

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(государственный университет)

О.В. Бесов

КУРС ЛЕКЦИЙ ПО  
МАТЕМАТИЧЕСКОМУ  
АНАЛИЗУ

Москва, 2004

Составитель О.В.Бесов

**УДК 517.**

Методические указания по математическому анализу.  
Курс лекций по математическому анализу. (для студентов 1-го курса).  
МФТИ. М., 2004. 65 с.

Изложение указанных в заглавии разделов курса математического анализа, изучаемых в МФТИ в первом семестре, отличается от изложения этих вопросов в учебниках и учебных пособиях.

# СОДЕРЖАНИЕ

Обозначения . . . . .	5
Глава 1. Множество действительных чисел	6
§ 1.1. Аксиоматика . . . . .	6
§ 1.2. Верхние и нижние грани . . . . .	8
§ 1.3. Система вложенных отрезков . . . . .	11
§ 1.4. Связь между различными принципами непрерывности . . . . .	13
§ 1.5. Счетные и несчетные множества . . . . .	14
Глава 2. Предел последовательности . . . . .	18
§ 2.1. Определение предела последовательности .	18
§ 2.2. Свойства пределов, связанные с неравенствами . . . . .	21
§ 2.3. Свойства пределов, связанные с арифметическими операциями . . . . .	22
§ 2.4. Предел монотонной последовательности . .	23
§ 2.5. Число $e$ . . . . .	25
§ 2.6. Подпоследовательности . . . . .	26
§ 2.7. Теорема Больцано–Вейерштрасса . . . . .	29
§ 2.8. Критерий Коши . . . . .	30
§ 2.9. Изображение действительных чисел бесконечными десятичными дробями . . . . .	31
Глава 3. Предел функции . . . . .	37
§ 3.1. Понятие функции . . . . .	37
§ 3.2. Элементарные функции и их классификация	38

§ 3.3. Понятие предела функции . . . . .	38
§ 3.4. Свойства пределов функции . . . . .	41
§ 3.5. Критерий Коши . . . . .	42
§ 3.6. Односторонние пределы . . . . .	43
§ 3.7. Пределы монотонных функций . . . . .	44
§ 3.8. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Сравнение функций . . . . .	45
Глава 4. Непрерывные функции . . . . .	49
§ 4.1. Непрерывность функции в точке . . . . .	49
§ 4.2. Предел и непрерывность сложной функции	50
§ 4.3. Односторонняя непрерывность и точки разрыва . . . . .	52
§ 4.4. Свойства функций, непрерывных на отрезке	53
§ 4.5. Обратные функции . . . . .	55
§ 4.6. Показательная функция . . . . .	55
§ 4.7. Логарифмическая и степенная функции . .	60
§ 4.8. Тригонометрические и обратные тригонометрические функции . . . . .	61
§ 4.9. Некоторые замечательные пределы . . . . .	61

## Обозначения

Для сокращения записи используются следующие обозначения.

$\forall$  — «для каждого; для любого; для всех» (от английского All),

$\exists$  — «существует; найдется» (от англ. Exists),

$:$  — «такой, что; такие, что»,

$:=$  — «по обозначению равно»,

$\rightarrow$  — «соответствует, поставлено в соответствие»,

$\Rightarrow$  — «следует»,

$\Leftrightarrow$  — «равносильно»,

Множество является одним из исходных понятий в математике, оно не определяется. Вместо слова «множество» говорят «набор», «совокупность», «собрание». Множество состоит из объектов, которые принято называть его «элементами». Вводится также пустое множество (обозначение  $\emptyset$ ) как множество, не содержащее ни одного элемента. Множества часто обозначают большими буквами  $A, B, C, \dots$ , а элементы множеств — малыми. Запись  $a \in A$ ,  $A \ni a$  означает, что элемент  $a$  содержится во множестве  $A$ , принадлежит  $A$ , множество  $A$  содержит элемент  $a$ . Запись  $a \notin A$  означает, что множество  $A$  не содержит объект (элемент)  $a$ .

Запись  $A \subset B$ ,  $B \supset A$  означает, что множество  $A$  является подмножеством множества  $B$ , т.е. что  $a \in B \forall a \in A$ .

Если  $A \subset B$  и  $B \subset A$ , то пишут  $A = B$ . Запись  $a = b$  означает, что  $a$  и  $b$  — это один и тот же элемент.

Примеры множеств:

$$A = \{x : x^2 < 1\}, \quad A = \{1, 2, \dots, n, \dots\}.$$

Будут применяться также знаки  $\cup$  (объединение множеств) и  $\cap$  (пересечение множеств).

# Глава 1

## МНОЖЕСТВО ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

### § 1.1. Аксиоматика

**Определение.** Непустое множество  $\mathbb{R}$  называется *множеством действительных (вещественных) чисел*, а его элементы — *действительными (вещественными) числами*, если на  $\mathbb{R}$  определены операции сложения и умножения и отношение порядка.

#### (I) Аксиомы сложения $(a, b \rightarrow a + b)$

1.  $a + b = b + a \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$  (коммутативность);
2.  $a + (b + c) = (a + b) + c \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}$  (ассоциативность);
3.  $\exists 0 \in \mathbb{R}: a + 0 = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$ ;
4.  $\forall a \in \mathbb{R} \exists (-a): a + (-a) = 0$ ,  $(-a)$  называется противоположным числом для  $a$ .

#### (II) Аксиомы умножения $(a, b \rightarrow ab)$

1.  $ab = ba \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$  (коммутативность);
2.  $a(bc) = (ab)c \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}$  (ассоциативность);
3.  $\exists 1 \in \mathbb{R}, 1 \neq 0: a1 = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$ ;
4.  $\forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0, \exists \frac{1}{a}: a \frac{1}{a} = 1$ ,  $(\frac{1}{a})$  называется обратным числом для  $a$ ).

#### (I–II) Связь сложения и умножения

1.  $(a+b)c = ac+bc \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}$  (дистрибутивность умножения относительно сложения).

#### (III) Аксиомы порядка $(\text{Для любых } a, b \in \mathbb{R} \text{ установлено отношение } a \leq b \text{ или } b \leq a)$

1.  $a \leq b, b \leq a \Rightarrow a = b \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$ ;

$$2. a \leq b, b \leq c \Rightarrow a \leq c \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}.$$

$a \leq b$  записывается также в виде  $b \geq a$ ,  $a \leq b$  при  $a \neq b$  в виде  $a < b$  и  $b > a$ .

### (I–III) Связь сложения и порядка

$$1. a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}.$$

### (II–III) Связь умножения и порядка

$$1. 0 \leq a, 0 \leq b \Rightarrow 0 \leq ab \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

### (IV) Аксиома непрерывности $IV_D$ (вариант принципа Дедекинда)

Пусть  $A, B$  — непустые подмножества  $\mathbb{R}$  такие, что

$$a \leq b \quad \forall a \in A, \quad \forall b \in B.$$

Тогда  $\exists c \in \mathbb{R}$  такое, что

$$a \leq c \leq b \quad \forall a \in A, \quad \forall b \in B.$$

**З а м е ч а н и е.** Множество  $\mathbb{Q}$  рациональных чисел удовлетворяет аксиомам (I), (II), (III), (I–III), (II–III), но не удовлетворяет аксиоме (IV). Покажем последнее. Пусть  $A = \{a : a \in \mathbb{Q}, a > 0, a^2 < 2\}$ ,  $B = \{b : b \in \mathbb{Q}, b > 0, b^2 > 2\}$ . Тогда во множестве  $\mathbb{Q}$  не существует числа  $c$  ( $\in \mathbb{Q}$ ) со свойством:  $a \leq c \leq b \quad \forall a \in A, \quad \forall b \in B$ .

### Некоторые свойства аксиом множества действительных чисел

1. Число 0, противоположное к  $a$  число и решение уравнения  $a + x = b$  единственны,  $x = b - a := b + (-a) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$ .
2. Число 1, обратное к  $a$  (при  $a \neq 0$ ) и решение уравнения  $ax = b$  (при  $a \neq 0$ ) единственны.

$$x := \frac{b}{a} := b \frac{1}{a} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0.$$

$$3. a0 = 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

$$4. a, b \in \mathbb{R}, ab = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ или } b = 0.$$

5.  $\forall a, b \in \mathbb{R}$  всегда имеет место одно и только одно из соотношений  $a < b$ ,  $a = b$ ,  $a > b$ .

6.  $0 < 1$ .

### Примеры числовых множеств.

Множество натуральных чисел  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ , где  $2 = 1 + 1$ ,  $3 = 2 + 1$ ,  $\dots$

Множество целых чисел  $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$ .

Множество рациональных чисел

$$\mathbb{Q} = \left\{ x : x = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Отрезок, интервал, полуинтервалы

$$[a, b] := \{x : a \leq x \leq b\}, \quad (a, b) := \{x : a < x < b\},$$

$$[a, b) := \{x : a \leq x < b\}, \quad (a, b] := \{x : a < x \leq b\}.$$

Множество действительных чисел  $\mathbb{R}$  часто называют числовой прямой, а числа — точками числовой прямой.

## § 1.2. Верхние и нижние грани

**Определение.** Множество  $X \subset \mathbb{R}$  называется *ограниченным сверху (снизу)*, если существует число  $b$  (число  $a$ ) такое, что  $x \leq b \forall x \in X$  ( $x \geq a \forall x \in X$ ).

При этом говорят, что *число  $b$  (число  $a$ ) ограничивает множество  $X$  сверху (снизу)*.

**Определение.** Множество  $X \subset \mathbb{R}$  называется *ограниченным*, если оно ограничено сверху и снизу.

**Определение.** Множество  $X \subset \mathbb{R}$  называется *неограниченным (сверху, снизу)*, если оно не является ограниченным (сверху, снизу).

**Определение.** *Верхней гранью непустого множества  $X \subset \mathbb{R}$  называется число  $b$ , удовлетворяющее условиям:*

$$1^\circ \quad x \leq b \quad \forall x \in X;$$



2°  $\forall b' < b \exists x_{b'} \in X: x_{b'} > b'$  или иначе:  $\forall \varepsilon > 0 \exists x_\varepsilon \in X: x_\varepsilon > b - \varepsilon$ .

**Определение.** *Нижней гранью непустого множества  $X \subset \mathbb{R}$  называется число  $a$ , удовлетворяющее условиям:*

1°  $x \geq a \forall x \in X$ ;

2°  $\forall a' > a \exists x_{a'} \in X: x_{a'} < a'$  или иначе:  $\forall \varepsilon > 0 \exists x_\varepsilon \in X: x_\varepsilon < a + \varepsilon$ .

Верхняя и нижняя грани множества  $X$  обозначаются соответственно символами  $\sup X$ ,  $\inf X$ .

**Примеры.**

$$\sup[a, b] = b, \quad \sup(a, b) = b.$$

Отметим, что верхняя грань множества может как принадлежать, так и не принадлежать этому множеству, ср. случаи  $[a, b]$ ,  $(a, b)$ .

**Теорема 1.2.1 (единственности).** *Числовое множество не может иметь больше одной верхней (нижней) грани.*

**Доказательство** проведем лишь для случая верхней грани. Допуская противное, предположим, что каждое из чисел  $b$  и  $b'$  ( $b \neq b'$ ) является верхней гранью множества  $X$ . Пусть, для определенности,  $b' < b$ . Тогда, в силу того, что  $b = \sup X$ , из определения верхней грани следует, что для числа  $b' \exists x_{b'} : x_{b'} \in X, x_{b'} > b'$ . Но тогда  $b'$  не является верхней гранью  $X$ . Из полученного противоречия следует ошибочность предположения и утверждение теоремы.

Заметим, что в условиях теоремы не предполагается существование верхней (нижней) грани. Теорема утверждает, что, если верхняя (нижняя) грань существует, то она единственна.

Значительно более глубокой (эквивалентной аксиоме непрерывности) является теорема о существовании верхней грани.

**Теорема 1.2.2 (о существовании верхней грани).**  
*Всякое непустое ограниченное сверху (снизу) числовое множество имеет верхнюю (нижнюю) грань.*

**Д о к а з а т е л ь с т в о** проведем лишь для верхней грани. Пусть  $A$  — непустое ограниченное сверху множество. Рассмотрим непустое множество  $B$ , элементами которого являются все числа  $b$ , ограничивающие множество  $A$  сверху.

Тогда

$$a \leq b \quad \forall a \in A, \quad \forall b \in B.$$

Из аксиомы непрерывности следует, что для некоторого  $c \in \mathbb{R}$

$$a \leq c \leq b \quad \forall a \in A, \quad \forall b \in B. \quad (1.2.1)$$

Покажем, что  $\sup A = c$ . Первое условие из определения верхней грани выполнено в силу левого из неравенств (1.2.1).

Покажем, что выполняется и второе. Пусть  $c' < c$ . Тогда  $c' \notin B$ , так как для каждого элемента из  $B$  выполняется правое из неравенств (1.2.1). Следовательно,  $c'$  не ограничивает множество  $A$  сверху, т.е.

$$\exists x_{c'} \in A : \quad x_{c'} > c',$$

так что второе условие также выполнено.

Следовательно,  $c = \sup A$  и теорема доказана.

**Определение.** *Расширенным множеством действительных чисел  $\overline{\mathbb{R}}$  называется*

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\},$$

т.е. элементами множества  $\overline{\mathbb{R}}$  являются все действительные числа и еще два элемента:  $-\infty, +\infty$ .

Во множестве  $\overline{\mathbb{R}}$  не введены сложение и умножение, но имеется отношение порядка. Для двух элементов  $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$  в случае

$a, b \in \mathbb{R}$  отношение порядка то же, что в  $\mathbb{R}$ . В других же случаях оно определено так:  $-\infty < a$ ,  $a < +\infty$ ,  $-\infty < +\infty \forall a \in \mathbb{R}$ .

Рассматривая множество  $X$  действительных чисел как подмножество расширенного множества действительных чисел ( $X \subset \mathbb{R}$ ), можно обобщить понятие  $\sup X$  ( $\inf X$ ). Это обобщающее определение будет отличаться от приведенных выше лишь тем, что в качестве  $b$  ( $a$ ) можно брать не только число, но и элемент  $+\infty$  ( $-\infty$ ).

Тогда получим, что для непустого неограниченного сверху (снизу) числового множества  $X$

$$\sup X = +\infty \quad (\inf X = -\infty).$$

Учитывая теорему 1.2.2 приходим к выводу, что всякое непустое числовое множество имеет в расширенном множестве действительных чисел  $\mathbb{R}$  как верхнюю, так и нижнюю грани.

### § 1.3. Система вложенных отрезков

**Определение.** Множество отрезков

$$\{[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots\}, \quad -\infty < a_n < b_n < +\infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

называется *системой вложенных отрезков*, если  $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}] \forall n \in \mathbb{N}$ , т.е. каждый отрезок содержит следующий за ним.

В следующей теореме формулируется свойство, эквивалентное аксиоме непрерывности и называемое непрерывностью множества действительных чисел по Кантору.

**Теорема 1.3.1.** *Для всякой системы вложенных отрезков существует точка, принадлежащая всем отрезкам данной системы.*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Для системы вложенных отрезков  $\{[a_n, b_n]\}$  рассмотрим два непустых множества  $A = \{a_n\}$  и  $B = \{b_n\}$ .

Очевидно, что  $\forall n, m \in \mathbb{N}$

$$a_n \leq a_{n+m} \leq b_{n+m} \leq b_m.$$

В силу аксиомы непрерывности существует число  $c$  такое, что

$$a_n \leq c \leq b_m \quad \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

В частности, при  $m = n$  получаем, что

$$c \in [a_n, b_n] \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

что и требовалось доказать.

**Определение.** Система вложенных отрезков  $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$  называется *стягивающейся системой вложенных отрезков*, если  $\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N}: b_n - a_n < \varepsilon$ .

**Теорема 1.3.2.** *Стягивающаяся система вложенных отрезков имеет ровно одну точку, принадлежащую всем отрезкам.*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** По крайней мере одна общая точка для отрезков рассматриваемой системы имеется в силу теоремы 1.3.1. Покажем, что общих точек не больше одной. Допуская противное, предположим, что каждая из двух различных точек  $c$  и  $c'$  является общей для всех отрезков системы. Пусть, для определенности,  $c' < c$ , т.е.  $\varepsilon := c - c' > 0$ . По определению стягивающей системы,  $\exists n \in \mathbb{N}: b_n - a_n < \varepsilon$ . Тогда  $a_n \leq c' < c \leq b_n$ . Отсюда,  $c - c' \leq c - a_n \leq b_n - a_n < \varepsilon$ , что противоречит выбору  $\varepsilon$ . Теорема доказана.

## § 1.4. Связь между различными принципами непрерывности

**Теорема 1.4.1 (Принцип Архимеда).** Для  $\forall a \in \mathbb{R}$ :  $\exists n \in \mathbb{N}: n > a$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Допустим, что теорема неверна. Это значит, что  $\exists a \in \mathbb{R}: n \leq a \forall n \in \mathbb{N}$ . Следовательно,  $a$  ограничивает сверху множество  $\mathbb{N}$  и по теореме 1.2.2  $\exists b \in \mathbb{R}: b = \sup \mathbb{N}$ . Тогда по определению верхней грани для числа  $b' := b - 1 \exists n \in \mathbb{N}: n > b - 1$ . Но тогда  $n + 1 > b$ ,  $n + 1 \in \mathbb{N}$ , что противоречит тому, что  $b = \sup \mathbb{N}$ . Этим теорема доказана.

В следующей диаграмме

$$IV_D \Rightarrow IV_{\sup} \begin{array}{c} \nearrow IV_K \\ \searrow (A) \end{array} \Bigg\} \Rightarrow IV_D$$

приняты обозначения:

$IV_D$  — вариант принципа Дедекинда,

$IV_{\sup}$  — принцип верхней грани, т.е. утверждение теоремы 1.2.2,

$IV_K$  — принцип Кантора, т.е. утверждение теоремы 1.3.1,

$(A)$  — принцип Архимеда.

Эта диаграмма показывает, что перечисленные принципы эквивалентны. Любой из них ( $IV_K$  в сочетании с  $(A)$ ) можно было бы взять в качестве аксиомы непрерывности при определении множества действительных чисел, а другие доказать в качестве теорем.

Два из указанных в диаграмме логических следствий уже установлены, другие два предлагается доказать читателю в качестве упражнения. Было доказано также, что  $IV_D \Rightarrow IV_K$ .

**Теорема 1.4.2 (Принцип математической индукции).** Пусть множество  $A \subset \mathbb{N}$  обладает свойствами:

- 1°  $A \ni 1$ ;
- 2°  $A \ni n \Rightarrow A \ni n + 1$ .

Тогда  $A = \mathbb{N}$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Последовательно убеждаемся, что  $A \ni 2 := 1 + 1$ ,  $A \ni 3 := 2 + 1$ , ... Следовательно,  $A \supset \mathbb{N}$ . Отсюда и из  $A \subset \mathbb{N}$  следует  $A = \mathbb{N}$ .

**З а м е ч а н и е.** Мы видим, что принцип математической индукции следует непосредственно из определения множества натуральных чисел. Существуют и другие построения теории действительных чисел, в которых этот принцип берется в качестве аксиомы.

## § 1.5. Счетные и несчетные множества

**Определение.** Будем говорить, что *между двумя множествами  $X$  и  $Y$  установлено взаимно однозначное соответствие* и писать  $X \leftrightarrow Y$ , если:

- 1°  $\forall x \in X$  поставлен в соответствие один и только один элемент  $y \in Y$  ( $x \rightarrow y$ );
- 2° Если  $x_1 \neq x_2$ ,  $x_1 \rightarrow y_1$ ,  $x_2 \rightarrow y_2$ , то  $y_1 \neq y_2$ ;
- 3°  $\forall y \in Y \exists x \in X: x \rightarrow y$ .

**Определение.** Два множества  $X$  и  $Y$  называются *эквивалентными* (пишут  $X \sim Y$ ), если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие.

Эквивалентные множества называют также *равномощными*, говорят, что они имеют одну и ту же мощность («одинаковое» количество элементов).

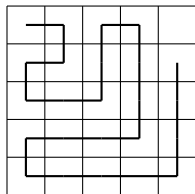
**Пример.**  $\mathbb{N} \sim \{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$ .

**Упражнение.** Доказать, что бесконечное подмножество счетного множества счетно.

Д о к а з а т е л ь с т в о .  
Составим таблицу чисел (открытую снизу и  
справа), содержащую все рациональные числа.

$n \backslash m$	0	1	-1	2	-2	3	-3	...
1	0/1	1/1	-1/1	2/1	-2/1	3/1	-3/1	...
2	0/2	1/2	-1/2	2/2	-2/2	3/2	-3/2	...
3	0/3	1/3	-1/3	2/3	-2/3	3/3	-3/3	...
:	:	:	:	:	:	:	:	:

Будем двигаться по клеткам этой таблицы из левого верхнего угла по пути вида



**Упражнение.** Доказать, что объединение счетного числа счетных множеств счетно.

**Теорема 1.5.2 (Кантор).** *Множество всех точек отрезка  $[0, 1]$  несчетно.*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Допустим противное. Тогда все точки отрезка  $[0, 1]$  можно занумеровать:  $x_1, x_2, x_3, \dots$ . Поделим отрезок  $[0, 1]$  на три равных отрезка и обозначим через  $[a_1, b_1]$  один из них, свободный от точки  $x_1$ . Поделим  $[a_1, b_1]$  на три равных отрезка и обозначим через  $[a_2, b_2]$  один из них, свободный от точки  $x_2$ . Продолжая процесс, получим систему вложенных отрезков  $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ . По теореме о вложенных отрезках существует точка  $c$ , принадлежащая всем отрезкам системы. Эта точка  $c$  не совпадает ни с одной из занумерованных точек  $x_1, x_2, x_3, \dots$ , так как произвольная из них  $x_j$  не содержится в отрезке  $[a_j, b_j]$ , в то время как  $c$  содержится в этом отрезке.

Итак, допуская, что все точки отрезка  $[0, 1]$  занумерованы, мы пришли к противоречию, найдя точку  $c \in [0, 1]$ , отличную от каждой из занумерованных. Это противоречие показывает, что наше допущение неверно. Тем самым, теорема доказана.

**Об изоморфизме различных множеств действительных чисел.**

**Теорема 1.5.3.** *Пусть имеются два множества  $\mathbb{R}, \mathbb{R}'$ , удовлетворяющие всем аксиомам множества действительных чисел. Тогда между ними можно установить взаимно однозначное соответствие  $\mathbb{R} \leftrightarrow \mathbb{R}'$ , при котором из  $(x, y \in \mathbb{R}, x', y' \in \mathbb{R}', x \leftrightarrow x', y \leftrightarrow y')$  следует, что*

$$1^\circ \quad x + y \rightarrow x' + y';$$

$$2^\circ \quad xy \rightarrow x'y';$$

$$3^\circ \quad x \leq y \Rightarrow x' \leq y'.$$



---

В этом случае говорят, что множества  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}'$  действительных чисел изоморфны друг другу и что множество действительных чисел единственно с точностью до изоморфизма.

## Глава 2

# ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

### § 2.1. Определение предела последовательности

**Определение.** Пусть  $A$  — произвольное множество и пусть каждому  $n \in \mathbb{N}$  поставлен в соответствие некоторый элемент  $a \in A$ . Тогда говорят, что задана *последовательность*

$$a_1, a_2, a_3, \dots,$$

которая обозначается также символами  $\{a_n\}$ ,  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

Пара  $(n, a_n)$  называется  $n$ -м элементом последовательности,  $a_n$  — значением  $n$ -го элемента последовательности.

Всякая последовательность имеет счетное число элементов, множество значений элементов последовательности может быть конечным или счетным. Например, множество значений элементов последовательности

$$0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots \tag{2.1.1}$$

состоит из двух элементов: 0 и 1.

Мы будем рассматривать пока лишь последовательности со значениями из  $\mathbb{R}$  и называть их числовыми последовательностями или просто последовательностями.

**З а м е ч а н и е.** Часто вместо «значение элемента последовательности» говорят «элемент последовательности». Например, можно сказать: «Данный отрезок содержит бесконечно много элементов последовательности» и т.п.

**Определение.** Число  $a \in \mathbb{R}$  называется *пределом последовательности*  $\{a_n\}$ , если для  $\forall \varepsilon > 0 \exists n_{\varepsilon} \in \mathbb{N}$ :

$$|a - a_n| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_{\varepsilon}.$$

При этом пишут  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ .

Например,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ .

Обобщим понятие предела (числовой) последовательности, рассматривая в качестве предела не только число, но и какой-либо из символов  $+\infty$ ,  $-\infty$ ,  $\infty$ . Для этого рассмотрим множества  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$  и  $\hat{\mathbb{R}} = \overline{\mathbb{R}} \cup \{\infty\}$ .

**Определение.** Пусть  $\varepsilon > 0$ .  $\varepsilon$ -окрестностью числа  $a$  называется  $U_\varepsilon = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  — интервал с центром в  $a$ ;  $\varepsilon$ -окрестностью элемента  $a = +\infty \in \overline{\mathbb{R}}$  ( $a = -\infty \in \overline{\mathbb{R}}$ ,  $a = \infty \in \hat{\mathbb{R}}$ ) называется множество  $U_\varepsilon = \left\{x : x \in \mathbb{R}, x > \frac{1}{\varepsilon}\right\}$  ( $U_\varepsilon = \left\{x : x \in \mathbb{R}, x < -\frac{1}{\varepsilon}\right\}$ ,  $U_\varepsilon = \left\{x : x \in \mathbb{R}, |x| > \frac{1}{\varepsilon}\right\}$ ).

Через  $U(a)$  при  $a \in \hat{\mathbb{R}}$  обозначается произвольная  $\varepsilon$ -окрестность элемента  $a$ .

Сформулируем общее определение предела последовательности в терминах окрестностей.

**Определение.**  $a \in \hat{\mathbb{R}}$  называется *пределом последовательности*  $\{a_n\}$ , если для  $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : a_n \in U_\varepsilon(a) \forall n \geq n_\varepsilon$ .

Это же определение можно перефразировать следующим образом.

**Определение.**  $a \in \hat{\mathbb{R}}$  называется *пределом последовательности*  $\{a_n\}$ , если в  $\forall U(a)$  содержатся значения почти всех (т.е. всех, за исключением, быть может, конечного числа) элементов последовательности.

**Определение.** Последовательность называется *сходящейся*, если она имеет конечный (т.е. принадлежащий  $\mathbb{R}$ ) предел. В противном случае, последовательность называется *расходящейся*.

Примерами расходящихся последовательностей являются  $\{n\}$  и последовательность (2.1.1).

**Определение.** Последовательность называется *сходящейся* в  $\bar{\mathbb{R}}$  (в  $\hat{\mathbb{R}}$ ), если она имеет предел, принадлежащий  $\bar{\mathbb{R}}$  ( $\hat{\mathbb{R}}$ ).

Расходящаяся последовательность  $\{n\}$  является сходящейся в  $\bar{\mathbb{R}}$ , и сходящейся в  $\hat{\mathbb{R}}$ .

Расходящаяся последовательность  $\{(-1)^n n\}$  сходится в  $\hat{\mathbb{R}}$ , к  $\infty$ .

Бывает полезна формулировка в позитивных терминах утверждения того, что число  $a$  не является пределом последовательности  $\{a_n\}$ . Приведем ее.

Число  $a$  не является пределом последовательности  $\{a_n\}$ , если  $\exists \varepsilon_0 > 0: \forall n_0 \in \mathbb{N} \exists n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: |a_n - a| \geq \varepsilon_0$ .

**Упражнение.** Воспользовавшись этой формулировкой, показать, что последовательность (2.1.1) расходится.

**Теорема 2.1.1 (единственности).** Числовая последовательность не может иметь в  $\bar{\mathbb{R}}$  более одного предела.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Предполагая противное, допустим, что для данной последовательности  $\{a_n\}$  каждый из двух элементов  $a, a' \in \bar{\mathbb{R}}$  является пределом. Пусть  $\varepsilon > 0$  столь мало, что  $U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(a') = \emptyset$ . Тогда по определению предела  $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} (\exists n'_\varepsilon \in \mathbb{N})$ , при котором  $a_n \in U_\varepsilon(a) \forall n \geq n_\varepsilon$  ( $a_n \in U_\varepsilon(a') \forall n \geq n'_\varepsilon$ ).

Положив  $\bar{n}_\varepsilon = \max\{n_\varepsilon, n'_\varepsilon\}$ , получаем, что  $a_n \in U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(a') \forall n \geq \bar{n}_\varepsilon$ , а это невозможно, так как это пересечение пусто. Этим теорема доказана.

## § 2.2. Свойства пределов, связанные с неравенствами

**Определение.** Последовательность  $\{a_n\}$  называется *ограниченной* (*ограниченной сверху, ограниченной снизу*), если множество значений ее элементов ограничено (ограничено сверху, ограничено снизу).

**Определение.** Последовательность  $\{a_n\}$  называется *ограниченной* (*ограниченной сверху, ограниченной снизу*), если

$$\exists b \in \mathbb{R} : |a_n| \leq b \quad (a_n \leq b, a_n \geq b) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Приведенные два определения, очевидно, эквивалентны (равносильны).

**Теорема 2.2.1.** *Сходящаяся последовательность ограничена. Обратное неверно.*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Пусть последовательность  $\{a_n\}$  сходится и  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ . Тогда для  $\varepsilon = 1 \exists n_1 \in \mathbb{N}: |a - a_n| < 1 \quad \forall n \geq n_1$ , так что

$$a - 1 < a_n < a + 1 \quad \forall n \geq n_1.$$

Пусть  $b_1 := \max\{a_1, a_2, \dots, a_{n_1-1}\}$ . Очевидно, что  $\{a_n\}$  ограничена сверху числом  $b_1$ . Аналогично показывается, что  $\{a_n\}$  ограничена снизу. Последовательность  $\{a_n\}$  ограничена в силу ее ограниченности сверху и снизу.

Пример (2.1.1) показывает, что не всякая ограниченная последовательность сходится.

Следующие три свойства показывают связь между неравенствами и предельным переходом. В них пределы  $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ .

- 1°  $a_n \leq b_n \leq c_n, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$ ;
- 2°  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, a < b \Rightarrow \exists n_b \in \mathbb{N}: a_n < b \quad \forall n \geq n_b$ ;

3°  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, a_n \leq b \Rightarrow a \leq b$  ( $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, a_n \geq b \Rightarrow a \geq b$ ).

**Следствие 1.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, |a_n| \leq b \Rightarrow |a| \leq b$ .

**Упражнение.** Показать, что свойство 3° не сохраняется при замене знаков  $\leq$  на  $<$ .

### § 2.3. Свойства пределов, связанные с арифметическими операциями

В следующих свойствах пусть существуют пределы  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \in \mathbb{R}$ . Тогда

1°  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b, \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = a - b$ ;

2°  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = ab$ ;

3° Если  $b_n \neq 0$  ( $\forall n \in \mathbb{N}$ ),  $b \neq 0$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о** проведем лишь для свойства 3°. Положим  $\alpha_n = a - a_n, \beta_n = b - b_n$ . Тогда в силу свойства 1°  $\alpha_n \rightarrow 0, \beta_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Оценим разность между  $\frac{a_n}{b_n}$  и предполагаемым пределом  $\frac{a}{b}$ .

$$\begin{aligned} \Delta_n &= \left| \frac{a}{b} - \frac{a_n}{b_n} \right| = \left| \frac{ab_n - ba_n}{bb_n} \right| = \\ &= \frac{|a(b - \beta_n) - b(a - \alpha_n)|}{|bb_n|} \leq \frac{|a|}{|bb_n|} |\beta_n| + \frac{1}{|b_n|} |\alpha_n|. \end{aligned}$$

Возьмем  $\varepsilon > 0$ . Тогда  $\exists n'_\varepsilon, n''_\varepsilon, n'''_\varepsilon \in \mathbb{N}$  такие, что  $|\alpha_n| < \varepsilon$   $\forall n \geq n'_\varepsilon, |\beta_n| < \varepsilon \forall n \geq n''_\varepsilon, |b - b_n| = |\beta_n| < \frac{|b|}{2}$ , т.е.  $|b_n| > \frac{|b|}{2}$   $\forall n \geq n'''_\varepsilon$ .

Положим  $n_\varepsilon^* = \max\{n'_\varepsilon, n''_\varepsilon, n'''_\varepsilon\}$ . Тогда

$$\Delta_n \leq \frac{2|a|}{b^2}\varepsilon + \frac{2}{|b|}\varepsilon = M\varepsilon \text{ при } \forall n \geq n_\varepsilon^*,$$

так что  $\Delta_n$  не превосходит сколь угодно малого числа  $M\varepsilon$  при всех достаточно больших  $n \in \mathbb{N}$ , а это означает, по определению предела последовательности, что  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$ .

**Определение.** Последовательность  $\{\alpha_n\}$  называется *бесконечно малой*, если  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ .

Следствием арифметических свойств пределов последовательностей является

**Лемма 2.3.1.** Сумма, разность и произведение двух бесконечно малых последовательностей являются бесконечно малыми последовательностями.

**Упражнение.** Построить примеры бесконечно малых последовательностей  $\{\alpha_n\}$ ,  $\{\beta_n\}$  ( $\beta_n \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}$ ), для которых  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = \infty$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = c$ , где  $c$  — произвольное действительное число,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n}$  не существует.

**Определение.** Последовательность  $\{a_n\}$  называется *бесконечно большой*, если  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ .

Арифметические свойства пределов последовательностей не переносятся на бесконечно большие последовательности. Например:  $\{a_n\} = \{n + (-1)^n\}$ ,  $\{b_n\} = \{n\}$  — бесконечно большие последовательности, но  $\{a_n - b_n\} = \{(-1)^n\}$  не сходится даже в  $\hat{\mathbb{R}}$ .

## § 2.4. Предел монотонной последовательности

**Определение.** Верхней (нижней) гранью последовательности называется верхняя (нижняя) грань множества значе-

ний ее элементов. При этом используются обозначения соответственно  $\sup\{a_n\}$ ,  $\inf\{a_n\}$ .

В соответствии со свойствами верхней и нижней грани числовых множеств, каждая последовательность имеет в  $\overline{\mathbb{R}}$  верхнюю и нижнюю грани.

**Определение.** Последовательность  $\{a_n\}$  называется *возрастающей (убывающей)*, если  $a_n \leq a_{n+1}$  ( $a_n \geq a_{n+1}$ )  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

Возрастающие и убывающие последовательности называются монотонными.

**Определение.** Последовательность  $\{a_n\}$  называется *строго возрастающей (строго убывающей)*, если  $a_n < a_{n+1}$  ( $a_n > a_{n+1}$ )  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

Строго возрастающие и строго убывающие последовательности называются строго монотонными.

**З а м е ч а н и е.** Возрастающие последовательности называют также неубывающими, а убывающие — невозрастающими.

**Теорема 2.4.1.** *Всякая возрастающая последовательность  $\{a_n\}$  имеет предел в  $\overline{\mathbb{R}}$   $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup\{a_n\}$ . Этот предел конечен (т.е. является числом), если последовательность  $\{a_n\}$  ограничена сверху, и равен  $+\infty$ , если последовательность не ограничена сверху.*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Пусть  $a := \sup\{a_n\} \leq +\infty$ . Тогда, по определению верхней грани,  $a_n \leq a \forall n \in \mathbb{N}$  и для  $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}: a_{n_\varepsilon} \in U_\varepsilon(a)$ . Поскольку  $a_{n_\varepsilon} \leq a_n \leq a$  при  $n \geq n_\varepsilon$ , получаем, что

$$a_n \in U_\varepsilon(a) \quad \forall n \geq n_\varepsilon.$$

Это означает, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , что и требовалось доказать.

**Упражнение.** Сформулировать и доказать аналогичную теорему для убывающей последовательности.



**Пример.** Пусть  $\{[a_n, b_n]\}$  — стягивающаяся система вложенных отрезков,  $\xi$  — (единственная) общая (для всех отрезков) точка.

Тогда  $\{a_n\}$  — возрастающая,  $\{b_n\}$  — убывающая последовательности. Поскольку  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \xi$ , с помощью доказанной теоремы заключаем, что  $\sup\{a_n\} = \xi$ .

Аналогично получаем, что  $\inf\{b_n\} = \xi$ .

## § 2.5. Число $e$

**Определение.**  $e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ .

Покажем, что этот предел существует и конечен. Будем пользоваться неравенством Бернулли

$$(1 + h)^n > 1 + nh \quad \text{при} \quad h > 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2. \quad (2.5.1)$$

**Упражнение.** Доказать (2.5.1), используя метод математической индукции.

Рассмотрим вспомогательную последовательность  $\{x_n\}$ ,  $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > 1 + \frac{n+1}{n} > 2$ . Как видим, последовательность  $\{x_n\}$  ограничена снизу числом 2. Покажем, что она является убывающей последовательностью.

$$\begin{aligned} \frac{x_{n-1}}{x_n} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{n}{n+1} \left[ \frac{n^2}{(n+1)(n-1)} \right]^n = \\ &= \frac{n}{n+1} \left[ 1 + \frac{1}{n^2-1} \right]^n. \end{aligned}$$

Используя неравенство Бернулли (2.5.1), получаем, что

$$\frac{x_{n-1}}{x_n} \geq \frac{n}{n+1} \left[ 1 + \frac{n}{n^2-1} \right] = \frac{n^3 + n^2 - n}{n^3 + n^2 - n - 1} > 1.$$

На основании теоремы о сходимости монотонной последовательности, заключаем, что

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in [2, x_1] = [2, 4].$$

Но тогда существует и

$$e := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n,$$

что и требовалось показать.

Можно показать, что  $e$  — иррациональное число, десятичная запись которого

$$e = 2,718 \dots$$

## § 2.6. Подпоследовательности

**Определение 1.** Последовательность  $\{a_{n_k}\} = \{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$  называется *подпоследовательностью последовательности*  $\{a_n\} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ , если  $n_k \in \mathbb{N} \forall k \in \mathbb{N}$  и  $k_1 < k_2 \Rightarrow n_{k_1} < n_{k_2}$  (т.е.  $\{n_k\}$  — строго возрастающая последовательность натуральных чисел).

**Пример.** Последовательность 1, 3, 5, 7, ... является подпоследовательностью последовательности натуральных чисел, а последовательность 1, 5, 3, 9, 7, ... не является подпоследовательностью натуральных чисел.

**Лемма 2.6.1.** *Отбрасывание конечного числа первых членов последовательности не влияет ни на сходимость ни на величину предела (в случае сходимости).*

**Упражнение.** Доказать лемму.

**Определение 2.** *Частичным пределом последовательности* называется предел какой-нибудь ее подпоследовательности, сходящейся в  $\overline{\mathbb{R}}$ .

**Определение 3.** *Частичным пределом последовательности* называется элемент  $\mu \in \overline{\mathbb{R}}$ , любая окрестность  $U(\mu)$  которого содержит бесконечное число элементов последовательности.

**Д о к а з а т е л ь с т в о** эквивалентности определений 2 и 3.

Покажем сначала, что  $2 \Rightarrow 3$ . Пусть  $\mu$  является частичным пределом в смысле определения 2. Тогда, по определению предела, в любой  $U(\mu)$  содержатся почти все элементы некоторой подпоследовательности. Следовательно,  $\mu$  удовлетворяет определению 1.

Покажем теперь, что  $3 \Rightarrow 2$ . Пусть  $\mu$  является частичным пределом в смысле определения 3. Выберем какой-либо элемент последовательности  $x_{n_1} \in U_1(\mu)$ , затем выберем какой-либо элемент последовательности  $x_{n_2} \in U_{\frac{1}{2}}(\mu)$ , удовлетворяющий условию  $n_2 > n_1$ . Это возможно, так как  $U_{\frac{1}{2}}(\mu)$  содержит бесконечное число элементов. Выберем затем  $x_{n_3} \in U_{\frac{1}{3}}(\mu)$ ,  $n_3 > n_2$ . Продолжая процесс, получим подпоследовательность  $\{x_{n_k}\}$ , сходящуюся в  $\overline{\mathbb{R}}$  к  $\mu$ , так как при  $\forall \varepsilon > 0$   $U_\varepsilon(\mu)$  содержит все ее члены, начиная с члена с номером  $k_\varepsilon$ , где  $k_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon}$ .

**Пример.** Последовательность (2.1.1) имеет в точности два частичных предела: 0 и 1.

**Упражнение.** Пусть  $\{r_n\}$  — каким-либо образом занумерованная последовательность всех рациональных чисел отрезка  $[0, 1]$ . Описать множество ее частичных пределов.

**Лемма 2.6.2.** *Последовательность имеет единственный в  $\overline{\mathbb{R}}$  частичный предел тогда и только тогда, когда она сходится.*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Пусть сначала последовательность  $\{a_n\}$  сходится (в  $\overline{\mathbb{R}}$ ). Пусть  $\{a_{n_k}\}$  — произвольная

ее подпоследовательность. По определению предела последовательности, любая окрестность  $U(a)$  содержит значения почти всех элементов последовательности  $\{a_n\}$ , а следовательно, и почти все элементы подпоследовательности  $\{a_{n_k}\}$ . Следовательно,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$ .

Пусть теперь последовательность  $\{a_n\}$  имеет единственный частичный предел. Обозначим его через  $a$  и покажем, что  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ . Допустим противное, т.е. что  $a$  не является пределом последовательности. Тогда  $\exists \varepsilon_0 > 0$  такое, что вне  $U_{\varepsilon_0}(a)$  находятся значения бесконечного числа элементов последовательности. Построим подпоследовательность  $\{a_{n_k}\}$ , все элементы которой лежат вне  $U_{\varepsilon_0}(a)$ . Мы докажем вскоре теорему (обобщающую теорему Больцано–Вейерштрасса), в силу которой последовательность  $\{a_{n_k}\}$  имеет частичный предел, который является также и частичным пределом последовательности  $\{a_n\}$ . Он не совпадает с  $a$ , так как  $\forall a_{n_k} \notin U_{\varepsilon_0}(a)$ , что противоречит предположению о единственности частичного предела последовательности  $\{a_n\}$ . Следовательно,  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

**Определение.** *Верхним (нижним) пределом последовательности  $\{a_n\}$  называется наибольший (наименьший) в  $\overline{\mathbb{R}}$  из ее частичных пределов.*

Его обозначают символом  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$  ( $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ ).

**Упражнение.** Пусть  $x_n \geq 0$ ,  $y_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}$ , последовательность  $\{x_n\}$  сходится (т.е. имеет конечный предел), последовательность  $\{y_n\}$  имеет конечный верхний предел. Доказать, что тогда

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

## § 2.7. Теорема Больцано–Вейерштрасса

**Теорема 2.7.1 (Больцано–Вейерштрасса).** *Всякая ограниченная последовательность имеет хотя бы один частичный предел.*

Другая ее формулировка: из всякой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Теорема Больцано–Вейерштрасса является следствием более общей и более сильной теоремы:

**Теорема 2.7.2.** *Всякая последовательность имеет (в  $\overline{\mathbb{R}}$ ) верхний и нижний пределы.*

**Д о к а з а т е л ь с т в о** (для верхнего предела). Пусть  $\{a_n\}$  — произвольная последовательность.  $X = \{x: x \in \mathbb{R}, \text{ правее } x \text{ бесконечно много элементов последовательности}\}$ .

**1 случай.**  $X = \emptyset$ . Это значит, что  $\forall U(-\infty)$  содержит почти все элементы последовательности, т.е.  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ . Следовательно,  $-\infty$  — единственный частичный предел  $\{a_n\}$ , так что  $a = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

**2 случай.**  $X \neq \emptyset$ . Тогда  $\exists \sup X = b$ ,  $-\infty < b \leq +\infty$ . Покажем, что  $b = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ . Возьмем произвольное  $\varepsilon > 0$ , и пусть  $b'_\varepsilon \in U_\varepsilon(b)$ ,  $b'_\varepsilon < b$ . Тогда из определения верхней грани следует, что найдется  $x'_\varepsilon \in X$ :  $b'_\varepsilon < x'_\varepsilon \leq b$ . Поэтому правее  $b'_\varepsilon$  лежит бесконечное число элементов последовательности  $\{a_n\}$ . Если  $b'' > b$ , то  $b'' \notin X$ , так что правее  $b''$  — не более конечного числа элементов последовательности. Следовательно,  $U_\varepsilon(b)$  содержит бесконечное число элементов последовательности  $\{a_n\}$  и, в силу произвольности  $\varepsilon > 0$ ,  $b$  — частичный предел  $\{a_n\}$ .

Остается показать, что  $b$  — наибольший частичный предел  $\{a_n\}$ , т.е.  $b = \varliminf_{n \rightarrow \infty} a_n$ . Допуская противное, предположим, что существует частичный предел  $b^* > b$ . Тогда всякая окрестность  $U(b^*)$  содержит бесконечно много элементов последовательности. Но это противоречит тому, что при  $b < b'' < b^*$  правее  $b''$  (как показано выше) — не более конечного числа элементов последовательности. Следовательно,  $b = \varlimsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

**Упражнение.** Доказать теорему Больцано–Вейерштрасса с помощью стягивающейся системы вложенных отрезков.

**У к а з а н и е.** В качестве первого отрезка рассмотреть отрезок, содержащий все элементы последовательности. Каждый из следующих отрезков получить делением предыдущего отрезка пополам и выбора самой правой из половин, содержащей бесконечное число элементов последовательности.

## § 2.8. Критерий Коши

**Определение.** Последовательность  $\{a_n\}$  называется *фундаментальной*, если для нее выполнено условие Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon : \quad |a_n - a_m| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_\varepsilon. \quad (2.8.1)$$

**Теорема 2.8.1 (Критерий Коши).** Для сходимости последовательности необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.

**Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость.** Пусть последовательность  $\{a_n\}$  сходится и  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ . Возьмем произвольное  $\varepsilon > 0$ . Тогда

$$\exists n_\varepsilon : \quad |a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq n_\varepsilon.$$

Если теперь  $n, m \geq n_\varepsilon$ , то

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

*Достаточность.* Пусть последовательность  $\{a_n\}$  фундаментальна, т.е. удовлетворяет условию (2.8.1). Покажем, что она сходится.

Шаг 1. Покажем, что последовательность  $\{a_n\}$  ограничена. Возьмем  $\varepsilon = 1$ . Тогда из (2.8.1) следует, что

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} : |a_n - a_{n_1}| < 1 \quad \forall n \geq n_1,$$

так что

$$|a_n| < 1 + |a_{n_1}| \quad \forall n \geq n_1.$$

Следовательно,  $\{a_n\}$  — ограничена, так как отбрасывание конечного числа членов последовательности не влияет на ее ограниченность.

Шаг 2. По теорема Больцано–Вейерштрасса, из  $\{a_n\}$  можно выделить сходящуюся подпоследовательность  $\{a_{n_k}\}$ . Пусть  $a := \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k}$ .

Шаг 3. Покажем, что  $a$  является пределом  $\{a_n\}$ . Пусть  $\varepsilon > 0$ . Тогда

$$\exists n_\varepsilon, k_\varepsilon : |a_n - a_{n_k}| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq n_\varepsilon, \quad \forall k \geq k_\varepsilon.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при  $k \rightarrow \infty$  получаем, что

$$|a_n - a| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \quad \forall n \geq n_\varepsilon.$$

В силу произвольности  $\varepsilon > 0$  это означает, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ .

## §2.9. Изображение действительных чисел бесконечными десятичными дробями

**Определение.** Полуинтервал

$$I_n = [\underline{a_n}, \overline{a_n}) = \left[ \underline{a_n}, \underline{a_n} + \frac{1}{10^n} \right)$$

будем называть *десятичным полуинтервалом*, если  $\underline{a_n} \geq 0$ ,  $\underline{a_n} = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2, \dots, \alpha_n$  —  $n$ -значная десятичная дробь ( $\alpha_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $\alpha_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$  при  $i \in \mathbb{N}$ ).

Символом  $\{I_n\} = \{I_n\}_{n=0}^\infty = \{[\underline{a_n}, \overline{a_n}]\}$  будем обозначать систему вложенных десятичных полуинтервалов. Очевидно, что  $\underline{a_n} \uparrow$ ,  $\overline{a_n} \downarrow$ ,  $\overline{a_n} - \underline{a_n} = \frac{1}{10^n} \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Пусть задано  $a \geq 0$ . По аксиоме Архимеда,  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ :  $n_0 \geq a$ . Найдем  $\alpha_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ :  $\alpha_0 \leq a < \alpha_0 + 1$ . Разобьем полуинтервал  $I_0 := [\alpha_0, \alpha_0 + 1)$  на десять равных полуинтервалов и обозначим через  $I_1$  тот из них, который содержит  $a$ :

$$I_1 = \left[ \alpha_0, \alpha_1; \alpha_0, \alpha_1 + \frac{1}{10} \right) \ni a.$$

Разобьем  $I_1$  на 10 равных полуинтервалов и обозначим через  $I_2$  тот из них, который содержит  $a$ :

$$I_2 = \left[ \alpha_0, \alpha_1\alpha_2; \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 + \frac{1}{100} \right) \ni a.$$

Продолжая процесс, получим систему десятичных полуинтервалов  $\{I_n\}$  с непустым пересечением,  $I_n = [\underline{a_n}, \overline{a_n})$ ,  $\underline{a_n} = \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ ,  $\overline{a_n} = \underline{a_n} + \frac{1}{10^n}$ ,  $I_n \ni a$ . При этом  $\underline{a_n}$  ( $\overline{a_n}$ ) называется нижним (верхним)  $n$ -значным десятичным приближением числа  $a$ .

Мы установили соответствие

$$a \rightarrow \{I_n\} = \{[\underline{a_n}, \overline{a_n}]\}. \quad (2.9.1)$$

Множество всех систем вложенных десятичных полуинтервалов с непустым пересечением обозначим через  $\Omega$ .

Легко проверить, что соответствие (2.9.1) является взаимно однозначным соответствием

$$\{a \in \mathbb{R} : a \geq 0\} \longleftrightarrow \Omega \quad (2.9.2)$$



**Определение.** Символ  $\alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots$  с  $\alpha_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  и  $\alpha_i \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$  при  $i \in \mathbb{N}$  называется *бесконечной десятичной дробью*.

Рассмотрим следующее соответствие.

$$\{I_n\} \rightarrow \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots, \quad \{I_n\} \in \Omega, \quad (2.9.3)$$

если  $I_n = \left[ \underline{a_n}, \underline{a_n} + \frac{1}{10} \right)$ ,  $\underline{a_n} = \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$ .

В силу (2.9.1), (2.9.3) каждому действительному числу  $a \geq 0$  поставлена в соответствие бесконечная десятичная дробь

$$a \rightarrow \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \quad (a \geq 0) \quad (2.9.4)$$

по правилу

$$a \rightarrow \{I_n\} \rightarrow \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots$$

Заметим, что при этом каждой конечной десятичной дроби  $a$  поставлена в соответствие бесконечная десятичная дробь, получающаяся из данной конечной приписыванием справа нулей.

Изучим подробнее соответствие (2.9.3).

**Определение.** Последовательность  $\{a_n\}$  правых концов системы десятичных полуинтервалов назовем *застойной*, если

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \quad \overline{a_n} = \overline{a_{n_0+1}} = \overline{a_{n_0+2}} = \dots$$

**Лемма 2.9.1.** Система д.п.  $\{I_n\}$  имеет общую точку (т.е. принадлежит  $\Omega$ ) тогда и только тогда, когда  $\{a_n\}$  — незастойная последовательность.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Пусть  $a \in I_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ . Тогда

$$a < \overline{a_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{a_n} = a,$$

откуда видно, что последовательность  $\{\overline{a_n}\}$  не может быть застойной.

Пусть теперь последовательность  $\{\overline{a_n}\}$  — незастойная. Рассмотрим систему вложенных отрезков  $\{\bar{I}_n\} = \{[\underline{a_n}, \overline{a_n}]\}$ . По

теореме о вложенных отрезках,  $\exists a \in \bar{I}_n \forall n \in \mathbb{N}$ . При этом  $a \leq \bar{a}_n \forall n \in \mathbb{N}$ . Если  $\bar{a}_{n_0} = a$  при некотором  $n_0$ , то  $\{\bar{a}_n\}$  — застойная последовательность. Следовательно,  $a < \bar{a}_n \forall n \in \mathbb{N}$ , т.е.  $a \in I_n \forall n \in \mathbb{N}$ , что и требовалось доказать.

Лемма доказана.

**Определение.** Назовем бесконечную десятичную дробь *допустимой*, если она не содержит (9) в периоде.

**Лемма 2.9.2.** Соответствие (2.9.3) является взаимно однозначным соответствием между множеством  $\Omega$  и множеством всех допустимых бесконечных десятичных дробей.

$$\Omega \longleftrightarrow \{\text{допустимые бесконечные десятичные дроби}\} \quad (2.9.5)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Пусть  $\{I_n\} \in \Omega$ . По лемме 2.9.1, последовательность  $\{\bar{a}_n\}$  — незастойная. Допустим, что бесконечная десятичная дробь, соответствующая  $\{I_n\}$ , в силу (2.9.3) содержит девятку в периоде. Это означает, что при некотором  $n_0 \in \mathbb{N}$  для всех  $n \geq n_0$ ,  $I_{n+1}$  является самым правым из 10 полуинтервалов, на которые разбивается  $I_n$ . Но тогда последовательность  $\{\bar{a}_n\}$  — застойная, что противоречит предположению. Этим показано, что при соответствии (2.9.3)  $\Omega \rightarrow \{\text{допустимые бесконечные десятичные дроби}\}$ .

Покажем, что это соответствие взаимно однозначное. В самом деле, различным  $\{I_n\}$  и  $\{I'_n\}$  соответствуют, очевидно, различные допустимые бесконечные десятичные дроби.

Проверим теперь, что для всякой допустимой бесконечной десятичной дроби найдется последовательность  $\{I_n\}$ , которой именно эта допустимая бесконечная десятичная дробь оказалась поставленной в соответствие. Пусть  $\alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots$  — произвольная допустимая бесконечная десятичная дробь. По-

строим последовательность  $\{I_n\} = \{[a_n, \overline{a_n}]\}$ , для которой  $\underline{a_n} = \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n, \overline{a_n} = \underline{a_n} + \frac{1}{10^n} \forall n \in \mathbb{N}$ .

Последовательность  $\{\overline{a_n}\}$  при этом не является застойной, так как иначе все десятичные знаки  $\underline{a_n}$ , начиная с некоторого  $n_0$ , были бы равны 9, что противоречит допустимости нашей бесконечной десятичной дроби. Следовательно,  $\{I_n\} \in \Omega$  по лемме 2.9.1. Очевидно, что построенной последовательности  $\{I_n\}$  соответствует, в силу (2.9.3) именно наша допустимая бесконечная десятичная дробь.

Лемма доказана.

**Теорема 2.9.1.** *Отображение (2.9.4) является взаимно однозначным соответствием между множествами всех неотрицательных чисел и множеством всех допустимых бесконечных десятичных дробей.*

$$\{a : a \geq 0\} \leftrightarrow \{\text{допустимые бесконечные десятичные дроби}\}$$

Доказательство следует из (2.9.2) и (2.9.5).

Распространим отображение (2.9.4) на множество  $\mathbb{R}$  всех действительных чисел, доопределив его для отрицательных чисел  $-a < 0$  ( $a > 0$ ) соответствием

$$-a \rightarrow -\alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots,$$

если  $a \leftrightarrow \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots$  в (2.9.4).

При этом  $(-a)_n = -\alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_n - \frac{1}{10^n}$ ,  $\overline{(-a)}_n = -\alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_n$  называются нижним и верхним  $n$ -значным приближением числа  $-a$ .

Так доопределенное отображение является, очевидно, взаимно однозначным соответствием между множеством  $\mathbb{R}$  всех действительных чисел и множеством всех (положительных и отрицательных) допустимых бесконечных десятичных дробей.

Построенное взаимно однозначное соответствие дает возможность записывать (изображать) действительные числа в виде допустимых бесконечных десятичных дробей:

$$a = \pm\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \dots$$

Оно дает возможность также перенести операции сложения и умножения и отношение порядка на множество всех (положительных и отрицательных) допустимых бесконечных десятичных дробей. Эквивалентным способом их можно определить и в терминах нижних и верхних  $n$ -значных приближений и предельного перехода.

## Глава 3

# ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

### § 3.1. Понятие функции

**Определение.** Пусть каждому  $x \in X$  поставлен в соответствии один и только один элемент  $y \in Y$ . Будем говорить, что на множестве  $X$  задана однозначная функция со значениями в  $Y$ . Обозначив эту функцию буквой  $f$ , можно записать  $f : X \rightarrow Y$ . Через  $f(x)$  обозначают значение функции  $f$  на элементе  $x$ , т.е. тот элемент  $y \in Y$ , который поставлен в соответствие элементу  $x \in X$ ,  $y = f(x)$ .

Элемент  $x \in X$  называется *аргументом* или *независимой переменной*, элемент  $y = f(x) \in Y$  — *значением функции* или *зависимой переменной*.

При этом  $X$  называют *областью определения функции*  $f$ ,  $Y_f = \{y : y = f(x), x \in X\} \subset Y$  — *областью значений функции*  $f$ .

Вместо термина «функция» употребляют равнозначные ему термины «соответствие», «отображение», «преобразование». Для обозначения функции наряду с  $f$  применяют также  $f(x)$ ,  $y = f(x)$ . Таким образом,  $f(x)$  может обозначать как значение функции  $f$  на элементе  $x$ , так и саму функцию  $f$ .

Говорят, что  $f : X \rightarrow Y$  *определена на элементе  $x$* , если  $x \in X$ , и что  $f$  *не определена на элементе  $x$* , если  $x \notin X$ . При  $E \subset X$  будем говорить, что  $f$  *определена на  $E$* .

При  $E \subset X$   $f(E) := \{y : y = f(x), x \in E\}$  называется *образом  $E$* ,  $f(X) = Y_f$ .

При  $D \subset Y$   $f^{-1}(D) := \{x : x \in X, f(x) \in D\}$  называется *полным прообразом  $D$* .

При  $E \subset X$  функция  $f_E: E \rightarrow Y$ ,  $f_E(x) := f(x)$  при  $x \in E$ , называется *сужением* (*ограничением, следом*) *функции*  $f$  на  $E$ .

*Графиком функции*  $f: X \rightarrow Y$  называется множество пар  $\{(x, f(x)): x \in X\}$ .

Функция называется *числовой*, если ее значениями являются действительные числа.

**Определение.** Числовая функция  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  называется *ограниченной* (*сверху, снизу*), если множество ее значений  $f(X)$  ограничено (сверху, снизу).

**Определение.**  $\sup f := \sup f(X)$  ( $\inf f := \inf f(X)$ ) называется *верхней* (*нижней*) *гранью* числовой функции.

В ближайших разделах будут изучаться лишь числовые функции, заданные на числовом множестве  $X \subset \mathbb{R}$ .

## § 3.2. Элементарные функции и их классификация

### § 3.3. Понятие предела функции

Как и раньше,  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$ ,  $\hat{\mathbb{R}} = \overline{\mathbb{R}} \cup \{\infty\}$ ,  $U_\varepsilon(a)$  —  $\varepsilon$ -окрестность  $a$  при  $\varepsilon > 0$ ,  $U(a)$  — окрестность  $a$  (т.е.  $U_\varepsilon(a)$  при некотором  $\varepsilon > 0$ ).

$$\dot{U}_\varepsilon := U_\varepsilon(a) \setminus \{a\}, \quad \dot{U}(a) := U(a) \setminus \{a\} \quad (3.3.1)$$

называются *проколотыми окрестностями точки*  $a$  (точкой будем называть как число, так и любой из элементов  $-\infty$ ,  $+\infty$ ,  $\infty$ ).

**Определение I'.** Пусть функция  $f$  определена на  $\dot{U}_{\delta_0}(x_0)$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Число  $A \in \mathbb{R}$  называется *пределом функции*  $f$  при

$x \rightarrow x_0$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \quad |f(x) - A| < \varepsilon \quad \text{при} \quad 0 < |x - x_0| < \delta. \quad (3.3.2)$$

Более общим является

**Определение I''.** Пусть функция  $f$  определена на  $\dot{U}_{\delta_0}(a)$ ,  $a \in \overline{\mathbb{R}}$ . Точка  $A \in \hat{\mathbb{R}}$  называется *пределом функции  $f$  при  $x \rightarrow a$* , если  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ :  $f(x) \in U_\varepsilon(A)$  при  $x \in \dot{U}_\delta(a)$ .

В иной форме определение I'' можно записать в виде

**Определение I.** Пусть функция  $f$  определена на  $\dot{U}_{\delta_0}(a)$ ,  $a \in \overline{\mathbb{R}}$ . Точка  $A \in \hat{\mathbb{R}}$  называется *пределом  $f$  при  $x \rightarrow a$* , если  $\forall U(A) \exists U(a): f(\dot{U}(a)) \subset f(U(A))$ .

Для обозначения предела пишут  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  или  $f(x) \rightarrow A$  при  $x \rightarrow a$ .

Определения I', I'', I, сформулированы в терминах окрестностей. Приведем определение предела в терминах последовательностей.

**Определение II.** Пусть функция  $f$  определена на  $\dot{U}_{\delta_0}(a)$ ,  $a \in \overline{\mathbb{R}}$ . Точка  $A \in \hat{\mathbb{R}}$  называется *пределом  $f$  при  $x \rightarrow a$* , если  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$  для любой последовательности  $\{x_n\}$ :  $x_n \in \dot{U}_{\delta_0}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $x_n \rightarrow a$  при  $n \rightarrow \infty$ .

**Теорема 3.3.1.** *Определения I и II эквивалентны.*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Покажем сначала, что  $I \Rightarrow II$  (т.е., если  $A$  является пределом  $f$  при  $x \rightarrow a$  по определению I, то  $A$  является пределом  $f$  при  $x \rightarrow a$  по определению II).

Пусть  $f: \dot{U}_{\delta_0}(a) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$  в смысле определения I. Пусть последовательность  $\{x_n\}$ :  $x_n \in \dot{U}_{\delta_0}(a)$ ,  $x_n \rightarrow a$  при  $n \rightarrow \infty$ . Покажем, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ .

Возьмем произвольное  $\varepsilon > 0$ . Тогда, в силу определения I (I'')  $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$  такое, что  $f(x) \in U_\varepsilon(A) \quad \forall x \in \dot{U}_\delta(a)$ .

В силу сходимости  $x_n \rightarrow a$  ( $n \rightarrow \infty$ ) для нашего  $\delta = \delta(\varepsilon)$   $\exists n_{\delta(\varepsilon)} \in \mathbb{N}$ :  $x_n \in \mathring{U}_{\delta(\varepsilon)} \forall n \geq n_{\delta(\varepsilon)}$ . Но тогда  $f(x_n) \in U_\varepsilon(A)$ , т.е.  $f(x_n) \rightarrow A$  при  $n \rightarrow \infty$ , что и требовалось показать.

Покажем теперь, что  $\Pi \Rightarrow \text{I}$ . Пусть  $A = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$  в смысле определения  $\Pi$ . Допустим противное, т.е., что

$$\exists \varepsilon_0 > 0 : \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x \in \mathring{U}_\delta(a) : \quad f(x) \notin U_{\varepsilon_0}(A).$$

В качестве  $\delta$  будем брать  $\delta = \frac{1}{n}$  и соответствующее значение  $x$  обозначать через  $x_n$ , т.е. при  $\forall n \in \mathbb{N}$  для  $\delta = \frac{1}{n} > 0$

$$\exists x_n \in \mathring{U}_{\frac{1}{n}}(a) : f(x_n) \notin U_{\varepsilon_0}(A).$$

Но это означает, что для последовательности  $\{x_n\}$  имеем

$$x_n \neq a, \quad x_n \rightarrow a \quad (n \rightarrow \infty), \quad f(x_n) \not\rightarrow A \quad (n \rightarrow \infty),$$

т.е.  $A$  не является пределом  $f(x)$  при  $x \rightarrow a$ , что противоречит исходному условию. Этим утверждение доказано.

**Пример 3.3.1.** Покажем, что  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$  не существует.

Рассмотрим для этого две сходящиеся к нулю последовательности  $\{x_n\} = \left\{ \frac{1}{2\pi n} \right\}$ ,  $\{x'_n\} = \left\{ \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}} \right\}$ . Имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{x_n} = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{x'_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1.$$

С помощью определения  $\Pi$  предела заключаем, что никакая точка  $A$  не может быть пределом  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ , т.е. этот предел не существует.



### § 3.4. Свойства пределов функции

**Теорема 3.4.1.** Пусть функции  $f, g, h$  определены на  $\dot{U}_{\delta_0}(a)$ ,  $a \in \overline{\mathbb{R}}$ ,  $f \leq g \leq h$  на  $\dot{U}_{\delta_0}(a)$ ,  $f(x) \rightarrow A$ ,  $h(x) \rightarrow A$  при  $x \rightarrow a$ ,  $A \in \overline{\mathbb{R}}$ . Тогда  $g(x) \rightarrow A$  при  $x \rightarrow a$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Убедимся, что  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A$  с помощью определения II. Рассмотрим для этого произвольную последовательность

$$\{x_n\} : x_n \in \dot{U}_{\delta_0}(a) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n \rightarrow a \quad (n \rightarrow \infty).$$

Имеем

$$f(x_n) \leq g(x_n) \leq h(x_n).$$

Поскольку  $f(x_n) \rightarrow A$ ,  $h(x_n) \rightarrow A$  ( $n \rightarrow \infty$ ), в силу соответствующего свойства последовательностей получаем, что

$$g(x_n) \rightarrow A \quad (n \rightarrow \infty).$$

В силу произвольности последовательности  $\{x_n\}$  заключаем с помощью определения II, что  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A$ .

**Теорема 3.4.2.** Пусть функции  $f, g$  определены на  $\dot{U}_{\delta_0}(a)$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ ,  $A, B \in \mathbb{R}$ . Тогда:

$$1^\circ \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B;$$

$$2^\circ \lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = AB;$$

3<sup>o</sup> Если дополнительно  $g(x) \neq 0$  при  $x \in \dot{U}_{\delta_0}(a)$ ,  $B \neq 0$ , то

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}.$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о** всех свойств проводится по одной и той же схеме, поэтому приведем доказательство лишь для свойства 2<sup>o</sup>.

Пусть  $\{x_n\}$  такова, что

$$x_n \in \dot{U}_{\delta_0}(a) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n \rightarrow a \quad (n \rightarrow \infty).$$

Тогда  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = B$  в силу определения II. По свойству пределов последовательностей  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)g(x_n) = AB$ . В силу произвольности последовательности  $\{x_n\}$  и определения II получаем, что  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = AB$ .

### § 3.5. Критерий Коши

**Теорема 3.5.1 (Критерий Коши существования конечного предела функции).** Пусть функция  $f$  определена на  $\mathring{U}_{\delta_0}(x_0)$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

Для существования конечного предела  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \quad |f(x') - f(x'')| < \varepsilon \quad \forall x', x'' \in \mathring{U}_{\delta}(x_0).$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость.** Пусть  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \in \mathbb{R}$ . Тогда для  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ :  $|f(x') - A| < \varepsilon$ ,  $|f(x'') - A| < \varepsilon \quad \forall x', x'' \in \mathring{U}_{\delta}(x_0)$ . Отсюда  $|f(x') - f(x'')| \leq |f(x') - A| + |f(x'') - A| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \quad \forall x', x'' \in \mathring{U}_{\delta}(x_0)$ , что и требовалось показать.

**Достаточность.** Пусть выполнено условие Коши. Покажем, что  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ . Воспользуемся для этого определением II предела функции (т.е. определением в терминах последовательностей). Пусть  $x_n \in \mathring{U}_{\delta_0}(x_0)$ ,  $x_n \rightarrow x_0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Возьмем произвольное  $\varepsilon > 0$ . Пусть  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  взято из условия Коши. В силу определения предела последовательности найдется  $n_{\delta(\varepsilon)} \in \mathbb{N}$  такое, что  $x_n \in \mathring{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0) \quad \forall n \geq n_{\delta(\varepsilon)} = \overline{n_{\varepsilon}}$ . Отсюда и из условия Коши имеем

$$|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq \overline{n_{\varepsilon}}.$$

В силу критерия Коши для последовательностей, последовательность  $\{f(x_n)\}$  сходится. Пусть  $A = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ .

Для завершения доказательства остается показать, что для любой последовательности  $\{x'_n\}$ ,  $x'_n \in \mathring{U}_{\delta_0}(x_0)$ ,  $x'_n \rightarrow x_0$  ( $n \rightarrow \infty$ )  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n)$  (существующий по уже доказанному) также равен  $A$ . Предположим противное:  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n) = B$  для некоторой последовательности  $\{x'_n\}$ ,  $x'_n \in \mathring{U}_{\delta_0}(x_0)$ ,  $x'_n \rightarrow x_0$  ( $n \rightarrow \infty$ ). Рассмотрим последовательность  $f(x_1)$ ,  $f(x'_2)$ ,  $f(x_3)$ ,  $f(x'_4)$ ,  $\dots$  Она, очевидно, расходится (имеет два различных частичных предела  $A$  и  $B$ ). Это противоречит доказанной сходимости всякой последовательности значений функции для сходящейся к  $x_0$  значений аргументов.

Теорема доказана.

### § 3.6. Односторонние пределы

Пусть  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $\delta > 0$ . Множество  $U_\delta(x_0 - 0) = (x_0 - \delta, x_0]$  называют *левой полуокрестностью точки  $x_0$  радиуса  $\delta$* . Через  $U(x_0 - 0)$  обозначают левую полуокрестность точки  $x_0$  произвольного радиуса.

Множество  $U_\delta(x_0 + 0) = [x_0, x_0 + \delta)$  называется *правой полуокрестностью точки  $x_0$  радиуса  $\delta$* . Через  $U(x_0 + 0)$  обозначают правую полуокрестность точки  $x_0$  произвольного радиуса.

Проколотыми полуокрестностями называют соответственно

$$\mathring{U}_\delta(x_0 - 0) = U_\delta(x_0 - 0) \setminus \{x_0\} = (x_0 - \delta, x_0),$$

$$\mathring{U}_\delta(x - 0) = U_\delta(x - 0) \setminus \{x_0\},$$

$$\mathring{U}_\delta(x_0 + 0) = U_\delta(x_0 + 0) \setminus \{x_0\} = (x_0, x_0 + \delta),$$

$$\mathring{U}(x_0 + 0) = U(x_0 + 0) \setminus \{x_0\}.$$

**Определение.** Пусть  $x_0 \in \mathbb{R}$ , функция  $f$  определена на  $\mathring{U}_{\delta_0}(x_0 - 0)$ . Точка  $A \in \hat{\mathbb{R}}$  называется *пределом слева функции*

$f$  в точке  $x_0$  (пишут  $f(x_0 - 0) := \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = A$ ), если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \quad \forall x \in \mathring{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0 - 0), \quad f(x) \in U_\varepsilon(A).$$

Аналогично определяется предел справа функции  $f : \mathring{U}_{\delta_0}(x_0 + 0) \rightarrow \mathbb{R}$  в точке  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Он обозначается через  $f(x_0 + 0)$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$ .

**Упражнение.** Сформулировать определения пределов слева и справа в терминах последовательностей.

**З а м е ч а н и е.** Можно расширить общее определение предела функции  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ ,  $A \in \hat{\mathbb{R}}$ , считая в нем  $a$  либо числом, либо одним из символов  $-\infty$ ,  $+\infty$ ,  $\infty$ ,  $x_0 - 0$ ,  $x_0 + 0$ , где  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Тогда общее определение предела функции будет содержать и только что введенные понятия предела слева и предела справа.

**Лемма 3.6.1.** Пусть  $x_0 \in \mathbb{R}$ , функция  $f$  определена на  $\mathring{U}_{\delta_0}(x_0)$ . Тогда для существования  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  необходимо и достаточно существования каждого из пределов  $f(x_0 - 0)$  и  $f(x_0 + 0)$  и их равенства  $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$ .

**Упражнение.** Доказать лемму.

### § 3.7. Пределы монотонных функций

**Определение.** Функция  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  называется *возрастающей* (*убывающей*) на  $E \subset X$ , если из  $x_1, x_2 \in E$ ,  $x_1 < x_2$  следует  $f(x_1) \leq f(x_2)$  ( $f(x_1) \geq f(x_2)$ ).

Если вместо нестрогого неравенства можно написать строгое, функцию называют *строго возрастающей* (*строго убывающей*).

**Теорема 3.7.1.** Пусть  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ , функция  $f$  возрастает на  $(a, b)$ . Тогда

$$\exists \lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = \sup_{(a,b)} f(x).$$

**З а м е ч а н и е.** В случае  $b = +\infty$  под  $+\infty - 0$  понимается  $+\infty$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Пусть  $\sup_{(a,b)} f = B \leq +\infty$ .

Возьмем произвольное  $\varepsilon > 0$ . Из определения верхней грани функции следует  $\exists x_\varepsilon \in (a, b)$ :  $f(x_\varepsilon) \in U_\varepsilon(B)$ . Выберем  $\delta = \delta_\varepsilon > 0$  таким, что  $x_\varepsilon \notin U_\delta(b)$  (т.е.  $U_\delta(b)$  лежит правее  $x_\varepsilon$ ). Тогда, в силу возрастания функции  $f$ ,  $f(\dot{U}_\delta(b-0)) \subset U_\varepsilon(B)$ . Следовательно,  $\exists f(b-0) = B$ .

**Следствие 1.** Пусть функция  $f$  монотонна на  $(a, b) \ni x_0$ . Тогда существуют конечные пределы  $f(x_0 - 0)$ ,  $f(x_0 + 0)$ .

### § 3.8. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Сравнение функций

**Определение.** Пусть  $a \in \mathbb{R}$  или является одним из символов  $-\infty$ ,  $+\infty$ ,  $x_0 - 0$ ,  $x_0 + 0$  ( $x_0 \in \mathbb{R}$ ). Функция  $f: U(a) \rightarrow \mathbb{R}$  называется *бесконечно малой* (*бесконечно большой*) при  $x \rightarrow a$ , если  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$  ( $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ ).

**Упражнение.** Показать, что произведение конечного числа бесконечно малых функций является бесконечно малой функцией.

**Упражнение.** Произведение бесконечно малой функции на ограниченную является бесконечно малой функцией.

Далее будем считать, что функции  $f, g$  определены в некоторой проколотой окрестности  $\dot{U}(a)$ , где  $a \in \mathbb{R}$  либо является одним из символов:  $a = -\infty, +\infty, \infty, x_0 - 0, x_0 + 0$  ( $x_0 \in \mathbb{R}$ ).

**Определение.** Пусть существует постоянная  $C > 0$  такая, что

$$|f(x)| \leq C|g(x)| \quad \forall x \in \mathring{U}(x).$$

Тогда пишут:  $f = O(g)$  при  $x \rightarrow a$ .

**Определение.** Функции  $f$  и  $g$  называются *функциями одного порядка при  $x \rightarrow a$* , если

$$f = O(g), \quad g = O(f) \quad \text{при} \quad x \rightarrow a.$$

При этом пишут  $f(x) \asymp g(x)$ ,  $x \rightarrow a$ .

**Лемма 3.8.1.** Пусть  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = K \neq 0$ . Тогда  $f$  и  $g$  являются функциями одного порядка при  $x \rightarrow a$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.**  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = K > 0$ . Следовательно, при некотором  $\delta > 0$

$$\frac{1}{2}|K| = \frac{|g(x)|}{|f(x)|} \leq \frac{3}{2}|K|$$

для  $\forall x \in \mathring{U}_\delta(a)$ . Отсюда

$$|g(x)| \leq \frac{3}{2}|K||f(x)|, \quad |f(x)| \leq \frac{2}{|K|}|g(x)| \quad \forall x \in \mathring{U}_\delta(a),$$

т.е.  $f$  и  $g$  — функции одного порядка.

**Определение.** Функции  $f$  и  $g$  называются *эквивалентными (асимптотически равными) при  $x \rightarrow a$*  (записывается  $f \sim g$  при  $x \rightarrow a$ ), если  $f(x) = \lambda(x)g(x)$ ,  $x \in \mathring{U}(a)$ , причем  $\lim_{x \rightarrow a} \lambda(x) = 1$ .

Отношение эквивалентности обладает свойствами:

- 1°  $f \sim g$  при  $x \rightarrow a \Rightarrow g \sim f$  при  $x \rightarrow a$  (симметрия);
- 2°  $f \sim g$ ,  $g \sim h$  при  $x \rightarrow a \Rightarrow f \sim h$  при  $x \rightarrow a$  (транзитивность);

**Упражнение.** Доказать свойства 1°, 2°.

**Лемма 3.8.2.** Пусть  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = 1$ . Тогда  $f \sim g$  при  $x \rightarrow a$ .

**Примеры.**

- a)  $x^2 = O(x)$  при  $x \rightarrow 0$ ;
- b)  $x = O(x^2)$  при  $x \rightarrow +\infty$ ;
- c)  $\frac{2x^4 + 1}{x^2 - 1} \asymp x^2$  при  $x \rightarrow +\infty$ ;
- d)  $\frac{x}{x^2 - 1} \sim x$  при  $x \rightarrow 0$ ;
- e) позднее будет показано, что при  $x \rightarrow 0$   $x \sim \sin x \sim \operatorname{tg} x \sim \arcsin x \sim \arctg x \sim \ln(1 + x) \sim e^x - 1$ .

**Определение.** Функция  $g$  называется *бесконечно малой* по сравнению с функцией  $f$  при  $x \rightarrow a$  (записывается  $g = o(f)$  при  $x \rightarrow a$ ), если  $g(x) = \varepsilon(x)f(x)$ ,  $x \in \dot{U}(a)$ , причем  $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$ .

Если при этом функции  $f, g$  являются бесконечно малыми при  $x \rightarrow a$ , то говорят, что функция  $g$  является *бесконечно малой более высокого порядка*, чем функция  $f$ .

Запись  $\alpha(x) = o(1)$  при  $x \rightarrow a$  означает согласно определению, что  $\alpha(x)$  — бесконечно малая функция при  $x \rightarrow a$ .

**Примеры.**

- a)  $x^2 = o(x)$  при  $x \rightarrow 0$ ;
- b)  $x = o(x^2)$  при  $x \rightarrow +\infty$ .

**З а м е ч а н и е.** Последние три определения особенно содержательны, когда  $f$  и  $g$  — бесконечно малые или бесконечно большие функции.

**Теорема.** Пусть  $f \sim f_1$ ,  $g \sim g_1$ , при  $x \rightarrow a$ . Если существует  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$ , то существует и  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Достаточно заметить, что

$$\frac{f}{g} = \frac{\lambda_1 f_1}{\lambda_2 g_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

и что

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\lambda_1(x)}{\lambda_2(x)} = 1.$$

**Пример 3.8.1.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1.$$



## Глава 4

# НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ

### § 4.1. Непрерывность функции в точке

Будем считать, что функция  $f$  определена на  $U(x_0)$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $\Delta f = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ ,  $\Delta x = x - x_0$ .

**Определения.** Функция  $f$  называется непрерывной в точке  $x_0$ , если

- (1)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ ;
- (2)  $\lim_{x \rightarrow x_0} \Delta f = 0$  ( $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \equiv \lim_{x \rightarrow x_0}$ );
- (3) для  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0: |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \forall x: |x - x_0| < \delta$ ;
- (4) для  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0: f(U_\delta(x_0)) \subset U_\varepsilon(f(x_0))$ ;
- (5) для  $\forall U(f(x_0)) \exists U(x_0): f(U(x_0)) \subset U(f(x_0))$ ;
- (6) для  $\forall \{x_n\}: x_n \in U(x_0), x_n \rightarrow x_0 (n \rightarrow \infty)$  имеет место  $f(x_n) \rightarrow f(x_0) (n \rightarrow \infty)$ .

Эквивалентность определений (1)–(6) следует из эквивалентности соответствующих определений предела функции.

Обратим внимание на то, что в определении (6) не запрещается  $x_n$  совпадать с  $x_0$ . При добавлении в определение (6) условия  $x_n \neq x_0$ , оно меняется на эквивалентное.

**Теорема 4.1.1 (о сохранении знака).** Пусть  $f$  непрерывна в  $x_0$ ,  $f(x_0) \neq 0$ . Тогда  $\exists U(x_0): \operatorname{sign} f(x) = \operatorname{sign} f(x_0) \forall x \in U(x_0)$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Непрерывность в точке  $x_0$  означает, в частности, что  $f$  определена на некоторой окрестности точки  $x_0$ . Пусть, для определенности,  $f(x_0) = d > 0$ . Возьмем  $\varepsilon = \frac{d}{2} > 0$ . Тогда, по определению (63) непрерыв-

ности, существует  $\delta > 0$  такое, что  $|f(x) - f(x_0)| < \frac{d}{2}$  при  $|x - x_0| < \delta$ , откуда следует, что

$$f(x) > d - \frac{d}{2} = \frac{d}{2} > 0 \quad \text{при} \quad x \in U_\delta(x_0).$$

**Теорема 4.1.2 (свойства непрерывных функций).** Пусть функции  $f, g$  непрерывны в точке  $x_0$ . Тогда функции  $f + g, f - g, fg$ , а при  $g(x_0) \neq 0$  — и  $\frac{f}{g}$  непрерывны в точке  $x_0$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Напомним, что  $(f \pm g)(x) := f(x) \pm g(x)$ . Аналогично определяются произведение и частное двух функций. Докажем лишь, что  $\frac{f}{g}$  непрерывна в  $x_0$  (для  $f \pm g$  и  $fg$  доказательства аналогичны).

По предыдущей теореме,  $\exists U(x_0)$ :  $\text{sign } g(x) = \text{sign } g(x_0)$ , так что  $g(x) \neq 0$  при  $x \in U(x_0)$  и частное  $\frac{f}{g}$  определено на  $U(x_0)$ . Имеем теперь, используя свойства пределов и непрерывность  $f, g$ :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{f}{g} \right)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \left( \frac{f}{g} \right)(x_0),$$

что и требовалось показать.

## § 4.2. Предел и непрерывность сложной функции

Пусть функция  $f$  определена на  $X$ , а функция  $\varphi$  — на  $T$ , причем  $\varphi(T) \subset X$ . Тогда сложная функция (суперпозиция, композиция)  $f \circ \varphi$  определяется на  $T$  формулой

$$(f \circ \varphi)(t) = f(\varphi(t)), \quad t \in T.$$

**Теорема 4.2.1.** Пусть  $f$  непрерывна в точке  $x_0$ ,  $\varphi$  непрерывна в точке  $t_0$ ,  $\varphi(t_0) = x_0$ . Тогда  $f \circ \varphi$  непрерывна в точке  $t_0$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Пусть  $y_0 = f(x_0)$ ,  $U(x_0)$  — произвольная окрестность  $y_0$ . В силу непрерывности  $f$  в  $x_0$ ,

$$\exists U(x_0) : f(U(x_0)) \subset U(y_0)$$

(это означает, в частности, что  $f$  определена на  $U(x_0)$ ). В силу непрерывности  $\varphi$  в точке  $t_0$ ,  $\exists U(t_0): \varphi(U(t_0)) \subset U(x_0)$ .

Последнее означает, в частности, что  $\varphi$  определена на  $U(t_0)$  и значения ее в точках  $U(t_0)$  лежат в  $U(x_0)$ . Следовательно, на  $U(t_0)$  определена сложная функция  $f \circ g$ , причем

$$(f \circ g)(U(t_0)) \subset U(y_0), \quad \text{где } y_0 = (f \circ g)(t_0).$$

В силу произвольности  $U(y_0)$  это означает непрерывность  $f \circ g$  в точке  $t_0$  (см. определение (5) непрерывности).

Установим теперь две теоремы о пределе сложной функции.

**Теорема 4.2.2.** Пусть  $f$  непрерывна в точке  $x_0$ ,  $\varphi$  определена на  $\overset{\circ}{U}(t_0)$  и  $\exists \lim_{t \rightarrow t_0} \varphi(t) = x_0$ .

Тогда

$$\exists \lim_{t \rightarrow t_0} (f \circ g)(t) = f(\lim_{t \rightarrow t_0} \varphi(t)) = f(x_0).$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Рассуждая так же, как при доказательстве теоремы 4.2.1, приходим к тому, что для  $\forall U(y_0) \exists U(t_0): (f \circ g)(\overset{\circ}{U}(t_0)) \subset U(y_0)$ ,  $y_0 = f(x_0)$ .

В силу произвольности  $U(y_0)$  это означает, что утверждение теоремы доказано.

Другое доказательство теоремы состоит в следующем. Определим функцию  $\varphi$  в точке  $t_0$  (или переопределим ее, если

она изначально была определена в  $t_0$ ), положив  $\varphi(t_0) = x_0$ . Тогда  $\varphi$  становится непрерывной в точке  $t_0$ , и остается воспользоваться теоремой 4.2.1.

**Теорема 4.2.3.** Пусть  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$ . Пусть  $\varphi$  определена на  $\dot{U}(t_0)$ ,  $\varphi(\dot{U}(t_0)) \not\ni x_0$  и  $\exists \lim_{t \rightarrow t_0} \varphi(t) = x_0$ .

Тогда

$$\exists \lim_{t \rightarrow t_0} (f \circ \varphi)(t) = y_0.$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Доопределим (переопределим) функцию  $f$  в точке  $x_0$ , положив  $f(x_0) = y_0$ . Остается воспользоваться теоремой 4.2.2.

### § 4.3. Односторонняя непрерывность и точки разрыва

Напомним, что  $U(x_0 + 0)$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$ , означает полуинтервал  $[x_0, x_0 + \delta)$  при некотором  $\delta > 0$ .

**Определение.** Функция  $f$ , определенная на  $U(x_0 + 0)$  ( $U(x_0 - 0)$ ), называется *непрерывной справа (слева) в точке  $x_0$* , если

$$\exists f(x_0 + 0) = f(x_0) \quad (\exists f(x_0 - 0) = f(x_0)).$$

**Упражнение.** Доказать, что функция  $f$  непрерывна в точке  $x_0$  тогда и только тогда, когда она непрерывна в  $x_0$  справа и слева.

**Определение.** Функция  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $X \supset \dot{U}(x_0)$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$ , называется *разрывной в точке  $x_0$* , если она не определена в  $x_0$  или если определена в  $x_0$ , но не является непрерывной в  $x_0$ .

**Определение.** Точка  $x_0$  разрыва функции  $f$  называется *точкой разрыва I-го рода* (или *скачком*), если существуют конечные пределы  $f(x_0 - 0)$ ,  $f(x_0 + 0)$ . При этом разность

$f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$  называется *скачком функции  $f$  в точке  $x_0$* . Если при этом  $f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0)$ , то  $x_0$  называется *точкой устранимого разрыва*.

Точка разрыва, не являющаяся точкой разрыва I-го рода, называется *точкой разрыва II-го рода*.

## § 4.4. Свойства функций, непрерывных на отрезке

**Определение.** Функция, определенная на отрезке  $[a, b]$  и непрерывная в каждой его точке, называется *непрерывной на этом отрезке*. При этом под непрерывностью в точках  $a$ ,  $b$  понимается соответственно непрерывность справа и слева.

Аналогично определяется непрерывность на интервале, на полуинтервале.

**Определение.** Будем говорить, что функция  $f$ , определенная на  $E$ , *достигает своей верхней (нижней) грани*, если

$$\exists x_0 \in E : \quad f(x_0) = \sup_E f \quad (f(x_0) = \inf_E f).$$

**Теорема 4.4.1 (Вейерштрасса).** *Функция, непрерывная на отрезке, ограничена и достигает своих верхней и нижней граней.*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Пусть  $B := \sup_{[a,b]} f \leq +\infty$ .

По определению верхней грани

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in [a, b] : \quad f(x_n) \in U_{\frac{1}{n}}(B).$$

Следовательно,  $f(x_n) \rightarrow B$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Последовательность  $\{x_n\}$  ограничена, так как  $a \leq x_n \leq b$   $\forall n \in \mathbb{N}$ . По теореме Больцано–Вейерштрасса, выделим из нее сходящуюся подпоследовательность  $\{x_{n_k}\}$ ,  $x_{n_k} \rightarrow x_0$  при  $k \rightarrow \infty$ .

Переходя к пределу в неравенстве  $a \leq x_{n_k} \leq b$ , получаем, что  $x_0 \in [a, b]$ . В силу непрерывности функции  $f$  в точке  $x_0$ , имеем

$$f(x_{n_k}) \rightarrow f(x_0) \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty.$$

С другой стороны,  $\{f(x_{n_k})\}$  — подпоследовательность сходящейся к  $B$  последовательности. Поэтому  $f(x_{n_k}) \rightarrow B$  при  $k \rightarrow \infty$ .

Из последних двух соотношений получаем, что

$$\sup_{[a,b]} f = B = f(x_0).$$

Отсюда следует во-первых, что  $\sup_{[a,b]} f < +\infty$ , т.е., что функция  $f$  ограничена сверху, и, во-вторых, что функция  $f$  достигает своей верхней грани в точке  $x_0$ .

Аналогично можно доказать, что функция  $f$  ограничена снизу и достигает своей нижней грани.

Этим теорема доказана.

**Упражнение.** Останется ли верным утверждение теоремы Вейерштрасса, если в ее условиях отрезок  $[a, b]$  заменить на интервал  $(a, b)$ ? Сохранится ли доказательство?

**Следствие 1.** Пусть функция  $f$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ ,  $f(x) > 0 \quad \forall x \in [a, b]$ . Тогда  $\exists d > 0$ :  $f(x) \geq d \quad \forall x \in [a, b]$ .

**Теорема 4.4.2 (Больцано–Коши о промежуточном значении функции).** Пусть функция непрерывна на отрезке  $[a, b]$ ,  $f(a) = A$ ,  $f(b) = B$ . Пусть  $C$  находится между  $A$  и  $B$ .

Тогда  $\exists \xi \in [a, b]$ :  $f(\xi) = C$ .

**Доказательство.** Пусть, для определенности,  $A = f(a) \leq C \leq f(b) = B$ . Поделим отрезок  $[a, b]$  пополам и через  $[a_1, b_1]$  обозначим такую его половину, для которой  $f(a_1) \leq C \leq f(b_1)$ . Поделим отрезок пополам и через  $[a_2, b_2]$  обозначим такую его половину, для которой  $f(a_2) \leq C \leq f(b_2)$ . Продолжая процесс, получим стягивающуюся систему вложенных отрезков  $\{[a_n, b_n]\}$ , для которых

$$f(a_n) \leq C \leq f(b_n).$$

Пусть  $\xi \in [a_n, b_n] \forall n \in \mathbb{N}$ . Тогда при  $n \rightarrow \infty$   $a_n \rightarrow \xi$ ,  $b_n \rightarrow \xi$  и, в силу непрерывности функции  $f$  в точке  $\xi$ ,

$$f(a_n) \rightarrow f(\xi), \quad f(b_n) \rightarrow f(\xi) \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty.$$

Переходя к пределу в последнем неравенстве, получаем

$$f(\xi) \leq C \leq f(\xi) \Rightarrow f(\xi) = C,$$

что и требовалось доказать.

**Следствие 2.** Пусть функция  $f$  непрерывна на  $[a, b]$  и  $f(a)$  и  $f(b)$  имеют разные знаки. Тогда

$$\exists \xi \in (a, b) : f(\xi) = 0.$$

**Следствие 3.** Пусть функция  $f$  непрерывна на  $[a, b]$ ,  $m = \min_{[a, b]} f$ ,  $M = \max_{[a, b]} f$ . Тогда функция  $f$  принимает все значения из  $[m, M]$  и только эти значения.

## § 4.5. Обратные функции

### § 4.6. Показательная функция

Буквами  $r, \rho$  с индексами будем обозначать рациональные числа. Число  $a > 0$ .

Будем считать известными следующие свойства показательной функции  $a^r$  рационального аргумента  $r$ .

1.°  $r_1 < r_2 \Rightarrow a^{r_1} < a^{r_2}$  при  $a > 1$ ,  $a^{r_1} < a^{r_2}$  при  $0 < a < 1$ .

2.°  $a^{r_1} a^{r_2} = a^{r_1+r_2}$ .

3.°  $(a^{r_1})^{r_2} = (a^{r_2})^{r_1} = a^{r_1 r_2}$ .

4.°  $a^0 = 1$ .

5.°  $(ab)^r = a^r b^r$ .

Из этих свойств следует, что

$$a^{-r} a^r = a^0 = 1 \quad \Rightarrow \quad a^{-r} = \frac{1}{a^r} \quad \Rightarrow \quad a^r > 0 \quad \forall r.$$

**Лемма 4.6.1 (Бернулли).** Пусть  $a > 1$ ,  $r$  — рациональное число,  $|r| \leq 1$ . Тогда

$$|a^r - 1| \leq 2|r|(a - 1). \quad (4.6.1)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Пусть сначала  $r = \frac{1}{n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Положим  $\lambda := a^{\frac{1}{n}} - 1 > 0$ . Тогда  $a^{\frac{1}{n}} = 1 + \lambda$ ,  $a \geq 1 + n\lambda$ , откуда  $\lambda \leq \frac{a-1}{n}$ , т.е.

$$a^{\frac{1}{n}} - 1 \leq \frac{1}{n}(a - 1). \quad (4.6.2)$$

Пусть теперь  $0 < r \leq 1$ . Тогда при некотором  $n \in \mathbb{N}$   $\frac{1}{n+1} < r \leq \frac{1}{n}$ . С помощью (4.6.2) и монотонности  $a^r$  имеем

$$a^r - 1 < a^{\frac{1}{n}} - 1 \leq \frac{1}{n}(a - 1) \leq \frac{2}{n+1}(a - 1) < 2r(a - 1)$$

и неравенство (4.6.1) в этом случае установлено.

Пусть теперь  $-1 \leq r < 0$ . Тогда

$$|a^r - 1| = a^r |a^{-r} - 1| \leq a^r 2(-r)(a - 1).$$

Учитывая, что  $a^r < 1$ , получаем отсюда (4.6.1).



Лемма доказана.

**Определение.** Пусть  $a > 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = x$ .

Тогда

$$a^x := \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n}.$$

Это определение корректно в следующем смысле:

- 1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n}$  существует (и конечен);
- 2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n}$  не зависит от выбора последовательности  $\{r_n\}$  ( $r_n \rightarrow x$ );
- 3) в случае  $x = r$  значение  $a^r$  по этому определению совпадает с прежним.

Установим 1). Пусть  $a > 1$ . С помощью неравенства Бернулли имеем для последовательности  $\{r_n\}$ ,  $r_n \rightarrow x$  ( $n \rightarrow \infty$ ):

$$|a^{r_n} - a^{r_m}| = a^{r_m} |a^{r_n - r_m} - 1| \leq a^{r_m} 2|r_n - r_m|(a - 1) \quad (4.6.3)$$

(Здесь  $|r_n - r_m| \leq 1 \ \forall n, m \geq n_1$  в силу сходимости последовательности  $\{r_n\}$ ).

Заметим, что последовательность  $\{r_n\}$  ограничена (как всякая сходящаяся), поэтому при некотором  $M > 0$

$$a^{r_m} \leq M \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

В силу сходимости последовательности  $\{r_n\}$  для нее выполнено условие Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon : \quad |r_n - r_m| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_\varepsilon.$$

Отсюда и из (4.6.3) имеем:

$$|a^{r_n} - a^{r_m}| \leq M 2(a - 1)\varepsilon \quad \forall n, m \geq n_\varepsilon.$$

Это означает, что для последовательности  $\{a^{r_n}\}$  выполнено условие Коши. В силу критерия Коши она сходится, т.е.

$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n}$  существует и конечен.

Пусть теперь  $0 < a < 1$ . Тогда  $a^{r_n} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{r_n}}$  и существование  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n}$  следует из уже установленного существования  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a}\right)^{r_n}$ .

Случай  $a = 1$  тривиален.

Установим 2). Пусть  $a > 1$ ,  $r_n \rightarrow x$ ,  $r'_n \rightarrow x$  при  $n \rightarrow \infty$ . Тогда  $r_n - r'_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  и с помощью неравенства Бернулли имеем

$$|a^{r_n} - a^{r'_n}| = a^{r'_n} |a^{r_n - r'_n} - 1| \leq M 2 |r_n - r'_n| (a - 1) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n} - \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r'_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (a^{r_n} - a^{r'_n}) = 0,$$

что и требовалось показать.

Случай  $0 < a < 1$  сводится к рассмотренному с помощью равенства  $a^{r_n} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{r_n}}$ .

Установим 3). Для этого достаточно рассмотреть последовательность  $\{r_n\}$ , где  $r_n = r \ \forall n \in \mathbb{N}$ .

**Определение.** При  $a > 0$  функция  $x \rightarrow a^x$ ,  $x \in (-\infty, +\infty)$  называется *показательной с основанием  $a$* .

**Теорема 4.6.1.** Показательная функция имеет следующие свойства:

- 1° при  $a > 1$  строго возрастает, при  $0 < a < 1$  строго убывает;
- 2°  $a^x a^y = a^{x+y}$ ;
- 3°  $(bc)^x = b^x c^x$ ;
- 4°  $(a^x)^y = a^{xy}$ ;
- 5° непрерывна на  $(-\infty, +\infty)$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** 1°. Пусть  $a > 1$ ,  $x < y$ . Пусть  $r, \rho$  — рациональные числа, причем  $x < r < \rho < y$ .

Пусть  $r_n \rightarrow x$ ,  $\rho_n \rightarrow y$  ( $n \rightarrow \infty$ ), причем  $r_n \leq r$ ,  $\rho_n \geq \rho$   $\forall n \in \mathbb{N}$ . Тогда, используя монотонность показательной функции с рациональными показателями и предельный переход в неравенстве, получаем

$$a^x = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n} \leq a^r < a^\rho \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a^{\rho_n} = a^y,$$

откуда следует, что  $a^x < a^y$ .

Случай  $0 < a < 1$  рассматривается аналогично.

2°. Пусть  $r_n \rightarrow x$ ,  $\rho_n \rightarrow y$  ( $n \rightarrow \infty$ ). Тогда

$$a^x a^y = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n} \lim_{n \rightarrow \infty} a^{\rho_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (a^{r_n} a^{\rho_n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n + \rho_n} = a^{x+y}.$$

В качестве следствия получаем отсюда, что  $a^x a^{-x} = a^0 = 1$ ,  $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ .

3°. Доказать в качестве упражнения.

В качестве следствия получаем, что

$$a^x > b^x \quad \text{при} \quad a > b, \quad x > 0,$$

для чего достаточно в 3° взять  $c > 1$ ,  $bc = a$ .

4°. Пусть  $a > 1$ ,  $x > 0$ ,  $y > 0$ ,  $r'_n \uparrow x$ ,  $r''_n \downarrow x$ ,  $\rho'_n \uparrow y$ ,  $\rho''_n \downarrow y$ .

Тогда

$$\begin{aligned} a^{xy} &\leftarrow a^{r'_n \rho'_n} = (a^{r'_n})^{\rho'_n} \leq (a^x)^{\rho'_n} \leq (a^x)^y \leq (a^x)^{\rho''_n} \leq (a^{r''_n})^{\rho''_n} = \\ &= a^{r''_n \rho''_n} \rightarrow a^{xy}, \end{aligned}$$

откуда следует, что  $(a^x)^y = a^{xy}$ .

Случаи других знаков  $x, y$  рассматриваются аналогично.

Случай  $0 < a < 1$  сводится к случаю  $a > 1$  с помощью соотношения  $a^x = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^x}$ .

5°. Заметим сначала, что лемма Бернулли (4.6.1) допускает следующее обобщение:

$$|a^x - 1| \leq 2|x|(a - 1) \quad \text{при} \quad a > 1, \quad |x| \leq 1.$$

Его можно получить, записав неравенство (4.6.1) для  $r_n$  (вместо  $r$ ), где  $r_n \rightarrow x$  ( $n \rightarrow \infty$ ), и перейдя в этом неравенстве к пределу.

Установим непрерывность функции  $a^x$  в произвольной точке  $x_0 \in (-\infty, +\infty)$ . Пусть сначала  $a > 1$ . Тогда

$$|a^{x_0+\Delta x} - a^{x_0}| = a^{x_0}|a^{\Delta x} - 1| \leq a^{x_0}2|\Delta x|(a-1) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \Delta x \rightarrow 0,$$

что и требовалось показать.

Случай  $0 < a < 1$  сводится к случаю  $a > 1$  с помощью соотношения  $a^x = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^x}$ .

## § 4.7. Логарифмическая и степенная функции

**Определение.** Функция, обратная к функции  $y = a^x$  ( $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ), называется *логарифмической функцией* и обозначается  $y = \log_a x$ . В случае  $a = e$  она обозначается  $\ln x := \log_e x$ .

**Теорема 4.7.1.** Логарифмическая функция  $\log_a x$ :  $(0, +\infty) \rightarrow (-\infty, +\infty)$  строго монотонна и непрерывна на  $(0, +\infty)$ , область ее значений есть  $(-\infty, +\infty)$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Пусть  $a > 1$ . Тогда  $A = \inf_{(-\infty, +\infty)} a^x = 0$ ,  $B = \sup_{(-\infty, +\infty)} a^x = +\infty$ .

В самом деле,  $a^n = (1+\alpha)^n > 1+n\alpha \rightarrow +\infty$ ,  $a^{-n} < \frac{1}{1+n\alpha} \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ).

Остальное следует из теоремы об обратной функции.

Случай  $0 < a < 1$  рассматривается аналогично.

Из того, что показательная и логарифмическая функция являются взаимно обратными, вытекают тождества

$$a^{\log_a x} = x, \quad \log_a a^x = x.$$

Докажем свойства логарифмической функции.

1°.  $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ ,  $x, y > 0$ . Сравним  $a^{\log_a xy} = xy$  и  $a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} a^{\log_a y} = xy$ . Из их совпадения следует 1°.

2°.  $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x$ ,  $x > 0$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Сравним  $a^{\log_a x^\alpha} = x^\alpha$  и  $a^{\alpha \log_a x} = (a^{\log_a x})^\alpha = x^\alpha$ . Из их совпадения следует 2°.

3°.  $\log_a b \cdot \log_b a = 1$ ,  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $b \neq 1$ . Сравним  $a^{\log_a b \cdot \log_b a} = (a^{\log_a b})^{\log_b a} = b^{\log_b a} = a$  и  $a^1 = a$ . Из их совпадения следует 3°.

**Определение.** Пусть  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Функция  $x \rightarrow x^\alpha$ :  $(0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$  называется *степенной функцией* с показателем степени  $\alpha$ .

Степенную функцию можно представить в виде

$$x^\alpha = (e^{\ln x})^\alpha = e^{\alpha \ln x}.$$

По теореме о непрерывности суперпозиции непрерывных функций, степенная функция непрерывна на области определения  $(0, +\infty)$ .

При  $\alpha > 0$  степенную функцию доопределяют в точке 0 значением 0. Тогда она становится непрерывной на  $[0, +\infty)$ .

## § 4.8. Тригонометрические и обратные тригонометрические функции

### § 4.9. Некоторые замечательные пределы

$$1^\circ. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad (4.9.1)$$

Рассматривая в тригонометрическом круге сектор с углом  $x$ ,  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ , и два треугольника с тем же углом (см. рис. 1) и сравнивая их площади, получаем:

$$\frac{1}{2} \sin x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \operatorname{tg} x,$$

откуда

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

В силу четности функций  $\frac{\sin x}{x}$  и  $\cos x$ , те же неравенства верны и при  $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$ . Переходя в них к пределу при  $x \rightarrow 0$  и учитывая, что  $\cos x \rightarrow \cos 0 = 1$  в силу непрерывности, получаем (4.9.1)

2°.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$ . В силу непрерывности функции  $\cos x$ , имеем

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot 1 = 1.$$

$$3^\circ. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1.$$

Заметим, что  $\frac{\arcsin x}{x} = \frac{y}{\sin y} \Big|_{y=\arcsin x}$ , где вертикальная

черта означает, что в дробь  $\frac{y}{\sin y}$  вместо  $y$  следует подставить  $\arcsin x$ . Таким образом,  $\frac{\arcsin x}{x}$  представлена в виде суперпозиции двух функций. Используя непрерывность  $\arcsin x$  в точке  $x = 0$ , (4.9.1) и теорему о пределе суперпозиции двух функций, завершаем доказательство.

Видоизмененный вариант доказательства состоит в доопределении единиц функции  $\frac{y}{\sin y}$  в точке  $y = 0$  и использова-

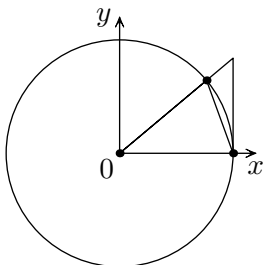


Рис. 1.

нии теоремы о непрерывности суперпозиции двух непрерывных функций.

$$4^\circ. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1. \text{ Представив } \frac{\operatorname{arctg} x}{x} \text{ в виде } \frac{y}{\operatorname{tg} y} \Big|_{y=\operatorname{arctg} x},$$

повторяем рассуждения из доказательства  $3^\circ$ .

$$5^\circ. \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e. \text{ Покажем сначала, что}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e. \quad (4.9.2)$$

Напомним, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = e$  и что при доказательстве этого было установлено, что

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \downarrow e.$$

Пусть  $0 < x < 1$ ,  $n_x \in \mathbb{N}$ ,  $\frac{1}{n_x+1} < x \leq \frac{1}{n_x}$ . Тогда

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n_x+1}\right)^{-2} \left(1 + \frac{1}{n_x+1}\right)^{n_x+2} &= \left(1 + \frac{1}{n_x+1}\right)^{n_x} \leq \\ &\leq (1+x)^{\frac{1}{x}} \leq \left(1 + \frac{1}{n_x}\right)^{n_x+1}. \end{aligned} \quad (4.9.3)$$

Правая часть неравенства является, как легко проверить, монотонной функцией  $x$ . Поэтому

$$\exists \lim_{x \rightarrow 0+0} \left(1 + \frac{1}{n_x}\right)^{n_x+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = e.$$

Обоснование первого из этих равенств состоит в том, что, если функция  $f$  имеет предел  $\lim_{x \rightarrow 0+0} f(x)$ , то он совпадает с пределом  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$  для произвольной последовательности  $\{x_n\}$ :  $x_n \rightarrow 0+0$ . В нашем случае  $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ . Итак, показано, что правая часть (4.9.3) стремится к  $e$  при  $x \rightarrow 0+0$ .

Аналогично показывается, что левая часть (4.9.3) также стремится к  $e$ .

Переходя к пределу в неравенствах (4.9.3), получаем (4.9.2).

Покажем, что

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e. \quad (4.9.4)$$

Пусть  $-1 < x < 0$ . Положив  $y := -x$ ,  $z := \frac{y}{1-y} = \frac{-x}{1+x} > 0$ , имеем

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = (1-y)^{-\frac{1}{y}} = \left( \frac{1}{1-y} \right)^{\frac{1}{y}} = \left( 1 + \frac{y}{1-y} \right)^{\frac{1}{y}} = (1+z)^{\frac{1}{z}+1}.$$

Таким образом,

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = (1+z)^{\frac{1}{z}+1} \Big|_{z=\frac{-x}{1+x}}, \quad 0 < x < 1,$$

т.е. функция  $(1+x)^{\frac{1}{x}}$  представлена в виде суперпозиции двух функций  $(f \circ g)(x)$ , где

$$f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(-1, 0) \rightarrow (0, +\infty),$$

причем  $\lim_{x \rightarrow 0-0} \varphi(x) = 0$ ,  $\lim_{z \rightarrow 0+0} f(z) = e$ .

Применяя теорему о пределе суперпозиции, получаем, что

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e. \quad (4.9.5)$$

Из (4.9.4), (4.9.5) следует 5°.

**З а м е ч а н и е 1.** Теорема о пределе суперпозиции  $f \circ g$  была установлена ранее для случая, когда функции  $f, \varphi$  определены в проколотых окрестностях предельных точек.

**Упражнение.** Перенести эту теорему на нужный нам случай односторонних пределов.



**З а м е ч а н и е 2.** Вместо теоремы о пределе суперпозиции можно воспользоваться доказанной теоремой о непрерывности суперпозиции непрерывных функций для  $\tilde{f} \circ \tilde{\varphi}$ , где

$$\tilde{f} = \begin{cases} (1+z)^{\frac{1}{z}+1} & \text{при } z > 0, \\ e & \text{при } z \leq 0, \end{cases} \quad \tilde{\varphi} = \begin{cases} x & \text{при } x \geq 0, \\ \frac{-x}{1+x} & \text{при } -1 < x < 0. \end{cases}$$

$$6^\circ. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e \quad (a > 0, a \neq 1).$$

Представив  $\frac{1}{x} \log_a(1+x) = \log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}$  в виде суперпозиции логарифмической функции и функции  $\varphi(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ , применяем теорему о пределе суперпозиции с учетом примера 5°.

$$7^\circ. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad (\text{частный случай } 6^\circ).$$

$$8^\circ. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \quad (a > 0, a \neq 1).$$

Пусть  $y = a^x - 1$ . Тогда  $x = \frac{\ln(1+y)}{\ln a}$ ,  $\frac{a^{x-1}}{x} =$   
 $= \frac{y \ln a}{\ln(1+y)} \Big|_{y=a^x-1}.$

Остается воспользоваться теоремой о пределе суперпозиции и примером 7°.

$$9^\circ. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad (\text{частный случай } 8^\circ).$$

Из рассмотренных примеров следует, что при  $x \rightarrow 0$   $x \sim \sin x \sim \operatorname{tg} x \sim \arcsin x \sim \operatorname{arctg} x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1$ .