0 + d_3$$

выражают проекции (в общем случае косоугольные) радиуса-вектора $\overline{OP_0}$ на новые оси координат (черт. 20).



Черт. 20.

Это особенно наглядно видно в случае ортогональности системы (2.36), (2.36'). Перепишем первое из уравнений (2.36) так:

$$\frac{u}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}} = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}} x + \frac{b_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}} y + \\ + \frac{c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}} z + \frac{d_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}},$$

и полагая (что возможно)

$$\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}} = \cos \alpha_1, \quad \frac{b_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}} = \cos \beta_1, \\ \frac{c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}} = \cos \gamma_1,$$

а также обозначая

$$\frac{u}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}} = u', \quad \frac{d_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}} = d_1,$$

получим:

$$u' = \cos \alpha_1 x + \cos \beta_1 y + \cos \gamma_1 z + d_1.$$

При этом можно считать, что $\cos \alpha_1, \cos \beta_1, \cos \gamma_1$ суть направляющие косинусы вектора, нормального к плоскости $u' = 0$ (ибо $\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \beta_1 + \cos^2 \gamma_1 = 1$).

Аналогично

$$v' = \cos \alpha_2 x + \cos \beta_2 y + \cos \gamma_2 z + \bar{d}_2,$$

$$w' = \cos \alpha_3 x + \cos \beta_3 y + \cos \gamma_3 z + \bar{d}_3,$$

где новые обозначения имеют смысл, подобный смыслу обозначений в выражении для u' .

Теперь условия ортогональности запишутся так:

$$\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2 = 0,$$

$$\cos \alpha_1 \cos \alpha_3 + \cos \beta_1 \cos \beta_3 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_3 = 0,$$

$$\cos \alpha_2 \cos \alpha_3 + \cos \beta_2 \cos \beta_3 + \cos \gamma_2 \cos \gamma_3 = 0,$$

что должно быть совершенно понятным, так как левая часть каждого из этих равенств выражает косинус угла между нормальными векторами к соответствующим координатным плоскостям. Для простоты положим $\bar{d}_1 = \bar{d}_2 = \bar{d}_3 = 0$ ($d_1 = d_2 = d_3 = 0$); это означает, что начало координат O' новой системы $O'u'v'w'$ совпадает с началом O данной системы $Oxyz$. Но тогда величина

$$u' = \cos \alpha_1 x + \cos \beta_1 y + \cos \gamma_1 z,$$

являясь скалярным произведением единичного вектора $(\cos \alpha_1, \cos \beta_1, \cos \gamma_1)$ нормали к плоскости $u' = 0$ и вектора

$\overline{OP}(x, y, z)$, выражает проекцию этого вектора на направление указанной нормали, т. е. на ось координат $v' = 0$, $w' = 0$ и, следовательно, служит обычной (прямоугольной) декартовой координатой точки P по этой оси. То же самое относится и к величинам v' и w' .

Итак, система координат $Ou'v'w'$ есть система декартовых прямоугольных координат, оси которой Ou' , Ov' , Ow' образуют с осями Ox , Oy , Oz соответственно углы $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$; $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$. Если d_1, d_2, d_3 не все равны нулю, то система координат $O'u'v'w'$ параллельна системе $Ou'v'w'$, причем начало координат O имеет такие координаты: $u' = \bar{d}_1$, $v' = \bar{d}_2$, $w' = \bar{d}_3$. Система координат $O'uvw$ отличается от системы $O'u'v'w'$ только масштабами по осям координат. Единицы длины по осям $O'u'$, $O'v'$, $O'w'$ равны соответственно $\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}$, $\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}$, $\sqrt{a_3^2 + b_3^2 + c_3^2}$ единицам длины по осям $O'u$, $O'v$, $O'w$.

Таким образом, любая прямолинейная и ортогональная система координат $O'uvw$ (2.36) может быть получена из данной декартовой ортогональной системы координат $Oxyz$ передвижением этой системы в пространстве как твердого тела («параллельным сдвигом» и «вращением» вокруг неподвижного начала координат) и изменением масштаба по осям координат.

Если $a_i = \cos \alpha_i$, $b_i = \cos \beta_i$, $c_i = \cos \gamma_i$ ($i = 1, 2, 3$), то мы имеем хорошо известный из аналитической геометрии случай преобразования декартовых прямоугольных координат (при этом масштаб сохраняется).

Обычно новые декартовы координаты обозначаются через x' , y' , z' , т. е. $u = x'$, $v = y'$, $w = z'$.

Вычислим величины L и H для декартовых (ортогональных) координат:

$$L_u = \sqrt{a_1'^2 + a_2'^2 + a_3'^2} = \frac{1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}},$$

$$L_v = \sqrt{b_1'^2 + b_2'^2 + b_3'^2} = \frac{1}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}},$$

$$L_w = \sqrt{c_1'^2 + c_2'^2 + c_3'^2} = \frac{1}{\sqrt{a_3^2 + b_3^2 + c_3^2}},$$

и, значит,

$$H_u = \frac{1}{\sqrt{a_1'^2 + a_2'^2 + a_3'^2}} = \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2},$$

$$H_v = \frac{1}{\sqrt{b_1'^2 + b_2'^2 + b_3'^2}} = \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2},$$

$$H_w = \frac{1}{\sqrt{c_1'^2 + c_2'^2 + c_3'^2}} = \sqrt{a_3^2 + b_3^2 + c_3^2}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} ds^2 &= (a_1'^2 + a_2'^2 + a_3'^2) du^2 + (b_1'^2 + b_2'^2 + b_3'^2) dv^2 + \\ &\quad + (c_1'^2 + c_2'^2 + c_3'^2) dw^2 = \\ &= \frac{du^2}{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} + \frac{dv^2}{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2} + \frac{dw^2}{a_3^2 + b_3^2 + c_3^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dq^2 &= (a_1'^2 + a_2'^2 + a_3'^2) (b_1'^2 + b_2'^2 + b_3'^2) (du dv)^2 + \\ &\quad + (a_1'^2 + a_2'^2 + a_3'^2) (c_1'^2 + c_2'^2 + c_3'^2) (du dw)^2 + \\ &\quad + (b_1'^2 + b_2'^2 + b_3'^2) (c_1'^2 + c_2'^2 + c_3'^2) (dv dw)^2 = \\ &= \frac{(du dv)^2}{(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2)} + \frac{(du dw)^2}{(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)(a_3^2 + b_3^2 + c_3^2)} + \\ &\quad + \frac{(dv dw)^2}{(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2)(a_3^2 + b_3^2 + c_3^2)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\omega^2 &= (a_1'^2 + a_2'^2 + a_3'^2) (b_1'^2 + b_2'^2 + b_3'^2) (c_1'^2 + c_2'^2 + c_3'^2) \times \\ &\quad \times du^2 dv^2 dw^2 = \frac{1}{(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2)(a_3^2 + b_3^2 + c_3^2)} \times \\ &\quad \times du^2 dv^2 dw^2. \end{aligned}$$

Если масштабы не изменяются, т. е.

$$\begin{aligned} a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 &= a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 = \\ &= (a_1'^2 + a_2'^2 + a_3'^2 = b_1'^2 + b_2'^2 + b_3'^2 = c_1'^2 + c_2'^2 + c_3'^2) = 1, \end{aligned}$$

то

$$ds = \sqrt{du^2 + dv^2 + d\omega^2},$$

$$dq = \sqrt{(du dv)^2 + (du d\omega)^2 + (dv d\omega)^2}, \quad d\omega = du dv d\omega.$$

54. Цилиндрические координаты. Цилиндрическими координатами в пространстве называются, как известно (II, 175), величины u , v , ω , через которые декартовы прямоугольные координаты x , y , z выражаются так:

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = \omega, \quad (2.38')$$

причем $0 \leq u < \infty$, $0 \leq v < 2\pi$, $-\infty < \omega < \infty$.

Очевидно, что цилиндрическими координатами u , v и ω точки $P(x, y, z)$ служат полярные координаты u и v (п° 39) ее проекции P' на плоскость Oxy и ее аппликата (черт. 21). Координатными поверхностями являются:

круговой цилиндр

$$x^2 + y^2 = u_0^2,$$

осью которого является ось Oz , а радиус равен u_0 ;

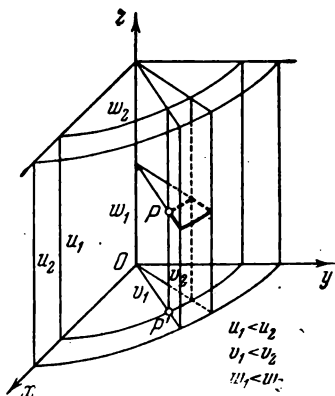
полуплоскость, определяемая равенствами:

$$x = u \cos v_0, \quad y = u \sin v_0;$$

она проходит через ось Oz и образует угол v_0 с плоскостью Oxz ; обычное уравнение этой полуплоскости (при $v_0 \neq \frac{\pi}{2}$, $3 \cdot \frac{\pi}{2}$) можно записать в форме $y = (\operatorname{tg} v_0) x$;

плоскость $z = \omega_0$, параллельная плоскости Oxy (черт. 21).

В системе цилиндрических координат каждой точке пространства $Oxyz$, лишенного положительной ($x \geq 0$) полуплоскости Oxz , соответствует единственная тройка чисел u , v и ω — ее цилиндрических координат — и обратно. В каждой точке оси Oz координата u равна нулю, координата ω имеет определенное значение, а координата v может принять любое



Черт. 21.

значение из интервала $[0, 2\pi)$. Ось Oz является особой линией для системы цилиндрических координат.

Геометрический смысл цилиндрических координат очевиден (черт. 21). Цилиндрические координаты u, v, w обычно обозначаются через r, φ, z (или ρ, φ, z , или ρ, θ, z).

Обратная система, очевидно, имеет вид:

$$u = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad v = \arg(x, y), \quad w = z. \quad (2.38)$$

Координата v как функция точки $P(x, y, z)$ во всем пространстве $Oxyz$ разрывна на положительной полуплоскости Oxz ($y=0, x>0$): при переходе точки $P(x, y, z)$ через эту полуплоскость функция получает приращение, равное 2π .

Система (2.38), (2.38') гомеоморфно отображает все пространство $Oxyz$, из которого удалена положительная полуплоскость Oxz , в область пространства $Ouvw$, являющуюся бесконечным прямоугольным параллелепипедом, ограниченным плоскостями: $u=0, v=0, v=2\pi$ ($u>0$). Но при этом, если подходить к указанной полуплоскости Oxz справа (т. е. при $y>0$), то в пространстве $Ouvw$ образ переменной точки будет стремиться к точке полуплоскости $v=0, u\geq 0$, а если подходить к той же точке слева (т. е. при $y<0$), то соответствующая точка пространства $Ouvw$ будет приближаться к точке полуплоскости $v=2\pi, u\geq 0$.

Ясно, что система цилиндрических координат ортогональна; это легко проверить и на основании критериев (2.20), (2.21).

Найдем величины L и H для цилиндрических координат:

$$L_u = \sqrt{\cos^2 v + \sin^2 v} = 1, \quad L_v = \sqrt{u^2 \sin^2 v + u^2 \cos^2 v} = u, \\ L_w = 1$$

и, значит,

$$H_u = 1, \quad H_v = \frac{1}{u}, \quad H_w = 1.$$

Имеем:

$$ds = \sqrt{du^2 + u^2 dv^2 + dw^2},$$

$$dq = \sqrt{u^2 (du dv)^2 + (du dw)^2 + u^2 (dv dw)^2}, \quad d\omega = u du dv dw$$

(ср. II, 175).

Обобщенные цилиндрические координаты u, v и w точки $P(x, y, z)$ связаны с координатами x, y и z так:

$$x = au \cos v, \quad y = bu \sin v, \quad z = cw,$$

причем $0 \leq u < \infty$, $0 \leq v < 2\pi$, $-\infty < w < \infty$, a, b, c — положительные константы, $a \neq b$. Как видно, обобщенными цилиндрическими координатами точки P являются соответствующие обобщенные полярные координаты ее проекции на плоскость Oxy (см. п° 40) и ее аппликата в соответственно измененном масштабе. Элемент $d\omega$ объема в системе обобщенных цилиндрических координат равен

$$d\omega = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw = abc u du dv dw.$$

55. Сферические координаты. Сферическими (или полярными в пространстве) координатами называются величины u, v и w , через которые декартовы прямоугольные координаты x, y и z выражаются так:

$$\begin{aligned} x &= u \cos v \sin w, \\ y &= u \sin v \sin w, \\ z &= u \cos w, \end{aligned} \quad (2.39')$$

причем

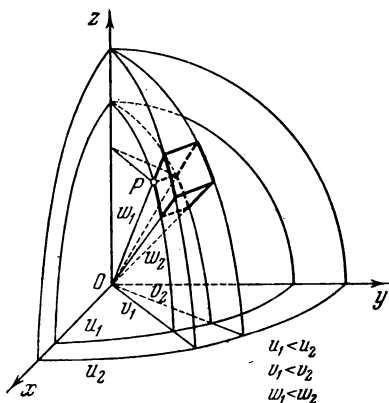
$$\begin{aligned} 0 &\leq u < \infty, \\ 0 &\leq v < 2\pi, \\ 0 &\leq w \leq \pi. \end{aligned}$$

Координатными поверхностями служат (черт. 22): сфера с центром в начале координат, полуплоскость, проходящая через ось Oz , и конус с вершиной в начале координат и с осью, совпадающей с полуосью Oz . Действительно, если $u = u_0$, то, исключая u и w из трех равенств (2.39'), получим:

$$x^2 + y^2 + z^2 = u_0^2, \quad (*)$$

т. е. уравнение сферы с центром в начале координат и с радиусом u_0 . С увеличением u_0 от 0 до ∞ переменная сфера (*) один раз выметет все пространство $Oxyz$. Если $v = v_0$, то два равенства

$$x = u \cos v_0 \sin w, \quad y = u \sin v_0 \sin w \quad (**)$$



Черт. 22.

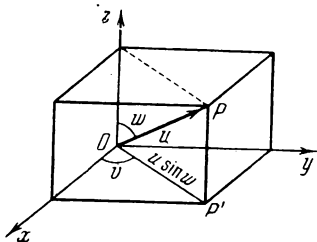
определяют полуплоскость, проходящую через ось Oz и образующую угол v_0 с плоскостью Oxz ; обычное уравнение этой полуплоскости (при $v_0 \neq \frac{\pi}{2}, 3 \cdot \frac{\pi}{2}$) можно записать в форме $y = (\operatorname{tg} v_0)x$. С увеличением v_0 от 0 до 2π (исключая 2π) переменная полуплоскость $(**)$ выметет один раз все пространство $Oxyz$, кроме точек оси Oz , через которые полуплоскость постоянно проходит. Если $w = w_0$, то, исключая u и v из трех равенств (2.39'), получим:

$$x^2 + y^2 = z^2 \operatorname{tg}^2 w_0 \quad \left(\text{или } z = 0 \text{ при } w_0 = \frac{\pi}{2} \right), \quad (***)$$

т. е. уравнение кругового конуса, с вершиной в начале координат и с образующей, наклоненной к положительному направлению оси Oz под углом w_0 . С увеличением w_0 от 0 до π переменный конус $(***)$ выметет один раз все пространство $Oxyz$, кроме точки $(0, 0, 0)$, которая «выметается» при всяком значении w_0 .

В системе сферических координат каждой точке пространства $Oxyz$, лишенного положительной ($x \geq 0$) полуплоскости Oxz , соответствует единственная тройка чисел u , v и w — ее сферических координат, и обратно. В каждой точке оси Oz имеем: $u = 0$, $w = 0$ или $w = \pi$ (кроме начала координат, где w не имеет определенного значения), а координата v может принять любое значение из интервала $[0, 2\pi)$. Ось Oz является особой линией для системы сферических координат.

Сферические координаты имеют простой геометрический смысл (черт. 23; см. также черт. 22). Координата u точки P есть длина (модуль) радиуса-вектора \overline{OP} , она называется *сферическим полярным радиусом точки P* ; координата v есть полярный угол проекции P' точки P на плоскость Oxy , она называется иногда *долготой точки P* ; координата w есть угол между радиусом-вектором \overline{OP} и положительным направлением оси Oz ; угол $\frac{\pi}{2} - w$ называют



Черт. 23.

иногда *широтой* точки P . Сферические координаты обычно обозначаются через ρ , φ , θ (или r , φ , θ).

Сферические координаты u , v , w выражаются следующим образом через декартовы координаты x , y , z :

$$u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad v = \arg(x, y),$$

$$w = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \quad (2.39)$$

Координата v как функция точки $P(x, y, z)$ во всем пространстве $Oxyz$, разрывна на положительной полуплоскости Oxz ($y=0$, $x \geq 0$): при переходе точки $P(x, y, z)$ через эту полуплоскость функция получает приращение, равное 2π . Координата w разрывна в начале координат.

Система (2.39), (2.39') гомеоморфно отображает все пространство $Oxyz$, из которого удалена положительная полуплоскость Oxz , в область пространства $Ouvw$, являющуюся бесконечным прямоугольным параллелепипедом, ограниченным плоскостями: $u=0$, $v=0$, $v=2\pi$ ($u > 0$), $w=0$, $w=\pi$. При этом следует считать по непрерывности, что правая сторона положительной полуплоскости Oxz (т. е. обращенная в сторону положительных y) отображается в полуплоскость $v=0$, $u \geq 0$, а левая сторона — в полуплоскость $v=2\pi$, $u \geq 0$; квадрант плоскости Oxz при $z \geq 0$, $x < 0$ отображается в полуполосу, ограниченную прямыми: $u=0$, $v=0$, $v=2\pi$ ($u > 0$) плоскости $w=0$, а квадрант плоскости Oxz при $z \leq 0$, $x < 0$ — в такую же полуполосу плоскости $w=\pi$.

Ортогональность системы сферических координат довольно ясна непосредственно, но нетрудно и проверить выполнение условий ортогональности (2.21). Так как

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \cos v \sin w, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -u \sin v \sin w, \quad \frac{\partial x}{\partial w} = u \cos v \cos w,$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \sin v \sin w, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = u \cos v \sin w, \quad \frac{\partial y}{\partial w} = u \sin v \cos w,$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \cos w, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial w} = -u \sin w,$$

то

$$S\left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v}\right) = -u \cos v \sin^2 w \sin v + u \sin v \cos v \sin^2 w = 0,$$

$$S\left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial w}\right) = u \cos^2 v \sin w \cos w + u \sin^2 v \sin w \cos w - \\ - u \sin w \cos w = 0,$$

$$S\left(\frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial w}\right) = -u^2 \sin v \cos v \sin w \cos w + \\ + u^2 \cos v \sin v \sin w \cos w = 0,$$

ч. т. д.

Вычислим величины L и H для сферических координат. Находим:

$$L_u = \sqrt{\cos^2 v \sin^2 w + \sin^2 v \sin^2 w + \cos^2 w} = 1,$$

$$L_v = \sqrt{u^2 \sin^2 v \sin^2 w + u^2 \cos^2 v \sin^2 w} = u \sin w,$$

$$L_w = \sqrt{u^2 \cos^2 v \cos^2 w + u^2 \sin^2 v \cos^2 w + u^2 \sin^2 w} = u$$

и, значит,

$$H_u = 1, \quad H_v = \frac{1}{u \sin w}, \quad H_w = \frac{1}{u}.$$

Запишем выражения для ds , dq и $d\omega$:

$$ds = \sqrt{du^2 + u^2 \sin^2 w dv^2 + u^2 dw^2},$$

$$dq = \sqrt{u^2 \sin^2 w (du dv)^2 + u^2 (du dw)^2 + u^4 \sin^2 w (dv dw)^2}$$

$$d\omega = u^2 \sin w du dv dw$$

(ср. II, 175).

56. Телесный угол.

Определение. Телесным углом данной поверхности S относительно данной точки O называется область пространства, ограниченная конической поверхностью с вершиной в точке O , причем направляющей конической поверхности служит граница поверхности S .

Говорят, что поверхность S видна из точки O «под ее телесным углом». Возьмем единичную сферу (т. е. сферу с радиусом, равным единице) с центром в точке O . Площадь части этой сферы с данным телесным углом называется мерой этого телесного угла. (Вспомним, что подобно этому

длина части единичной окружности, видимой под данным углом из центра окружности, называется мерой этого угла.)

Возьмем единичную сферу с центром в начале координат; ее уравнением в сферических координатах является $u = 1$. Легко видеть (см. п° 55), что элемент площади этой единичной сферы — обозначим его через dq_1 — равен $\sin w \, dv \, d\omega$ (это легко усмотреть и из черт. 22); поэтому элемент объема $d\omega$ в системе сферических координат можно представить так:

$$d\omega = u^2 \, du \, dq_1.$$

Таким образом (ср. со стр. 96), элемент объема $d\omega$ в сферических (полярных) координатах равен $u^2 \, du$, умноженному на элемент dq_1 меры телесного угла, под которым видна из начала координат поверхность, ограничивающая область.

Укажем связь между элементом dq площади данной поверхности S и мерой dq_1 его телесного угла. Ясно, что если dq_1 умножить на u^2 , то мы получим площадь проекции (центральной) элемента поверхности на сферу (с центром в начале координат), проходящую через данную точку поверхности; но эта площадь, очевидно, равна $dq |\cos(n, u)|$, где через (n, u) обозначен угол между нормалью к поверхности в точке и сферическим радиусом этой точки. Значит,

$$dq_1 = \frac{|\cos(n, u)|}{u^2} dq. \quad (2.40)$$

57. Обобщенные сферические координаты. Обобщенными сферическими координатами (или обобщенными полярными координатами в пространстве) называются величины u , v и w , через которые декартовы прямоугольные координаты x , y и z выражаются так:

$$x = au \cos v \sin w, \quad y = bu \sin v \sin w, \quad z = cu \cos w, \quad (2.41')$$

причем $0 \leq u < \infty$, $0 \leq v < 2\pi$, $0 \leq w \leq \pi$, a , b , c — положительные константы, $a \neq b$.

Как видно, u , v и w можно здесь считать обычными сферическими координатами в пространстве $Ox'y'z'$, которое получается из пространства $Oxyz$ изменением масштабов по осям координат:

$$x' = \frac{1}{a} x, \quad y' = \frac{1}{b} y, \quad z' = \frac{1}{c} z.$$

Координатными поверхностями служат эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = u^2$$

с центром в точке $(0, 0, 0)$ и с полуосями au_0, bu_0, cu_0 ; плоскость

$$y = \frac{b}{a} \operatorname{tg} v_0 \cdot x \quad (\text{или } x = 0),$$

проходящая через ось Oz и образующая с плоскостью Oxz угол, тангенс которого равен $\frac{b}{a} \operatorname{tg} v_0$; эллиптический конус

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{c^2} \operatorname{tg}^2 w_0 \cdot z^2 \quad (\text{или } z = 0)$$

с вершиной в точке $(0, 0, 0)$.

Системой, обратной к системе (2.41'), является

$$u = \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}}, \quad v = \arg \left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b} \right),$$

$$w = \arccos \frac{\frac{z}{c}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}}}. \quad (2.41)$$

Ось Oz есть особая линия для системы обобщенных сферических координат. Легко описать отображение, производимое системой (2.41), если воспользоваться тем, что после изменения масштабов по осям Ox, Oy и Oz обобщенные сферические координаты становятся обычными сферическими координатами. Также нетрудно понять, что система обобщенных сферических координат не является ортогональной. В этом убеждаемся и с помощью критерия (2.21).

Элемент $d\omega$ объема в системе обобщенных сферических координат равен:

$$d\omega = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw = abc u^2 \sin w du dv dw.$$

§ 9. ЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ И ИХ ВЫРОЖДЕНИЯ

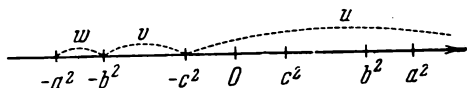
58. Общие эллипсоидальные координаты. Криволинейные координаты в пространстве u, v и w , связанные с декартовыми координатами x, y и z соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} x^2 &= \frac{(u+a^2)(v+a^2)(w+a^2)}{(b^2-a^2)(c^2-a^2)}, \\ y^2 &= \frac{(u+b^2)(v+b^2)(w+b^2)}{(a^2-b^2)(c^2-b^2)}, \\ z^2 &= \frac{(u+c^2)(v+c^2)(w+c^2)}{(a^2-c^2)(b^2-c^2)}, \end{aligned} \right\} \quad (2.42)$$

называются *эллипсоидальными* *); при этом заданные постоянные a^2 , b^2 , c^2 считаем подчиненными условиям:

$$0 \leq c^2 < b^2 < a^2,$$

а координаты u , v и w — принадлежащими соответственно



Черт. 24.

интервалам $(-c^2, \infty)$, $(-b^2, -c^2)$, $(-a^2, -b^2)$, т. е.

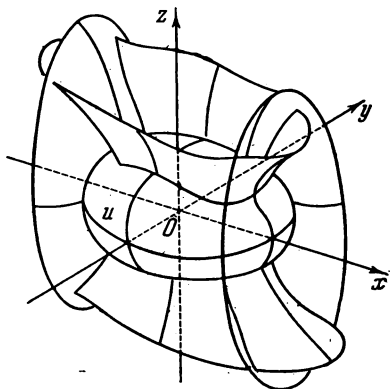
$$-c^2 < u < \infty, \quad -b^2 < v < -c^2, \quad -a^2 < w < -b^2.$$

Следовательно, всегда

$$-a^2 < w < -b^2 < v < -c^2 < u < \infty \quad (a)$$

(черт. 24).

Координатными поверхностями служат: эллипсоид, однополостный гиперболоид и двуполостный гиперболоид с центрами в начале координат, для которых координатные плоскости в системе $Oxyz$ являются плоскостями симметрии. Главные сечения (т. е. сечения плоскостями координат) всех этих поверхностей имеют общие фокусы, и поэтому можно сказать, что координатными поверхностями в системе эллипсоидальных координат служат «канонически расположенные» софокусные эллипсоиды, однополостные и двуполостные гиперболоиды (черт. 25). Координатные



Черт. 25.

*) Иногда эти координаты называются *эллиптическими* координатами в пространстве. Этот термин менее удачен.

поверхности софокусны основному эллипсоиду

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1; \quad (6)$$

поэтому координаты и называются эллипсоидальными.

Докажем эти предложения. Пусть $u = u_0$, $-c^2 < u_0 < \infty$; тогда

$$\begin{aligned} & \frac{x^2}{u_0 + a^2} + \frac{y^2}{u_0 + b^2} + \frac{z^2}{u_0 + c^2} = \\ &= \frac{(v + a^2)(w + a^2)}{(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)} + \frac{(v + b^2)(w + b^2)}{(a^2 - b^2)(c^2 - b^2)} + \frac{(v + c^2)(w + c^2)}{(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)} = \\ &= \frac{(v + a^2)(w + a^2)(b^2 - c^2) + (v + b^2)(w + b^2)(c^2 - a^2) + (v + c^2)(w + c^2)(a^2 - b^2)}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)}. \end{aligned}$$

Убедимся в том, что правая часть равна 1, т. е. что числитель дроби в правой части равен знаменателю. Это можно сделать прямым путем, произведя указанные действия, но проще поступить так: прежде всего показываем, что числитель — обозначим его через M — не зависит от v , для чего берем производную по v :

$$M'_v = (w + a^2)(b^2 - c^2) + (w + b^2)(c^2 - a^2) + (w + c^2)(a^2 - b^2);$$

она должна равняться нулю. Это также легко проверить непосредственно, но если взять от M'_v производную по w :

$$M''_{vw} = (b^2 - c^2) + (c^2 - a^2) + (a^2 - b^2),$$

то сразу видно, что $M''_{vw} = 0$; значит, M'_v не зависит от w , т. е. $M'_v = \text{const}$. Для того чтобы вычислить эту константу, достаточно в M'_v положить w равным любому числу, например нулю: $w = 0$. Тогда

$$M'_v = a^2(b^2 - c^2) + b^2(c^2 - a^2) + c^2(a^2 - b^2),$$

а это уж совсем легко вычислить: M'_v действительно равно нулю. Следовательно, M не зависит от v . Так как w и v входят в выражение M совершенно одинаково, то заключаем, что M не зависит и от w ; поэтому мы найдем значение M , если придадим v и w любые, по нашему выбору, значения. Удобно положить, например, $v = -a^2$, $w = -b^2$,

при этом первых два слагаемых в M обращаются в нуль, а третье — в знаменатель рассматриваемой дроби, ч. т. д.

Итак,

$$\frac{x^2}{u_0 + a^2} + \frac{y^2}{u_0 + b^2} + \frac{z^2}{u_0 + c^2} = 1. \quad (*)$$

Это является каноническим уравнением эллипсоида с полуосями $\sqrt{u_0 + a^2}$, $\sqrt{u_0 + b^2}$, $\sqrt{u_0 + c^2}$. С увеличением u_0 от $-c^2$ до ∞ переменный эллипсоид (*) один раз выметет все пространство $Oxyz$.

Если $v = v_0$, $-b^2 < v_0 < -c^2$, то, рассуждая в точности, как в случае $u = u_0$, получим:

$$\frac{x^2}{v_0 + a^2} + \frac{y^2}{v_0 + b^2} + \frac{z^2}{v_0 + c^2} = 1,$$

или

$$\frac{x^2}{v_0 + a^2} + \frac{y^2}{v_0 + b^2} - \frac{z^2}{-(v_0 + c^2)} = 1, \quad (**)$$

т. е. каноническое уравнение однополостного гиперболоида (ибо $-(v_0 + c^2) > 0$) с полуосями $\sqrt{v_0 + a^2}$, $\sqrt{v_0 + b^2}$, $\sqrt{-(v_0 + c^2)}$. С увеличением v_0 от $-b^2$ до $-c^2$ переменный гиперболоид (**) один раз выметет все пространство $Oxyz$.

Если $w = w_0$, $-a^2 < w_0 < -b^2$, то таким же образом находим:

$$\frac{x^2}{w_0 + a^2} + \frac{y^2}{w_0 + b^2} + \frac{z^2}{w_0 + c^2} = 1$$

или

$$\frac{x^2}{w_0 + a^2} - \frac{y^2}{-(w_0 + b^2)} - \frac{z^2}{-(w_0 + c^2)} = 1, \quad (***)$$

т. е. каноническое уравнение двуполостного гиперболоида (ибо $-(w_0 + b^2) > 0$ и $-(w_0 + c^2) > 0$) с полуосями $\sqrt{w_0 + a^2}$, $\sqrt{-(w_0 + b^2)}$, $\sqrt{-(w_0 + c^2)}$. С увеличением w_0 от $-a^2$ до $-b^2$ переменный гиперболоид (***) один раз выметет все пространство $Oxyz$.

Теперь нетрудно обнаружить, что фокусы эллипсов и гипербол, получающихся в главных сечениях координатных поверхностей (*), (**), (***), совпадают с фокусами главных сечений основного эллипсоида (δ).

Разумеется, данная система эллипсоидальных координат (2.42) определяется заданием параметров a^2 , b^2 , c^2 (подчиненных условию $0 \leq c^2 < b^2 < a^2$).

Из рассмотрения координатных поверхностей и непосредственно из формул (2.42) видно, что каждой тройке координат u , v и w соответствует восемь точек $P(x, y, z)$ — по одной в каждом октанте, — симметричных друг с другом относительно плоскостей координат. Поэтому для гомеоморфизма необходимо ограничиться, во всяком случае, одним из октантов пространства $Oxyz$, например первым: $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$. Для утверждения, что этот октант, а не какая-нибудь его часть, является областью гомеоморфизма системы эллипсоидальных координат, нужно еще доказать, что каждой точке $P(x, y, z)$ при $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ соответствует одна тройка чисел u , v , w , причем $-c^2 < u < \infty$, $-b^2 < v < -c^2$, $-a^2 < w < -b^2$. Докажем это.

Из системы равенств (2.42), связывающих между собой декартовы и эллипсоидальные координаты, мы получили систему равенств (*), (**), (***), которую можно записать так:

$$\frac{x^2}{p_i + a^2} + \frac{y^2}{p_i + b^2} + \frac{z^2}{p_i + c^2} = 1, \quad i = 1, 2, 3. \quad (***)$$

Нетрудно убедиться, что и обратно, из трех равенств (***) вытекает система (2.42). Следовательно, равенства (2.42) и (***) эквивалентны.

Нам остается показать, что при фиксированных x , y , z уравнение относительно параметра p

$$\frac{x^2}{p + a^2} + \frac{y^2}{p + b^2} + \frac{z^2}{p + c^2} = 1 \quad (2.43)$$

имеет три действительных корня p_1 , p_2 , p_3 , причем $-c^2 < p_1 < \infty$, $-b^2 < p_2 < -c^2$, $-a^2 < p_3 < -b^2$ (*). Но это так и есть в силу следующего соображения. Функция

$$\begin{aligned} F(p) &\equiv \frac{x^2}{p + a^2} + \frac{y^2}{p + b^2} + \frac{z^2}{p + c^2} - 1 \equiv \\ &\equiv \frac{\Phi(p)}{(p + a^2)(p + b^2)(p + c^2)}, \end{aligned}$$

*) Часто эллипсоидальные координаты и определяют как корни уравнения (2.43), а затем уже находят выражения (2.42) для x^2 , y^2 , z^2 через эти координаты.

в каждом из трех открытых интервалов $(-a^2, -b^2)$, $(-b^2, -c^2)$, $(-c^2, \infty)$ является непрерывной функцией параметра p и при стремлении p к граничным точкам интервала имеет противоположные знаки. Например, если $p \rightarrow -a^2 + 0$, то $F(p) \rightarrow \infty$ (вследствие того, что $\frac{x^2}{p+a^2} \rightarrow \infty$), а если $p \rightarrow -b^2 - 0$, то $F(p) \rightarrow -\infty$ (вследствие того, что $\frac{y^2}{p+b^2} \rightarrow -\infty$); значит, $F(p)$ обра-

щается, по меньшей мере один раз, в нуль внутри интервала $(-a^2, -b^2)$. То же самое имеет место в интервалах $(-b^2, -c^2)$, $(-c^2, \infty)$. Из этого вытекает, что в каждом из трех указанных интервалов находится точно один корень уравнения $F(p) = 0$, ибо корнями этого уравнения являются корни уравнения $\Phi(p) = 0$, а оно третьей степени и, стало быть, имеет ровно три корня. Полагая $u = p_1$, $v = p_2$, $w = p_3$, мы находим ту единственную тройку эллипсоидальных координат, которая соответствует заданной точке $P(x, y, z)$ первого октанта.

Система (2.42) гомеоморфно отображает каждый октант пространства $Oxyz$ в бесконечный прямоугольный параллелепипед Ω в пространстве $Ouvw$, ограниченный плоскостями: $u = -c^2$, $v = -b^2$, $w = -a^2$, $u = -b^2$, $v = -c^2$, $w = -a^2$ ($u > -c^2$). Мы не будем задерживаться здесь на рассмотрении характера отображения, в частности на том, как полуплоскости системы координат $Oxyz$ отображаются на границу указанного параллелепипеда в пространстве $Ouvw$.

В отличие от рассмотренных выше криволинейных координат в пространстве (декартовых, цилиндрических, сферических) эллипсоидальные координаты в общем случае не имеют простой геометрической интерпретации. Эллипсоидальные координаты иногда обозначаются через λ , μ , ν (или ρ , μ , ν).

Докажем теперь аналитически, что система эллипсоидальных координат ортогональная; для этого проверим справедливость критерия (2.21). Так как (см. уравнения (2.42)):

$$2x \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{(v+a^2)(w+a^2)}{(b^2-a^2)(c^2-a^2)}, \quad 2x \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{(u+a^2)(w+a^2)}{(b^2-a^2)(c^2-a^2)},$$

то

$$4x^2 \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{(u+a^2)(v+a^2)(w+a^2)^2}{(b^2-a^2)^2(c^2-a^2)^2},$$

откуда

$$\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{1}{4} \frac{w+a^2}{(b^2-a^2)(c^2-a^2)};$$

точно так же

$$\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{1}{4} \frac{w + b^2}{(a^2 - b^2)(c^2 - b^2)},$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{1}{4} \frac{w + c^2}{(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} S\left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v}\right) &= \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{w + a^2}{(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)} + \frac{w + b^2}{(a^2 - b^2)(c^2 - b^2)} + \frac{w + c^2}{(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)} \right]. \end{aligned}$$

Легко непосредственно (а также с помощью приема, уже употребленного выше на стр. 146) подсчитать, что выражение в квадратных скобках равно нулю. Аналогично доказывается, что и $S\left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial w}\right) = 0$ и $S\left(\frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial w}\right) = 0$.

Найдем величины L и H для эллипсоидальных координат. Имеем:

$$4x^2 \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 = \frac{(v + a^2)^2 (w + a^2)^2}{(b^2 - a^2)^2 (c^2 - a^2)^2};$$

отсюда

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 = \frac{1}{4} \frac{(v + a^2)(w + a^2)}{(u + a^2)(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)}.$$

Подобно этому находим:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 = \frac{1}{4} \frac{(v + b^2)(w + b^2)}{(u + b^2)(a^2 - b^2)(c^2 - b^2)},$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = \frac{1}{4} \frac{(v + c^2)(w + c^2)}{(u + c^2)(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)}.$$

Значит,

$$\begin{aligned} L_u^2 &= \frac{1}{4} \left[\frac{(v + a^2)(w + a^2)}{(u + a^2)(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)} + \frac{(v + b^2)(w + b^2)}{(u + b^2)(a^2 - b^2)(c^2 - b^2)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(v + c^2)(w + c^2)}{(u + c^2)(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)} \right]. \end{aligned}$$

Здесь также можно было бы при помощи прямых вычислений (т. е. при помощи приведения к общему знаменателю, раскрытия скобок в числителе и т. д.) найти простое выражение для суммы в квадратных скобках. Но лучше прибегнуть к методу неопределенных коэффициентов. Именно,

заметив, что слагаемые этой суммы являются простейшими рациональными дробями относительно u , запишем (I, 99):

$$\frac{A}{u+a^2} + \frac{B}{u+b^2} + \frac{C}{u+c^2} = \frac{D(u-u')(u-u'')}{M(u)},$$

где

$$M(t) = (t+a^2)(t+b^2)(t+c^2),$$

$$A = \frac{(v+a^2)(w+a^2)}{(b^2-a^2)(c^2-a^2)}, \quad B = \frac{(v+b^2)(w+b^2)}{(a^2-b^2)(c^2-b^2)},$$

$$C = \frac{(v+c^2)(w+c^2)}{(a^2-c^2)(b^2-c^2)},$$

D, u', u'' — подлежащие отысканию константы (относительно u). Освобождаемся от знаменателя:

$$\begin{aligned} A(u+b^2)(u+c^2) + B(u+a^2)(u+c^2) + C(u+a^2)(u+b^2) = \\ = D(u-u')(u-u''). \end{aligned}$$

Полагая здесь $u = -a^2$, находим:

$$A(b^2-a^2)(c^2-a^2) = D(u'+a^2)(u''+a^2),$$

т. е.

$$(v+a^2)(w+a^2) = D(u'+a^2)(u''+a^2);$$

точно так же

$$(v+b^2)(w+b^2) = D(u'+b^2)(u''+b^2),$$

$$(v+c^2)(w+c^2) = D(u'+c^2)(u''+c^2).$$

Из последних трех равенств видно, что $D=1$, $u'=v$, $u''=w$. Итак, получаем:

$$L_u^2 = \frac{1}{4} \frac{(u-v)(u-w)}{M(u)}.$$

Аналогично

$$L_v^2 = \frac{1}{4} \frac{(u-v)(v-w)}{-M(v)}, \quad L_w^2 = \frac{1}{4} \frac{(u-w)(v-w)}{M(w)},$$

$$[-M(v) > 0],$$

и, значит,

$$H_u^2 = 4 \frac{M(u)}{(u-v)(u-w)}, \quad H_v^2 = 4 \frac{-M(v)}{(u-v)(v-w)},$$

$$H_w^2 = 4 \frac{M(w)}{(u-w)(v-w)}.$$

Далее, находим выражения для ds , dq и $d\omega$:

$$ds = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(u-v)(u-w)}{M(u)} du^2 + \frac{(u-v)(v-w)}{-M(v)} dv^2 + \frac{(u-w)(v-w)}{M(w)} dw^2},$$

$$dq = \frac{1}{4} \left[\frac{(u-v)^2(u-w)(v-w)}{-M(u)M(v)} (du dv)^2 + \frac{(u-v)(u-w)^2(v-w)}{M(u)M(w)} \times \right. \\ \left. \times (du dw)^2 + \frac{(u-v)(u-w)(v-w)^2}{-M(v)M(w)} (dv dw)^2 \right]^{1/2},$$

$$d\omega = \frac{1}{8} \frac{(u-v)(u-w)(v-w)}{\sqrt{-M(u)M(v)M(w)}} du dv dw.$$

59. Вырожденные эллипсоидальные координаты. Униформизация. Выражения для ds , dq и $d\omega$ упрощаются, если вместо переменных u, v, w ввести другие переменные—обозначим их через u_*, v_*, w_* ,—связанные с u, v, w соотношениями:

$$du_* = \frac{du}{\sqrt{4M(u)}}, \quad dv_* = \frac{dv}{\sqrt{-4M(v)}}, \quad dw_* = \frac{dw}{\sqrt{4M(w)}}.$$

Заметим, что связь между u, v, w и u_*, v_*, w_* может быть записана в другом виде, например так:

$$u_* = \int_{-c^2}^u \frac{dt}{\sqrt{4M(t)}}, \quad v_* = \int_{-c^2}^v \frac{dt}{\sqrt{-4M(t)}}, \quad w_* = \int_{-c^2}^w \frac{dt}{\sqrt{4M(t)}}. \quad (2.44)$$

Подставляя выражения для du, dv и dw в формулы для ds, dq и $d\omega$ п° 58, находим:

$$ds = \sqrt{(u-v)(u-w) du_*^2 + (u-v)(v-w) dv_*^2 + (u-w)(v-w) dw_*^2},$$

$$dq = \left[(u-v)^2(u-w)(v-w) (du_* dv_*)^2 + (u-v)(u-w)^2(v-w) \times \right. \\ \left. \times (du_* dw_*)^2 + (u-v)(u-w)(v-w)^2 (dv_* dw_*)^2 \right]^{1/2},$$

$$d\omega = (u-v)(u-w)(v-w) du_* dv_* dw_*;$$

здесь u, v и w —функции соответственно от u_*, v_* и w_* , получаемые посредством обращения интегралов (2.44). Но эти интегралы эллиптические и указанные только что функции суть так называемые *эллиптические функции*, не являющиеся элементарными (I, 105). Однако эти функ-

ции изучены с необходимой полнотой и они могут быть использованы с неменьшим успехом, чем элементарные функции. Оказывается, что введение вместо криволинейных координат u, v, w криволинейных координат u_*, v_*, w_* , через которые u, v, w выражаются при помощи эллиптических функций, позволяет не только упростить формулы для элементов длины, площади поверхности и объема, но и расширить область гомеоморфизма в пространстве $Oxyz$. Если в равенства (2.42) вместо u, v, w подставить их выражения через u_*, v_*, w_* , то правые части будут точными квадратами некоторых функций (доказательства мы приводить не будем). Таким образом, как и в случае эллиптических координат на плоскости (п° 42), для координат x, y, z (а не их квадратов) получаются довольно простые однозначные выражения, составленные из эллиптических функций от координат u_*, v_*, w_* . Теперь уже областью гомеоморфизма будет служить не один октант, а все пространство $Oxyz$, за исключением лишь некоторого плоского множества точек. Таким образом, соотношения (2.44) являются *униформизирующими формулами*, а переменные u_*, v_*, w_* — *униформизирующими переменными*. Эти переменные также называются эллипсоидальными координатами. Дальнейшие подробности относительно использования эллиптических функций при построении системы эллипсоидальных координат выходят за принятые границы нашего изложения.

Эллипсоидальные координаты зависят, как мы видели, от параметров a^2, b^2, c^2 , подчиненных условиям: $a^2 > b^2 > c^2 \geq 0$. Распространяя определение координат на предельные случаи в этих соотношениях, т. е. на случаи, когда неравенства — одно, два или три — заменяются на равенства, приходим к системам координат, которые можно считать вырождениями системы эллипсоидальных координат. Разумеется, эти вырожденные системы координат остаются ортогональными.

60. Сферические координаты. Допустим, что в формулах (2.42) $c = 0$. Положим:

$$u = u_*^2, \quad v = -b^2 \sin^2 v_*, \quad w = -(a^2 - b^2) \sin^2 w_* - b^2, \quad (2.45)$$

что не нарушает условий (а) п° 58. Тогда равенства (2.42) принимают вид:

$$x^2 = (u_*^2 + a^2) \left(1 - \frac{b^2}{a^2} \sin^2 v_*\right) \cos^2 w_*,$$

$$y^2 = (u_*^2 + b^2) \cos^2 v_* \sin^2 w_*,$$

$$z^2 = (u_*^2 + b^2) \sin^2 v_* \left[\frac{b^2}{a^2} + \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) \sin^2 w_*\right].$$

Считая здесь, что b стремится к нулю, а затем заставляя и a стремиться к нулю, найдем:

$$x = u_* \cos w_* \quad y = u_* \cos v_* \sin w_*, \quad z = u_* \sin v_* \sin w_*,$$

т. е. систему, определяющую сферические координаты (2.39').

Сферические координаты являются вырождениями эллипсоидальных координат, при этом эллипсоид (*) п° 58 вырождается в сферу, однополостный гиперболоид (**)—в полуплоскость, проходящую через (особую) ось Ox , двуполостный гиперболоид (***)—в конус, осью которого служит ось Ox . Если $u_* \geq 0$, $0 \leq v_* < 2\pi$, $0 \leq w_* \leq \pi$, то всякой точке $Q(u, v, w)$ области Ω (указанной на стр. 149), в которую отображается каждый октант пространства $Oxyz$ при помощи равенств (2.42), соответствуют, в силу равенств (2.45), восемь точек $Q_1(u_*, v_*, w_*)$ из области, определяемой соотношениями: $u_* \geq 0$, $0 \leq v_* < 2\pi$, $0 \leq w_* \leq \pi$. Это дает возможность установить гомеоморфизм между этой областью и всем пространством $Oxyz$, лишенным положительной ($x \geq 0$) полуплоскости Oxz . Отсюда видно, что переход (отображение) (2.45) из пространства общих эллипсоидальных координат в пространство сферических координат не только упрощает формулы преобразования, выражения для ds , dq и $d\omega$, но и расширяет область гомеоморфизма в пространстве $Oxyz$.

Таким образом, сферические координаты получаются из эллипсоидальных координат в указанном предельном случае ($a = b = c$), являясь униформизирующими переменными.

61. Вырожденные эллипсоидальные «вытянутые» координаты. Пусть по-прежнему $c = 0$. Положим:

$$u = a^2 \operatorname{sh}^2 u_*, \quad v = -b^2 \sin^2 v_*, \quad w = -(a^2 - b^2) \sin^2 w_* - b^2, \quad (2.46)$$

что не нарушает условий (а) п° 58. Тогда равенства (2.42) принимают вид:

$$\begin{aligned} x^2 &= \operatorname{ch}^2 u_* (a - b^2 \sin^2 v_*) \cos^2 w_*, \\ y^2 &= (a^2 \operatorname{sh}^2 u_* + b^2) \cos^2 v_* \sin^2 w_*, \\ z^2 &= \operatorname{sh}^2 u_* \sin^2 v_* [b^2 + (a^2 - b^2) \sin^2 w_*]. \end{aligned}$$

Считая здесь, что $b \rightarrow 0$ и $a = 1$, найдем:

$$x = \operatorname{ch} u_* \cos w_*, \quad y = \operatorname{sh} u_* \cos v_* \sin w_*, \quad z = \operatorname{sh} u_* \sin v_* \sin w_*.$$

Эта система определяет криволинейные координаты u_* , v_* , w_* , которые собственно и называются *вырожденными эллипсоидальными («вытянутыми») координатами*.

Меняя обозначения осей координат и отбрасывая индекс $*$, запишем систему так, как она чаще всего встречается:

$$x = \operatorname{sh} u \cos v \sin w, \quad y = \operatorname{sh} u \sin v \sin w, \quad z = \operatorname{sh} u \cos w, \quad (2.47)$$

причем $0 \leq u < \infty$, $0 \leq v < 2\pi$, $0 \leq w \leq \pi$. Координаты u , v , w иногда обозначаются соответственно через α , φ , β . Координатными поверхностями служат:

1) $u = \operatorname{const}$ — эллипсоид вращения («вытянутый»):

$$\frac{x^2 + y^2}{\operatorname{sh}^2 u} + \frac{z^2}{\operatorname{ch}^2 u} = 1$$

(при $u \neq 0$) с фокусами в точках $F_{1,2}(0, 0, \pm 1)$;

2) $v = \operatorname{const}$ — полуплоскость:

$$y = (\operatorname{tg} v) x$$

(при $v \neq \frac{\pi}{2}, 3 \cdot \frac{\pi}{2}$), проходящая через ось Oz (v можно рассматривать как долготу точки, т. е. как полярный угол проекции данной точки на плоскость Oxy);

3) $w = \operatorname{const}$ — двуполостный гиперболоид вращения:

$$\frac{z^2}{\cos^2 w} - \frac{x^2 + y^2}{\sin^2 w} = 1$$

(при $w \neq 0, \frac{\pi}{2}, \pi$) с фокусами в тех же точках $F_{1,2}$.

Находим величины L и H для вырожденных эллипсоидальных («вытянутых») координат:

$$L_u = \sqrt{\operatorname{sh}^2 u + \sin^2 w}, \quad L_v = \operatorname{sh} u \sin w, \quad L_w = \sqrt{\operatorname{sh}^2 u + \sin^2 w}$$

и, значит,

$$H_u = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 u + \sin^2 w}}, \quad H_v = \frac{1}{\operatorname{sh} u \sin w}, \quad H_w = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 u + \sin^2 w}}.$$

Для элементов длины, площади поверхности и объема имеем выражения:

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{(\operatorname{sh}^2 u + \sin^2 w)(du^2 + dw^2) + \operatorname{sh}^2 u \sin^2 w dv^2}, \\ dq &= \sqrt{(\operatorname{sh}^2 u + \sin^2 w) \operatorname{sh}^2 u \sin^2 w (du^2 + dw^2) dv^2 + (\operatorname{sh}^2 u + \sin^2 w)^2 (du dw)^2}, \\ d\omega &= (\operatorname{sh}^2 u + \sin^2 w) \operatorname{sh} u \sin w du dv dw. \end{aligned}$$

В силу равенств (2.46) и принятых границ изменения новых координат u_* , v_* , w_* всякой точке $Q(u, v, w)$ области Ω (указанной на стр. 149) соответствуют восемь точек $Q_1(u_*, v_*, w_*)$ из области Ω_1 , определяемой соотношениями: $u_* \geq 0$, $0 \leq v_* < 2\pi$, $0 \leq w_* \leq \pi$. Это и здесь дает возможность установить гомеоморфизм между областью Ω_1 и областью δ , являющейся всем пространством $Oxyz$, лишенным, как и в предыдущем случае, положительной ($x \geq 0$) полуплоскости Oxz . Каждой точке области δ соответствует единственная тройка «вытянутых» координат u , v , w (в точках особой оси Oz координата v остается неопределенной). Обратно: каждой точке области Ω в пространстве $Ouvw$, где u , v , w — «вытянутые» координаты, подчиненные условиям: $0 \leq u < \infty$, $0 \leq v < 2\pi$, $0 \leq w \leq \pi$, соответствует единственная точка в пространстве $Oxyz$. Отсюда видно, что переход (отображение) (2.46) из пространства общих эллипсоидальных координат в пространство «вытянутых» координат упрощает и формулы преобразования и выражения для ds , dq и $d\omega$, а также значительно расширяет область гомеоморфизма в пространстве $Oxyz$. Таким образом, «вытянутые» координаты получаются из эллипсоидальных координат в указанном предельном случае ($b = c$), являясь униформизирующими переменными.

62. Вырожденные эллипсоидальные «сплюснутые» координаты. Пусть по-прежнему $c = 0$. Положим:

$$u = a^2 \operatorname{sh}^2 u_*, \quad v = -b^2 \cos^2 v_*, \quad w = -(a^2 - b^2) \cos^2 w_* - b^2, \quad (2.48)$$

что не нарушает условий (а) п° 58. Тогда равенства (2.42) принимают вид:

$$\begin{aligned} x^2 &= \operatorname{ch}^2 u_* (a^2 - b^2 \cos^2 v_*) \sin^2 w_*, \\ y^2 &= (a^2 \operatorname{sh}^2 u_* + b^2) \sin^2 v_* \cos^2 w_*, \\ z^2 &= \operatorname{sh}^2 u_* \cos^2 v_* [b^2 + (a^2 - b^2) \cos^2 w_*]. \end{aligned}$$

Считая здесь, что $b = 1$ и $a \rightarrow 1$, найдем:

$$x = \operatorname{ch} u_* \sin v_* \sin w_*, \quad y = \operatorname{ch} u_* \sin v_* \cos w_*, \quad z = \operatorname{sh} u_* \cos v_*.$$

Эта система определяет криволинейные координаты u_* , v_* , w_* , которые называются *вырожденными эллипсоидальными («сплюснутыми») координатами*.

Меняя обозначения осей координат и отбрасывая индекс *, запишем систему так, как она чаще всего встречается:

$$x = \operatorname{ch} u \cos v \sin w, \quad y = \operatorname{ch} u \sin v \sin w, \quad z = \operatorname{sh} u \cos w, \quad (2.49)$$

причем $0 \leq u < \infty$, $0 \leq v < 2\pi$, $0 \leq w \leq \pi$.

Координаты u , v , w иногда обозначаются соответственно через α , φ , β .

Координатными поверхностями служат:

1) $u = \operatorname{const}$ — эллипсоид вращения («сплюснутый»):

$$\frac{x^2 + y^2}{\operatorname{ch}^2 u} + \frac{z^2}{\operatorname{sh}^2 u} = 1$$

(при $u \neq 0$) с фокусами в точках $F_{1,2}(\pm 1, 0, 0)$;

2) $v = \operatorname{const}$ — полуплоскость:

$$y = (\operatorname{tg} v) x$$

(при $v \neq \frac{\pi}{2}, 3 \cdot \frac{\pi}{2}$), проходящая через ось Oz (здесь v также можно рассматривать как долготу точки, т. е. как полярный угол проекции данной точки на плоскость Oxy);

3) $w = \text{const}$ — однополостный гиперболоид вращения:

$$\frac{x^2 + y^2}{\sin^2 w} - \frac{z^2}{\cos^2 w} = 1$$

(при $w \neq 0, \frac{\pi}{2}, \pi$) с фокусами в тех же точках $F_{1,2}$.

Находим величины L и H для вырожденных эллипсоидальных («сплюснутых») координат:

$$L_u = \sqrt{\text{sh}^2 u + \cos^2 w}, \quad L_v = \text{ch } u \sin w, \quad L_w = \sqrt{\text{sh}^2 u + \cos^2 w}$$

и, значит,

$$H_u = \frac{1}{\sqrt{\text{sh}^2 u + \cos^2 w}}, \quad H_v = \frac{1}{\text{ch } u \sin w}, \quad H_w = \frac{1}{\sqrt{\text{sh}^2 u + \cos^2 w}}.$$

Далее получаем:

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{(\text{sh}^2 u + \cos^2 w)(du^2 + dw^2) + \text{sh}^2 u \sin^2 w dv^2}, \\ dq &= \sqrt{(\text{sh}^2 u + \cos^2 w) \text{ch}^2 u \sin^2 w (du^2 + dw^2) dv^2 + (\text{sh}^2 u + \cos^2 w)^2 (du dw)^2}, \\ dw &= (\text{sh}^2 u + \cos^2 w) \text{ch } u \sin w du dv dw. \end{aligned}$$

Так же как и в случае «вытянутых» координат, формулы (2.49), связывающие декартовы координаты с вырожденными эллипсоидальными («сплюснутыми») координатами, гомеоморфно преобразовывают область \mathcal{G} , являющуюся всем пространством $Oxyz$, лишенным положительной ($x \geq 0$) полуплоскости Oxz , в область Ω_1 пространства $Ouvw$, определяемую соотношениями: $0 \leq u < \infty$, $0 \leq v < 2\pi$, $0 \leq w \leq \pi$.

Каждой точке области \mathcal{G} соответствует единственная тройка «сплюснутых» координат u, v, w (в точках o и z ось Oz координата v остается неопределенной). Обратно: каждой точке области Ω_1 пространства $Ouvw$, где u, v, w — «сплюснутые» координаты, подчиненные условиям: $0 \leq u < \infty$, $0 \leq v < 2\pi$, $0 \leq w \leq \pi$, соответствует единственная точка в пространстве $Oxyz$.

Итак, переход (отображение) (2.48) из пространства общих эллипсоидальных координат в пространство «сплюснутых» координат упрощает и формулы преобразования

и выражения для ds , dq и $d\omega$, а также значительно расширяет область гомеоморфизма в пространстве $Oxyz$.

Таким образом, «сплюснутые» координаты получаются из эллипсоидальных координат в указанном предельном случае ($a = b$), являясь униформизирующими переменными.

§ 10. ДРУГИЕ СИСТЕМЫ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ КООРДИНАТ В ПРОСТРАНСТВЕ

Кратко рассмотрим здесь еще и другие системы пространственных ортогональных координат, используемых в ряде вопросов математической физики.

63. Сферо-конические координаты. Криволинейные координаты u , v , w , связанные с декартовыми прямоугольными координатами x , y , z соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} x^2 &= \frac{u(v+a^2)(w+a^2)}{(a^2-b^2)a^2}, \\ y^2 &= \frac{u(v+b^2)(w+b^2)}{(b^2-a^2)b^2}, \\ z^2 &= \frac{uvw}{a^2b^2}, \end{aligned} \right\} \quad (2.50)$$

причем $-a^2 < w < -b^2 < v < 0 < u < \infty$ называются *сферо-коническими*. Как видно из соотношений (2.50), эти координаты «родственные» эллипсоидальным координатам (см. § 9). Координатными поверхностями служат:

1) $u = \text{const} \neq 0$ — сфера:

$$\frac{x^2}{u} + \frac{y^2}{u} + \frac{z^2}{u} = \frac{(v+a^2)(w+a^2)}{(a^2-b^2)a^2} + \frac{(v+b^2)(w+b^2)}{(b^2-a^2)b^2} + \frac{vw}{a^2b^2} = 1$$

с центром в начале координат;

2) $v = \text{const} \neq 0$ — эллиптический конус:

$$\frac{x^2}{v+a^2} + \frac{y^2}{v+b^2} - \frac{z^2}{-v} = u \left[\frac{w+a^2}{(a^2-b^2)a^2} + \frac{w+b^2}{(b^2-a^2)b^2} + \frac{w}{a^2b^2} \right] = 0$$

с вершиной в начале координат и с осью, расположенной на оси Oz

3) $w = \text{const} \neq 0$ — эллиптический конус:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{w+a^2} - \frac{y^2}{-(w+b^2)} - \frac{z^2}{-w} &= \\ &= u \left[\frac{v+a^2}{(a^2-b^2)a^2} + \frac{v+b^2}{(b^2-a^2)b^2} + \frac{v}{a^2b^2} \right] = 0 \end{aligned}$$

с вершиной в начале координат и с осью, расположенной на оси Ox

Каждый октант пространства $Oxyz$, например первый: $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, с помощью формул (2.50) гомеоморфно отображается в область пространства $Ouvw$, определяемую неравенствами:

$$0 < u < \infty, \quad -b^2 < v < 0, \quad -a^2 < w < -b^2$$

(бесконечный прямоугольный параллелепипед). Доказательство этого предложения вполне аналогично доказательству, проведенному для эллипсоидальных координат (§ 9). Повторяя в точности рассуждения, приводившиеся для эллипсоидальных координат, убеждаемся, что система сферо-конических координат ортогональная. Для величин L и H находим выражения:

$$L_u = \frac{1}{2\sqrt{u}}, \quad L_v = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{u(v-w)}{-v(v+a^2)(v+b^2)}},$$

$$L_w = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{u(v-w)}{w(w+a^2)(w+b^2)}},$$

и, значит,

$$H_u = 2\sqrt{u}, \quad H_v = 2 \sqrt{\frac{-v(v+a^2)(v+b^2)}{u(v-w)}},$$

$$H_w = 2 \sqrt{\frac{w(w+a^2)(w+b^2)}{u(v-w)}}.$$

Для элементов длины, площади поверхности и объема имеем:

$$ds = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{du^2}{u} + \frac{u(v-w)}{-M_1(v)} dv^2 + \frac{u(v-w)}{M_1(w)} dw^2},$$

$$dq = \frac{1}{4} \times$$

$$\times \sqrt{\frac{v-w}{-M_1(v)} (du dv)^2 + \frac{v-w}{M_1(w)} (du dw)^2 + \frac{u^2(v-w)^2}{-M_1(v)M_1(w)} (dv dw)^2},$$

$$d\omega = \frac{1}{8} \frac{u(v-w)}{\sqrt{-uM_1(v)M_1(w)}} du dv dw,$$

где

$$M_1(t) = t(t+a^2)(t+b^2).$$

Здесь, так же как и в случае эллипсоидальных координат, можно расширить область гомеоморфизма в пространстве $Oxyz$ посредством униформизирующих переменных u_* , v_* , w_* , связанных с переменными u , v , w с помощью эллиптических функций. При этом может быть достигнуто и упрощение выражений для элементов длины, площади поверхности и объема.

64. Параболоидальные координаты. Криволинейные координаты u , v , w , связанные с декартовыми прямоугольными координатами x , y , z соотношениями:

$$x = 2uw \cos v, \quad y = 2uw \sin v, \quad z = u^2 - w^2, \quad (2.51)$$

причем $0 \leq u < \infty$, $0 \leq v < 2\pi$, $0 \leq w < \infty$, называются *параболоидальными*. Нетрудно убедиться, что координатными поверхностями в этой системе служат:

1) $u = \text{const} \neq 0$ — параболоид вращения:

$$\frac{x^2}{4u^2} + \frac{y^2}{4u^2} = u^2 - z$$

с вершиной в точке $(0, 0, u^2)$, полученный от вращения параболы $\frac{y^2}{4u^2} = u^2 - z$ вокруг луча $(-\infty, u^2)$ оси Oz ;

2) $v = \text{const} \neq \frac{\pi}{2}, 3 \cdot \frac{\pi}{2}$ — полуплоскость:

$$y = (\operatorname{tg} v) x,$$

проходящая через ось Oz и образующая угол v с положительной ($x > 0$) полуплоскостью Oxz ;

3) $w = \text{const} \neq 0$ — параболоид вращения:

$$\frac{x^2}{4w^2} + \frac{y^2}{4w^2} = w^2 + z$$

с вершиной в точке $(0, 0, -w^2)$, полученный от вращения параболы $\frac{y^2}{4w^2} = w^2 + z$ вокруг луча $(-w^2, \infty)$ оси Oz .

Решая уравнения трех координатных поверхностей относительно u , v , w , замечаем, что каждой тройке координат x , y , z (кроме тех, у которых $x \geq 0$, $y = 0$) соответствует единственная тройка координат u , v , w , подчиненных указанным выше ограничениям. Из соотношений (2.51) прямо видно, что каждой такой тройке координат u , v , w соответствует единственная тройка координат x , y , z . Значит, все пространство $Oxyz$, лишенное положительной ($x \geq 0$) полуплоскости Oxz , гомеоморфно отображается системой функций (2.51) в область пространства $Ouvw$, определяемую неравенствами: $0 \leq u < \infty$, $0 \leq v < 2\pi$, $0 \leq w < \infty$ (бесконечный прямоугольный параллелепипед). Для системы параболоидальных координат ось Oz является особой линией: в ее точках координата v остается неопределенной.

Ортогональность системы параболоидальных координат проверяется легко. Запишем, далее, выражения для величин L , H , ds , dq и $d\omega$:

$$\begin{aligned} L_u &= 2 \sqrt{u^2 + w^2}, \quad L_v = 2uw, \quad L_w = 2 \sqrt{u^2 + w^2}, \\ H_u &= \frac{1}{2 \sqrt{u^2 + w^2}}, \quad H_v = \frac{1}{2uw}, \quad H_w = \frac{1}{2 \sqrt{u^2 + w^2}}, \\ ds &= 2 \sqrt{(u^2 + w^2)(du^2 + dw^2) + u^2 w^2 dv^2}, \\ dq &= 4 \sqrt{(u^2 + w^2) u^2 w^2 (du^2 + dw^2) dv^2 + (u^2 + w^2)^2 (du dw)^2}, \\ d\omega &= 8(u^2 + w^2) uw du dv dw. \end{aligned}$$

65. **Тороидальные координаты.** Криволинейные координаты u, v, w , через которые декартовы прямоугольные координаты x, y, z выражаются при помощи соотношений:

$$x = \frac{\operatorname{sh} u \cos v}{\operatorname{ch} u - \cos w}, \quad y = \frac{\operatorname{sh} u \sin v}{\operatorname{ch} u - \cos w}, \quad z = \frac{\sin w}{\operatorname{ch} u - \cos w}, \quad (2.52)$$

причем $0 \leq u < \infty$, $0 \leq v < 2\pi$, $-\pi \leq w \leq \pi$, называются *тороидальными*. Прямой подстановкой можно проверить, что координатными поверхностями в этой системе служат:

1) $u = \operatorname{const} \neq 0$ — тор (I, 119):

$$(\sqrt{x^2 + y^2} - \operatorname{cth} u)^2 + z^2 = \frac{1}{\operatorname{sh}^2 u},$$

полученный от вращения окружности $(y - \operatorname{cth} u)^2 + z^2 = \frac{1}{\operatorname{sh}^2 u}$ вокруг оси Oz (окружность не пересекает ось Oz , ибо $\operatorname{cth} u > \frac{1}{\operatorname{sh} u}$);

2) $v = \operatorname{const} \neq \frac{\pi}{2}, 3 \cdot \frac{\pi}{2}$ — полуплоскость:

$$y = (\operatorname{tg} v) x,$$

проходящая через ось Oz и образующая угол v с положительной ($x > 0$) полуплоскостью Oxz ;

3) $w = \operatorname{const} \neq 0$ — сфера:

$$x^2 + y^2 + (z - \operatorname{ctg} w)^2 = \frac{1}{\sin^2 w}$$

с центром в точке $(0, 0, \operatorname{ctg} w)$ и радиусом, равным $\frac{1}{|\sin w|}$.

Из уравнений (2.52) видно, что каждой тройке тороидальных координат u, v, w соответствует единственная тройка декартовых координат x, y, z . Решая же эти уравнения (или, что все равно, уравнения координатных поверхностей) относительно u, v, w , приходим к заключению, что и каждой тройке декартовых координат x, y, z (кроме тех, у которых $x \geq 0, y = 0$) соответствует единственная тройка координат u, v, w , подчиненная указанным выше ограничениям. Следовательно, все пространство $Oxyz$, лишенное положительной ($x \geq 0$) полуплоскости Oxz , гомеоморфно отображается системой функций (2.52) в область пространства $Ouvw$, определяемую неравенствами: $0 \leq u < \infty$, $0 \leq v < 2\pi$, $-\pi \leq w \leq \pi$ (бесконечный лежащий прямоугольный параллелепипед). Ось Oz и для системы тороидальных координат (2.52) является особой линией: в ее точках координата v остается неопределенной.

Легко убедиться прямыми вычислениями, что условия ортогональности (2.21) выполняются. Далее получаем такие выражения

для величин L, H, ds, dq и $d\omega$:

$$L_u = \frac{1}{\operatorname{ch} u - \cos w}, \quad L_v = \frac{\operatorname{sh} u}{\operatorname{ch} u - \cos w}, \quad L_w = \frac{1}{\operatorname{ch} u - \cos w},$$

$$H_u = \operatorname{ch} u - \cos w, \quad H_v = \frac{\operatorname{ch} u - \cos w}{\operatorname{sh} u}, \quad H_w = \operatorname{ch} u - \cos w,$$

$$ds = \frac{1}{\operatorname{ch} u - \cos w} \sqrt{du^2 + \operatorname{sh}^2 u dv^2 + dw^2},$$

$$dq = \frac{1}{(\operatorname{ch} u - \cos w)^2} \sqrt{\operatorname{sh}^2 u (du^2 + dw^2) + (du dw)^2},$$

$$d\omega = \frac{\operatorname{sh} u}{(\operatorname{ch} u - \cos w)^3} du dv dw.$$

66. Биполярные координаты. Криволинейные координаты u, v, w , через которые декартовы прямоугольные координаты x, y, z выражаются при помощи соотношений:

$$x = \frac{\sin u \cos v}{\operatorname{ch} w - \cos u}, \quad y = \frac{\sin u \sin v}{\operatorname{ch} w - \cos u}, \quad z = \frac{\operatorname{sh} w}{\operatorname{ch} w - \cos u}, \quad (2.53)$$

причем $0 \leq u < \pi$, $0 \leq v < 2\pi$, $-\infty < w < \infty$, называются *биполярными (в пространстве)*. Как видно из сравнения соотношений (2.53) и (2.52), пространственные биполярные координаты родственны тороидальным координатам (см. п° 65). Исключение из трех равенств (2.53) каждого двух из координат u, v, w показывает, что координатными поверхностями служат:

1) $u = \operatorname{const} \neq 0$ — поверхность вращения:

$$(\sqrt{x^2 + y^2} - \operatorname{ctg} u)^2 + z^2 = \frac{1}{\sin^2 u},$$

полученная от вращения окружности $(y - \operatorname{ctg} u)^2 + z^2 = \frac{1}{\sin^2 u}$ вокруг оси Oz (окружность пересекает ось Oz), ибо $|\operatorname{ctg} u| < \frac{1}{\sin u}$;

2) $v = \operatorname{const} \neq \frac{\pi}{2}$, $3 \cdot \frac{\pi}{2}$ — полуплоскость:

$$y = (\operatorname{tg} v)x,$$

проходящая через ось Oz и образующая угол v с положительной ($x > 0$) полуплоскостью Oxz ;

3) $w = \operatorname{const} \neq 0$ — сфера:

$$x^2 + y^2 + (z - \operatorname{cth} w)^2 = \frac{1}{\operatorname{sh}^2 w}$$

с центром в точке $(0, 0, \operatorname{cth} w)$ и радиусом, равным $\frac{1}{|\operatorname{sh} w|}$.

Из уравнений (2.53) видно, что каждой тройке биполярных координат u, v, w соответствует единственная тройка декартовых

координат x, y, z . Решая же эти уравнения (или, что все равно, уравнения координатных поверхностей) относительно u, v, w , обнаружим, что и каждой тройке декартовых координат x, y, z (кроме тех, у которых $x \geq 0, y = 0$) соответствует единственная тройка координат u, v, w , подчиненных указанным выше условиям. Отсюда следует, что все пространство $Oxyz$, лишенное положительной ($x \geq 0$) полуплоскости Oxz , гомеоморфно отображается системой функций (2.53) в область пространства $Ouvw$, заданную неравенствами: $0 \leq u < \pi, 0 \leq v < 2\pi, -\infty < w < \infty$ (бесконечный стоящий прямоугольный параллелепипед). Особой линией для системы биполярных координат служит ось Oz : в ее точках координата v остается неопределенной.

Проверив выполнение условий (2.21), заключаем, что система биполярных координат ортогональная. Находим выражения для величин L, H, ds, dq и $d\omega$:

$$L_u = \frac{1}{\operatorname{ch} w - \cos u}, \quad L_v = \frac{\sin u}{\operatorname{ch} w - \cos u}, \quad L_w = \frac{1}{\operatorname{ch} w - \cos u},$$

$$H_u = \operatorname{ch} w - \cos u, \quad H_v = \frac{\operatorname{ch} w - \cos u}{\sin u}, \quad H_w = \operatorname{ch} w - \cos u,$$

$$ds = \frac{1}{\operatorname{ch} w - \cos u} \sqrt{du^2 + \sin^2 u dv^2 + dw^2},$$

$$dq = \frac{1}{(\operatorname{ch} w - \cos u)^2} \sqrt{\sin^2 u (du^2 + dw^2) dv^2 + (du dw)^2},$$

$$d\omega = \frac{\sin u}{(\operatorname{ch} w - \cos u)^3} du dv dw.$$

67. Цилиндрические координаты. Всякая система криволинейных ортогональных координат на плоскости может служить основанием для системы криволинейных ортогональных координат в пространстве. Можно, например, в качестве координат u, v точки в пространстве принять соответствующие криволинейные координаты u и v проекции этой точки на плоскость Oxy и в качестве координаты w ее аппликату z . Таким образом, система соотношений, задающая криволинейные координаты в пространстве, будет иметь вид:

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = w, \quad (2.54)$$

где первые два соотношения

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v) \quad (2.54')$$

определяют систему криволинейных (ортогональных) координат на плоскости Oxy . Координатными поверхностями системы, очевидно, будут плоскости, параллельные плоскости Oxy ($w = \text{const}$), и цилиндрические поверхности, образующие которых параллельны оси Oz , а направляющими служат координатные линии системы (2.54') ($u = \text{const}$ и $v = \text{const}$). Такая

пространственная система координат ортогональна; это совершенно ясно из геометрических соображений и очень просто может быть проверено аналитически (по условиям (2.21) при наличии условий (2.5)).

Для коэффициентов Ламе L_u, L_v, L_w системы (2.54) будем иметь: $L_u = l_u, L_v = l_v, L_w = 1$, где l_u, l_v — коэффициенты Ламе системы (2.54') и, значит,

$$ds = \sqrt{ds_1^2 + dw^2}, \quad dq = \sqrt{d\sigma^2 + ds_1^2 dw^2}, \quad d\omega = d\sigma dw,$$

где ds_1 — длина дуги, являющейся проекцией на плоскость Oxy элемента пространственной дуги с длиной ds , а $d\sigma$ — площадь области, являющейся проекцией на плоскость Oxy элемента пространственной области с объемом $d\omega$.

В частности, если в качестве системы (2.54') взять систему полярных координат, то мы получим пространственную систему координат (2.38'), которая обычно и называется просто цилиндрической (см. п° 54). Если же в качестве системы (2.54') брать другие системы криволинейных координат на плоскости, то соответствующие системы пространственных координат (2.54) можно было бы называть цилиндрическими с добавлением названия плоской системы: цилиндро-эллиптическими, цилиндро-параболическими, цилиндро-биполярными.

ГЛАВА III

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

§ 1. СЛУЧАЙ ОДНОЙ НЕЗАВИСИМОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Дифференциальным выражением называется выражение, построенное из констант, независимых переменных, некоторой функции от них и ее производных (или дифференциалов).

В математическом анализе и его приложениях часто используется преобразование дифференциальных выражений посредством замены независимых переменных или замены функции. Цель такого преобразования — придать рассматриваемому дифференциальному выражению другой, более простой в том или ином отношении вид.

Остановимся прежде всего на изложении приемов преобразования дифференциальных выражений в случае одной независимой переменной.

Пусть дано дифференциальное выражение

$$V = F(x, y, y', y'', \dots), \quad (3.1)$$

в котором функция $y = f(x)$ и ее производные определены в некотором интервале l оси Ox .

Рассмотрим преобразование выражения (3.1) отдельно при замене только независимой переменной x , при замене только функции y и при замене как независимой переменной x , так и ее функции y .

68. Замена независимой переменной. Допустим, что вводится новая независимая переменная u , связанная с данной переменной x зависимостью, которую мы предполагаем разрешенной относительно x :

$$x = \varphi(u), \quad (3.2)$$

причем функция φ является непрерывной со всеми своими производными до требуемого порядка; кроме того, $x' \neq 0$.

Равенство (3.2) называется *формулой преобразования (или замены) переменной*. Задача состоит в том, чтобы в выражение (3.1) вместо x подставить функцию $\varphi(u)$ и найти новое выражение, уже теперь через переменную u , для величины V . Для этого нужно знать, как выражаются через u аргументы функции F , т. е. y, y', y'', \dots . Ясно, что $y = f[\varphi(u)] = f_1(u)$; дальше для решения поставленной задачи нужно, очевидно, выразить содержащиеся в равенстве (3.1) производные от функции $y = f(x)$ по x через производные по u от новой функции $y = f_1(u)$ и данной функции $\varphi(u)$.

В силу известных правил дифференцирования имеем:

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{1}{\frac{dx}{du}} = \frac{y'}{x'}; \quad (*)$$

здесь в правой части равенства штрихами обозначаются производные по u .

Далее находим:

$$\left. \begin{aligned} y''_{x^2} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{y'}{x'} \right) = \frac{d}{du} \left(\frac{y'}{x'} \right) \frac{1}{\frac{dx}{du}} = \frac{y''x' - x''y'}{x'^3}, \\ y'''_{x^3} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{y''x' - x''y'}{x'^3} \right) = \frac{d}{du} \left(\frac{y''x' - x''y'}{x'^3} \right) \frac{1}{x'} = \\ &= \frac{y'''x'^2 - x'''y'x' - 3y''x''x' + 3x''^2y'}{x'^5}, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} (**)$$

Подставляя в формулу (3.1) данные и найденные выражения, мы и найдем искомое новое выражение для V :

$$\begin{aligned} V &= F \left[x = \varphi(u), y = f_1(u), \frac{y'}{x'}, \frac{y''x' - x''y'}{x'^3}, \dots \right] = \\ &= F_1(u, y, y', y'', \dots). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Зависимость между «старой» переменной x и «новой» переменной u , т. е. формула преобразования (3.2), может быть интерпретирована либо как формула, отобра-

жающая данный интервал l на оси Ox в некоторый интервал λ на оси Ou , либо как формула преобразования координат в интервале l (от прямоугольной координаты x к криволинейной координате u). В первой из этих интерпретаций указанное преобразование выражения F (см. (3.1)) означает построение такого выражения F_1 (см. (3.3)), что его значение в какой-нибудь точке $Q(u)$ интервала λ равно значению заданного выражения F в соответствующей точке $P(x)$ интервала l ; во второй интерпретации указанное преобразование означает построение такого выражения F_1 , что его значение в каждой точке P интервала l в другой заданной системе координат равно значению исходного выражения F в той же точке P .

Если зависимость между u и x разрешена относительно u , то производная $\frac{du}{dx}$ находится сразу прямым дифференцированием этой зависимости по x . В окончательных формулах нужно только x выразить через u .

Пример 1. Пусть

$$V = 2\sqrt{x} y' - \Phi\left(\frac{y^2}{x}\right),$$

где Φ — произвольная непрерывная функция. Преобразуем V к новой независимой переменной u при условии, что

$$x = u^2.$$

Имеем:

$$y'_x = \frac{y'_u}{2u}.$$

Подставляя, находим:

$$V = 2u \frac{y'_u}{2u} - \Phi\left(\frac{y^2}{u^2}\right) = y'_u - \Phi\left(\frac{y^2}{u^2}\right).$$

Рассматривая дифференциальное уравнение

$$2\sqrt{x} y' - \Phi\left(\frac{y^2}{x}\right) = 0,$$

мы можем, заменив независимую переменную по формуле $x = u^2$, придти к уравнению $y'_u - \Phi\left(\frac{y^2}{u^2}\right) = 0$ или $y'_u = \Phi\left(\frac{y^2}{u^2}\right)$, решить которое уже не представляет труда (однородное уравнение, II, 194); останется затем лишь вернуться к старой переменной x , чтобы найти решение заданного уравнения.

Пример 2. Пусть

$$V = x^2 y'' + x y' - y.$$

Преобразуем V к новой независимой переменной u при условии что $x = e^u$. Имеем:

$$y'_x = \frac{y'_u}{e^u}; \quad y''_{x^2} = \frac{y''_{u^2} e^u - e^u y'_u}{e^{2u}} = \frac{y''_{u^2} - y'_u}{e^{2u}}.$$

Подставляя, находим:

$$V = e^{2u} \frac{y'' - y'}{e^{2u}} + e^u \frac{y'}{e^u} - y = y'' - y.$$

Мы видим, насколько упростилось выражение для V . Если например, задано дифференциальное уравнение $V = 0$ (уравнение Эйлера, II, 208), то, заменив переменную x по формуле $x = e^u$, получим уравнение $y'' - y = 0$, легко решаемое:

$$y = C_1 e^u + \frac{C_2}{e^u},$$

т. е., возвращаясь к данной переменной:

$$y = C_1 x + \frac{C_2}{x}.$$

Пример 3. Пусть

$$V = (1 - x^2) y'' - x y' + x^2 y.$$

Преобразуем V к новой независимой переменной u при условии, что $x = \cos u$. Имеем:

$$y'_x = \frac{y'_u}{-\sin u}, \quad y''_{x^2} = \frac{-y''_{u^2} \sin u + y'_u \cos u}{-\sin^3 u}.$$

Подставляя, находим:

$$V = y'' + k^2 y.$$

Таким образом, уравнение

$$(1 - x^2) y'' - x y' + k^2 y = 0$$

с помощью указанной замены приводится к уравнению

$$y'' + k^2 y = 0,$$

общее решение которого составляется без труда (II, 204):

$$y = C_1 \cos ku + C_2 \sin ku.$$

Значит,

$$y = C_1 \cos (k \arccos x) + C_2 \sin (k \arccos x).$$

Приведенное уравнение называется уравнением Чебышева *). В частности, при $k = 1$ имеем: $y = C_1 x + C_2 \sqrt{1 - x^2}$.

*) П. Л. Чебышев (1821—1894) — великий русский математик и механик.

Пример 4. Преобразуем выражение для V в примере 2, полагая $x = \frac{1}{u}$. Тогда

$$y'_x = -u^2 y'_u, \quad y''_{xx} = u^4 y''_{uu} + 2u^3 y'_{uu}.$$

Окончательно получаем:

$$V = x^2 y''_{xx} + x y'_x - y = u^2 y''_{uu} + u y'_u - y,$$

т. е. то же самое выражение, что и исходное; говорят, что выражение $V = x^2 y''_{xx} + x y'_x - y$ инвариантно при замене переменной по формуле $x = \frac{1}{u}$. Это обстоятельство известным образом характеризует выражение; так, например, если $y = f(x)$ есть решение дифференциального уравнения $V = 0$, то, в силу указанной инвариантности, решением этого уравнения будет и функция $y = f(u)$, т. е. $y = f\left(\frac{1}{x}\right)$, что хорошо видно и по общему решению, найденному в примере 2. Сказанное дает повод привести общее определение.

Определение. Если выражение не изменяет своего вида при некотором преобразовании, то оно называется инвариантным относительно этого преобразования.

Важным частным случаем преобразования выражения (3.1) является тот, в котором в качестве новой независимой переменной принимается сама функция y , т. е. в котором переменные x и y меняются ролями: y становится независимой переменной, а x — ее функцией. Полагая $u = y$, мы получаем из соотношений (*) и (**) формулы для выражения y'_x , y''_{xx} , y'''_{xxx} , ... через x'_y , x''_{yy} , x'''_{yyy} , ...:

$$y' = \frac{1}{x'}, \quad y'' = -\frac{x''}{x'^3}, \quad y''' = \frac{-x'''x' + 3x''^2}{x'^5}, \dots \quad (***)$$

(ибо здесь $y'_u = 1$, $y''_{uu} = y'''_{uu} = \dots = 0$).

Пример 5. Пусть

$$V = y' y''' - 3y'^2.$$

Преобразуем V , принимая за новую независимую переменную y . Имеем по формулам (***):

$$V = \frac{1}{x'} \frac{-x'''x' + 3x''^2}{x'^5} - 3 \frac{x'^2}{x'^6} = -\frac{x'''}{x'^5},$$

что значительно проще, чем заданное выражение. В частности, дифференциальное уравнение $V=0$ решается сразу:

$$x = C_1 y^2 + C_2 y + C_3, \quad C_1^2 + C_2^2 \neq 0.$$

69. Замена функции. Пусть теперь независимая переменная остается прежней, а функция y заменяется новой переменной, связанной с y зависимостью, которую мы также предполагаем разрешенной относительно заданной переменной y :

$$y = \psi(v), \quad (3.4)$$

причем и функция v и функция ψ являются непрерывными вместе со всеми своими производными до требуемого порядка.

Равенство (3.4) называется также *формулой преобразования* или *замены переменной*. Замена переменной в выражении (3.1) для V в соответствии с формулой (3.4) принципиально не отличается от предыдущего случая, ибо мы можем считать в выражении (3.1) y в качестве независимой переменной, а x в качестве функции. Но, конечно, проще преобразование осуществить непосредственно, исходя из формулы преобразования (3.4). Действительно, мы имеем:

$$\begin{aligned} y'_x &= y'_v \cdot v', & y''_{x^2} &= y''_{v^2} v'^2 + y'_v v'', \\ y'''_{x^3} &= y'''_{v^3} v'^3 + 3y''_{v^2} v' v'' + y'_v v''' \end{aligned} \quad (a)$$

и т. д. Подставляя в формулу (3.1) данные и найденные выражения, мы и получим искомое новое выражение для V :

$$\begin{aligned} V &= F[x, y = \psi(v), \psi'_v v', \psi''_{v^2} v'^2 + \psi'_v v'', \dots] = \\ &= F_2(x, \psi, v, \psi', v', \psi'', v'', \dots). \end{aligned} \quad (3.5)$$

В преобразовании (3.4) возможны два случая: 1) ψ — известная функция от новой функции v ; 2) ψ — новая функция аргумента v — известной функции независимой переменной x .

Пример 6. Пусть

$$V = y y'' - 2(y^2 + y'^2).$$

Преобразуем V к новой функции v при условии, что

$$y = \frac{1}{v}.$$

Имеем:

$$y' = -\frac{1}{v^2} v', \quad y'' = \frac{2}{v^3} v'^2 - \frac{1}{v^2} v''.$$

Подставляя, находим:

$$V = \frac{2}{v^4} v'^2 - \frac{1}{v^3} v'' - 2 \left(\frac{1}{v^2} + \frac{v'^2}{v^4} \right) = -\frac{v'' + 2v}{v^3}.$$

Например, при решении уравнения $V = 0$ можно воспользоваться этим преобразованием и таким образом сразу привести вопрос к решению известного уравнения. В результате находим:

$$v = \frac{1}{y} = C_1 \cos \sqrt{2} x + C_2 \sin \sqrt{2} x.$$

Этот пример иллюстрирует первый случай. Рассмотрим теперь пример, иллюстрирующий второй случай.

Пример 7. Пусть

$$V = y'' + \frac{1}{x} y' + ky = 0.$$

Преобразуем V к новой функции ψ при условии, что

$$y = \psi(\ln x).$$

Имеем:

$$y' = \psi'(\ln x) \frac{1}{x}, \quad y'' = \psi''(\ln x) \frac{1}{x^2} - \psi'(\ln x) \frac{1}{x^2}.$$

Подставляя, находим:

$$\psi''(\ln x) + kx^2 \psi(\ln x) = 0$$

или

$$\psi''(v) + ke^{2v} \psi(v) = 0,$$

если положить $\ln x = v$.

Заметим, что второй случай является фактически просто случаем замены независимой переменной.

70. Замена независимой переменной и функции. Переходим к общему случаю. Заменяя в выражении совместно и независимую переменную x и ее функцию y новыми переменными u и v , будем предполагать, что «старые» и «новые» переменные связаны между собой зависимостями, разрешенными относительно заданных переменных x и y :

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad (3.6)$$

причем функции φ и ψ непрерывны вместе со всеми своими производными до требуемого порядка.

Равенства (3.6) называются *формулами преобразования или замены переменных*.

Так как y есть некоторая функция от x , то между двумя переменными u и v должна существовать функциональная

связь и можно считать, что, например, v является функцией независимой переменной u , соответствующей данной функции $y = f(x)$.

Дифференцируя второе из равенств (3.6) по x , получим:

$$y'_x = \left(\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial v} v' \right) \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (*)$$

Вместо множителя $\frac{\partial u}{\partial x}$ подставляем его выражение через новые переменные; это выражение находится при помощи дифференцирования первого из равенств (3.6) по x :

$$1 = \left(\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial v} v' \right) \frac{\partial u}{\partial x}; \quad (**)$$

отсюда

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial v} v'}$$

и, значит,

$$y'_x = \frac{\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial v} v'}{\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial v} v'}.$$

Далее, получаем:

$$y''_{x^2} = \left(\frac{\partial y'_x}{\partial u} + \frac{\partial y'_x}{\partial v} v' \right) \frac{\partial u}{\partial x};$$

остается продифференцировать y'_x по u и v и подставить уже известное выражение для $\frac{\partial u}{\partial x}$, чтобы найти производную y''_{x^2} , построенную из u , v , v'_u , v''_{u^2} .

Точно так же находим y'''_{x^3} и т. д.

Можно, однако, поступать и иначе: продолжаем дифференцировать равенство (*) (в еще не «завершенном» виде):

$$\begin{aligned} y''_{x^2} &= \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial v} v' \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial v} v' \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \\ &= \left(\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} v' + \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} v'^2 + \frac{\partial y}{\partial v} v'' \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial v} v' \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \end{aligned}$$

и т. д. Здесь еще нужно заменить производные $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, ... их выражениями через u и v . Выражение для $\frac{\partial u}{\partial x}$ нам уже

известно, а выражения для $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и т. д. найдем при помощи последовательного дифференцирования по x соотношения (**):

$$0 = \left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} v' + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} v'^2 + \frac{\partial x}{\partial v} v'' \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial v} v' \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

и т. д. Таким образом, например, для y''_{x^2} получаем:

$$\begin{aligned} y''_{x^2} &= \frac{\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} v' + \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} v'^2 + \frac{\partial y}{\partial v} v''}{\left(\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial v} v' \right)^2} - \\ &\quad - \left(\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial v} v' \right) \frac{\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} v' + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} v'^2 + \frac{\partial x}{\partial v} v''}{\left(\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial v} v' \right)^3} = \\ &= \frac{\left(\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} v' + \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} v'^2 + \frac{\partial y}{\partial v} v'' \right) \left(\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial v} v' \right)}{\left(\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial v} v' \right)^3} - \\ &\quad - \frac{\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} v' + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} v'^2 + \frac{\partial x}{\partial v} v'' \right) \left(\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial v} v' \right)}{\left(\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial v} v' \right)^3}. \end{aligned}$$

Однако закон образования последовательных производных y'_x, y''_{x^2}, \dots из $u, v, v'_u, v''_{u^2}, \dots$ довольно сложен и нет никакой необходимости его выяснять и запоминать соответствующие формулы даже для первых порядков. Просто следует всякий раз при конкретном задании формул преобразования (3.6) находить выражения для y', y'', \dots так, как это сейчас было продемонстрировано в общем виде.

Подставляя в формулу (3.1) данные и найденные выражения, мы и получим искомое новое выражение для V :

$$\begin{aligned} V &= F \left[x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v), \frac{y'_u + y'_v v'}{x'_u + x'_v v'}, \dots \right] = \\ &= F_3(u, v, v', v'', \dots). \quad (3.7) \end{aligned}$$

Зависимости между «старыми» переменными x, y и «новыми» переменными u, v , т. е. формулы преобразования (3.6), могут быть интерпретированы либо как фор-

мулы, отображающие линию l в плоскости Oxy , заданную уравнением $y=f(x)$, в линию λ в плоскости Ouv , определяемую уравнением $\psi(u, v)=f[\varphi(u, v)]$, либо как формулы преобразования координат (от декартовых прямоугольных координат x, y к криволинейным координатам u, v), причем уравнением данной линии l в криволинейных координатах u, v и будет уравнение

$$\psi(u, v)=f[\varphi(u, v)].$$

В первой из этих интерпретаций преобразование выражения F (см. (3.1)) означает построение такого выражения F_3 (см. (3.7)), что его значение в какой-нибудь точке $Q(u, v)$ линии λ равно значению заданного выражения F в соответствующей точке $P(x, y)$ линии l ; во второй интерпретации указанное преобразование означает построение такого выражения F_3 , что его значение в каждой точке P линии l в другой заданной системе криволинейных координат равно значению исходного выражения F в той же точке P .

Заметим, что если функция φ не зависит от v , а функция ψ не зависит от u , то преобразование (3.6) может быть заменено последовательностью двух преобразований, описанных в п° 68 и 69.

Пример 8. Пусть

$$V = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}.$$

Преобразуем V , принимая v за независимую переменную, а u за функцию, связанные с данными независимой переменной x и функцией y соотношениями:

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v;$$

другими словами, преобразуем выражения для кривизны линии в декартовых координатах x, y к полярным координатам *) u, v (п° 39). Имеем:

$$y' = (u' \sin v + u \cos v) \frac{\partial v}{\partial x},$$

$$1 = (u' \cos v - u \sin v) \frac{\partial v}{\partial x},$$

*) В отличие от употребленной в этом параграфе символики мы в рассматриваемом примере обозначаем функцию не через v , а через u : так здесь удобнее в связи с тем, что в качестве функции обычно служит полярный радиус (u), а в качестве независимой переменной — полярный угол (v). В соответствии с этим в найденных выше формулах, если пожелать воспользоваться ими, необходимо поменять местами u и v .

откуда

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{u' \cos v - u \sin v}.$$

Значит,

$$y' = \frac{u' \sin v + u \cos v}{u' \cos v - u \sin v}.$$

Далее,

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{(u'' \sin v + 2u' \cos v - u \sin v)(u' \cos v - u \sin v)}{(u' \cos v - u \sin v)^3} - \\ &- \frac{(u'' \cos v - 2u' \sin v - u \cos v)(u' \sin v + u \cos v)}{(u' \cos v - u \sin v)^3} = \\ &= \frac{2u'^2 - u''u + u^2}{(u' \cos v - u \sin v)^3}. \end{aligned}$$

Подставляя y' и y'' в выражение для V , находим:

$$\begin{aligned} V &= \frac{2u'^2 - u''u + u^2}{(u' \cos v - u \sin v)^3} \cdot \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{u' \sin v + u \cos v}{u' \cos v - u \sin v}\right)^2\right]^{3/2}} = \\ &= \frac{2u'^2 - u''u + u^2}{(u'^2 + u^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Это и есть выражение для кривизны линии, когда она (линия) определяется уравнением между полярным радиусом и полярным углом любой ее точки.

Отметим, что, находя в п° 36 выражение в криволинейных (ортогональных) координатах для элемента ds длины линии, мы фактически просто преобразовываем выражение $V = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ по формулам преобразования (3.6).

Если зависимости между x , y , u , v разрешены относительно новых переменных u , v , т. е.

$$u = f(x, y), \quad v = g(x, y),$$

то можно или обратить эту систему, выразить x и y через u и v и заменить переменные в согласии с изложенным способом или, принимая в качестве независимой переменной, например, u , а v в качестве ее функции, дифференцировать оба равенства по u нужное число раз. Мы не будем останавливаться на этом последнем приеме, так как рассмотрение его в общем виде для нас не представляет интереса.

§ 2. СЛУЧАЙ ДВУХ НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Обратимся теперь к изложению приемов преобразования дифференциальных выражений в случае двух независимых переменных.

Пусть дано выражение

$$W = F(x, y, z, z'_x, z'_y, z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy}, \dots), \quad (3.8)$$

построенное из констант, независимых переменных x и y , их функции $z = f(x, y)$ и ее производных, определенных в какой-нибудь области D плоскости Oxy .

Так же как и раньше, рассмотрим преобразование выражения (3.8) отдельно при замене только независимых переменных x и y , при замене только функции z и при замене как независимых переменных x и y , так и их функции z .

71. Замена независимых переменных. Пусть вводятся новые независимые переменные u и v , связанные с данными независимыми переменными x и y зависимостями, которые мы предполагаем разрешенными относительно x и y :

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad (3.9)$$

причем функции φ и ψ являются непрерывными вместе со всеми своими производными до требуемого порядка; кроме того, $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0$.

Равенства (3.9) называются формулами преобразования или замены переменных. Задача состоит в том, чтобы подставить в выражение (3.8) вместо x и y соответственно функции $\varphi(u, v)$ и $\psi(u, v)$ и найти новое выражение, уже теперь через переменные u и v , для величины W . Для этого нужно знать, как выражаются через u и v аргументы функции F , т. е. $z, z'_x, z'_y, z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy}, \dots$. Ясно, что

$$z = f[\varphi(u, v), \psi(u, v)] = f_1(u, v);$$

далее для решения поставленной задачи нужно, очевидно, выразить содержащиеся в равенстве (3.8) производные от функции $z = f(x, y)$ по x и по y через производные по u и по v от новой функции $z = f_1(u, v)$ и данных функций $\varphi(u, v)$ и $\psi(u, v)$.

В силу известных правил дифференцирования имеем:

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}; \quad (*)$$

находящиеся здесь производные $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ должны быть заменены их выражениями через переменные u и v , которые можно найти из решения уравнений, полученных после дифференцирования по x и по y формул преобразования (3.9):

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}, & 0 &= \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}, \\ 0 &= \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}, & 1 &= \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}. \end{aligned}$$

Отсюда находим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\frac{\partial y}{\partial v}}{\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}}, & \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{-\frac{\partial x}{\partial v}}{\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}}, \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{-\frac{\partial y}{\partial u}}{\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}}, & \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\frac{\partial x}{\partial u}}{\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}}. \end{aligned} \right\} \quad (**)$$

Подставляя в равенства (*), получаем *):

$$z'_x = \frac{\frac{\partial(z, y)}{\partial(u, v)}}{\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}}, \quad z'_y = \frac{\frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)}}{\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}}. \quad (3.10)$$

Далее:

$$\left. \begin{aligned} z''_{xx} &= \frac{\partial z'_x}{\partial x} = \frac{\partial z'_x}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z'_x}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}, \\ z''_{yy} &= \frac{\partial z'_y}{\partial y} = \frac{\partial z'_y}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z'_y}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}, \\ z''_{xy} &= \frac{\partial z'_x}{\partial y} = \frac{\partial z'_x}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z'_x}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}, \end{aligned} \right\} \quad (***)$$

*) Можно поступать иначе: продифференцировать z как сложную функцию от u и v по этим переменным и получить два равенства, из которых также легко найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

причем производные $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}$ заменяются в соответствии с формулами (***) и т. д.

Порядок действий можно принять несколько иным, а именно можно, находя вторые производные от z по x и y , дифференцировать не окончательные выражения (3.10) для z'_x и z'_y через u и v , а промежуточные (*), заменяя затем производные от u и v по x и y их выражениями через u и v по формулам (**). При этом будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} z''_{xx} &= \frac{\partial z'_x}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \\ &\quad + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x}, \\ z''_{yy} &= \frac{\partial z'_y}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \\ &\quad + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y}, \\ z''_{xy} &= \frac{\partial z'_x}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \\ &\quad + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right). \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

Точно так же можно находить и высшие производные. Подставляя в формулу (3.8) данные и найденные выражения для z', z'', \dots , мы и получим искомое новое выражение для W :

$$\begin{aligned} W &= F[x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v), z = \\ &= f_1(u, v), z'_x, z'_y, z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy}, \dots] = \\ &= F_1(u, v, z, z'_u, z'_v, z''_{uu}, z''_{uv}, z''_{vv}, \dots). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Остановимся специально на случае, когда u и v — поллярные координаты. Тогда в соответствии с формулами (3.10),

(***), а также (**) будем иметь:

$$z'_x = \frac{z'_u u \cos v - z'_v \sin v}{u} = z'_u \cos v - z'_v \frac{\sin v}{u},$$

$$z'_y = \frac{z'_v \cos v + z'_u u \sin v}{u} = z'_u \sin v + z'_v \frac{\cos v}{u}, \quad (3.13)$$

$$z''_{xx} = \left(z''_{uu} \cos v - z''_{uv} \frac{\sin v}{u} + z'_v \frac{\sin v}{u^2} \right) \cos v -$$

$$- \left(z''_{uv} \cos v - z'_u \sin v - z''_{vv} \frac{\sin v}{u} - z'_v \frac{\cos v}{u} \right) \frac{\sin v}{u} =$$

$$= z''_{uu} \cos^2 v - 2z''_{uv} \frac{\sin v \cos v}{u} +$$

$$+ 2z'_v \frac{\sin v \cos v}{u^2} + z'_u \frac{\sin^2 v}{u} + z''_{vv} \frac{\sin^2 v}{u^2}, \quad (3.13')$$

$$z''_{yy} = \left(z''_{uu} \sin v + z''_{uv} \frac{\cos v}{u} - z'_v \frac{\cos v}{u^2} \right) \sin v +$$

$$+ \left(z''_{uv} \sin v + z'_u \cos v + z''_{vv} \frac{\cos v}{u} - z'_v \frac{\sin v}{u} \right) \frac{\cos v}{u} =$$

$$= z''_{uu} \sin^2 v + 2z''_{uv} \frac{\sin v \cos v}{u} -$$

$$- 2z'_v \frac{\sin v \cos v}{u^2} + z'_u \frac{\cos^2 v}{u} + z''_{vv} \frac{\cos^2 v}{u^2}, \quad (3.13'')$$

$$z''_{xy} = \left(z''_{uu} \cos v - z''_{uv} \frac{\sin v}{u} + z'_v \frac{\sin v}{u^2} \right) \sin v +$$

$$+ \left(z''_{uv} \cos v - z'_u \sin v - z''_{vv} \frac{\sin v}{u} - z'_v \frac{\cos v}{u} \right) \frac{\cos v}{u} =$$

$$= z''_{uu} \cos v \sin v + z''_{uv} \frac{\cos 2v}{u} - z'_v \frac{\cos 2v}{u^2} -$$

$$- z'_u \frac{\sin v \cos v}{u} - z''_{vv} \frac{\sin v \cos v}{u^2} \quad (3.13''')$$

и т. д.

Зависимости между «старыми» переменными x , y и «новыми» переменными u , v , т. е. формулы преобразования (3.9) могут быть интерпретированы либо как формулы, отображающие данную область D плоскости Oxy в некоторую область Δ плоскости Ouv , либо как формулы преобразования координат в области D (от декартовых прямоугольных координат x , y к криво-

линейным координатам u, v). В первой из этих интерпретаций указанное преобразование выражения F (см. (3.8)) означает построение такого выражения F_1 (см. (3.12)), что его значение в какой-нибудь точке $Q(u, v)$ области Δ равно значению заданного выражения F в соответствующей точке $P(x, y)$ в области D ; во второй интерпретации указанное преобразование означает построение такого выражения F_1 , что его значение в каждой точке P области D в другой заданной системе криволинейных координат равно значению исходного выражения F в той же точке P .

Если зависимости между u, v и x, y разрешены относительно u и v , то производные $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ находятся сразу прямым дифференцированием этих зависимостей по x и по y . В окончательных формулах нужно только x и y выразить через u и v .

Нет никакой необходимости запоминать найденные выражения для последовательных частных производных; в каждом конкретном случае преобразований следует осуществить те операции, которые были здесь продемонстрированы в общем виде.

Пример 1. Пусть

$$W = y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Преобразуем W к полярным координатам u и v ; значит, $x = u \cos v$, $y = u \sin v$. Воспользовавшись готовыми формулами (3.13), получаем:

$$\begin{aligned} W &= u \sin v \left(z'_u \cos v - z'_v \frac{\sin v}{u} \right) - \\ &\quad - u \cos v \left(z'_u \sin v + z'_v \frac{\cos v}{u} \right) = -z'_v. \end{aligned}$$

Нельзя не обратить внимания на значительное упрощение выражения для W . Дифференциальное уравнение $W=0$ при этом сводится к весьма простому соотношению:

$$z'_v = 0,$$

выражающему тот факт, что z не зависит от v , т. е. что $z = \Phi(u)$, где Φ — произвольная дифференцируемая функция. Итак, уравнение

$$y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

имеет такое решение:

$$z = \Phi(\sqrt{x^2 + y^2}),$$

т. е. интегральной поверхностью уравнения является любая поверхность вращения, осью которой служит ось Oz .

К этому же выводу мы придем, если преобразуем W к другим независимым переменным u и v , связанным с x и y , так:

$$u = x, \quad v = x^2 + y^2.$$

Действительно,

$$z'_x = z'_u \cdot 1 + z'_v \cdot 2x, \quad z'_y = z'_v \cdot 2y$$

(пока не будем здесь заменять x и y через u и v). Подставляя находим:

$$W = (z'_u y + z'_v 2xy) - z'_v 2xy = yz'_u = \sqrt{v - u^2} z'_u.$$

Но если $W = 0$, то $z'_u = 0$ и, следовательно, $z = \Psi(v) = \Psi(x^2 + y^2)$, где Ψ — произвольная дифференцируемая функция. Мы получили то же самое решение, что и раньше.

Пример 2. Пусть

$$W = x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Преобразуем W к новым независимым переменным u и v при условии, что

$$x = u, \quad y = \frac{u}{1 + uv}.$$

Здесь легко обратить формулы преобразования:

$$u = x, \quad v = \frac{1}{y} - \frac{1}{x}.$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot 1 + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{1}{x^2}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot 0 + \frac{\partial z}{\partial v} \left(-\frac{1}{y^2}\right). \end{aligned}$$

Подставляя, находим:

$$W = \frac{\partial z}{\partial u} x^2 + \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v} = u^2 \frac{\partial z}{\partial u}.$$

Мы видим, насколько упростилось заданное выражение. Если нужно решить дифференциальное уравнение

$$W = x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

то выполненное преобразование позволяет заменить его весьма простым уравнением:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = 0.$$

Этому уравнению удовлетворяет любая дифференцируемая функция $z = \Phi(u)$, а, значит, исходному уравнению — функция

$$z = \Phi\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right).$$

Пример 3. Пусть

$$W = A \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + D \frac{\partial z}{\partial x} + E \frac{\partial z}{\partial y} + Fz$$

Преобразуем W к новым независимым переменным u и v при условии, что

$$u = a_1 x + b_1 y, \quad v = a_2 x + b_2 y,$$

где a_1, b_1, a_2, b_2 — постоянные и якобиан системы отличен от нуля: $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$.

Имеем:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} a_1 + \frac{\partial z}{\partial v} a_2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} b_1 + \frac{\partial z}{\partial v} b_2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} a_1^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} a_1 a_2 + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} a_2^2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} b_1^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} b_1 b_2 + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} b_2^2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} a_1 b_1 + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} (a_1 b_2 + a_2 b_1) + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} a_2 b_2.$$

Подставляя в выражение W и приводя подобные члены, получим:

$$W = A_1 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2B_1 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + C_1 \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + D_1 \frac{\partial z}{\partial u} + E_1 \frac{\partial z}{\partial v} + F_1 z,$$

где новые коэффициенты имеют значения:

$$A_1 = A a_1^2 + 2B a_1 b_1 + C b_1^2,$$

$$B_1 = A a_1 a_2 + B (a_1 b_2 + a_2 b_1) + C b_1 b_2,$$

$$C_1 = A a_2^2 + 2B a_2 b_2 + C b_2^2,$$

$$D_1 = D a_1 + E b_1,$$

$$E_1 = D a_2 + E b_2,$$

$$F_1 = F.$$

Итак, мы видим, что любое (невырожденное) аффинное отображение плоскости Oxy в плоскость Ouv не изменяет общего вида

заданного, линейного относительно функции z и ее производных, выражения. Но уже сейчас следует заметить, что большой свободой выбора четырех постоянных параметров a_1, b_1, a_2, b_2 аффинного отображения стараются так воспользоваться, чтобы преобразованное выражение было бы как можно проще (см. теорию дифференциальных уравнений математической физики).

72. Замена функции. Замена в дифференциальном выражении (3.8) только функции двух независимых переменных z на w производится совершенно так же, как и в выражении (3.1) функции одной независимой переменной. Если дана формула преобразования

$$z = \psi(w), \quad (3.14)$$

то

$$\begin{aligned} z'_x &= \psi'(w) w'_x, & z'_y &= \psi'(w) w'_y, \\ z''_{x^2} &= \psi''(w) w'^2_x + \psi'(w) w''_{x^2}, \\ z''_{y^2} &= \psi''(w) w'^2_y + \psi'(w) w''_{y^2}, \\ z''_{xy} &= \psi''(w) w'_x w'_y + \psi'(w) w''_{xy} \end{aligned}$$

и т. д.

Подставляя в формулу (3.8) данные и найденные выражения, мы и получим искомое выражение для W :

$$\begin{aligned} W &= F[x, y, z = \psi(w), \psi'(w) w'_x, \psi'(w) w'_y, \dots] = \\ &= F_2(x, y, \psi, w, \psi', w'_x, w'_y, \dots) \end{aligned} \quad (3.15)$$

В преобразовании (3.14) возможны два случая: 1) ψ — известная функция одного аргумента w — новой функции двух независимых переменных x и y ; 2) ψ — новая функция одного аргумента w — известной функции тех же двух независимых переменных x и y .

Пример 4. Пусть

$$W = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + kz$$

($k = \text{const}$). Преобразуем W к новой функции ψ при условии, что $z = \psi(\sqrt{x^2 + y^2})$ или $z = \psi(r)$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ *).

*) Так как выражение для W симметрично относительно производных по x и y , то естественно ожидать, что замена, приводящая к упрощению заданного выражения, должна быть симметрична относительно x и y .

Имеем:

$$\begin{aligned} z'_x &= \psi'(r) \frac{x}{r}, & z''_{xx} &= \psi''(r) \frac{x^2}{r^2} + \psi'(r) \frac{y^2}{r^3}, \\ z'_y &= \psi'(r) \frac{y}{r}, & z''_{yy} &= \psi''(r) \frac{y^2}{r^2} + \psi'(r) \frac{x^2}{r^3} \end{aligned}$$

(вторая строка вследствие симметрии получается из первой строки заменой x на y и y на x). Подставляя, находим:

$$W = \psi''(r) + \frac{1}{r} \psi'(r) + k\psi(r).$$

Выражение для W в известном смысле значительно упростилось, так как теперь мы имеем дело с функцией лишь одной независимой переменной. Если нужно решить дифференциальное уравнение с частными производными: $W = 0$, то с помощью указанного преобразования мы сведем это решение к решению обыкновенного линейного дифференциального уравнения второго порядка:

$$\psi''(r) + \frac{1}{r} \psi'(r) + k\psi(r) = 0.$$

(Между прочим, последнее обыкновенное линейное дифференциальное уравнение посредством замены $\psi = \psi_1(\ln r)$ сводится еще к такому линейному уравнению:

$$\psi_1''(v) + ke^{2v} \psi_1(v) = 0;$$

см. пример 7 в п° 69.)

При $k = 0$ легко находим, что

$$\psi(r) = C_1 \ln r + C_2$$

и, значит, уравнение

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

имеет, в частности, решение

$$z = \ln r = \ln \sqrt{x^2 + y^2},$$

что легко проверить и непосредственно. Других решений вида $z = \psi(r)$ это уравнение не имеет.

73. Замена независимых переменных и функций. Заменяя в выражении (3.8) совместно и независимые переменные x и y и их функцию z новыми переменными u , v и w , будем предполагать, что «старые» и «новые» переменные связаны между собой зависимостями, разрешенными относительно данных переменных x , y и z :

$$x = \varphi(u, v, w), \quad y = \psi(u, v, w), \quad z = \chi(u, v, w). \quad (3.16)$$

причем функции φ , ψ и χ непрерывны вместе со всеми своими производными до нужного порядка.

Равенства (3.16) называются *формулами преобразования или замены переменных*.

Так как z есть некоторая функция от x и y , то между тремя переменными u , v и w должна существовать функциональная связь и можно считать, что, например, w является функцией от независимых переменных u и v , соответствующей данной функции $z = f(x, y)$.

Дифференцируя третье из равенств (3.16) по x и по y , получим:

$$\left. \begin{aligned} z'_x &= \left(\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial u} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial z}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial v} \right) \frac{\partial v}{\partial x}, \\ z'_y &= \left(\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial u} \right) \frac{\partial u}{\partial y} + \left(\frac{\partial z}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial v} \right) \frac{\partial v}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (*)$$

В этих равенствах еще нужно заменить производные $\frac{\partial u}{\partial x}$,

$\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ их выражениями через новые переменные;

эти выражения можно найти при помощи дифференцирования первых двух равенств (3.16) по x и по y :

$$\left. \begin{aligned} 1 &= \left(\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial u} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial x}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial v} \right) \frac{\partial v}{\partial x}, \\ 0 &= \left(\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial u} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial v} \right) \frac{\partial v}{\partial x}, \\ 0 &= \left(\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial u} \right) \frac{\partial u}{\partial y} + \left(\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial x}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial v} \right) \frac{\partial v}{\partial y}, \\ 1 &= \left(\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial u} \right) \frac{\partial u}{\partial y} + \left(\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial v} \right) \frac{\partial v}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (**)$$

Из первых двух соотношений (**) получим $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial x}$,

а из вторых двух соотношений (**) — $\frac{\partial u}{\partial y}$ и $\frac{\partial v}{\partial y}$. Всякая следующая производная находится соответствующим дифференцированием предыдущей производной, выраженной через u , v , w и w'_u , w'_v , ..., на основании таких же соображений, кото-

рые были использованы только что при отыскании z'_x и z'_y . Например,

$$z''_{x^2} = \frac{\partial z'_x}{\partial x} = \left(\frac{\partial z'_x}{\partial u} + \frac{\partial z'_x}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial u} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial z'_x}{\partial v} + \frac{\partial z'_x}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial v} \right) \frac{\partial v}{\partial x};$$

остается продифференцировать z'_x по u , v , w и подставить уже известные выражения для $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial x}$, чтобы найти производную z''_{x^2} как функцию от u , v , w'_u , w'_v , w''_{uv} , w''_{vu} , w''_{vv} .

Можно, однако, поступать и иначе: продолжая дифференцировать равенства (*) в еще не завершенном виде (т. е. в виде, когда вместо u'_x , u'_y , v'_x , v'_y еще не подставлены их выражения через новые переменные), заменять затем высшие производные от u и v по x и по y их выражениями, находимыми посредством дифференцирования соотношений (***) по x и по y (см. п.° 70).

Так же как и раньше, здесь нет никакой необходимости запоминать окончательные формулы.

Подставляя в формулу (3.8) данные и найденные выражения, мы и получим искомое новое выражение для W :

$$\begin{aligned} M &= F[x = \varphi(u, v, w), y = \psi(u, v, w), z = \\ &= \chi(u, v, w), z'_x, z'_y, \dots] = F_3(u, v, w, w'_u, w'_v, \dots). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Зависимости между «старыми» переменными x, y, z и «новыми» переменными u, v, w , т. е. формулы преобразования (3.16), могут быть интерпретированы либо как формулы, отображающие поверхность S в пространстве $Oxyz$, заданную уравнением $z = f(x, y)$, в поверхность Σ в пространстве $Ouvw$, определяемую уравнением $\chi(u, v, w) = f[\varphi(u, v, w), \psi(u, v, w)]$, либо как формулы преобразования координат (от декартовых прямоугольных координат x, y, z к криволинейным координатам u, v, w), причем уравнением данной поверхности S в криволинейных координатах u, v, w и будет уравнение

$$\chi(u, v, w) = f[\varphi(u, v, w), \psi(u, v, w)].$$

В первой из этих интерпретаций указанное преобразование выражения F (см. (3.8)) означает построение такого

выражения F_3 (см. (3.17)), что его значение в какой-нибудь точке $Q(u, v, w)$ поверхности Σ равно значению заданного выражения F в соответствующей точке $P(x, y, z)$ поверхности S ; во второй интерпретации указанное преобразование означает построение такого выражения F_3 , что его значение в каждой точке P поверхности S в другой заданной системе криволинейных координат равно значению исходного выражения F в той же точке P .

Заметим, что если функция χ не зависит от u и v , а функции φ и ψ не зависят от w , то преобразование (3.16) может быть заменено последовательностью двух преобразований, описанных в п° п° 71 и 72.

Пример 5. Пусть

$$W = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Преобразуем W , принимая u и v за независимые переменные, а w за функцию, связанные с данными независимыми переменными x и y и функцией z соотношениями:

$$x = \frac{u+v}{2}, \quad y = \frac{u-v}{2}, \quad z = \frac{u^2 - v^2}{4} - w.$$

Имеем:

$$z'_x = \left(\frac{u}{2} - w'_u \right) u'_x - \left(\frac{v}{2} + w'_v \right) v'_x,$$

$$z'_y = \left(\frac{u}{2} - w'_u \right) u'_y - \left(\frac{v}{2} + w'_v \right) v'_y$$

и

$$1 = \frac{1}{2} u'_x + \frac{1}{2} v'_x, \quad 0 = \frac{1}{2} u'_y + \frac{1}{2} v'_y,$$

$$0 = \frac{1}{2} u'_x - \frac{1}{2} v'_x; \quad 1 = \frac{1}{2} u'_y - \frac{1}{2} v'_y.$$

Из последних равенств находим:

$$u'_x = 1, \quad v'_x = 1, \quad u'_y = 1, \quad v'_y = -1.$$

Следовательно,

$$z'_x = \frac{u-v}{2} - (w'_u + w'_v), \quad z'_y = \frac{u+v}{2} - (w'_u - w'_v).$$

Далее имеем:

$$z''_{x^2} = \frac{1}{2} - (w''_{u^2} + w''_{uv}) - \frac{1}{2} - (w''_{uv} + w''_{v^2}) = -(w''_{u^2} + 2w''_{uv} + w''_{v^2}),$$

$$z''_{xy} = \frac{1}{2} - (w''_{u^2} + w''_{uv}) + \frac{1}{2} + (w''_{uv} + w''_{v^2}) = 1 - (w''_{u^2} - w''_{v^2}),$$

$$z''_{y^2} = \frac{1}{2} - (w''_{u^2} - w''_{uv}) - \frac{1}{2} + (w''_{uv} - w''_{v^2}) = -(w''_{u^2} - 2w''_{uv} + w''_{v^2}).$$

Подставляя в заданное выражение, получаем:

$$W = -4w''_{u^2} + 2,$$

так что, если бы мы решали дифференциальное уравнение $W = 0$, то в результате выполненного преобразования пришли бы к простому уравнению:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} = \frac{1}{2},$$

из которого легко найти, что

$$w = \frac{1}{4} u^2 + \Phi_1(v) u + \Phi_2(v),$$

где $\Phi_1(v)$ и $\Phi_2(v)$ — произвольные дважды дифференцируемые функции v . Возвращаясь к «старым» переменным, находим:

$$z = xy - \frac{1}{4} (x+y)^2 - \Phi_1(x-y)(x+y) - \Phi_2(x-y),$$

что можно записать просто так:

$$z = \Phi_1(x-y)(x+y) + \Phi_2(x-y),$$

где Φ_1 и Φ_2 — произвольные дважды дифференцируемые функции.

Отметим, что, находя в § 7 гл. II выражение в криволинейных (ортогональных) координатах для элемента dq площади поверхности, мы фактически просто преобразовываем выражение

$$W = \sqrt{d\sigma_{xy}^2 + d\sigma_{xz}^2 + d\sigma_{yz}^2} = \sqrt{EG - F^2} du dv$$

по формулам преобразования (3.16).

Если зависимости между x, y, z, u, v, w разрешены относительно новых переменных u, v, w , т. е.

$$u = f(x, y, z), \quad v = g(x, y, z), \quad w = h(x, y, z),$$

то можно или обратить эту систему, выразить x, y, z через u, v, w и заменить переменные в соответствии с изложенным

способом или, принимая u и v в качестве независимых переменных, а w в качестве их функции, дифференцировать все три равенства по u и v нужное число раз. Мы не будем останавливаться на этом последнем приеме, так как рассмотрение его в общем виде для нас не представляет интереса.

§ 3. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ» И «УСЛОВИЙ РЕГУЛЯРНОСТИ»

Рассмотрим преобразования к новым («ортогональным») независимым переменным двух дифференциальных выражений, играющих важную роль во многих вопросах анализа:

$$W = S\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2, \quad W = S\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

где $z = z(x, y)$ — функция независимых переменных x и y ; они называются иногда *дифференциальными параметрами Лапе* для функции z соответственно первого и второго порядков и обозначаются через $\Delta_1(z)$ и $\Delta_2(z)$:

$$\Delta_1(z) = S\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2, \quad \Delta_2(z) = S\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right).$$

Заметим, что $\Delta_1(z)$ есть не что иное, как h_z^2 (см. п° 35), а $\Delta_2(z)$ — так называемый *лапласиан* для функции z , который часто, если нет опасности смешения понятий, обозначается с помощью символа Δ без индекса 2, т. е.

$$\Delta(z) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Кроме того, мы выразим в криволинейных (ортогональных) координатах условия регулярности плоского отображения.

74. Параметр первого порядка. Преобразуем параметр первого порядка

$$W = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$$

к новым независимым переменным u и v при условии, что они образуют систему криволинейных ортогональных координат:

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad (3.18)$$

причем

$$S\left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v}\right) = 0$$

(п° 34). В соответствии с равенствами (3.10) имеем:

$$W = z_x'^2 + z_y'^2 = \frac{\left[\frac{\partial(z, y)}{\partial(u, v)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)}\right]^2}{\left[\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right]^2};$$

раскрывая квадраты якобианов в числителе и принимая во внимание условие ортогональности, находим:

$$W = \frac{z_u'^2 l_v^2 + z_v'^2 l_u^2}{\left[\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right]^2},$$

где l_u и l_v — коэффициенты Ламе данной системы координат (п° 35). Квадрат же якобиана в знаменателе в случае ортогональности системы, как известно (п° 36), равен $l_u^2 l_v^2$, что легко проверить и непосредственно. Поэтому

$$W = \frac{z_u'^2 l_v^2 + z_v'^2 l_u^2}{l_u^2 l_v^2} = \frac{z_u'^2}{l_u^2} + \frac{z_v'^2}{l_v^2} = h_u^2 z_u'^2 + h_v^2 z_v'^2,$$

где h_u и h_v — дифференциальные параметры первого порядка системы, и так как $W = h_z^2$, то

$$h_z^2 = h_u^2 z_u'^2 + h_v^2 z_v'^2.$$

В частности, если $h_u = h_v = h$ (и, значит, $l_u = l_v = l = \frac{1}{h}$), т. е. если данная система координат (3.18) определяет регулярное отображение (см. п° 23 *), то h_z^2 остается

*) Действительно, равенство $h_u = h_v$ или, что все равно для ортогональной системы, равенство $l_u = l_v$ есть необходимое и достаточное условие того, что отображение (3.18) регулярное. Необходимость легко проверить непосредственно, а достаточность можно доказать так: из условия ортогональности (п° 34):

$$\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} = 0$$

при преобразовании (3.18) «с точностью до масштабного множителя» инвариантным:

$$\Delta_1(z) = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = h^2 \left[\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 \right].$$

При $h=1$ имеет место полная инвариантность. Это будет, например, при простом передвижении системы декартовых прямоугольных координат, когда (см. п° 38):

$$x = a'_1 u + b'_1 v + c'_1, \quad y = a'_2 u + b'_2 v + c'_2,$$

причем

$$a'_1 a'_2 + b'_1 b'_2 = 0 \quad \text{и} \quad a'^2_1 + a'^2_2 = b'^2_1 + b'^2_2 = 1.$$

Если u и v — полярные координаты, то (см. п° 39)

$$l_u = 1, \quad l_v = u \quad \text{и} \quad h^2_z = z'^2_u + \frac{1}{u^2} z'^2_v.$$

Принимая обычные обозначения r и φ для полярных координат, можем записать:

$$\Delta_1(z) = h^2_z = z'^2_x + z'^2_y = z'^2_r + \frac{1}{r^2} z'^2_\varphi.$$

следует, что

$$\frac{\frac{\partial y}{\partial u}}{\frac{\partial x}{\partial u}} = - \frac{\frac{\partial y}{\partial v}}{\frac{\partial x}{\partial v}} (=k), \quad \text{т. е.} \quad \frac{\partial y}{\partial u} = k \frac{\partial x}{\partial u}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -k \frac{\partial y}{\partial v}.$$

Подставляя в данное равенство

$$l^2_u = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 = l^2_v,$$

находим:

$$(1+k^2) \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 = (1+k^2) \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2,$$

т. е.

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2$$

и, значит,

$$\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2.$$

Принимая во внимание условие ортогональности, приходим к условиям регулярности (п° 23):

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial v}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{\partial y}{\partial u} \quad \text{или} \quad \frac{\partial x}{\partial u} = -\frac{\partial y}{\partial v}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial y}{\partial u}.$$

75. Параметр второго порядка (лапласиан). Преобразуем параметр второго порядка (лапласиан функции z)

$$W = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

к тем же переменным u и v , что и в п° 74. Для этого сложим первые два равенства (3.11):

$$\Delta_2(z) = \Delta_1(u) \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \Delta_2(u) \frac{\partial z}{\partial u} + \Delta_1(v) \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + \Delta_2(v) \frac{\partial z}{\partial v}. \quad (*)$$

Так как система координат Ouv предположена ортогональной, то (см. п° 34) остальные, невыписанные члены в сумме $(*)$ равны нулю; кроме того,

$$\Delta_1(u) = h_u^2 = \frac{1}{l_u^2} = \frac{1}{S\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2}, \quad \Delta_1(v) = h_v^2 = \frac{1}{l_v^2} = \frac{1}{S\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2}$$

и значит, нам остается найти выражения через u и v только для $\Delta_2(u)$ и $\Delta_2(v)$. С этой целью в тождестве $(*)$ положим последовательно $z = x$, $z = y$; тогда получим:

$$0 = h_u^2 \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \Delta_2(u) \frac{\partial x}{\partial u} + h_v^2 \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + \Delta_2(v) \frac{\partial x}{\partial v},$$

$$0 = h_u^2 \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + \Delta_2(u) \frac{\partial y}{\partial u} + h_v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} + \Delta_2(v) \frac{\partial y}{\partial v}.$$

Из этих двух равенств найдем $\Delta_2(u)$ и $\Delta_2(v)$; проще всего это сделать так: умножим первое равенство на $\frac{\partial x}{\partial u}$, а второе на $\frac{\partial y}{\partial u}$ и сложим:

$$\begin{aligned} 0 = h_u^2 S\left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\right) + \Delta_2(u) l_u^2 + h_v^2 S\left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\right) + \\ + \Delta_2(v) S\left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v}\right). \end{aligned} \quad (**)$$

Но мы имеем:

$$S\left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v}\right) = 0$$

вследствие ортогональности системы (3.18);

$$S\left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\right) = \frac{1}{2} \frac{\partial l_u^2}{\partial u},$$

что проверяется прямым дифференцированием

$$l_u^2 = S\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2$$

по u ;

$$S\left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\right) = -S\left(\frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\right) = -\frac{1}{2} \frac{\partial l_v^2}{\partial u},$$

что проверяется прямым дифференцированием сначала $S\left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v}\right) = 0$ по v , а затем $l_v^2 = S\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2$ по u . Подставляя в равенство (**), находим:

$$\Delta_2(u) = \frac{1}{l_u^2} \left[-\frac{1}{2l_u^2} \frac{\partial l_u^2}{\partial u} + \frac{1}{2l_v^2} \frac{\partial l_v^2}{\partial u} \right] = \frac{1}{l_u^2} \left(-\frac{1}{l_u} \frac{\partial l_u}{\partial u} + \frac{1}{l_v} \frac{\partial l_v}{\partial u} \right).$$

Совершенно аналогично

$$\Delta_2(v) = \frac{1}{l_v^2} \left(-\frac{1}{l_v} \frac{\partial l_v}{\partial v} + \frac{1}{l_u} \frac{\partial l_u}{\partial v} \right).$$

Заменяя в равенстве (*) $\Delta_2(u)$ и $\Delta_2(v)$, получим:

$$\begin{aligned} \Delta_2(z) &= \frac{1}{l_u^2} \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{1}{l_u^2} \left(-\frac{1}{l_u} \frac{\partial l_u}{\partial u} + \frac{1}{l_v} \frac{\partial l_v}{\partial u} \right) \frac{\partial z}{\partial u} + \\ &+ \frac{1}{l_v^2} \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + \frac{1}{l_v^2} \left(-\frac{1}{l_v} \frac{\partial l_v}{\partial v} + \frac{1}{l_u} \frac{\partial l_u}{\partial v} \right) \frac{\partial z}{\partial v} = \\ &= \frac{1}{l_u l_v} \left[\left(\frac{l_v}{l_u} \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{-l_v \frac{\partial l_u}{\partial u} + l_u \frac{\partial l_v}{\partial u}}{l_u^2} \frac{\partial z}{\partial u} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{l_u}{l_v} \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + \frac{-l_u \frac{\partial l_v}{\partial v} + l_v \frac{\partial l_u}{\partial v}}{l_v^2} \frac{\partial z}{\partial v} \right) \right], \end{aligned}$$

что можно переписать так:

$$\Delta_2(z) = \frac{1}{l_u l_v} \left[\left(\frac{l_v}{l_u} \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{l_v}{l_u} \right) \frac{\partial z}{\partial u} \right) + \left(\frac{l_u}{l_v} \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{l_u}{l_v} \right) \frac{\partial z}{\partial v} \right) \right],$$

или еще короче и обобщимее:

$$\Delta_2(z) = \frac{1}{l_u l_v} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{l_v}{l_u} \frac{\partial z}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{l_u}{l_v} \frac{\partial z}{\partial v} \right) \right]. \quad (3.19)$$

Это и есть то выражение для лапласиана в криволинейных ортогональных координатах, которое мы хотели вывести.

В частности, если $l_u = l_v = l$ (и, значит, $h_u = h_v = h = \frac{1}{l}$), т. е. если данная система координат определяет регулярное отображение, то $\Delta_2(z)$ остается при преобразовании (3.18) «с точностью до масштабного множителя» инвариантным:

$$\Delta_2(z) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = h^2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \right). \quad (3.20)$$

При $h = 1$ имеет место полная инвариантность. Это будет, например, при простом передвижении системы декартовых прямоугольных координат.

Сформулируем полученный результат для случая регулярного отображения.

Пусть область в плоскости Oxu регулярно отображена в область плоскости Ouv или, что все равно, она отнесена к системе криволинейных ортогональных координат Ouv с равными коэффициентами Ламе. Тогда отношение дифференциального параметра Ламе первого порядка в переменных x, y к такому же параметру в переменных u, v равно коэффициенту искажения при переходе из плоскости Oxu в плоскость Ouv .

То же самое имеет место и для параметра Ламе второго порядка (лапласиана).

Действительно, при этом

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \right| = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = h^2 = \frac{1}{l^2} = \frac{1}{\left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2}.$$

Из формулы (3.20), в частности, следует, что если функция z гармоническая в переменных x и y , то она будет гармонической и в переменных u и v ; это кратко выражают словами: *свойство гармоничности функции сохраняется при регулярном отображении.*

Зная коэффициенты Ламе для употребительных систем криволинейных ортогональных координат на плоскости, рассмотренных в §§ 3—5 гл. II, можно легко, по общей формуле (3.19), записать выражения для *лапласиана* в данной системе координат *):

I. В полярных координатах:

$$\begin{aligned}\Delta_2(z) &= \frac{1}{u} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(u \frac{\partial z}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{u} \frac{\partial z}{\partial v} \right) \right] = \\ &= \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{1}{u} \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 z}{\partial v^2},\end{aligned}$$

или в обычных обозначениях

$$\Delta_2(z) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2}.$$

II. В вырожденных эллиптических координатах:

$$\Delta_2(z) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u - \cos^2 v} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \right).$$

III. В параболических координатах:

$$\Delta_2(z) = \frac{1}{4(u^2 + v^2)} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \right).$$

IV. В биполярных координатах:

$$\Delta_2(z) = (\operatorname{ch} u + \cos v) \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \right).$$

Последние три системы координат характерны тем, что $l_u = l_v$, т. е. что определяемые ими отображения регулярны.

76. Условия регулярности. Пусть дано отображение

$$z_1 = z_1(x, y) \quad z_2 = z_2(x, y), \quad (3.21)$$

регулярное в некоторой области D плоскости Oxy :

$$\frac{\partial z_1}{\partial x} = \pm \frac{\partial z_2}{\partial y}, \quad \frac{\partial z_1}{\partial y} = \mp \frac{\partial z_2}{\partial x}. \quad (*)$$

*) Конечно, всякий раз, когда задана конкретная система криволинейных ортогональных координат, а возможность использовать общую формулу (3.19) отсутствует, можно с помощью ряда последовательных дифференцирований, повторяя путь, описанный нами в общем виде, найти искомое выражение для лапласиана.

Отобразим (гомеоморфно) область D в область Δ плоскости Ouv с помощью системы функций:

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v) \quad (3.22)$$

при условии, что $S\left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v}\right) = 0$, другими словами, отнесем область D к системе криволинейных ортогональных координат Ouv (3.22) и найдем выражения для условий (*) регулярности системы (3.21) в переменных u и v .

В соответствии с формулами (3.10) имеем:

$$\frac{\frac{\partial(z_1, y)}{\partial(u, v)}}{\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}} = \pm \frac{\frac{\partial(x, z_2)}{\partial(u, v)}}{\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}}, \quad \frac{\frac{\partial(x, z_1)}{\partial(u, v)}}{\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}} = \mp \frac{\frac{\partial(z_2, y)}{\partial(u, v)}}{\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}},$$

т. е.

$$\frac{\partial(z_1, y)}{\partial(u, v)} = \pm \frac{\partial(x, z_2)}{\partial(u, v)}, \quad \frac{\partial(x, z_1)}{\partial(u, v)} = \mp \frac{\partial(z_2, y)}{\partial(u, v)},$$

или, раскрывая определители,

$$\begin{aligned} \frac{\partial z_1}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial z_1}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} &= \pm \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z_2}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial z_2}{\partial u} \right), \\ \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z_1}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial z_1}{\partial u} &= \mp \left(\frac{\partial z_2}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial z_2}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right). \end{aligned}$$

Умножая первое из этих равенств на $\frac{\partial y}{\partial v}$, а второе — на $-\frac{\partial x}{\partial v}$ и затем складывая, получим:

$$l_v^2 \frac{\partial z_1}{\partial u} = \pm \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right) \frac{\partial z_2}{\partial v};$$

точно так же, умножая первое равенство на $-\frac{\partial y}{\partial u}$, а второе — на $\frac{\partial x}{\partial u}$ и затем складывая, получим:

$$l_u^2 \frac{\partial z_1}{\partial v} = \mp \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right) \frac{\partial z_2}{\partial u}.$$

Так как $\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \left(= \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right)$ вследствие ортогональности системы (3.22) (см. п° 36) равно $l_u l_v$, то мы приходим к таким условиям регулярности:

$$l_v \frac{\partial z_1}{\partial u} = \pm l_u \frac{\partial z_2}{\partial v}, \quad l_u \frac{\partial z_1}{\partial v} = \mp l_v \frac{\partial z_2}{\partial u}, \quad (**)$$

или в более симметричной записи

$$h_u \frac{\partial z_1}{\partial u} = \pm h_v \frac{\partial z_2}{\partial v}, \quad h_v \frac{\partial z_1}{\partial v} = \mp h_u \frac{\partial z_2}{\partial u}. \quad (***)$$

Например, в полярных координатах r, φ условия регулярности отображения (*) запишутся так:

$$r \frac{\partial z_1}{\partial r} = + \frac{\partial z_2}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial z_1}{\partial \varphi} = - r \frac{\partial z_2}{\partial r}.$$

Если $l_u = l_v$, т. е. если отображение (3.22) регулярно, то условия регулярности данной системы сохраняют свой вид:

$$\frac{\partial z_1}{\partial u} = + \frac{\partial z_2}{\partial v}, \quad \frac{\partial z_1}{\partial v} = - \frac{\partial z_2}{\partial u}.$$

Это означает уже известный нам факт (п° 23): *суперпозиция регулярных отображений представляет собой регулярное отображение.*

§ 4. СЛУЧАЙ ТРЕХ НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ»

Приемы преобразований дифференциальных выражений в случае трех и большего числа независимых переменных не отличаются от тех, которые описаны в предыдущих параграфах для случая двух независимых переменных. Кратко сформулируем основные результаты для случая трех независимых переменных.

Пусть дано выражение

$$W = F(x, y, z, t, t'_x, t'_y, t'_z, \dots), \quad (3.23)$$

причем $t = f(x, y, z)$, где f есть функция трех независимых переменных x, y, z , определенная в какой-нибудь области Ω пространства $Oxyz$, непрерывная в этой области вместе со всеми своими участвующими в выражении (3.23) производными.

77. Общие преобразования. I. Если вводятся новые независимые переменные u, v, w в соответствии с формулами преобразования или замены переменных:

$$x = \varphi(u, v, w), \quad y = \psi(u, v, w), \quad z = \chi(u, v, w), \quad (3.24)$$

то задача состоит в том, чтобы в данном выражении (3.23) заменить переменные x, y, z переменными u, v, w ; для этого нужно выразить t'_x, t'_y, t'_z, \dots через t'_u, t'_v, t'_w, \dots . С одной стороны, по правилам дифференцирования имеем:

$$\left. \begin{aligned} t'_x &= \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x}, \\ t'_y &= \frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial t}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial t}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial y}, \\ t'_z &= \frac{\partial t}{\partial z} = \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial t}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial t}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (*)$$

С другой стороны, дифференцируя, например, по x формулы (3.24), находим:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x}, \\ 0 &= \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x}, \\ 0 &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x}, \end{aligned}$$

откуда

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\frac{\partial(y, z)}{\partial(v, w)}}{\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{-\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, w)}}{\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}}, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}}{\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}}. \quad (**)$$

Подставляя в формулу (*) для t'_x , получаем:

$$t'_x = \frac{\frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial(y, z)}{\partial(v, w)} - \frac{\partial t}{\partial v} \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, w)} + \frac{\partial t}{\partial w} \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}}{\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}} = \frac{\frac{\partial(t, y, z)}{\partial(u, v, w)}}{\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}}. \quad (3.25)$$

Вполне аналогично:

$$t'_y = \frac{\frac{\partial(x, t, z)}{\partial(u, v, w)}}{\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}}, \quad t'_z = \frac{\frac{\partial(x, y, t)}{\partial(u, v, w)}}{\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}}. \quad (3.25)$$

Продолжая дифференцировать эти равенства по x, y, z и заменяя всякий раз производные u'_x, v'_x, w'_x по формулам (**), а u'_y, v'_y, w'_y ; u'_z, v'_z, w'_z по аналогичным формулам.

найдем производные любых порядков от функции t по ее аргументам x, y, z . Но высшие производные, в частности вторые, можно находить и несколько иначе: сначала дифференцировать равенства (*), а потом уже исключать в случае необходимости производные от новых переменных по старым, т. е. u'_x, u''_{x^2}, \dots . При этом будем иметь:

$$\begin{aligned} t''_{x^2} &= \frac{\partial t'_x}{\partial x} = \frac{\partial^2 t}{\partial u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 t}{\partial u \partial w} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \\ &+ \frac{\partial^2 t}{\partial v^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial t}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial v \partial w} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 t}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \\ &+ \frac{\partial^2 t}{\partial w^2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial t}{\partial w} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial u \partial w} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 t}{\partial v \partial w} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} = \\ &= \frac{\partial^2 t}{\partial u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial v^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial t}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial w^2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \\ &+ \frac{\partial t}{\partial w} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 \left(\frac{\partial^2 t}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 t}{\partial u \partial w} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 t}{\partial v \partial w} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (3.26)$$

и вполне аналогично

$$\left. \begin{aligned} t''_{y^2} &= \frac{\partial^2 t}{\partial u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial v^2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial t}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial w^2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \\ &+ \frac{\partial t}{\partial w} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 \left(\frac{\partial^2 t}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 t}{\partial u \partial w} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial^2 t}{\partial v \partial w} \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \right), \\ t''_{z^2} &= \frac{\partial^2 t}{\partial u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial v^2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \frac{\partial t}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial w^2} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \\ &+ \frac{\partial t}{\partial w} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + 2 \left(\frac{\partial^2 t}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial^2 t}{\partial u \partial w} \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial^2 t}{\partial v \partial w} \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial z} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3.26)$$

и т. д.

Подставляя в формулу (3.23) данные и найденные выражения для t', t'', \dots , мы и найдем искомое новое выражение для W :

$$\begin{aligned} W &= F[x = \varphi(u, v, w), \quad y = \psi(u, v, w), \\ z &= \chi(u, v, w), \quad t = f(\varphi, \psi, \chi), \quad t'_x, t'_y, t'_z, \dots] = \\ &= F_1(u, v, w, t, t'_u, t'_v, t'_w, \dots). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Мы не станем истолковывать выполненное преобразование в соответствии с интерпретациями формул преобразования, так как это вполне подобно тому, что было сказано в § 2.

Пример 1. Пусть

$$W = \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 t}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 t}{\partial y \partial z}.$$

Преобразуем W к новым независимым переменным u, v, w при условии, что

$$x = \frac{v+w}{2}, \quad y = \frac{u+w}{2}, \quad z = \frac{u+v}{2}.$$

Здесь формулы преобразования линейные и легко обратимы:

$$u = y + z - x, \quad v = x + z - y, \quad w = x + y - z.$$

Имеем:

$$\frac{\partial t}{\partial x} = -\frac{\partial t}{\partial u} + \frac{\partial t}{\partial v} + \frac{\partial t}{\partial w}, \quad \frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\partial t}{\partial u} - \frac{\partial t}{\partial v} + \frac{\partial t}{\partial w}, \quad \frac{\partial t}{\partial z} = \frac{\partial t}{\partial u} + \frac{\partial t}{\partial v} - \frac{\partial t}{\partial w};$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 t}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 t}{\partial u \partial v} - \frac{\partial^2 t}{\partial u \partial w} - \frac{\partial^2 t}{\partial v \partial u} + \frac{\partial^2 t}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial v \partial w} - \frac{\partial^2 t}{\partial w \partial u} + \\ &+ \frac{\partial^2 t}{\partial w \partial v} + \frac{\partial^2 t}{\partial w^2} = \frac{\partial^2 t}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial w^2} - 2 \frac{\partial^2 t}{\partial u \partial v} - 2 \frac{\partial^2 t}{\partial u \partial w} + 2 \frac{\partial^2 t}{\partial v \partial w}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 t}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial w^2} - 2 \frac{\partial^2 t}{\partial u \partial v} + 2 \frac{\partial^2 t}{\partial u \partial w} - 2 \frac{\partial^2 t}{\partial v \partial w},$$

$$\frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 t}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial w^2} + 2 \frac{\partial^2 t}{\partial u \partial v} - 2 \frac{\partial^2 t}{\partial u \partial w} - 2 \frac{\partial^2 t}{\partial v \partial w};$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 t}{\partial x \partial y} &= -\frac{\partial^2 t}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 t}{\partial u \partial w} + \frac{\partial^2 t}{\partial v \partial u} - \frac{\partial^2 t}{\partial v^2} - \frac{\partial^2 t}{\partial v \partial w} - \frac{\partial^2 t}{\partial w \partial u} + \\ &+ \frac{\partial^2 t}{\partial w \partial v} + \frac{\partial^2 t}{\partial w^2} = -\frac{\partial^2 t}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 t}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial w^2} + 2 \frac{\partial^2 t}{\partial u \partial v}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x \partial z} = -\frac{\partial^2 t}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial v^2} - \frac{\partial^2 t}{\partial w^2} + 2 \frac{\partial^2 t}{\partial u \partial w},$$

$$\frac{\partial^2 t}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 t}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 t}{\partial v^2} - \frac{\partial^2 t}{\partial w^2} + 2 \frac{\partial^2 t}{\partial v \partial w}.$$

Подставляя, находим:

$$W = 2 \left(\frac{\partial^2 t}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial w^2} \right).$$

Мы видим, что примененное преобразование устраняет все смешанные производные и, таким образом, позволяет, например,

заключить, что функция $t = f(y + z - x, x + z - y, x + y - z)$ является решением дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 t}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 t}{\partial y \partial z} = 0,$$

если функция $t = f(x, y, z)$ есть решение дифференциального уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0.$$

II. Пусть теперь по формуле преобразования

$$t = \psi(\tau)$$

заменяется только функция t , где либо τ — новая функция независимых переменных x, y, z , а ψ — данная известная функция, либо τ — заранее данная функция тех же переменных, а ψ — новая функция одного аргумента τ . Порядок замены остается таким же, как и в случае двух независимых переменных.

Пример 2. Пусть

$$W = \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} + kt$$

($k = \text{const}$) (ср. пример 4 в § 2). Преобразуем W к новой функции ψ при условии, что

$$t = \psi(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \quad \text{или} \quad t = \psi(r),$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Имеем:

$$t'_x = \psi'(r) \frac{x}{r}, \quad t''_{xx} = \psi''(r) \frac{x^2}{r^2} + \psi'(r) \frac{y^2 + z^2}{r^3},$$

$$t'_y = \psi'(r) \frac{y}{r}, \quad t''_{yy} = \psi''(r) \frac{y^2}{r^2} + \psi'(r) \frac{x^2 + z^2}{r^3},$$

$$t'_z = \psi'(r) \frac{z}{r}, \quad t''_{zz} = \psi''(r) \frac{z^2}{r^2} + \psi'(r) \frac{x^2 + y^2}{r^3}.$$

Подставляя, находим:

$$W = \psi''(r) + \frac{2}{r} \psi'(r) + k\psi(r).$$

Дифференциальное уравнение с частными производными: $W = 0$ сводится к обыкновенному линейному уравнению:

$$\psi''(r) + \frac{2}{r} \psi'(r) + k\psi(r) = 0,$$

которое в случае $k = 0$ решается совсем просто:

$$\psi(r) = \frac{C_1}{r} + C_2.$$

Значит, уравнение

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0$$

имеет, в частности, решение

$$t = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

что легко проверить и непосредственно. Других решений вида

$t = \psi(r)$, отличных от $\frac{C_1}{r} + C_2$, это уравнение не имеет. Следует

обратить внимание на существенную разницу между формами решений вида $\psi(r)$, где r — расстояние переменной точки от начала координат, для уравнений Лапласа соответственно в случае трех и двух независимых переменных:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

(см. пример 4 в § 2).

III. Мы вовсе не будем останавливаться на преобразованиях, состоящем в совместной замене и независимых переменных и функции новыми независимыми переменными и новой функцией, ибо такие преобразования в случае трех независимых переменных практически редко встречаются, а их фактическое осуществление вполне аналогично подобным преобразованиям, описанным в п° 73.

78. Преобразования «дифференциальных параметров». Рассмотрим преобразования к новым («ортогональным») независимым переменным двух дифференциальных выражений, играющих важную роль во многих вопросах анализа:

$$W = S\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial z}\right)^2,$$

$$W = S\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2},$$

где $t = t(x, y, z)$ — функция независимых переменных x, y и z ; они называются иногда *дифференциальными парамет-*

рами Ламе для функции t соответственно первого и второго порядков и обозначаются через $\Delta_1(t)$ и $\Delta_2(t)$:

$$\Delta_1(t) = S\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2, \quad \Delta_2(t) = S\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}\right).$$

Заметим, что $\Delta_1(t)$ есть не что иное, как H_t^2 (см. п° 47), а $\Delta_2(t)$ — так называемый *лапласиан* для функции t , который часто, если это не может привести к путанице, обозначается символом Δ без индекса 2, т. е.

$$\Delta(t) = \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}.$$

I. Преобразуем параметр первого порядка

$$W = \left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial z}\right)^2$$

к новым независимым переменным u , v и w при условии, что они образуют систему криволинейных ортогональных координат:

$$x = \varphi(u, v, w), \quad y = \psi(u, v, w), \quad z = \chi(u, v, w), \quad (3.28)$$

причем

$$S\left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v}\right) = S\left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial w}\right) = S\left(\frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial w}\right) = 0$$

(п° 46). В соответствии с равенствами (3.25) имеем:

$$\begin{aligned} W &= t_x'^2 + t_y'^2 + t_z'^2 = \\ &= \frac{\left[\frac{\partial(t, y, z)}{\partial(u, v, w)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(x, t, z)}{\partial(u, v, w)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(x, y, t)}{\partial(u, v, w)}\right]^2}{\left[\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}\right]^2}; \end{aligned}$$

раскрывая квадраты якобианов в числителе и принимая во внимание условия ортогональности, после ряда выкладок находим:

$$W = \frac{t_u'^2 L_v^2 L_w^2 + t_v'^2 L_u^2 L_w^2 + t_w'^2 L_u^2 L_v^2}{\left[\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}\right]^2},$$

где L_u , L_v , L_w — коэффициенты Ламе данной системы координат (п° 47). Квадрат же якобиана в знаменателе в случае

ортогональности системы, как известно (п° 49), равен $L_u^2 L_v^2 L_w^2$. Поэтому

$$W = \frac{t_u'^2 L_v^2 L_w^2 + t_v'^2 L_u^2 L_w^2 + t_w'^2 L_u^2 L_v^2}{L_u^2 L_v^2 L_w^2} = \frac{t_u'^2}{L_u^2} + \frac{t_v'^2}{L_v^2} + \frac{t_w'^2}{L_w^2} =$$

$$= H_u^2 t_u'^2 + H_v^2 t_v'^2 + H_w^2 t_w'^2,$$

где H_u , H_v и H_w — дифференциальные параметры первого порядка, и так как $W = H_t^2$, то

$$H_t^2 = H_u^2 t_u'^2 + H_v^2 t_v'^2 + H_w^2 t_w'^2.$$

В частности, если $H_u = H_v = H_w = 1$ (и, значит, $L_u = L_v = L_w = 1$), то H_t^2 остается инвариантным при преобразовании (3.28):

$$H_t^2 = t_x'^2 + t_y'^2 + t_z'^2 = t_u'^2 + t_v'^2 + t_w'^2.$$

Это будет, например, при простом передвижении системы декартовых прямоугольных координат, когда (см. п° 53)

$$x = a'_1 u + b'_1 v + c'_1 w + d'_1, \quad y = a'_2 u + b'_2 v + c'_2 w + d'_2,$$

$$z = a'_3 u + b'_3 v + c'_3 w + d'_3,$$

причем

$$a'_1 a'_2 + b'_1 b'_2 + c'_1 c'_2 = a'_1 a'_3 + b'_1 b'_3 + c'_1 c'_3 =$$

$$= a'_2 a'_3 + b'_2 b'_3 + c'_2 c'_3 = 0,$$

$$a_1'^2 + a_2'^2 + a_3'^2 = b_1'^2 + b_2'^2 + b_3'^2 = c_1'^2 + c_2'^2 + c_3'^2 = 1.$$

Если u , v и w — цилиндрические координаты, то (см. п° 54) $H_u = 1$, $H_v = \frac{1}{u}$, $H_w = 1$ и

$$H_t^2 = t_u'^2 + \frac{1}{u^2} t_v'^2 + t_w'^2,$$

т. е.

$$H_t^2 = t_r'^2 + \frac{1}{r^2} t_\varphi'^2 + t_z'^2$$

в обычных обозначениях; если u , v и w — сферические координаты, то (см. п° 55)

$$H_u = 1, \quad H_v = \frac{1}{u \sin w}, \quad H_w = \frac{1}{u}$$

и

$$H_t^2 = t_u'^2 + \frac{1}{u^2 \sin^2 \varpi} t_v'^2 + \frac{1}{u^2} t_w'^2,$$

т. е.

$$H_t^2 = t_\rho'^2 + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta} t_\varphi'^2 + \frac{1}{\rho^2} t_\theta'^2$$

в обычных обозначениях.

II. Преобразуем параметр второго порядка (лапласиан функции t)

$$W = \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}$$

к тем же переменным u, v и w что и в I. Для этого сложим три равенства (3.26); получаем

$$\begin{aligned} \Delta_2(t) = \Delta_1(u) \frac{\partial^2 t}{\partial u^2} + \Delta_2(u) \frac{\partial t}{\partial u} + \Delta_1(v) \frac{\partial^2 t}{\partial v^2} + \Delta_2(v) \frac{\partial t}{\partial v} + \\ + \Delta_1(w) \frac{\partial^2 t}{\partial w^2} + \Delta_2(w) \frac{\partial t}{\partial w}. \quad (*) \end{aligned}$$

Так как система координат $Ouvw$ предположена ортогональной, то (см. п° 46) остальные невыписанные члены в сумме (*) равны нулю; кроме того,

$$\begin{aligned} \Delta_1(u) = H_u^2 = \frac{1}{L_u^2} = \frac{1}{S\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2}, \quad \Delta_1(v) = H_v^2 = \frac{1}{L_v^2} = \frac{1}{S\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2}, \\ \Delta_1(w) = H_w^2 = \frac{1}{L_w^2} = \frac{1}{S\left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)^2} \end{aligned}$$

и, значит, нам остается найти выражения через u, v и w только для $\Delta_2(u), \Delta_2(v)$ и $\Delta_2(w)$ *). С этой целью в тожд-

*) Эти выражения, а следовательно, и выражения для лапласиана впервые получил Ламе при помощи прямых и очень громоздких вычислений. Они были значительно упрощены французским математиком Э. Гурса; ход выкладки Гурса мы и показываем в тексте. Существует другой метод преобразования лапласиана к криволинейным ортогональным координатам, основанный на соображениях физического характера, принадлежащий английскому физiku В. Томсону (лорд Кельвин), а также метод преобразования, использующий векторный анализ. Метод Гурса применительно к лапласиану для двух независимых переменных был уже изложен в п° 75.

дестве (*) положим последовательно $t = x$, $t = y$, $t = z$; тогда получим:

$$0 = H_u^2 \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \Delta_2(u) \frac{\partial x}{\partial u} + H_v^2 \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + \Delta_2(v) \frac{\partial x}{\partial v} + \\ + H_w^2 \frac{\partial^2 x}{\partial w^2} + \Delta_2(w) \frac{\partial x}{\partial w},$$

$$0 = H_u^2 \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + \Delta_2(u) \frac{\partial y}{\partial u} + H_v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} + \Delta_2(v) \frac{\partial y}{\partial v} + \\ + H_w^2 \frac{\partial^2 y}{\partial w^2} + \Delta_2(w) \frac{\partial y}{\partial w},$$

$$0 = H_u^2 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \Delta_2(u) \frac{\partial z}{\partial u} + H_v^2 \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + \Delta_2(v) \frac{\partial z}{\partial v} + \\ + H_w^2 \frac{\partial^2 z}{\partial w^2} + \Delta_2(w) \frac{\partial z}{\partial w}.$$

Из этих трех равенств найдем $\Delta_2(u)$, $\Delta_2(v)$, $\Delta_2(w)$; проще всего это сделать так: умножим первое равенство на $\frac{\partial x}{\partial u}$, второе — на $\frac{\partial y}{\partial u}$, третье — на $\frac{\partial z}{\partial u}$ и сложим:

$$0 = H_u^2 S\left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\right) + \Delta_2(u) L_u^2 + H_v^2 S\left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\right) + \\ + \Delta_2(v) S\left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v}\right) + H_w^2 S\left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial^2 x}{\partial w^2}\right) + \Delta_2(w) S\left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial w}\right). (**)$$

Но мы имеем:

$$S\left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v}\right) = S\left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial w}\right) = 0$$

вследствие ортогональности системы (3.28);

$$S\left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\right) = \frac{1}{2} \frac{\partial L_u^2}{\partial u},$$

что проверяется прямым дифференцированием $L_u^2 = S\left(\frac{\partial x}{\partial}\right)^2$ по u ;

$$S\left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\right) = -S\left(\frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\right) = -\frac{1}{2} \frac{\partial L_v^2}{\partial u},$$

что проверяется прямым дифференцированием сначала

$$S\left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v}\right) = 0$$

по v , а затем $L_v^2 = S\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2$ по u ;

$$S\left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial^2 x}{\partial w^2}\right) = -S\left(\frac{\partial x}{\partial w} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial w}\right) = -\frac{1}{2} \frac{\partial L_w^2}{\partial u},$$

что проверяется прямым дифференцированием сначала

$$S\left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial w}\right) = 0$$

по w , а затем $L_w^2 = S\left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)^2$ по u . Подставляя в равенство (* *), находим:

$$\begin{aligned} \Delta_2(u) &= \frac{1}{L_u^2} \left[-\frac{1}{2L_u^2} \frac{\partial L_u^2}{\partial u} + \frac{1}{2L_v^2} \frac{\partial L_v^2}{\partial u} + \frac{1}{2L_w^2} \frac{\partial L_w^2}{\partial u} \right] = \\ &= \frac{1}{L_u^2} \left(-\frac{1}{L_u} \frac{\partial L_u}{\partial u} + \frac{1}{L_v} \frac{\partial L_v}{\partial u} + \frac{1}{L_w} \frac{\partial L_w}{\partial u} \right). \end{aligned}$$

Совершенно аналогично:

$$\Delta_2(v) = \frac{1}{L_u^2} \left(-\frac{1}{L_v} \frac{\partial L_v}{\partial v} + \frac{1}{L_u} \frac{\partial L_u}{\partial v} + \frac{1}{L_w} \frac{\partial L_w}{\partial v} \right),$$

$$\Delta_2(w) = \frac{1}{L_w^2} \left(-\frac{1}{L_w} \frac{\partial L_w}{\partial w} + \frac{1}{L_u} \frac{\partial L_u}{\partial w} + \frac{1}{L_v} \frac{\partial L_v}{\partial w} \right).$$

Заменяя в равенстве (*) $\Delta_2(u)$, $\Delta_2(v)$ и $\Delta_2(w)$, получим:

$$\begin{aligned} \Delta_2(t) &= \frac{1}{L_u^2} \frac{\partial^2 t}{\partial u^2} + \frac{1}{L_u^2} \left(-\frac{1}{L_u} \frac{\partial L_u}{\partial u} + \frac{1}{L_v} \frac{\partial L_v}{\partial u} + \frac{1}{L_w} \frac{\partial L_w}{\partial u} \right) \frac{\partial t}{\partial u} + \\ &\quad + \frac{1}{L_v^2} \frac{\partial^2 t}{\partial v^2} + \frac{1}{L_v^2} \left(-\frac{1}{L_v} \frac{\partial L_v}{\partial v} + \frac{1}{L_u} \frac{\partial L_u}{\partial v} + \frac{1}{L_w} \frac{\partial L_w}{\partial v} \right) \frac{\partial t}{\partial v} + \\ &\quad + \frac{1}{L_w^2} \frac{\partial^2 t}{\partial w^2} + \frac{1}{L_w^2} \left(-\frac{1}{L_w} \frac{\partial L_w}{\partial w} + \frac{1}{L_u} \frac{\partial L_u}{\partial w} + \frac{1}{L_v} \frac{\partial L_v}{\partial w} \right) \frac{\partial t}{\partial w} = \\ &= \frac{1}{L_u L_v L_w} \left[\left(\frac{L_v L_w}{L_u} \frac{\partial^2 t}{\partial u^2} + \frac{-L_v L_w \frac{\partial L_u}{\partial u} + L_u L_w \frac{\partial L_v}{\partial u} + L_u L_v \frac{\partial L_w}{\partial u}}{L_u^2} \frac{\partial t}{\partial u} \right) + \right. \\ &\quad + \left(\frac{L_u L_w}{L_v} \frac{\partial^2 t}{\partial v^2} + \frac{-L_u L_w \frac{\partial L_v}{\partial v} + L_v L_w \frac{\partial L_u}{\partial v} + L_u L_v \frac{\partial L_w}{\partial v}}{L_v^2} \frac{\partial t}{\partial v} \right) + \\ &\quad \left. + \left(\frac{L_u L_v}{L_w} \frac{\partial^2 t}{\partial w^2} + \frac{-L_u L_v \frac{\partial L_w}{\partial w} + L_v L_w \frac{\partial L_u}{\partial w} + L_u L_w \frac{\partial L_v}{\partial w}}{L_w^2} \frac{\partial t}{\partial w} \right) \right], \end{aligned}$$

что можно переписать так:

$$\Delta_2(t) = \frac{1}{L_u L_v L_w} \left[\left(\frac{L_v L_w}{L_u} \frac{\partial^2 t}{\partial u^2} + \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{L_v L_w}{L_u} \right) \frac{\partial t}{\partial u} \right) + \right. \\ \left. + \left(\frac{L_u L_w}{L_v} \frac{\partial^2 t}{\partial v^2} + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{L_u L_w}{L_v} \right) \frac{\partial t}{\partial v} \right) + \left(\frac{L_u L_v}{L_w} \frac{\partial^2 t}{\partial w^2} + \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{L_u L_v}{L_w} \right) \frac{\partial t}{\partial w} \right) \right],$$

или еще короче и обозримее:

$$\Delta_2(t) = \frac{1}{L_u L_v L_w} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{L_v L_w}{L_u} \frac{\partial t}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{L_u L_w}{L_v} \frac{\partial t}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{L_u L_v}{L_w} \frac{\partial t}{\partial w} \right) \right]. \quad (3.29)$$

Это и есть то выражение для лапласиана в криволинейных ортогональных координатах, которое мы хотели вывести. Как было уже упомянуто, впервые оно было найдено Ламе.

В частности, если $L_u = L_v = L_w = 1$, то $\Delta_2(t)$ остается инвариантным при преобразовании (3.28):

$$\Delta_2(t) = \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 t}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial w^2}.$$

Это будет, например, при простом передвижении системы декартовых прямоугольных координат.

79. Выражения лапласиана в известных криволинейных координатах. Зная коэффициенты Ламе для употребительных систем криволинейных ортогональных координат в пространстве, рассмотренных в гл. II (§§ 8, 9, 10), можно легко, по общей формуле (3.29), записать выражения для лапласиана в данной системе координат*):

I. В цилиндрических координатах:

$$\Delta_2(t) = \frac{1}{u} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(u \frac{\partial t}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{u} \frac{\partial t}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left(u \frac{\partial t}{\partial w} \right) \right] = \\ = \frac{1}{u} \left(u \frac{\partial^2 t}{\partial u^2} + \frac{\partial t}{\partial u} + \frac{1}{u} \frac{\partial^2 t}{\partial v^2} + u \frac{\partial^2 t}{\partial w^2} \right) = \\ = \frac{\partial^2 t}{\partial u^2} + \frac{1}{u} \frac{\partial t}{\partial u} + \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 t}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial w^2},$$

*) Конечно, всякий раз, когда задана конкретная система криволинейных ортогональных координат, а возможность использовать общую формулу (3.29) отсутствует, можно с помощью ряда последовательных дифференцирований, повторяя путь, описанный нами в общем виде, найти выражение для лапласиана.

или, в обычных обозначениях,

$$\Delta_2(t) = \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}.$$

II. В сферических координатах:

$$\begin{aligned} \Delta_2(t) &= \frac{1}{u^2 \sin w} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(u^2 \sin w \frac{\partial t}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{\sin w} \frac{\partial t}{\partial v} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial w} \left(\sin w \frac{\partial t}{\partial w} \right) \right] = \frac{1}{u^2 \sin w} \left(u^2 \sin w \frac{\partial^2 t}{\partial u^2} + 2u \sin w \frac{\partial t}{\partial u} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2 t}{\sin w \partial v^2} + \sin w \frac{\partial^2 t}{\partial w^2} + \cos w \frac{\partial t}{\partial w} \right) = \\ &= \frac{\partial^2 t}{\partial u^2} + \frac{2}{u} \frac{\partial t}{\partial u} + \frac{1}{u^2 \sin^2 w} \frac{\partial^2 t}{\partial v^2} + \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 t}{\partial w^2} + \frac{\operatorname{ctg} w}{u^2} \frac{\partial t}{\partial w}, \end{aligned}$$

или в обычных обозначениях

$$\Delta_2(t) = \frac{\partial^2 t}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial t}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 t}{\partial \theta^2} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{\rho^2} \frac{\partial t}{\partial \theta}.$$

III. В вырожденных эллипсоидальных «вытянутых» координатах:

$$\begin{aligned} \Delta_2(t) &= \frac{1}{(\operatorname{sh}^2 u + \sin^2 w) \operatorname{sh} u \sin w} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\operatorname{sh} u \sin w \frac{\partial t}{\partial u} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\operatorname{sh}^2 u + \sin^2 w}{\operatorname{sh} u \sin w} \frac{\partial t}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left(\operatorname{sh} u \sin w \frac{\partial t}{\partial w} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{\operatorname{sh}^2 u + \sin^2 w} \left[\frac{\partial^2 t}{\partial u^2} + \operatorname{cth} u \frac{\partial t}{\partial u} + \left(\frac{1}{\sin^2 w} + \frac{1}{\operatorname{sh}^2 u} \right) \frac{\partial^2 t}{\partial v^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2 t}{\partial w^2} + \operatorname{ctg} w \frac{\partial t}{\partial w} \right]. \end{aligned}$$

IV. В вырожденных эллипсоидальных «сплюснутых» координатах:

$$\begin{aligned} \Delta_2(t) &= \frac{1}{(\operatorname{sh}^2 u + \cos^2 w) \operatorname{ch} u \sin w} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\operatorname{ch} u \sin w \frac{\partial t}{\partial u} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\operatorname{sh}^2 u + \cos^2 w}{\operatorname{ch} u \sin w} \frac{\partial t}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left(\operatorname{ch} u \sin w \frac{\partial t}{\partial w} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{\operatorname{sh}^2 u + \cos^2 w} \left[\frac{\partial^2 t}{\partial u^2} + \operatorname{th} u \frac{\partial t}{\partial u} + \left(\frac{1}{\sin^2 w} - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u} \right) \frac{\partial^2 t}{\partial v^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2 t}{\partial w^2} + \operatorname{ctg} w \frac{\partial t}{\partial w} \right]. \end{aligned}$$

V. В параболоидальных координатах:

$$\Delta_2 t = \frac{1}{8(u^2 + w^2)uw} \times$$

$$\times \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(2uw \frac{\partial t}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(2 \frac{u^2 + w^2}{uw} \frac{\partial t}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left(2uw \frac{\partial t}{\partial w} \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{4(u^2 + w^2)} \left[\frac{\partial^2 t}{\partial u^2} + \frac{1}{u} \frac{\partial t}{\partial u} + \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2} \right) \frac{\partial^2 t}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial w^2} + \frac{1}{w} \frac{\partial t}{\partial w} \right].$$

VI. В тороидальных координатах:

$$\Delta_2(t) = \frac{(\operatorname{ch} u - \cos w)^3}{\operatorname{sh} u} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\operatorname{sh} u}{\operatorname{ch} u - \cos w} \frac{\partial t}{\partial u} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{1}{(\operatorname{ch} u - \cos w) \operatorname{sh} u} \frac{\partial t}{\partial v} \right] + \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{\operatorname{sh} u}{\operatorname{ch} u - \cos w} \frac{\partial t}{\partial w} \right) \right\} =$$

$$= (\operatorname{ch} u - \cos w)^2 \left[\frac{\partial^2 t}{\partial u^2} + \frac{\operatorname{ch} u - \cos w}{\operatorname{sh} u} \frac{\partial}{\partial u} \frac{\operatorname{sh} u}{\operatorname{ch} u - \cos w} \frac{\partial t}{\partial u} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\operatorname{sh}^2 u} \frac{\partial^2 t}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial w^2} + \frac{\operatorname{ch} u - \cos w}{\operatorname{sh} u} \frac{\partial}{\partial w} \frac{\operatorname{sh} u}{\operatorname{ch} u - \cos w} \frac{\partial t}{\partial w} \right].$$

VII. В биполярных координатах:

$$\Delta_2(t) = \frac{(\operatorname{ch} w - \cos u)^3}{\sin u} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\sin u}{\operatorname{ch} w - \cos u} \frac{\partial t}{\partial u} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{1}{(\operatorname{ch} w - \cos u) \sin u} \frac{\partial t}{\partial v} \right] + \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{\sin u}{\operatorname{ch} w - \cos u} \frac{\partial t}{\partial w} \right) \right\} =$$

$$= (\operatorname{ch} w - \cos u)^2 \left[\frac{\partial^2 t}{\partial u^2} + \frac{\operatorname{ch} w - \cos u}{\sin u} \frac{\partial}{\partial u} \frac{\sin u}{\operatorname{ch} w - \cos u} \frac{\partial t}{\partial u} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sin^2 u} \frac{\partial^2 t}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial w^2} + \frac{\operatorname{ch} w - \cos u}{\sin u} \frac{\partial}{\partial w} \frac{\sin u}{\operatorname{ch} w - \cos u} \frac{\partial t}{\partial w} \right].$$

ГЛАВА IV

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ И ИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

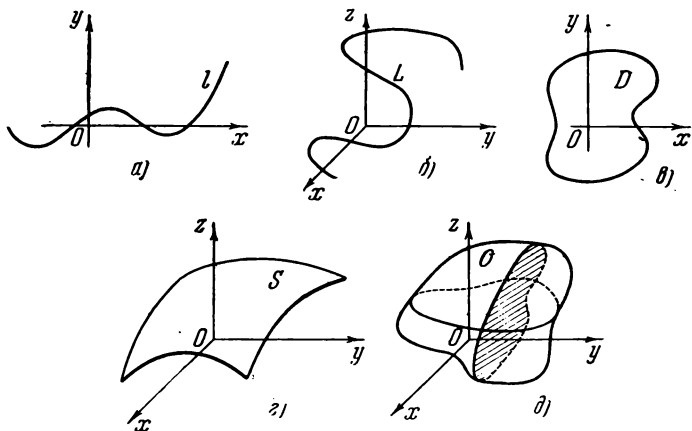
§ 1. ИНТЕГРАЛ ПО МЕРЕ ОБЛАСТИ

Предыдущая глава была посвящена интерпретациям и преобразованиям выражений, имеющих дифференциальный характер (построенных при помощи понятий производных и дифференциалов). Теперь мы рассмотрим интерпретации и преобразования выражений, имеющих интегральный характер (построенных при помощи понятий интегралов). Эти вопросы так же постоянно используются при всевозможных применениях математического анализа и при изложении его специальных глав. Понятие интеграла наряду с понятиями производной и дифференциала принадлежит к числу самых важных и фундаментальных понятий анализа. Прежде всего мы приведем основные определения и факты, нужные для дальнейшего, касающиеся главных аспектов понятия интеграла.

80. Определения. Сначала обратимся к понятию *интеграла по мере области интегрирования*. В качестве области интегрирования будут употребляться: 1) линия l на плоскости (черт. 26, а); 2) линия L в пространстве (черт. 26, б); 3) плоская область (черт. 26, в); 4) поверхность S в пространстве (черт. 26, г); 5) пространственная область Ω (черт. 26, д)*).

*) Как и всюду в этой книге, здесь имеются в виду лишь кусочно-гладкие линии и кусочно-гладкие поверхности, т. е. поверхности, состоящие из конечного числа гладких частей (непрерывные и с непрерывно перемещающейся касательной плоскостью). Точно так же здесь имеются в виду лишь области (в плоскости или в пространстве), ограниченные конечным числом таких линий или поверхностей.

Для всех перечисленных областей интегрирования можно дать общее определение интеграла по мере области.



Черт. 26.

Определение. Пусть конечная область E разбита произвольным образом на n частичных областей e_i ($i = 1, 2, \dots, n$), P_i есть произвольная точка области e_i , а Δe_i есть мера области e_i . Тогда интегралом I по мере (длине, площади, объему)

$$I = \int_E f(P) de \quad (4.1)$$

от функции $f(P)$ по области E , на которой функция непрерывна, называется предел n -й интегральной суммы I_n :

$$I_n = \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta e_i$$

при $n \rightarrow \infty$ и стремлении к нулю наибольшего диаметра *) частичных областей e_i .

Каждый член интегральной суммы есть произведение значения интегрируемой функции в произвольной точке

*) Диаметр области называется наибольшее расстояние между двумя точками области.

частичной области на меру этой области. Суммирование производится по всем частичным областям.

В так называемой теореме существования интеграла (ср. II, 167, 168) показывается, что интегральная сумма I_n действительно всегда при указанных условиях имеет предел, не зависящий ни от способа последовательного разбиения области на частичные области, ни от выбора точек P_i *).

В целях наглядности и удобства преобразований интеграл I обозначают обычно таким числом символов интеграла, каково число измерений области интегрирования. Частичные области и их меры мы будем обозначать так: s_i и Δs_i в случаях 1) и 2); σ_i и $\Delta \sigma_i$ в случае 3); q_i и Δq_i в случае 4); ω_i и $\Delta \omega_i$ в случае 5). Интеграл (4.1) соответственно с этим записывают следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} 1) \int_l f(P) ds; \quad 2) \int_L f(P) ds; \quad 3) \int_D \int f(P) d\sigma; \\ 4) \int_S \int f(P) dq; \quad 5) \int_6 \int \int f(P) d\omega. \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

Первые два интеграла называются *криволинейными интегралами (по длине)*, третий — *двойным интегралом (по площади)*, четвертый — *интегралом по площади поверхности*, пятый — *тройным интегралом (по объему)*.

В частности, если линией l или L служит интервал какой-нибудь координатной оси, то криволинейный интеграл по длине есть просто обыкновенный (ординарный) интеграл, взятый по указанному интервалу в направлении от меньших значений к большим, т. е. от левого его конца к правому.

81. Основные свойства. Сформулируем в общем виде основные свойства интегралов по мере (II, 169, 170) применительно к интегралу вида (4.1).

*) Определение интеграла по мере области и теорема существования сохраняются и для функции, допускающей в области интегрирования конечное число точек конечного разрыва. Впрочем такие точки в случаях 3) и 4) могут образовывать конечное число линий, а в случае 5) и конечное число поверхностей.

I. Интеграл (4.1) обладает свойством линейности, т. е.

$$\begin{aligned} & \int_E [C_1 f_1(P) + C_2 f_2(P) + \dots + C_k f_k(P)] de = \\ & = C_1 \int_E f_1(P) de + C_2 \int_E f_2(P) de + \dots + C_k \int_E f_k(P) de, \end{aligned}$$

где C_i — константы.

II. Интеграл (4.1) обладает свойством аддитивности, т. е.

$$\begin{aligned} \int_{E_1 + E_2 + \dots + E_k} f(P) de &= \int_{E_1} f(P) de + \int_{E_2} f(P) de + \dots \\ &\dots + \int_{E_k} f(P) de, \end{aligned}$$

где под $E_1 + E_2 + \dots + E_k$ понимается просто совокупность всех k областей E_1, E_2, \dots, E_k .

III. Интеграл (4.1) обладает свойством ограниченности, т. е.

$$m \Delta E \leq \int_E f(P) de \leq M \Delta E,$$

где ΔE — мера области E , а m и M — соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(P)$ в области E :

$$m \leq f(P) \leq M.$$

Отсюда, принимая во внимание известное свойство непрерывных функций, можно получить, как и обычно (I, 91; II, 170), так называемую теорему о среднем:

$$\int_E f(P) de = f(P_c) \Delta E,$$

где P_c — некоторая средняя точка области E .

IV. *Интеграл (4.1) обладает свойством дифференцируемости (по мере области), т. е. (ср. II, 170):*

$$\frac{d}{de} \int_e f(P) de = f(P) \quad \text{или} \quad d \int_e f(P) de = f(P) de,$$

где e — переменная область, а de — дифференциал (элемент) ее меры (длины, площади, объема).

Обратным по отношению к свойству IV является следующее предложение, важное для применений интеграла.

*Значение в данной области E аддитивной и непрерывно дифференцируемой функции $F(e)$ от переменной области e равно интегралу, взятому по области E от производной (или, можно сказать, от дифференциала) данной функции, т. е. *)*

$$F(E) = \int_E \frac{dF(e)}{de} de = \int_E dF(e).$$

Таким образом, нахождение значений аддитивных функций приводится к отысканию их дифференциала (производной) и к последующему интегрированию этого дифференциала (производной).

Интегралы (4.1) могут иметь различный физический смысл, что и объясняет широту применений понятия интеграла и большое его значение. Вместе с тем удобно пользоваться следующей единой и наглядной физической интерпретацией интегралов (4.1).

Пусть в области E непрерывно распределена некоторая субстанция (какая-нибудь материя, электричество, магнетизм и т. п.), количественно характеризруемая понятием «массы», обладающим свойством аддитивности (для электричества и магнетизма этот термин — масса — обычно заменяется термином «количество электричества или магнетизма» или «общий заряд»). Отношение «массы» к мере области, на которой она распределена, называется «средней плотностью» нашей субстанции, а предел

*) Это равенство является для интегралов по мере области аналогом формулы Ньютона — Лейбница.

«средней плотности» при условии, что область, относительно которой она берется, стягивается к некоторой точке (т. е. диаметр этой области стремится к нулю), называется «плотностью» в данной точке. Следовательно, «производная по области» (II, 170) от массы равна плотности, а дифференциал массы равен произведению плотности на элемент (дифференциал) меры области; поэтому интеграл от плотности равен всей массе. Итак, *всякий интеграл*

$$\int_E f(P) de$$

выражает «массу», распределенную по области интегрирования, причем функция $f(P)$ точки P области E есть «плотность» (предполагается, что как «плотность», так и «масса» имеют, вообще говоря, алгебраический характер — они могут быть как положительными, так и отрицательными).

Если $f(P) \equiv 1$, то интеграл

$$\int_E de$$

выражает меру области E , т. е. он равен ΔE .

Пример. Возьмем так называемый интеграл Гаусса:

$$G = \int_S \int \frac{\cos(n, \rho)}{\rho^2} dq,$$

где S — некоторая поверхность («двусторонняя», см. ниже п° 94), ρ — сферический радиус точки на поверхности S , а (n, ρ) — угол между нормалью, проведенной в точке поверхности к определенной ее стороне, и сферическим радиусом этой точки, так что G дает «массу» на поверхности S , распределенную на ней с плотностью, равной $\frac{\cos(n, \rho)}{\rho^2}$.

Найдем значение G интеграла Гаусса.

Так как (п° 56)

$$\frac{|\cos(n, \rho)|}{\rho^2} dq = dq_1,$$

то

$$\frac{\cos(n, \rho)}{\rho^2} dq = \pm dq_1,$$

где dq_1 — соответствующий элемент площади единичной сферы. Следовательно,

$$G = \int_{\Delta} \int \pm dq_1, \quad (*)$$

где Δ — центральная проекция поверхности S на единичную сферу. Можно сказать, таким образом, что интеграл Гаусса G равен алгебраической величине меры телесного угла поверхности S .

Если поверхность S — замкнутая и начало координат находится вне ее то значение интеграла G для любой такой поверхности равно нулю:

$$G = 0.$$

Действительно, каждому элементу поверхности S , который виден из начала координат под данным телесным углом с положительной мерой dq_1 , соответствует другой элемент поверхности, видимый под тем же телесным углом, но для которого перед dq_1 в интеграле (*) должен быть взят знак «минус» (ибо для него $\cos(n, \rho)$ будет отрицательным).

В том же случае, когда начало координат лежит внутри замкнутой поверхности S , значение интеграла G также не зависит от вида поверхности; для любой такой поверхности интеграл G равен площади поверхности единичной сферы, т. е.

$$G = 4\pi.$$

82. Вычисление интегралов. Вычисление интегралов (4.2) производится при помощи кратного интегрирования, т. е. посредством вычислений обыкновенных (ординарных) интегралов; эти вычисления сводятся в конечном счете к отысканию первообразных функций одной независимой переменной (II, 171—175, 181—196). Характер вычислений при этом зависит, конечно, от того, к какой системе координат отнесена область интегрирования. Если этой системой

служит система декартовых прямоугольных координат Ox или $Oxyz$, то записи интегралов (4.2) имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} 1) \int_l f(x, y) \sqrt{dx^2 + dy^2}; \\ 2) \int_L f(x, y, z) \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}; \\ 3) \int_D f(x, y) dx dy; \\ 4) \int_S f(x, y, z) \sqrt{(dx dy)^2 + (dx dz)^2 + (dy dz)^2}; \\ 5) \int \int \int_D f(x, y, z) dx dy dz. \end{aligned} \right\} (4.3)$$

Если линия l может быть задана уравнениями

$$x = x(u), \quad y = y(u),$$

где $x(u)$ и $y(u)$ — дифференцируемые функции параметра u в некотором интервале $[u_1, u_2]$, $u_1 < u_2$, то интеграл 1) выражается так:

$$1) \int_{u_1}^{u_2} f[x(u), y(u)] \sqrt{x'^2 + y'^2} du.$$

Если линия L может быть задана уравнениями

$$x = x(u), \quad y = y(u), \quad z = z(u),$$

где $x(u)$, $y(u)$ и $z(u)$ — дифференцируемые функции параметра u в некотором интервале $[u_1, u_2]$, $u_1 < u_2$, то интеграл 2) выражается так:

$$2) \int_{u_1}^{u_2} f[x(u), y(u), z(u)] \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} du.$$

Если область D обладает тем свойством, что всякая прямая, параллельная оси Oy (координатная линия $x = \text{const}$), имеет не больше одной точки «входа» в область D (и, зна-

чит, не больше одной точки «выхода» из нее), то интеграл 3) выражается так:

$$3) \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy,$$

где $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — соответственно ординаты точек «входа» и «выхода» из области D линии $x = \text{const}$, $y_1(x) \leq y_2(x)$, а интервал $[x_1, x_2]$, $x_1 < x_2$, есть наибольший интервал изменения координаты x в области D .

Если поверхность S может быть задана уравнениями $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, где $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ — дифференцируемые функции параметров u и v в некоторой области Δ , то интеграл 4) выражается так:

$$4) \int_{\Delta} \int f[x(u, v), y(u, v), z(u, v)] \sqrt{EG - F^2} du dv,$$

где E, G, F — коэффициенты Гаусса поверхности S для координат u, v (см. п° 51).

Если область δ обладает тем свойством, что всякая прямая, параллельная оси Oz (координатная линия $x = \text{const}$, $y = \text{const}$) имеет не больше одной точки «входа» в область δ (и, значит, не больше одной точки «выхода» из нее), а проекция области δ на плоскость Oxy обладает свойством, указанным выше для плоской области D , то интеграл 5) выражается так:

$$5) \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz,$$

где $z_1(x, y)$ и $z_2(x, y)$ — соответственно аппликаты точек «входа» и «выхода» из области δ линии $x = \text{const}$, $y = \text{const}$, $z_1(x, y) \leq z_2(x, y)$; $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — соответственно ординаты точек «входа» и «выхода» из проекции области δ на плоскость Oxy линии $x = \text{const}$, $z = 0$; $y_1(x) < y_2(x)$, а интервал $[x_1, x_2]$, $x_1 < x_2$, есть наибольший интервал изменения координаты x в области δ .

В том случае, когда область интегрирования не удовлетворяет указанным условиям, она разбивается на такие части, чтобы каждая из них удовлетворяла этим условиям (возможность такого разбиения всегда предполагается). Тогда,

в силу свойства аддитивности, интеграл представляется в виде суммы интегралов, каждый из которых описанным выше образом вычисляется с помощью обыкновенных (ординарных) интегралов.

83. Несобственные интегралы. Данное выше определение понятия интеграла по мере области подвергается распространению на случаи бесконечной области интегрирования E и разрывной в области E подынтегральной функции $f(P)$.

1) Пусть в области E , простирающейся в бесконечность, задана непрерывная функция $f(P)$. Возьмем интеграл от этой функции по какой-нибудь конечной области K , целиком лежащей в области E :

$$\int_K f(P) de, \quad (*)$$

и будем расширять по произвольному закону область K так, чтобы в нее вошла и осталась в ней любая заданная точка области E (что записывают так: $K \rightarrow E$); если при этом «исчерпывании» области E существует предел интеграла (*), то он и принимается в качестве *интеграла от функции $f(P)$ по области E* . Этот интеграл называется *несобственным* в отличие от *собственного* интеграла, относящегося к конечной области интегрирования и к непрерывной функции. Несобственный интеграл обозначается так же, как и собственный. Значит, по определению:

$$\int_E f(P) de = \lim_{K \rightarrow E} \int_K f(P) de.$$

Может случиться, что при произвольном стремлении области K к области E интеграл (*) предела не имеет; тогда говорят, что несобственный интеграл по области E не существует. Но при этом интеграл (*) может и стремиться к пределу, если область E «исчерпывается» конечными областями K по какому-нибудь определенному закону. Обычно в качестве специального закона берется закон, когда областью K служит область, принадлежащая совместно области E и — в зависимости от числа измерений области E — или интервалу, или кругу, или шару с центром в фиксированной точке. Предел, к которому стремится интеграл (*) при этом частном способе

«исчерпывания» бесконечной области E , называется *главным значением (несобственного) интеграла от функции $f(P)$ по области E* . Итак, несобственный интеграл может не существовать (или, как еще говорят, расходиться), но иметь главное значение. (Разумеется, если интеграл существует, то существует и главное значение, равное ему.) В частности,

$$\text{гл. зн.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \int_{-\xi}^{\xi} f(x) dx, \quad \xi > 0.$$

2) Пусть в конечной области E дана функция $f(P)$, непрерывная всюду, кроме точки P_0 этой области; в точке P_0 функция $f(P)$ претерпевает бесконечный разрыв. Возьмем интеграл (*) от функции $f(P)$ по области K , получающейся из области E исключением из нее какой-нибудь области, содержащей точку P_0 (функция $f(P)$ в области K непрерывна). Будем сжимать по произвольному закону эту исключаемую область, заставляя ее диаметр стремиться к нулю; тогда область K будет неограниченно «исчерпывать» область E , т. е. $K \rightarrow E$, и если при этом существует предел интеграла (*), то он и принимается в качестве *интеграла от функции $f(P)$ по области E* . Этот интеграл называется *несобственным*. Обозначения сохраняются прежние. Значит, по определению:

$$\int_E f(P) de = \lim_{K \rightarrow E} \int_K f(P) de.$$

Пример. Рассмотрим интеграл Гаусса (см. п° 81):

$$G = \int_S \int \frac{\cos(n, \rho)}{\rho^2} dq$$

в случае, когда начало координат лежит на поверхности S . Интеграл при этом будет *несобственным*. Из рассуждений в п° 81 ясно, что если поверхность S имеет в начале координат касательную плоскость, то интеграл Гаусса сходится, его значение G не зависит от вида поверхности S и равно площади единичной полусферы:

$$G = 2\pi.$$

В рассматриваемом случае, так же как и в случае 1, может быть введено понятие главного значения. Именно, главным значением (несобственного) интеграла от функции $f(P)$ по области E , в которой есть одна точка P_0 бесконечного разрыва функции, называется предел интеграла (*), когда областью K является область, получающаяся из области E исключением из нее (в зависимости от числа измерений области E) или интервала, или круга, или шара с центром в точке P_0 .

Итак, в случае 2) несобственный интеграл также может не существовать (расходиться), но иметь главное значение. (Разумеется, если интеграл существует, то существует и главное значение, равное ему.)

В частности,

$$\text{гл. зн. } \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{x_1}^{x' - \varepsilon} f(x) dx + \int_{x' + \varepsilon}^{x_2} f(x) dx \right),$$

$$x_1 < x' < x_2,$$

где $x = x'$ есть точка бесконечного разрыва функции $f(x)$.

Читатель без труда сам определит несобственный интеграл по конечной или по бесконечной области, в которой есть конечное число точек бесконечного разрыва подынтегральной функции.

Заметим, что понятия несобственных двойных интегралов и интегралов по площади поверхности определяются и в том случае, когда точки бесконечного разрыва подынтегральной функции образуют конечное число линий; аналогично понятие несобственного тройного интеграла определяется и в том случае, когда точки бесконечного разрыва образуют конечное число линий и поверхностей.

Несобственные интегралы обладают, очевидно, всеми теми свойствами собственных интегралов, которые сохраняются при соответствующем предельном переходе.

§ 2. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ В ИНТЕГРАЛЕ ПО МЕРЕ

84. Постановка вопроса. В п° 83 был указан способ вычисления интегралов в системе декартовых координат. Однако нередко область интегрирования относят к системе не декартовых, а других координат. Интеграл (4.1) может ока-

заться при этом в том или ином отношении более простым. Таким образом, возникает следующая важная задача.

Дан интеграл (4.1):

$$I = \int_E f(P) \, de,$$

в системе декартовых прямоугольных координат; требуется найти выражение для этого интеграла в другой заданной системе координат, т. е. при условии, что координаты точки P области E заменяются по заданным формулам.

Эта задача называется *заменой переменных в интеграле*.

Ввиду того, что криволинейные интегралы по длине легко сводятся к обыкновенным интегралам, а интеграл по площади поверхности — к двойным интегралам (см. п° 82), то мы прежде всего будем предполагать, что областью интегрирования является либо интервал оси, либо область плоскости, либо область пространства:

$$\begin{aligned} I &= \int_l f(x) \, dx, & I &= \int_D \int f(x, y) \, dx \, dy, \\ I &= \int_0^1 \int \int f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Итак, пусть переменные (либо x , либо x, y , либо x, y, z) заменяются новыми переменными (либо u , либо u, v , либо u, v, w) соответственно по формулам:

$$\left. \begin{aligned} x &= \varphi(u), \\ x &= \varphi(u, v), & y &= \psi(u, v), \\ x &= \varphi(u, v, w), & y &= \psi(u, v, w), & z &= \chi(u, v, w). \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

Эти равенства называются *формулами преобразования интеграла* или, точнее, *формулами замены переменных в интеграле*.

Так же как и при преобразовании дифференциальных выражений (см. гл. III), здесь чаще всего удобнее именно так задавать формулы преобразования, т. е. выражать данные переменные («старые») через вводимые переменные («новые»), а не наоборот.

Формулы (4.5) можно записать при помощи единого символического равенства (см. подстрочное примечание на стр. 70):

$$P = \Phi(Q), \quad (4.5')$$

где P — точка с декартовыми координатами x, \dots , а Q — соответствующая ей, в силу закона (4.5), точка с декартовыми координатами u, \dots .

85. Преобразования в декартовых координатах. На формулы преобразования (4.5), (4.5') мы будем смотреть прежде всего как на формулы, отображающие область интегрирования E из декартовой системы $Ox \dots$ в область E_1 в декартовой системе $Ou \dots$. При этом предполагается, что отображение гомеоморфное и непрерывно дифференцируемое, а якобиан его если и обращается в нуль, то лишь в конечном числе точек.

Теорема. *Имеет место следующая формула преобразования интеграла (замены переменных):*

$$\int_E f(P) de = \int_{E_1} f_1(Q) k(Q) de_1, \quad (4.6)$$

где $f_1(Q) = f[\Phi(Q)]$; $k(Q)$ — коэффициент искажения отображения (4.5); de_1 — элемент меры в декартовой системе координат в области E_1 , являющейся образом области E , т. е. $E = \Phi(E_1)$.

Формула преобразования интеграла (4.6) может быть переписана применительно к каждому из трех интегралов (4.4).

Так, для первого интеграла (4.4) имеем:

$$\int_l f(x) dx = \int_\lambda f_1(u) k(u) du, \quad (4.6_1)$$

где $f_1(u) = f[\varphi(u)]$; $k(u)$ — коэффициент искажения длины при отображении (4.5); λ — образ интервала l .

Для второго интеграла (4.4) имеем:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_\Delta f_1(u, v) k(u, v) du dv, \quad (4.6_2)$$

где $f_1(u, v) = f[\varphi(u, v), \psi(u, v)]$; $k(u, v)$ — коэффициент искажения площади при отображении (4.5); Δ — образ плоской области D .

Для третьего интеграла (4.4) имеем:

$$\int\limits_{\mathcal{G}} \int\limits_{\mathcal{G}} \int\limits_{\mathcal{G}} f(x, y, z) dx dy dz = \int\limits_{\mathcal{Q}} \int\limits_{\mathcal{Q}} \int\limits_{\mathcal{Q}} f_1(u, v, w) k(u, v, w) du dv dw, \quad (4.6_3)$$

где $f_1(u, v, w) = f[\varphi(u, v, w), \psi(u, v, w), \chi(u, v, w)]$; $k(u, v, w)$ — коэффициент искажения объема при отображении (4.5); \mathcal{Q} — образ пространственной области \mathcal{G} .

Доказательство. Заметим прежде всего, что если через $k(Q)$ обозначен коэффициент искажения отображения (4.5) в точке Q , т. е.

$$\lim \frac{\Delta e}{\Delta e_1} = k(Q),$$

то

$$de = k(Q) de_1,$$

где de_1 — элемент меры бесконечно малой области, содержащей точку Q , а de — элемент меры образа этой области, содержащего точку P , и, значит,

$$\Delta E = \int\limits_{E_1} k(Q) de_1,$$

где E_1 и E — соответствующие друг другу области в системах $Ou \dots$ и $Ox \dots$, а ΔE — мера области E . Применяя к интегралу теорему о среднем (п° 81), получим:

$$\Delta E = k(Q_c) \Delta E_1, \quad (*)$$

где Q_c — некоторая «средняя» точка области E_1 , а ΔE_1 — мера области E_1 .

В согласии с определением интеграла запишем (предполагая область E конечной и функцию $f(P)$ непрерывной):

$$\int\limits_E f(P) de = \lim \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta e_i, \quad (**)$$

где n -я интегральная сумма составлена для какого-нибудь разбиения области E на n частичных областей; выбором принадлежащих этим областям точек P_i мы сейчас распорядимся. Подразделению области в системе $Ox \dots$ на частичные области e_i соответствует, в силу заданного отображения (4.5), подразделение области E_1 в системе $Ou \dots$ на частичные

области e_{1i} , причем каждая область e_i является образом соответствующей области e_{1i} .

Заменяя теперь точку P_i из области e_i ее прообразом Q_i из области e_{1i} , перепишем правую часть равенства $(**)$ так:

$$\int_E f(P) de = \lim \sum_{i=1}^n f[\Phi(Q_i)] \frac{\Delta e_i}{\Delta e_{1i}} \Delta e_{1i}.$$

На основании соотношения $(*)$ имеем:

$$\frac{\Delta e_i}{\Delta e_{1i}} = k(Q_{ic}),$$

где Q_{ic} — некоторая «средняя» точка частичной области e_{1i} ; так как точки P_i области e_i произвольны, то мы можем считать их такими, что их прообразы — точки Q_i — совпадают с точками Q_{ic} . При этом

$$\int_E f(P) de = \lim \sum_{i=1}^n f[\Phi(Q_{ic})] k(Q_{ic}) \Delta e_{1i},$$

но справа за символом предела находится n -я интегральная сумма, составленная для функции $f_1(Q) k(Q) = f[\Phi(Q)] k(Q)$ и области E_1 . Это и доказывает формулу (4.6).

Как известно (см. гл. I), коэффициент искажения $k(Q)$ равен модулю якобиана отображения:

$$k(Q) = \left| \frac{\partial(x, \dots)}{\partial(u, \dots)} \right|,$$

и поэтому формула (4.6) может быть записана в виде:

$$\int_E f(P) de = \int_{E_1} f_1(Q) \left| \frac{\partial(x, \dots)}{\partial(u, \dots)} \right| de_1,$$

а три формулы (4.6₁), (4.6₂), (4.6₃), относящиеся соответственно к линейному, плоскому, пространственному случаям,

в виде:

$$\int_i f(x) dx = \int_\lambda f_1(u) \left| \frac{dx}{du} \right| du, \quad (4.6_1)$$

$$\int_D \int f(x, y) dx dy = \int_\Delta \int f_1(u, v) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv, \quad (4.6_2)$$

$$\begin{aligned} \int_6 \int \int f(x, y, z) dx dy dz = \\ = \int_8 \int \int f_1(u, v, w) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw. \end{aligned} \quad (4.6_3)$$

С точки зрения приведенной выше физической интерпретации эти формулы очень наглядны. Именно, они показывают следующее: для того чтобы вычислить с помощью интеграла всю массу в данной области E , производя интегрирование, однако, не по данной, а по отображенной области E_1 , нужно плотность $f_1(Q) (= f(P))$ умножить не только на элемент меры в области E_1 , но и на соответствующий коэффициент искажения. Если же отнести коэффициент искажения в подынтегральном выражении не к элементу меры, а к плотности, то можно дать несколько иное разъяснение формул (4.6). Именно, они показывают, что на отображенной области E_1 образуется такая же масса, как и заданная на области E , если распределить ее по области E_1 так, чтобы плотность в каждой ее точке Q равнялась плотности в соответствующей точке P области E , умноженной на коэффициент искажения $k(Q)$. (Например, если при переходе в область E_1 мера уменьшается в 2 раза, то масса, конечно, сохранится, если плотность взять в 2 раза большую.)

86. Преобразования в криволинейных координатах. Придадим теперь формуле (4.6) замены переменных в интеграле другой вид, считая, что формулы преобразования (4.5), (4.5') являются формулами, определяющими систему криволинейных ортогональных координат $Ouv \dots$ в заданной области E . При этом условии можно дать следующую общую формулу замены переменных в интеграле, не исключая криволинейные интегралы по длине и интеграл по площади поверхности, т. е. формулу, относящуюся к любому из интегралов пяти видов (4.3).

Теорема. *Имеет место следующая формула преобразования интеграла (замены переменных):*

$$\int_E f(P) d\epsilon = \int_E f_1(P) d\epsilon, \quad (4.7)$$

где $d\epsilon$ — элемент меры в заданной системе криволинейных координат области E , а $f_1(P)$ — выражение функции $f(P)$ после замены декартовых координат x, \dots точки P криволинейными координатами u, \dots по формулам (4.5).

Доказательство. В случае интегралов (4.4) правая часть формулы (4.7) есть не что иное, как другой вид правой части формулы (4.6), ибо $f_1(P) = f_1(Q)$, а произведение $k(Q) d\epsilon_1$ является элементом меры $d\epsilon$ (элементом длины координатной оси, площади координатной плоскости, объема координатного пространства) в соответствующих криволинейных координатах (см. гл. II). Так как криволинейные интегралы по длине и интеграл по площади поверхности приводятся к интегралам (4.4), то формула (4.7), как нетрудно сообразить, оказывается справедливой и для указанных интегралов по длине линии и по площади поверхности.

Как видим, такой подход к задаче замены переменных в интеграле, возвращающий нас к постановке вопроса в самом начале этого параграфа позволяет сохранить и после преобразования обычную структуру интеграла: как и в заданных интегралах (4.1), (4.3), элемент интеграла (4.7) равен произведению значения функции на элемент меры в соответствующей системе координат. Таким образом, переход от интеграла (4.1) к интегралу (4.7) при определении интеграла как предела интегральных сумм означает, в сущности говоря, просто переход от одного «закономерного» (устанавливаемого сетью координатных линий или поверхностей) способа подразделения области интегрирования к другому «закономерному» же способу.

Формула (4.7) может быть переписана применительно к каждому из пяти интегралов (4.3) (при ортогональности системы $Ou \dots$).

Так, для первого интеграла (4.3) имеем:

$$1) \int_I f(x, y) \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_I f_1(u, v) \sqrt{l_u^2 du^2 + l_v^2 dv^2}, \quad (4.7_1)$$

где $f_1(u, v) = f[\varphi(u, v), \psi(u, v)]$; l_u, l_v — коэффициенты Ламе системы (4.5) (см. п° 35).

Для второго интеграла (4.3) имеем:

$$\begin{aligned} 2) \int_L f(x, y, z) \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \\ = \int_L f_1(u, v, w) \sqrt{L_u^2 du^2 + L_v^2 dv^2 + L_w^2 dw^2}, \quad (4.7_2) \end{aligned}$$

где $f_1(u, v, w) = f[\varphi(u, v, w), \psi(u, v, w), \chi(u, v, w)]$; L_u, L_v, L_w — коэффициенты Ламе системы (4.5) (см. п° 47).

Для третьего интеграла (4.3) имеем:

$$3) \iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D f_1(u, v) l_u l_v du dv, \quad (4.7_3)$$

где $f_1(u, v) = f[\varphi(u, v), \psi(u, v)]$; l_u, l_v — коэффициенты Ламе системы (4.5) (см. п° 35).

Для четвертого интеграла (4.3) имеем:

$$\begin{aligned} 4) \iiint_S f(x, y, z) \sqrt{(dx dy)^2 + (dx dz)^2 + (dy dz)^2} = \\ = \iiint_S f_1(u, v, w) \times \\ \times \sqrt{(L_u L_v du dv)^2 + (L_u L_w du dw)^2 + (L_v L_w dv dw)^2}, \quad (4.7_4) \end{aligned}$$

где $f_1(u, v, w) = f[\varphi(u, v, w), \psi(u, v, w), \chi(u, v, w)]$; L_u, L_v, L_w — коэффициенты Ламе системы (4.5) (см. п° 47).

Для пятого интеграла (4.3) имеем:

$$\begin{aligned} 5) \iiint_6 f(x, y, z) dx dy dz = \\ = \iiint_6 f_1(u, v, w) L_u L_v L_w du dv dw, \quad (4.7_5) \end{aligned}$$

где $f_1(u, v, w) = f[\varphi(u, v, w), \psi(u, v, w), \chi(u, v, w)]$; L_u, L_v, L_w — коэффициенты Ламе системы (4.5) (см. п° 47).

В формулах (4.6) u, v, w можно рассматривать как криволинейные координаты точек заданной области; тогда в качестве области интегрирования пре-

образованного интеграла нужно взять область интегрирования данного интеграла и, следовательно, в правых частях формул (4.6) вместо областей интегрирования λ , Δ , Ω нужно взять их соответственные прообразы l , D , δ . Точно так же в формулах (4.7) u , v , w можно рассматривать и как декартовы координаты точек отображенной области; тогда в качестве области интегрирования преобразованного интеграла нужно взять эту отображенную область, и, следовательно, в правых частях формул (4.7) вместо областей интегрирования l , L , D , S , δ нужно взять их соответственные образы λ , Λ , Δ , Σ , Ω .

Заметим, что формулы (4.6) и (4.7) замены переменных в интеграле остаются справедливыми и для сходящихся несобственных интегралов. Действительно, предельный переход, приводящий от собственного интеграла к несобственному, сохранит и равенства (4.6) и (4.7).

§ 3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ В КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТАХ. ПРИМЕРЫ

87. О вычислении преобразованного интеграла. Целью изученной в § 2 замены переменных в интеграле является придание подынтегральному выражению или области интегрирования другого вида, более простого в том или ином отношении. Примеры упрощений будут приведены ниже.

Вычисление преобразованного интеграла при условии, что система координат $Ou \dots$ рассматривается как система декартовых координат (интегралы справа в формулах (4.6)), производится, как уже было сказано, сведением его к кратным интегралам в отображенной области по известным правилам, указанным в § 1.

Если же система координат $Ou \dots$ рассматривается как система криволинейных координат, то так же, как и в случае декартовых координат, вычисление многомерного интеграла (4.7) производится обычно с помощью кратного интегрирования; такой метод вычисления основывается на тех же соображениях, что и в случае декартовых координат. Обыкновенные (ординарные) интегралы, которые при этом берутся, получают специальную интерпретацию в соответствии с геометрическим смыслом данной системы криволинейных координат.

88. Двойной интеграл. Рассмотрим приведение двойного интеграла к двукратному интегралу для важнейших систем криволинейных координат на плоскости и соответствующие примеры преобразований интегралов от декартовых прямоугольных координат к криволинейным.

1. Полярные координаты. Пусть дан интеграл

$$I = \int_D \int F(r, \varphi) dr d\varphi,$$

где r, φ — полярные координаты точки плоской области D (для большей наглядности здесь мы взяли обычные обозначения полярных координат; см. п° 39). При вычислении этого интеграла посредством двух однократных интегрирований по r и по φ следует различать два случая: а) полюс системы лежит вне области D (или на ее границе); б) полюс системы лежит в области D .

а) Если область D обладает тем свойством, что любой луч, исходящий из полюса (координатная линия $\varphi = \text{const}$), имеет не больше одной точки «входа» в область D (и, значит, не больше одной точки «выхода» из нее),* то

$$I = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} F(r, \varphi) dr,$$

где $r_1(\varphi)$ и $r_2(\varphi)$ — полярные радиусы соответственно точек «входа» и «выхода» из области D прямой линии $\varphi = \text{const}$, $r_1(\varphi) \leq r_2(\varphi)$, а интервал $[\varphi_1, \varphi_2]$, $\varphi_1 < \varphi_2$, есть наибольший интервал изменения координаты φ в области D . (Другой порядок интегрирования, когда сначала интегрирование производится по φ , а затем по r , обычно не применяется.)

б) Если область D обладает тем свойством, что любой луч, исходящий из полюса (координатная линия $\varphi = \text{const}$), имеет одну точку «выхода» из области D *) (т. е. если

*) Если область не удовлетворяет этому условию, то она разбивается на частичные области, удовлетворяющие ему; интеграл представляется, в силу свойства аддитивности, в виде суммы интегралов, взятых по частичным областям, и тогда каждый из слагаемых интегралов может быть заменен указанным кратным интегралом.

область D , как говорят, *звездная* относительно полюса), то

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{r(\varphi)} F(r, \varphi) dr,$$

где $r(\varphi)$ — полярный радиус точки выхода из области D линии $\varphi = \text{const}$ ($r = r(\varphi)$ — полярное уравнение линии — границы области D).

Пример 1. Пусть

$$I = \int_D \int \Phi(x^2 + y^2) dx dy,$$

где D — круг, ограниченный окружностью $x^2 - 2ax + y^2 = 0$, $a > 0$ (окружность с центром в точке $(a, 0)$ радиуса a , проходящая через начало координат), а функция $\Phi(\xi)$ непрерывна при $0 \leq \xi \leq 1$. Вычисление этого интеграла с помощью двукратного дает:

$$I = \int_0^{2a} dx \int_{-\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax-x^2}} \Phi(x^2 + y^2) dy$$

или

$$I = \int_{-a}^a dy \int_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^{a+\sqrt{a^2-y^2}} \Phi(x^2 + y^2) dx.$$

Гораздо проще выглядят и двойной и соответствующий двукратный интегралы, если перейти к полярным координатам:

$$I = \int_D \int \Phi(r^2) r dr d\varphi,$$

причем в системе полярных координат уравнение окружности, ограничивающей круг D , будет $r = 2a \cos \varphi$. Значит,

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2a \cos \varphi} \Phi(r^2) r dr.$$

Если рассматривать формулы замены переменных как формулы, отображающие круг D на декартову плоскость $O\varphi r$, то

$$I = \int_{\Delta} \int \Phi(r^2) r dr d\varphi,$$

где Δ — криволинейная трапеция, ограниченная интервалом

$$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

оси $O\varphi$ и косинусоидой $r = 2a \cos \varphi$.

Пример 2. Пусть

$$I = \iint_D \frac{dx dy}{(\sqrt{x^2 + y^2})^m},$$

где D — вся плоскость без какой-нибудь окрестности точки $(0, 0)$. Перейдем к полярным координатам:

$$I = \int_D \int \frac{r dr d\varphi}{r^m} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r^{m-1}} = \frac{2\pi}{m-2} \frac{1}{r^{m-2}} \Big|_{r_0}^{\infty},$$

где r_0 — радиус окружности, ограничивающей исключаемую окрестность начала координат. Отсюда видно, что данный несобственный интеграл (в смысле главного значения) существует, если $m > 2$ (и тогда он равен $\frac{2\pi}{m-2} \frac{1}{r_0^{m-2}}$); он не суще-

ствует, если $m \leq 2$. (То же самое имеет место и для интеграла $\iint \frac{dx dy}{(\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2})^m}$, распространенного на всю

плоскость без какой-нибудь области, содержащей точку (x_0, y_0) .) Легко доказать, что полученные результаты относятся вообще к рассматриваемому несобственному интегралу, а не только к главному его значению.

Пример 3. Пусть

$$I = \iint_D \frac{dx dy}{(\sqrt{x^2 + y^2})^m},$$

где D — какая-нибудь окрестность точки $(0, 0)$ (эта окрестность ограничена окружностью радиуса r_0). Переходя к полярным координатам, найдем:

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{r_0} \frac{dr}{r^{m-1}} = \frac{2\pi}{2-m} \frac{1}{r^{m-2}} \Big|_0^{r_0}.$$

Отсюда видно, что данный несобственный интеграл (в смысле главного значения) существует, если $m < 2$ (и тогда он равен $\frac{2\pi}{2-m} r_0^{2-m}$); он не существует, если $m \geq 2$. (То

же самое имеет место и для интеграла $\iint \frac{dx dy}{(\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2})^m}$, взятого по какой-нибудь конечной области, содержащей точку (x_0, y_0) . Легко доказать, что полученные результаты относятся вообще к рассматриваемому несобственному интегралу, а не только к его главному значению.

II. Другие координаты. Вполне аналогично приводится двойной интеграл к двукратным в случае других криволинейных координат.

Если же система координат не имеет простого геометрического смысла, то при замене переменных в двойном интеграле удобнее пользоваться первой интерпретацией формул преобразования, чем второй, т. е. удобнее представлять преобразованный интеграл в виде (4.6), чем в виде (4.7), и, значит, сохранять систему декартовых координат, но в другой, отображенной, области.

Пример 4. Пусть

$$I = \iint_D \Phi \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) dx dy,$$

где D — область, ограниченная эллипсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, а функция $\Phi(\xi)$ непрерывна при $0 \leq \xi \leq 1$. В декартовых координатах этот интеграл выражается довольно сложным двукратным интегралом (и совпадение левой части уравнения эллипса с аргументом подынтегральной функции несколько не облегчает вычислений). Но если перейти к обобщенным полярным координатам, связанным с декартовыми координатами формулами (см. п° 40):

$$x = ar \cos \varphi, \quad y = br \sin \varphi,$$

где a, b — положительные константы, то всё значительно упрощается. Имеем:

$$I = \iint_D \Phi(r^2) abr dr d\varphi,$$

причем в системе обобщенных полярных координат уравнением эллипса, ограничивающего область D , будет $r = 1$. Интегрируя сначала по r при постоянном, но произвольном φ , а затем по φ в границах наибольшего изменения этой переменной в области D , т. е. в интервале $[0, 2\pi]$, получим:

$$I = ab \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \Phi(r^2) r dr = 2\pi ab \int_0^1 \Phi(r^2) r dr = \pi ab \int_0^1 \Phi(r) dr.$$

Мы видим, насколько проще стало интегральное выражение для величины I .

Пример 5. Пусть

$$I = \iint_D \Phi_1(x) \Phi_2(y) \Phi_3(x+y) dx dy,$$

где D — треугольник, ограниченный прямыми: $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$; Φ_1 , Φ_2 , Φ_3 — непрерывные функции своих аргументов. Имеем в данных координатах:

$$I = \int_0^1 \Phi_1(x) dx \int_0^{1-x} \Phi_2(y) \Phi_3(x+y) dy.$$

Однако заменим переменные интегрирования новыми переменными u и v в соответствии с формулами:

$$x = u(1-v), \quad y = uv.$$

Обращая эти равенства, находим:

$$u = x + y, \quad v = \frac{y}{x+y}.$$

Отсюда видно, что формулы преобразования гомеоморфно отображают всю плоскость Oxy , лишенную прямой $x + y = 0$, на плоскость Ouv , причем треугольник D отображается в квадрат Δ , ограниченный прямыми: $v = 0$, $u = 0$, $v = 1$, $u = 1$. (Заметим, что точке $(0, 0)$ треугольника D соответствует отрезок: $0 \leq v \leq 1$, $u = 0$.)

Так как

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} 1-v & -u \\ v & u \end{vmatrix} = u,$$

то

$$I = \int_{\Delta} \int \Phi_1[u(1-v)] \Phi_2(uv) \Phi_3(u) u du dv$$

и, значит,

$$I = \int_0^1 dv \int_0^1 \Phi_1[u(1-v)] \Phi_2(uv) \Phi_3(u) u du.$$

Хотя подынтегральное выражение заметно не упростилось, но зато область интегрирования в новых координатах оказалась просто квадратом, так что преобразованный двойной интеграл привелся к двукратному интегралу с постоянными пределами.

Если $\Phi_1(x) = x^{p-1}$, $\Phi_2(y) = y^{q-1}$, $p \geq 1$, $q \geq 1$, то

$$I = \int_0^1 v^{q-1} (1-v)^{p-1} dv \int_0^1 u^{p+q-1} \Phi_3(u) du.$$

Первый из интегралов в правой части есть так называемый эйлеров интеграл первого рода; он обозначается символом $B(q, p)$ («бета от q и p »). Нетрудно (с помощью замены переменной $v = 1 - v$) показать, что $B(q, p) = B(p, q)$, и, следова-

тельно, мы приходим к формуле

$$\int \int_{\substack{x+y \leq 1 \\ x \geq 0, y \geq 0}} x^{p-1} y^{q-1} \Phi(x+y) dx dy = B(p, q) \int_0^1 u^{p+q-1} \Phi(u) du,$$

которая называется формулой *) Лиувилля **). В частности, при $\Phi(u) = (1-u)^{r-1}$, $r \geq 1$, находим значение так называемого интеграла ***) Дирихле ****):

$$\begin{aligned} \int \int_{\substack{x+y \leq 1 \\ x \geq 0, y \geq 0}} x^{p-1} y^{q-1} (1-x-y)^{r-1} dx dy = \\ = B(p, q) \int_0^1 u^{p+q-1} (1-u)^{r-1} du = B(p, q) B(r, p+q). \end{aligned}$$

Если $r = 1$, то имеем:

$$\int \int_{\substack{x+y \leq 1 \\ x \geq 0, y \geq 0}} x^{p-1} y^{q-1} dx dy = B(p, q) B(1, p+q) = \frac{B(p, q)}{p+q}.$$

Вычисляя интеграл слева в декартовых координатах, получаем соотношение

$$B(p, q+1) = \frac{q}{p+q} B(p, q),$$

выражающее одно из свойств эйлера интеграла $B(p, q)$.

Пример 6. Пусть

$$\int \int_D e^{-(x+y)} x^{p-1} y^{q-1} dx dy,$$

где D — первый квадрант плоскости Oxy , причем $p > 0$, $q > 0$. Нетрудно убедиться, хотя бы при помощи усиления подынтегрального выражения заменой множителя $e^{-(x+y)}$ единицей, что этот несобственный интеграл сходится. Очевидно, имеем:

$$I = \int_0^\infty e^{-x} x^{p-1} dx \int_0^\infty e^{-y} y^{q-1} dy.$$

*) Формула Лиувилля и следствия из нее справедливы и при $p > 0$, $q > 0$.

**) Ж. Лиувиль (1809—1882) — крупный французский математик.

***) r также может быть лишь положительным.

****) Г. Лежен-Дирихле (1805—1859) — крупный немецкий математик.

Каждый из этих интегралов есть так называемый эйлеров интеграл второго рода. Он обозначается символом Γ («гамма») от соответствующего параметра: $\Gamma(p)$, $\Gamma(q)$. Итак:

$$I = \Gamma(p) \Gamma(q).$$

Однако произведем в данном двойном интеграле замену переменных по формулам (пример 5):

$$x = u(1-v), \quad y = uv \quad \left(u = x+y, v = \frac{y}{x+y} \right).$$

Первому квадранту в плоскости Oxy соответствует бесконечная полоса Δ в плоскости Ouv , ограниченная прямыми: $v = 0$, $u = 0$, $v = 1$. Имеем:

$$\begin{aligned} I &= \int_{\Delta} \int e^{-[u(1-v)+uv]} u^{p-1} (1-v)^{p-1} u^{q-1} v^{q-1} u \, du \, dv = \\ &= \int_{\Delta} \int e^{-u} u^{p+q-1} v^{q-1} (1-v)^{p-1} \, du \, dv. \end{aligned}$$

Приводя последний двойной интеграл к двукратному, получим:

$$I = \int_0^1 v^{q-1} (1-v)^{p-1} \, dv \int_0^1 e^{-u} u^{p+q-1} \, du.$$

Первый из интегралов справа есть, как известно (см. пример 5), эйлеров интеграл 1-го рода $B(p, q)$, а второй — эйлеров интеграл 2-го рода $\Gamma(p+q)$. Значит,

$$I = \Gamma(p) \Gamma(q) = B(p, q) \Gamma(p+q),$$

что дает важное соотношение между эйлеровыми интегралами 1-го и 2-го родов. Его записывают обычно так:

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \quad (4.8)$$

Благодаря соотношению (4.8) можно, между прочим, интегралу Дирихле (пример 5) придать очень удобный вид:

$$\int \int_{\substack{x+y \leq 1 \\ x \geq 0, y \geq 0}} x^{p-1} y^{q-1} (1-x-y)^{r-1} \, dx \, dy = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q) \Gamma(r)}{\Gamma(p+q+r)}.$$

89. Тройной интеграл. Рассмотрим теперь приведение тройного интеграла к трехкратному для важнейших систем криволинейных координат в пространстве и соответствующие примеры преобразований интегралов от декартовых координат к криволинейным.

I. Цилиндрические координаты. Пусть дан интеграл

$$I = \iiint\limits_B F(r, \varphi, z) dr d\varphi dz,$$

где r, φ, z — цилиндрические координаты (п° 54) точки пространственной области B .

Вычисление этого интеграла может быть произведено посредством трех однократных интегрирований по r , по φ и по z . Если область B обладает тем свойством, что любая прямая, параллельная оси Oz (координатная линия $r = \text{const}, \varphi = \text{const}$), имеет не больше одной точки «входа» в область B (и, значит, не больше одной точки «выхода» из нее*), то

$$I = \iint\limits_{\Delta} dr d\varphi \int\limits_{z_1(r, \varphi)}^{z_2(r, \varphi)} F(r, \varphi, z) dz,$$

где $z_1(r, \varphi)$ и $z_2(r, \varphi)$ — аппликаты соответственно точек «входа» и «выхода» из области B прямой линии $r = \text{const}, \varphi = \text{const}$, $z_1(r, \varphi) \leq z_2(r, \varphi)$, а Δ — область изменения координат r и φ в области B , которая будет такой же, как и для ортогональной проекции области B на плоскость $Or\varphi$. После интегрирования по z мы получаем двойной интеграл в полярных координатах по области Δ , вычисление которого сводится к двум интегрированиям по r и по φ (см. выше). (Другой порядок интегрирования при нахождении интеграла I не употребляется.) Переход в интеграле от декартовых координат x, y, z к цилиндрическим координатам r, φ, z , вообще говоря, удобен тогда, когда подынтегральная функция относительно координат x и y хорошо преобразуется к полярным координатам r и φ или когда уравнение границы области Δ — проекции области B на плоскость Oxy — проще в полярных, чем в декартовых координатах.

II. Сферические координаты. Пусть дан интеграл

$$I = \iiint\limits_B F(\rho, \varphi, \theta) d\rho d\varphi d\theta,$$

*) См. подстрочное примечание на стр. 232.

где ρ , φ , θ — сферические (полярные) координаты (п° 55) точки пространственной области δ .

Вычисление этого тройного интеграла также производится посредством трех однократных интегрирований по ρ , по φ и по θ . Обычно интегрируют сначала по ρ , а затем по φ и θ . При этом следует различать, как и для плоских полярных координат, два случая: а) полюс системы лежит вне области δ (или на ее границе); б) полюс системы лежит в области δ .

а) Если область δ обладает тем свойством, что любой луч, исходящий из полюса (координатная линия $\varphi = \text{const}$, $\theta = \text{const}$), имеет не больше одной точки «входа» в область δ (и, значит, не больше одной точки «выхода» из нее *), то

$$I = \int_{\Delta} \int d\varphi d\theta \int_{\rho_1(\varphi, \theta)}^{\rho_2(\varphi, \theta)} F(\rho, \varphi, \theta) d\rho,$$

где $\rho_1(\varphi, \theta)$ и $\rho_2(\varphi, \theta)$ — сферические (полярные) радиусы соответственно точек «входа» и «выхода» из области δ луча $\varphi = \text{const}$, $\theta = \text{const}$, $\rho_1(\varphi, \theta) \leq \rho_2(\varphi, \theta)$, а Δ — область изменения координат φ и θ в области δ . Под Δ можно понимать часть единичной сферы, являющейся центральной проекцией области δ (с центром проекции в полюсе системы). Интегрируя дальше по φ , находим пределы интегрирования как значения этой координаты для точек «входа» в область Δ и «выхода» из нее параллели $\theta = \text{const}$: $\varphi = \varphi_1(\theta)$, $\varphi = \varphi_2(\theta)$, $\varphi_1(\theta) \leq \varphi_2(\theta)$; наконец, заключительное интегрирование по θ имеет своими пределами θ_1 , θ_2 , $\theta_1 < \theta_2$, — границы наибольшего изменения этой координаты в данной пространственной области δ , или, что все равно, в данной сферической области Δ . Таким образом,

$$I = \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi, \theta)}^{\rho_2(\varphi, \theta)} F(\rho, \varphi, \theta) d\rho.$$

Выделим в заданном подынтегральном выражении множитель $\sin \theta (\neq 0)$; будем иметь:

$$I = \int_{\Delta} \int \sin \theta d\varphi d\theta \int_{\rho_1(\varphi, \theta)}^{\rho_2(\varphi, \theta)} \frac{F(\rho, \varphi, \theta)}{\sin \theta} d\rho,$$

*) См. подстрочное примечание на стр. 232.

а так как $\sin \theta d\varphi d\theta$ есть элемент dq_1 меры телесного угла поверхности, ограничивающей область \mathcal{G} (п° 56), то можно записать:

$$I = \iint_{\Delta} dq_1 \int_{\rho_1(\varphi, \theta)}^{\rho_2(\varphi, \theta)} \frac{F(\rho, \varphi, \theta)}{\sin \theta} d\rho.$$

б) Если область \mathcal{G} обладает тем свойством, что любой луч, исходящий из полюса (координатная линия $\varphi = \text{const}$, $\theta = \text{const}$), имеет одну точку «выхода» из области \mathcal{G} *) (т. е. если область \mathcal{G} — *звездная* относительно полюса), то

$$I = \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\rho(\varphi, \theta)} F(\rho, \varphi, \theta) d\rho,$$

где $\rho(\varphi, \theta)$ — сферический (полярный) радиус точки «выхода» из области \mathcal{G} линии $\varphi = \text{const}$, $\theta = \text{const}$ ($\rho = \rho(\varphi, \theta)$ — сферическое (полярное) уравнение поверхности — границы области \mathcal{G}).

Пример 1. Пусть

$$I = \iiint_{\mathcal{G}} \Phi(x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz,$$

где \mathcal{G} — шар, ограниченный сферой $x^2 + y^2 + z^2 - 2az = 0$, $a > 0$ (сфера с центром в точке $(0, 0, a)$ радиуса a , проходящая через начало координат), а функция $\Phi(\xi)$ — непрерывна при $0 \leq \xi \leq 1$. Вычислить этот интеграл можно с помощью, например, такого трехкратного интеграла:

$$I = \int_{-a}^a dx \int_{-V\overline{a^2-x^2}}^{V\overline{a^2-x^2}} dy \int_{a-V\overline{a^2-x^2-y^2}}^{a+V\overline{a^2-x^2-y^2}} \Phi(x^2 + y^2 + z^2) dz.$$

Какой-нибудь иной порядок интегрирования приведет к не менее сложному трехкратному интегралу. Гораздо проще выглядят и тройной и соответствующий трехкратный интегралы, если перейти к сферическим координатам:

$$I = \iiint_{\mathcal{G}} \Phi(\rho^2) \rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta,$$

*) См. подстрочное примечание на стр. 232.

причем в системе сферических координат уравнение сферы, ограничивающей шар \mathcal{G} , будет $\rho = 2a \cos \theta$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Значит,

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2a \cos \theta} \Phi(\rho^2) \rho^2 d\rho = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a \cos \theta} \Phi(\rho^2) \rho^2 d\rho.$$

Пример 2. Пусть

$$I = \iiint_{\mathcal{G}} \frac{dx dy dz}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^m},$$

где \mathcal{G} — все пространство без какой-нибудь окрестности точки $(0, 0, 0)$. Перейдем к сферическим координатам:

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{\mathcal{G}} \frac{\rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta}{\rho^m} = \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\rho_0}^{\infty} \frac{d\rho}{\rho^{m-2}} = \\ &= \frac{4\pi}{m-3} \frac{1}{\rho^{m-3}} \Big|_{\infty}^{\rho_0}, \end{aligned}$$

где ρ_0 — радиус сферы, ограничивающей исключаемую окрестность начала координат. Отсюда видно, что данный несобственный интеграл (в смысле главного значения) существует, если $m > 3$ (и тогда он равен $\frac{4\pi}{m-3} \frac{1}{\rho_0^{m-3}}$); он не существует, если $m \leq 3$. (То же самое имеет место и для интеграла

$$\iiint \frac{dx dy dz}{(\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2})^m},$$

распространенного на все пространство без какой-нибудь области, содержащей точку (x_0, y_0, z_0) .) Легко доказать, что полученные результаты относятся вообще к рассматриваемому несобственному интегралу, а не только к главному его значению.

Пример 3. Пусть

$$I = \iiint_{\mathcal{G}} \frac{dx dy dz}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^m},$$

где \mathcal{G} — какая-нибудь окрестность точки $(0, 0, 0)$ (эта окрестность ограничена сферой радиуса ρ_0). Переходя к сферическим координатам, найдем:

$$I = \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\rho_0} \frac{d\rho}{\rho^{m-2}} = \frac{4\pi}{3-m} \frac{1}{\rho^{m-3}} \Big|_0^{\rho_0}.$$

Отсюда видно, что данный несобственный интеграл (в смысле главного значения) существует, если $m < 3$ (и тогда он равен $\frac{4\pi}{3-m} \rho_0^{3-m}$); он не существует, если $m \geq 3$. (То же самое имеет место и для интеграла

$$\iiint \frac{dx dy dz}{(\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2})^m},$$

взятого по какой-нибудь конечной области, содержащей точку (x_0, y_0, z_0)). Легко доказать, что полученные результаты относятся вообще к рассматриваемому несобственному интегралу, а не только к главному его значению.

III. Другие координаты. Вполне аналогично приводится тройной интеграл к трехкратным в случае других криволинейных координат. Если же система координат не имеет простого геометрического смысла, то при замене переменных в тройном интеграле удобнее пользоваться первой интерпретацией формул преобразования, чем второй, т. е. удобнее представлять преобразованный интеграл в виде (4.6), чем в виде (4.7), и, значит, сохранять систему декартовых координат, но, в другой, отображенной, области.

Пример 4. Пусть

$$I = \iiint_6 \Phi_1(x) \Phi_2(y) \Phi_3(z) \Phi_4(x+y+z) dx dy dz,$$

где 6 — тетраэдр, ограниченный плоскостями $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$, а $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4$ — непрерывные функции своих аргументов. Имеем в данных координатах:

$$I = \int_0^1 \Phi_1(x) dx \int_0^{1-x} \Phi_2(y) dy \int_0^{1-x-y} \Phi_3(z) \Phi_4(x+y+z) dz.$$

Однако заменим переменные интегрирования новыми переменными u, v и w в соответствии с формулами:

$$x = u(1-v), \quad y = uv(1-w), \quad z = uvw.$$

Обращая эти равенства, находим:

$$u = x+y+z, \quad v = \frac{y+z}{x+y+z}, \quad w = \frac{z}{y+z}.$$

Отсюда видно, что формулы преобразования гомеоморфно отображают все пространство $Oxyz$, лишенное плоскостей $y+z=0$, $x+y+z=0$, на пространство $Ouvw$, причем тетраэдр 6 отображается в куб Ω , ограниченный плоскостями $u=0$, $u=1$, $v=0$, $v=1$, $w=0$, $w=1$. (Заметим, что точке $x=0, y=0, z=0$ тетраэдра 6 соответствует квадрат $0 \leq v \leq 1, 0 \leq w \leq 1, u=0$.)

Так как

$$\frac{\partial (x, y, z)}{\partial (u, v, w)} = \begin{vmatrix} 1-v & -u & 0 \\ v(1-w) & u(1-w) & -uv \\ vw & uw & uv \end{vmatrix} = u^2v,$$

то

$$I = \int \int \int_{\Omega} \Phi_1[u(1-v)] \Phi_2[uv(1-w)] \Phi_3(uvw) \Phi_4(u) u^2v \, du \, dv \, dw$$

и, значит,

$$I = \int_0^1 dw \int_0^1 v \, dv \int_0^1 \Phi_1[u(1-v)] \Phi_2[uv(1-w)] \Phi_3(uvw) \Phi_4(u) u^2 \, du.$$

Хотя подынтегральное выражение заметно не упростилось, но зато область интегрирования в новых координатах оказалась просто кубом Ω , так что преобразованный тройной интеграл привелся к трехкратному интегралу с постоянными пределами.

Если

$$\Phi_1(x) = x^{p-1}, \quad \Phi_2(y) = y^{q-1}, \quad \Phi_3(z) = z^{r-1}, \quad p \geq 1, \quad q \geq 1, \quad r \geq 1,$$

то

$$I = \int_0^1 w^{r-1} (1-w)^{q-1} \, dw \int_0^1 v^{q+r-1} (1-v)^{p-1} \, dv \int_0^1 u^{p+q+r-1} \Phi_4(u) \, du,$$

т. е.

$$\begin{aligned} & \int \int \int_{\substack{x+y+z \leq 1 \\ x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0}} x^{p-1} y^{q-1} z^{r-1} \Phi(x+y+z) \, dx \, dy \, dz = \\ & = B(q, r) B(p, q+r) \int_0^1 u^{p+q+r-1} \Phi(u) \, du. \end{aligned}$$

Эта формула называется формулой Лиувилля *). В частности, при $\Phi(u) = (1-u)^{s-1}$, $s \geq 1$, находим значение так

*) Формула Лиувилля и следствия из нее справедливы и при $p > 0$, $q > 0$, $r > 0$.

называемого интеграла Дирихле*):

$$\begin{aligned} \int \int \int_{\substack{x+y+z \leq 1 \\ x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0}} x^{p-1} y^{q-1} z^{r-1} (1-x-y-z)^{s-1} dx dy dz = \\ = B(q, r) B(p, q+r) \int_0^1 u^{p+q+r-1} (1-u)^{s-1} du = \\ = B(q, r) B(p, q+r) B(s, p+q+r) = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q) \Gamma(r) \Gamma(s)}{\Gamma(p+q+r+s)}. \end{aligned}$$

Если $s=1$, то имеем:

$$\begin{aligned} \int \int \int_{\substack{x+y+z \leq 1 \\ x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0}} x^{p-1} y^{q-1} z^{r-1} dx dy dz = \frac{B(q, r) B(p, q+r)}{p+q+r} = \\ = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q) \Gamma(r)}{\Gamma(p+q+r+1)}. \end{aligned}$$

§ 4. КРИВОЛИНЕЙНЫЙ ИНТЕГРАЛ ПО КООРДИНАТЕ

90. Постановка вопроса. Ориентация линии. Наряду с интегралами по мере области (которые иногда называются интегралами 1-го типа) вводятся интегралы по координатам (называемые интегралами 2-го типа). Отметим, что эти интегралы конструируются совершенно так же, как и соответствующие интегралы по мере области, с тем только различием, что каждое слагаемое (элемент) интегральной суммы получается умножением значения интегрируемой функции не на меру частичной области, а на ее проекцию (на ось или на плоскость координат), причем этой частичной области придается определенная ориентация (направление). Такие интегралы оказываются более употребительными, чем интегралы по мере, ибо они часто позволяют ограничиться одной формулой там, где требуется несколько формул, если пользоваться вместо них интегралами по мере. С этим связано и то важное обстоятельство, что интегралы по координатам допускают простые и очень полезные соотношения между интегралами различных типов, точнее говоря, между интегралами, распространенными

*) s также может быть лишь положительным.

по областям различного числа измерений. Но в то время как интегралам по мере можно было легко дать общее определение и построить их общую теорию, по отношению к интегралам по координатам это сделать затруднительно.

Мы изучим интегралы по координатам лишь в трех случаях, когда областями интегрирования служат: 1) линия в плоскости; 2) линия в пространстве; 3) поверхность. Этого вполне достаточно для дальнейшего развития общих и специальных вопросов математического анализа и для его многочисленных применений к техническим и физическим дисциплинам.

При определении и выяснении простейших свойств криволинейных интегралов можно объединить два первых случая. Рассмотрим, следовательно, криволинейный интеграл, взятый по линии L , принадлежащей — безразлично — координатной плоскости или координатному пространству.

Этой линии L), являющейся областью интегрирования, придается теперь одна из двух возможных ориентаций (направлений). Именно, одна из граничных точек линии L — точка A — принимается в качестве начальной, а другая — точка B — в качестве конечной, причем всякое перемещение вдоль линии L может происходить лишь от точки A к точке B без какого бы то ни было повторения уже раз пройденного участка. (Если линия L замкнутая, то под A и B подразумеваются две «стороны» (вдоль линии L) одной и той же точки.)

Таким образом, задание ориентации на всей линии L означает и задание ориентации на любом ее участке.

Обратно, задание ориентации какой-нибудь окрестности лишь одной точки M линии L определит ориентацию и всей линии L , если условиться, что при непрерывном переходе точки M по линии L ориентация окрестности точки M изменяется также непрерывно.

Ориентацию окрестности точки можно также указать заданием направления касательной к линии L в начальной точке окрестности. В плоском же случае ориентацию

*) Напомним, что в этой книге везде линии предполагаются гладкими или кусочно-гладкими. Здесь мы будем их считать также и простыми, т. е. не имеющими точек самопересечения.

окрестности точки можно задать и направлением нормали к линии L в данной точке, если дополнительно согласиться, что направленные касательная и нормаль в любой точке линии должны составлять «правый крест»*), т. е. систему, ориентированную подобно принятой правой системе декартовых координат Oxy .

Итак, ориентацию плоской линии при описанных соглашениях можно задать направлением нормали к ней в одной точке; это вместе с тем дает и указание (той или другой) «стороны» линии. Отсюда следует, что ориентация плоской линии определяется также и указанием «стороны» этой линии.

Замкнутая плоская линия обычно считается положительно ориентированной, если обход по ней происходит против движения часовой стрелки (или, что все равно, если область, ограниченная линией, остается слева). В соответствии же со сказанным положительную ориентацию замкнутой линии можно выразить и так: *замкнутая плоская линия ориентирована положительно, если указана (выбрана) ее «внутренняя сторона»*, т. е. сторона, обращенная к области, ограниченной линией. Противоположная ориентация замкнутой плоской линии называется отрицательной.

91. Определение и свойства интеграла. Перейдем теперь к определению криволинейного интеграла по координате (например, по x).

Определение. Пусть ориентированная конечная линия L разбита произвольным образом на n частичных ориентированных дуг, P_i есть произвольная точка i -й частичной дуги, а Δx_i — проекция этой дуги на ось Ox . Тогда криволинейным интегралом I по координате x

$$I = \int_L f(P) dx$$

*) Касательная и нормаль образуют «правый крест», если для совмещения по кратчайшему пути касательной с нормалью нужно касательную вращать вокруг точки касания против движения часовой стрелки.

от функции $f(P)$ по линии L , на которой функция $f(P)$ непрерывна, называется предел n -й интегральной суммы I_n

$$I_n = \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta x_i$$

при $n \rightarrow \infty$ и стремлении к нулю наибольшей длины частичных дуг.

Каждый член интегральной суммы есть произведение значения интегрируемой функции в произвольной точке частичной ориентированной дуги на приращение координаты x , соответствующее этой дуге. Аналогично определяется интеграл по той же линии L от той же функции $f(P)$ по другой декартовой координате: y или z или какой-нибудь координате иной системы, например по полярному углу плоской линии L .

При задании криволинейного интеграла по координате нужно указывать не только линию — область интегрирования, но и ее ориентацию.

Можно показать (в теореме существования), что интегральная сумма I_n для криволинейного интеграла всегда при указанных условиях действительно имеет предел, не зависящий ни от способа последовательного разбиения линии L на частичные дуги, ни от выбора точек P_i *).

В частности, если линией интегрирования L служит интервал оси Ox , то криволинейный интеграл по координате x есть просто обыкновенный (ординарный) интеграл, взятый по указанному интервалу в направлении от левого его конца к правому или, наоборот, от правого к левому в зависимости от заданной ориентации (т. е. в зависимости от того по верхней или по нижней стороне оси Ox производится интегрирование).

Криволинейный интеграл по координате, так же как и интеграл по мере области (п° 81), обладает свойствами

*) Определение криволинейного интеграла по координате и теорема существования сохраняются и для функции, допускающей на линии интегрирования конечное число точек конечного разрыва.

линейности и аддитивности, т. е.

$$\begin{aligned} \text{I. } \int_L [C_1 f_1(P) + C_2 f_2(P) + \dots + C_k f_k(P)] dx &= \\ &= C_1 \int_L f_1(P) dx + C_2 \int_L f_2(P) dx + \dots + C_k \int_L f_k(P) dx \\ (C = \text{const}). \\ \text{II. } \int_{L_1 + L_2 + \dots + L_k} f(P) dx &= \int_{L_1} f(P) dx + \int_{L_2} f(P) dx + \dots \\ &\dots + \int_{L_k} f(P) dx. \end{aligned}$$

Кроме того, криволинейный интеграл по координате обладает специфическим свойством, связанным с ориентацией линии интегрирования, а именно:

III. *Перемена ориентации линии интегрирования изменяет знак интеграла на обратный:*

$$\int_L f(P) dx = - \int_{-L} f(P) dx;$$

через L и $-L$ обозначена одна и та же линия, но при противоположных ориентациях.

Это свойство в свою очередь обуславливает следующее важное свойство криволинейного интеграла по координате:

IV. *Если точки замкнутого контура L соединить линиями так, что образуется k замкнутых контуров L_1, L_2, \dots, L_k , ориентированных так же, как и данный контур L *), то интеграл по координате по всей линии L будет равен сумме интегралов по линиям L_1, L_2, \dots, L_k **):*

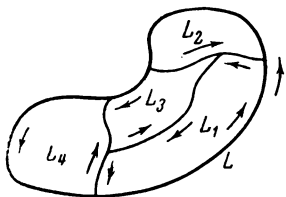
$$\int_L f(P) dx = \int_{L_1} f(P) dx + \int_{L_2} f(P) dx + \dots + \int_{L_k} f(P) dx.$$

*) Это значит, что частичные замкнутые линии L_i должны быть так ориентированы, чтобы определяемая ими ориентация линии L совпадала с заданной ориентацией этой линии. В плоском случае можно сказать проще: линии L_i и линия L должны быть ориентированы или все положительно или все отрицательно.

**) Для того чтобы подчеркнуть замкнутость линии интегрирования, к символу криволинейного интеграла по такой линии иногда присоединяют кружок:

$$\oint_L f(p) ds, \quad \oint_L f(p) dx.$$

Доказательство непосредственно вытекает из аддитивности интеграла и его свойства изменять знак при перемене ориентации контура интегрирования. Действительно, каждая вспомогательная линия проходится при интегрировании в конечном счете два раза, во взаимно-противоположных направлениях (черт. 27), и в результате остаются только интегралы по частям линии L , в сумме дающие интеграл по всему этому контуру.



Черт. 27.

Здесь уместно заметить, что по отношению к обыкновенному интегралу имеет место формула замены переменной, подобная формуле (4.6₁) замены переменной в (одномерном) интеграле по длине, но учитывающая ориентацию области интегрирования, а именно:

$$\int_l f(x) dx = \int_\lambda f_1(u) \frac{dx}{du} du, \quad (4.9)$$

где $x = \varphi(u)$ — формула, отображающая ориентированный интервал λ оси Ou на данный ориентированный интервал l оси Ox , и $f_1(u) = f[\varphi(u)]$. Мы видим, что в формуле (4.9) в отличие от формулы (4.6₁) множителем в новом подынтегральном выражении вместо модуля производной отображающей функции (коэффициента искажения $k(u) = \left| \frac{dx}{du} \right|$) берется просто производная $\frac{dx}{du}$.

Интересно, что формула (4.9) справедлива и без предположения о гомеоморфности отображения $x = \varphi(u)$, причем это последнее обстоятельство нельзя перенести на многомерные интегралы.

Простое доказательство формулы (4.9) основывается на формуле (4.6₁) с учетом знаков производной $\varphi'(u)$ на отдельных участках интервала λ (ср. с доказательством, приводимым ниже для двумерного случая). Формула (4.9) как раз обычно и известна из общего курса анализа (см. I, 107).

92. Способы вычисления. Пусть плоская линия l задана параметрическими уравнениями:

$$x = \varphi(u), \quad y = \psi(u),$$

где $\varphi(u)$, $\psi(u)$ — дифференцируемые функции переменной (параметра) u в ориентированном интервале λ оси Ou , соответствующем заданному ориентированному контуру интегрирования l .

В этом случае криволинейный интеграл по координате может быть вычислен по формуле

$$\int_l f(x, y) dx = \int_\lambda f_1(u) \varphi'(u) du, \quad (*)$$

где $f_1(u) = f[\varphi(u), \psi(u)]$. Роль параметра u может выполнять и переменная интегрирования x .

Формула (*), по существу, обобщает формулу (4.9), относящуюся к случаю, когда контуром служит интервал l оси Ox .

При необходимости контур l разбивается на части и значение всего интеграла находят как сумму интегралов, вычисляемых по формуле (*).

Все сказанное можно дословно повторить для случая пространственной линии L , заданной параметрическими уравнениями:

$$x = \varphi(u), \quad y = \psi(u), \quad z = \chi(u),$$

для которой формула (*) запишется в виде

$$\int_L f(x, y, z) dx = \int_\lambda f_1(u) \varphi'(u) du, \quad (**)$$

где $f_1(u) = f[\varphi(u), \psi(u), \chi(u)]$.

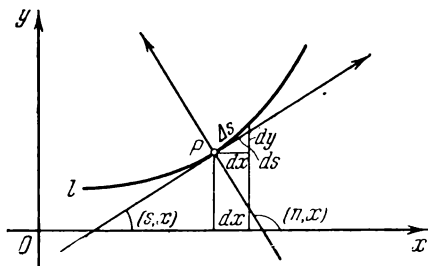
Таким образом, вычисление всякого криволинейного интеграла приводится к вычислению обыкновенных (ординарных) интегралов.

Криволинейный интеграл по координате тесно связан с соответствующим интегралом по длине; эти интегралы просто выражаются друг через друга. Мы имеем (черт. 28) в плоском случае:

$$\frac{dx}{ds} = \cos(s, x) = \sin(s, y), \quad \frac{dy}{ds} = \cos(s, y) = \sin(s, x),$$

где ds — элемент (дифференциал) длины линии l в ее точке $P(x, y)$; dx, dy — проекции ориентированного элемента этой

линии в точке P на оси Ox и Oy ; (s, x) и (s, y) — углы, образованные ориентированной касательной к линии l в точке P с осями Ox и Oy . Если обозначить через (n, x) и



Черт. 28.

(n, y) — углы, образованные ориентированной нормалью к линии l в точке P с осями Ox и Oy , то (см. черт. 28) $(n, x) = (s, x) + \frac{\pi}{2}$, и мы получаем другую пару формул:

$$\frac{dx}{ds} = \sin(n, x) = \cos(n, y),$$

$$\frac{dy}{ds} = -\cos(n, x) = -\sin(n, y).$$

Значит,

$$\int_i f(P) dx = \int_i f(P) \cos(s, x) ds = \int_i f(P) \sin(n, x) ds,$$

$$\int_i f(P) ds = \int_i f(P) \cdot \frac{1}{\cos(s, x)} dx = \int_i f(P) \cdot \frac{1}{\sin(n, x)} dx$$

и т. п.

В пространственном случае имеем аналогичные соотношения:

$$\int_L f(P) dx = \int_L f(P) \cos(s, x) ds$$

и т. п.

Эти соотношения позволяют изучать интегралы одного типа посредством изучения интегралов другого типа, в частности интегралы по ориентированным линиям, через интегралы по длине.

Понятие криволинейного интеграла по координате совершенно так же, как и понятие криволинейного интеграла по длине, может быть распространено на случаи: 1) простирающегося в бесконечность контура интегрирования; 2) бесконечных разрывов интегрируемой функции на контуре интегрирования; другими словами, могут быть введены понятия несобственных криволинейных интегралов по координате.

93. Интеграл как функционал. Дополнительные замечания. Если подынтегральная функция $f(P)$ определена или рассматривается нами как определенная только на некоторой данной линии L , то криволинейный интеграл (по длине или координате), взятый вдоль L , дает, в сущности говоря, лишь удобную форму записи одного или нескольких обыкновенных (ординарных) интегралов. Совсем иное дело, когда функция $f(P)$ определена (и непрерывна) в области, в которой берутся различные линии в качестве путей интегрирования. Тогда криволинейный интеграл (как по длине, так и по координате)

$$\int_L f(P) ds \quad \text{или} \quad \int_L f(P) dx \quad \text{и т. п.}$$

принимает свои значения в зависимости от контура интегрирования. Каждому такому контуру соответствует определенное значение интеграла; говорят, что криволинейный интеграл является *функционалом в соответствующей области*.

Вообще, если каждой рассматриваемой линии в данной области (т. е. функции или системе функций) соответствует определенное значение некоторой величины, то эта величина называется *функционалом (от линии)*.

Например, если движение происходит по фиксированной линии под действием данной силы, то произведенную при этом работу удобно выразить одним криволинейным интегралом (см. ниже), однако он ничего существенно нового по сравнению с обыкновенными интегралами нам не дает. Если же рассматривать поле сил, в котором движение может происходить по различным линиям, то работу поля сил при этом мы можем также выразить одним криволинейным

интегралом, но уже зависящим от пути, на котором производится эта работа. Следовательно, работа является функционалом в данном поле. Из этого простейшего примера видно, насколько важно изучение поведения криволинейного интеграла как функционала, т. е. изучение изменений его в зависимости от изменений контура интегрирования. Такое изучение криволинейного интеграла чаще всего опирается на формулу Стокса, которая в частном случае, когда контур интегрирования лежит в координатной плоскости, обращается в известную формулу Грина (см. ниже §§ 6, 7).

Наконец, упомянем, что криволинейные интегралы по координате чаще всего употребляются в виде составных интегралов, являющихся суммой интегралов, взятых по одной и той же линии, но по различным координатам. Так, интегралы

$$\int_L X(P) dx, \quad \int_L Y(P) dy, \quad \int_L Z(P) dz,$$

где X, Y, Z — заданные функции точки $P(x, y, z)$ линии L , т. е., вообще говоря,

$$X = X(x, y, z), \quad Y = Y(x, y, z), \quad Z = Z(x, y, z),$$

используются совместно в виде суммы; она и записывается с помощью одного символа интеграла:

$$\int_L X dx + Y dy + Z dz.$$

Само собой очевидно, что изложенные выше свойства и особенности криволинейных интегралов по координате относятся в равной степени и к составным криволинейным интегралам.

Большая роль составных криволинейных интегралов видна хотя бы из следующих простых примеров.

1. Если X, Y, Z — проекции соответственно на оси координат Ox, Oy, Oz силы F , действующей в точке $P(x, y, z)$, то работа A силы F вдоль линии L выражается интегралом (II, 184):

$$A = \int_L X dx + Y dy + Z dz.$$

2. Если X, Y, Z — проекции соответственно на оси координат Ox, Oy, Oz вектора скорости точки текущей жидкости, то интегралы типа

$$\int_L X dx + Y dy + Z dz$$

выражают количество протекающей жидкости. Такое применение криволинейных интегралов чрезвычайно важно в гидромеханике, а гидромеханическая иллюстрация криволинейных интегралов в высшей степени удобна и наглядна. Мы, однако, не будем здесь прибегать к этой иллюстрации, так как ее наиболее естественное место — в теории векторного поля.

§ 5. ПОВЕРХНОСТНЫЙ ИНТЕГРАЛ ПО КООРДИНАТАМ

94. Ориентация поверхности. Наряду с понятием интеграла, взятого по ориентированной одномерной области (линии), введем понятие интеграла, распространенного по ориентированной двумерной области (поверхности). Для этого установим аналогично линейному случаю ориентацию (направление) поверхности и правило проектирования ориентированного элемента поверхности на координатную плоскость.

Займемся сначала первым вопросом — ориентацией поверхности.

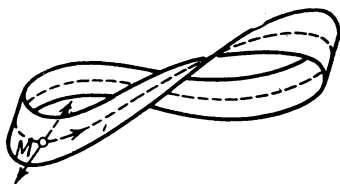
Ориентацию поверхности мы определим аналогично тому, как мы определяем ориентацию линии по направлениям ее нормалей (т. е. по «стороне» линии *), см. стр. 247).

Для этого прежде всего необходимо потребовать, чтобы направление нормали всегда однозначно указывало «сторону» поверхности; другими словами, нужно потребовать, чтобы после любого непрерывного перемещения точки по поверхности и возвращения в исходное положение (при непрерывном

*) Первоначальное определение ориентации линии (по касательным), наиболее естественное и наглядное, не может быть, однако, сразу и непосредственно перенесено на поверхность, а упомянутое следствие из него (определение по «нормальям») переносится без особых затруднений.

изменении направления нормали*)) мы приходили бы к исходному же, а не к противоположному направлению нормали. Такое требование не является надуманным, поскольку существуют поверхности, ему не удовлетворяющие. (Подобное требование не возникает в случае линии, так как нормаль к линии обязательно совпадает сама с собой, как только точка возвратится в исходное положение.)

Простейшим примером особенных поверхностей, не удовлетворяющих высказанному требованию, может служить так называемый *лист Мёбиуса***) — поверхность, которую



Черт. 29.

можно ясно себе представить по ее модели; последнюю легко сделать из прямоугольной полоски бумаги, склеив ее так же, как и при изготовлении модели цилиндра, только предварительно один раз перекрутив эту полоску (черт. 29). Выйдя из какой-нибудь точки *M* листа Мёбиуса с определенным направлением нормали, можно, соблюдая указанную

непрерывность и нигде не пересекая границы листа, придти в ту же точку с противоположным направлением нормали (черт. 29). Таким образом, взятое направление нормали еще не характеризует «стороны» листа Мёбиуса. Подобные поверхности называются *односторонними*.

Пусть теперь подвижная точка после описанного непрерывного перемещения по произвольному пути на поверхности, не пересекающему ее границы, возвращается в свое исходное положение; если при этом направление нормали всегда совпадает с исходным направлением, то такая поверхность называется *двусторонней*. Мы будем иметь в виду исключительно двусторонние поверхности. Выбор направления нормали в любой точке двусторонней поверхности ориентирует поверхность, указывая одну из ее сторон.

Ориентированная двусторонняя поверхность — это поверхность, на которой выбрана определенная сторона.

*) То есть при бесконечной близости направлений нормалей в бесконечно близких точках.

**) А. Мёбиус (1790—1868) — известный немецкий математик.

Вслед за этим уже можно дать и другое определение ориентации поверхности, аналогичное первоначальному определению («по касательным») ориентации линии. Для этого условимся раз и навсегда, что направление движения по замкнутой линии на поверхности и направление нормали к поверхности в любой точке внутри этой линии образуют «правый винт», т. е. систему, ориентированную подобно принятой правой системе координат $Oxyz$.

Значит при этом условии по заданному направлению нормали легко узнать направление движения по замкнутой линии на поверхности и, наоборот, по направлению этого движения — направление нормали к поверхности.

Итак, *ориентацию двусторонней поверхности при наших соглашениях можно задать направлением перемещения («вращения») по границе окрестности какой-нибудь одной точки поверхности.*

Отсюда вытекает и следующее наглядное правило для определения ориентации незамкнутой двусторонней поверхности: *если человек движется по границе поверхности в таком направлении, что поверхность остается слева от него, то направление от ног к голове указывает сторону поверхности, ориентирующую ее.*

Замкнутую поверхность обычно считают положительно ориентированной, если указана (выбрана) ее «внешняя сторона», т. е. сторона, обращенная к внешнему пространству (ср. стр. 247). Противоположная ориентация замкнутой поверхности называется отрицательной.

Перейдем ко второму вопросу — проектированию направленного элемента поверхности на координатные плоскости.

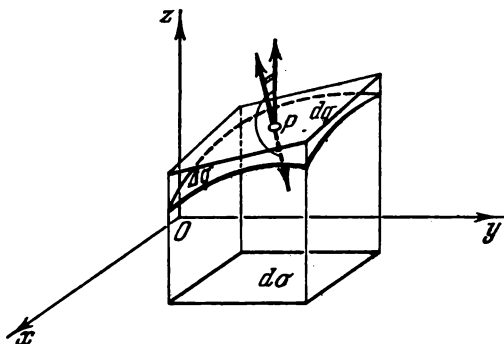
Так как мы рассматриваем ориентированную поверхность, то следует считать ориентированной и проекцию ее элемента, именно, эта проекция должна иметь знак, причем естественно полагать, что он должен определяться направлением нормали, ориентирующим поверхность. Мы условимся о следующем: *под проекцией dz на координатную плоскость (например, на плоскость Oxy) элемента dq ориентированной поверхности мы понимаем площадь обычной геометрической (ортогональной) проекции данного элемента на данную плоскость, снабженную знаком*

плюс или минус; знак плюс берется в случае, когда направленная нормаль образует острый угол с координатной осью, перпендикулярной к плоскости проекции (например, с осью Oz), а знак минус — когда этот угол тупой.

Таким образом, мы принимаем, что

$$d\sigma = dq \cos \delta(P),$$

где $\delta(P)$ — угол, образованный ориентированной нормалью



Черт. 30.

к поверхности в точке P с осью, перпендикулярной к плоскости проекции (черт. 30).

Вполне аналогичную формулу мы имели для случая линии (п° 92, стр. 252).

Для плоскости Oxy в системе декартовых прямоугольных координат элемент площади равен $dx dy$, причем мы всегда до сих пор полагали, что это выражение положительное; но если учитывать ориентацию плоскости Oxy , т. е. различать ее верхнюю и нижнюю стороны, то выражению $dx dy$ нужно, в согласии с принятым условием, приписать знак плюс для верхней стороны, знак минус для нижней стороны. Подобное замечание относится и к плоскостям Oxz , Oyz . Итак, в дальнейшем $dx dy$ предполагается снабженным определенным знаком, и мы имеем:

$$dx dy = dq \cos(n, z);$$

аналогично

$$dx dz = dq \cos(n, y),$$

$$dy dz = dq \cos(n, x),$$

где (n, x) , (n, y) , (n, z) — углы, образованные ориентированной нормалью к поверхности в точке P соответственно с осями Ox , Oy , Oz (ср. п° 51).

Полезность наших соглашений в двумерном случае видна хотя бы из того, что они, ориентируя элементы площади самих координатных плоскостей, устанавливают аналогию с тем, что имеет место в одномерном случае. Дело в том, что проекция dx , или dy , или dz направленного элемента линии не нуждается в специальном соглашении о знаке — она ориентирована автоматически, а именно: она положительна или отрицательна в зависимости от того, острый или тупой угол образует ориентированная касательная к линии с осью проекции (или, что все равно в плоском случае, ориентированная нормаль к линии с осью, перпендикулярной к оси проекции).

95. Определение и свойства интеграла. Перейдем теперь к определению поверхностного интеграла по координатам (например, по x и y).

Определение. Пусть ориентированная конечная поверхность S разбита произвольным образом на n частичных ориентированных поверхностей, P_i есть произвольная точка i -й частичной поверхности, а $\Delta x_i \Delta y_i$ — проекция этой поверхности на плоскость Oxy . Тогда поверхностным интегралом I по координатам x , y

$$I = \iint_S f(P) dx dy$$

от функции $f(P)$ по поверхности S , на которой функция $f(P)$ непрерывна, называется предел n -й интегральной суммы I_n :

$$I_n = \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta x_i \Delta y_i$$

при $n \rightarrow \infty$ и стремлении к нулю наибольшего диаметра частичных поверхностей.

Каждый член интегральной суммы есть произведение значения интегрируемой функции в произвольной точке частичной ориентированной поверхности на проекцию этой частичной поверхности на плоскость Oxy . (Аналогично определяется интеграл по той же поверхности от той же функции $f(P)$ по другим координатам x и z или y и z .)

При задании поверхностного интеграла по координатам нужно указывать не только поверхность — область интегрирования, но и ее ориентацию.

Можно показать (в теореме существования), что интегральная сумма I_n для поверхностного интеграла всегда при указанных условиях действительно имеет предел, не зависящий ни от способа последовательного разбиения поверхности S на частичные поверхности, ни от выбора точек P_i^*).

В частности, если поверхностью интегрирования S служит область плоскости Oxy , то поверхностный интеграл по координатам x и y есть просто двойной интеграл («по площади»), взятый по указанной области со знаком $+$ или $-$ в зависимости от заданной ориентации (т. е. в зависимости от того, по верхней или по нижней стороне плоскости Oxy производится интегрирование).

Поверхностный интеграл по координатам, так же как и интеграл по мере области (п° 81), обладает свойствами линейности и аддитивности, т. е.

$$\begin{aligned} \text{I. } \int_S [C_1 f_1(P) + C_2 f_2(P) + \dots + C_k f_k(P)] dx dy &= \\ &= C_1 \int_S f_1(P) dx dy + C_2 \int_S f_2(P) dx dy + \dots \\ &\dots + C_k \int_S f_k(P) dx dy \end{aligned}$$

где C_i — константа.

*) Определение поверхностного интеграла по координатам и теорема существования сохраняются и для функции, допускающей на поверхности интегрирования конечное число точек конечного разрыва.

$$\text{II.} \quad \int \int_{S_1+S_2+\dots+S_k} f(P) dx dy = \int \int_{S_1} f(P) dx dy + \\ + \int \int_{S_2} f(P) dx dy + \dots + \int \int_{S_k} f(P) dx dy.$$

Кроме того, поверхностный интеграл по координатам обладает специфическим свойством, связанным с ориентацией поверхности интегрирования, а именно:

III. *Перемена ориентации поверхности интегрирования изменяет знак интеграла на обратный:*

$$\int \int_S f(P) dx dy = - \int \int_{-S} f(P) dx dy;$$

через S и $-S$ обозначена одна и та же поверхность, но при противоположных ориентациях.

Это свойство в свою очередь обуславливает следующее важное свойство поверхностного интеграла по координатам:

IV. *Если область, ограниченная замкнутой поверхностью S , разбита на k областей, ограниченных замкнутыми поверхностями S_1, S_2, \dots, S_k , ориентированных так же, как и данная поверхность S^*), то интеграл по координатам по всей поверхности S равен сумме интегралов по поверхностям S_1, S_2, \dots, S_k **):*

$$\int \int_S f(P) dx dy = \int \int_{S_1} f(P) dx dy + \int \int_{S_2} f(P) dx dy + \dots \\ \dots + \int \int_{S_k} f(P) dx dy.$$

*) Это значит, что поверхности S_i должны быть ориентированы или все положительно, если поверхность S ориентирована положительно, или все отрицательно, если поверхность S ориентирована отрицательно.

**) Для того чтобы подчеркнуть замкнутость поверхности интегрирования, к символу интеграла по такой поверхности иногда присоединяют кружок:

$$\oint_S f(P) dq, \quad \oint_S f(P) dx dy.$$

Доказательство, так же как и в случае криволинейного интеграла, непосредственно вытекает из аддитивности интеграла и его свойства изменять знак при перемене ориентации поверхности интегрирования. Действительно, каждая взятая вспомогательная поверхность проходится при интегрировании в конечном счете два раза, по разным своим сторонам, и в результате остаются только интегралы по частям поверхности S , в сумме дающие интеграл по всей этой поверхности.

Заметим, что к двойному интегралу по ориентированной области относится формула замены переменных, вполне аналогичная формуле (4.9) для обыкновенного интеграла, учитывающая ориентацию области интегрирования, а именно:

$$\int_D f(x, y) dx dy = \int_{\Delta} f_1(u, v) \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du dv, \quad (4.10)$$

где $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ — формулы, гомеоморфно отображающие ориентированную область Δ плоскости Ouv на данную ориентированную область D плоскости Oxy и $f_1(u, v) = f[\varphi(u, v), \psi(u, v)]$. Мы видим, что в формуле (4.10) в отличие от формулы (4.6₂) множителем в новом подынтегральном выражении вместо модуля якобиана отображающей системы (коэффициента искажения $k(u, v) = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|$) берется просто якобиан $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$. Докажем формулу (4.10).

Пусть в области Δ якобиан $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ не меняет знака, оставаясь положительным. Тогда «направления вращения» в обеих областях Δ и D будут одинаковыми (см. п° 22) и, значит, одной и той же будет и ориентация областей; в силу этого $dx dy$ и $du dv$ имеют один и тот же знак и доказываемая формула (4.10) просто совпадает с доказанной формулой (4.6₂). Если якобиан отрицателен в области Δ , то «направления вращения» в областях Δ и D и их ориентация противоположны; из этого следует, что $dx dy$ и $du dv$ имеют противоположные знаки, а это в соединении с отрицательным знаком якобиана снова приводит к формуле (4.10).

Условие гомеоморфизма отображения области Δ на область D нельзя отбросить по следующему соображению. При отсутствии гомеоморфизма область D может быть покрыта несколько раз — с одной и той же или различными, но, в отличие от линейного случая, некомпенсируемыми взаимно ориентациями, что, разумеется, может исказить значение данного интеграла по области D .

96. Способы вычисления. Пусть поверхность S задана параметрическими уравнениями:

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v),$$

где $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$, $\chi(u, v)$ — дифференцируемые функции переменных (параметров) u, v в ориентированной области Δ плоскости Ouv , соответствующей заданной ориентированной поверхности интегрирования S . В этом случае поверхностный интеграл по координатам может быть вычислен по формуле

$$\int_S f(x, y, z) dx dy = \int_{\Delta} \int f_1(u, v) \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du dv, \quad (*)$$

где $f_1(u, v) = f[\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)]$. Роль параметров u, v могут выполнять и переменные интегрирования x, y .

Формула (*), по существу, обобщает формулу (4.10), относящуюся к случаю, когда поверхностью S служит область D плоскости Oxy .

При необходимости поверхность S разбивается на части и значение всего интеграла находится как сумма интегралов, вычисляемых по формуле (*).

Таким образом, вычисление всякого поверхностного интеграла приводится к вычислению двойных интегралов.

Пример. Найдём интеграл

$$I = \int_S xyz dx dy,$$

взятый по внешней стороне части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, находящейся в первом и восьмом координатных углах: $x \geq 0, y \geq 0$.

Примем здесь в качестве параметров в уравнении сферы координаты x и y . Но тогда аппликату z нельзя выразить однозначной функцией от этих параметров для всей поверхности интегрирования S .

Разобьем ее на две части: S_2 , лежащую над плоскостью Oxy , и S_1 , лежащую под ней. Их уравнениями соответственно будут $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ и $z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Имеем:

$$I = \iint_S xyz \, dx \, dy = \iint_{S_2} xyz \, dx \, dy + \iint_{S_1} xyz \, dx \, dy,$$

и так как второй интеграл в правой части берется по нижней стороне S_1 части сферы, заключенной в восьмом координатном углу, то $dx \, dy < 0$, и мы получаем:

$$I = \iint_{S_2} xyz \, dx \, dy - \iint_{-S_1} xyz \, dx \, dy,$$

где $-S_1$ — верхняя сторона указанной части. Теперь в обоих интегралах $dx \, dy > 0$.

Преобразуя поверхностные интегралы в двойные, находим:

$$\begin{aligned} I &= \iint_D xy \sqrt{1 - x^2 - y^2} \, dx \, dy - \\ &- \iint_D xy (-\sqrt{1 - x^2 - y^2}) \, dx \, dy = 2 \iint_D xy \sqrt{1 - x^2 - y^2} \, dx \, dy \end{aligned}$$

где D — четверть круга $x^2 + y^2 \leq 1$, лежащая в первом координатном углу плоскости Oxy , являющаяся проекцией и S_1 и S_2 .

Двойной интеграл вычислим, заменяя декартовы координаты полярными:

$$\begin{aligned} I &= 2 \iint_D r^2 \sin \varphi \cos \varphi \sqrt{1 - r^2} \, r \, dr \, d\varphi = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\varphi \, d\varphi \int_0^1 r^3 \sqrt{1 - r^2} \, dr = 1 \cdot \frac{2}{15} = \frac{2}{15}. \end{aligned}$$

Поверхностный интеграл по координатам тесно связан с соответствующим интегралом по площади поверхности. Эти интегралы просто выражаются друг через друга.

Мы имеем (п° 94, стр. 258):

$$dx \, dy = dq \cos(n, z),$$

где dq — элемент (дифференциал) площади поверхности S в ее точке $P(x, y, z)$; $dx \, dy$ — проекция ориентированного элемента этой поверхности в точке P на плоскость Oxy ;

(n, z) — угол, образованный ориентированной нормалью к поверхности S в точке P с осью Oz .

Значит,

$$\int_S \int f(P) dx dy = \int_S \int f(P) \cos(n, z) dq,$$

$$\int_S \int f(P) dq = \int_S \int f(P) \frac{1}{\cos(n, z)} dx dy.$$

Аналогично связаны с интегралами по площади и интегралы по другим координатам.

Эти соотношения позволяют изучать интегралы одного типа посредством изучения интегралов другого типа, в частности интегралы по ориентированным поверхностям, через интегралы по площади.

Нет нужды специально останавливаться на том, что аналогично другим типам интегралов и здесь могут быть введены понятия несобственных поверхностных интегралов по координатам.

97. Дополнительные замечания. Подобно криволинейному интегралу поверхностный интеграл (по площади или по координатам) от функции $f(P)$, определенной (и непрерывной) в некоторой пространственной области, который берется по различным поверхностям, представляет собой пример *функционала* (от поверхности) в этой области. Изучение поведения поверхностного интеграла в зависимости от изменений поверхности интегрирования опирается на формулу Остроградского (см. ниже п° 104).

Поверхностные интегралы по координатам также чаще всего употребляются в виде составных интегралов, являющихся суммой интегралов, взятых по одной и той же поверхности, но по различным координатам. Так, интегралы

$$\int_S \int X dy dz, \quad \int_S \int Y dx dz, \quad \int_S \int Z dx dy,$$

где X, Y, Z — заданные функции точки $P(x, y, z)$ поверхности S , т. е., вообще говоря, $X = X(x, y, z)$, $Y = Y(x, y, z)$, $Z = Z(x, y, z)$, используются совместно, в виде суммы;

она и записывается с помощью одного (двойного) символа интеграла:

$$\int_S X dy dz + Y dx dz + Z dx dy.$$

Само собой очевидно, что изложенные выше свойства и особенности поверхностных интегралов по координатам относятся в равной степени и к составным поверхностным интегралам. Составные поверхностные интегралы, как и составные криволинейные интегралы, очень важны.

§ 6. ОСНОВНАЯ ФОРМУЛА ГРИНА И СЛЕДСТВИЯ ИЗ НЕЕ

Введение ориентации линий и поверхностей позволяет при помощи простых формул связать между собой интегралы, взятые по ориентированной поверхности (и, в частности, по плоской области) и по пространственной области, с интегралами, взятыми по границам этих областей интегрирования. Такие формулы служат для преобразования интегралов одного типа в интегралы другого типа.

98. Основная формула Грина. Начнем с простейшей формулы — так называемой основной формулы Грина*), в которой связаны двойной и криволинейный интегралы.

Теорема. Имеет место следующая формула:

$$\int_D \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dx dy = \int_l X dx + Y dy, \quad (4.11)$$

называемая основной формулой Грина. Здесь X , Y — функции точки $P(x, y)$ в плоской области D , непрерывные вместе со своими частными производными первого порядка, а линия l — граница области D . Ориентации области D и ее границы l согласованы между собой в смысле п° 94 (стр. 257), так что если в области D берется верхняя сторона, т. е. интегралом слева служит просто двойной интеграл, то интегрирование по линии l происходит в положительном направлении.

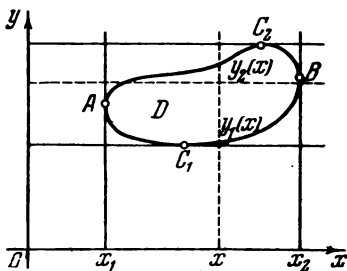
*) Д. Грин (1793—1841) — известный английский физик и математик.

Доказательство. Предположим сначала, что область D односвязная, ограниченная линией l , пересекающейся с координатными линиями не более чем в двух точках (черт. 31). Возьмем двойной интеграл:

$$I = \int_D \int \frac{\partial X}{\partial y} dx dy,$$

считая, что интегрирование по области D происходит по верхней стороне. Интегрируя по y , а затем по x , получим:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial X}{\partial y} dy,$$



Черт. 31.

где $y = y_1(x)$ — уравнение линии AC_1B , $y = y_2(x)$ — уравнение линии AC_2B , а $[x_1, x_2]$ — интервал оси Ox , в который ортогонально проектируется область D (и линия l). Выполнив внутреннее интегрирование, будем иметь:

$$\begin{aligned} I &= \int_{x_1}^{x_2} \{X[x, y_2(x)] - X[x, y_1(x)]\} dx = \\ &= \int_{x_1}^{x_2} X[x, y_2(x)] dx - \int_{x_1}^{x_2} X[x, y_1(x)] dx. \end{aligned}$$

Но правая часть является выражением для криволинейного интеграла по координате x от функции $X(x, y)$, взятого по контуру l в направлении AC_2BC_1A , т. е. в отрицательном направлении. Итак,

$$\int_D \int \frac{\partial X}{\partial y} dx dy = - \int_l X dx,$$

где контур l проходится в положительном направлении.

Подобным же образом убедимся в справедливости равенства

$$\int_D \int \frac{\partial Y}{\partial x} dx dy = \int_l Y dy.$$

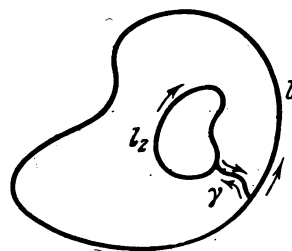
Вычитая из последнего равенства предыдущее, получим формулу Грина (4.11).

Мы не исключаем того, что линия l содержит отрезки прямых, параллельных осям координат; в доказательстве при этом ничего не изменится, ибо части криволинейных интегралов $\int_l X dx$, $\int_l Y dy$, относящиеся соответственно к от-

резкам прямых $x = \text{const}$, $y = \text{const}$, равны нулю, так как на них $dx = 0$ или $dy = 0$.

Теперь легко показать, что формула (4.11) справедлива для *любой* односвязной области D . В самом деле, если область D не удовлетворяет оговоренному вначале условию, а именно, что с координатными линиями ее граница пересекается не более чем в двух точках, то область D можно разбить на такие части, которые уже будут удовлетворять этому условию; тогда, сложив все равенства (4.11), относящиеся ко всем указанным частям, получим, в силу аддитивности двойного интеграла и специального свойства криволинейного интеграла (см. п° 91, III), равенство (4.11), относящееся ко всей заданной области D .

Наконец, допустим, что область D многосвязна. Формула Грина остается справедливой и при этом, но следует помнить, что криволинейный интеграл берется в положительном направлении по всему контуру, т. е. так, чтобы



Черт. 32.

область D оставалась слева, а для этого внешний контур обходится в направлении против движения часовой стрелки, а внутренние контуры — по направлению этого движения. Возьмем, например, случай двусвязной области (черт. 32). Соединим внешний контур l_1 с внутренним контуром l_2 линейным «разрезом» γ (это значит, что линию γ мы исключаем из

области D , присоединяем ее к границе области). Мы получаем односвязную область D' , ограниченную контуром $l' = l_1 + l_2 + \gamma$. Так как для нее формула (4.11) доказана, то можно написать:

$$\iint_{D'} \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dx dy = \int_{l'} X dx + Y dy.$$

Ввиду того, что при интегрировании разрез γ проходится дважды в противоположных направлениях и исключение этого разреза из области D не оказывает влияния на значение двойного интеграла, то

$$\int_D \int \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dx dy = \int_l X dx + Y dy,$$

причем под l понимается весь контур, ограничивающий область D (на черт. 32: $l = l_1 + l_2$).

Итак, формула Грина полностью доказана. Ясно, что она верна и для сходящихся несобственных интегралов.

Если положить $X = -y$, $Y = x$, то из формулы Грина

$$2 \int_D \int dx dy = \int_l -y dx + x dy,$$

откуда находим выражение для площади плоской области через криволинейный интеграл по границе области:

$$\text{пл. } D = \frac{1}{2} \int_l -y dx + x dy.$$

Придадим формуле Грина другой вид, в некоторых отношениях более удобный, чем вид формулы (4.11). Заменяя в этой формуле X на $-Y$ и Y на X , получим:

$$\int_D \int \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) dx dy = \int_l -Y dx + X dy. \quad (4.12)$$

Так как $dx = \cos(s, x) ds = \cos(n, y) ds$, а $dy = \cos(s, y) ds = -\cos(n, x) ds$ (см. п° 92), то

$$\int_D \int \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) dx dy = - \int_l [Y \cos(n, y) + X \cos(n, x)] ds,$$

где (n, x) , (n, y) — углы, которые образует с осями Ox и Oy нормаль к контуру l , направленная внутрь контура. Меняя направление нормали, мы и придем к другому вполне «симметричному» виду формулы Грина, который мы и хотели получить:

$$\int_D \int \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) dx dy = \int_l [X \cos(n, x) + Y \cos(n, y)] ds. \quad (4.13)$$

Следует помнить, что в обеих частях равенства интегралы берутся по мере; нормаль берется внешняя. Формула Грина в виде (4.13) непосредственно переносится для пространства (см. формулу (4.23)).

99. Независимость интеграла от контура интегрирования. Рассмотрим криволинейный интеграл

$$I(l) = \int_l X dx + Y dy, \quad (4.14)$$

взятый по какой-нибудь линии l , принадлежащей некоторой односвязной области D и соединяющей данные точки $P_0(x_0, y_0)$ и $P(x, y)$ этой области. Как уже было отмечено, интеграл $I(l)$ является, вообще говоря, *функционалом* от линии l , т. е. его значение зависит от всего контура интегрирования l . Представляет значительный интерес вопрос о том, при каких условиях, относящихся к функциям X и Y , интеграл $I(l)$ не зависит от всего контура интегрирования l , а зависит только от его граничных точек P_0 и P или только от конечной точки P , если начальная точка P_0 фиксирована. Другими словами, это вопрос о том, при каких условиях интеграл I есть *не функционал* $I(l)$, а *функция* $I(P)$ точки $P(x, y)$, т. е. *функция двух независимых переменных* x и y . Из дальнейшего будет ясно большое значение этого вопроса в теоретическом отношении, а сейчас лишь укажем на простом примере его значение в прикладном отношении.

Если X и Y служат проекциями некоторой силы на оси Ox и Oy , то интеграл $I(l)$ выражает, как известно, работу, произведенную при перемещении из точки P_0 в точку P по пути l . Следовательно, независимость интеграла от контура интегрирования означает, что работа будет одна и та же, по какому бы пути ни происходило перемещение под действием силы из точки P_0 в точку P , а это, конечно, дает важную характеристику рассматриваемой силы.

Заметим, что *утверждение о независимости интеграла (4.14) от пути интегрирования в области D равносильно утверждению о равенстве нулю этого интеграла по любому замкнутому пути в области D .*

В самом деле, пусть известно, что интеграл I не зависит от контура интегрирования; покажем, что он равен нулю

по любому замкнутому контуру. Возьмем какой-нибудь замкнутый контур l (черт. 33) и отметим на нем две точки: P_0 и P . Так как, по условию, интеграл по линии P_0MP равен интегралу по линии P_0NP :

$$I_{P_0MP} = I_{P_0NP}, \quad \text{т. е.} \quad I_{P_0MP} - I_{P_0NP} = 0,$$

то

$$I_{P_0MP} + I_{PNP_0} = 0$$

и, значит,

$$I_{P_0MPNP_0} = 0.$$

Обратно, пусть известно, что интеграл I обращается в нуль по всякому замкнутому контуру; покажем, что он не зависит от контура интегрирования. Возьмем какие-нибудь два контура P_0MP и P_0NP (черт. 33), соединяющих две заданные точки P_0 и P . Так как, по условию, интеграл по замкнутой линии P_0MPNP_0 равен нулю:

$$I_{P_0MPNP_0} = 0,$$

т. е.

$$I_{P_0MP} + I_{PNP_0} = 0,$$

то

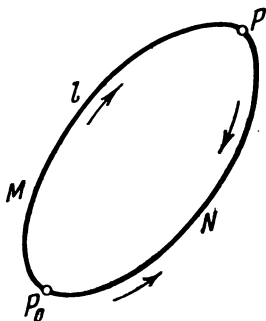
$$I_{P_0MP} = -I_{PNP_0} = I_{P_0NP},$$

ч. т. д.

Поставленный выше вопрос решается следующей основной теоремой.

Теорема. Для независимости криволинейного интеграла (4.14) от контура интегрирования, принадлежащего односвязной области D , или, что все равно, для равенства его нулю по любому замкнутому контуру интегрирования, принадлежащему односвязной области D , необходимо и достаточно, чтобы функции $X(x, y)$ и $Y(x, y)$, имеющие непрерывные частные производные первого порядка, тождественно удовлетворяли в области D соотношению

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}. \quad (4.15)$$



Черт. 33.

Доказательство. Возьмем в области D какую-нибудь замкнутую линию l_1 . В силу условий теоремы справедлива основная формула Грина (4.11):

$$\int_{l_1} X dx + Y dy = \int_{D_1} \int \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dx dy,$$

где D_1 — область, ограниченная контуром l_1 . Отсюда сразу видна достаточность условия (4.15): раз оно имеет место, то двойной интеграл справа, а значит и криволинейный интеграл слева, равен нулю.

Необходимость условия (4.15) доказывается рассуждением «от противного». Пусть интеграл (4.14) по любому замкнутому пути в области D равен нулю, а условие (4.15) не выполняется в некоторой точке P области D , т. е.

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) \Big|_P = \mu \neq 0.$$

Допустим, например, что $\mu > 0$. Благодаря непрерывности частных производных, а стало быть и выражения $\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}$, можно указать такую область D_1 — окрестность точки P , что в этой окрестности

$$\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \geq \mu - \epsilon > 0,$$

где ϵ — заранее данное положительное число. По формуле Грина, используя свойство ограниченности двойного интеграла (п° 81, III), находим:

$$\begin{aligned} \int_{l_1} X dx + Y dy &= \int_{D_1} \int \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dx dy \geq \\ &\geq (\mu - \epsilon) \cdot \text{пл } D_1 > 0, \end{aligned}$$

где l_1 — граница области D_1 . Но это противоречит предположению, что рассматриваемый интеграл равен нулю для всякого замкнутого контура, и значит, выражение $\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}$ должно в области D тождественно обращаться в нуль.

Если интеграл (4.14) не зависит от контура интегрирования, то в его обозначении можно оставить лишь указания начальной и конечной точек.

100. Условие полного дифференциала. Формула Ньютона—Лейбница. Оказывается, что условие (4.15) вполне характеризует дифференциальное выражение

$$X(x, y)dx + Y(x, y)dy \quad (*)$$

как полный дифференциал некоторой функции $I(x, y)$ двух независимых переменных x и y . Именно, справедлива такая теорема.

Теорема. Для того чтобы дифференциальное выражение $(*)$ было полным дифференциалом функции $I(x, y)$ двух независимых переменных x и y в некоторой области D , необходимо и достаточно тождественное выполнение условия (4.15) в области D . При этом предполагается, что функции X и Y в этой области непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка.

Доказательство. Необходимость вытекает сразу из того, что если имеет место равенство

$$Xdx + Ydy = dI,$$

равносильное равенствам:

$$X = \frac{\partial I}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial I}{\partial y},$$

то, согласно теореме о совпадении вторых смешанных производных (II, 153), будем иметь:

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial^2 I}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 I}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Y}{\partial x}.$$

Достаточность может быть доказана так. Раз имеется условие (4.15), то интеграл (4.14) представляет собой при фиксированной начальной точке P_0 контура интегрирования функцию $I(P)$ конечной точки P этого контура. Убедимся в том, что функция

$$I(P) = \int_{(P_0)}^{(P)} Xdx + Ydy$$

как раз и есть та функция, полный дифференциал которой равен подынтегральному выражению или, что все равно, частные производные которой по x и по y равны соответственно X и Y . Для этого передвинем конечную точку P

контура интегрирования в новое положение P_1 по направлению оси Ox на такой малый отрезок h , чтобы прямолинейный отрезок PP_1 целиком принадлежал области D . При этом

$$I(P_1) - I(P) = \int_{(P)}^{(P_1)} X dx + Y dy;$$

так как интеграл в правой части имеет одно и то же значение на любой линии, лежащей в области D и соединяющей точки P и P_1 , то возьмем его по прямолинейному отрезку PP_1 . Вдоль этого отрезка $y = \text{const}$ и $dy = 0$. Следовательно,

$$\begin{aligned} I(P_1) - I(P) &= I(x+h, y) - I(x, y) = \int_x^{x+h} X(x, y) dx = \\ &= X(x + \theta h, y) h, \end{aligned}$$

$0 < \theta < 1$ (теорема о среднем, I, 91); отсюда

$$\frac{\Delta_x I}{h} = X(x + \theta h, y)$$

и в пределе, при $h \rightarrow 0$, находим:

$$\frac{\partial I}{\partial x} = X(x, y).$$

Аналогично убеждаемся в том, что

$$\frac{\partial I}{\partial y} = Y(x, y).$$

Сопоставляя доказанную теорему о полном дифференциале с основной теоремой о независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования, дадим иную, во многих отношениях удобную формулировку этой основной теоремы.

Теорема. Для независимости криволинейного интеграла (4.14) от контура интегрирования, принадлежащего односвязной области D , или, что все равно, для равенства его нулю по любому замкнутому контуру интегрирования, принадлежащему односвязной области D , необходимо и достаточно, чтобы подынтегральное выражение $Xdx + Ydy$ было в области D полным дифференциалом некоторой функции $I(x, y)$:

$$Xdx + Ydy = dI.$$

При этом предполагается, что функции X , Y в области D непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка.

Если все условия теоремы выполняются, но не во всей заданной односвязной области, а исключая какие-нибудь ее точки («дыры»), то теорема может оказаться неверной: интеграл по замкнутым путям, окружающим «дыры», может и не обращаться в нуль. Объясняется это тем, что функция

$$I(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} X dx + Y dy$$

может оказаться многозначной в многосвязной области и, значит, ее значение может определяться не только конечной точкой $P(x, y)$, но и тем путем, по которому приходят в эту точку из начальной точки $P_0(x_0, y_0)$. В односвязной же области функция $I(x, y)$ всегда однозначна и ее значение определяется только конечной точкой $P(x, y)$.

Например, выражение

$$-\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$$

в каждой точке двусвязной области $0 < x^2 + y^2 \leq 1$ (единичный круг без центра) является, как легко проверить, полным дифференциалом функции $I = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, какую бы однозначную ветвь от $\operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ мы ни понимали под этой функцией. Вместе с тем, полагая $x = \cos \varphi$, $y = \sin \varphi$, находим, что

$$\int_{x^2+y^2=1} -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy = \int_0^{2\pi} (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) d\varphi = 2\pi,$$

т. е. что интеграл по замкнутому пути равен не нулю, а 2π . Этот результат делается сразу понятным, если заметить, что $\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \varphi$, $x \neq 0$, где φ — полярный угол точки (x, y) ; при каждом полном обходе вокруг начала координат (полюса) этот угол приобретает слагаемое 2π .

Если в области D

$$dI = X dx + Y dy,$$

то функция $I(x, y)$ называется *первообразной* для выражения $X dx + Y dy$ и она может быть найдена с точностью до постоянного слагаемого по формуле

$$I(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} X dx + Y dy,$$

где интеграл берется по любому пути, принадлежащему области D и соединяющему точки $P_0(x_0, y_0)$ и $P(x, y)$.

Обозначим через $F(x, y)$ какую-нибудь первообразную для выражения $X dx + Y dy$. Легко показать (см. I, 93), что $I(x, y) = F(x, y) - F(x_0, y_0)$ и, значит,

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} dF = F(x, y) - F(x_0, y_0). \quad (4.16)$$

Это есть *аналог формулы Ньютона — Лейбница* (см. I, 93) для *криволинейных интегралов* (4.14), если dF — *полный дифференциал*.

Обычно для вычисления интеграла (4.14) при выполнении условия (4.15) принимается в качестве пути интегрирования ломаная со звеньями, параллельными осям Ox и Oy . При двух звеньях имеем:

$$I(x, y) = \int_{x_0}^x X(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y Y(x, y) dy$$

или

$$I(x, y) = \int_{x_0}^x X(x, y) dx + \int_{y_0}^y Y(x_0, y) dy.$$

Как видно, такой выбор пути интегрирования наиболее просто приводит интеграл (4.14) к обыкновенным интегралам.

Если выражение

$$X dx + Y dy$$

не является полным дифференциалом (условие (4.15) не выполняется), то

$$I = \int_l Xdx + Ydy$$

есть уже не функция конечных точек линии l , а функционал линии l , по которой берется интеграл. Выражение $Xdx + Ydy$ по-прежнему есть *дифференциал* величины I , однако лишь в том смысле, что при перемещении точки P вдоль *данной* линии l оно служит главной частью приращения ΔI , линейной относительно dx и dy . При этом dx и dy — не произвольные бесконечно малые приращения переменных x и y , а такие, которые удерживают точку $P(x, y)$ на линии l . Тогда величина I есть фактически функция одной независимой переменной. (Иногда встречается символ dI для обозначения выражения $Xdx + Ydy$, не являющегося полным дифференциалом, а соответствующего только некоторой линии *).)

101. Применения. Задача термодинамики. Допустим, что некоторая величина U может рассматриваться как функция дуги l данной плоской линии $U = U(l)$, обладающая свойством аддитивности, т. е.

$$U(l) = U(l_1) + U(l_2) + \dots + U(l_k),$$

если $l = l_1 + l_2 + \dots + l_k$. Возьмем в произвольной точке $P(x, y)$ линии l как угодно малый ее участок, характери-

*) Дифференциальное выражение от одной независимой переменной, т. е. выражение вида $X(x)dx$, в отличие от случая двух (и трех) независимых переменных всегда служит дифференциалом некоторой функции $I(x)$. Эта функция может быть названа первообразной для выражения $X(x)dx$ и найдена с точностью до постоянного слагаемого из равенства

$$I(x) = \int_{x_0}^x X(x)dx.$$

Справедливо предложение (II, 195), согласно которому всегда существует такая функция $M(x, y)$ двух независимых переменных x и y , после умножения на которую данное выражение $Xdx + Ydy$ становится полным дифференциалом. (В теории дифференциальных уравнений такая функция называется *интегрирующим множителем*.)

зуемый приращениями dx и dy , и найдем элемент (дифференциал) dU величины U , соответствующий этому участку. Имеем:

$$dU = Xdx + Ydy, \quad (*)$$

где X и Y — известные функции точки P . Если эти функции определены в какой-нибудь области D , содержащей линию l , и удовлетворяют условию (4.15), то выражение $(*)$ для dU является полным дифференциалом; применяя формулу Ньютона — Лейбница (4.16), получим:

$$U = \int_l Xdx + Ydy, \quad (**)$$

причем интеграл можно брать по любой линии, и U будет просто *функцией точки*. Если же выражение $(*)$ не является полным дифференциалом, то, тем не менее, формула $(**)$ для U остается справедливой (это следует из формулы Ньютона — Лейбница для обыкновенного интеграла), но интегрирование должно производиться обязательно по линии l . (При условии, что функции X и Y определены в области D , можно сказать, что U есть функционал l .)

В качестве примера использования изложенной только что схемы рассмотрим одну из основных задач термодинамики.

Под состоянием тела понимаем совокупность величин, характеризующих его физические признаки. В термодинамике обычно этими величинами служат: *давление p , объем v и абсолютная температура T* . Следовательно, состояние тела задано, как только указаны три величины: p , v , T . Так как эти величины связаны между собой одним уравнением — так называемым *уравнением состояния*, то состояние тела фактически определяется двумя величинами, например p и v (третья, T , есть функция p и v).

Геометрически каждому состоянию соответствует точка $P(p, v)$ в плоскости Opv и, значит, каждому процессу (состоящему в последовательном изменении состояния тела) соответствует некоторая *линия l* . Она называется *диаграммой процесса*. В том случае, когда тело возвращается к исходному состоянию, процесс называют *круговым* или *циклом*; его диаграммой будет замкнутая линия.

Пусть тело есть идеальный газ, т. е. газ, который мы считаем подчиняющимся уравнению состояния Клапейрона:

$$pv = RT' \quad (R = \text{const}).$$

Поставим перед собой задачу найти количество тепла Q , поглощенного или выделенного газом при процессе, изображенном данной диаграммой l .

На линии l выделим произвольный ее участок от точки $P(p, v)$ до точки $P(p + dp, v + dv)$, представляющий «бесконечно малый процесс»; соответствующее ему количество тепла обозначим через ΔQ . Это тепло идет на приращение механической энергии частиц газа, т. е. в конечном счете на приращение dT температуры и на работу, производимую при изменении объема dv . Мы найдем элемент dQ (главную часть ΔQ , линейную относительно dT и dv), если, опираясь на «принцип сложения малых действий» (II, 145), допустим, что поглощаемое тепло есть сумма двух количеств тепла: 1) затрачиваемого на приращение температуры dT при постоянном объеме v ; 2) затрачиваемого на работу расширения dv при постоянной температуре T . Первое равно $c_v dT$, где c_v — теплоемкость газа при постоянном объеме, второе равно $ap dv$, где $a = \frac{1}{427}$ кал/кгм есть термический эквивалент работы (умножением на a мера механической работы $p dv$ переводится на термические единицы работы).

Следовательно,

$$dQ = c_v dT + ap dv.$$

Согласно уравнению Клапейрона

$$dT = \frac{v}{R} dp + \frac{p}{R} dv;$$

внося это в выражение для dQ , получим:

$$dQ = \frac{c_v}{R} v dp + \frac{c_v + aR}{R} p dv.$$

Вясним смысл выражения $c_v + aR$. Из двух последних формул при постоянном давлении ($p = \text{const}$, $dp = 0$) находим:

$$dT = \frac{p}{R} dv, \quad dQ = (c_v + aR) \frac{p}{R} dv,$$

т. е.

$$dQ = (c_v + aR) dT,$$

откуда видно, что коэффициент при dT есть просто теплоемкость c_p при постоянном давлении:

$$c_v + aR = c_p \quad (* * *)$$

(c_p и c_v считаем постоянными).

Итак,

$$dQ = \frac{c_v}{R} v dp + \frac{c_p}{R} p dv.$$

Для того чтобы найти искомое количество тепла Q , остается проинтегрировать выражение для dQ по диаграмме процесса l :

$$Q = \int_l \frac{c_v}{R} v dp + \frac{c_p}{R} p dv.$$

Здесь условия независимости интеграла от пути интегрирования не выполняются. Действительно:

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{c_v}{R} v \right) = \frac{c_v}{R}, \quad \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{c_p}{R} p \right) = \frac{c_p}{R},$$

но $c_p \neq c_v$, как это следует из соотношения (* * *). Таким образом, величина Q существенно зависит от контура l , т. е. Q не является функцией точки $P(p, v)$. Наше рассуждение показывает, что количество поглощаемого или выделяемого тепла не есть функция состояния газа; оно зависит не только от конечного состояния, но и от того, каким способом газ пришел к этому состоянию, другими словами, от совокупности всех промежуточных состояний. В частности, круговой процесс (цикл), вообще говоря, влечет поглощение (или выделение) тепла.

В термодинамике вводится имеющая большое значение величина S , характеризующая процесс, — так называемая *энтропия*. Определяется энтропия как аддитивная функция, причем так, что ее элемент dS , соответствующий участку диаграммы процесса от точки $P(p, v)$ до точки $P(p + dp, v + dv)$, полагается равным частному от деления элемента тепла dQ на значение температуры T :

$$dS = \frac{dQ}{T};$$

отсюда

$$S = \int_l \frac{dQ}{T},$$

где l — диаграмма процесса.

Для идеального газа находим:

$$S = \int_l \frac{dQ}{T} = \int_l \frac{c_v}{RT} v dp + \frac{c_p}{RT} p dv,$$

и так как $RT = pv$, то

$$S = \int_l \frac{c_v}{p} dp + \frac{c_p}{v} dv.$$

Подынтегральное выражение теперь есть полный дифференциал, ибо

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{c_v}{p} \right) = \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{c_p}{v} \right) = 0,$$

и, стало быть, энтропия является функцией состояния газа; ее величина не зависит от того, как газ изменяется от начального состояния к конечному, и, в частности, она равна нулю для всякого цикла.

Интегрируя, получаем:

$$S = \ln (C_p^{c_p} v^{c_p}).$$

Рассмотрим два частных случая:

1) При изотермическом процессе ($T = \text{const}$, $dT = 0$) $dQ = ap dv$ и

$$Q = a \int_l p dv.$$

Отсюда следует, что когда l — замкнутая линия, то количество поглощенного тепла Q пропорционально площади, ограниченной диаграммой. (Диаграмма изотермического процесса называется изотермой.)

2) Если процесс — адиабатический ($Q = \text{const}$, $dQ = 0$, значит, и $dS = 0$, т. е. $S = \text{const}$), имеем из выражения для S :

$$p^{c_v} v^{c_p} = \text{const},$$

откуда

$$pv^k = \text{const},$$

где $k = \frac{c_p}{c_v} > 1$. Это — уравнение диаграммы адиабатического процесса (так называемой адиабаты) в идеальном газе. Адиабатой служит политропная кривая.

§ 7. ФОРМУЛЫ СТОКСА И ОСТРОГРАДСКОГО И СЛЕДСТВИЯ ИЗ НИХ

102. Формула Стокса. Обратимся к формуле Стокса *), обобщающей основную формулу Грина.

Теорема. Имеет место следующая формула:

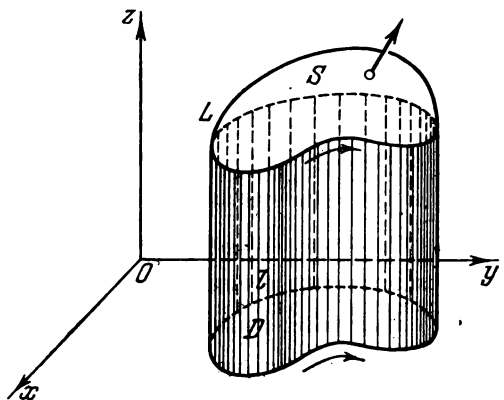
$$\int_S \int \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) dx dz + \\ + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dx dy = \int_L X dx + Y dy + Z dz. \quad (4.17)$$

называемая формулой Стокса. Здесь X, Y, Z — функции точки $P(x, y, z)$ в пространственной области \mathcal{B} , содержащей данную поверхность S , непрерывные вместе со своими частными производными первого порядка, а линия L — граница поверхности S . Ориентации поверхности S и линии L согласованы между собой в смысле п° 94

*) Д. Стокс (1879—1903) — известный английский механик и математик.

(стр. 257), так что человек, находящийся на той стороне поверхности S , по которой производится поверхностное интегрирование, перемещаясь по линии L в направлении криволинейного интегрирования, должен оставлять поверхность S слева.

Доказательство. Предположим сначала, что поверхность S (черт. 34) односвязна и пересекается с любой



Черт. 34.

прямой, параллельной оси Oz , не более чем в одной точке. Пусть тогда $z = z(x, y)$ — уравнение поверхности S .

Возьмем составной поверхностный интеграл

$$I = \int_S \int \frac{\partial X}{\partial y} dx dy - \frac{\partial X}{\partial z} dx dz$$

и преобразуем его, допуская на время, что берется верхняя сторона поверхности S . Выразим элемент $dx dz$ через элемент $dx dy$; имеем (п° 94, стр. 258—259):

$$dx dy = \cos(n, z) dq, \quad dx dz = \cos(n, y) dq,$$

где $\cos(n, z)$ и $\cos(n, y)$ — направляющие косинусы ориентированной нормали к поверхности S относительно осей Oz и Oy , а dq — элемент площади поверхности S . Значит,

$$dx dz = \frac{\cos(n, y)}{\cos(n, z)} dx dy,$$

а так как $\frac{\cos(n, y)}{\cos(n, z)} = -z'_y$ (п° 51, стр. 128), то

$$dx dz = -z'_y dx dy$$

и, следовательно,

$$I = \int_S \int \left(\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial X}{\partial z} z'_y \right) dx dy.$$

Приведем этот поверхностный интеграл к двойному. Для этого в подынтегральной функции заменим переменную z ее выражением через x и y согласно уравнению $z = z(x, y)$ поверхности интегрирования S . Но при этом подынтегральная функция окажется равной частной производной по y от сложной функции, получающейся из $X(x, y, z)$ после подстановки $z(x, y)$ вместо z . Действительно,

$$\frac{\partial}{\partial y} X[x, y, z(x, y)] = \frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial X}{\partial z} z'_y.$$

Таким образом, полагая $X[x, y, z(x, y)] = X_1(x, y)$, имеем:

$$I = \int_D \int \frac{\partial X_1}{\partial y} dx dy,$$

где D — проекция поверхности S на плоскость Oxy (см. черт. 34), а интегрирование в согласии со сделанным допущением производится по верхней стороне плоскости Oxy ($dx dy > 0$), т. е. последний интеграл есть просто двойной интеграл (по «площади» области D). Применяя формулу Грина (п° 98, стр. 267), получим:

$$I = \int_D \int \frac{\partial X_1}{\partial y} dx dy = - \int_l X_1 dx,$$

где l — граница области D , которой, очевидно, служит проекция пространственной линии L на плоскость Oxy , и интегрирование производится в положительном направлении линии l .

Криволинейный интеграл в правой части последней формулы равен, как легко заметить, интегралу от функции $X(x, y, z)$, взятому по линии L в направлении, соответствующем положительному направлению на линии l (см.

черт. 34), — оно как раз и соответствует верхней стороне поверхности S .

Итак,

$$I = \int_S \int \frac{\partial X}{\partial y} dx dy - \frac{\partial X}{\partial z} dx dz = - \int_L X dx. \quad (*)$$

Перемена стороны поверхности S (верхней на нижнюю) повлечет за собой для сохранения этой формулы перемену направления на линии L . В этом и сказывается согласованность направлений интегрирований по приведенному выше правилу.

Заметим далее, что формула $(*)$ верна для любой (рассматриваемой нами) поверхности S , а не только такой, которая встречает всякую прямую, параллельную оси Oz , не более чем в одной точке. Доказать это можно совершенно так же, как и в случае формулы Грина (п° 98).

Справедливы, разумеется, еще две формулы:

$$\int_S \int \frac{\partial Y}{\partial z} dy dz - \frac{\partial Y}{\partial x} dx dy = - \int_L Y dy, \quad (**)$$

$$\int_S \int \frac{\partial Z}{\partial x} dx dz - \frac{\partial Z}{\partial y} dy dz = - \int_L Z dz. \quad (***)$$

Сложив почленно формулы $(*)$, $(**)$, $(***)$, мы и придем к формуле Стокса.

Она имеет место и для неодносвязных поверхностей и для сходящихся несобственных интегралов.

Для запоминания формулы Стокса обратим внимание на то, что третий член $\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) dx dy$ за символом поверхностного интеграла в формуле Стокса таков же, как и в формуле Грина, а два других получаются из него круговой перестановкой букв x, y, z и X, Y, Z ; кроме того, можно заметить, что за символом поверхностного интеграла заглавные буквы X, Y, Z (в числителях) расположены в последовательности $ZYXZYX$, а строчные буквы x, y, z (в знаменателях) в каждой скобке повторяют заглавные буквы, но в обратном порядке.

Очевидно, формула Стокса обращается в формулу Грина при $z = \text{const}$.

Из формулы Стокса сразу следует, что поверхностный интеграл в левой части (4.17) для всякой замкнутой поверхности S равен нулю.

Запишем формулу Стокса с помощью интегралов по мере. Так как (п° 94, стр. 258—259)

$$dy dz = dq \cos(n, x); dx dz = dq \cos(n, y); dx dy = dq \cos(n, z)$$

и

$$dx = \cos(s, x) ds, dy = \cos(s, y) ds, dz = \cos(s, z) ds,$$

то

$$\begin{aligned} & \int_S \left[\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) \cos(n, x) + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \cos(n, y) + \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) \cos(n, z) \right] dq = \\ & = \int_L [X \cos(s, x) + Y \cos(s, y) + Z \cos(s, z)] ds, \quad (4.18) \end{aligned}$$

где, как и раньше, (n, x) , (n, y) , (n, z) — углы, образованные ориентированной нормалью к поверхности S с осями Ox , Oy , Oz , а (s, x) , (s, y) , (s, z) — углы, образованные с этими осями ориентированной касательной к линии L .

103. Независимость интеграла от контура интегрирования. Условие полного дифференциала. Формула Ньютона — Лейбница. Относительно криволинейного интеграла по пространственной линии L :

$$I(L) = \int_L X dx + Y dy + Z dz \quad (4.19)$$

может быть также поставлен важный вопрос о независимости его от контура интегрирования. Этот вопрос решается следующей основной теоремой.

Теорема. Для независимости криволинейного интеграла (4.19) от контура интегрирования, принадлежащего

односвязной*) области δ , или, что все равно, для равенства его нулю по любому замкнутому контуру интегрирования, принадлежащему односвязной области δ , необходимо и достаточно, чтобы функции $X(x, y, z)$, $Y(x, y, z)$ и $Z(x, y, z)$, имеющие непрерывные частные производные первого порядка, тождественно удовлетворяли в области δ соотношениям:

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}, \quad \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x}, \quad \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}. \quad (4.20)$$

Доказательство проводится без затруднений на основании формулы Стокса так же, как аналогичная теорема в плоском случае проводится на основании формулы Грина.

Оказывается, что условие (4.20) вполне характеризует дифференциальное выражение

$$X(x, y, z) dx + Y(x, y, z) dy + Z(x, y, z) dz \quad (*)$$

как полный дифференциал некоторой функции $I(x, y, z)$ трех независимых переменных x , y и z . Именно, справедлива такая

теорема. Для того чтобы дифференциальное выражение $(*)$ было полным дифференциалом функции $I(x, y, z)$ трех независимых переменных x , y и z в некоторой области δ , необходимо и достаточно тождественное выполнение условия (4.20) в области δ . При этом предполагается, что функции X , Y и Z в этой области непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка.

Доказательство также не отличается от доказательства аналогичной теоремы в плоском случае. Из этой и предыдущей теорем вытекает другая формулировка

*) Под «односвязной» областью в пространстве мы понимаем здесь просто связную часть пространства, ограниченную одной замкнутой поверхностью, причем такую, что любая замкнутая линия в области может быть непрерывно стянута в точку. Вследствие последнего условия область, ограниченная тором (см. I, 119), не рассматривается как односвязная, ибо, например, окружность, описанная любой точкой круга, вращением которого был образован тор, не может быть непрерывным изменением стянута в точку. На всякую замкнутую линию, проведенную в односвязной области в пространстве, можно «натянуть» поверхность, целиком принадлежащую области.

основной теоремы о независимости интеграла (4.19) от пути интегрирования.

Теорема. Для независимости криволинейного интеграла (4.19) от контура интегрирования, принадлежащего односвязной области δ , или, что все равно, для равенства его нулю по любому замкнутому контуру интегрирования, принадлежащему односвязной области δ , необходимо и достаточно, чтобы подынтегральное выражение $Xdx + Ydy + Zdz$ было в области δ полным дифференциалом некоторой функции $I(x, y, z)$:

$$Xdx + Ydy + Zdz = dI.$$

Если в области δ имеет место такое равенство, то функция $I(x, y, z)$ называется *первообразной* для выражения $Xdx + Ydy + Zdz$, и она может быть найдена с точностью до постоянного слагаемого по формуле

$$I(x, y, z) = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} Xdx + Ydy + Zdz,$$

где интеграл берется по любому пути, принадлежащему области δ и соединяющему точки $P_0(x_0, y_0, z_0)$ и $P(x, y, z)$.

Обозначим через $F(x, y, z)$ какую-нибудь первообразную для выражения $Xdx + Ydy + Zdz$. Легко показать (см. I, 93), что $I(x, y, z) = F(x, y, z) - F(x_0, y_0, z_0)$ и, значит,

$$\int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} dF = F(x, y, z) - F(x_0, y_0, z_0). \quad (4.21)$$

Это есть *формула Ньютона — Лейбница* (см. I, 93) для криволинейных интегралов (4.19), если dF — полный дифференциал.

Обычно для вычисления интеграла (4.19) при выполнении условий (4.20) принимается в качестве пути интегрирования ломаная со звеньями, параллельными осям Ox , Oy и Oz . При трех звеньях имеем формулу

$$I(x, y, z) = \\ = \int_{x_0}^x X(x, y_0, z_0) dx + \int_{y_0}^y Y(x, y, z_0) dy + \int_{z_0}^z Z(x, y, z) dz$$

или аналогичные формулы при интегрировании по другим ребрам параллелепипеда P_0P , ведущим из точки P_0 к точке P .

Как видно, такой выбор пути интегрирования наиболее просто приводит интеграл (4.19) к обыкновенным интегралам.

Если выражение

$$Xdx + Ydy + Zdz$$

не является полным дифференциалом (условия (4.20) не выполняются), то

$$I = \int_L Xdx + Ydy + Zdz$$

есть уже не функция конечных точек линии L , а функционал линии L , по которой берется интеграл. Выражение $Xdx + Ydy + Zdz$ по-прежнему есть дифференциал величины I , однако лишь в том смысле, что при перемещении точки P вдоль данной линии L оно служит главной частью приращения ΔI , линейной относительно dx , dy и dz . При этом dx , dy и dz — произвольные бесконечно малые приращения переменных x , y и z , а такие, которые удерживают точку $P(x, y, z)$ на линии L . Тогда величина I есть фактически функция одной независимой переменной (в этом случае выражение $Xdx + Ydy + Zdz$ иногда обозначают через dI для отличия от случая полного дифференциала *).

Схема применения криволинейного интеграла $\int_L Xdx + Ydy + Zdz$ буквально повторяет схему применения интеграла $\int_i Xdx + Ydy$ (см. стр. 277—278) и поэтому не нуждается в специальном описании.

104. Формула Остроградского. Формула Остроградского **) представляет собой как бы распространение формулы Грина (4.11) на пространство.

*) Для трех независимых переменных уже несправедливо предложение о существовании множителя — функции независимых переменных, после умножения на который всякое данное дифференциальное выражение $Xdx + Ydy + Zdz$ становится полным дифференциалом (см. подстрочное примечание на стр. 277).

**) М. В. Остроградский (1801—1861) — выдающийся русский математик и механик.

Теорема. *Имеет место следующая формула:*

$$\begin{aligned} \int \int \int_{\Omega} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) dx dy dz = \\ = \int \int_S X dy dz + Y dx dz + Z dx dy, \quad (4.22) \end{aligned}$$

называемая формулой Остроградского. Здесь X , Y , Z — функции точки $P(x, y, z)$ в пространственной области Ω , непрерывные вместе со своими частными производными первого порядка, а поверхность S — граница области Ω , причем интегрирование по поверхности S происходит в положительном направлении (т. е. по ее внешней стороне *).

Доказательство. Предположим сначала, что область Ω — односвязная, ограниченная замкнутой поверхностью S , пересекающейся с координатными линиями не более чем в двух точках. Возьмем тройной интеграл

$$I = \int \int \int_{\Omega} \frac{\partial Z}{\partial z} dx dy dz$$

и выразим его через двойные интегралы. Для этого проведем цилиндрическую поверхность, ортогональную к плоскости Oxy и касающуюся данной замкнутой поверхности S по некоторой линии, разбивающей ее на две поверхности S_1 и S_2 , каждая из которых пересекается с любой прямой, параллельной оси Oz , не более чем в одной точке. Область D , которую высекает указанная цилиндрическая поверхность в плоскости Oxy , есть проекция на эту плоскость и области Ω , и поверхностей S_1 и S_2 . Пусть $z = z_1(x, y)$ и $z = z_2(x, y)$ — уравнения соответственно поверхностей S_1 и S_2 .

*) Интеграл в левой части формулы Остроградского есть просто тройной интеграл («по объему» области Ω). Если бы мы ввели ориентацию пространственной области и интеграл по такой области, то направления интегрирований в левой и в правой частях формулы Остроградского оказались бы согласованными, причем так, что ориентации пространственной области, при которой интеграл слева делается тройным интегралом («по объему»), соответствовала бы положительная ориентация поверхности — границы области.

причем $z_2 \geq z_1$. Интегрируя сперва по z , а затем по x и по y в области D , получим:

$$I = \int \int \int \frac{\partial Z}{\partial z} dx dy dz = \int \int_D dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} \frac{\partial Z}{\partial z} dz.$$

Выполняя внутреннее интегрирование, находим:

$$I = \int \int_D Z[x, y, z_2(x, y)] dx dy - \\ - \int \int_D Z[x, y, z_1(x, y)] dx dy.$$

Двойные интегралы в правой части являются выражениями для поверхностных интегралов по координатам x и y от функции $Z(x, y, z)$, взятых по верхним сторонам этих поверхностей. Значит,

$$I = \int \int_{S_2} Z(x, y, z) dx dy - \int \int_{S_1} Z(x, y, z) dx dy = \\ = \int \int_{S_2} Z(x, y, z) dx dy + \int \int_{-S_1} Z(x, y, z) dx dy,$$

где $-S_1$ — нижняя сторона поверхности S_1 . Следовательно,

$$\int \int \int \frac{\partial Z}{\partial z} dx dy dz = \int \int_S Z dx dy, \quad (*)$$

причем интегрирование в правой части совершается по внешней стороне всей поверхности S (т. е. в положительном направлении).

Граница области θ — поверхность S — может содержать участки цилиндрической поверхности с образующей, перпендикулярной к плоскости Oxy ; формула остается при этом верной.

Так же, как и при доказательствах формул Грина и Стокса, нетрудно показать при помощи подходящих разбиений области на части и опираясь на свойства тройных и поверхностных интегралов, что формула $(*)$ справедлива для всяких областей, не обязательно односвязных, и ограниченных любыми (рассматриваемыми нами) поверхностями, а не

только такими, которые встречают координатную линию не более чем в двух точках.

Вполне аналогично доказываются формулы

$$\int \int \int \frac{\partial Y}{\partial y} dx dy dz = \int_s Y dx dz, \quad (**)$$

$$\int \int \int \frac{\partial X}{\partial x} dx dy dz = \int_s X dy dz. \quad (***)$$

Складывая почленно равенства (*), (**), (***), мы и приходим к формуле Остроградского. Ясно, что она верна и для сходящихся несобственных интегралов.

Если положить $X=x$, $Y=y$, $Z=z$, то из формулы Остроградского получим:

$$3 \int \int \int dx dy dz = \int_s x dy dz + y dx dz + z dx dy,$$

откуда находим:

$$\text{об. } \mathcal{G} = \frac{1}{3} \int_s x dy dz + y dx dz + z dx dy,$$

т. е. выражение для объема пространственной области посредством поверхностного интеграла по границе области.

Придадим формуле Остроградского (4.22) другой вид, выразив интеграл в правой части через интеграл по площади поверхности. Так как (п° 94, стр. 258—259):

$$dy dz = \cos(n, x) dq, \quad dx dz = \cos(n, y) dq,$$

$$dx dy = \cos(n, z) dq,$$

где (n, x) , (n, y) , (n, z) — углы, образованные нормалью к внешней стороне замкнутой поверхности S соответственно с осями Ox , Oy , Oz , то

$$\begin{aligned} \int \int \int \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) dx dy dz = \int_s [X \cos(n, x) + \\ + Y \cos(n, y) + Z \cos(n, z)] dq. \end{aligned} \quad (4.23)$$

В этом виде *формула Остроградского* уже вполне аналогична формуле Грина (4.13).

Пример. Вернемся к интегралу Гаусса (п° п° 81, 83):

$$G = \int_S \int \frac{\cos(n, \rho)}{\rho^2} dq$$

для замкнутой поверхности S . Так как

$$\cos(n, \rho) = \cos(n, x) \cos(\rho, x) + \cos(n, y) \cos(\rho, y) + \cos(n, z) \cos(\rho, z),$$

где обозначения углов сами по себе понятны, и

$$\cos(\rho, x) = \frac{x}{\rho}, \quad \cos(\rho, y) = \frac{y}{\rho}, \quad \cos(\rho, z) = \frac{z}{\rho},$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

то

$$G = \int_S \int \left[\frac{x}{\rho^3} \cos(n, x) + \frac{y}{\rho^3} \cos(n, y) + \frac{z}{\rho^3} \cos(n, z) \right] dq. \quad (a)$$

Пусть θ — область, ограниченная поверхностью S . Применим к интегралу (a) формулу Остроградского. Мы имеем право это сделать только в случае, когда начало координат лежит вне области θ ; если же начало координат принадлежит области θ или поверхности S , то функции $X = \frac{x}{\rho^3}$,

$Y = \frac{y}{\rho^3}$, $Z = \frac{z}{\rho^3}$ будут разрывными в области интегрирования.

Имеем по формуле (4.23):

$$\begin{aligned} G &= \int_{\theta} \int \int \left[\frac{\partial \left(\frac{x}{\rho^3} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left(\frac{y}{\rho^3} \right)}{\partial y} + \frac{\partial \left(\frac{z}{\rho^3} \right)}{\partial z} \right] dx dy dz = \\ &= \int_{\theta} \int \int \left(\frac{\rho^2 - 3x^2}{\rho^5} + \frac{\rho^2 - 3y^2}{\rho^5} + \frac{\rho^2 - 3z^2}{\rho^5} \right) dx dy dz. \end{aligned}$$

Ясно, что подынтегральное выражение равно нулю и, значит, в согласии с п° 81 $G = 0$.

Покажем, как вычисляется значение интеграла G с помощью формулы Остроградского в случае, когда начало координат принадлежит области θ ; при этом интеграл (а) оказывается несобственным. Возьмем сферу s_ϵ с центром в начале координат и с таким радиусом ϵ , чтобы она целиком лежала внутри области θ . Тогда в области θ_ϵ , ограниченной данной поверхностью S и сферой s_ϵ , интеграл (а) собственный и можно воспользоваться формулой Остроградского. Этим приемом мы изолировали особую точку, мешавшую нам применить формулу Остроградского. Получаем:

$$\begin{aligned} & \int_S \int \left[\frac{x}{\rho^3} \cos(n, x) + \frac{y}{\rho^3} \cos(n, y) + \frac{z}{\rho^3} \cos(n, z) \right] dq - \\ & - \int_{s_\epsilon} \int \left[\frac{x}{\rho^3} \cos(n, x) + \frac{y}{\rho^3} \cos(n, y) + \frac{z}{\rho^3} \cos(n, z) \right] dq = \\ & = \int_{\theta_\epsilon} \int \int \left(\frac{\rho^2 - 3x^2}{\rho^5} + \frac{\rho^2 - 3y^2}{\rho^5} + \frac{\rho^2 - 3z^2}{\rho^5} \right) dx dy dz = 0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$G = \int_{s_\epsilon} \int \left[\frac{x}{\rho^3} \cos(n, x) + \frac{y}{\rho^3} \cos(n, y) + \frac{z}{\rho^3} \cos(n, z) \right] dq,$$

и так как для точек сферы s_ϵ имеет место равенство $\rho = \epsilon$, то

$$\begin{aligned} G &= \frac{1}{\epsilon^3} \int_{s_\epsilon} \int [x \cos(n, x) + y \cos(n, y) + z \cos(n, z)] dq = \\ &= \frac{1}{\epsilon^3} 3 \cdot \text{об. } s_\epsilon = \frac{1}{\epsilon^3} 3 \cdot \frac{4\pi}{3} \epsilon^3 = 4\pi; \end{aligned}$$

мы пришли к тому же результату, что и в н° 81 (см. стр. 218). Таким же образом рассматривается и случай, когда начало координат лежит на поверхности S .

Приведенное рассуждение весьма характерно для ряда задач математического анализа.

Полученные результаты, касающиеся интеграла Гаусса, справедливы и тогда, когда роль начала координат играет какая-нибудь фиксированная точка пространства, т. е. когда ρ есть длина радиуса-вектора, соединяющего эту фиксированную

точку с произвольной точкой поверхности S , а (n, ρ) — угол между нормалью к поверхности и радиусом-вектором.

105. Независимость интеграла от поверхности интегрирования. Рассмотрим поверхностный интеграл:

$$I(S) = \int_S \int X dy dz + Y dx dz + Z dx dy, \quad (4.24)$$

взятый по какой-нибудь поверхности S , принадлежащей некоторой односвязной пространственной области \mathcal{B} и «натянутой» на данную линию L этой области. Интеграл $I(S)$ является, вообще говоря, *функционалом* от поверхности S , т. е. его значение зависит от всей поверхности интегрирования S . Представляет интерес вопрос, подобный тому, который возникает при рассмотрении криволинейных интегралов: об условиях, относящихся к функциям X, Y, Z , при которых интеграл $I(S)$ не зависит от всей поверхности интегрирования S , а зависит только от ее границы L . Другими словами, это вопрос о том, при каких условиях интеграл I есть функционал не от поверхности, а от линии. Заметим, что утверждение о независимости интеграла (4.24) от поверхности интегрирования в области \mathcal{B} равносильно утверждению о равенстве нулю этого интеграла по любой замкнутой поверхности в области \mathcal{B} .

Поставленный вопрос решается следующей теоремой:

Теорема. *Для независимости поверхностного интеграла (4.24) от поверхности интегрирования, принадлежащей односвязной области \mathcal{B} , или, что все равно, для равенства его нулю по любой замкнутой поверхности, принадлежащей односвязной области \mathcal{B} , необходимо и достаточно, чтобы функции $X(x, y, z)$, $Y(x, y, z)$ и $Z(x, y, z)$, имеющие непрерывные частные производные первого порядка, тождественно удовлетворяли в области \mathcal{B} соотношению*

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0. \quad (4.25)$$

На основании формулы Остроградского достаточность условия (4.25) ясна; необходимость же обнаруживается методом от противного, как и в аналогичных обстоятельствах в формулах Грина и Стокса.

В частности, проверим на основании только что изложенной теоремы замечание, высказанное на стр. 285, о том, что поверхностный интеграл в левой части формулы Стокса (4.17) обращается в нуль для всякой замкнутой поверхности. Действительно, для этого интеграла условие (4.25) выполняется:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) = \\ = \frac{\partial^2 Z}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 Y}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 X}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 Y}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 X}{\partial y \partial z} = 0, \end{aligned}$$

если, правда, допустить еще непрерывность вторых смешанных частных производных от функций X , Y и Z (II, 153). В этом добавочном допущении доказательство, основанное на формуле Стокса, как легко видеть, не нуждается.

§ 8. ФОРМУЛЫ ГРИНА И ИХ ОБОБЩЕНИЯ

Изученные в двух предыдущих параграфах соотношения между интегралами являются источниками многочисленных формул, служащих для преобразований интегральных выражений и используемых в различных вопросах математического анализа, особенно в теории дифференциальных уравнений. Выведем сейчас группу этих формул, носящих названия *формул Грина* *), причем будем последовательно излагать их применительно к линейному, плоскому и пространственному случаям.

106. Линейный случай. Возьмем формулу Ньютона — Лейбница в виде:

$$\int_1^l \frac{dX}{dx} dx = X|_1 \quad (*)$$

и положим

$$X = u \frac{dv}{dx},$$

где u и v — функции независимой переменной x , дважды непрерывно дифференцируемые в данном интервале $[x_1, x_2]$

*) Очень часто соответствующие им предложения называют *теоремами Грина*.

оси Ox . Имеем:

$$\frac{dX}{dx} = u \frac{d^2v}{dx^2} + \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx},$$

и формула Ньютона — Лейбница (*) перепишется так:

$$\int_l \left(u \frac{d^2v}{dx^2} + \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} \right) dx = u \frac{dv}{dx} \Big|_l.$$

Если поменять местами функции u и v , то будем иметь:

$$\int_l \left(v \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{dv}{dx} \frac{du}{dx} \right) dx = v \frac{du}{dx} \Big|_l.$$

Вычитая это равенство из предыдущего, получим *):

$$\int_l \left(u \frac{d^2v}{dx^2} - v \frac{d^2u}{dx^2} \right) dx = \left(u \frac{dv}{dx} - v \frac{du}{dx} \right) \Big|_l, \quad (4.26)$$

или, в обычной записи,

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(u \frac{d^2v}{dx^2} - v \frac{d^2u}{dx^2} \right) dx = \left(u \frac{dv}{dx} - v \frac{du}{dx} \right) \Big|_{x_1}^{x_2}. \quad (4.26')$$

Это и есть *формула Грина* в линейном случае. Она позволяет обыкновенный интеграл от известного «симметричного» дифференциального выражения второго порядка записать в виде некоторого также «симметричного» дифференциального выражения первого порядка.

Обобщим выведенную формулу Грина для линейного дифференциального выражения второго порядка:

$$\mathcal{L}(u) = A \frac{d^2u}{dx^2} + B \frac{du}{dx} + Cu,$$

где функции A , B , C и u независимой переменной x дважды непрерывно дифференцируемы в интервале l . Выражению $\mathcal{L}(u)$ отнесем выражение

$$\mathcal{M}(v) = \frac{d^2(Av)}{dx^2} - \frac{d(Bv)}{dx} + Cv,$$

*) Равенство вполне очевидное, так как ясно, что $u \frac{dv}{dx} - v \frac{du}{dx}$ есть первообразная для $u \frac{d^2v}{dx^2} - v \frac{d^2u}{dx^2}$.

которое называется ему *сопряженным*. Легко проверить, что понятие сопряженности взаимное: *выражением, сопряженным выражению* $\mathcal{M}(v)$, *будет* $\mathcal{L}(u)$. Если $\mathcal{L}(u)$ совпадает с $\mathcal{M}(u)$, то оно называется *самосопряженным*. Раскрывая выражение $\mathcal{M}(u)$, нетрудно убедиться, что необходимым и достаточным условием самосопряженности выражения $\mathcal{L}(u)$ служит равенство*)

$$B = \frac{dA}{dx}.$$

Значит, общий вид самосопряженного дифференциального выражения $\mathcal{L}(u)$ для одной независимой переменной таков:

$$\mathcal{L}(u) = \frac{d}{dx} \left(A \frac{du}{dx} \right) + Cu. \quad (4.27)$$

При $A=1$, $C=0$ выражение $\mathcal{L}(u)$ обращается в $\frac{d^2u}{dx^2}$.

Желая обобщить формулу Грина (4.26), найдем интеграл

$$I = \int_l \left[u \mathcal{L}(v) - v \mathcal{L}(u) \right] dx$$

для самосопряженного выражения \mathcal{L} .

Имеем:

$$\begin{aligned} I &= \int_l \left(Au \frac{d^2v}{dx^2} + Bu \frac{dv}{dx} + Cuv - Av \frac{d^2u}{dx^2} - Bv \frac{du}{dx} - Cuv \right) dx = \\ &= \int_l A \left(u \frac{d^2v}{dx^2} - v \frac{d^2u}{dx^2} \right) dx + \int_l \frac{dA}{dx} \left(u \frac{dv}{dx} - v \frac{du}{dx} \right) dx. \end{aligned}$$

*) Дифференциальное уравнение $\mathcal{L}(u) = 0$ называется *самосопряженным*, если выражение $\mathcal{L}(u)$ самосопряженное. Заметим, что всякое дифференциальное уравнение $\mathcal{L}(u) = 0$ в случае одной независимой переменной во всем интервале l , за исключением точек, в которых коэффициент A обращается в нуль, может быть приведено к самосопряженному виду. Действительно, положив $\frac{B}{A} = \frac{A'_1}{A_1}$ и $\frac{C}{A} = \frac{C_1}{A_1}$, т. е. $A_1 = e^{\int \frac{B}{A} dx}$ и $C_1 = A_1 \frac{C}{A}$, мы преобразуем уравнение $\mathcal{L}(u) = 0$ в уравнение

$$A_1 \frac{d^2u}{dx^2} + A'_1 \frac{du}{dx} + C_1 u = 0,$$

Интегрируя первый член по частям и помня, что функция $u \frac{dv}{dx} - v \frac{du}{dx}$ есть первообразная для функции $u \frac{d^2v}{dx^2} - v \frac{d^2u}{dx^2}$, получим:

$$\int_i \left[u \mathcal{L}(v) - v \mathcal{L}(u) \right] dx = A \left(u \frac{dv}{dx} - v \frac{du}{dx} \right) \Big|_i, \quad (4.28)$$

или, в обычной записи,

$$\int_{x_1}^{x_2} [u \mathcal{L}(v) - v \mathcal{L}(u)] dx = A \left(u \frac{dv}{dx} - v \frac{du}{dx} \right) \Big|_{x_1}^{x_2}, \quad (4.28')$$

где \mathcal{L} определяется по формуле (4.27). Это — *обобщенная формула Грина в линейном случае*. При $A=1$ из нее получается формула (4.26).

107. Плоский случай. Возьмем основную формулу Грина в виде (4.13):

$$\int_D \int \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) dx dy = \int_i [X \cos(n, x) + Y \cos(n, y)] ds$$

и положим

$$X = u \frac{\partial v}{\partial x}, \quad Y = u \frac{\partial v}{\partial y},$$

где u и v — функции независимых переменных x и y , дважды непрерывно дифференцируемые в данной области D плоскости Oxy .

Имеем:

$$\frac{\partial X}{\partial x} = u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial Y}{\partial y} = u \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y},$$

и формула Грина (4.13) перепишется так:

$$\begin{aligned} & \int_D \int \left[u \Delta v + \mathbf{S} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] dx dy = \\ & = \int_i u \left[\frac{\partial v}{\partial x} \cos(n, x) + \frac{\partial v}{\partial y} \cos(n, y) \right] ds = \int_i u \frac{\partial v}{\partial n} ds. \end{aligned}$$

где

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

— лапласиан функции v , а

$$\frac{\partial v}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial x} \cos(n, x) + \frac{\partial v}{\partial y} \cos(n, y)$$

— нормальная производная функции v на линии l (имеется в виду, конечно, внешняя нормаль) (II, 148), т. е. производная от функции v по направлению внешней нормали к линии l .

Если переставить местами функции u и v , то будем иметь:

$$\int_D \int [v \Delta u + S\left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x}\right)] dx dy = \int_l v \frac{\partial u}{\partial n} ds.$$

Вычитая это равенство из предыдущего, получим:

$$\int_D \int (u \Delta v - v \Delta u) dx dy = \int_l \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n}\right) ds. \quad (4.29)$$

Это и есть *формула Грина* в плоском случае*). Она позволяет двойной интеграл от известного «симметричного» дифференциального выражения второго порядка записать в виде криволинейного интеграла по длине от некоторого также «симметричного» дифференциального выражения первого порядка.

Обобщим выведенную формулу Грина, заменив лапласиан Δu линейным дифференциальным выражением второго порядка:

$$\mathcal{L}(u) = A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu,$$

где функции A, B, C, D, E, F и u независимых переменных x и y дважды непрерывно дифференцируемы

*) Заметим, что если для функции u одной независимой переменной x «лапласианом» Δu считать $\frac{d^2 u}{dx^2}$, что вполне естественно по соображениям аналогии, то подынтегральные выражения в левых частях формул (4.26) и (4.29) имеют один и тот же вид.

в области D . Выражению $\mathcal{Z}(u)$ отнесем выражение

$$\mathcal{M}(v) = \frac{\partial^2 (Av)}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 (Bv)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 (Cv)}{\partial y^2} - \frac{\partial (Dv)}{\partial x} - \frac{\partial (Ev)}{\partial y} + Fv,$$

которое называется ему *сопряженным*. Раскрывая выражение $\mathcal{M}(v)$, получим:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(v) = & A \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \left[2 \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} \right) - D \right] \frac{\partial v}{\partial x} + \\ & + \left[2 \left(\frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} \right) - E \right] \frac{\partial v}{\partial y} + \\ & + \left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 B}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} - \frac{\partial D}{\partial x} - \frac{\partial E}{\partial y} + F \right) v. \quad (*) \end{aligned}$$

Теперь нетрудно проверить, что понятие сопряженности взаимное: *выражением, сопряженным выражению $\mathcal{M}(v)$, будет $\mathcal{Z}(u)$* . Если $\mathcal{Z}(u)$ совпадает с $\mathcal{M}(u)$, то оно называется *самосопряженным*. Из равенства (*) ясно, что необходимыми и достаточными условиями самосопряженности выражения $\mathcal{Z}(u)$ служат равенства:

$$D = \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y},$$

$$E = \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y}.$$

Значит, общий вид самосопряженного дифференциального выражения $\mathcal{Z}(u)$ для двух независимых переменных таков:

$$\mathcal{Z}(u) = \frac{\partial}{\partial x} \left(A \frac{\partial u}{\partial x} + B \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(B \frac{\partial u}{\partial x} + C \frac{\partial u}{\partial y} \right) + Fu. \quad (4.30)$$

При $A=C=1$ и $B=F=0$ выражение $\mathcal{Z}(u)$ обращается в лапласиан $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

Желая обобщить формулу Грина (4.29), найдем интеграл

$$I = \iint_D [u \mathcal{Z}(v) - v \mathcal{Z}(u)] dx dy$$

для самосопряженного выражения \mathcal{Z} .

Имеем:

$$\begin{aligned}
 I &= \int_D \int \left\{ \left[A \left(u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial A}{\partial x} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] + \right. \\
 &\quad + \left[B \left(u \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - v \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) + \frac{\partial B}{\partial x} \left(u \frac{\partial v}{\partial y} - v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + \\
 &\quad + \left[B \left(u \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - v \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) + \frac{\partial B}{\partial y} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] + \\
 &\quad \left. + \left[C \left(u \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial C}{\partial y} \left(u \frac{\partial v}{\partial y} - v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \right\} = \\
 &= \int_D \int \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[A \left(u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[B \left(u \frac{\partial v}{\partial y} - v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] - \right. \\
 &\quad - B \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[B \left(u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] + \\
 &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial y} \left[C \left(u \frac{\partial v}{\partial y} - v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] - B \left(\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right\} dx dy,
 \end{aligned}$$

что можно записать так:

$$\begin{aligned}
 I &= \int_D \int \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[A \left(u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial x} \right) + B \left(u \frac{\partial v}{\partial y} - v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial y} \left[B \left(u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial x} \right) + C \left(u \frac{\partial v}{\partial y} - v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \right\} dx dy,
 \end{aligned}$$

или

$$I = \int_D \int \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) dx dy,$$

если обозначить:

$$\left. \begin{aligned}
 X &= A \left(u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial x} \right) + B \left(u \frac{\partial v}{\partial y} - v \frac{\partial u}{\partial y} \right), \\
 Y &= B \left(u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial x} \right) + C \left(u \frac{\partial v}{\partial y} - v \frac{\partial u}{\partial y} \right).
 \end{aligned} \right\} \quad (4.31)$$

По основной формуле Грина находим:

$$I = \int_{\Gamma} -Y dx + X dy = \int_{\Gamma} [X \cos(n, x) + Y \cos(n, y)] ds.$$

Итак,

$$\begin{aligned} \int_D \int [u \mathcal{Z}'(v) - v \mathcal{Z}(u)] dx dy &= \int_i -Y dx + X dy = \\ &= \int_i [X \cos(n, x) + Y \cos(n, y)] ds, \end{aligned} \quad (4.32)$$

где \mathcal{Z} , X и Y определяются по формулам (4.30) и (4.31). Это — обобщенная формула Грина в плоском случае. При $A=C=1$, $B=0$ из нее получается формула Грина (4.29).

108. Пространственный случай. Возьмем формулу Остроградского в виде (4.23):

$$\begin{aligned} \int_6 \int \int \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) dx dy dz &= \int_s \int [X \cos(n, x) + \\ &+ Y \cos(n, y) + Z \cos(n, z)] dq, \end{aligned}$$

и положим $X = u \frac{\partial v}{\partial x}$, $Y = u \frac{\partial v}{\partial y}$, $Z = u \frac{\partial v}{\partial z}$, где u и v — функции независимых переменных x , y и z , дважды непрерывно дифференцируемые в данной области δ пространства $Oxyz$, ограниченной поверхностью S . Имеем:

$$\frac{\partial X}{\partial x} = u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial Y}{\partial y} = u \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial Z}{\partial z} = u \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z},$$

и формула Остроградского переписывается так:

$$\begin{aligned} \int_6 \int \int \left[u \Delta v + \mathbf{S} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] dx dy dz &= \int_s \int u \left[\frac{\partial v}{\partial x} \cos(n, x) + \right. \\ &+ \left. \frac{\partial v}{\partial y} \cos(n, y) + \frac{\partial v}{\partial z} \cos(n, z) \right] dq = \int_s \int u \frac{\partial v}{\partial n} dq, \end{aligned}$$

где

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

— лапласиан функции v , а

$$\frac{\partial v}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial x} \cos(n, x) + \frac{\partial v}{\partial y} \cos(n, y) + \frac{\partial v}{\partial z} \cos(n, z)$$

— нормальная производная функции v на поверхности S (имеется в виду, конечно, внешняя нормаль; II, 148), т. е. производная от функции v по направлению внешней нормали к поверхности S .

Если переставить местами функции u и v , то будем иметь:

$$\int \int \int_{\Omega} [v \Delta u + S \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \right)] dx dy dz = \int \int_S v \frac{\partial u}{\partial n} dq.$$

Вычитая это равенство из предыдущего, получим:

$$\int \int \int_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) dx dy dz = \int \int_S \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dq. \quad (4.33)$$

Это и есть *формула Грина* в пространственном случае *). Она позволяет тройной интеграл от известного «симметричного» дифференциального выражения второго порядка записать в виде интеграла по площади поверхности от некоторого также «симметричного» дифференциального выражения первого порядка.

Обобщим выведенную формулу Грина, заменив лапласиан Δu линейным дифференциальным выражением второго порядка **):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u) = & A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + C \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2D \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2E \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \\ & + 2F \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + G \frac{\partial u}{\partial x} + H \frac{\partial u}{\partial y} + K \frac{\partial u}{\partial z} + Lu, \end{aligned}$$

где функции $A, B, C, D, E, F, G, H, K, L$ и u независимых переменных x, y и z дважды непрерывно дифференцируемы

*) Как видно, она повторяет с вполне очевидными изменениями формулы Грина в двух предыдущих случаях.

**) Это выражение удобно записать именно так: сначала все члены, содержащие вторые несмешанные производные, затем — вторые смешанные производные, далее — первые производные и, наконец, — нулевую производную.

в области 6. Выражению $\mathcal{L}(u)$ отнесем выражение:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(v) = & \frac{\partial^2(Av)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(Bv)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(Cv)}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2(Dv)}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2(Ev)}{\partial x \partial z} + \\ & + 2 \frac{\partial^2(Fv)}{\partial y \partial z} - \frac{\partial(Gv)}{\partial x} - \frac{\partial(Hv)}{\partial y} - \frac{\partial(Kv)}{\partial z} + Lv, \end{aligned}$$

которое называется *сопряженным* ему. Раскрывая выражение $\mathcal{M}(v)$, получим:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(v) = & A \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + C \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + 2D \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + 2E \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} + \\ & + 2F \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} + \left[2 \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial y} + \frac{\partial E}{\partial z} \right) - G \right] \frac{\partial v}{\partial x} + \\ & + \left[2 \left(\frac{\partial D}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \right) - H \right] \frac{\partial v}{\partial y} + \left[2 \left(\frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} \right) - K \right] \frac{\partial v}{\partial z} + \\ & + \left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 E}{\partial x \partial z} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} - \frac{\partial G}{\partial x} - \right. \\ & \left. - \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial K}{\partial z} + L \right) v. \end{aligned} \quad (*)$$

Пользуясь этим, можно проверить, что понятие сопряженности взаимное: *выражением, сопряженным выражению $\mathcal{M}(v)$, будет $\mathcal{L}(u)$* . Если $\mathcal{L}(u)$ совпадает с $\mathcal{M}(u)$, то оно называется *самосопряженным*. Из равенства (*) ясно, что необходимыми и достаточными условиями самосопряженности выражения $\mathcal{L}(u)$ служат равенства:

$$G = \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial y} + \frac{\partial E}{\partial z},$$

$$H = \frac{\partial D}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z},$$

$$K = \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}.$$

Значит, общий вид самосопряженного дифференциального выражения $\mathcal{L}(u)$ для трех независимых переменных таков:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u) = & \frac{\partial}{\partial x} \left(A \frac{\partial u}{\partial x} + D \frac{\partial u}{\partial y} + E \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D \frac{\partial u}{\partial x} + B \frac{\partial u}{\partial y} + F \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left(E \frac{\partial u}{\partial x} + F \frac{\partial u}{\partial y} + C \frac{\partial u}{\partial z} \right) + Lu. \end{aligned} \quad (4.34)$$

При $A=B=C=1$, $D=E=F=L=0$ выражение $\mathcal{L}(u)$ обращается в лапласиан

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Желая обобщить формулу Грина (4.33), найдем интеграл

$$\int \int \int_{\Omega} [u \mathcal{L}(v) - v \mathcal{L}(u)] dx dy dz$$

для самосопряженного выражения \mathcal{L} .

После простых выкладок, аналогичных соответствующим выкладкам в плоском случае, получим:

$$\begin{aligned} I = \int \int \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[A \left(u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial x} \right) + D \left(u \frac{\partial v}{\partial y} - v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \right. \right. \\ \left. + E \left(u \frac{\partial v}{\partial z} - v \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[D \left(u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \right. \\ \left. + B \left(u \frac{\partial v}{\partial y} - v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + F \left(u \frac{\partial v}{\partial z} - v \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] + \\ \left. + \frac{\partial}{\partial z} \left[E \left(u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial x} \right) + F \left(u \frac{\partial v}{\partial y} - v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + C \left(u \frac{\partial v}{\partial z} - v \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] \right\} dx dy dz, \end{aligned}$$

или

$$I = \int \int \int_{\Omega} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) dx dy dz,$$

если обозначить:

$$\left. \begin{aligned} X &= A \left(u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial x} \right) + D \left(u \frac{\partial v}{\partial y} - v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \\ &\quad + E \left(u \frac{\partial v}{\partial z} - v \frac{\partial u}{\partial z} \right), \\ Y &= D \left(u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial x} \right) + B \left(u \frac{\partial v}{\partial y} - v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \\ &\quad + F \left(u \frac{\partial v}{\partial z} - v \frac{\partial u}{\partial z} \right), \\ Z &= E \left(u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial x} \right) + F \left(u \frac{\partial v}{\partial y} - v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \\ &\quad + C \left(u \frac{\partial v}{\partial z} - v \frac{\partial u}{\partial z} \right). \end{aligned} \right\} \quad (4.35)$$

По формуле Остроградского находим:

$$I = \int_s \int X dy dz + Y dx dz + Z dx dy = \int_s \int [X \cos(n, x) + \\ + Y \cos(n, y) + Z \cos(n, z)] dq.$$

Итак,

$$\int_0 \int \int [u \mathcal{L}(v) - v \mathcal{L}(u)] dx dy dz = \int_s \int X dy dz + \\ + Y dx dz + Z dx dy = \int_s \int [X \cos(n, x) + Y \cos(n, y) + \\ + Z \cos(n, z)] dq,$$

где \mathcal{L} , X , Y и Z определяются по формулам (4.34) и (4.35). Это — обобщенная формула Грина в пространственном случае. При $A=B=C=1$, $D=E=F=0$ из нее получается формула Грина (4.33).

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
«ФИЗМАТГИЗ»

Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

ИМЕЮТСЯ В ПРОДАЖЕ:

- Берман Г. Н., Сборник задач по курсу математического анализа, 1958, 436 стр., цена 9 р. 75 к.
- Бермант А. Ф., Курс математического анализа, часть I, 1958, 466 стр., цена 10 р. 15 к.
- Бермант А. Ф., Курс математического анализа, часть II, 1956, 358 стр., цена 7 р. 85 к.
- Ефимов Н. В., Краткий курс аналитической геометрии, 1958, 256 стр., цена 6 р. 35 к.
- Клетеник Д. В., Сборник задач по аналитической геометрии, 1956, 240 стр., цена 5 р. 45 к.
- Привалов И. И., Аналитическая геометрия, 1958, 300 стр., цена 6 р. 90 к.
- Цубербиллер О. Н., Задачи и упражнения по аналитической геометрии, 1958, 356 стр., цена 8 р. 05 к.
-

Книги продаются в книжных магазинах, а также высылаются почтой наложенным платежом без задатка всеми республиканскими, краевыми и областными отделениями
«КНИГА — ПОЧТОЙ».

Бермант Анисим Федорович.
Отображения. Криволинейные координаты.
Преобразования. Формулы Грина.

Редактор *Б. Г. Сосин.*
Технический редактор *Е. А. Ермакова.*
Корректор *И. Л. Едская.*

Сдано в набор 8/I 1958 г.	Подписано
к печати 30/VII 1958 г.	Бумага 84×108 ¹ / ₂ .
Физ. печ. л. 9,6. Условн. печ. л. 15,78. Уч.-изд. л. 16,10.	
Тираж 7000 экз. Т-07190.	Цена книги 5 р. 85 к.
Заказ № 2703.	

Государственное издательство
физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Типография № 2 им. Евг. Соколовой
УГНТ Ленсовнархоза.
Ленинград, Измайловский пр., 29.