

Применение стохастических полиномов  
в математической статистике

# Полиномиальные оценки параметров близких к гауссовским случайных величин

Часть I

---

**Ю.П.Кунченко**

Стохастические полиномы,  
их свойства и применение  
для нахождения  
оценок параметров

ПС

ББК 22.172

К 91

УДК 519.21; 621.391



К 92

Поліноміальні оцінки параметрів близьких до гауссівських випадкових величин. Частина I. Ю.П. Кунченко. Стохастичні поліноми, їх властивості і застосування для знаходження оцінок параметрів. – Черкаси: ЧІТІ, 2001. – 133 с. – Рос.

ISBN 966-7533-12-3 (Ч. I)

ISBN 966-7533-11-5

Вперше в літературі з математичної статистики наведено відомості про стохастичні поліноми та їх властивості і обґрунтовано новий метод знаходження оцінок параметрів випадкових величин, названий методом максимізації полінома.

Введено клас випадкових величин, названий класом близьких до гауссівських випадкових величин, який може служити математичною моделлю негауссівських завад, що більш адекватно описує реальні завади.

Визначено області визначення кумулянтних коефіцієнтних близьких до гауссівських випадкових величин.

Монографія розрахована на науковців, інженерів, аспірантів і студентів, які вчаться і працюють в області застосувань статистичних методів у різних галузях науки і техніки, особливо в галузі статистичної радіотехніки, радіолокації та зв'язку.

Впервые в литературе по математической статистике приводятся сведения и свойства стохастических полиномов и на их основе обосновывается новый метод нахождения оценок параметров случайных величин, названный методом максимизации полинома.

Введен класс случайных величин, названный классом близких к гауссовским случайных величин, который может служить математической моделью негауссовских помех, более адекватно описывающей реальные помехи.

Определены области определения кумулянтных коэффициентных близких к гауссовским случайных величин.

Для научных работников, инженеров, аспирантов и студентов, обучающихся и работающих в области приложений статистических методов в различных областях науки и техники, особенно в области статистической радиотехники, радиолокации и связи.

Рецензент доктор техн. наук, профессор Поправка А.Ф.

ISBN 966-7533-12-3 (Ч. I)

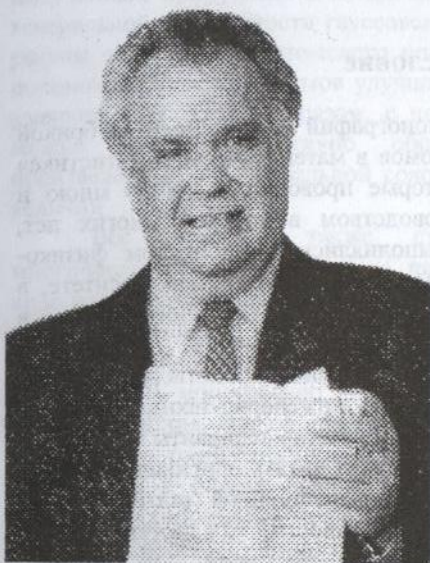
ISBN 966-7533-11-5

© Ю.П.Кунченко, 2001

© Макет ЧІТІ, 2001



*Памяти моих родителей,  
Петра Гордеевича и  
Надежды Васильевны Кунченко,  
посвящается*



Юрий Петрович Кунченко родился в г. Ростове-на-Дону, Россия, в 1939 г. Он закончил радиофизический факультет Томского государственного университета в 1962 г., защитил диссертацию на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук в 1973 г. в Совете при Томском университете и диссертацию на соискание степени доктора физико-математических наук в 1988 г. в Совете при Харьковском государственном университете. Все диссертации защищены по специальности «Радиофизика, включая квантовую радиофизику».

После окончания университета длительное время работал в Сибирском физико-техническом институте при Томском университете в должности начальника вычислительного центра и заведующего научно-исследовательской лабораторией вычислительных систем. С 1979 г. работал в Кировоградском институте сельскохозяйственного машиностроения в должности доцента, профессора и заведующего кафедрой высшей математики. С 1990 г. и по настоящее время работает в Черкасском инженерно-технологическом институте в должности заведующего кафедрой радиотехники.

Он является автором нового научного направления в области нелинейной статистической обработки негауссовских сигналов. Им предложены новые методы оценки параметров случайных процессов, основанные на использовании стохастических полиномов. Он автор и соавтор четырёх монографий, среди которых наиболее известны: «Нелинейная оценка параметров негауссовских радиофизических сигналов» и «Оценка параметров случайных величин методом максимизации полинома».

Его научными интересами являются статистическая обработка сигналов, оценка параметров, проверка статистических гипотез, фильтрация случайных процессов и применение их достижений в радиотехнике, связи, радиолокации и гидролокации.

## Предисловие

В основу издания ряда монографий под общей рубрикой «Применение стохастических полиномов в математической статистике» положены научные разработки, которые проводились лично мною и моими учениками под моим руководством в течение многих лет, начиная с 1969 г. Эти работы выполнялись в Сибирском физико-техническом институте при Томском государственном университете, в Кировоградском институте сельскохозяйственного машиностроения и в Черкасском инженерно-технологическом институте, где мне приходилось работать в разное время. Особенно плодотворно научная работа проводилась в Черкасском инженерно-технологическом институте, когда в исследовании приняли участие аспиранты и студенты старших курсов. Начиная с 1993 г., я начал читать оригинальный курс лекций под названием «Основы теории нелинейной статистической радиотехники» для студентов специальности «Радиотехника» в Черкасском инженерно-технологическом институте, в котором освещались полученные новые достижения. Материал лекций постоянно пополнялся, обновлялся и накапливался. При этом исследования охватывали широкий круг проблем, включая разработку новых методов оценки параметров, проверки статистических гипотез, применение этих методов для синтеза конкретных алгоритмов нахождения оценок параметров и обнаружения радиосигналов.

В настоящее время стало очевидным, что полученные результаты составляют новое научное направление в математической статистике, с помощью которого могут быть получены принципиально новые результаты в теории обработки сигналов различной физической природы, принимаемых на фоне негауссовских помех. Новое научное направление основано на использовании стохастических полиномов. О новизне направления говорит тот факт, что само понятие «стохастический полином» не нашло отражения в Математической энциклопедии (см. Математическая энциклопедия, т.5 - М.: Советская энциклопедия, 1985).

Существенным достижением данного направления является то, что с помощью стохастических полиномов можно синтезировать различные алгоритмы обработки выборочных данных из негауссовских случайных величин (и, следовательно, синтезировать различные



измерительные приборы), точностные характеристики которых могут значительно превышать точностные характеристики алгоритмов, полученных при условии, когда выборочные данные произведены из генеральной совокупности гауссовской случайной величины. Причем, с ростом степени стохастического полинома точностные характеристики полиномиальных алгоритмов улучшаются (например, дисперсия оценки уменьшается). Таким образом, с помощью стохастических полиномов можно более эффективно обрабатывать выборочные данные, произведенные из генеральной совокупности негауссовских случайных величин.

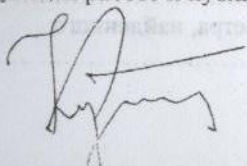
Все это, а также стремление довести содержание многочисленных результатов до широкой научной общественности в виде ряда монографий послужило толчком и стимулом к их обобщению и систематизации.

Кроме предлагаемой данной монографии планируется опубликовать монографию по применению стохастических полиномов для нахождения оценок параметров по выборке из независимых, но неодинаково распределенных случайных величин и приложению этих результатов к оценке параметров полигармонических и импульсных сигналов, принимаемых на фоне близких к гауссовским помех.

Следующая монография будет посвящена применению стохастических полиномов для нахождения оценок параметров векторной случайной величины по выборке неодинаково распределенных случайных величин и применению полученных результатов к синтезу алгоритмов нахождения оценок параметров различных сигналов, принимаемых на фоне близких к гауссовским помех, с помощью антенных решеток.

Несколько работ будет посвящено применению стохастических полиномов в теории проверки статистических гипотез и применению этой теории к синтезу обнаружителей радиосигналов, принимаемых на фоне близких к гауссовским помех.

Как автор данного научного направления, я понимаю, что при первом систематическом изложении нового направления, возможно, не все результаты достаточно полно, строго и всесторонне обоснованы и поэтому могут быть недостаточно убедительными для строгих исследователей. Вероятно, в данной монографии имеются недостатки, опiski и другие погрешности, за которые я, как автор, несу персональную ответственность. Все замечания и пожелания коллег будут восприняты с пониманием, внимательно изучены и учтены в последующей работе и публикациях.



г. Черкассы, октябрь 2000

# Оглавление

Предисловие .....	4
Введение к части I .....	9
<b>Глава первая</b>	
<b>КЛАССИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ НАХОЖДЕНИЯ ОЦЕНОК ПАРАМЕТРОВ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН .....</b>	<b>11</b>
1.1. Способы описания случайных величин .....	11
1.2. Понятие выборки и точечной оценки параметров .....	18
1.3. Основные свойства точечных оценок параметров .....	23
1.4. Классические методы нахождения оценок параметров .....	26
<b>Глава вторая</b>	
<b>СТОХАСТИЧЕСКИЕ ПОЛИНОМЫ, ИХ ОПИСАНИЕ И ОСНОВНОЕ СВОЙСТВО .....</b>	<b>35</b>
2.1. Понятие стохастического полинома .....	35
2.2. Тело и объем тела стохастического полинома .....	39
2.3. Основное свойство стохастических полиномов степени $s$ .....	42
2.4. Примеры проявления основного свойства при использовании степенных стохастических полиномов .....	46
2.5. Разложение случайной величины в стохастический ряд .....	51
2.6. Выборочные стохастические полиномы .....	54
2.7. Обобщение закона больших чисел на средние обобщенные стохастические полиномы .....	58
2.8. Распространение центральной предельной теоремы на средние обобщенные стохастические полиномы .....	61
<b>Глава третья</b>	
<b>МЕТОД МАКСИМИЗАЦИИ ПОЛИНОМА .....</b>	<b>65</b>
3.1. Второе свойство обобщенных стохастических полиномов .....	65
3.2. Статистические свойства производных обобщенных стохастических полиномов в точке экстремума .....	68
3.3. Проявление второго свойства для стохастических полиномов, заданных в классе степенных функций .....	70
3.4. Метод максимизации полинома для оценки скалярного параметра .....	77
3.5. Свойства оценок скалярного параметра, найденного методом максимизации полинома .....	80



3.6. Нахождение оценок параметров, когда стохастический полином задан в классе степенных полиномов .....	87
3.7. Оценка векторного параметра скалярной случайной величины методом максимизации полинома .....	88
3.8. Вариационная матрица оценок, найденных методом максимизации полинома .....	91
3.9. Краткая историческая справка .....	96

## Глава четвертая

ОПИСАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН БЛИЗКИХ К ГАУССОВСКИМ СЛУЧАЙНЫМ ВЕЛИЧИНАМ .....	97
4.1. Описание тела и объема тела случайной величины с помощью кумулянтных коэффициентов .....	97
4.2. Перфорированные случайные величины .....	101
4.3. Тело и объем тела перфорированных случайных величин .....	104
4.4. Описание множеств случайных величин, близких к гауссовским .....	108
4.5. Представление начальных моментов и коррелянтов близких к гауссовским случайных величин через кумулянты .....	110
4.6. Краткая историческая справка .....	115

## Глава пятая

ОБЪЕМЫ ТЕЛ И ОБЛАСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КУМУЛЯНТНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ БЛИЗКИХ К ГАУССОВСКИМ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН .....	116
5.1. Объемы тел и области определения асимметричных случайных величин 1-го типа .....	116
5.2. Объемы тел и области определения асимметричных случайных величин 2-го типа .....	118
5.3. Объемы тел и области определения эксцессных случайных величин 1-го типа .....	123
5.4. Объемы тел и области определения эксцессных случайных величин 2-го типа .....	124
5.5. Объемы тел и области определения асимметрично-эксцессных случайных величин .....	128
ЛИТЕРАТУРА .....	132

Существует известное замечание Липмана (цитируемое Пуанкаре\*), гласящее, что «каждый уверен в справедливости закона ошибок», экспериментаторы – потому, что они думают, что это математическая теорема, математики – потому, что они думают, что это экспериментальный факт». Стоит отметить, что обе стороны совершенно правы, если только это их убеждение не слишком безусловно: математическое доказательство говорит нам, что *при некоторых ограничительных условиях* мы вправе ожидать нормального распределения, а статистический опыт показывает, что в действительности распределения являются часто *приближенно нормальными*.

Гаральд Крамер  
«Математические методы статистики»

\* Poincaré H. Calcul des probabilités. – Paris, 1912.

\*\* Закон ошибок – это нормальный (гауссовский) закон распределения случайных величин.



## Введение к части I

Основное содержание первой части монографии касается определения понятия стохастического полинома и выяснения его важнейших свойств. Попросту говоря, стохастический полином — это в обычном математическом понимании обобщенный полином конечной степени, в котором в качестве переменной используется некоторая исходная случайная величина. Таким образом, стохастический полином также является случайной величиной, которая называется полиномиальной случайной величиной и статистические свойства которой существенно зависят от выбора значений коэффициентов полинома. Подбирая различные значения коэффициентов, можно получать различные полиномиальные случайные величины (стохастические полиномы), статистические свойства которых могут значительно отличаться от статистических свойств исходной случайной величины.

В работе приведены только два свойства стохастических полиномов. Первое свойство, которое считается основным свойством стохастических полиномов, состоит в том, что существуют такие коэффициенты полинома, при которых дисперсия стохастического полинома может быть меньше дисперсии исходной случайной величины. В работе приведен алгоритм нахождения таких коэффициентов, для которых в общем случае дисперсия стохастического полинома может быть меньше дисперсии исходной случайной величины и уменьшается с ростом степени полинома. Для того, чтобы оценить важность этого свойства, рассмотрим независимую выборку объемом  $n$  из исходной случайной величины. Хорошо известно, что при определенных условиях дисперсия арифметического среднего этих выборочных значений будет обратно пропорциональна объему выборки и, следовательно, при  $n \rightarrow \infty$  дисперсия стремится к нулю (закон больших чисел). Это свойство является в настоящее время основой математической статистики и широко используется при различных статистических вычислениях. Если теперь взять выборку из полиномиальной случайной величины, т.е. случайной величины, представляющей стохастический полином с предложенными коэффициентами, то дисперсия арифметического среднего этих выборочных значений также будет обратно пропорциональна объему

выборки, но, кроме этого, дисперсия будет зависеть от степени стохастического полинома. Причем, чем больше степень полинома, тем меньше дисперсия. Таким образом, дисперсия арифметического среднего выборочных значений из полиномиальной случайной величины может уменьшаться как за счет увеличения объема выборки, так и за счет увеличения степени стохастического полинома. Следовательно, при определенных условиях возникает двойная сходимости дисперсии к нулю, а именно, при стремлении объема выборки к бесконечности и при стремлении степени полинома к бесконечности. Это очень важное свойство, особенно когда объем выборки конечен. В этом случае уменьшение дисперсии можно осуществлять за счет увеличения степени стохастического полинома.

Второе свойство относится к стохастическим полиномам, у которых коэффициенты являются функционалами от некоторого параметра. Показано, что существуют такие коэффициенты, при которых математическое ожидание стохастического полинома, как функция этого параметра, имеет максимум в точке истинного значения этого параметра. В работе приведен алгоритм нахождения таких коэффициентов, при которых для значения параметра, обеспечивающего глобальный максимум полинома, проявляется основное свойство стохастических полиномов, состоящее в том, что дисперсия значения этого параметра с ростом степени полинома уменьшается.

Это свойство положено в основу нового метода нахождения оценок параметров случайных величин, названного методом максимизации полинома.

Предложенный метод может быть использован для нахождения оценок произвольных параметров. Однако, для целей второй части монографии в работе обосновано три класса негауссовских случайных величин, которые по своим статистическим свойствам близки к гауссовской случайной величине.

Предложенные классы близких к гауссовским случайных величин соответственно названы классами асимметричных, эксцессных и асимметрично-эксцессных случайных величин. Их обоснование базируется на использовании кумулянтных коэффициентов до шестого порядка включительно.

Хорошо известно, что кумулянтные коэффициенты не могут принимать произвольные значения, поэтому в работе для каждого класса близких к гауссовским случайных величин найдены области определения соответствующих кумулянтных коэффициентов.

В заключение отметим, что в данной работе впервые в научной литературе приведено обоснование стохастических полиномов и исследованы некоторые, далеко не полные, их свойства.



## КЛАССИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ НАХОЖДЕНИЯ ОЦЕНОК ПАРАМЕТРОВ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

В главе кратко рассмотрены способы описания случайных величин и возможные переходы от одного описания к другому. Рассмотрены основные требования, предъявляемые к оценкам, и свойства получаемых оценок. Приводятся классические методы нахождения оценок параметров при различном априорном описании случайных величин, такие как метод моментов, метод наименьших квадратов и метод максимального правдоподобия.

### 1.1. Способы описания случайных величин

1. В данной работе будут использоваться непрерывные случайные величины. Наиболее полным описанием скалярной случайной величины  $\xi$ , заданной в  $R_1$ , является функция распределения  $F_\xi(x)$  [1], которая равна вероятности события, что случайная величина  $\xi$  примет значение меньше действительного числа  $x$ , т.е.

$$F_\xi(x) = p(\xi < x), \quad x \in (c, d).$$

Случайная величина имеет плотность распределения, если существует такая интегрируемая функция  $p_\xi(x)$ , что для всех  $x$  выполняется равенство

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^x p_\xi(u) du.$$

Функция  $p_\xi(x)$  называется плотностью распределения случайной величины  $\xi$ . Так как функция  $F_\xi(x)$  является непрерывной функцией, то

$$F'_\xi(x) = p_\xi(x).$$

Плотность распределения, как и функция распределения, является полным описанием случайной величины  $\xi$ .

Если случайная величина является векторной, т.е.  $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ , то ее полным описанием является многомерная функция распределения

$$F_\xi(x) = F_\xi(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \dots, \xi_n < x_n),$$

которой соответствует многомерная (совместная) плотность распределения  $p_{\xi}(x) = p_{\xi}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

В случае, когда составляющие  $\xi_i$  векторной случайной величины  $\xi$  являются независимыми, но неодинаково распределенными случайными величинами, то, согласно определению, многомерная плотность распределения равна произведению соответствующих одномерных плотностей распределения, т.е.

$$p_{\xi}(x) = \prod_{i=1}^n p_i(x_i),$$

а если они одинаково распределены, то

$$p_{\xi}(x) = \prod_{i=1}^n p_{\xi}(x_i).$$

Таким образом, если составляющие векторной случайной величины являются независимыми и одинаково распределенными случайными величинами, то их полным описанием является плотность распределения одномерной случайной величины  $\xi$ .

Обычно и плотность распределения, и функция распределения зависят от параметра  $\mathfrak{F} = \{\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_q\}$ , принимающего значения в некоторой области  $\Theta = \{a_1 < \vartheta_1 < b_1, a_2 < \vartheta_2 < b_2, \dots, a_q < \vartheta_q < b_q\}$ ,  $q = 1, 2, \dots$ . Параметр  $\mathfrak{F}$  называется скалярным, если  $q = 1$ , и векторным, если  $q \geq 2$ . Если параметр  $\mathfrak{F}$  векторный, то  $\vartheta_i$  называется  $i$ -ой составляющей векторного параметра.

Зависимость плотности распределения от параметра будем обозначать следующим образом:  $p_{\xi}(x/\mathfrak{F})$ ,  $x \in (c, d)$ ,  $\mathfrak{F} \in \Theta$ . Границы интервала  $(c, d)$  могут быть как конечными, так и бесконечными.

Плотность распределения удовлетворяет следующим двум условиям:

- 1)  $p_{\xi}(x/\mathfrak{F}) \geq 0$  для  $\forall x \in (c, d)$  и  $\forall \mathfrak{F} \in \Theta$ ,
- 2)  $\int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi}(x/\mathfrak{F}) dx = 1$  для  $\forall \mathfrak{F} \in \Theta$ .

(1.1)

2. В статистике иногда возникают ситуации, когда сама случайная величина  $\xi$  не наблюдается, а наблюдается величина  $\mu$ , которая является некоторой действительной функцией  $\varphi(\cdot)$  от случайной величины  $\xi$ . Будем считать, что функция  $\varphi(\cdot)$  является конечной и однозначно определенной для всех действительных  $\xi$ . Уравнение

$$\mu = \varphi(\xi) \quad (1.2)$$



определяет функциональное соответствие между случайными величинами  $\xi$  и  $\eta$ .

Величина  $\mu$ , определенная соотношением (1.2), называется функцией от случайной величины  $\xi$  или функцией случайного аргумента.

Так как  $\xi$  является случайной величиной, то и  $\mu$  также будет случайной величиной с плотностью распределения  $p_\mu(y/\bar{\theta})$ , которая определяется распределением случайной величины  $\xi$ . При этом плотность распределения  $p_\mu(y/\bar{\theta})$  случайной величины  $\mu$  в общем случае отличается от плотности распределения случайной величины  $\xi$ . Однако, каждая из этих плотностей зависит от одного и того же параметра  $\bar{\theta}$ .

Хорошо известно, что математическое ожидание случайной величины  $\mu$  можно вычислить либо с помощью плотности распределения  $p_\mu(y/\bar{\theta})$ , либо с помощью плотности распределения  $p_\xi(x/\bar{\theta})$ , используя соотношение

$$\Psi(\bar{\theta}) = E\mu = \int_{-\infty}^{\infty} y p_\mu(y/\bar{\theta}) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) p_\xi(x/\bar{\theta}) dx.$$

Очевидно, математическое ожидание случайной величины  $\mu$  в общем случае зависит от параметра  $\bar{\theta}$ .

3. Если имеется множество случайных величин  $\mu_i$ ,  $i=1,2,\dots$ , являющихся некоторыми различными действительными функциями  $\phi_i(\cdot)$  от одной и той же случайной величины  $\xi$ , т.е.

$$\mu_i = \phi_i(\xi), \quad i=1,2,\dots, \quad (1.3)$$

то существование плотности распределения случайной величины  $\xi$  позволяет вычислить математическое ожидание от случайных величин вида (1.3)

$$\Psi_i(\bar{\theta}) = E\mu_i = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_i(x) p_\xi(x/\bar{\theta}) dx, \quad i=1,2,\dots \quad (1.4)$$

В общем случае математические ожидания  $\Psi_i(\bar{\theta})$  являются функциями параметра  $\bar{\theta}$ . (Здесь и в дальнейшем предполагается, что функции  $\phi_i(\cdot)$  таковы, что математические ожидания от них существуют, т.е. интегралы в правой части (1.4) сходятся для всех функций  $\phi_i(\xi)$ ).

Пусть функции  $\phi_i(\xi)$  являются степенными функциями, т.е. они имеют вид

$$\phi_i(\xi) = \xi^i,$$

тогда математические ожидания этих функций будут равны

$$\alpha_i(\bar{\vartheta}) = E\xi^i = \int_{-\infty}^{\infty} x^i p_{\xi}(x/\bar{\vartheta}) dx.$$

Функции  $\alpha_i(\bar{\vartheta})$ ,  $i=1,2,\dots$  параметра  $\bar{\vartheta}$  называются моментами случайной величины  $\xi$  порядка  $i$ .

Для некоторых функций  $\varphi_i(\xi)$  бесконечная последовательность математических ожиданий  $\Psi_i(\bar{\vartheta})$  может исчерпывающим образом представлять случайную величину  $\xi$  и являться тождественным представлением ее вероятностного распределения. Однако, если при известной плотности распределения  $p_{\xi}(x/\bar{\vartheta})$  математические ожидания  $\Psi_i(\bar{\vartheta})$  определяются однозначно, то значение бесконечной последовательности функции  $\Psi_i(\bar{\vartheta})$  в общем случае не позволяет однозначно определить неизвестную плотность распределения. Так, при моментном описании случайной величины  $\xi$  можно привести примеры различных плотностей распределения с одинаковыми моментами всех целочисленных порядков (проблема моментов). При условии, что моменты однозначно определяют плотность распределения  $p_{\xi}(x/\bar{\vartheta})$ , бесконечная последовательность моментов является полным описанием случайной величины  $\xi$ , тождественным описанию с помощью плотности распределения [2].

Подчеркнем, что не каждое распределение имеет моменты произвольного порядка, но для любого распределения (даже у которого не существуют моменты) можно выбрать такие функции  $\varphi_i(\xi)$ , для которых будут существовать математические ожидания (1.4), т.е. интегралы в (1.4) будут сходиться.

4. Наряду с функцией и плотностью распределения полным описанием случайной величины является характеристическая функция [1; 2]

$$f_{\xi}(u/\bar{\vartheta}) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi}(x/\bar{\vartheta}) e^{jux} dx,$$

которая зависит от параметра  $\bar{\vartheta}$ . Обратное преобразование от  $f_{\xi}(u/\bar{\vartheta})$  имеет вид

$$p_{\xi}(x/\bar{\vartheta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi}(u/\bar{\vartheta}) e^{-jux} du. \quad (1.5)$$

Интеграл в правой части (1.5) не всегда выражается через элементарные функции. Приведенные преобразования позволяют



говорить о характеристической функции как о тождественном представлении плотности распределения.

Так как характеристическая функция является полным описанием случайной величины, то, зная ее, можно найти моменты произвольного порядка (если они существуют):

$$\alpha_r(\bar{g}) = j^{-r} \left[ \frac{d^r}{du^r} f_{\xi}(u/\bar{g}) \right]_{u=0}, \quad r = 1, 2, \dots$$

В свою очередь, зная бесконечную последовательность моментов, можно найти характеристическую функцию

$$f_{\xi}(u/\bar{g}) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k(\bar{g})}{k!} (ju)^k.$$

Вычисление моментов по известной характеристической функции широко используется в различных приложениях. Однако, при известной характеристической функции можно легко найти и математические ожидания (1.4) от случайных величин (1.3). Действительно, подставив в (1.4) вместо  $p_{\xi}(x/\bar{g})$  выражение (1.5) и поменяв порядок интегрирования, получим

$$\Psi_i(\bar{g}) = E\varphi_i(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}_i^*(u) f_{\xi}(u/\bar{g}) du,$$

где  $\tilde{\varphi}_i(u)$  – преобразование Фурье от функции  $\varphi_i(u)$ , а звездочкой обозначена комплексно-сопряженная функция.

5. Иногда случайные величины проще описывать с помощью кумулянтов или семиинвариантов  $\chi_i(\bar{g})$  порядка  $i$ ,  $i = \overline{1, \infty}$  [1; 2], которые являются коэффициентами разложения логарифма характеристической функции в степенной ряд:

$$\ln f_{\xi}(u/\bar{g}) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\chi_r(\bar{g})}{r!} (ju)^r.$$

Между кумулянтами и моментами существует взаимно однозначное соответствие. Поэтому, если последний ряд сходится, то бесконечная последовательность кумулянтов также является полным описанием случайных величин. Информацию о связи между моментами и кумулянтами можно найти, например, в работах [1-3].

Отметим, что конечная последовательность моментов или кумулянтов является частичным описанием случайной величины. Достоинством частичного описания является то, что оно описывает не одну определенную случайную величину, а бесконечное множество случайных величин. У каждой случайной величины этого множества

первые кумулянты (моменты) до определенного  $k$ -го порядка одни и те же, а кумулянты (моменты) порядка выше  $k$ -го могут быть различными.

Приведем выражения для начальных моментов до шестого порядка через кумулянты:

$$\alpha_1(\bar{\vartheta}) = \chi_1(\bar{\vartheta});$$

$$\alpha_2(\bar{\vartheta}) = \chi_2(\bar{\vartheta}) + \chi_1^2(\bar{\vartheta});$$

$$\alpha_3(\bar{\vartheta}) = \chi_3(\bar{\vartheta}) + 3\chi_1(\bar{\vartheta})\chi_2(\bar{\vartheta}) + \chi_1^3(\bar{\vartheta});$$

$$\alpha_4(\bar{\vartheta}) = \chi_4(\bar{\vartheta}) + 3\chi_2^2(\bar{\vartheta}) + 4\chi_1(\bar{\vartheta})\chi_3(\bar{\vartheta}) + 6\chi_1^2(\bar{\vartheta})\chi_2(\bar{\vartheta}) + \chi_1^4(\bar{\vartheta});$$

$$\alpha_5(\bar{\vartheta}) = \chi_5(\bar{\vartheta}) + 10\chi_2(\bar{\vartheta})\chi_3(\bar{\vartheta}) + 5\chi_1(\bar{\vartheta})\chi_4(\bar{\vartheta}) + 15\chi_1(\bar{\vartheta})\chi_2^2(\bar{\vartheta}) + 10\chi_1^2(\bar{\vartheta})\chi_3(\bar{\vartheta}) + 20\chi_1^3(\bar{\vartheta})\chi_2(\bar{\vartheta}) + \chi_1^5(\bar{\vartheta});$$

$$\alpha_6(\bar{\vartheta}) = \chi_6(\bar{\vartheta}) + 15\chi_2(\bar{\vartheta})\chi_4(\bar{\vartheta}) + 10\chi_3^2(\bar{\vartheta}) + 15\chi_2^2(\bar{\vartheta})\chi_3(\bar{\vartheta}) + 6\chi_1(\bar{\vartheta}) \times \\ \times [\chi_5(\bar{\vartheta}) + 10\chi_2(\bar{\vartheta})\chi_3(\bar{\vartheta})] + 15\chi_1^2(\bar{\vartheta})[\chi_4(\bar{\vartheta}) + 3\chi_2^2(\bar{\vartheta})] + \\ + 20\chi_1^3(\bar{\vartheta})\chi_3(\bar{\vartheta}) + 15\chi_1^4(\bar{\vartheta})\chi_2(\bar{\vartheta}) + \chi_1^6(\bar{\vartheta}).$$

Кумулянты первого и второго порядков имеют ясный смысл — это математическое ожидание и дисперсия случайной величины  $\xi$ . Кумулянт третьего порядка  $\chi_3(\bar{\vartheta})$  называется асимметрией распределения, а кумулянт  $\chi_4(\bar{\vartheta})$  — эксцессом. Отметим, что в общем случае кумулянты являются функцией от параметра распределения  $\bar{\vartheta}$ .

Часто удобно вводить безразмерные кумулянты, которые называются кумулянтными коэффициентами

$$\gamma_r(\bar{\vartheta}) = \chi_r(\bar{\vartheta})\chi_2^{-r/2}(\bar{\vartheta}).$$

Для некоторых распределений кумулянтные коэффициенты  $\gamma_r$  равны определенным числам. Однако, в общем случае кумулянтные коэффициенты зависят от параметров распределения  $\bar{\vartheta}$ . Зная плотность распределения, можно найти кумулянты и кумулянтные коэффициенты как функции параметров распределения  $\bar{\vartheta}$ . На практике часто возникает ситуация, когда плотность распределения неизвестна. В этом случае в качестве параметров случайной величины целесообразно брать первые два кумулянта  $\chi_1$ ,  $\chi_2$  и кумулянтные коэффициенты высших порядков  $\gamma_3$ ,  $\gamma_4$ , ..., т.е. в этом случае вектор параметров  $\bar{\vartheta}$  случайной величины  $\xi$  будет равен

$$\bar{\vartheta} = \{\chi_1, \chi_2, \gamma_3, \gamma_4, \dots, \gamma_r\}, \quad r = 3, 4, \dots$$

В дальнейшем, для краткости, кумулянт первого порядка будем обозначать символом  $\alpha$ , т.е.  $\chi_1 = \alpha$ .



Параметры  $\{\alpha, \chi_2, \gamma_3, \gamma_4, \dots, \gamma_r\}$ , от которых статистически зависит случайная величина  $\xi$ , в дальнейшем будем называть моментными параметрами. Подчеркнём, что моментные параметры не совпадают с параметрами распределения.

Связь между начальными моментами и моментным параметром  $\bar{g}$  имеет вид:

$$\alpha_1(\bar{g}) = \alpha;$$

$$\alpha_2(\bar{g}) = \chi_2 + \alpha^2;$$

$$\alpha_3(\bar{g}) = \chi_2^{1.5} \gamma_3 + 3\chi_2 \alpha + \alpha^3;$$

$$\alpha_4(\bar{g}) = \chi_2^2 (\gamma_4 + 3) + 4\chi_2^{1.5} \gamma_3 \alpha + 6\alpha^2 \chi_2 + \alpha^4;$$

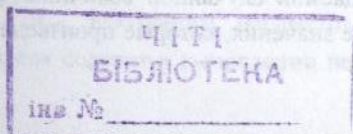
$$\alpha_5(\bar{g}) = \chi_2^{2.5} (\gamma_5 + 10\gamma_3) + 5\chi_2^2 \gamma_4 \alpha + 15\alpha^2 \chi_2^{1.5} \gamma_3 + 15\alpha^3 \chi_2 + \alpha^5;$$

$$\alpha_6(\bar{g}) = \chi_2^3 (\gamma_6 + 15\gamma_4 + 10\gamma_2 + 15) + 6\chi_2^{2.5} \alpha (\gamma_5 + 10\gamma_3) + 15\alpha^2 \chi_2^2 (\gamma_4 + 3) + 20\alpha^3 \chi_2^{1.5} \gamma_3 + 15\alpha^4 \chi_2 + \alpha^6. \quad (1.6)$$

Из (1.6) видно, что в общем случае, если не накладывать условий на класс случайных величин, параметр  $\bar{g}$  является расширяющимся параметром, т.е. с ростом порядка момента увеличивается размерность вектора  $\bar{g}$ .

Отметим, что только для единственной случайной величины — гауссовской случайной величины — в векторе  $\bar{g}$  отличными от нуля будут только первые два кумулянта  $\chi_1$  и  $\chi_2$ . Все остальные кумулянтные коэффициенты высших порядков равны нулю. Для всех остальных случайных величин полным описанием является бесконечная последовательность кумулянтов.

6. Как будет видно из дальнейшего материала, введение в качестве параметров случайной величины параметров  $\alpha$ ,  $\chi_2$  и кумулянтных коэффициентов высших порядков во многих отношениях является гораздо более удобным и конструктивным при оценке параметров. Прежде всего, это объясняется тем, что при решении многих практически важных задач кумулянтные коэффициенты высших порядков принимают настолько малые значения, что ими можно пренебречь. Поэтому возможно ввести некоторые классы случайных величин, для которых в векторе  $\bar{g}$  будет конечное число кумулянтных коэффициентов для моментов произвольного порядка.



## 1.2. Понятие выборки и точечной оценки параметров

1. В дальнейшем часто будем использовать выражение «наблюдается случайная величина  $\xi$ ». При определении этого понятия будем исходить из того, что имеется какой-либо объект наблюдения, на выходе которого получаются некоторые числовые данные, которые принимают случайные значения. Тогда выражение «наблюдается случайная величина  $\xi$ » обозначает, что в результате наблюдения гипотетического объекта имеется множество действительных случайных числовых величин.

Определение 1.1. Множество действительных случайных числовых величин, которые получаются на выходе объекта наблюдения, называется выборкой.

Это множество случайных числовых величин в дальнейшем будем обозначать в виде вектора  $\bar{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ . Подчеркнем, что элементами этого множества являются числа. Каждый элемент этого множества  $x_i$  называется  $i$ -ым выборочным значением. Число элементов в выборке называется объемом выборки.

Для вышеописанного процесса также будет использоваться выражение «из наблюдаемой случайной величины  $\xi$  извлекается выборка  $\bar{x}$  объемом  $n$ ».

Как отмечалось раньше, каждая случайная величина статистически зависит от некоторого параметра  $\vartheta$ . Если предполагается, что при наблюдении случайной величины  $\xi$  параметр  $\vartheta$  принимает определенное значение  $\vartheta_0$ , которое постоянно в течение всего процесса наблюдения (или всего процесса выбора), то говорят, что выборочные значения произведены из генеральной совокупности случайной величины  $\xi$  при постоянном значении параметра.

Определение 1.2. Постоянное значение параметра, при котором была произведена выборка, называется истинным значением параметра и обозначается  $\vartheta_0 = \{\vartheta_{10}, \vartheta_{20}, \dots, \vartheta_{q0}\}$ .

Таким образом, в выборке как бы неявно (точнее, статистически) заключены истинные значения параметра распределения.

Определение 1.3. Выборочные значения, полученные из случайной величины  $\xi$  с одной и той же плотностью распределения  $p(x/.)$  и при одних и тех же значениях параметра  $\vartheta_0$ , называются одинаково распределенными выборочными значениями.

2. Хотя первоначально мы предположили, что выборочные значения произведены из наблюдаемой случайной величины  $\xi$ , но их можно трактовать как выборочные значения, которые произведены из  $n$



случайных величин  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ , т.е. значение  $x_v$  произведено из случайной величины  $\xi_v, v = \overline{1, n}$ . Таким образом, можно говорить, что выборочные значения  $X$  произведены из векторной случайной величины  $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ , или можно говорить, что «наблюдается векторная случайная величина  $\xi$ ».

Как отмечалось в разделе 1.1, векторная случайная величина описывается многомерной (совместной) плотностью распределения  $p_\xi(x/.)$ .

В данной работе, получая выборочные значения случайной величины  $\xi$ , будем считать, что каждое выборочное значение получается статистически независимым от другого. Поэтому случайные величины  $\xi_v$ , образующие вектор  $\xi$ , являются статистически независимыми, а учитывая, что выборочные значения произведены из случайной величины  $\xi$  с плотностью распределения  $p(x/.)$ , то случайные величины  $\xi_v, v = \overline{1, n}$  будут и одинаково распределенными.

Следовательно, вектор  $\xi$  является вектором независимых и одинаково распределенных случайных величин, описываемых многомерной плотностью распределения

$$p_\xi(x/\bar{\vartheta}_0) = \prod_{i=1}^n p_{\xi_i}(x_i/\bar{\vartheta}_0).$$

В дальнейшем понятия независимости и одинаковости распределенности случайных величин  $\xi$  мы будем переносить и на выборочные значения  $X$ . Говоря, что имеется выборка  $\bar{x}$  независимых и одинаково распределенных выборочных значений, имеется в виду, что выборочные значения  $x_v$  произведены из случайных величин  $\xi_v, v = \overline{1, n}$ , которые являются независимыми и одинаково распределенными случайными величинами с многомерной плотностью распределения  $p_\xi(x/\bar{\vartheta})$ , в которой параметр  $\bar{\vartheta}$  имеет значение  $\bar{\vartheta}_0$ .

3. Как указывалось раньше, у наблюдателя имеется выборка (множество значений чисел), которая статистически зависит от истинного значения параметра  $\bar{\vartheta}_0$ . Задача наблюдателя состоит в том, чтобы, произведя некоторые математические операции над выборочными значениями  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , найти  $q$  таких чисел  $\check{\vartheta}_1, \check{\vartheta}_2, \dots, \check{\vartheta}_q$ , которые можно было бы принять за некоторые приближенные (оценочные) значения истинных значений составляющих  $\vartheta_{10}, \vartheta_{20}, \dots, \vartheta_{q0}$  векторного параметра  $\bar{\vartheta}$ . Другими словами, задача наблюдателя состоит в вычислении некоторых функций от выборочных

значений  $\bar{x}$  для получения оценок значений  $\bar{\theta}$  истинного значения параметра

$$\bar{\theta} = \{\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2, \dots, \bar{\theta}_q\}, \quad \bar{\theta} \in \bar{\Theta}$$

$$\bar{\theta}_0 = \{\bar{\theta}_{10}, \bar{\theta}_{20}, \dots, \bar{\theta}_{q0}\}.$$

**Определение 1.4.** Любая функция  $\mu(\cdot)$  от выборочных значений, т.е.  $\mu(\bar{x}) = \mu(x_1, x_2, \dots, x_n)$  называется решающей функцией.

Так как выборочные значения  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  принимают случайные значения, то и результат их обработки, т.е. решающие функции также будут принимать случайные значения.

**Определение 1.5.** Значения  $\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2, \dots, \bar{\theta}_q$ , которые равны определенным решающим функциям

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_{1(n)} &= \mu_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \bar{\theta}_{2(n)} &= \mu_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\dots\dots\dots \\ \bar{\theta}_{q(n)} &= \mu_q(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned} \quad (1.7)$$

и в некотором смысле являются близкими к истинным значениям составляющих векторного параметра  $\bar{\theta}_0$ , называются решающими правилами для вычисления значений составляющих вектора

$$\bar{\theta} = \{\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2, \dots, \bar{\theta}_q\}.$$

Приведенные в (1.7) решающие правила заданы в явном виде. Очень часто в математической статистике решающие правила задаются в неявном виде. Пусть параметр  $\bar{\theta}$  является скалярным. Будем считать, что решающее правило задается в неявном виде, если значение  $\bar{\theta}$  находится из решения уравнения

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n; \bar{\theta}) \Big|_{\bar{\theta}=\bar{\theta}} = 0, \quad (1.8)$$

где  $g(\cdot)$  – некоторая функция от выборочных значений  $\bar{x}$  и параметра  $\bar{\theta}$ . При неявном задании решающего правила в качестве значения решающей функции  $\bar{\theta}$  параметра  $\bar{\theta}_0$  берется то значение  $\bar{\theta}$ , при котором имеет место равенство (1.8), т.е. приближенное значение параметра равно корню уравнения (1.8).



Если имеется векторный параметр  $\bar{\vartheta}$ , то неявно решающие правила для вычисления приближенных значений компонент векторного параметра задаются в виде решения системы уравнений

$$\left. \begin{aligned} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n; \bar{\vartheta}) \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n; \bar{\vartheta}) \\ \dots \\ g_q(x_1, x_2, \dots, x_n; \bar{\vartheta}) \end{aligned} \right|_{\bar{\vartheta} = \bar{\vartheta}} = 0, \quad (1.9)$$

т.е. неявное задание решающих правил векторного параметра состоит из задания  $q$  уравнений от выборки  $\bar{x}$  и векторного параметра  $\bar{\vartheta}$ . Совместное решение этой системы относительно параметров  $(\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_q)$  и будет вектором значений решающих правил, т.е. вектором  $\bar{\vartheta}$ .

4. Определение 1.6. Любая функция  $\mu(\xi)$  от векторной случайной величины  $\xi$  называется статистикой.

Пусть  $\mu(\bar{x})$  есть некоторая решающая функция для нахождения параметра  $\vartheta$ , т.е.  $\check{\vartheta} = \mu(\bar{x})$ .

Определение 1.7. Функция  $\mu(\xi)$  называется точечной статистической оценкой параметра  $\vartheta$  или просто оценкой  $\vartheta$ .

В дальнейшем оценку параметра  $\vartheta$  будем обозначать  $\hat{\vartheta}$  или  $\hat{\vartheta}_n$  ( $n$  указывает, что оценка зависит от объема выборки или от размера вектора  $\xi$ ). Тогда по определению, если оценка скалярного параметра задана в явном виде, то она равна

$$\hat{\vartheta}_n = \mu(\xi), \quad \hat{\vartheta} \in \Theta, \quad (1.10)$$

а если она задана в неявном виде, то она находится из решения уравнения

$$g(\xi, \vartheta)_{\vartheta = \hat{\vartheta}} = 0. \quad (1.11)$$

Если параметр векторный, то при явном виде оценка задается системой равенств

$$\begin{aligned} \hat{\vartheta}_1 &= \mu_1(\xi), \\ &\dots \\ \hat{\vartheta}_q &= \mu_q(\xi), \end{aligned} \quad (1.12)$$

а при неявном виде — системой уравнений

$$g_1(\bar{\xi}; \bar{\vartheta})_{\bar{\vartheta}=\bar{\vartheta}_0} = 0, \quad \dots \dots \dots (1.13)$$

$$g_q(\bar{\xi}; \bar{\vartheta})_{\bar{\vartheta}=\bar{\vartheta}_0} = 0.$$

Таким образом, точечная статистическая оценка есть определенная статистика, которая принимает значения в  $\Theta$  и при этом вычисленное значение  $\bar{\vartheta} = \mu(\bar{x})$  статистики  $\mu(\bar{\xi})$  принимается за приближенное значение для  $\vartheta_0$ , т.е.

$$\bar{\vartheta} = \mu(\bar{x}) \approx \vartheta_0. \quad (1.14)$$

Термин «точечная» употребляется в связи с тем, что значения статистики  $\mu(\bar{\xi})$  есть точки в пространстве  $\Theta$  значений неизвестного параметра  $\vartheta$ .

5. Иногда как в сами оценки (1.10) или (1.12), так и в левые части (1.11) или (1.13) входят отдельные статистики  $\varphi_k(\bar{\xi})$ ,  $k=1, 2, \dots$ , которые не зависят от параметра, а зависят только от вектора  $\bar{\xi}$ , т.е.

$$\bar{\vartheta}_n = \mu[\varphi_1(\bar{\xi}), \varphi_2(\bar{\xi}), \dots, \varphi_r(\bar{\xi})];$$

$$g_i(\bar{\xi}; \bar{\vartheta}) = g_i[\varphi_1(\bar{\xi}), \dots, \varphi_r(\bar{\xi}); \bar{\vartheta}], i = \overline{1, q}.$$

Определение 1.8. Статистики  $\varphi_i(\bar{\xi})$  будем называть элементарными статистиками.

Аналогично и решающие функции  $\bar{\vartheta}_n$  и  $g_i(\bar{x}; \bar{\vartheta})$  могут зависеть от решающих функций  $\varphi_k(\bar{x})$ , полностью определяемых выборочными значениями (выборкой), т.е.

$$\bar{\vartheta}_n = \mu[\varphi_1(\bar{x}), \varphi_2(\bar{x}), \dots, \varphi_r(\bar{x})];$$

$$g_i(\bar{x}; \bar{\vartheta}) = g_i[\varphi_1(\bar{x}), \dots, \varphi_r(\bar{x}); \bar{\vartheta}].$$

Определение 1.9. Решающие функции  $\varphi_i(\bar{x})$  будем называть элементарными решающими функциями.

Следовательно, элементарные решающие функции  $\varphi_i(\bar{x})$  являются значениями соответствующих элементарных статистик  $\varphi_i(\bar{\xi})$ .

6. Замечание. Было определено, что множество выборочных значений  $\bar{x}$  получается из наблюдения множества случайных величин  $\bar{\xi}$  с соответствующей функцией распределения. При этом понятие выборки было определено через множество  $\bar{x}$ . Иногда в литературе понятие выборки определяется через множество  $\bar{\xi}$ . Это не противоречит одно другому. Несмотря на различие объектов исследования (выборочные значения, случайные величины), в математической



статистике и  $\bar{x}$ , и  $\bar{\xi}$  можно называть выборкой, так как статистическим закономерностям числовых данных  $\bar{x}$  отвечают вероятностные утверждения для случайных величин  $\bar{\xi}$ .

### 1.3. Основные свойства точечных оценок параметров

1. Как отмечалось ранее, основная задача теории точечного статистического оценивания состоит в том, чтобы разработать методы нахождения (синтеза) оценок параметров, оптимальных в определенном смысле и на основании использования той априорной информации о наблюдаемой случайной величине, которой располагает экспериментатор. В разделе 1.1 было отмечено, что в качестве априорной информации о наблюдаемой случайной величине может выступать плотность распределения, характеристическая функция, бесконечная или конечная последовательность моментов или кумулянтов, а также последовательность каких-либо других усредненных характеристик наблюдаемой случайной величины.

В качестве оценки параметра в принципе можно выбрать любую функцию от  $\bar{\xi}$  (любую статистику), принимающую значения в области  $\Theta$ .

Однако понятно, что оценки должны обладать некоторыми свойствами, которые позволяют делать предпочтение одних оценок перед другими и разумно их использовать в практических целях. Для этого прежде всего необходимо определить перечень требований, предъявляемых к оценкам, и определить качество получаемых оценок.

В разделе 1.2 было показано, что сами оценки являются случайными величинами. В силу этого, требования к оценкам и их качество необходимо характеризовать некоторыми усредненными характеристиками.

Другими словами, для характеристики качества оценок необходимо использовать различные статистические средние значения оценок, такие как математическое ожидание и дисперсия. В дальнейшем, при анализе качества оценки, мы не всегда будем заменять выборочные значения  $x_i$  на случайные величины  $\xi_i$ , а будем сами выборочные значения  $x_i$  рассматривать как случайные величины.

2. Какие же используются усредненные характеристики оценок? Прежде всего, это математическое ожидание оценки

$$E\hat{\theta}_{k(n)} = b_k, \quad k = \overline{1, q}.$$

Если математическое ожидание оценки  $b_k$  равно истинному значению оценки, т.е.  $b_k = \vartheta_{k0}$ , то оценка называется несмещенной. А если  $b_k \neq \vartheta_{k0}$ , то оценка называется смещенной. При этом величина

$$\Delta_k = b_k - \vartheta_{k0}$$

называется смещением  $k$ -ой компоненты оценки.

Из практических соображений целесообразно, чтобы величина  $b_k$  была по возможности близкой к величине  $\vartheta_{k0}$ , поэтому первым требованием, предъявляемым к оценке, является требование, чтобы она была несмещенной, т.е. чтобы  $\Delta_k = 0$  и  $b_k = \vartheta_{k0}$ .

Часто к оценкам предъявляют менее жесткие требования, состоящие в том, чтобы оценка была асимптотически несмещенной, т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \hat{\vartheta}_{k(n)} = \vartheta_{k0}.$$

Следующей усредненной характеристикой оценки является дисперсия несмещенной оценки

$$\sigma_{\vartheta}^2 = E(\hat{\vartheta}_{k(n)} - \vartheta_{k0})^2.$$

Дисперсия характеризует разброс величины  $\hat{\vartheta}_{k(n)}$  вокруг истинного значения  $\vartheta_{k0}$ . Причем, чем меньше дисперсия оценки, тем ближе в среднем значения  $\hat{\vartheta}_{k(n)}$  лежат к  $\vartheta_{k0}$ . Считается, что из двух оценок  $\hat{\vartheta}_{k(n)}^{(1)}$  и  $\hat{\vartheta}_{k(n)}^{(2)}$  одного и того же  $k$ -го параметра лучшей (или более эффективной) оценкой будет та, для которой дисперсия будет меньше.

Определение 1.10. Оценка  $\hat{\vartheta}_{k(n)}^{(1)}$  называется более эффективной, по сравнению с оценкой  $\hat{\vartheta}_{k(n)}^{(2)}$ , если

$$E(\hat{\vartheta}_{k(n)}^{(1)} - \vartheta_{k0})^2 < E(\hat{\vartheta}_{k(n)}^{(2)} - \vartheta_{k0})^2.$$

Следовательно, качество оценки характеризуется дисперсией оценки.

Поэтому вторым требованием, предъявляемым к оценке, является требование, чтобы в классе несмещенных оценок, дисперсия оценки (или среднеквадратическая погрешность) была минимальной.

Существует менее жесткое требование – дисперсия должна быть асимптотически минимальной.

Еще одно свойство, которое крайне необходимо, но не связано с усредненными характеристиками – это свойство состоятельности оценки. Оценка называется состоятельной, если предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\vartheta}_{k(n)}$  сходится по вероятности (или в среднеквадратическом) к истинному значению параметра  $\vartheta_{k0}$ .



3. При заданном объеме выборки  $n$  дисперсия  $\sigma_{\vartheta}^2$  не может быть сколь угодно малой величиной. Оказывается, она ограничена снизу в общем случае некоторой функцией параметра  $\vartheta$  [1].

Пусть  $x$  будет независимой и одинаково распределенной выборкой объемом  $n$  из случайной величины  $\xi$ , имеющей однопараметрическое распределение  $F(x/\vartheta)$ . Если  $p(x/\vartheta)$  – плотность этого распределения, то при выполнении условий регулярности [1] справедливо неравенство

$$\sigma_{\vartheta}^2(\vartheta_0) \geq [n i(\vartheta_0)]^{-1} = I^{-1}(\vartheta_0), \quad (1.15)$$

где величина, равная

$$i(\vartheta_0) = E \left\{ \frac{d}{d\vartheta} \ln p(\xi/\vartheta) \Big|_{\vartheta=\vartheta_0} \right\}^2 = -E \left\{ \frac{d^2}{d\vartheta^2} \ln p(\xi/\vartheta) \Big|_{\vartheta=\vartheta_0} \right\}, \quad \vartheta_0 \in \Theta, \quad (1.16)$$

называется количеством информации по Фишеру о параметре  $\vartheta$ , содержащимся в одном выборочном значении, а величина  $I(\vartheta_0)$  называется количеством информации, содержащейся в выборке объемом  $n$ . Неравенство (1.15) называется неравенством Крамера-Рао (или неравенством информации).

Если оценка  $\vartheta$  такова, что в (1.15) достигается равенство, то такая оценка называется эффективной. Следовательно, среди несмещенных регулярных оценок эффективные оценки имеют минимальную дисперсию. Отношение

$$e = [n i(\vartheta_0) \sigma_{\vartheta}^2]^{-1},$$

где  $\sigma_{\vartheta}^2$  – дисперсия произвольной оценки,

называется эффективностью оценки  $\vartheta$ .

Очевидно, что  $0 \leq e \leq 1$ . Если  $e \rightarrow 1$  при  $n \rightarrow \infty$ , то оценка  $\vartheta$  называется асимптотически эффективной.

Пусть теперь  $F(x/\vartheta)$  –  $q$ -параметрическое семейство распределения, а  $p(x/\vartheta)$  – его плотность. Тогда в качестве оценок составляющих векторного параметра выбирают  $q$  функций  $\bar{\vartheta}_1 = \varphi_1(\bar{x})$ ,  $\bar{\vartheta}_2 = \varphi_2(\bar{x})$ , ...,  $\bar{\vartheta}_q = \varphi_q(\bar{x})$ . В этом случае в классе несмещенных оценок вместо дисперсии оценки рассматривается матрица вариаций оценок  $V = \|V_{i,j}\|$  с элементами

$$V_{i,j} = E \{ (\bar{\vartheta}_i - \vartheta_{i0})(\bar{\vartheta}_j - \vartheta_{j0}) \}, \quad i, j = \overline{1, q}. \quad (1.17)$$

Отметим, что дисперсия оценки  $i$ -го параметра есть  $V_{i,i}(\hat{\theta})$ ; недиагональные элементы матрицы вариаций определяют корреляционные связи оценок.

Вместо количества информации по Фишеру вводится информационная матрица Фишера  $I(\hat{\theta}) = \|I^{(i,j)}(\hat{\theta})\|$  с элементами

$$I^{(i,j)}(\hat{\theta}) = E \left\{ \frac{d}{d\theta_i} \ln p(\xi/\hat{\theta}) \frac{d}{d\theta_j} \ln p(\xi/\hat{\theta}) \right\} = -E \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \ln p(\xi/\hat{\theta}) \right\}. \quad (1.18)$$

Обобщением неравенства информации на случай несмещенного векторного параметра является утверждение, что матрица

$$V(\hat{\theta}) - I^{-1}(\hat{\theta})$$

есть положительно определенная. Оценки  $\hat{\theta}_i$  составляющих  $\hat{\theta}$  вектора  $\hat{\theta}$ , для которых имеет место равенство матриц

$$V(\hat{\theta}) = I^{-1}(\hat{\theta}),$$

называются совместно эффективными. Определитель матрицы вариаций оценок  $V(\hat{\theta})$  называется обобщенной дисперсией системы оценок [4]. Поэтому в качестве эффективности оценки векторного параметра можно выбрать величину

$$e = \frac{\det I^{-1}(\hat{\theta})}{\det V(\hat{\theta})}.$$

Оценка называется асимптотически эффективной, если  $e \rightarrow 1$  при  $n \rightarrow \infty$ .

#### 1.4. Классические методы нахождения оценок параметров

1. Существующие на данный момент методы нахождения оценок векторных параметров можно, прежде всего, классифицировать по способу задания априорной информации о наблюдаемой случайной величине  $\xi$ .

Исторически сложилось так, что основным описанием случайной величины является описание с помощью функции плотности распределения вероятностей  $p(x/\hat{\theta})$ , которое наиболее полно отображает статистические характеристики этой случайной величины. Вследствие этого и метод, основанный на использовании такого описания, занимает очень важное место в теории оценок параметров. Этот метод, который был предложен Р. Фишером в 1912 г., называется методом максимального правдоподобия [5].



Пусть задана независимая выборка  $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  из случайной величины  $\xi$  и пусть плотность распределения этой выборки зависит от некоторого векторного параметра  $\bar{\theta}$ , т.е.

$$p(\mathbf{x}/\bar{\theta}) = \prod_{v=1}^n p(x_v/\bar{\theta}).$$

Определение 1.11. Функция

$$L(\xi; \bar{\theta}) = p(\xi/\bar{\theta}), \quad (1.19)$$

рассматриваемая как функция аргумента  $\bar{\theta}$  при заданном векторе  $\bar{\xi}$ , называется функцией правдоподобия.

Суть метода максимального правдоподобия заключается в нахождении такого решающего правила

$$\bar{\theta} = \bar{\varphi}(\mathbf{x}), \quad (1.20)$$

которое для любого вектора выборочных значений  $\bar{\mathbf{x}}$  максимизирует по  $\bar{\theta}$  значение плотности вероятности  $p(\mathbf{x}/\bar{\theta})$ , в которую вместо переменных  $\mathbf{x}$  подставлены выборочные значения  $\bar{\mathbf{x}}$ , т.е. для любого  $\bar{\mathbf{x}}$

$$p(\bar{\mathbf{x}}; \bar{\varphi}(\bar{\mathbf{x}})) \geq p(\bar{\mathbf{x}}; \bar{\theta}) \text{ для } \forall \bar{\theta} \in \bar{\Theta}. \quad (1.21)$$

Пусть  $\bar{\varphi}(\bar{\mathbf{x}})$  — решающее правило, удовлетворяющее (1.21).

Определение 1.12. Статистика

$$\bar{\theta} = \bar{\varphi}(\bar{\xi}) \quad (1.22)$$

называется оценкой максимального правдоподобия.

Таким образом, согласно принципу максимального правдоподобия, реализовавшееся на опыте значение (1.20) оценки максимального правдоподобия (1.22), которое отвечает выборке  $\bar{\mathbf{x}}$  из случайной величины  $\xi$ , и принимается за приближенное значение неизвестного параметра  $\bar{\theta}_0$ .

Очевидно, выражение для оценки можно записать в виде

$$\bar{\theta} = \arg \sup_{\bar{\theta} \in \bar{\Theta}} L(\bar{\xi}; \bar{\theta}). \quad (1.23)$$

Из определения оценки максимального правдоподобия следует, что поиск оценки связан с нахождением максимума функции правдоподобия  $L(\bar{\xi}; \bar{\theta})$ .

Часто вместо функции  $L(\bar{\xi}; \bar{\theta})$  используют функцию  $\ln L(\bar{\xi}; \bar{\theta})$ , которая достигает максимума в тех же точках, что и  $L(\bar{\xi}; \bar{\theta})$ . Если функция  $p(\bar{\mathbf{x}}/\bar{\theta})$  дифференцируема по  $\bar{\theta}$ , то для отыскания оценок

максимального правдоподобия необходимо решить так называемую систему уравнений максимального правдоподобия

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} \ln L(\bar{\xi}; \bar{\theta}) \Big|_{\bar{\theta} = \bar{\theta}} = 0, \quad i = \overline{1, q}. \quad (1.24)$$

В общем случае оценки максимального правдоподобия являются состоятельными и асимптотически эффективными.

Недостатком метода является сложность вычисления максимума при решении многих практических задач.

Пример 1.1. Пусть выборка  $\bar{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  независимых и одинаково распределённых выборочных значений произведена из гауссовской случайной величины с математическим ожиданием  $m(\theta)$  и дисперсией  $\chi_2$ . Тогда совместная плотность распределения выборки будет иметь вид

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{v=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\chi_2}} \exp \left\{ -\frac{[x_v - m(\theta)]^2}{2\chi_2} \right\},$$

а функция правдоподобия будет равна

$$L(\bar{\xi}; \theta, \chi_2) = -\frac{n}{2} \ln 2\pi - \frac{n}{2} \ln \chi_2 - \frac{1}{2\chi_2} \sum_{v=1}^n [\xi_v - m(\theta)]^2.$$

Последнее выражение можно записать в виде

$$L(\bar{\xi}; \theta, \chi_2) = h_0(\theta, \chi_2) + h_1(\theta, \chi_2) \sum_{v=1}^n \xi_v + h_2(\theta, \chi_2) \sum_{v=1}^n \xi_v^2,$$

где

$$h_0(\theta, \chi_2) = -\frac{n}{2} \ln 2\pi - \frac{n}{2} \ln \chi_2 - \frac{m^2(\theta)}{2\chi_2},$$

$$h_1(\theta, \chi_2) = \frac{m(\theta)}{\chi_2},$$

$$h_2(\theta, \chi_2) = -\frac{1}{2\chi_2},$$

т.е. существуют такие коэффициенты  $h_0(\theta, \chi_2)$ ,  $h_1(\theta, \chi_2)$ ,  $h_2(\theta, \chi_2)$  и элементарные степенные статистики  $\sum_{v=1}^n \xi_v$  и  $\sum_{v=1}^n \xi_v^2$ , при которых

функция правдоподобия имеет максимум в окрестности как истинного значения параметра  $\theta_0$ , так и параметра  $\chi_{20}$ .

2. Другим, часто используемым на практике, методом (вследствие своей простоты) является метод нахождения точечных оценок параметра



$\bar{g}$ , основанный на использовании эмпирической функции распределения.

Если задана выборка  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  объемом  $n$  из случайной величины  $\xi$  независимых и одинаково распределенных величин с непрерывной функцией распределения  $F_\xi(x/\bar{g}_0)$ , то эмпирической функцией распределения называют функцию вида

$$F_n(x) = \frac{v_n(x)}{n},$$

где  $v_n$  — число тех  $v$  выборочных значений, для которых  $x_v < x$ ,  $v = \overline{1, n}$ . Показано, что при  $n \rightarrow \infty$  функция  $F_n(x)$  сходится к  $F_\xi(x/\bar{g}_0)$  с вероятностью 1 для  $\forall x \in (-\infty; \infty)$ .

В случае, если множество параметров  $(\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_q)$  может быть однозначно определено некоторыми  $q$  функционалами

$$\vartheta_i = \varphi_i[F_\xi(x/\bar{g})], \quad i = \overline{1, q},$$

определенными на множестве всех функций распределения, то в качестве решающих функций векторного параметра можно использовать значения

$$\hat{\vartheta}_i = \varphi_i[F_n(x)], \quad i = \overline{1, q}.$$

Показано, что при стремлении  $n \rightarrow \infty$  значения функционалов  $\varphi_i[F_n(\cdot)]$  сходятся по вероятности к истинным значениям векторного параметра  $\vartheta_{i0}, \vartheta_{20}, \dots, \vartheta_{q0}$ , т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_i[F_n(\cdot)] \xrightarrow{P} \vartheta_{i0}, \quad i = \overline{1, q}.$$

Однако, как отмечалось ранее, очень часто параметр  $\bar{g}$  может быть задан только в неявном виде

$$\Psi_i(\bar{g}) = E\varphi_i(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_i(x) dF_\xi(x/\bar{g}), \quad i = \overline{1, q}, \quad (1.25)$$

где  $\varphi_i(\xi)$  — некоторые функции от случайной величины  $\xi$ .

Подставляя эмпирическую функцию распределения  $F_n(x)$  в правую часть (1.25) и перенося правую часть в левую, получаем, что значения решающих функций векторного параметра находятся из решения системы уравнений

$$\Psi_i(\bar{\vartheta}) - \frac{1}{n} \sum_{v=1}^n \varphi_i(x_v) \Big|_{\bar{\vartheta}=\bar{\vartheta}} = 0, \quad i=\overline{1,q}. \quad (1.26)$$

Определение 1.13. Статистики  $\bar{\vartheta}$ , найденные из решения системы уравнений

$$\Psi_i(\bar{\vartheta}) - \frac{1}{n} \sum_{v=1}^n \varphi_i(\xi_v) \Big|_{\bar{\vartheta}=\bar{\vartheta}} = 0, \quad i=\overline{1,q}, \quad (1.27)$$

называются оценками метода, основанного на использовании эмпирической функции распределения.

Следовательно, значения решающих функций составляющих векторного параметра данным методом находятся из решения системы (1.26), а сами оценки – из решения системы (1.27).

Данному методу можно придать несколько другой математический смысл. Что значит, что оценка параметра  $\vartheta_i$  находится из решения уравнения (1.27)? Это значит, что имеются некоторые функции  $M_i(\xi; \bar{\vartheta})$ , зависящие от параметра  $\vartheta_i$  и имеющие экстремум в точке  $\bar{\vartheta}_i$ . Тогда

$$\frac{d}{d\vartheta_i} M_i(\xi; \bar{\vartheta}) = \Psi_i(\bar{\vartheta}) - \frac{1}{n} \sum_{v=1}^n \varphi_i(\xi_v)$$

и, следовательно, сами функции  $M_i(\xi; \bar{\vartheta})$  будут равны

$$M_i(\xi; \bar{\vartheta}) = \int \Psi_i(\bar{\vartheta}) d\vartheta_i - \frac{\vartheta_i}{n} \sum_{v=1}^n \varphi_i(\xi_v), \quad i=\overline{1,q}.$$

В последнем выражении интеграл может быть либо неопределённым, либо определённым в пределах от  $c_i$  до  $\vartheta_i$ . Таким образом, каждая функция  $M_i(\xi; \bar{\vartheta})$  имеет экстремум в точке  $\bar{\vartheta}_i$ , которая является оценкой  $i$ -ой составляющей векторного параметра.

Учитывая последнее выражение, можно сказать, что согласно методу основанного на использовании эмпирической функции распределения в качестве оценки неизвестного параметра выбирается значение  $\bar{\vartheta} \in \Theta$ , при котором достигается экстремум по  $\vartheta_i$  каждой функции  $M_i(\xi; \bar{\vartheta})$ . Функции  $M_i(\xi; \bar{\vartheta})$  можно записать в виде

$$M_i(\xi; \bar{\vartheta}) = h_{oi}(\bar{\vartheta}) + h_{li}(\bar{\vartheta}) \sum_{v=1}^n \varphi_i(\xi_v),$$

где

$$h_{li}(\bar{\vartheta}) = -\frac{\vartheta_i}{n},$$



$$h_{0i}(\bar{\theta}) = \int \Psi_i(\bar{\theta}) d\theta_i \text{ или } h_{0i}(\bar{\theta}) = \int_{c_i}^{\theta_i} \Psi_i(\bar{\theta}) d\theta_i.$$

Следовательно, в каждой функции  $M_i(\bar{\xi}; \bar{\theta})$ ,  $i = \overline{1, q}$  существуют такие коэффициенты  $h_{0i}(\bar{\theta})$ ,  $h_{1i}(\bar{\theta})$  и элементарные статистики  $\sum_{v=1}^n \varphi_i(\xi_v)$ , при которых эти функции имеют экстремум в окрестности истинных значений параметров  $\bar{\theta}$ .

Частным случаем метода нахождения оценок параметров с помощью эмпирического распределения является метод моментов [6], предложенный К. Пирсоном в 1894 г. В этом методе функции  $\varphi_i(\xi)$  имеют вид  $\varphi_i(\xi) = \xi^i$ . При этом  $\Psi_i(\bar{\theta}) = \alpha_i(\bar{\theta})$ ,  $i = \overline{1, q}$  и значения оценок составляющих вектора  $\bar{\theta}$  находятся из решения системы

$$\alpha_i(\bar{\theta}) = \frac{1}{n} \sum_{v=1}^n x_v^i, \quad i = \overline{1, q}. \quad (1.28)$$

Следовательно, метод моментов состоит в приравнивании выборочных моментов теоретическим.

Перенос в системе (1.28) правую часть в левую, получим, что оценка составляющих векторного параметра  $\bar{\theta}$  может быть найдена из решения системы уравнений

$$\alpha_i(\bar{\theta}) - \frac{1}{n} \sum_{v=1}^n \xi_v^i |_{\bar{\theta}=\bar{\theta}} = 0, \quad i = \overline{1, q}.$$

Показано, что для любого  $i = \overline{1, q}$  оценка  $\bar{\theta}$ , найденная из этой системы уравнений, будет состоятельной и асимптотически нормальной.

Для метода моментов функция  $M_i(\bar{\xi}; \bar{\theta})$  будет иметь вид

$$M_i(\bar{\xi}; \bar{\theta}) = h_{0i}(\bar{\theta}) + h_{1i}(\bar{\theta}) \sum_{v=1}^n \xi_v^i,$$

где

$$h_{1i}(\bar{\theta}) = -\frac{\theta_i}{n},$$

$$h_{0i}(\bar{\theta}) = \int \alpha_i(\bar{\theta}) d\theta_i \text{ или } h_{0i}(\bar{\theta}) = \int_{c_i}^{\theta_i} \alpha_i(\bar{\theta}) d\theta_i.$$

Следовательно, можно сказать, что согласно методу моментов в качестве оценки неизвестного параметра выбирается значение  $\bar{\theta} \in \Theta$ , при котором достигается экстремум по  $\bar{\theta}$  каждой функции  $M_i(\bar{\xi}; \bar{\theta})$ .

Достоинством метода нахождения оценок с помощью эмпирической функции распределения является то, что в нем

используется частичная априорная информация и оценки получаются простыми для реализации. Однако большой его недостаток в том, что оценки часто обладают низкой эффективностью.

Метод моментов обычно применяется для случайных величин, у которых существуют моменты. Для случайных величин, у которых моменты не существуют, оценки находятся с помощью эмпирической функции распределения при соответствующем выборе функций  $\varphi_i(\xi)$ .

Пример 1.2. Пусть выборка  $X$  произведена из случайной величины  $\xi$ , имеющей распределение Коши, т.е. с плотностью распределения

$$p(x/\mu, a) = \frac{a}{\pi} \frac{1}{(x - \mu)^2 + a^2}.$$

Хорошо известно, что для этого распределения моменты не существуют, но существует характеристическая функция, равная

$$f(u/\mu, a) = \exp\{j\mu u - a|u|\}.$$

Так как моменты не существуют, то для нахождения оценок нельзя использовать метод моментов. Однако можно использовать более общий метод нахождения оценок, основанный на использовании эмпирической функции распределения, взяв, например, в качестве функций

$$\varphi_1(\xi) = \sin \xi, \quad \varphi_2(\xi) = \sin 2\xi.$$

Так как, согласно формул Эйлера,

$$\sin p\xi = \frac{1}{2j} [e^{jp\xi} - e^{-jp\xi}], \quad p=1,2,$$

математическое ожидание  $\sin p\xi$  будет равно

$$\Psi_p(a, \mu) = E \sin p\xi = \frac{1}{2j} [f(p/\mu, a) - f^*(p/\mu, a)] = e^{-ap} \sin p\mu, \quad p=1,2.$$

Тогда, согласно (1.23), оценку параметров  $a$  и  $\mu$  можно находить из совместного решения системы уравнений

$$e^{-a} \sin \mu - \frac{1}{n} \sum_{v=1}^n \sin x_v \Big|_{\substack{a=a \\ \mu=\hat{\mu}}} = 0,$$

$$e^{-2a} \sin 2\mu - \frac{1}{n} \sum_{v=1}^n \sin 2x_v \Big|_{\substack{a=a \\ \mu=\hat{\mu}}} = 0.$$

Оценки параметров  $a$  и  $\mu$ , найденные из решения этой системы, будут состоятельны.

3. Еще одним параметрическим методом нахождения оценок является метод наименьших квадратов [7], который был предложен К. Гауссом в 1804 г. Это самый первый статистический метод нахождения оценок параметров. Суть его состоит в следующем.



Пусть задана выборка  $\bar{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  из независимых случайных величин  $\xi_v$ , но с различными моментами первого порядка  $\alpha_{1v}(\vartheta)$ ,  $v = \overline{1, n}$ . Согласно методу наименьших квадратов в качестве оценки неизвестного параметра выбирается значение  $\bar{\vartheta} \in \Theta$ , при котором достигается минимум по  $\vartheta$  суммы квадратов разности  $v$ -ой случайной величины и её математического ожидания, т.е. минимум функции

$$S(\bar{\xi}; \vartheta) = \sum_{v=1}^n [\xi_v - \alpha_{1v}(\vartheta)]^2.$$

Если функции  $\alpha_{1v}(\vartheta)$  дифференцируемы по каждой составляющей векторного параметра

$$\left| \frac{\partial \alpha_{1v}(\vartheta)}{\partial \vartheta_m} \right| < \infty, \quad \forall \vartheta \in \Theta, \quad m = \overline{1, q}, \quad v = \overline{1, n},$$

то для отыскания оценок метода наименьших квадратов необходимо решить систему уравнений

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta_m} S(\bar{\xi}; \vartheta) = \sum_{v=1}^n [\xi_v - \alpha_{1v}(\vartheta)] \frac{\partial}{\partial \vartheta_m} \alpha_{1v}(\vartheta) \Big|_{\vartheta = \bar{\vartheta}} = 0, \quad m = \overline{1, q}.$$

Если выборочные значения одинаково распределены (имеют одинаковые моменты), то функция  $S(\bar{\xi}; \vartheta)$  имеет вид

$$S(\bar{\xi}; \vartheta) = \sum_{v=1}^n [\xi_v - \alpha_1(\vartheta)]^2.$$

Из последнего выражения видно, что можно найти оценку только одного параметра, решая уравнение, которое в общем виде будет совпадать с уравнением, получаемым для нахождения оценки методом моментов.

Метод наименьших квадратов нашел широкое применение в прикладных задачах статистики, особенно при нахождении оценок параметров линейной регрессии при аддитивных гауссовских помехах с нулевым математическим ожиданием и одинаковой дисперсией, так как он даже при малых выборках обладает свойством оптимальности, состоящим в том, что он дает несмещенные оценки, являющиеся линейными функциями от наблюдений и имеющие минимальную дисперсию.

Если в последнем выражении для  $S(\bar{\xi}; \vartheta)$  под знаком суммы возвести в квадрат, то  $S(\bar{\xi}; \vartheta)$  можно также записать в виде

$$S(\bar{\xi}; \vartheta) = h_0(\vartheta) + h_1(\vartheta) \sum_{v=1}^n \xi_v + h_2(\vartheta) \sum_{v=1}^n \xi_v^2,$$

где

$$h_0(\vartheta) = n\alpha_1^2(\vartheta),$$

$$h_1(\vartheta) = -2\alpha_1(\vartheta),$$

$$h_2(\vartheta) = 1.$$

Отсюда видно, что существуют такие коэффициенты  $h_0(\vartheta) - h_2(\vartheta)$ , для которых  $S(\xi; \vartheta)$  как функция параметра  $\vartheta$  имеет минимум в окрестности истинного значения параметра  $\vartheta_0$ .

4. Из рассмотрения классических методов нахождения оценок параметров и иллюстрирующих их примеров можно увидеть, что при заданной выборке часто в качестве оценки берётся экстремальное значение такого в общем виде математического выражения

$$T(\xi; \vartheta) = h_0(\vartheta) + \sum_{i=1}^s h_i(\vartheta) \sum_{v=1}^n \varphi_i(\xi_v),$$

где коэффициенты  $h_0(\vartheta) - h_s(\vartheta)$  зависят от оцениваемого параметра и являются такими, что  $T(\xi; \vartheta)$  как функция  $\vartheta$  имеет экстремум в окрестности истинного значения параметра  $\vartheta_0$ . Очевидно, это выражение представляет собой сумму  $(s+1)$  слагаемых, т.е. оно является многочленом (полиномом). Причём каждое слагаемое имеет специфическую структуру – является произведением определённого коэффициента на элементарную статистику, т.е. каждое слагаемое является случайной (стохастической) величиной. Следовательно, выражение  $T(\xi; \vartheta)$  представляет собой определённый стохастический (случайный) полином.

Хотя подобные математические конструкции и получены для частных случаев, они заслуживают более всестороннего и детального изучения. Именно изучение подобных математических конструкций и будет детально проведено в данной монографии.



## СТОХАСТИЧЕСКИЕ ПОЛИНОМЫ, ИХ ОПИСАНИЕ И ОСНОВНОЕ СВОЙСТВО

Центральным содержанием данной главы является определение понятия стохастического полинома и выборочного стохастического полинома, а также введение таких характеристик, как тело и объем тела стохастического полинома. Подробно рассмотрено основное свойство стохастических полиномов, состоящее в том, что с помощью стохастических полиномов можно уменьшить дисперсию исходной случайной величины. Используя основное свойство, получено новое разложение случайной величины в стохастический ряд. Получены выражения для математических ожиданий и дисперсий выборочных и средних выборочных стохастических полиномов. В заключении главы закон больших чисел и центральная предельная теорема распространены для средних стохастических полиномов.

### 2.1. Понятие стохастического полинома

1. Пусть имеется некоторая скалярная случайная величина  $\xi$ . Возьмем множество упрямоченных функций  $\varphi_i(\xi)$ ,  $i = \overline{1, s}$  от этой случайной величины и рассмотрим случайную величину  $\eta_s$ , равную

$$\eta_s = h_0 + \sum_{i=1}^s h_i \varphi_i(\xi), \quad (2.1)$$

где  $h_i$  – произвольные константы, не все равные нулю, и  $|h_i| < \infty$ .

Определение 2.1. Правую часть равенства (2.1) будем называть обобщенным стохастическим полиномом (или многочленом) степени  $s$ . При этом будем говорить, что стохастический полином (2.1) задается с помощью функций  $\varphi_i(\cdot)$  или задается в классе функций  $\varphi_i(\cdot)$ . Случайную величину  $\eta_s$  будем называть полиномиальной случайной величиной в отличие от случайной величины  $\xi$ , которую будем называть исходной случайной величиной.

Таким образом, полиномиальная случайная величина  $\eta_s$  равна обобщенному стохастическому полиному степени  $s$ .

Название «обобщенный стохастический полином» происходит от того, что функции  $\varphi_i(\cdot)$  не определены, а имеют общий вид. В

зависимости от конкретного вида этих функций стохастические полиномы будут иметь специальные названия, которые будут приведены ниже.

Очевидно, статистические свойства полиномиальной случайной величины (или стохастического полинома) будут зависеть от конкретного вида функций  $\varphi_i(\cdot)$ , коэффициентов  $h_i$  и степени полинома  $s$ .

Можно выделить некоторые стохастические полиномы, которые имеют определенное название.

Пример 2.1. Если функции  $\varphi_i(\xi) = \xi^i$ ,  $i = \overline{1, s}$ , тогда полином (2.1) задается в классе степенных функций и называется степенным.

Пример 2.2. Если  $\varphi_i(\xi) = \sin(ik\xi)$  или  $\varphi_i(\xi) = \cos(ik\xi)$ ,  $i = \overline{1, s}$ , где  $k$  — некоторая константа, то такой полином задается в классе тригонометрических функций и называется тригонометрическим. При этом, если используется  $\sin(ik\xi)$ , то полином называется синусным стохастическим полиномом, а если  $\cos(ik\xi)$ , то — косинусным стохастическим полиномом. Если же используется и  $\sin(ik\xi)$ , и  $\cos(ik\xi)$ , то такой полином называется синусно-косинусным стохастическим полиномом.

Пример 2.3. В том случае, если  $\varphi_i(\xi) = e^{ip\xi}$ , где  $p$  — некоторая константа, то такой полином задается с помощью экспоненциальных функций и называется экспоненциальным стохастическим полиномом.

Определение 2.2. Если степень полинома равна бесконечности, то такой полином будем называть обобщенным стохастическим рядом.

Очевидно, что математическое ожидание обобщенного стохастического полинома (1.29) равно

$$E\eta_s = h_0 + \sum_{i=1}^s h_i \Psi_i(\bar{\theta}), \quad (2.2)$$

где  $\Psi_i(\bar{\theta}) = E\varphi_i(\xi)$  — математические ожидания функции  $\varphi_i(\xi)$ .

Определение 2.3. Если имеется последовательность математических ожиданий  $\Psi_i(\bar{\theta})$ ,  $i = \overline{1, s}$ , то будем говорить, что стохастический полином описывается с помощью функций  $\Psi_i(\bar{\theta})$ . При этом, если  $s$  является конечным целым числом, то будем говорить, что стохастический полином описывается частично (или имеется частичное описание), а если  $s$  равно бесконечности, то стохастический полином описывается полностью (или имеется полное описание).

Пример 2.4. Если стохастический полином задается в классе степенных функций  $\varphi_i(\xi) = \xi^i$ , то  $\Psi_i(\bar{\theta}) = E\xi^i = \alpha_i(\bar{\theta})$ ,  $i = \overline{1, s}$ . Очевидно, что в данном случае стохастический полином описывается с помощью



начальных моментов, т.е. имеется моментное описание стохастического полинома. В работе [3] отмечалось, что конечная последовательность начальных моментов является частичным описанием случайной величины, а бесконечная последовательность начальных моментов является полным описанием случайной величины.

**Пример 2.5.** В том случае, если стохастический полином задается в классе косинусных тригонометрических функций, т.е.  $\varphi_i(\xi) = \cos(ip\xi)$ , то

$$\Psi_i(\vartheta) = \text{Ecos}(ip\xi) = 0,5[f(ip/\vartheta) + f^*(ip/\vartheta)] \quad i = \overline{1, s},$$

где  $f(\cdot)$  является характеристической функцией случайной величины  $\xi$ . Очевидно, в данном случае стохастический полином описывается с помощью характеристической функции.

2. Пусть теперь исходная случайная величина является векторной, т.е.  $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ . В этом случае для каждой составляющей  $\xi_v$  вектора  $\xi$  можно записать соответствующую полиномиальную случайную величину, которую в общем случае можно записать следующим образом:

$$\eta_s(\xi_v) = h_{0v} + \sum_{i=1}^s h_{iv} \varphi_i(\xi_v), \quad v = \overline{1, n}, \quad (2.3)$$

то есть в данном случае с помощью стохастического полинома вида (2.1) каждая случайная величина  $\xi_v$  преобразуется в полиномиальную случайную величину  $\eta_{sv}$  в общем случае с различными постоянными коэффициентами  $h_{iv}$ .

В математической статистике часто приходится иметь дело с суммами случайных величин.

Прежде всего рассмотрим случай, когда коэффициенты  $h_{iv}$  для любой составляющей  $\xi_i$  не зависят от  $v$ , т.е.  $h_{iv} = h_i, i = \overline{0, s}$ .

В этом случае сумма полиномиальных случайных величин  $\eta_{sv}, v = \overline{1, n}$  по  $v$  будет равна случайной величине

$$\mu_{sn}(\xi) = \sum_{v=1}^n \eta_s(\xi_v) = nh_0 + \sum_{i=1}^s h_i \sum_{v=1}^n \varphi_i(\xi_v). \quad (2.4)$$

**Определение 2.4.** Правую часть равенства (2.4) будем называть обобщенным стохастическим полиномом (или многочленом) первого типа степени  $s$  размерностью  $n$ . Левую часть (2.4) будем называть полиномиальной суммой случайных величин 1-го типа, т.е. суммой полиномиальных случайных величин, которые получаются в результате полиномиальных преобразований каждой составляющей исходной векторной случайной величины  $\xi$ .

Из этого определения следует, что стохастический полином (2.1) является частным случаем стохастического полинома (2.4), когда размерность стохастического полинома (2.4) равна 1.

Кроме сумм случайных величин в математической статистике рассматриваются еще средние значения сумм случайных величин. Введем случайную величину

$$\lambda_{sn}(\xi) = \frac{1}{n} \mu_{sn}(\xi) = \frac{1}{n} \sum_{v=1}^n \eta_{sv} = h_0 + \sum_{i=1}^s h_i \frac{1}{n} \sum_{v=1}^n \varphi_i(\xi_v). \quad (2.5)$$

Определение 2.5. Правую часть равенства (2.5) будем называть средним обобщенным стохастическим полиномом 1-го типа степени  $s$  размерностью  $n$ . Левую часть (2.5) будем называть средним полиномиальных случайных величин 1-го типа.

В данной работе будут использоваться только стохастические полиномы 1-го типа. Однако, чтобы читатели имели представление о стохастических полиномах 2-го типа, приведем их выражения:

$$\begin{aligned} \mu_{sn} &= \sum_{v=1}^n \eta_{sv} = \sum_{v=1}^n h_{0v} + \sum_{i=1}^s \sum_{v=1}^n h_{iv} \varphi_i(\xi_v), \\ \lambda_{sn} &= \frac{1}{n} \mu_{sn} = \frac{1}{n} \sum_{v=1}^n \eta_{sv} = \frac{1}{n} \sum_{v=1}^n h_{0v} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^s \sum_{v=1}^n h_{iv} \varphi_i(\xi_v). \end{aligned}$$

Как видно из приведенных выражений, существенное отличие стохастических полиномов 2-го типа от 1-го типа состоит в том, что коэффициенты  $h_{iv}$  зависят от индекса  $v$  и будут различными для каждой функции  $\varphi_i(\xi_v)$ .

3. В том случае, когда  $\varphi_i(\xi_v) = \xi_v^i$ , правую часть (2.4) и (2.5) будем называть соответственно степенным стохастическим полиномом и средним степенным стохастическим полиномом 1-го типа степени  $s$  размерностью  $n$ . Если же  $\varphi_i(\xi_v) = \sin(pi\xi_v)$  или  $\cos(pi\xi_v)$ , то такие полиномы будем называть тригонометрическими.

Из выражений (2.4) и (2.5) видно, что как обобщенные стохастические полиномы, так и средние обобщенные стохастические полиномы 1-го типа степени  $s$  размерностью  $n$  зависят от элементарных статистик размерностью  $n$  вида

$$g_i(\xi) = \sum_{v=1}^n \varphi_i(\xi_v). \quad (2.6)$$

Определение 2.6. Элементарную статистику вида (2.6) будем называть  $g$ -статистикой степени  $i$  (от слова generalized – обобщенный), в то время как элементарную статистику



$$p_i(\xi) = \sum_{v=1}^n \xi_v^i$$

будем называть  $p$ -статистикой степени  $i$  (от слова power – степень), а статистику

$$t_i(\xi) = \sum_{v=1}^n \cos(ip\xi_v)$$

или

$$t_i(\xi) = \sum_{v=1}^n \sin(ip\xi_v)$$

будем называть  $t$ -статистиками степени  $i$  (от слова trigonometric – тригонометрический).

Следовательно, обобщенную полиномиальную сумму и обобщенное среднее полиномиальных случайных величин можно соответственно записать следующим образом:

$$\mu_{sn}(\xi) = nh_0 + \sum_{i=1}^s h_i g_i(\xi),$$

$$\lambda_{sn}(\xi) = h_0 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^s h_i g_i(\xi).$$

Стохастические полиномы 1-го типа степени  $s$  содержат  $s$  элементарных статистик, каждая размерностью  $p$ .

## 2.2. Тело и объем тела стохастического полинома

1. Пусть составляющие случайной величины  $\tilde{\xi}$  будут независимыми и одинаково распределенными случайными величинами. Легко показать, что в этом случае математические ожидания полиномиальной случайной величины  $\eta_s(\xi)$  (2.1), полиномиальной суммы случайных величин  $\mu_{sn}$  (2.4) и средней полиномиальных случайных величин  $\lambda_{sn}$  (2.5) будут соответственно равны:

$$E\eta_s(\xi) = E\lambda_{sn}(\tilde{\xi}) = h_0 + \sum_{i=1}^s h_i \Psi_i(\tilde{\theta}),$$

$$E\mu_{sn}(\tilde{\xi}) = n \left[ h_0 + \sum_{i=1}^s h_i \Psi_i(\tilde{\theta}) \right].$$

Из этих выражений видно, что математические ожидания случайных величин  $\eta_s(\xi)$  и  $\lambda_{sn}(\tilde{\xi})$  равны друг другу, в то время как математическое ожидание случайной величины  $\mu_{sn}(\tilde{\xi})$  будет в  $n$  раз

больше по сравнению с математическим ожиданием случайных величин  $\eta_s(\xi)$  и  $\lambda_{sn}(\xi)$ .

С другой стороны, дисперсии этих величин будут соответственно равны:

$$\sigma_{\eta s}^2 = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s h_i h_j F_{i,j}(\bar{\vartheta}), \quad (2.7)$$

$$\sigma_{\mu sn}^2 = n \sigma_{\eta s}^2,$$

$$\sigma_{\lambda sn}^2 = \frac{1}{n} \sigma_{\eta s}^2,$$

где

$$F_{i,j}(\bar{\vartheta}) = \Psi_{i,j}(\bar{\vartheta}) - \Psi_i(\bar{\vartheta}) \Psi_j(\bar{\vartheta}), \quad (2.8)$$

$$\Psi_{i,j}(\bar{\vartheta}) = E \varphi_i(\xi) \varphi_j(\xi). \quad (2.9)$$

Из полученных выражений видно, что дисперсии случайных величин  $\mu_{sn}(\bar{\xi})$  и  $\lambda_{sn}(\bar{\xi})$  зависят от двух величин, а именно от размерности  $n$  вектора  $\bar{\xi}$  и от величины, равной дисперсии стохастического полинома степени  $s$  (2.1), т.е. от величины правой части (2.7).

Определение 2.7. Функции  $\Psi_{i,j}(\bar{\vartheta})$ , зависящие в общем случае от параметра  $\bar{\vartheta}$ , будем называть *коррелянтами* функций  $\varphi_i(\xi)$  и  $\varphi_j(\xi)$ , а функции  $F_{i,j}(\bar{\vartheta})$  будем называть *центрированными коррелянтами* относительно функций  $\Psi_i(\bar{\vartheta})$  и  $\Psi_j(\bar{\vartheta})$ .

В том случае, когда стохастический полином задан в классе степенных функций (или описывается с помощью начальных моментов), тогда и коррелянты  $\Psi_{i,j}(\bar{\vartheta})$  и центрированные коррелянты  $F_{i,j}(\bar{\vartheta})$  выражаются через моменты следующим образом:

$$\begin{aligned} \Psi_{i,j}(\bar{\vartheta}) &= \alpha_{i+j}(\bar{\vartheta}), \\ F_{i,j}(\bar{\vartheta}) &= \alpha_{i+j}(\bar{\vartheta}) - \alpha_i(\bar{\vartheta}) \alpha_j(\bar{\vartheta}). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Определение 2.8. Если стохастический полином описывается с помощью начальных моментов, то функции  $F_{i,j}(\bar{\vartheta})$  будем называть *центрированными моментными коррелянтами* размером  $(i, j)$ .

2. Так как в силу определения  $\sigma_{\eta s}^2 \geq 0$ , то правая часть (2.7) является в общем случае положительно полуопределенной квадратичной формой и  $\sigma_{\eta s}^2 = 0$  только в том случае, если все коэффициенты  $h_i$  равны нулю. При этом матрица этой формы



$$F_s(\mathfrak{F}) = \|F_{i,j}(\mathfrak{F})\|, \quad i, j = \overline{1, s}$$

состоит из центрированных коррелянтов  $F_{i,j}(\mathfrak{F})$ .

Определение 2.9. Матрицу  $F_s(\mathfrak{F})$  в дальнейшем будем называть *телом* размером  $s \times s$  обобщенного стохастического полинома при задании его в классе функций  $\varphi_i(\xi)$  или при описании его с помощью функций  $\Psi_i(\mathfrak{F})$ ,  $i = \overline{1, s}$ .

При этом если  $s$  является конечной величиной, то будем говорить, что имеется частичное тело, а если  $s$  равно бесконечности, то тело стохастического полинома будет полным.

Обозначим определитель матрицы  $F_s(\mathfrak{F})$  через  $\Delta_s(\mathfrak{F})$ , т.е.

$$\Delta_s(\mathfrak{F}) = |F_s(\mathfrak{F})|.$$

Определение 2.10. Определитель матрицы  $F_s(\mathfrak{F})$  в дальнейшем будем называть *объемом* тела обобщенного стохастического полинома размером  $s$ . По аналогии будем называть объем тела частичным, если он соответствует частичному телу, т.е. когда  $s$  является конечной величиной. Соответственно, объем тела будет полным, если он соответствует полному телу.

Фактически определитель  $\Delta_s(\mathfrak{F})$  является определителем Грамма, когда над множеством функций  $\varphi_i(\xi)$  задано скалярное произведение в виде

$$\Psi_{i,j}(\mathfrak{F}) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_i(x) \varphi_j(x) p(x/\mathfrak{F}) dx.$$

Как было показано в [3], при нахождении оценок случайных величин методом максимизации полинома интерес представляют такие функции  $\varphi_i(\xi)$  от случайных величин, для которых объем тела будет строго больше нуля, т.е.

$$\Delta_s(\mathfrak{F}) = |F_{i,j}(\mathfrak{F})| > 0, \quad i, j = \overline{1, s}.$$

Согласно свойств определителя Грамма это будет иметь место, если функции  $\varphi_i(\xi)$  будут линейно независимыми функциями при любом  $s$ .

Таким образом, получили первое ограничение на множество функций  $\varphi_i(\xi)$ , с помощью которых можно различным образом задавать стохастический полином, и это ограничение состоит в том, что функции  $\varphi_i(\xi)$  должны быть линейно независимыми функциями.

Пусть имеется множество линейно независимых функций  $\varphi_i(\xi)$ . Как видно из определения, объем тела  $\Delta_s(\mathfrak{F})$  в общем случае зависит от параметра распределения  $\mathfrak{F}$ . Очевидно, что составляющие параметра не

могут принимать произвольные значения, а должны принимать значения в таком интервале, где объем тела  $\Delta_s(\mathfrak{F})$  будет больше нуля. Таким образом, объем тела стохастического полинома накладывает ограничения на область допустимых значений, в которой параметры распределения могут принимать значения.

### 2.3. Основное свойство стохастических полиномов степени $s$

1. Стохастические полиномы обладают множеством замечательных свойств, которые до настоящего времени в полной мере не изучены. В данном разделе будет обосновано основное свойство стохастических полиномов, которое будет проявляться при обосновании новых методов оценки параметров и проверки статистических гипотез, основанных на использовании стохастических полиномов.

В общем случае основное свойство стохастических полиномов можно кратко сформулировать следующим образом: стохастические полиномы способны уменьшать дисперсию исходной случайной величины  $\xi$ .

Теперь обоснуем это свойство более подробно и математически корректно.

Пусть имеется случайная величина  $\xi$  с математическим ожиданием  $a_0$ , дисперсией  $\chi_2$  и другими параметрами  $\mathfrak{F}_0$ . Пусть также имеется множество линейно-независимых функций  $\varphi_i(\xi)$  от исходной случайной величины  $\xi$  с математическими ожиданиями  $\Psi_i(\mathfrak{F}_0)$  и пусть математические ожидания

$$F_{1,i}(\mathfrak{F}_0) = E(\xi - a_0)[\varphi_i(\xi) - \Psi(\mathfrak{F}_0)], \quad i = \overline{1, s}$$

не все равны нулю.

Рассмотрим случайную величину  $\delta_s$ , равную разности исходной случайной величины  $\xi$  и обобщенного стохастического полинома степени  $s$  (или полиномиальной случайной величины  $\eta_s$ ) вида (2.1), т.е.

$$\delta_s = \xi - \eta_s = \xi - h_0 - \sum_{i=1}^s h_i \varphi_i(\xi).$$

Утверждение 2.1. Существуют такие коэффициенты  $h_i$ ,  $i = \overline{0, s}$ , для которых дисперсия случайной величины  $\delta_s$  будет меньше  $\chi_2$ , т.е. меньше дисперсии исходной случайной величины  $\xi$ .

Доказательство. Пусть константа

$$h_0 = -a_0 + \sum_{i=1}^s h_i \Psi_i(\mathfrak{F}_0),$$



тогда математическое ожидание случайной величины  $\delta_s$  равно нулю, а ее дисперсия равна

$$\sigma_{\delta}^2 = \chi_2 - 2 \sum_{i=1}^s h_i F_{1,i}(\bar{g}_0) + \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s h_i h_j F_{i,j}(\bar{g}_0). \quad (2.11)$$

Из (2.11) видно, что правая часть  $\sigma_{\delta}^2$  как дисперсия случайной величины есть величина положительно полуопределенная, т.е.  $\sigma_{\delta}^2 \geq 0$ . Правая часть (2.11) является квадратичной формой относительно коэффициентов  $h_i$  и ее можно рассматривать как функцию многих переменных  $h_i$ . Причём, если  $h_i = 0$  для всех  $i = \overline{1, s}$ , то значение  $\sigma_{\delta}^2 = \chi_2$  и с изменением переменных  $h_i$  значение функции  $\sigma_{\delta}^2(h_1, h_2, \dots, h_s)$  может как возрастать, так и убывать. Очевидно, функция  $\sigma_{\delta}^2(h_1, h_2, \dots, h_s)$  является многомерной параболой относительно  $h_i$ . В общем случае такая парабола может быть как вогнутой, так и выпуклой (т.е. она может иметь экстремум). Все определяется центрированными коррелянтами  $F_{i,j}(\bar{g}_0)$ . Если они таковы, что многомерная парабола вогнута, то с изменением  $h_i$  значение  $\sigma_{\delta}^2(h_1, h_2, \dots, h_s)$  будет уменьшаться от  $\chi_2$  и, следовательно,  $\sigma_{\delta}^2$  будет меньше  $\chi_2$ . Так как  $\sigma_{\delta}^2$  является функцией многих переменных  $h_i$ , то, как известно, вогнутость или выпуклость этой функции определяется знаком определителя с элементами

$$\frac{\partial^2 \sigma_{\delta}^2}{\partial h_i \partial h_j}, \quad i, j = \overline{1, s}.$$

Если этот определитель больше нуля, то функция в точке экстремума имеет минимум, т.е. функция вогнута. Если же определитель меньше нуля, то  $\sigma_{\delta}^2$  как функция  $h_i$  имеет максимум, т.е. она выпуклая.

Легко показать, что для правой части (2.11) элементами указанного определителя являются центрированные коррелянты  $F_{i,j}(\bar{g}_0)$  и, следовательно, этот определитель равен объему тела стохастического полинома. Как показано в разделе 2.2, для линейно независимых функций  $\varphi_i(\xi)$  объем тела всегда есть величиной положительной. Таким образом, правая часть (2.11) как функция параметров  $h_i$  всегда является вогнутой многомерной параболой. Следовательно, существуют такие коэффициенты  $h_i$ , для которых имеет место неравенство  $\sigma_{\delta}^2 \leq \chi_2$ , т.е. имеет место утверждение 2.1.

2. Представляет интерес выяснить, каким может быть уменьшение дисперсии исходной случайной величины.

Утверждение 2.2. Величина коэффициентов  $h_i$ , обеспечивающих минимум правой части (2.11), находится из решения системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^s h_j F_{i,j}(\bar{\vartheta}_0) = F_{1,i}(\bar{\vartheta}_0), \quad i = \overline{1, s}. \quad (2.12)$$

Доказательство. Согласно теории функций многих переменных, значение переменных, при которых достигается минимум функции, находится из решения системы уравнений

$$\frac{\partial \sigma_{\delta}^2}{\partial h_i} = 0, \quad i = \overline{1, s}.$$

Используя правую часть (2.11), легко получить систему уравнений (2.12).

Следствие 1. Коэффициенты  $h_i$ , обеспечивающие минимум правой части (2.11), являются функциями истинных значений параметров  $\bar{\vartheta}_0$ , т.е.

$$h_i = h_i(\bar{\vartheta}_0).$$

Это следует из решения системы уравнений (2.12).

Следствие 2. Система линейных алгебраических уравнений (2.12) имеет единственное решение.

Это следует из того, что система (2.12) является неоднородной системой, так как по предположению не все  $F_{1,i}(\bar{\vartheta}_0)$  равны нулю. Кроме того, система (2.12) является определенной, так как определитель системы (в нашем случае объем тела стохастического полинома) не равен нулю. Поэтому имеет место следствие 2.

Утверждение 2.3. Для коэффициентов  $h_i(\bar{\vartheta}_0)$ , найденных из решения системы линейных алгебраических уравнений (2.12), справедливо равенство

$$J_s(\bar{\vartheta}_0) = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s h_i(\bar{\vartheta}_0) h_j(\bar{\vartheta}_0) F_{i,j}(\bar{\vartheta}_0) = \sum_{i=1}^s h_i(\bar{\vartheta}_0) F_{1,i}(\bar{\vartheta}_0). \quad (2.13)$$

Доказательство. Пусть коэффициенты  $h_i(\bar{\vartheta}_0)$   $i = \overline{1, s}$  являются решением системы линейных алгебраических уравнений (2.12). Тогда, умножив каждое  $i$ -е уравнение в (2.12) на найденные  $h_i(\bar{\vartheta}_0)$  и просуммировав по  $i$  левую и правую части полученных выражений, получим (2.13).

Следствие. Для любых  $\bar{\vartheta}_0 \in \bar{\Theta}$  сумма

$$J_s(\bar{\vartheta}_0) = \sum_{i=1}^s h_i(\bar{\vartheta}_0) F_{1,i}(\bar{\vartheta}_0)$$



есть величина положительная.

Это следует из первой суммы в (2.13), которая является положительно определённой.

Определение 2.11. Величину  $J_s(\mathfrak{F}_0)$  в дальнейшем будем называть *инфоркуной* (*inforkune*) обобщённого стохастического полинома.

Утверждение 2.4. Минимальное значение дисперсии случайной величины  $\delta_s$  равно

$$\sigma_{\delta_{\min}}^2 = \chi_2 - J_s(\mathfrak{F}_0). \quad (2.14)$$

Доказательство. Это непосредственно следует из (2.11) с использованием равенства (2.13). Следовательно, минимальное значение дисперсии случайной величины  $\delta_s$  равно разности между дисперсией исходной случайной величины и инфоркуной.

Следствие 1. Для инфоркуны  $J_s(\mathfrak{F}_0)$  при любом  $s$  и  $\mathfrak{F}_0 \in \Theta$  имеет место неравенство

$$J_s(\mathfrak{F}_0) \leq \chi_2. \quad (2.15)$$

Это непосредственно следует из (2.14).

Следствие 2. Для инфоркуны  $J_s(\mathfrak{F}_0)$  имеет место сходимость

$$\lim_{s \rightarrow \infty} J_s(\mathfrak{F}_0) = J(\mathfrak{F}_0) < \infty, \quad \forall \mathfrak{F}_0 \in \Theta, \quad (2.16)$$

где

$$J(\mathfrak{F}_0) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} h_i(\mathfrak{F}_0) h_j(\mathfrak{F}_0) F_{i,j}(\mathfrak{F}_0) = \sum_{i=1}^{\infty} h_i(\mathfrak{F}_0) d_i(\mathfrak{F}_0). \quad (2.13')$$

Это равенство следует из (2.15) с учётом (2.13).

Определение 2.12. Величину  $J(\mathfrak{F}_0)$  в дальнейшем будем называть *предельной инфоркуной* обобщённого стохастического полинома.

Очевидно для предельной инфоркуны справедливо равенство  $0 < J(\mathfrak{F}_0) \leq \chi_2$ .

3. В начале раздела было сформулировано основное свойство стохастических полиномов, которое состоит в том, что с помощью стохастических полиномов, которые формируются из исходной случайной величины, можно уменьшить дисперсию исходной случайной величины. Это основное свойство подтверждено тем, что найден метод, позволяющий находить коэффициенты стохастического полинома, обеспечивающие наибольшее уменьшение дисперсии.

## 2.4. Примеры проявления основного свойства при использовании степенных стохастических полиномов

1. Проиллюстрируем результаты раздела 2.3 на примере использования степенных стохастических полиномов, применяя полиномы различных степеней, начиная с  $s = 2$ .

Предположим, что имеется случайная величина  $\xi$  с нулевым математическим ожиданием, дисперсией  $\chi_2$  и моментами  $\alpha_3(\bar{g}_0)$ ,  $\alpha_4(\bar{g}_0)$ ,  $\alpha_5(\bar{g}_0)$ ,  $\alpha_6(\bar{g}_0)$ . Так как функции  $\varphi_i(\xi)$  должны быть попарно линейно-независимыми между собой и линейно-независимыми от  $\xi$ , то в качестве степенного стохастического полинома степени  $s$  возьмем полином вида

$$\eta_s = h_0 + \sum_{i=2}^s h_i \xi^i.$$

2. При  $s = 2$  полиномиальная случайная величина  $\delta_2$  степени 2 имеет вид

$$\delta_2 = \xi - h_2 [\xi^2 - \chi_2(\bar{g}_0)].$$

Дисперсия случайной величины  $\delta_2$  равна

$$\sigma_{\delta_2}^2 = \chi_2 - 2h_2\alpha_3(\bar{g}_0) + h_2^2 F_{2,2}(\bar{g}_0), \quad (2.17)$$

где центрированный коррелянт размером (2,2) равен

$$F_{2,2}(\bar{g}_0) = \alpha_4(\bar{g}_0) - \chi_2^2(\bar{g}_0).$$

Легко показать, что коэффициент  $h_2$ , обеспечивающий минимум правой части (2.17), будет равен

$$h_2(\bar{g}_0) = \frac{\alpha_3(\bar{g}_0)}{\alpha_4(\bar{g}_0) - \alpha_2^2(\bar{g}_0)}.$$

В правой части полученного выражения целесообразно перейти, используя выражения (1.6), от моментов к кумулянтам. Тогда

$$h_2(\chi_2, \gamma_3, \gamma_4) = \frac{\gamma_3}{\chi_2^{0.5}(\gamma_4 + 2)}, \quad (2.18)$$

где  $\gamma_3$  и  $\gamma_4$  — истинные значения коэффициентов асимметрии и эксцесса исходной случайной величины  $\xi$ .

Отметим, что из выражения (2.18) видно, что в качестве параметров случайной величины  $\xi$  могут быть взяты дисперсия  $\chi_2$ , коэффициент асимметрии  $\gamma_3$  и коэффициент эксцесса  $\gamma_4$ .

Подставив (2.18) в выражение для  $\delta_2$ , получим, что



$$\delta_2 = \xi - \frac{\gamma_3}{\chi_2^{0.5}(\gamma_4 + 2)} [\xi^2 - \chi_2], \quad (2.19)$$

а дисперсия этой полиномиальной случайной величины будет равна

$$\sigma_{\delta_2}^2 = \chi_2 g_2, \quad (2.20)$$

где

$$g_2 = 1 - \frac{\gamma_3^2}{\gamma_4 + 2}.$$

В дальнейшем величину  $g_i$ ,  $i = 2, 3, \dots$  будем называть коэффициентом уменьшения дисперсии.

Из выражения (2.20) видно, что дисперсия случайной величины (2.19) будет в  $g_2$  раз меньше, чем дисперсия исходной случайной величины  $\xi$ . Другими словами, если из исходной случайной величины  $\xi$  вычесть первый член степенного стохастического полинома в виде централизованного квадрата исходной случайной величины, умноженной на коэффициент (2.18), то дисперсия результирующей случайной величины по сравнению с исходной уменьшается в  $g_2$  раз.

Из выражения для  $g_2$  видно, что уменьшение дисперсии будет для тех случайных величин, у которых коэффициент асимметрии  $\gamma_3$  не равен нулю. Если  $\gamma_3 = 0$ , то никакого уменьшения дисперсии не будет. С другой стороны, хорошо известно [2;5], что коэффициенты  $\gamma_3$  и  $\gamma_4$  не могут принимать произвольные значения, а для них существует неравенство

$$\gamma_4 + 2 \geq \gamma_3^2. \quad (2.21)$$

В том случае, если случайная величина  $\xi$  имеет такие  $\gamma_3$  и  $\gamma_4$ , что в (2.21) имеет место равенство, тогда  $g_2 = 0$ . Следовательно, дисперсия случайной величины  $\delta_2$  равна нулю. Это предельный, сингулярный случай.

На рис. 2.1 приведены графики зависимости  $g_2$  от  $\gamma_3$  при различных  $\gamma_4$ , равных -1.8; 0 и 2. Из рисунка видно, что при стремлении  $\gamma_3$  к границе области определения величина  $g_2$  стремится к нулю.

3. При  $s=3$  полиномиальная случайная величина  $\delta_3$  степени 3 имеет вид

$$\delta_3 = \xi - h_2 [\xi^2 - \alpha_2(\mathfrak{F}_0)] - h_3 [\xi^3 - \alpha_3(\mathfrak{F}_0)], \quad (2.22)$$

а коэффициенты  $h_2$  и  $h_3$ , обеспечивающие минимум дисперсии  $\delta_3$ , находятся из решения системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} h_2 F_{2,2}(\bar{g}_0) + h_3 F_{2,3}(\bar{g}_0) &= \alpha_3(\bar{g}_0), \\ h_3 F_{3,2}(\bar{g}_0) + h_3 F_{3,3}(\bar{g}_0) &= \alpha_4(\bar{g}_0). \end{aligned} \quad (2.23)$$

В (2.23) выражение для коррелянты  $F_{2,2}(\bar{g}_0)$  приведено ранее, а центрированные коррелянты размером (2,3) и (3,3) соответственно равны:

$$\begin{aligned} F_{2,3}(\bar{g}_0) &= \alpha_5(\bar{g}_0) - \alpha_2(\bar{g}_0)\alpha_3(\bar{g}_0), \\ F_{3,3}(\bar{g}_0) &= \alpha_6(\bar{g}_0) - \alpha_3^2(\bar{g}_0). \end{aligned}$$

В приведенных выражениях целесообразно, как и ранее, перейти от моментного описания к кумулянтному. Тогда

$$\begin{aligned} F_{2,2}(\chi_2, \gamma_4) &= \chi_2^2(\gamma_4 + 2), \\ F_{2,3}(\chi_2, \gamma_4, \gamma_3) &= \chi_2^{2,5}(\gamma_5 + 9\gamma_3), \\ F_{3,3}(\chi_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_6) &= \chi_2^3(\gamma_6 + 15\gamma_4 + 9\gamma_3^2 + 15). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Из выражений (2.24) видно, что в качестве параметров  $\bar{g}$  в данном случае выступает дисперсия  $\chi_2$  и кумулянтные коэффициенты  $\gamma_3 - \gamma_6$ .

Определитель системы уравнений (2.23) (или объем тела степенного стохастического полинома степени 3) имеет вид

$$\Delta_3 = \chi_2^5 [2\gamma_6 + \gamma_4(\gamma_6 + 15\gamma_4 + 9\gamma_3^2 + 45) - \gamma_5^2 - 18\gamma_3\gamma_5 - 63\gamma_3^2 + 30].$$

Можно показать, что решением системы уравнений (2.23) будет

$$\begin{aligned} h_2(\chi_2, \bar{\gamma}) &= \frac{\chi_2^{4,5}}{\Delta_3} [\gamma_3(\gamma_6 + 6\gamma_4 + 9\gamma_3^2 - 12) - \gamma_5(\gamma_4 + 3)], \\ h_3(\chi_2, \bar{\gamma}) &= \frac{\chi_2^4}{\Delta_3} [(\gamma_4 + 3)(\gamma_4 + 2) - \gamma_3(\gamma_5 + 9\gamma_3)]. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Следовательно, инфоркуна  $J_3(\chi_2, \bar{\gamma})$  будет равна

$$J_3(\chi_2, \bar{\gamma}) = \frac{\chi_2^6}{\Delta_3} \{ \gamma_3^2(\gamma_6 - 3\gamma_4 + 9\gamma_3^2 - 39) - 2\gamma_3\gamma_5(\gamma_4 + 3) + (\gamma_4 + 3)^2(\gamma_4 + 2) \}.$$

Используя полученные выражения, легко получить, что коэффициент уменьшения дисперсии  $g_3$  в данном случае будет равен

$$g_3 = 1 - \frac{\gamma_3^2(\gamma_6 - 3\gamma_4 + 9\gamma_3^2 - 39) - 2\gamma_3\gamma_5(\gamma_4 + 3) + (\gamma_4 + 3)^2(\gamma_4 + 2)}{2\gamma_6 + \gamma_4(\gamma_6 + 15\gamma_4 + 9\gamma_3^2 + 45) - \gamma_5^2 - 18\gamma_3\gamma_5 - 63\gamma_3^2 + 30}.$$

Из полученного выражения видно, что коэффициент уменьшения дисперсии зависит от всех кумулянтных коэффициентов  $\gamma_3 - \gamma_6$ .

Интересно рассмотреть частные случаи.



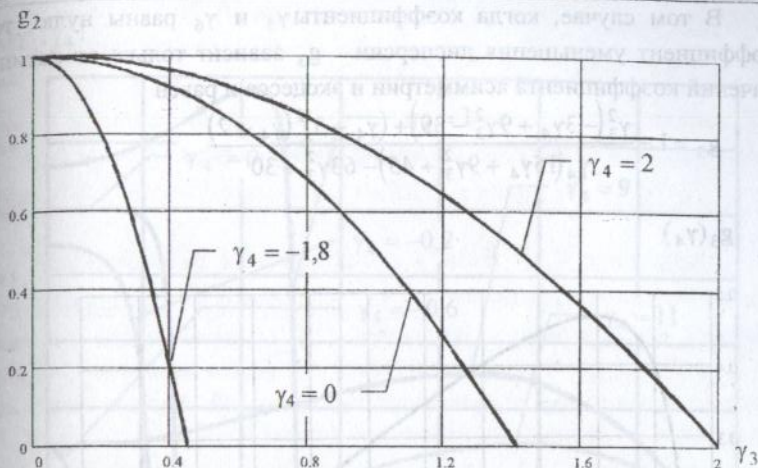


Рис. 2.1

4. В том случае, когда  $\gamma_3 = \gamma_4 = \gamma_5 = \gamma_6 = 0$ , то  $g_3 = 0,4$ , т.е. в этом предельном случае вычитание из исходной случайной величины стохастического полинома приводит к существенному уменьшению дисперсии исходной случайной величины.

5. При  $s=2$  было показано, что, если  $\gamma_3 = 0$ , то никакого уменьшения дисперсии не происходит. Если же при  $s=3$  коэффициент асимметрии  $\gamma_3 = 0$ , то коэффициент уменьшения дисперсии равен

$$g_3 = 1 - \frac{(\gamma_4 + 3)^2(\gamma_4 + 2)}{2\gamma_6 + \gamma_4(\gamma_6 + 15\gamma_4 + 45) - \gamma_5^2 + 30},$$

т.е. в этом случае уменьшение дисперсии, прежде всего, определяется коэффициентом эксцесса  $\gamma_4$ . В крайнем случае, когда и  $\gamma_5$ , и  $\gamma_6$  равны нулю, то коэффициент уменьшения дисперсии зависит только от  $\gamma_4$  и равен

$$g_3 = 1 - \frac{(\gamma_4 + 3)^2}{15(\gamma_4 + 1)}.$$

График зависимости  $g_3$  от  $\gamma_4$  в данном случае приведен на рис. 2.2.

Важный результат состоит в том, что при стремлении  $\gamma_4$  к величине 9,623 или -0,623 коэффициент  $g_3$  уменьшается и стремится к нулю.

В том случае, когда коэффициенты  $\gamma_5$  и  $\gamma_6$  равны нулю, тогда коэффициент уменьшения дисперсии  $g_3$  зависит только от истинных значений коэффициента асимметрии и эксцесса и равен

$$g_3 = 1 - \frac{\gamma_3^2(-3\gamma_4 + 9\gamma_3^2 - 39) + (\gamma_4 + 3)^2(\gamma_4 + 2)}{\gamma_4(15\gamma_4 + 9\gamma_3^2 + 45) - 63\gamma_3^2 + 30}.$$

$g_3(\gamma_4)$

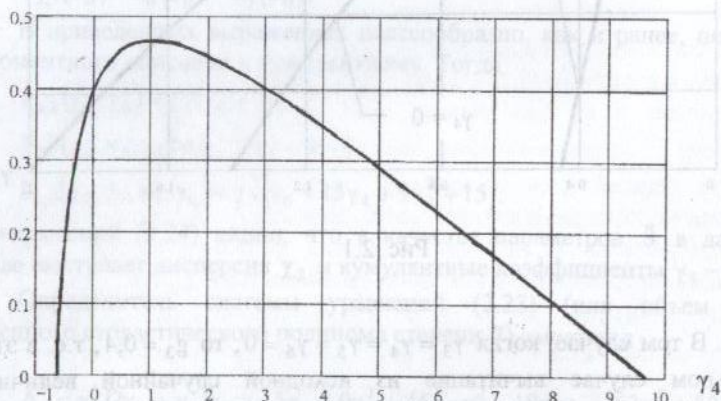


Рис. 2.2

На рис. 2.3 приведены графики зависимости  $g_3$  от положительных  $\gamma_3$ , когда значения  $\gamma_4$  равны -0,6; -0,2; 0; 1; 9 и 11. Из графиков, прежде всего, видно, что для коэффициента эксцесса существуют области значений, для которых величина уменьшения дисперсии может быть значительно меньше величины 0,4, которая имела место при  $\gamma_4 = 0$ , хотя имеется область значений  $\gamma_4$ , при которых величина уменьшения дисперсии может быть и больше 0,4. Второй важный результат состоит в том, что для каждого значения  $\gamma_4$  существует такое значение  $\gamma_3$ , при котором коэффициент уменьшения дисперсии равен нулю. Третий результат состоит в том, что для некоторых значений  $\gamma_4$  с ростом  $\gamma_3$  коэффициент уменьшения дисперсии увеличивается, достигает максимума, а потом уменьшается до нуля. Однако максимальное значение не превышает 0,6, т.е. и для максимальных значений коэффициент уменьшения дисперсии остается меньше единицы.



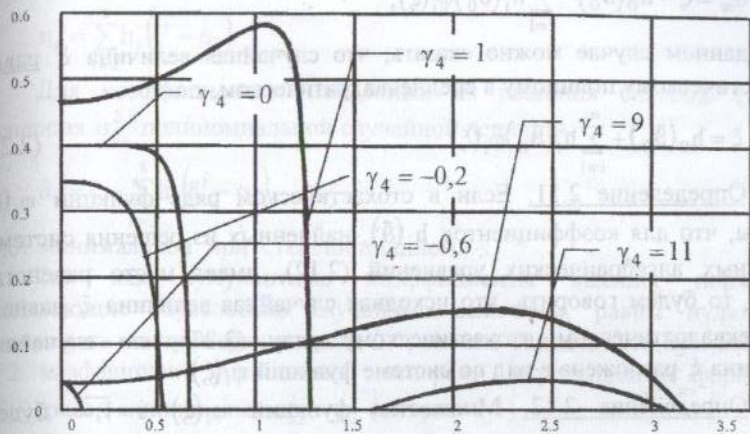
$g_3(\gamma_3, \gamma_4)$ 

Рис. 2.3

## 2.5. Разложение случайной величины в стохастический ряд

1. В разделе 2.3 было показано, что стохастические полиномы для коэффициентов  $h_i(\mathfrak{F}_0)$ , найденных из решения системы уравнений (2.12), сходятся в среднеквадратическом при степени полинома  $s \rightarrow \infty$ . При этом величина среднеквадратического значения стохастического полинома зависит от предельной инфоркуны  $J(\mathfrak{F}_0)$ , которая определяется выражением (2.13'). Интересно исследовать соотношение между дисперсией исходной случайной величины  $\chi_2$  и  $J(\mathfrak{F}_0)$ .

Возможны два случая. В первом случае может быть предельная инфоркуна

$$J(\mathfrak{F}_0) < \chi_2$$

и тогда

$$\sigma_8^2 = \chi_2 - J(\mathfrak{F}_0) > 0,$$

т.е. в этом случае при проявлении основного свойства стохастических полиномов происходит уменьшение дисперсии на определенную величину.

Во втором случае предельная инфоркуна  $J(\mathfrak{F})$  такова, что

$$\sigma_8^2 = \chi_2 - J(\mathfrak{F}_0) = 0. \quad (2.26)$$

Так как

$$\delta_{\infty} = \xi - h_0(\bar{\vartheta}_0) - \sum_{i=1}^{\infty} h_i(\bar{\vartheta}_0) \varphi_i(\xi),$$

то в данном случае можно сказать, что случайная величина  $\xi$  равна стохастическому полиному в среднеквадратическом, т.е.

$$\xi = h_0(\bar{\vartheta}_0) + \sum_{i=1}^{\infty} h_i(\bar{\vartheta}_0) \varphi_i(\xi). \quad (2.27)$$

Определение 2.11. Если в стохастическом ряде функции  $\varphi_i(\xi)$  таковы, что для коэффициентов  $h_i(\bar{\vartheta})$ , найденных из решения системы линейных алгебраических уравнений (2.12), имеет место равенство (2.26), то будем говорить, что исходная случайная величина  $\xi$  равна в среднеквадратическом стохастическому ряду (2.27) или случайная величина  $\xi$  разложена в ряд по системе функций  $\varphi_i(\xi)$ .

Определение 2.12. Множество функций  $\varphi_i(\xi)$   $i = \overline{1, \infty}$  будем называть стохастическим обобщённым базисом при разложении случайной величины в стохастический ряд.

2. Отметим, что при конечной степени полинома  $s$  для случайной величины  $\xi$  имеет место приближительное равенство, т.е.

$$\xi \approx h_0(\bar{\vartheta}_0) + \sum_{i=1}^s h_i(\bar{\vartheta}_0) \varphi_i(\xi).$$

При этом, если математическое ожидание случайной величины  $\xi$  равно  $a_0 \neq 0$ , то математическое ожидание правой части приведённого равенства в общем случае не равно  $a_0$ , даже если  $h_0(\bar{\vartheta}_0) = a_0$ , т.е.

$$E\xi = a_0 \neq h_0(\bar{\vartheta}_0) + \sum_{i=1}^s h_i(\bar{\vartheta}_0) \Psi_i(\bar{\vartheta}_0).$$

И только при  $s \rightarrow \infty$  может иметь место сходимость

$$\lim_{s \rightarrow \infty} [h_0(\bar{\vartheta}_0) + \sum_{i=1}^s h_i(\bar{\vartheta}_0) \Psi_i(\bar{\vartheta}_0)] = a_0.$$

Это может иметь место, если

$$\lim_{s \rightarrow \infty} [\sum_{i=1}^s h_i(\bar{\vartheta}_0) \Psi_i(\bar{\vartheta}_0)] = 0.$$

3. Пример 2.6. Пусть  $\xi$  — гауссовская случайная величина с нулевым математическим ожиданием и дисперсией  $\chi_2$ . Известно, что у такой случайной величины моменты нечетного порядка равны нулю, а четные моменты определяются выражением

$$\alpha_r = \chi_2^{\frac{r}{2}} (i-1)!! , \quad r = 2, 4, 6, \dots$$



Если в качестве базисных функций  $\varphi_i(\xi)$  использовать степенные преобразования, то стохастический полином степени  $s$  будет иметь вид

$$\eta_s = \sum_{i=2}^s h_i (\xi^i - \alpha_i).$$

Для коэффициентов, найденных из решения системы (2.12), дисперсия  $\sigma_{\delta_s}^2$  полиномиальной случайной величины

$$\delta_s = \xi - \sum_{i=2}^s h_i (\xi^i - \alpha_i)$$

будет минимальной при степени полинома  $s$ .

Так как кумулянтные коэффициенты высших порядков, описывающие гауссовские случайные величины, равны нулю, то, основываясь на примерах раздела 2.4, можем увидеть, что при степени  $s=2$  коэффициент уменьшения дисперсии, определяемый формулой (2.20), равен единице, т.е.  $\sigma_{\delta_2}^2 = \chi_2$  (см. рис. 2.1).

Динамика изменения величины коэффициента уменьшения дисперсии  $g_s = \sigma_{\delta_s}^2 / \chi_2$  при степенях  $s \geq 3$  приведена на рис. 2.4.

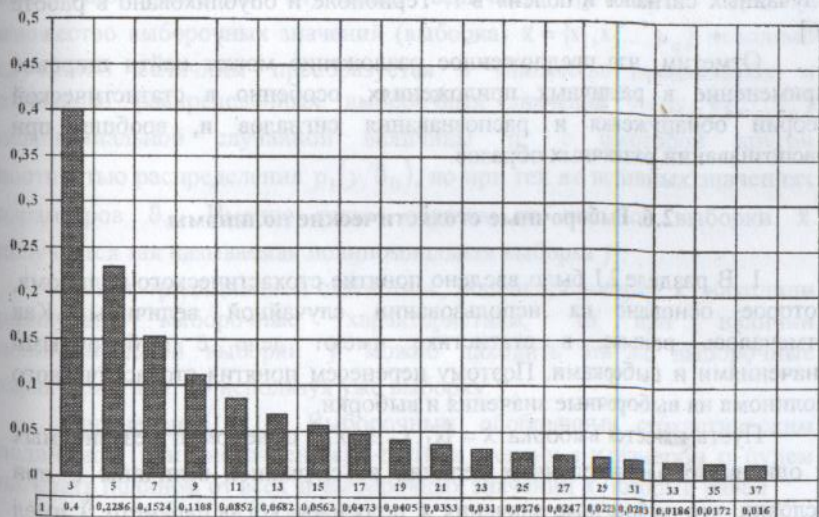


Рис. 2.4

Необходимо отметить, что величина  $\sigma_{\delta s}^2$  изменяется только для нечетных степеней стохастического полинома. Этот эффект порожден равенством нулю коэффициентов  $h_i$  четного порядка, что, в свою очередь, обусловлено нулевыми значениями нечетных моментов  $\alpha_i$  рассматриваемой случайной величины  $\xi$ .

Анализ результатов, приведенных на рис. 2.4, показывает, что с ростом степени полинома дисперсия полиномиальной случайной величины  $\delta_s$  значительно уменьшается. Следовательно, стохастический полином  $\eta_s$  при  $s \rightarrow \infty$  будет в среднеквадратическом сходиться к исходной гауссовской случайной величине  $\xi$ . Другими словами, можно говорить о том, что гауссовская случайная величина  $\xi$  может быть разложена в степенной стохастический ряд.

Предложенное разложение случайной величины в ряд является новым и необычным. Это разложение отличается от рядов Тейлора и Фурье. Его необычность и новизна состоят в том, что случайная величина разлагается в ряд не по системе ортогональных независимых функций, а по системе функций от этой же случайной величины. Впервые о возможности такого разложения было доложено в 1993 г. на международном симпозиуме «Вероятностные модели и обработка случайных сигналов и полей» в г. Тернополе и опубликовано в работе [6].

Отметим, что предложенное разложение может найти широкое применение в различных приложениях, особенно в статистической теории обнаружения и распознавания сигналов и, вообще, при распознавании различных образов.

## 2.6. Выборочные стохастические полиномы

1. В разделе 2.1 было введено понятие стохастического полинома, которое основано на использовании случайной величины. Как отмечалось раньше, в статистике имеют дело с выборочными значениями и выборками. Поэтому перенесем понятия стохастического полинома на выборочные значения и выборки.

Пусть имеется выборка  $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  объемом  $n$  независимых и одинаково распределенных величин из случайной величины  $\xi$  при условии, что выборочные значения  $\mathbf{x}$  получены, когда параметр  $\vartheta$  имел истинное значение, равное  $\vartheta_0$ .

**Определение 2.13.** Выборочным обобщенным стохастическим полиномом или многочленом степени  $s$  и размером  $l$  будем называть полином от одного выборочного значения  $x_v$ , который равен



$$y_v = h_0 + \sum_{i=1}^s h_i \varphi_i(x_v), \quad (2.28)$$

где  $\varphi_i(\cdot)$  – те же функции, что и при определении стохастического полинома.

Как видно из (2.28), выборочные стохастические полиномы определяются через функции  $\varphi_i(\cdot)$ , в которых аргумент равен выборочному значению  $x_v$ . Таким образом, с помощью стохастического полинома правой части (2.28) выборочное значение  $x_v$  исходной случайной величины  $\xi$  преобразуется в выборочное значение  $y_v$  полиномиальной случайной величины  $\eta_s$ .

Определение 2.14. Выборочное значение  $y_v$  полиномиальной случайной величины  $\eta_s$ , полученное с помощью равенства (2.28) и соответствующее выборочному значению  $x_v$  исходной случайной величины  $\xi$ , будем называть полиномиальным выборочным значением.

Следовательно, с помощью выборочного стохастического полинома вида (2.28) происходит преобразование каждого выборочного значения  $x_v$  исходной случайной величины  $\xi$  в полиномиальное выборочное значение случайной величины  $\eta_s$ . Таким образом, множество выборочных значений (выборка)  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  исходной случайной величины преобразуется в множество независимых и одинаково распределенных выборочных значений  $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  полиномиальной случайной величины  $\eta_s$  с некоторой другой плотностью распределения  $p_1(y/\mathfrak{F}_0)$ , но при тех же истинных значениях параметров  $\mathfrak{F}_0$ . Именно таким образом из исходной выборки  $X$  получается так называемая полиномиальная выборка  $Y$ .

Если в традиционной статистике, используя выборку  $X$ , находили различные выборочные характеристики, то при наличии полиномиальной выборки  $Y$  можно находить эти же выборочные характеристики, но используя уже выборку  $Y$ .

Определение 2.15. Выборочным обобщенным стохастическим полиномом (или многочленом) 1-го типа степени  $s$  и размером  $n$  будем называть полином от всех  $n$  выборочных значений  $X$ , который равен

$$S_{sn}(X) = nh_0 + \sum_{i=1}^s h_i \sum_{v=1}^n \varphi_i(x_v). \quad (2.29)$$

Согласно определению выборочного обобщенного полинома следует, что размер полинома равен объему выборки.

Из (2.29) видно, что выборочный стохастический полином 1-го типа равен сумме полиномиальных выборочных значений, т.е.

$$S_{sn}(x) = \sum_{v=1}^n y_v.$$

Отметим, что так как выборочные значения  $x_i$  независимы и одинаково распределены, то коэффициенты  $h_i$  в выборочном стохастическом полиноме для каждого выборочного значения  $x_v$  будут одними и теми же. Поэтому характерным признаком выборочных стохастических полиномов 1-го типа степени  $s$  и размером  $n$  является то, что коэффициенты  $h_i$  являются коэффициентами суммы по  $v$  одной и той же функции  $\varphi_i(\cdot)$  от различных выборочных значений  $x_v$ .

Определение 2.16. Средним выборочным обобщенным стохастическим полиномом (или многочленом) 1-го типа степени  $s$  и размером  $n$  будем называть полином вида

$$M_{sn}(x) = h_0 + \sum_{i=1}^s h_i \frac{1}{n} \sum_{v=1}^n \varphi_i(x_v). \quad (2.30)$$

Очевидно, средний выборочный обобщенный стохастический полином равен выборочному обобщенному полиному, разделенному на  $n$ , или среднему арифметическому полиномиальной выборки  $y$

$$M_{sn}(x) = \frac{1}{n} \sum_{v=1}^n y_v. \quad (2.31)$$

В выражении (2.30) величина  $\frac{1}{n} \sum_{v=1}^n \varphi_i(x_v)$  равна среднему арифметическому функции  $\varphi_i(\cdot)$  от выборочных значений  $x_v$ .

Таким образом, выборочный обобщенный стохастический полином выражается через элементарные  $g_i$ -статистики, равные

$$g_i = \sum_{v=1}^n \varphi_i(x_v),$$

а выборочный средний обобщенный стохастический полином выражается через элементарные  $g_{in}$  статистики, равные

$$g_{in} = \frac{1}{n} \sum_{v=1}^n \varphi_i(x_v).$$

Пример 2.7. Пусть имеется выборка объемом  $n$  независимых и одинаково распределенных величин  $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ . Тогда выборочный степенной стохастический полином степени  $s$  и размером  $1$  будет иметь вид



$$y_v = h_0 + \sum_{i=1}^s h_i x_v^i,$$

а выборочный и средний выборочный степенной стохастический полином степени  $s$  и размером  $n$  будут соответственно равны

$$S_{sn}(\bar{x}) = nh_0 + \sum_{i=1}^s h_i \sum_{v=1}^n x_v^i,$$

$$T_{sn}(\bar{x}) = h_0 + \sum_{i=1}^s h_i \frac{1}{n} \sum_{v=1}^n x_v^i.$$

Хорошо известно [1], что величина

$$\hat{\alpha}_i = \frac{1}{n} \sum_{v=1}^n x_v^i$$

равна  $i$ -му выборочному моменту выборки  $X$ . Следовательно, как видно из последнего выражения, средний выборочный степенной стохастический полином степени  $s$  и размером  $n$  равен взвешенной (с коэффициентами  $h_i$ ) сумме выборочных моментов  $\hat{\alpha}_i$  до порядка  $s$ . В данном случае элементарными статистиками являются выборочные моменты или  $p$ -статистики.

Пример 2.8. Если функция  $\varphi_i(\cdot)$  равна синусной тригонометрической функции, то средний выборочный синусный тригонометрический стохастический полином степени  $s$  и размером  $n$  будет равен

$$M_{sn}(x) = h_0 + \sum_{i=1}^s h_i \frac{1}{n} \sum_{v=1}^n \sin(ipx_v).$$

Величина

$$\frac{1}{n} \sum_{v=1}^n \sin(ipx_v)$$

равна выборочному среднему арифметическому синуса от выборочных значений  $x_v$ , т.е.  $t_{in}$ -статистиками будут выборочные средние от синуса.

2. Как видно из построения выборочных стохастических полиномов, они получаются из соответствующих стохастических полиномов, если вместо случайных величин подставить выборочные значения из этих величин.

## 2.7. Обобщение закона больших чисел на средние обобщенные стохастические полиномы

1. В разделе 2.1 были определены средние обобщенные стохастические полиномы 1-го типа степени  $s$  размером  $n$  (кратко-средние обобщенные стохастические полиномы), имеющие вид (2.5), и средние полиномиальных случайных величин 1-го типа. Фактически среднее полиномиальных случайных величин  $\lambda_{sn}(\xi)$  равно среднему обобщенных стохастических полиномов. Средние обобщенные стохастические полиномы могут играть значительную роль в математической статистике, поэтому представляет интерес исследовать асимптотические свойства этих полиномов.

В классической математической статистике важную роль играют закон больших чисел и центральная предельная теорема, которые обоснованы для среднего арифметического суммы случайных величин.

В данном пункте распространим закон больших чисел на более общий случай, а именно, на случай применения средних обобщенных стохастических полиномов.

В разделе 2.2 приведено выражение для дисперсии среднего обобщенного стохастического полинома, равной

$$\sigma_{\lambda_{sn}}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s h_i h_j F_{i,j}(\bar{\mathfrak{g}}) \quad (2.32)$$

Из приведенного выражения видно, что дисперсия среднего обобщенного стохастического полинома обратно пропорциональна объему выборки  $n$ . Следовательно, если  $|h_i| < \infty$ ,  $i = \overline{1, s}$ , то дисперсия среднего обобщенного полинома при  $n \rightarrow \infty$  стремится к нулю.

Утверждение 2.5. Пусть  $\xi_v$  является последовательностью независимых и одинаково распределенных случайных величин и пусть для каждой функции  $\varphi_i(\cdot)$ ,  $i = \overline{1, 2s}$  существует математическое ожидание  $\Psi_i(\bar{\mathfrak{g}}_0) = E\varphi_i(\xi_v) < \infty$ ,  $v = \overline{1, n}$  и коэффициенты  $|h_i| < \infty$ ,  $i = \overline{1, s}$ . Тогда при  $n \rightarrow \infty$  средний обобщенный стохастический полином степени  $s$  сходится к своему математическому ожиданию по вероятности, т.е.

$$\lambda_{sn} \xrightarrow{p} M_s(\bar{\mathfrak{g}}_0) = h_0 + \sum_{i=1}^s h_i \Psi_i(\bar{\mathfrak{g}}_0).$$

Доказательство. Докажем даже больше, а именно, что  $\lambda_{sn} \rightarrow M_s$  в среднеквадратическом. Действительно, хорошо известно [1], что для того, чтобы любая последовательность случайных величин  $\pi_n$  сходилась в среднеквадратическом к некоторой постоянной при  $n \rightarrow \infty$ ,



необходимо и достаточно, чтобы дисперсия  $\pi_n$  при  $n \rightarrow \infty$  стремилась к нулю. Согласно утверждению, величины  $\Psi_i(\mathfrak{F}_0)$  и  $h_i$  являются конечными величинами. Поэтому будут конечными величины  $F_{i,j}(\mathfrak{F}_0)$  и математическое ожидание среднего обобщенного стохастического полинома  $M_s(\mathfrak{F}_0)$ . Следовательно, и выражение в правой части (2.32) будет величиной конечной при любом конечном  $s$ . Таким образом, при  $n \rightarrow \infty$  дисперсия среднего стохастического полинома (2.5) стремится к нулю и, тем самым, средний стохастический полином сходится в среднеквадратическом к своему математическому ожиданию. А из сходимости в среднеквадратическом следует и сходимость по вероятности.

Указанная сходимость также следует из того, что левая часть среднего обобщенного стохастического полинома равна среднему арифметическому независимых одинаково распределенных полиномиальных случайных величин.

С другой стороны, при конечном объеме выборки  $n$  в силу основного свойства стохастических полиномов можно за счет выбора коэффициентов  $h_i(\mathfrak{F}_0)$  добиться уменьшения значения дисперсии. При этом, как было показано в разделе 2.4, уменьшение дисперсии может быть существенным.

2. В этой связи интересно рассмотреть случай, когда коэффициент  $h_0 = 0$ ,  $h_1 = 1$ , а  $\varphi_1(\xi_v) = \xi_v$ . Тогда средний обобщенный стохастический полином в общем случае можно записать в виде

$$\lambda_{sn}(\xi) = \frac{1}{n} \sum_{v=1}^n \xi_v - \sum_{i=2}^s h_i \frac{1}{n} \sum_{v=1}^n \varphi_i(\xi_v). \quad (2.33)$$

Дисперсия стохастического полинома (2.33) будет равна

$$D_{sn}(\bar{h}) = \frac{1}{n} \left[ \chi_2 - 2 \sum_{i=2}^s h_i F_{1,i}(\mathfrak{F}_0) + \sum_{i=2}^s \sum_{j=2}^s h_i h_j F_{i,j}(\mathfrak{F}_0) \right]. \quad (2.34)$$

Из (2.34) видно, что дисперсия среднего стохастического полинома (2.33) при  $n \rightarrow \infty$  стремится к нулю. Отсюда вытекает следствие из утверждения 2.5.

Следствие утверждения 2.5. Пусть математическое ожидание случайных величин  $\xi_v$  равно  $a_0$ , т.е.  $E\xi_v = a_0$ , а дисперсия равна  $\chi_2 < \infty$ . Тогда при выполнении условий утверждения 2.5 средний обобщенный стохастический полином степени  $s$  вида (2.33) сходится к своему математическому ожиданию по вероятности при  $n \rightarrow \infty$ , т.е.

$$\lambda_{sn} \xrightarrow{p} M_s(\mathfrak{F}_0) = a_0 - \sum_{i=2}^s h_i \Psi_i(\mathfrak{F}_0) \neq 0.$$

В свою очередь, если коэффициенты  $h_i$  найдены из решения системы линейных алгебраических уравнений (2.12), то дисперсия среднего стохастического полинома (2.33) будет равна

$$\begin{aligned} D_{sn}(\bar{h}) &= \frac{1}{n} \left[ \chi_2 - \sum_{i=2}^s h_i(\bar{\mathfrak{g}}_0) d_i(\bar{\mathfrak{g}}_0) \right] = \\ &= \frac{1}{n} \left[ \chi_2 - \sum_{i=2}^s \sum_{j=2}^s h_i(\bar{\mathfrak{g}}_0) h_j(\bar{\mathfrak{g}}_0) F_{i,j}(\bar{\mathfrak{g}}_0) \right] = \frac{1}{n} [\chi_2 - J_s(\bar{\mathfrak{g}}_0)]. \end{aligned} \quad (2.35)$$

В разделе 2.5 получен важный результат, состоящий в том, что дисперсия стохастического полинома может быть уменьшена за счет увеличения степени полинома  $s$ . Таким образом, при заданном объеме выборки дисперсия среднего обобщенного стохастического полинома может быть уменьшена за счет увеличения степени полинома  $s$ .

3. Первое слагаемое в (2.33) является средним арифметическим случайных величин  $\xi_v$ , свойства которого хорошо изучены и известны в классической математической статистике. Именно для первого слагаемого и получен закон больших чисел, который устанавливает, что при определённых условиях среднее арифметическое суммы случайных величин  $\xi_v$  при  $n \rightarrow \infty$  сходится (по вероятности, в среднеквадратическом и т.д.) к своему математическому ожиданию.

Теперь докажем принципиально новое и чрезвычайно важное утверждение.

**Утверждение 2.6.** Пусть выполнены условия утверждения 2.5 и его следствия и пусть функции  $\varphi_i(\cdot)$ ,  $i = \overline{2, 2s}$  образуют стохастический обобщённый базис для каждой случайной величины  $\xi_v$ . Тогда при конечном  $n$  средний обобщённый стохастический полином сходится к своему математическому ожиданию  $M_s(\bar{\mathfrak{g}}_0)$  по вероятности при  $s \rightarrow \infty$ .

**Доказательство.** Так как коэффициенты  $h_i(\bar{\mathfrak{g}}_0)$  найдены из решения системы линейных алгебраических уравнений (2.12), то согласно следствию 2 утверждения 2.4 инфоркуна  $J_s(\bar{\mathfrak{g}}_0)$  при  $s \rightarrow \infty$  стремится к предельной инфоркуне  $J(\bar{\mathfrak{g}}_0)$ . С другой стороны, так как функции  $\varphi_i(\cdot)$  образуют стохастический обобщённый базис для каждой случайной величины  $\xi_v$ , то, согласно результатам раздела 2.5, предельная инфоркуна  $J(\bar{\mathfrak{g}}_0)$  равна  $\chi_2$ . Таким образом, при конечном  $n$  и  $s \rightarrow \infty$  выражение в квадратных скобках (2.35) стремится к нулю. Следовательно, дисперсия среднего обобщенного стохастического полинома (2.33) стремится к нулю и имеет место сходимост в среднеквадратическом.

Можно доказать и ещё более сильный результат.



Утверждение 2.7. Пусть функции  $\varphi_i(\cdot)$  заданы в классе степенных функций, т.е.  $\varphi_i(\xi_v) = \xi_v^i$ ,  $i = \overline{2, s}$ , с конечными моментами  $\alpha_i(\overline{\mathfrak{G}}_0)$ ,  $i = \overline{1, 2s}$  и пусть коэффициенты  $h_i(\overline{\mathfrak{G}}_0)$  найдены из решения системы линейных алгебраических уравнений (2.12). Тогда существуют такие граничные значения кумулянтных коэффициентов  $\gamma_{i, \text{lim}}$ ,  $i = 3, 4, \dots$ , для которых при постоянных значениях  $n$  и  $s \geq 2$  средний обобщенный стохастический полином вида (2.33) сходится по вероятности к  $M_s(\overline{\mathfrak{G}}_0)$  при  $\gamma_i \rightarrow \gamma_{i, \text{lim}}$ .

Доказательство. В качестве доказательства данного утверждения служат примеры, рассмотренные в разделе 2.4.

Полученные сходимости являются обобщением закона больших чисел для средних обобщенных стохастических полиномов.

Как было показано ранее, для случая, если функции  $\varphi_i(\xi)$  образуют базис для случайной величины  $\xi$ , то в этом случае дисперсия стохастического полинома (2.33) стремится к нулю как при  $n \rightarrow \infty$ , так и при  $s \rightarrow \infty$ . Эту сходимость будем называть двойной асимптотической сходимостью.

## 2.8. Распространение центральной предельной теоремы на средние обобщенные стохастические полиномы

1. В классической математической статистике также важную роль играет центральная предельная теорема, которая обоснована для суммы случайных величин и формулируется следующим образом [1]. Пусть имеется последовательность независимых и одинаково распределённых случайных величин  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ , для которых  $E\xi_n = 0$  и дисперсия  $E\xi_n^2 = 1$ . Тогда плотность распределения суммы

$$\zeta_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{v=1}^n \xi_v$$

при  $n \rightarrow \infty$  сходится к гауссовскому распределению с параметрами  $N(0, 1)$ .

В данном пункте распространим центральную предельную теорему на более общий случай, а именно, на случай применения средних обобщенных стохастических полиномов.

Как видно из (2.5), в средний обобщенный стохастический полином входит сумма

$$\frac{1}{n} \sum_{v=1}^n \varphi_i(\xi_v). \quad (2.36)$$

Легко доказать следующее утверждение.

Утверждение 2.8. Пусть  $\xi_v$  является последовательностью независимых и одинаково распределенных случайных величин и пусть для каждой функции  $\varphi_i(\cdot)$ ,  $i = \overline{1, s}$  существует математическое ожидание  $\Psi_i(\vartheta_0) = E\varphi_i(\xi_v) < \infty$ ,  $v = \overline{1, n}$  и дисперсия  $F_{i,i}(\vartheta_0) < \infty$ ,  $i = \overline{1, s}$ . Тогда при  $n \rightarrow \infty$  распределение суммы (2.36) для любого  $i = \overline{1, s}$  сходится к гауссовскому распределению с математическим ожиданием  $\Psi_i(\vartheta_0)$  и дисперсией  $\frac{1}{n} F_{i,i}(\vartheta_0)$ .

Доказательство. Используем стандартную процедуру доказательства. Выражение (2.36) можно записать следующим образом:

$$\frac{1}{n} \sum_{v=1}^n \varphi_i(\xi_v) = \frac{\sqrt{F_{i,i}(\vartheta_0)}}{\sqrt{n}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{n} \sqrt{F_{i,i}(\vartheta_0)}} \sum_{v=1}^n [\varphi_i(\xi_v) - \Psi_i(\vartheta_0)] \right\} + \Psi_i(\vartheta_0). \quad (2.37)$$

Так как  $\xi_v$  является последовательностью независимых и одинаково распределенных случайных величин, то и последовательность  $\varphi_i(\xi_v)$ ,  $v = \overline{1, n}$  при любом  $i = \overline{1, s}$  также будет последовательностью независимых и одинаково распределенных случайных величин. Более того, последовательность

$$\frac{\varphi_i(\xi_v) - \Psi_i(\vartheta_0)}{\sqrt{F_{i,i}(\vartheta_0)}}, \quad v = \overline{1, n}$$

при любом  $i = \overline{1, s}$  будет последовательностью независимых и одинаково распределенных случайных величин с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией. Тогда, согласно центральной предельной теореме сумма в фигурных скобках (2.37), равная

$$\frac{1}{\sqrt{n} \sqrt{F_{i,i}(\vartheta_0)}} \sum_{v=1}^n [\varphi_i(\xi_v) - \Psi_i(\vartheta_0)],$$

будет асимптотически при  $n \rightarrow \infty$  слабо распределена по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией. Следовательно, сама случайная величина (2.36) будет асимптотически распределена по нормальному закону с математическим ожиданием  $\Psi_i(\vartheta_0)$  и дисперсией  $\frac{1}{n} F_{i,i}(\vartheta_0)$ .

Следствие. Пусть выполнены условия утверждения 2.8. Тогда при  $n \rightarrow \infty$  распределение суммы

$$\sum_{v=1}^n \varphi_i(\xi_v)$$



для любого  $i=1, \bar{s}$  сходится к гауссовскому распределению с математическим ожиданием  $n\Psi_i(\bar{\vartheta}_0)$  и дисперсией  $nF_{i,i}(\bar{\vartheta}_0)$ .

2. Полученные результаты можно перенести на случай среднего обобщённого стохастического полинома.

Утверждение 2.9. Пусть выполнены условия утверждения 2.8 и пусть коррелянты  $F_{i,j}(\bar{\vartheta}_0) < \infty$  и коэффициенты  $|h_i| < \infty, i=1, \bar{s}$  для любого  $s=1, 2, \dots$ . Тогда при  $n \rightarrow \infty$  распределение среднего обобщённого стохастического полинома (2.5) сходится к гауссовскому распределению с математическим ожиданием

$$M_s(\bar{\vartheta}_0) = h_0 + \sum_{i=1}^s h_i \Psi_i(\bar{\vartheta}_0) \quad (2.38)$$

и дисперсией

$$D_{sn}(\bar{\vartheta}_0) = \frac{1}{n} d_{sn}(\bar{\vartheta}_0), \quad (2.39)$$

где

$$d_{sn}(\bar{\vartheta}_0) = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s h_i h_j F_{i,j}(\bar{\vartheta}_0). \quad (2.40)$$

Доказательство. Как видно из (2.5), средний обобщённый стохастический полином равен сумме по  $i$  случайных величин вида (2.36), которые, как доказано в утверждении 2.8, асимптотически распределены по гауссовскому закону. Хорошо известно [1], что сумма любого числа случайных величин, распределённых по гауссовскому закону, сама распределена по гауссовскому закону. Следовательно, асимптотически по гауссовскому закону распределён и средний стохастический полином (2.5). Математическое ожидание (2.38) и дисперсия (2.39) находятся непосредственно из среднего стохастического полинома.

Следствие. Пусть выполнены условия утверждения 2.9. Тогда при  $n \rightarrow \infty$  распределение обобщённого стохастического полинома (2.4) сходится к гауссовскому распределению с математическим ожиданием

$$M_{sn}(\bar{\vartheta}_0) = n M_s(\bar{\vartheta}_0) \quad (2.41)$$

и дисперсией

$$D_{sn}(\bar{\vartheta}_0) = n d_{sn}(\bar{\vartheta}_0). \quad (2.42)$$

Асимптотическая сходимость распределения правой части (2.5) или (2.6) к гауссовскому закону также следует из того, что левая часть (2.5) равна среднему арифметическому независимых одинаково распределённых полиномиальных случайных величин, которые в силу центральной предельной теоремы асимптотически сходятся к гауссовскому закону распределения.

3. Из утверждения 2.8 следует, что при  $n \gg 1$  распределение среднего обобщённого стохастического полинома (2.5) примерно имеет гауссовский закон распределения, т.е. плотность распределения среднего обобщённого стохастического полинома примерно будет равна

$$p_\lambda(x/\bar{\mathfrak{G}}) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi D_{sn}(\bar{\mathfrak{G}})}} \exp\left\{-\frac{[x - M_s(\bar{\mathfrak{G}})]^2}{2D_{sn}(\bar{\mathfrak{G}})}\right\}, \quad (2.43)$$

где  $D_{sn}(\bar{\mathfrak{G}})$  имеет вид (2.39).

Так как  $D_{sn}(\bar{\mathfrak{G}}) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , то при  $n \rightarrow \infty$  плотность распределения  $p_\lambda(x/\bar{\mathfrak{G}})$  стремится к дельта функции Дирака  $\delta(x - M_s(\bar{\mathfrak{G}}))$ . Это хорошо известный результат. Используя основное свойство стохастических полиномов, можно получить ещё один интересный результат.

Снова рассмотрим случай, когда коэффициент  $h_1 = 1$ , а  $\varphi_1(\xi_v) = \xi_v$ .

Утверждение 2.10. Пусть в среднем стохастическом полиноме (2.5) функции  $\varphi_i(\cdot)$  являются стохастическим обобщённым базисом для случайных величин  $\xi_v$ , а коэффициенты  $h_i$  найдены из решения системы линейных алгебраических уравнений (2.12), тогда при  $n \gg 1$  и  $s \rightarrow \infty$  плотность распределения  $p_\lambda(x/\bar{\mathfrak{G}})$  стремится к дельта функции Дирака  $\delta(x - M_\infty(\bar{\mathfrak{G}}))$ .

Доказательство. Доказательство данного утверждения аналогично доказательству утверждения 2.6. При выполнении условий данного утверждения, согласно следствию 2 утверждения 2.4, инфоркуна  $J_s(\bar{\mathfrak{G}}_0)$  при  $s \rightarrow \infty$  стремится к конечной величине предельной инфоркуны  $J(\bar{\mathfrak{G}}_0)$  и, согласно результатам раздела 2.5, предельная инфоркуна  $J(\bar{\mathfrak{G}}_0)$  равна  $\chi_2$ . Таким образом, при конечном  $n$  и  $s \rightarrow \infty$  дисперсия среднего обобщённого стохастического полинома  $D_{sn}(\bar{\mathfrak{G}})$  стремится к нулю. Следовательно, плотность распределения  $p_\lambda(x/\bar{\mathfrak{G}})$  стремится к дельта функции Дирака  $\delta(x - M_\infty(\bar{\mathfrak{G}}))$  в точке  $M_\infty(\bar{\mathfrak{G}})$ .



## МЕТОД МАКСИМИЗАЦИИ ПОЛИНОМА

В главе обосновывается второе свойство обобщенных стохастических полиномов, которое заключается в том, что для стохастических полиномов с коэффициентами, зависящими от параметра, существуют такие коэффициенты, для которых математическое ожидание стохастического полинома как функция параметра имеет максимум в точке истинного значения параметра. Приведен алгоритм нахождения таких коэффициентов для произвольного параметра. На основании второго свойства для выборочных стохастических полиномов обоснован метод нахождения оценок параметров, названный методом максимизации полинома. Метод обоснован для нахождения оценок как скалярного, так и векторного параметра. Исследованы свойства оценок, найденных методом максимизации полинома. Приведены примеры.

### 3.1. Второе свойство обобщенных стохастических полиномов

1. Пусть наблюдаемая случайная величина  $\xi$  статистически зависит от одного неизвестного моментного параметра  $\vartheta$ , т.е. параметр  $\vartheta$  является скалярным. Тогда и функции  $\psi_i(\vartheta)$  также будут функциями одного параметра  $\vartheta$ . В дальнейшем будем предполагать, что функции  $\psi_i(\vartheta)$  дифференцируемы по параметру  $\vartheta$ . Также будем предполагать, что когда наблюдается случайная величина  $\xi$ , то параметр  $\vartheta$  имеет истинное значение  $\vartheta_0$ .

Рассмотрим стохастический полином

$$\eta_s(\vartheta) = k_0(\vartheta) + \sum_{i=1}^s k_i(\vartheta) \varphi_i(\xi), \quad (3.1)$$

в котором коэффициенты  $k_i(\cdot)$  зависят от параметра  $\vartheta$ , т.е. они являются функциями параметра.

Определение 3.1. Обобщенный стохастический полином вида (3.1) будем называть полиномом с коэффициентами, зависящими от параметра  $\vartheta$ .

Определение 3.2. Случайную величину  $\eta_s(\vartheta)$  будем называть полиномиальной случайной величиной, зависящей от параметра  $\vartheta$ .

Точнее говоря,  $\eta_s(\vartheta)$  есть случайная величина, у которой функция распределения и функция плотности, а также статистические характеристики, такие как математическое ожидание и дисперсия, зависят от параметра  $\vartheta$ .

Утверждение 3.1. Если в обобщенном стохастическом полиноме (3.1) коэффициент  $k_0(\vartheta)$  равен

$$k_0(\vartheta) = \int_a^{\vartheta} \sum_{i=1}^s [h_i(\vartheta) \psi_i(\vartheta)] d\vartheta, \quad (3.2)$$

а коэффициенты  $k_i(\vartheta)$ ,  $i=1, s$  равны

$$k_i(\vartheta) = \int_a^{\vartheta} h_i(\vartheta) d\vartheta, \quad (3.3)$$

где функции  $h_i(\vartheta)$  непрерывны в точке  $\vartheta_0$  и  $|h_i(\vartheta_0)| < \infty$  для всех  $\vartheta_0 \in (a, b)$ , тогда математическое ожидание случайной величины  $\eta_s(\vartheta)$  как функция параметра  $\vartheta$  имеет экстремум в точке  $\vartheta_0$ .

Доказательство. Для коэффициентов (3.2) и (3.3) математическое ожидание случайной величины  $\eta_s(\vartheta)$  будет равно

$$M_s(\vartheta) = E\eta_s(\vartheta) = \sum_{i=1}^s \left( \int_a^{\vartheta} h_i(\vartheta) d\vartheta \right) \psi_i(\vartheta_0) - \int_a^{\vartheta} \left[ \sum_{i=1}^s h_i(\vartheta) \psi_i(\vartheta) \right] d\vartheta. \quad (3.4)$$

Хорошо известно, что необходимым и достаточным условием существования экстремума функции в некоторой точке является условие, чтобы первая производная в этой точке равнялась нулю. Легко показать, что первая производная функции  $M_s(\vartheta)$  равна

$$\frac{d}{d\vartheta} M_s(\vartheta) = \sum_{i=1}^s h_i(\vartheta) [\psi_i(\vartheta_0) - \psi_i(\vartheta)].$$

Очевидно, что правая часть полученного выражения будет равна нулю, если  $\vartheta = \vartheta_0$ , т.е.

$$\frac{d}{d\vartheta} M_s(\vartheta) \Big|_{\vartheta=\vartheta_0} = 0.$$

Таким образом, в точке  $\vartheta_0$  функция  $M_s(\vartheta)$  имеет экстремум.

Из утверждения 3.1 видно, что математическое ожидание стохастического полинома  $\eta_s(\vartheta)$  при довольно слабых ограничениях, наложенных на коэффициенты  $h_i(\vartheta)$  (непрерывность и конечность в точке  $\vartheta_0$ ), обладает замечательным свойством — оно имеет экстремум в точке  $\vartheta_0$ .

Утверждение 3.2. Пусть выполнены условия утверждения 3.1 и пусть коэффициенты  $h_i(\vartheta)$  дифференцируемые и таковы, что для любого  $\vartheta \in (a, b)$



$$\sum_{i=1}^s h_i(\vartheta) \frac{d}{d\vartheta} \psi_i(\vartheta) > 0, \quad (3.5)$$

тогда математическое ожидание случайной величины  $\eta_s(\vartheta)$  как функция параметра  $\vartheta$  имеет максимум в точке  $\vartheta_0$ .

Доказательство. Хорошо известно, что если вторая производная от функции  $M_s(\vartheta)$  в точке  $\vartheta_0$  будет меньше нуля, то в точке  $\vartheta_0$  имеется максимум. Вторая производная от функции  $M_s(\vartheta)$  будет равна

$$\frac{d^2}{d\vartheta^2} M_s(\vartheta) = \sum_{i=1}^s \frac{d}{d\vartheta} h_i(\vartheta) [\psi_i(\vartheta_0) - \psi_i(\vartheta)] - \sum_{i=1}^s h_i(\vartheta) \frac{d}{d\vartheta} \psi_i(\vartheta).$$

Очевидно, в точке  $\vartheta_0$  вторая производная равна

$$\left. \frac{d^2}{d\vartheta^2} M_s(\vartheta) \right|_{\vartheta=\vartheta_0} = - \sum_{i=1}^s h_i(\vartheta_0) \frac{d}{d\vartheta} \psi_i(\vartheta) \Big|_{\vartheta=\vartheta_0}.$$

Так как в силу условия (3.5) утверждения 3.2 сумма есть величина положительная для любых  $\vartheta \in (a, b)$ , то вторая производная от функции  $M_s(\vartheta)$  в точке  $\vartheta_0$  будет величиной отрицательной для любого  $\vartheta_0 \in (a, b)$ . Таким образом, функция  $M_s(\vartheta)$  вида (3.5) в точке истинного значения параметра  $\vartheta_0$  наблюдаемой случайной величины  $\xi$  имеет максимум.

Из хода доказательств утверждений видно, что на функции  $h_i(\vartheta)$  от параметра  $\vartheta$  накладываются довольно таки слабые ограничения в виде их дифференциальности по параметру  $\vartheta$  и положительности выражения (3.5) для всех  $\vartheta \in (a, b)$ . И при этом математическое ожидание от обобщенного стохастического полинома (3.1) с коэффициентами (3.2) и (3.3), зависящими от параметра  $\vartheta$ , имеет максимум в точке истинного значения параметра  $\vartheta_0$ , при котором наблюдалась случайная величина  $\xi$ .

С учетом доказанных утверждений, второе свойство обобщенных стохастических полиномов с коэффициентами, зависящими от параметра, можно сформулировать следующим образом.

В обобщенном стохастическом полиноме с коэффициентами  $k_i(\vartheta)$ , зависящими от параметра  $\vartheta$ , существуют такие коэффициенты, для которых математическое ожидание от этого стохастического полинома имеет максимум в точке истинного значения параметра  $\vartheta_0$ , при котором наблюдается случайная величина  $\xi$ .

При этом коэффициенты  $k_i(\vartheta)$  с помощью формул (3.2) и (3.3) выражаются через другие функции  $h_i(\vartheta)$  параметра  $\vartheta$ .

### 3.2. Статистические свойства производных обобщенных стохастических полиномов в точке экстремума

1. Рассмотрим стохастический полином (3.1) с коэффициентами (3.2) и (3.3). Исходя из определения полиномиальной случайной величины  $\eta_s(\vartheta)$ , она может быть дифференцируема по параметру  $\vartheta$ . Первая производная от  $\eta_s(\vartheta)$  по  $\vartheta$  будет равна

$$\frac{d\eta_s(\vartheta)}{d\vartheta} = \sum_{i=1}^s h_i(\vartheta) [\varphi_i(\xi) - \psi_i(\vartheta)]. \quad (3.6)$$

Математическое ожидание от этой производной будет равно

$$E \frac{d\eta_s(\vartheta)}{d\vartheta} = \sum_{i=1}^s h_i(\vartheta) [\psi_i(\vartheta_0) - \psi_i(\vartheta)],$$

а дисперсия определяется выражением

$$E \left[ \frac{d\eta_s(\vartheta)}{d\vartheta} \right]^2 = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s h_i(\vartheta) h_j(\vartheta) F_{i,j}(\vartheta_0).$$

Из этих выражений видно, что математическое ожидание производной от  $\eta_s(\vartheta)$  и дисперсия являются функциями параметра  $\vartheta$ . Однако при  $\vartheta = \vartheta_0$  математическое ожидание первой производной равно нулю, а дисперсия равна

$$E \left[ \frac{d\eta_s(\vartheta)}{d\vartheta} \right]^2 \Big|_{\vartheta=\vartheta_0} = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s h_i(\vartheta_0) h_j(\vartheta_0) F_{i,j}(\vartheta_0). \quad (3.7)$$

Отметим, что правая часть (3.7) для любых коэффициентов  $h_i$  есть величина не отрицательная.

Вторая производная от  $\eta_s(\vartheta)$  будет равна

$$\frac{d^2\eta_s(\vartheta)}{d\vartheta^2} = \sum_{i=1}^s \frac{dh_i(\vartheta)}{d\vartheta} [\varphi_i(\xi) - \psi_i(\vartheta)] - \sum_{i=1}^s h_i(\vartheta) \frac{d}{d\vartheta} \psi_i(\vartheta). \quad (3.8)$$

Очевидно, математическое ожидание второй производной  $\eta_s(\vartheta)$  также является функцией параметра  $\vartheta$ , однако в точке  $\vartheta_0$  оно будет равно

$$E \left[ \frac{d^2\eta_s(\vartheta)}{d\vartheta^2} \right] \Big|_{\vartheta=\vartheta_0} = - \sum_{i=1}^s h_i(\vartheta_0) \frac{d}{d\vartheta} \psi_i(\vartheta) \Big|_{\vartheta_0}. \quad (3.9)$$

2. До настоящего времени предполагалось, что на коэффициенты  $h_i(\vartheta)$  наложены весьма общие ограничения в виде их дифференцируемости по параметру  $\vartheta$  и выполнения неравенства (3.5).



Теперь предположим, что коэффициенты  $h_i(\vartheta)$  находятся из решения системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^s h_j(\vartheta) F_{i,j}(\vartheta) = \frac{d}{d\vartheta} \psi_i(\vartheta), \quad i = \overline{1, s}, \quad \text{для } \forall \vartheta \in (a, b). \quad (3.10)$$

Утверждение 3.2. Если в обобщенном стохастическом полиноме (3.1) с коэффициентами (3.2) и (3.3) функции  $h_i(\vartheta)$  находятся из решения системы линейных алгебраических уравнений (3.10), то для этого стохастического полинома имеет место равенство

$$E \left[ \frac{d\eta_s(\vartheta)}{d\vartheta} \right]^2 = -E \left[ \frac{d^2 \eta_s(\vartheta)}{d\vartheta^2} \right] \quad \text{для } \forall \vartheta_0 \in (a, b). \quad (3.11)$$

Равенство (3.11) в развернутом виде имеет вид

$$\sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s h_i(\vartheta) h_j(\vartheta) F_{i,j}(\vartheta) = \sum_{i=1}^s h_i(\vartheta) \frac{d}{d\vartheta} \psi_s(\vartheta). \quad (3.12)$$

Доказательство. Так как коэффициенты  $h_i(\vartheta)$  находятся из решения системы уравнений (3.10), то для найденных коэффициентов эта система превращается в тождество для всех  $\vartheta \in (a, b)$ . Пусть  $h_i(\vartheta)$  являются решением системы (3.10). Если теперь каждое  $i$ -ое уравнение системы (3.10) умножить на найденные  $h_i(\vartheta)$  и просуммировать по  $i$ , то получим равенство (3.12), которое будет иметь место для всех  $\vartheta \in (a, b)$ .

Следствие 1. Для коэффициентов  $h_i(\vartheta)$ , найденных из решения системы уравнений (3.10), имеет место неравенство

$$\sum_{i=1}^s h_i(\vartheta) \frac{d}{d\vartheta} \psi_i(\vartheta) > 0 \quad \text{для } \forall \vartheta \in (a, b). \quad (3.13)$$

Это неравенство следует из равенства (3.12), так как левая часть равенства (3.12) есть величина положительная в силу определения дисперсии и она может быть равна нулю только в том случае, если все  $h_i(\vartheta) = 0$ ,  $i = \overline{1, s}$ .

Следствие 2. Для коэффициентов  $h_i(\vartheta)$ , найденных из решения системы уравнений (3.10), математическое ожидание обобщенного стохастического полинома  $\eta_s(\vartheta)$  с коэффициентами (3.2), (3.3) имеет максимум в точке истинного значения параметра  $\vartheta_0$ , при котором наблюдается случайная величина  $\xi$ .

Это следует из условий утверждения 3.1 и неравенства (3.13), которое имеет место для функций  $h_i(\vartheta)$ , найденных из решения системы уравнений (3.10).

Таким образом, найден алгоритм построения стохастических полиномов, обладающих экстремальным свойством для произвольного параметра  $\vartheta \in (a, b)$ .

3. Отметим, что определитель системы линейных алгебраических уравнений (3.10) равен объему тела стохастического полинома, который для линейно независимых функций  $\varphi_i(\xi)$  не равен нулю. Следовательно, система уравнений имеет единственное решение.

### 3.3. Проявление второго свойства для стохастических полиномов, заданных в классе степенных функций

1. Пусть в стохастическом полиноме (3.1) функции  $\varphi_i(\xi) = \xi^i$ , т.е. стохастический полином задан в классе степенных функций. В этом случае функции  $\psi_i(\vartheta)$  равны начальным моментам  $\alpha_i(\vartheta)$  порядка  $i$ , а коррелянты  $F_{i,j}(\vartheta)$  размером  $(i,j)$  будут выражаться через моменты  $\alpha_i(\vartheta)$  следующим образом:

$$F_{i,j}(\vartheta) = \alpha_{i+j}(\vartheta) - \alpha_i(\vartheta)\alpha_j(\vartheta). \quad (3.14)$$

В этом случае для того, чтобы математическое ожидание стохастического полинома (3.1) имело максимум в окрестности истинного значения параметра  $\vartheta_0$  для  $\forall \vartheta \in (a, b)$ , необходимо, чтобы функции  $h_i(\vartheta)$  параметра  $\vartheta$  находились из решения системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{i=1}^s h_i(\vartheta) F_{i,j}(\vartheta) = \frac{d}{d\vartheta} \alpha_j(\vartheta),$$

а коэффициенты  $k_0(\vartheta)$  и  $k_i(\vartheta)$  имели вид (3.2) и (3.3).

В пункте 3.1 указывалось, что при моментном описании в качестве параметра  $\vartheta$  может быть либо математическое ожидание случайной величины  $\alpha$ , либо дисперсия  $\chi_2$ , либо какой-нибудь кумулянтный коэффициент  $\gamma_i$ .

2. Прежде всего найдем степенной стохастический полином  $\eta_s(\vartheta)$ , имеющий максимум в окрестности истинного значения параметра, для случая, когда параметром является математическое ожидание  $\alpha$ . При этом рассмотрение будем вести последовательно для  $s=1, 2$ .

При  $s=1$  стохастический степенной полином (3.1) имеет вид

$$\eta_1(\alpha) = k_0(\alpha) + k_1(\alpha)\xi.$$

Так как  $\alpha_1(\alpha) = \alpha$ , а  $\alpha_2(\alpha) = \chi_2 + \alpha^2$ , то коэффициент  $h_1(\alpha)$  как функция параметра  $\alpha$ , согласно (3.10), находится из решения уравнения

$$h_1(\alpha) \cdot F_{1,1}(\alpha) = 1.$$



Учитывая, что  $F_{1,1}(\alpha) = \chi_2$ , имеем

$$h_1(\alpha) = \frac{1}{\chi_2},$$

т.е. в данном случае функция  $h_1(\alpha)$  не зависит от  $\alpha$ .

Тогда коэффициенты  $k_0(\alpha)$  и  $k_1(\alpha)$  будут соответственно равны

$$k_0(\alpha) = - \int_a^\alpha \frac{1}{\chi_2} \alpha d\alpha = - \frac{\alpha^2 - a^2}{2\chi_2},$$

$$k_1(\alpha) = \int_a^\alpha \frac{1}{\chi_2} d\alpha = \frac{\alpha - a}{\chi_2}.$$

Следовательно, стохастический степенной полином  $\eta_1(\alpha)$  будет равен

$$\eta_1(\alpha) = - \frac{\alpha^2 - a^2}{2\chi_2} + \frac{\alpha - a}{\chi_2} \xi. \quad (3.15)$$

Проверим выполнение второго свойства стохастических полиномов для данного полинома (3.15). Пусть истинное значение параметра  $\alpha$  наблюдаемой случайной величины равно  $\alpha_0$ , т.е.  $E\xi = \alpha_0$ .

Тогда математическое ожидание  $\eta_1(\alpha)$  равно

$$M_1(\alpha) = - \frac{\alpha^2 - \alpha_0^2}{2\chi_2} + \frac{\alpha - \alpha_0}{\chi_2} \alpha_0.$$

Следовательно, первая производная по  $\alpha$  от  $M_1(\alpha)$ , равная

$$\frac{dM_1(\alpha)}{d\alpha} = - \frac{\alpha - \alpha_0}{\chi_2},$$

очевидно, равняется нулю при  $\alpha = \alpha_0$ , а вторая производная равна

$$\frac{d^2 M_1(\alpha)}{d\alpha^2} = - \frac{1}{\chi_2}.$$

Так как  $\chi_2 > 0$ , то в точке  $\alpha_0$  будет максимум.

На рис. 3.1 приведены графики зависимости функции  $M_1(\alpha)$  от  $\alpha$  для  $\alpha \in (-2, 6)$  для трех случаев:

1)  $\alpha_0 = -1, \chi_2 = 0.1$ ;

2)  $\alpha_0 = 0, \chi_2 = 1$ ;

3)  $\alpha_0 = 2, \chi_2 = 3$ .

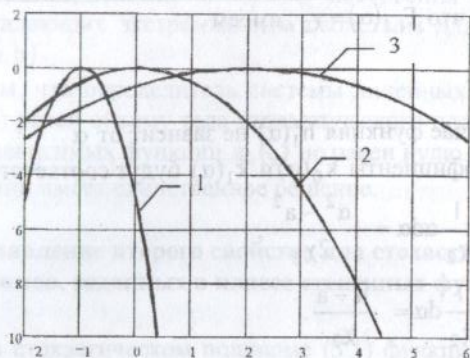


Рис. 3.1

Из рисунка видно, что чем больше  $\chi_2$ , тем больше интервал, в котором  $\alpha$  принимает положительное значение, и тем более плоская вершина кривой при  $\alpha = \alpha_0$ .

При  $s=2$  стохастический полином  $\eta_2(\alpha)$  имеет вид

$$\eta_2(\alpha) = k_0(\alpha) + k_1(\alpha)\xi + k_2(\alpha)\xi^2. \quad (3.16)$$

В данном случае, согласно (3.10), функции  $h_1(\alpha)$  и  $h_2(\alpha)$  находятся из решения системы уравнений, имеющей вид

$$h_1(\alpha) \cdot F_{1,1}(\alpha) + h_2(\alpha) \cdot F_{1,2}(\alpha) = 1, \quad (3.17)$$

$$h_1(\alpha) \cdot F_{1,2}(\alpha) + h_2(\alpha) \cdot F_{2,2}(\alpha) = 2\alpha.$$

Используя выражение (3.14) для коррелянтов  $F_{i,j}(\alpha)$  и выражения (1.6), устанавливающие связь между моментами и кумулянтами, получим, что коррелянты  $F_{i,j}(\alpha)$  будут равны

$$F_{1,1}(\alpha) = \chi_2, \quad F_{1,2}(\alpha) = \chi_2^{1.5} \gamma_3 + 2\alpha \chi_2, \quad (3.18)$$

$$F_{2,2}(\alpha) = \chi_2^2(\gamma_4 + 2) + 4\alpha \chi_2^{1.5} \gamma_3 + 4\alpha^2 \chi_2.$$

Тогда определитель системы уравнений (3.17) будет равен

$$\Delta_2 = \chi_2^3(\gamma_4 + 2 - \gamma_3^2),$$

а коэффициенты  $h_1(\alpha)$  и  $h_2(\alpha)$  будут соответственно равны

$$h_1(\alpha) = \frac{1}{\Delta_2} [\chi_2^2(\gamma_4 + 2) + 2\alpha \chi_2^{1.5} \gamma_3],$$

$$h_2(\alpha) = \frac{1}{\Delta_2} \chi_2^{1.5} \gamma_3.$$

Следовательно, согласно (3.2) и (3.3), коэффициенты  $k_i(\alpha)$ ,  $i = 0, 2$  будут соответственно иметь вид



$$k_0(\alpha) = -\frac{1}{\Delta_2} \{ \chi_2^2(\gamma_4 + 2)(\alpha^2 - a^2) + \frac{2}{3}(\alpha^3 - a^3)\chi_2^{1.5}\gamma_3 - \\ - \chi_2^{1.5}\gamma_3 \left[ \chi_2(\alpha - a) + \frac{\alpha^3 - a^3}{3} \right] \},$$

$$k_1(\alpha) = \frac{1}{\Delta_2} \left[ \chi_2^2(\gamma_4 + 2)(\alpha - a) + 2(\alpha^2 - a^2)\chi_2^{1.5}\gamma_3 \right], \quad (3.19)$$

$$k_2(\alpha) = \frac{1}{\Delta_2} (\alpha - a)\chi_2^{1.5}\gamma_3.$$

Подставив полученные коэффициенты в (3.16), получим выражение для  $\eta_2(\alpha)$ .

Таким образом, согласно второму свойству стохастических полиномов, математическое ожидание стохастического полинома (3.16), равное

$$M_2(\alpha) = k_0(\alpha) + k_1(\alpha)\alpha_0 + k_2(\alpha)(\chi_2 - \alpha_0^2), \quad (3.20)$$

с коэффициентами  $k_i(\alpha)$ ,  $i = \overline{0, 2}$ , равными (3.19), имеет максимум в точке  $\alpha_0$  истинного значения параметра.

Действительно, первая производная  $M_2(\alpha)$  по  $\alpha$  равна

$$\frac{d}{d\alpha} M_2(\alpha) = -\frac{(\alpha - \alpha_0)}{\Delta_2} \left[ \chi_2^2(\gamma_4 + 2) + (\alpha - \alpha_0)\chi_2^{1.5}\gamma_3 \right].$$

Приравнявая первую производную нулю, легко получить, что уравнение имеет два корня

$$\alpha_{(1)} = \alpha_0,$$

$$\alpha_{(2)} = \alpha_0 - \frac{\chi_2^{0.5}(\gamma_4 + 2)}{\gamma_3}.$$

Таким образом, точки  $\alpha_{(1)}$  и  $\alpha_{(2)}$  являются точками экстремума.

Вторая производная от  $M_2(\alpha)$  по  $\alpha$  равна

$$\frac{d^2}{d\alpha^2} M_2(\alpha) = -\frac{1}{\Delta_2} \left[ \chi_2^2(\gamma_4 + 2) + 2(\alpha - \alpha_0)\chi_2^{1.5}\gamma_3 \right].$$

Следовательно, в точке  $\alpha_{(1)}$  вторая производная равна

$$\frac{d^2}{d\alpha^2} M_2(\alpha)_{\alpha_1} = -\frac{\chi_2(\gamma_4 + 2)}{\Delta_2}.$$

Так как  $\Delta_2 > 0$  и  $\gamma_4 + 2 > 0$ , то вторая производная в точке  $\alpha_{(1)}$  отрицательная, т.е. в этой точке функция  $M_2(\alpha)$  имеет максимум.

С другой стороны, в точке  $\alpha_{(2)}$

$$\frac{d^2}{d\alpha^2} M_2(\alpha)_{\alpha_2} = \frac{\chi_2(\gamma_4 + 2)}{\Delta_2},$$

т.е. в точке  $\alpha_{(2)}$  вторая производная положительная и в этой точке функция  $M_2(\alpha)$  имеет минимум.

Отметим, что при  $s=2$  все коэффициенты  $k_0(\alpha) \div k_2(\alpha)$  существенно зависят от коэффициента асимметрии  $\gamma_3$ . В том случае, если  $\gamma_3 = 0$ , то  $k_2(\alpha) = 0$ , а коэффициенты  $k_0(\alpha)$  и  $k_1(\alpha)$  равны соответствующим коэффициентам при  $s=1$ , т.е. при  $\gamma_3 = 0$  функция  $M_2(\alpha)$  переходит в функцию  $M_1(\alpha)$ .

На рис. 3.2 приведены графики зависимости  $M_2(\alpha)$  от  $\alpha$  при  $\gamma_4 = 0$  и  $\alpha = -2$  для тех же трёх случаев значений  $\alpha_0$  и  $\chi_2$ , что и на рис. 3.1. Отличие состоит в том, что для каждого из случаев величина  $\gamma_3$  принимает два значения, а именно,  $\gamma_3 = 0,8$  и  $\gamma_3 = 1,4$ .

Из рисунков видно, что при  $\gamma_3 = 1,4$  вершина максимума является более округлой, чем при  $\gamma_3 = 0,8$ .

3. Теперь построим степенной стохастический полином для случая, когда параметром является дисперсия  $\chi_2$  случайной величины  $\xi$ . Не нарушая общности, в данном случае будем считать, что  $\alpha = 0$ .

Так как при  $s=1$  математическое ожидание  $\alpha = 0$  и не зависит от  $\chi_2$ , то легко показать, что  $h_1(\chi_2) = 0$  и, следовательно, в этом случае невозможно построить стохастический полином  $\eta_1(\chi_2)$ , математическое ожидание которого имело бы максимум в окрестности истинного значения  $\chi_{20}$ . Поэтому рассмотрим случай  $s=2$ .

При  $s=2$  степенной стохастический полином  $\eta_2(\chi_2)$ , математическое ожидание которого имеет максимум в точке истинного значения  $\chi_{20}$ , имеет вид

$$\eta_2(\chi_2) = k_0(\chi_2) + k_1(\chi_2)\xi + k_2(\chi_2)\xi^2.$$

При этом коэффициенты  $h_1(\chi_2)$  и  $h_2(\chi_2)$  находятся из решения системы уравнений:

$$h_1(\chi_2) \cdot F_{1,1}(\chi_2) + h_2(\chi_2) \cdot F_{1,2}(\chi_2) = 0, \quad (3.21)$$

$$h_1(\chi_2) \cdot F_{1,2}(\chi_2) + h_2(\chi_2) \cdot F_{2,2}(\chi_2) = 1.$$



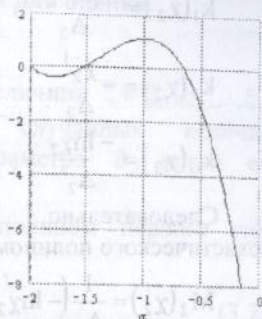
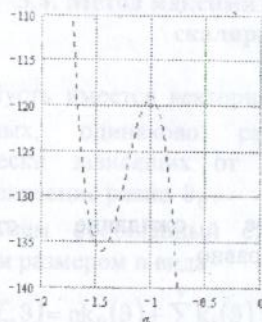
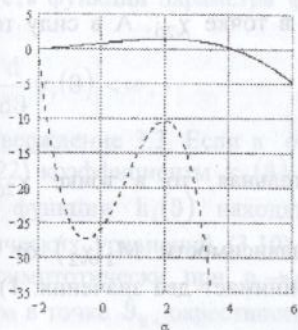
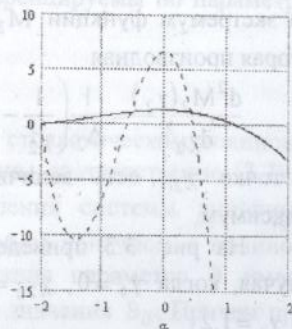
а)  $\alpha_0 = -1, \chi_2 = 0,1, \gamma_3 = 1,4$ б)  $\alpha_0 = -1, \chi_2 = 0,1, \gamma_3 = 0,8$ в)  $\alpha_0 = 2, \chi_2 = 3,$ г)  $\alpha_0 = 0, \chi_2 = 1,$ 

Рис. 3.2.

Коррелянты  $F_{1,j}(\chi_2)$ ,  $i, j = 1, 2$  имеют вид (3.18), только они в данном случае будут зависеть от  $\chi_2$ . Легко показать, что определитель системы будет тем же, что и в пункте 2 данного раздела.

Решением системы (3.21) будет:

$$h_1(\chi_2) = -\frac{\chi_2^{-1,5} \gamma_3}{\Delta_2},$$

$$h_2(\chi_2) = \frac{\chi_2^{-2}}{\Delta_2}.$$

Тогда коэффициенты  $k_0(\chi_2) \div k_2(\chi_2)$  примут соответственно вид

$$k_1(\chi_2) = \frac{2\chi_2^{-0.5}\gamma_3}{\Delta_2},$$

$$k_2(\chi_2) = -\frac{\chi_2^{-1}}{\Delta_2},$$

$$k_0(\chi_2) = -\frac{\ln\chi_2}{\Delta_2}.$$

Следовательно, математическое ожидание степенного стохастического полинома  $\eta_2(\chi_2)$  будет равно

$$M_2(\chi_2) = \frac{1}{\Delta_2}(-\ln\chi_2 - \chi_2^{-1}\chi_{20}).$$

Так как первая производная от  $M_2(\chi_2)$  имеет вид

$$\frac{dM_2(\chi_2)}{d\chi_2} = \frac{1}{\Delta_2} \left( -\frac{1}{\chi_2} + \frac{\chi_{20}}{\chi_2^2} \right),$$

то экстремум функции  $M_2(\chi_2)$  будет в точке  $\chi_{20}$ . А в силу того, что вторая производная

$$\frac{d^2M_2(\chi_2)}{d\chi_2^2} = \frac{1}{\Delta_2} \left( \frac{1}{\chi_2^2} - 2\frac{\chi_{20}}{\chi_2^3} \right)$$

в точке  $\chi_{20}$  есть величина отрицательная, то в точке  $\chi_{20}$  будет максимум.

На рис. 3.3 приведен график зависимости  $M_2(\chi_2)$  от  $\chi_2$  для случая, когда  $\gamma_4 = 0$ ,  $\chi_{20} = 1$ , а  $\gamma_3$  принимает два значения: 1)  $\gamma_3 = 0$ ; 2)  $\gamma_3 = 1.2$ .

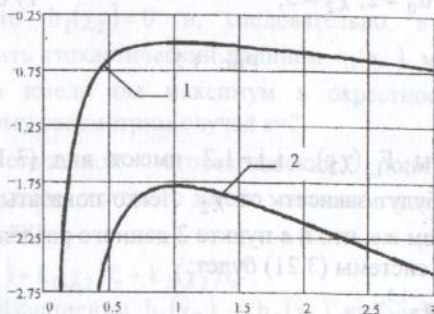


Рис. 3.3

Из графиков видно, что функция  $M_2(\chi_2)$  для  $\chi_2 > 0$  принимает отрицательные значения и имеет максимум в точке  $\chi_2 = 1$ .



### 3.4. Метод максимизации полинома для оценки скалярного параметра

1. Пусть имеется векторная случайная величина  $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$  независимых, одинаково распределенных случайных величин, статистически зависящих от скалярного параметра  $\vartheta$ , когда его истинное значение равно  $\vartheta_0$ .

Возьмем обобщенный стохастический полином первого типа степени  $s$  и размером  $n$  вида

$$S_{sn}(\xi; \vartheta) = nk_0(\vartheta) + \sum_{i=1}^s k_i(\vartheta) \sum_{v=1}^n \varphi_i(\xi_v). \quad (3.22)$$

Определение 3.3. Обобщенный стохастический полином вида (3.22) будем называть обобщенным стохастическим полиномом 1-го типа с коэффициентами, зависящими от скалярного параметра  $\vartheta$ .

Пусть функции параметра  $\psi_i(\vartheta)$  дифференцируемы по параметру  $\vartheta$ , т.е.

$$\left| \frac{d}{d\vartheta} \psi_i(\vartheta) \right| < \infty.$$

Утверждение 3.3. Если в обобщенном стохастическом полиноме вида (3.22) коэффициенты  $k_0(\vartheta)$  и  $k_i(\vartheta)$  равны соответственно (3.2) и (3.3), а функции  $h_i(\vartheta)$  находятся из решения системы линейных алгебраических уравнений (3.10), то при любом конечном  $s$  полином (3.22) асимптотически при  $n \rightarrow \infty$  как функция параметра  $\vartheta$  имеет максимум в точке  $\hat{\vartheta}_n$ , окрестности истинного значения  $\vartheta_0$ . Причем при  $n \rightarrow \infty$  величина  $\hat{\vartheta}_n$  сходится по вероятности к  $\vartheta_0$ .

Доказательство. Разделим полином  $S_{sn}(\xi; \vartheta)$  на  $n$ , т.е. возьмем средний обобщенный стохастический полином  $T_{sn}(\xi; \vartheta)$  с коэффициентами, зависящими от параметра  $\vartheta$  вида

$$T_{sn}(\xi; \vartheta) = k_0(\vartheta) + \sum_{i=1}^s k_i(\vartheta) \frac{1}{n} \sum_{v=1}^n \varphi_i(\xi_v). \quad (3.22')$$

Согласно результатам раздела 2.7 при  $n \rightarrow \infty$  обобщенный стохастический полином  $T_{sn}(\xi; \vartheta)$  сходится по вероятности к своему математическому ожиданию, которое равно  $M_s(\vartheta)$  вида (3.4). Согласно утверждению 3.1 функция  $M_s(\vartheta)$ , если коэффициенты  $h_i(\vartheta)$  находятся из решения системы линейных алгебраических уравнений (3.10), имеет максимум в точке  $\vartheta_0$ . Поэтому при конечном  $n$ , но при  $n \gg 1$  полином  $T_{sn}(\xi; \vartheta)$  при заданном векторе  $\xi$  как функция параметра  $\vartheta$  будет иметь

максимум в общем случае в другой точке  $\vartheta_n$ , но эта точка будет лежать в окрестности истинного значения параметра  $\vartheta_0$ . Причем, чем больше  $n$ , тем ближе к  $\vartheta_0$  будут принимать значения  $\vartheta_n$ . Так как при  $n \rightarrow \infty$  полином  $T_{sn}(\xi; \vartheta)$  сходится по вероятности к  $M_s(\vartheta)$ , то и  $\vartheta_n$  также при  $n \rightarrow \infty$  будет по вероятности сходиться к  $\vartheta_0$ .

Определение 3.4. Обобщенный стохастический полином вида (3.22), в котором коэффициенты  $k_0(\vartheta)$  и  $k_i(\vartheta)$  равны соответственно (3.2) и (3.3), а функции  $h_i(\vartheta)$  находятся из решения системы линейных алгебраических уравнений (3.10), будем называть оценочным обобщенным стохастическим полиномом степени  $s$  и будем обозначать его  $\Pi_{sn}(\xi; \vartheta)$ .

В методе максимизации полинома используется именно второе свойство обобщенных стохастических полиномов иметь максимум в окрестности истинного значения  $\vartheta_0$ .

Определение 3.5. Метод нахождения оценок неизвестных параметров случайных величин, основанный на том, что в качестве оценки параметра выбирается значение  $\vartheta_n$ , при котором оценочный полином  $\Pi_{sn}(\xi; \vartheta)$  как функция  $\vartheta$  принимает максимальное значение, будем называть методом максимизации полинома.

Таким образом, в методе максимизации полинома в качестве оценки берётся величина

$$\vartheta_n = \arg \max_{\vartheta} \Pi_{sn}(\xi; \vartheta). \quad (3.23)$$

Как видно из (3.22) и (3.2), (3.3), стохастический полином  $\Pi_{sn}(\xi; \vartheta)$  дифференцируем по  $\vartheta$ . Поэтому оценку можно находить из решения уравнения

$$\left. \frac{d}{d\vartheta} \Pi_{sn}(\xi; \vartheta) \right|_{\vartheta=\vartheta_n} = 0, \quad (3.24)$$

которое в развернутом виде будет равно

$$\sum_{i=1}^s h_i(\vartheta) \sum_{v=1}^n [\varphi_i(\xi_v) - \psi_i(\vartheta)] \Big|_{\vartheta=\vartheta_n} = 0. \quad (3.25)$$

В качестве решения уравнения (3.24) выбирается действительный корень, зависящий от выборочных значений, для которого  $\Pi_{sn}(\xi; \vartheta)$  принимает максимальное значение.

Определение 3.6. Уравнения (3.24) и (3.25) будем называть уравнением максимизации полинома.

Отметим, что, как следует из (3.24), для нахождения оценки необходимо прежде всего находить коэффициенты  $h_i(\vartheta)$ ,  $i = \overline{1, s}$ .



Коэффициенты  $k_0(\vartheta)$  и  $k_i(\vartheta)$ ,  $i = \overline{1, s}$  могут понадобиться в случае нескольких корней уравнения максимизации полинома, когда в качестве оценки необходимо взять значение  $\vartheta_n$  глобального максимума.

2. При решении практических задач иногда возникает необходимость построения различных визуальных характеристик оценочного стохастического полинома. Одной из таких характеристик является математическое ожидание оценочного стохастического полинома  $M_s(\vartheta)$  (точнее, математическое ожидание стохастического полинома  $T_{sn}(\xi; \vartheta)$ ), определённого равенством (3.4). С помощью графика функции  $M_s(\vartheta)$  можно определить число экстремумов оценочного полинома, положение глобального экстремума, его крутизну и зависимость функции оценочного стохастического полинома от таких параметров, как кумулянтные коэффициенты. Поэтому график зависимости  $M_s(\vartheta)$  от  $\vartheta$  представляет интерес.

Определение 3.7. График зависимости  $M_s(\vartheta)$  от  $\vartheta$  будем называть диаграммой отклонения оценочного стохастического полинома от истинного значения параметра (или просто диаграммой отклонения).

На рис. 3.1-3.3 приведены именно диаграммы отклонения.

Другой важной характеристикой является математическое ожидание производной по параметру оценочного стохастического полинома, равного

$$E \frac{d}{d\vartheta} S_{sn}(\xi; \vartheta) = n D_s(\vartheta),$$

где

$$D_s(\vartheta) = \frac{d}{d\vartheta} M_s(\vartheta) = \sum_{i=1}^s h_i(\vartheta) [\psi_i(\vartheta_0) - \psi_i(\vartheta)]. \quad (3.26)$$

Именно сама функция и график зависимости  $D_s(\vartheta)$  от  $\vartheta$  представляют интерес.

Определение 3.8. Функцию  $D_s(\vartheta)$  от  $\vartheta$  и её график будем называть обобщённой дискриминационной характеристикой уравнения максимизации полинома.

Очевидно,  $D_s(\vartheta_0) = 0$ . Однако крутизна функции  $D_s(\vartheta)$  в точке  $\vartheta_0$  зависит от коэффициентов  $h_i(\vartheta)$  и для различных  $s$  и различных параметров будет иметь различную величину.

3. Если имеется выборка  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  объемом  $n$ , тогда согласно методу максимизации полинома в качестве выборочного значения оценки  $\vartheta$  берётся то значение параметра, при котором



выборочный оценочный полином  $\Pi_{sn}(\bar{x}; \vartheta)$  принимает максимальное значение, т.е.

$$\vartheta = \arg \max_{\vartheta} \Pi_{sn}(\bar{x}; \vartheta),$$

где выборочный оценочный полином получается из оценочного обобщенного стохастического полинома, если в него вместо случайных величин  $\xi_i$  подставить выборочные значения  $x_i$ . Аналогично, выборочные значения оценки можно находить из решения уравнения

$$\frac{d}{d\vartheta} \Pi_{sn}(\bar{x}; \vartheta) \Big|_{\vartheta=\vartheta} = 0,$$

которое в развернутом виде будет равно

$$\sum_{i=1}^s h_i(\vartheta) \sum_{v=1}^n [\varphi_i(x_v) - \psi_i(\vartheta)] \Big|_{\vartheta=\vartheta} = 0.$$

Когда имеется выборка, тогда так же можно построить графики, аналогичные диаграмме отклонения и дискриминационной характеристике. Однако в этом случае эти характеристики будут зависеть от выборки.

Определение 3.9. График зависимости  $T_{sn}(\bar{x}; \vartheta)$  от  $\vartheta$  будем называть выборочной диаграммой отклонения оценочного стохастического полинома от истинного значения параметра (или просто выборочной диаграммой отклонения).

Определение 3.10. Функцию  $d_{sn}(\vartheta)$  вида

$$d_{sn}(\vartheta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^s h_i(\vartheta) \sum_{v=1}^n [\varphi_i(x_v) - \psi_i(\vartheta)] \quad (3.27)$$

и её график будем называть выборочной дискриминационной характеристикой уравнения максимизации полинома.

### 3.5. Свойства оценок скалярного параметра, найденного методом максимизации полинома

1. Прежде всего отметим, что оценка параметра  $\vartheta$ , найденная из решения уравнения (3.24), будет состоятельной. Это непосредственно следует из утверждения 3.3, так как, согласно этому утверждению, значение  $\hat{\vartheta}_n$ , при котором стохастический полином  $\Pi_{sn}(\bar{x}; \vartheta)$  принимает максимальное значение, сходится по вероятности к истинному значению при  $n \rightarrow \infty$ . С другой стороны, в методе максимизации полинома в качестве оценки параметра берется именно значение  $\hat{\vartheta}_n$ . Используя состоятельность оценок, докажем следующее важное утверждение.

Утверждение 3.4. Оценка  $\hat{\vartheta}_n$ , найденная из решения уравнений (2.24), будет асимптотически несмещенной.

Доказательство. Так как оценка  $\hat{\vartheta}_n$ , найденная из решения уравнения (3.24), состоятельная, то при  $n \gg 1$  оценка  $\hat{\vartheta}_n$  будет незначительно отличаться от истинного значения  $\vartheta_0$ . Поэтому левую часть уравнения (3.24) можно разложить в ряд Тейлора, ограничившись двумя членами разложения, т.е.

$$\left. \frac{d}{d\vartheta} \Pi_{sn}(\xi; \vartheta) \right|_{\vartheta=\hat{\vartheta}} \approx \left. \frac{d}{d\vartheta} \Pi_{sn}(\xi; \vartheta) \right|_{\vartheta_0} + (\hat{\vartheta}_n - \vartheta_0) \frac{d^2}{d\vartheta^2} \Pi_{sn}(\xi; \vartheta) \Big|_{\vartheta_0}.$$

Так как, согласно (3.24),

$$\left. \frac{d}{d\vartheta} \Pi_{sn}(\xi; \vartheta) \right|_{\vartheta_0} + (\hat{\vartheta}_n - \vartheta_0) \frac{d^2}{d\vartheta^2} \Pi_{sn}(\xi; \vartheta) \Big|_{\vartheta_0} \approx 0,$$

то из этого уравнения можно найти, что

$$(\hat{\vartheta}_n - \vartheta_0) \approx \frac{\left. \frac{d}{d\vartheta} \Pi_{sn}(\xi; \vartheta) \right|_{\vartheta_0}}{-\left. \frac{d^2}{d\vartheta^2} \Pi_{sn}(\xi; \vartheta) \right|_{\vartheta_0}}. \quad (3.28)$$

Используя (3.25), можно записать, что

$$-\left. \frac{d^2}{d\vartheta^2} \Pi_{sn}(\xi; \vartheta) \right|_{\vartheta_0} = -\sum_{i=1}^s \frac{d}{d\vartheta} h_i(\vartheta) \sum_{v=1}^n [\varphi_i(\xi_v) - \psi_i(\vartheta)] \Big|_{\vartheta_0} + \\ + n \sum_{i=1}^s h_i(\vartheta_0) \frac{d}{d\vartheta} \psi_i(\vartheta) \Big|_{\vartheta_0}.$$

Но, согласно результатам раздела 2.7, первое слагаемое при  $n \rightarrow \infty$  стремится к своему математическому ожиданию, которое равно нулю. Следовательно, асимптотически при  $n \rightarrow \infty$  имеем

$$-\left. \frac{d^2}{d\vartheta^2} \Pi_{sn}(\xi; \vartheta) \right|_{\vartheta_0} \approx n \sum_{i=1}^s h_i(\vartheta_0) \frac{d}{d\vartheta} \psi_i(\vartheta) \Big|_{\vartheta_0} = -E \left. \frac{d^2}{d\vartheta^2} \Pi_{sn}(\xi; \vartheta) \right|_{\vartheta_0}. \quad (3.29)$$

Поэтому, используя (3.29), можно записать, что асимптотически

$$(\hat{\vartheta}_n - \vartheta_0) \approx \frac{\left. \frac{d}{d\vartheta} \Pi_{sn}(\xi; \vartheta) \right|_{\vartheta_0}}{-E \left. \frac{d^2}{d\vartheta^2} \Pi_{sn}(\xi; \vartheta) \right|_{\vartheta_0}}.$$

Так как

$$E \frac{d}{d\vartheta} \Pi_{sn}(\bar{x}; \vartheta) \Big|_{\vartheta_0} = -\sum_{i=1}^s \frac{d}{d\vartheta} h_i(\vartheta) \sum_{v=1}^n E[\psi_i(\vartheta_0) - \psi_i(\vartheta_0)] = 0,$$

то асимптотически

$$E(\hat{\vartheta}_n - \vartheta_0) = 0 \quad (3.30)$$

и, следовательно, оценка  $\hat{\vartheta}_n$ , найденная методом максимизации полинома, является асимптотически несмещенной.

2. Теперь рассмотрим другое свойство.

Утверждение 3.5. Коэффициенты  $h_i(\vartheta)$ , найденные из решения системы линейных алгебраических уравнений (3.10), являются стационарной точкой для дисперсии оценки, найденной методом максимизации полинома.

Доказательство. Подставив (3.29) в (3.28) с учетом (3.30), будем иметь, что дисперсия оценки, найденной из решения уравнения (3.24), будет асимптотически равна

$$\begin{aligned} \sigma_{\hat{\vartheta}}^2 &\approx E(\hat{\vartheta}_n - \vartheta_0)^2 \approx \frac{E\left[\frac{d}{d\vartheta} \Pi_{sn}(\xi; \vartheta)_{\vartheta_0}\right]^2}{\left[-E \frac{d^2}{d\vartheta^2} \Pi_{sn}(\xi; \vartheta)_{\vartheta_0}\right]^2} = \\ &= \frac{n \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s h_i(\vartheta_0) h_j(\vartheta_0) F_{i,j}(\vartheta_0)}{\left[n \sum_{i=1}^s h_i(\vartheta_0) \frac{d}{d\vartheta} \psi_i(\vartheta)_{\vartheta_0}\right]^2}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Как видно из (3.31), дисперсия оценки  $\hat{\vartheta}_n$  является функцией коэффициентов  $h_i(\vartheta)$ ,  $i = \overline{1, s}$ , т.е. функцией многих переменных  $h_i(\vartheta)$ . Как известно из теории функций многих переменных, функция многих переменных может иметь экстремум в стационарной точке, т.е. в той точке, для которой система первых частных производных по переменным  $h_i$  равна нулю.

Первая частная производная по  $h_i$ ,  $i = \overline{1, s}$  от правой части (3.31) равна

$$\frac{d\sigma_{\hat{\vartheta}}^2}{dh_i} = 2 \frac{\sum_{j=1}^s h_j(\vartheta_0) F_{i,j}(\vartheta_0) - \lambda \frac{d}{d\vartheta} \psi_i(\vartheta)_{\vartheta_0}}{n \left[ \sum_{i=1}^s h_i(\vartheta_0) \frac{d}{d\vartheta} \psi_i(\vartheta)_{\vartheta_0} \right]^4}, \quad (3.32)$$

где



$$\lambda = \frac{\sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s h_i(\vartheta_0) h_j(\vartheta_0) F_{i,j}(\vartheta_0)}{\sum_{i=1}^s h_i(\vartheta_0) \frac{d}{d\vartheta} \psi_i(\vartheta)_{\vartheta_0}}$$

Так как для коэффициентов  $h_i(\vartheta)$ , найденных из решения системы (3.10), имеет место равенство (3.12) для любых  $\vartheta \in (a, b)$ , то  $\lambda = 1$ . Но тогда в силу равенства (3.10) правая часть (3.32) тождественно равна нулю для  $i = \overline{1, s}$ . Следовательно, коэффициенты  $h_i(\vartheta)$ , найденные из решения системы линейных алгебраических уравнений (3.10), являются стационарной точкой для дисперсии оценки  $\hat{\vartheta}_n$ , найденной методом максимизации полинома. Другими словами, коэффициенты  $h_i(\vartheta)$ , найденные из решения системы (3.10), обеспечивают экстремум (минимум или максимум) дисперсии оценки, найденной из уравнения системы (3.24), или обеспечивают экстремум правой части (3.31).

Утверждение 3.6. Коэффициенты  $h_i(\vartheta)$ , найденные из решения системы (3.10), обеспечивают минимум дисперсии оценки  $\hat{\vartheta}_n$ , найденной методом максимизации полинома.

Доказательство. Согласно теории функций многих переменных, для того, чтобы определить, что будет в стационарной точке – минимум или максимум, необходимо вычислить определитель с элементами

$$\left. \frac{\partial^2 \sigma_{\vartheta}^2}{\partial h_i \partial h_j} \right|_{\vartheta_0} \quad \text{в стационарной точке, т.е. при коэффициентах } h_i(\vartheta),$$

найденных из решения уравнения (3.10). Легко показать, что

$$\left. \frac{\partial^2 \sigma_{\vartheta}^2}{\partial h_i \partial h_j} \right|_{\vartheta_0} = F_{i,j}(\vartheta_0).$$

Следовательно, для определения состояния в стационарной точке необходимо вычислить определитель с элементами  $F_{i,j}(\vartheta_0)$ . Но, как было определено раньше, определитель с элементами  $F_{i,j}(\vartheta)$  есть объем тела стохастического полинома, а объем тела стохастического полинома есть величина положительная. Следовательно, в стационарной точке будет минимум функции многих переменных.

Утверждение 3.7. Для полинома  $\Pi_{sn}(\xi; \vartheta)$  с коэффициентами  $h_i(\vartheta)$ , найденными из решения системы линейных алгебраических уравнений (3.10), справедливо равенство

$$J_{sn}(\vartheta) = E \left[ \frac{d}{d\vartheta} \Pi_{sn}(\xi; \vartheta) \right]_{\vartheta_0}^2 = -E \frac{d^2}{d\vartheta^2} \Pi_{sn}(\xi; \vartheta)_{\vartheta_0}. \quad (3.33)$$

Доказательство. Так как коэффициенты  $h_i(\vartheta)$  находятся из решения системы линейных алгебраических уравнений (3.10), то, умножив левую и правую часть каждого  $i$ -го уравнения этой системы на  $h_i(\vartheta)$  и просуммировав по  $i$ , получим, что

$$\sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s h_i(\vartheta) h_j(\vartheta) F_{i,j}(\vartheta) = \sum_{i=1}^s h_i(\vartheta) \frac{d}{d\vartheta} \psi_i(\vartheta). \quad (3.34)$$

С другой стороны,

$$E \left[ \frac{d}{d\vartheta} J_{sn}(\vartheta) \right]^2 = n \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s h_i(\vartheta) h_j(\vartheta) F_{i,j}(\vartheta),$$

а  $-E \frac{d^2}{d\vartheta^2} \Pi_{sn}(\xi; \vartheta)$  имеет вид (3.29), т.е. имеет место равенство (2.33), которое в развернутом виде представлено равенством (3.34).

Следствие 1. Для функций  $h_i(\vartheta)$ , найденных из решения системы (2.10), выполняется неравенство

$$J_{sn}(\vartheta) = -E \frac{d^2}{d\vartheta^2} \Pi_{sn}(\xi; \vartheta)_{\vartheta_0} = n \sum_{i=1}^s h_i(\vartheta_0) \frac{d}{d\vartheta} \psi_i(\vartheta)_{\vartheta_0} \geq 0.$$

Это следует из (3.29), так как левая часть этого равенства равна дисперсии стохастического полинома, которая больше либо равна нулю.

Следствие 2. Для функций  $h_i(\vartheta)$ , найденных из решения системы (3.10), дисперсия оценки, найденной методом максимизации полинома, будет асимптотически равна

$$\sigma_{\min}^2 \approx J_{sn}^{-1}(\vartheta). \quad (3.35)$$

Это следует из равенства (3.31) с учетом (3.33).

Утверждение 3.8. Если в уравнении (3.27) с функциями  $h_i(\vartheta)$ , найденными из решения системы уравнений (3.10), взять  $(s+1)$  член, то для оценки, найденной методом максимизации полинома, асимптотически справедливо неравенство

$$\sigma_{(s+1)\min}^2 \leq \sigma_{s\min}^2 \quad (3.36)$$

или

$$J_{(s+1)n}^{-1}(\vartheta) \leq J_{sn}^{-1}(\vartheta),$$

где  $\sigma_{(s+1)\min}^2$  — асимптотическая дисперсия оценки, когда количество членов в полиноме (3.22) равно  $s$ .



Доказательство. Функции  $h_i(\vartheta)$ ,  $i = \overline{1, (s+1)}$  удовлетворяют системе алгебраических уравнений (3.10) и обеспечивают минимум асимптотической дисперсии оценки, найденной из решения уравнения (3.24). Так как при степени  $(s+1)$  тело стохастического полинома  $\Delta_{(s+1)} \neq 0$ , то решение системы (3.10) будет единственным.

Предположим, что существуют другие функции  $h_i^*(\vartheta)$ , удовлетворяющие системе уравнений (3.10) при  $i = \overline{1, s}$  и такие, что

$$1) h_i(\vartheta) \neq h_i^*(\vartheta), \quad i = \overline{1, s}, \quad \text{для } \forall \vartheta \in \Theta,$$

$$2) \sigma_{(s+1)\min}^2 > \tilde{\sigma}_{(s)\min}^2,$$

где  $\tilde{\sigma}_{(s)\min}^2$  – асимптотическая дисперсия оценки параметра при весовых коэффициентах  $h_i^*(\vartheta)$ .

Но тогда для функций  $h_i^*(\vartheta)$ ,  $i = \overline{1, s}$  и функции  $h_{s+1}^*(\vartheta) = 0$  будет справедливо неравенство

$$\sigma_{(s+1)\min}^2 > \tilde{\sigma}_{(s+1)\min}^2,$$

т.е. будут существовать другие функции  $h_i^*(\vartheta)$ ,  $i = \overline{1, (s+1)}$ , обеспечивающие минимум правой части (3.31) и для которых будет выполнено неравенство (3.36). Однако, так как  $h_i^*(\vartheta)$ ,  $i = \overline{1, (s+1)}$  минимизируют правую часть (3.36), то они должны удовлетворять системе уравнений (3.10). Но это противоречит единственности решения этой системы. Следовательно, предположение о существовании других  $h_i^*(\vartheta)$ , для которых справедливо неравенство (3.36), неверно.

Из доказанного утверждения 3.8 вытекает, что для выборочных стохастических полиномов с зависящими от параметра коэффициентами, для которых выполняется второе свойство стохастических полиномов, также выполняется и основное свойство стохастических полиномов. Однако основное свойство выполняется в одной точке, а именно, в точке максимального значения математического ожидания полинома  $\Pi_{sn}(\xi; \vartheta)$ , т.е. в точке  $\vartheta_0$ .

3. Из выражений (3.33) и (3.35) видно, что функция  $J_{sn}(\vartheta)$  аналогична количеству информации Фишера. В связи с этим введем следующее определение.

Определение 3.6. Функцию  $J_{sn}(\vartheta)$  будем называть количеством извлекаемой информации о параметре  $\vartheta$ , которое можно о нем извлечь из независимой выборки объемом  $n$  методом максимизации полинома, когда обобщенный стохастический полином степени  $s$  задан в классе обобщенных функций  $\varphi_i(\xi)$  (или описывается с помощью функций



$\psi_i(\theta)$ ). Более кратко функцию  $J_{sn}(\theta)$  будем называть количеством извлекаемой информации с помощью выборочного стохастического полинома, заданного в классе обобщенных функций  $\phi_i(\cdot)$ .

Из (3.33) и (3.34) видно, что функция

$$J_{sn}(\theta) = nj_s(\theta),$$

т.е. количество извлекаемой информации прямо пропорционально объему выборки  $n$ .

**Определение 3.7.** Функцию  $j_s(\theta)$  будем называть количеством извлекаемой информации из одного выборочного значения.

Отметим принципиальное различие между количеством информации Фишера  $I_n(\theta)$  и количеством извлекаемой информации  $J_{sn}(\theta)$ . Информация Фишера определяет количество информации о параметре, содержащейся в выборке, и не зависит от способа её извлечения. В свою очередь, количество извлекаемой информации определяет то количество информации, которое можно извлечь определённым методом (методом максимизации полинома) при определённом его описании (или задании) и при определённой степени полинома. Поэтому для количества информации Фишера и количества извлекаемой информации в общем случае имеет место неравенство

$$J_{sn}(\theta) \leq I_n(\theta). \quad (3.37)$$

**Утверждение 3.9.** Для коэффициентов  $h_i(\theta)$ , найденных из решения системы уравнений (2.10), имеет место сходимость

$$\lim_{s \rightarrow \infty} J_{sn}(\theta) = J_n(\theta) < \infty \text{ для } \forall \theta \in (a, d). \quad (3.38)$$

**Доказательство.** Сходимость имеет место в результате выполнения неравенства (3.37), которое имеет место при любом  $s$ .

**Определение 3.8.** Функцию  $J_n(\theta)$  будем называть предельным (максимальным) количеством извлекаемой информации о параметре  $\theta$ , которое можно извлечь методом максимизации полинома, когда обобщённый стохастический полином задан в классе обобщенных функций  $\phi_i(\xi)$ .

Отметим, что предельное количество извлекаемой информации не зависит от степени полинома, а зависит от способа описания полинома или от выбора функций  $\phi_i(\cdot)$ .

4. Интересно выяснить соотношение между  $J_n(\theta)$  и  $I_n(\theta)$ . Очевидно, возможны два случая.

Первый, когда  $J_n(\theta) < I_n(\theta)$ . В этом случае метод максимизации полинома даже при увеличении степени полинома до бесконечности не приводит к нахождению эффективной оценки.

Второй, когда  $J_n(\vartheta) = I_n(\vartheta)$ . В этом случае оценки метода максимизации полинома асимптотически при  $s \rightarrow \infty$  являются эффективными.

**Определение 3.9.** Оценки метода максимизации полинома, которые при  $s \rightarrow \infty$  являются эффективными, будем называть полиномиально эффективными оценками.

Полиномиально эффективные оценки представляют значительный практический интерес, так как при конечной степени полинома и при её увеличении можно найти методом максимизации полинома оценки, которые сколь угодно близко приблизятся к эффективным оценкам.

### 3.6. Нахождение оценок параметров, когда стохастический полином задан в классе степенных полиномов

1. Если функции  $\varphi(\xi) = \xi^i$ , то стохастический полином задан в классе степенных полиномов и он описывается с помощью последовательности начальных моментов  $\alpha_i(\vartheta)$ ,  $i = 1, 2, s$  порядка  $i$ . В этом случае объем тела  $\Delta_s(\vartheta)$  стохастического полинома определяется через центрированные коррелянты размером  $(i, j)$ , т.е. функции  $F_{i,j}(\vartheta)$ , равные

$$F_{i,j}(\vartheta) = \alpha_{i+j}(\vartheta) - \alpha_i(\vartheta)\alpha_j(\vartheta). \quad (3.39)$$

В этом случае оценка параметра  $\vartheta$  находится из решения уравнения максимизации полинома

$$\sum_{i=1}^s h_i(\vartheta) \sum_{v=1}^n \left[ \xi_v^i - \alpha_i(\vartheta) \right] \Big|_{\vartheta=\vartheta} = 0, \quad (3.40)$$

где коэффициенты  $h_i(\vartheta)$  находятся из решения системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{i=1}^s h_i(\vartheta) F_{i,j}(\vartheta) = \frac{d}{d\vartheta} \alpha_i(\vartheta), i = \overline{1, s}. \quad (3.41)$$

При этом дисперсия найденной оценки асимптотически будет равна

$$\sigma_{\vartheta}^2 \approx J_{sn}^{-1}(\vartheta_0),$$

где

$$J_{sn}^{-1}(\vartheta_0) = n \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s h_i(\vartheta_0) h_j(\vartheta_0) F_{i,j}(\vartheta_0) = \sum_{i=1}^s h_i(\vartheta_0) \frac{d}{d\vartheta} m_i(\vartheta) \Big|_{\vartheta_0}.$$

2. Остановимся на решении системы линейных алгебраических уравнений (3.41). В разделе 3.2 было отмечено, что определитель системы (3.41) является телом степенного стохастического полинома



$\Delta_s(\vartheta)$  и для линейных независимых функций он не равен нулю. Поэтому система линейных неоднородных уравнений (3.41) имеет единственное решение. Это решение можно найти с помощью формул Крамера:

$$h_j(\vartheta) = \frac{A_j(\vartheta)}{\Delta_s(\vartheta)}, j = \overline{1, s}, \quad (3.42)$$

где  $A_j(\vartheta)$  – определитель, получаемый из определителя  $\Delta_s(\vartheta)$  заменой  $j$ -го столбца столбцом из элементов  $\frac{d}{d\vartheta} \alpha_i(\vartheta)$ ,  $i = \overline{1, s}$  правой части системы уравнений (3.41). Тогда количество извлекаемой информации будет определяться выражением

$$\begin{aligned} J_{sn}(\vartheta_0) &= \frac{n}{\Delta_s^2(\vartheta_0)} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s A_i(\vartheta_0) A_j(\vartheta_0) F_{i,j}(\vartheta_0) = \\ &= \frac{n}{\Delta_s(\vartheta_0)} \sum_{i=1}^s A_i(\vartheta_0) \frac{d}{d\vartheta} \alpha_i(\vartheta) \Big|_{\vartheta_0}, \end{aligned} \quad (3.43)$$

а дисперсия асимптотически будет равна

$$\sigma_{\vartheta}^2 = \frac{\Delta_s^2(\vartheta_0)}{n \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s A_i(\vartheta_0) A_j(\vartheta_0) F_{i,j}(\vartheta_0)} = \frac{\Delta_s(\vartheta_0)}{n \sum_{i=1}^s A_i(\vartheta_0) \frac{d}{d\vartheta} \alpha_i(\vartheta) \Big|_{\vartheta_0}}. \quad (3.44)$$

Отметим, что дисперсия оценки пропорциональна объему тела стохастического полинома. В разделе 2.2 было указано, что объем тела накладывает ограничения на интервал, в котором параметры распределения принимают значения. В главе 5 будут показаны области допустимых значений для кумулянтных коэффициентов различных порядков, исходя из условия, что  $\Delta_s(\vartheta) \neq 0$ . Будет показано, что кумулянтные коэффициенты могут принимать значения, при которых  $\Delta_s(\vartheta)$  может сколь угодно близко приближаться к нулю. Следовательно, для этих параметров дисперсия оценки параметра  $\sigma_{\vartheta}^2$ , найденная методом максимизации полинома, может при конечном объеме выборки  $n$  сколь угодно близко приближаться к нулю при стремлении этих параметров к своим граничным значениям.

### 3.7. Оценка векторного параметра скалярной случайной величины методом максимизации полинома

1. Часто при решении практических задач возникает необходимость оценивать не один параметр (скаляр), а несколько параметров, т.е. оцениваемый параметр  $\vec{\vartheta}$  является векторным  $\vec{\vartheta} = \{\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_q\}$  размерностью  $q = 2, 3, \dots$ ,  $\vartheta_m \in (a_m, b_m)$ . Как



отмечалось раньше, при оценке параметров методом максимизации полинома в качестве априорной информации используется последовательность функций  $\psi_i(\vec{\vartheta})$ ,  $i = \overline{1, 2s}$ , которая в данном случае будет зависеть от векторного параметра  $\vec{\vartheta}$ . При оценке векторного параметра эти функции в общем случае будут зависеть или от всех составляющих векторного параметра, или только от части. Однако в дальнейшем зависимость функций от векторного параметра будем обозначать через  $\psi_i(\vec{\vartheta})$ .

Будем предполагать, что функции  $\psi_i(\vec{\vartheta})$ ,  $i = \overline{1, 2s}$  существуют, т.е.  $|\psi_i(\vec{\vartheta})| \leq c_i < \infty$ , для  $\forall \vec{\vartheta} \in \Theta$  и они дифференцируемы по каждой составляющей векторного параметра, т.е.

$$\left| \frac{\partial}{\partial \vartheta_m} \psi_i(\vec{\vartheta}) \right| \leq b_i < \infty$$

для  $\forall \vec{\vartheta}_i \in \vec{\Theta}$ .

Также будем предполагать, что случайные величины  $\xi$  наблюдаются, когда параметр  $\vec{\vartheta}$  имеет истинные значения  $\vec{\vartheta}_0 = (\vartheta_{10}, \vartheta_{20}, \dots, \vartheta_{q0})$ .

Необходимо найти оценку векторного параметра  $\vec{\hat{\vartheta}}$ , под которой будем понимать, что необходимо найти оценку каждой составляющей векторного параметра, т.е.  $\vec{\hat{\vartheta}} = (\hat{\vartheta}_1, \hat{\vartheta}_2, \dots, \hat{\vartheta}_q)$ .

2. В работе [3] показано, что для нахождения оценки векторного параметра необходимо для каждой составляющей  $\vartheta_m$ ,  $m = \overline{1, q}$  вектора  $\vec{\vartheta}$  построить обобщённый стохастический полином степени  $s$  вида

$$\Pi_{sn(m)}(\xi, \vec{\vartheta}) = \sum_{i=1}^s k_{i(m)}(\vec{\vartheta}) \sum_{v=1}^n \varphi_i(\xi_v) - k_{0(m)}(\vec{\vartheta}), \quad (3.45)$$

где

$$k_{i(m)}(\vec{\vartheta}) = \int_{a_m}^{g_m} h_{i(m)}(\vec{\vartheta}) d\vartheta_m, \quad (3.46)$$

$$k_{0(m)}(\vec{\vartheta}) = n \sum_{i=1}^s \int_{a_m}^{g_m} h_{i(m)}(\vec{\vartheta}) \psi_i(\vec{\vartheta}) d\vartheta_m. \quad (3.47)$$

А функции  $h_{i(m)}(\vec{\vartheta})$  параметра  $\vec{\vartheta}$  находятся для каждой составляющей  $m$  из решения системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^s h_{j(m)}(\mathfrak{g}) F_{i,j}(\mathfrak{g}) = \frac{d}{d\mathfrak{g}_m} \psi_i(\mathfrak{g}), \quad i = \overline{1, s}, \quad m = \overline{1, q}. \quad (3.48)$$

Индексом  $m$  в скобках внизу у  $\Pi_{sn(m)}(\xi, \mathfrak{g})$  и у коэффициентов  $h_{i(m)}(\mathfrak{g})$  в дальнейшем будем обозначать номер составляющей оцениваемого векторного параметра. При этом номер 1 имеет параметр, связанный с математическим ожиданием. Номер 2 имеет дисперсия случайной величины  $\chi_2$ . Номер 3 – коэффициент асимметрии  $\gamma_3$ , а номер 4 – коэффициент эксцесса  $\gamma_4$  и т.д.

В качестве оценки  $\tilde{\mathfrak{g}} = (\hat{\mathfrak{g}}_1, \hat{\mathfrak{g}}_2, \dots, \hat{\mathfrak{g}}_q)$  берутся те значения параметров составляющих, для которых каждый из стохастических полиномов  $\Pi_{sn(m)}(\xi, \mathfrak{g})$ ,  $m = \overline{1, q}$  вида (3.45) достигает совместно максимального значения. Так как по построению стохастических полиномов (3.45) каждый из полиномов дифференцируем по параметру  $\mathfrak{g}_m$ , то нахождение оценки приводит к тому, что оценки составляющих вектора  $\mathfrak{g}$  находятся из совместного решения системы  $q$  уравнений максимизации полинома вида

$$\left. \frac{\partial}{\partial \mathfrak{g}_m} \Pi_{sn(m)}(\xi, \mathfrak{g}) \right|_{\mathfrak{g}=\tilde{\mathfrak{g}}} = 0, \quad m = \overline{1, q}. \quad (3.49)$$

Эта система в развернутом виде будет равна

$$\sum_{i=1}^s h_{i(m)}(\mathfrak{g}) \sum_{v=1}^n [\varphi_i(\xi_v) - \psi_i(\mathfrak{g})] \Big|_{\mathfrak{g}=\tilde{\mathfrak{g}}} = 0, \quad m = \overline{1, q}. \quad (3.50)$$

Таким образом, метод максимизации полинома при нахождении оценок векторного параметра наблюдаемой скалярной случайной величины при независимых и одинаково распределенных выборочных значениях состоит в том, что оценки составляющих векторного параметра находятся из совместного решения системы уравнений (3.49) (точнее, (3.50)). При этом в каждом  $m$ -м уравнении коэффициенты  $h_{i(m)}(\mathfrak{g})$  находятся из решения системы линейных алгебраических уравнений (3.48).

Как видно из (3.48), система уравнений для нахождения коэффициентов с различным номером ( $m$ ) отличается друг от друга только правой частью уравнений. При этом в правой части этой системы уравнений используются частные производные от функций  $\psi_i(\mathfrak{g})$ ,  $i = \overline{1, s}$ , по той составляющей векторного параметра  $\mathfrak{g}_m$ , для которой находятся коэффициенты  $h_{i(m)}(\mathfrak{g})$   $m$ -го уравнения,  $m = \overline{1, q}$ .

3. Используя результаты, полученные в разделе 2.2, легко можно доказать следующее утверждение.



Утверждение 3.10. Оценки векторного параметра наблюдаемой скалярной случайной величины, найденные методом максимизации полинома из совместного решения системы уравнений (3.49), будут состоятельными.

4. Несколько сложнее обстоит дело с нахождением дисперсии оценок составляющих векторного параметра. Хорошо известно, что при нахождении оценки векторного параметра одной дисперсии оценок составляющих векторного параметра в качестве характеристики качества оценивания недостаточно. В этом случае в классе несмещенных оценок используется вариационная матрица оценок

$$V_{sn}(\mathfrak{g}_0) = \|V_{sn}^{(i,j)}(\mathfrak{g}_0)\|, \quad (3.51)$$

с элементами

$$V_{sn}^{(i,j)}(\mathfrak{g}_0) = E\{(\mathfrak{g}_i - \mathfrak{g}_{i0})(\mathfrak{g}_j - \mathfrak{g}_{j0})\}, \quad i, j = \overline{1, q}. \quad (3.52)$$

Как будет показано в следующем разделе, нахождение вариационной матрицы оценок, найденных методом максимизации полинома, по форме совпадает со случаем нахождения оценок методом максимального правдоподобия. Только в этом случае используются стохастические полиномы (3.45), а не функция правдоподобия.

### 3.8. Вариационная матрица оценок, найденных методом максимизация полинома

1. В силу утверждения 3.10 при большом объеме выборки  $n \gg 1$  оценка каждой составляющей векторного параметра  $\mathfrak{g}_m$ ,  $m = \overline{1, q}$  будет незначительно отличаться от истинного значения  $\mathfrak{g}_{m0}$ . Поэтому каждое уравнение (3.49) можно разложить в ряд Тейлора в окрестности истинного значения  $\mathfrak{g}_{m0}$ , ограничившись двумя членами разложения. При этом будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial \mathfrak{g}_m} \Pi_{sn(m)}(\xi; \mathfrak{g})_{\mathfrak{g}_0} - \sum_{k=1}^q (\mathfrak{g}_k - \mathfrak{g}_{k0}) \left[ -\frac{\partial^2}{\partial \mathfrak{g}_m \partial \mathfrak{g}_k} \Pi_{sn(m)}(\xi; \mathfrak{g}) \right]_{\mathfrak{g}_0} \approx 0. \quad (3.53)$$

Утверждение 3.11. Асимптотически при  $n \rightarrow \infty$  имеет место сходимость по вероятности

$$-\frac{\partial^2}{\partial \mathfrak{g}_m \partial \mathfrak{g}_k} \Pi_{sn(m)}(\xi; \mathfrak{g})_{\mathfrak{g}_0} \xrightarrow{p} J_{sn}^{(m,k)}(\mathfrak{g}_0), \quad (3.54)$$

где



$$J_{sn}^{(m,k)}(\bar{\theta}_0) = -E \frac{\partial^2}{\partial \theta_m \partial \theta_k} \Pi_{sn(m)}(\xi; \bar{\theta})_{\bar{\theta}_0} = \\ = n \sum_{i=1}^s h_{i(m)}(\bar{\theta}_0) \frac{\partial}{\partial \theta_k} \psi_i(\bar{\theta})_{\bar{\theta}_0}. \quad (3.55)$$

Доказательство. Используя (3.49) и (3.50), получим

$$-\frac{\partial^2}{\partial \theta_m \partial \theta_k} \Pi_{sn(m)}(\xi; \bar{\theta})_{\bar{\theta}_0} = -\sum_{i=1}^s \frac{\partial}{\partial \theta_k} h_{i(m)}(\bar{\theta}_0) \sum_{v=1}^n [\varphi_i(\xi_v) - \psi_i(\bar{\theta}_0)] + \\ + n \sum_{i=1}^s h_{i(m)}(\bar{\theta}_0) \frac{\partial}{\partial \theta_k} \psi_i(\bar{\theta})_{\bar{\theta}_0}.$$

Однако, в силу того, что сумма

$$\sum_{v=1}^n [\varphi_i(\xi_v) - \psi_i(\bar{\theta}_0)]$$

по вероятности стремится к нулю для произвольной  $i$ , первое слагаемое в полученном выражении асимптотически по вероятности стремится к нулю. Поэтому остается второе слагаемое и, следовательно, имеет место сходимость (3.54).

2. На основании равенства (3.53) можно показать несмещенность оценок векторного параметра.

Утверждение 3.12. Оценки векторного параметра наблюдаемой скалярной случайной величины, найденные методом максимизации полинома, являются асимптотически несмещенными.

Доказательство. В силу утверждения 3.11 систему уравнений (3.53) можно записать в следующем виде:

$$\sum_{k=1}^q (\hat{\theta}_k - \theta_{k0}) J_{sn}^{(m,k)}(\bar{\theta}_0) \approx \frac{\partial}{\partial \theta_m} \Pi_{sn(m)}(\xi; \bar{\theta})_{\bar{\theta}_0}, \quad m = \overline{1, q}.$$

Решением этой системы линейных алгебраических уравнений будет

$$(\hat{\theta}_m - \theta_{m0}) \approx \frac{B_m(\xi; \bar{\theta}_0)}{D_{qs}(\bar{\theta}_0)},$$

где  $D_{qs}(\bar{\theta}_0)$  — определитель матрицы  $J_{sn}(\bar{\theta}_0)$  размером  $q \times q$ , составленной из элементов  $J_{sn}^{(m,k)}(\bar{\theta}_0)$  вида (3.55), т.е. матрица  $J_{sn}(\bar{\theta}_0)$  равна

$$J_{sn}(\bar{\theta}_0) = \| J_{sn}^{(m,k)}(\bar{\theta}_0) \|, \quad k = \overline{1, q}; \quad (3.56)$$

$B_m(\xi; \bar{\theta}_0)$  — определитель, получающийся из определителя  $D_{qs}(\bar{\theta}_0)$  заменой  $m$ -го столбца столбцом, составленным из элементов

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta_r} \Pi_{sn(r)}(\xi; \bar{\vartheta})_{\bar{\vartheta}_0}, \quad r = \overline{1, q}.$$

Разлагая определитель  $B_m(\xi, \bar{\vartheta}_0)$  по элементам  $m$ -го столбца, получим

$$B_m(\xi; \bar{\vartheta}_0)_{\bar{\vartheta}_0} = \sum_{r=1}^q \frac{\partial}{\partial \vartheta_r} \Pi_{sn(r)}(\xi; \bar{\vartheta})_{\bar{\vartheta}_0} \rho_{rm}(\bar{\vartheta}_0),$$

где  $\rho_{rm}(\bar{\vartheta}_0)$  – алгебраическое дополнение элемента  $r$  в  $m$ -м столбце определителя  $B_m(\xi, \bar{\vartheta}_0)$ . Тогда для оценки каждой составляющей векторного параметра асимптотически имеет место равенство

$$(\bar{\vartheta}_m - \vartheta_{m0}) \approx \frac{1}{D_{ps}(\bar{\vartheta}_0)} \sum_{r=1}^q \frac{\partial}{\partial \vartheta_r} \Pi_{sn(r)}(\xi; \bar{\vartheta})_{\bar{\vartheta}_0} \rho_{rm}(\bar{\vartheta}_0). \quad (3.57)$$

В силу того, что

$$E \frac{\partial}{\partial \vartheta_r} \Pi_{sn(r)}(\xi; \bar{\vartheta})_{\bar{\vartheta}_0} = 0,$$

для каждого  $r = \overline{1, q}$  получаем, что

$$E(\bar{\vartheta}_m - \vartheta_{m0}) = 0, \quad m = \overline{1, q},$$

т.е. оценка каждой составляющей векторного параметра является несмещенной. Следовательно, оценка векторного параметра  $\bar{\vartheta}$  в целом будет несмещенной.

3. Полученное равенство (3.50) позволяет найти вариационную матрицу оценок векторного параметра. Предварительно докажем следующее утверждение:

Утверждение 3.13. Для коэффициентов  $h_{i(m)}(\bar{\vartheta})$ , найденных из решения системы алгебраических уравнений (3.48), справедливо равенство

$$E \left\{ \frac{\partial}{\partial \vartheta_m} \Pi_{sn(m)}(\xi; \bar{\vartheta}) \frac{\partial}{\partial \vartheta_r} \Pi_{sn(m)}(\xi; \bar{\vartheta}) \right\} = - E \frac{\partial^2}{\partial \vartheta_m \partial \vartheta_r} \Pi_{sn(m)}(\xi; \bar{\vartheta}). \quad (3.58)$$

Доказательство. Используя выражения (3.48) и (3.49), легко показать, что имеют место следующие равенства:

$$E \left\{ \frac{\partial}{\partial \vartheta_m} \Pi_{sn(m)}(\xi; \bar{\vartheta}) \frac{\partial}{\partial \vartheta_r} \Pi_{sn(m)}(\xi; \bar{\vartheta}) \right\} = n \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s h_{i(m)}(\bar{\vartheta}) h_{j(r)}(\bar{\vartheta}) F_{i,j}(\vartheta),$$

$$- E \frac{\partial^2}{\partial \vartheta_m \partial \vartheta_r} \Pi_{sn(m)}(\xi; \bar{\vartheta}) = n \sum_{i=1}^s h_{i(m)}(\bar{\vartheta}) \frac{\partial}{\partial \vartheta_m} \psi_i(\bar{\vartheta}).$$

С другой стороны, коэффициенты  $h_{i(m)}(\bar{g})$  удовлетворяют системе уравнений (3.48), т.е. эти коэффициенты таковы, что имеет место равенство (3.48). Если теперь правую и левую части каждого уравнения в (3.48) умножить на коэффициент  $h_{i(r)}(\bar{g})$  и просуммировать по  $i$ , то получим равенство

$$\sum_{i=1}^s h_{i(m)}(\bar{g}) \sum_{j=1}^s h_{j(r)}(\bar{g}) F_{i,j}(\bar{g}) = \sum_{i=1}^s h_{i(r)}(\bar{g}) \frac{\partial}{\partial g_m} \Psi_i(\bar{g}).$$

Умножив правую и левую части этого выражения на  $p$ , с учетом предыдущих равенств получим равенство (3.58).

Учитывая обозначение (3.55), теперь можно записать, что

$$\begin{aligned} J_{sn}^{(m,r)} &= E \left\{ \frac{\partial}{\partial g_m} \Pi_{sn(m)}(\xi; \bar{g}) \frac{\partial}{\partial g_r} \Pi_{sn(m)}(\xi; \bar{g}) \right\} = \\ &= -E \frac{\partial^2}{\partial g_m \partial g_r} \Pi_{sn(m)}(\xi; \bar{g}), \end{aligned} \quad (3.59)$$

которое в развернутом виде будет равно

$$\begin{aligned} J_{sn}^{(m,r)} &= n \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s h_{i(m)}(\bar{g}) \sum_{j=1}^s h_{j(r)}(\bar{g}) F_{i,j}(\bar{g}) = \\ &= n \sum_{i=1}^s h_{i(r)}(\bar{g}) \frac{\partial}{\partial g_m} \Psi_i(\bar{g}). \end{aligned} \quad (3.60)$$

**Следствие.** Для величины  $J_{sn}^{(m,r)}(\bar{g})$  справедливо равенство

$$J_{sn}^{(m,r)}(\bar{g}) = J_{sn}^{(r,m)}(\bar{g}). \quad (3.61)$$

Доказательство этого следствия непосредственно вытекает из равенств (3.59), (3.60).

**Утверждение 3.14.** Вариация оценок  $\hat{g}_m$  и  $\hat{g}_r$ , найденных методом максимизации полинома, асимптотически равна отношению алгебраического дополнения  $\rho_{mr}(\bar{g}_0)$  элемента  $J_{sn}^{(m,r)}(\bar{g})$  в определителе  $D_{qs}(\bar{g}_0)$  к определителю  $D_{qs}(\bar{g}_0)$ , т.е.

$$E(\hat{g}_m - g_{m0})(\hat{g}_r - g_{r0}) = \rho_{mr}(\bar{g}) D_{qs}^{-1}(\bar{g}_0). \quad (3.62)$$

**Доказательство.** Используя выражение (3.57), можно записать, что

$$\begin{aligned} E(\hat{g}_m - g_{m0})(\hat{g}_r - g_{r0}) &= \frac{1}{D_{qs}^2(\bar{g}_0)} \sum_{l=1}^q \sum_{k=1}^q \rho_{lm}(\bar{g}_0) \rho_{kr}(\bar{g}_0) \times \\ &\times E \left\{ \frac{\partial}{\partial g_l} \Pi_{sn(l)}(\xi; \bar{g}) \times \frac{\partial}{\partial g_k} \Pi_{sn(k)}(\xi; \bar{g}) \right\}_{\bar{g}_0}, \end{aligned}$$

которое с учетом (3.59) будет равно



$$\begin{aligned} E(\hat{\theta}_m - \theta_{m0})(\hat{\theta}_r - \theta_{r0}) &= \frac{1}{D_{qs}^2(\bar{\theta}_0)} \sum_{l=1}^q \sum_{k=1}^q \rho_{lm}(\bar{\theta}_0) \rho_{kr}(\bar{\theta}_0) J_{sn}^{(k,l)}(\bar{\theta}_0) = \\ &= \frac{1}{D_{qs}^2(\bar{\theta}_0)} \sum_{k=1}^q \rho_{kr}(\bar{\theta}_0) \sum_{l=1}^q \rho_{lm}(\bar{\theta}_0) J_{sn}^{(k,l)}(\bar{\theta}_0). \end{aligned}$$

Так как выполняется равенство (3.61), то вследствие следующих свойств определителя:

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^q \rho_{lm}(\bar{\theta}_0) J_{sn}^{(k,l)}(\bar{\theta}_0) &= 0, \quad k \neq m, \\ \sum_{l=1}^q \rho_{lm}(\bar{\theta}_0) J_{sn}^{(k,l)}(\bar{\theta}_0) &= D_{qs}, \quad k = m \end{aligned}$$

получим равенство (2.62).

Следствие 1. Вариационная матрица  $V_{sn}(\bar{\theta}_0)$  оценок компонент векторного параметра (2.51), найденных методом максимизации полинома, асимптотически равна обратной матрице  $J_{sn}(\bar{\theta}_0)$ , составленной из элементов  $J_{sn}^{(m,r)}(\bar{\theta})$ , т.е.

$$\begin{aligned} V_{sn}(\bar{\theta}_0) &= E(\hat{\theta}_m - \theta_{m0})(\hat{\theta}_r - \theta_{r0}) = \\ &= J_{sn}^{-1}(\bar{\theta}_0) = [J_{sn}^{(m,r)}(\bar{\theta}_0)]^{-1}, \quad m, r = \overline{1, q}. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Это следствие вытекает в силу определения обратной матрицы и утверждения 3.14.

Определение 3.10. Матрица  $J_{sn}(\bar{\theta})$  называется *матрицей количества извлекаемой информации* о векторном параметре, которую можно извлечь из независимой и одинаково распределенной случайной величины  $\xi$  при совместном оценивании параметров методом максимизации полинома, или коротко матрицей количества извлекаемой информации о векторном параметре наблюдаемой случайной величины методом максимизации полинома.

Отметим, что на диагонали этой матрицы лежат количества извлекаемой информации о составляющих векторного параметра в предположении, что значения остальных компонент известны.

Обозначим через  $J_n^{(m,r)}(\bar{\theta})$  элементы, равные

$$J_n^{(m,r)}(\bar{\theta}) = \lim_{s \rightarrow \infty} J_{sn}^{(m,r)}(\bar{\theta}).$$

Определение 3.11. Матрица  $J_n(\bar{\theta})$  с элементами  $J_n^{(m,r)}(\bar{\theta})$  называется *предельной (максимальной) матрицей количества извлекаемой информации* о векторном параметре.

Определение 3.12. В том случае, если предельная матрица количества извлекаемой информации  $J_n(\mathcal{G})$  равна информационной матрице Фишера  $I(\mathcal{G})$ , то найденные оценки называются *совместно полиномиально эффективными оценками*.

### 3.9. Краткая историческая справка

Первоначально метод максимизации полинома был обоснован для нахождения оценок скалярного параметра случайных процессов с непрерывным временем и был опубликован в 1971 г. в работе [10].

Несколько позже он был доложен на конференции по теории передачи и кодирования информации в г. Горьком [11].

Для случая нахождения оценок векторного параметра метод был опубликован в работе [12]. Метод основывался на использовании функциональных стохастических полиномов (рядов Вольтерра). В работах [13-15] этот метод применялся для нахождения конкретных параметров негауссовских случайных процессов с непрерывным временем. Была показана принципиальная возможность нахождения оценок предложенным методом и высокая эффективность найденных оценок.

Первое систематическое изложение метода максимизации полинома, исследование его свойств и применение его для решения конкретных задач было проведено в кандидатской диссертационной работе автора [16]. Полное и завершенное обоснование метода для случая случайных процессов с непрерывным временем было опубликовано в монографии автора [17], в которой фактически были приведены материалы его докторской диссертационной работы с аналогичным названием [18].

Первое обоснование метода максимизации полинома для случая независимой и одинаково распределенной выборки было проведено в работе [19] и более систематически и расширенно изложено в работе [20]. Наиболее полное и завершенное изложение метода максимизации полинома для случая независимой выборки проведено в монографии [3]. Фактически эта работа является продолжением работы [20] и упрощенным вариантом работы [17], так как в ней используется независимая выборка, а не случайные процессы с непрерывным временем. Отметим, что в работе [3] обоснование метода максимизации полинома проведено с других позиций, чем в данной работе.



## ОПИСАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН, БЛИЗКИХ К ГАУССОВСКИМ СЛУЧАЙНЫМ ВЕЛИЧИНАМ

В главе проведено обоснование случайных величин, которые по своим статистическим свойствам близки к гауссовским случайным величинам. На основании понятий тела и объема тела стохастического полинома определены так называемые перфорированные случайные величины, с помощью которых предложено три класса случайных величин, близких к гауссовским, а именно:

- класс асимметричных случайных величин 1-го и 2-го типов;
- класс эксцессных случайных величин 1-го и 2-го типов;
- класс асимметрично-эксцессных случайных величин.

### 4.1. Описание тела и объема тела случайной величины с помощью кумулянтных коэффициентов

1. Остановимся на случае, когда случайная величина задается с помощью степенных преобразований, т.е. когда она описывается с помощью начальных моментов. Как указывалось в разделе 1.1 (с. 16), в том случае, когда известна функция плотности распределения случайной величины и когда она зависит от параметров, то и последовательность начальных моментов в общем случае также зависит от этих же параметров распределения. Однако, если функция плотности распределения неизвестна, то в качестве параметров случайной величины могут выступать так называемые моментные параметры в виде кумулянтов и кумулянтных коэффициентов случайной величины  $\alpha, \chi_2, \gamma_3, \gamma_4, \dots, \gamma_s$ .

В этом случае как само тело случайной величины, так и объем тела будут зависеть от множества кумулянтных коэффициентов высших порядков. Хорошо известно [2], что кумулянты не могут принимать произвольные значения. В данном случае именно условие, что объем тела размерности  $s$  всегда больше нуля, накладывает ограничение на взаимозависимость между кумулянтными коэффициентами разных порядков и на область допустимых значений самих кумулянтов высших порядков.



**Пример 4.1.** Пусть имеется случайная величина  $\xi$  с математическим ожиданием  $E\xi = \alpha$  и кумулянтами высших порядков  $\chi_2, \chi_3, \dots$  и т.д. Найдем тело этой случайной величины размером  $s$  для  $s = 1, 2, 3$ . Как видно из определения 2.9, для нахождения тела случайной величины необходимо вычислить элементы  $F_{i,j}$ , которые являются центрированными коррелянтами размером  $(i, j)$ . При степенном задании случайной величины эти элементы определяются через моменты  $\alpha_i$  согласно выражению (2.10).

Используя выражения (1.6) для начальных моментов, легко найти значения  $F_{i,j}(\xi)$  согласно (2.10) через  $\chi_2$  и кумулянтные коэффициенты высших порядков:

$$\begin{aligned} F_{1,1} &= \chi_2, \\ F_{1,2} &= \chi_2^{1.5} \gamma_3 + 2\alpha \chi_2, \\ F_{1,3} &= \chi_2^2 (\gamma_4 + 3) + 3\alpha \chi_2^{1.5} \gamma_3 + 3\alpha^2 \chi_2, \\ F_{2,2} &= \chi_2^2 (\gamma_4 + 2) + 4\alpha \chi_2^{1.5} \gamma_3 + 4\alpha^2 \chi_2, \\ F_{2,3} &= \chi_2^{2.5} (\gamma_5 + 9\gamma_3) + 5\alpha \chi_2^2 \gamma_4 + 9\alpha \chi_2^{1.5} \gamma_3 + 6\alpha^3 \chi_2, \\ F_{3,3} &= \chi_2^3 (\gamma_6 + 15\gamma_4 + 9\gamma_3^2 + 15) + 6\alpha \chi_2^{2.5} (\gamma_5 + 9\gamma_3) + \\ &\quad + 3\alpha^2 \chi_2^2 (5\gamma_4 + 12) + 18\alpha^3 \chi_2^{1.5} \gamma_3 + 9\alpha^4 \chi_2. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Тогда тело размером 1 случайной величины  $\xi$  будет равно

$$F_1 = |\chi_2|,$$

т.е. тело размером 1 представляет матрицу с одним элементом, равным кумулянту второго порядка случайной величины  $\xi$ .

Тело размером 2 имеет вид

$$F_2(\alpha, \chi_2, \gamma_3, \gamma_4) = \begin{vmatrix} F_{1,1} & F_{1,2} \\ F_{1,2} & F_{2,2} \end{vmatrix}.$$

В данном случае тело размером 2 случайной величины  $\xi$  является матрицей размерности  $2 \times 2$  с элементами  $F_{1,1}$ ,  $F_{1,2}$ ,  $F_{2,2}$ . Элементы  $F_{1,2}$  и  $F_{2,2}$  зависят от математического ожидания  $\alpha$ , кумулянта второго порядка  $\chi_2$  и кумулянтных коэффициентов  $\gamma_3$  и  $\gamma_4$ . Следовательно, и тело размером 2 в целом зависит от этих же параметров.

Легко записать тело размером 3, которое будет иметь вид

$$F_3(\alpha, \chi_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_6) = \begin{vmatrix} F_{1,1} & F_{1,2} & F_{1,3} \\ F_{1,2} & F_{2,2} & F_{2,3} \\ F_{1,3} & F_{2,3} & F_{3,3} \end{vmatrix}.$$

Как видно из выражений для  $F_{1,2} - F_{3,3}$ , приведенных в (4.1), тело размером 3 будет зависеть, кроме перечисленных ранее переменных, еще от кумулянтных коэффициентов  $\gamma_5$  и  $\gamma_6$ .

Отметим, что увеличение размера частичного тела на единицу приводит к тому, что это тело становится зависимым на два параметра больше, чем предыдущее. При этом в качестве дополнительных параметров выступают кумулянтные коэффициенты высших порядков. В данном случае —  $\gamma_5$  и  $\gamma_6$ .

Пример 4.2. Для условий предыдущего примера вычислим объемы частичного тела размером  $s=1,2,3$ .

Частичный объем тела размером 1 случайной величины  $\xi$  будет равен

$$\Delta_1 = |\chi_2| = \chi_2,$$

т.е. он равен кумулянту второго порядка.

Используя выражения (4.1), легко показать, что частичный объем тела размером 2 случайной величины  $\xi$  будет равен

$$\Delta_2(\chi_2, \gamma_3, \gamma_4) = \begin{vmatrix} F_{1,1} & F_{1,2} \\ F_{1,2} & F_{2,2} \end{vmatrix} = \chi_2^3(\gamma_4 + 2 - \gamma_3^2). \quad (4.2)$$

Из полученного выражения видно, что частичный объем тела размером 2 не зависит от  $\alpha$ , а зависит от кумулянта второго порядка  $\chi_2$  и кумулянтных коэффициентов  $\gamma_3$  и  $\gamma_4$ .

Частичный объем тела размером 3 случайной величины  $\xi$  будет равен

$$\Delta_3(\chi_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_6) = \begin{vmatrix} F_{1,1} & F_{1,2} & F_{1,3} \\ F_{1,2} & F_{2,2} & F_{2,3} \\ F_{1,3} & F_{2,3} & F_{3,3} \end{vmatrix}.$$

Подставив выражения  $F_{i,j}$  согласно (4.1), получим, что в общем случае

$$\Delta_3(\chi_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_6) = \chi_2^6[(\gamma_4 + 2 - \gamma_3^2)(\gamma_6 - \gamma_4^2 + 9\gamma_3^2 + 9\gamma_4 + 6) + \gamma_3\gamma_4(2\gamma_5 + 12\gamma_3 - \gamma_3\gamma_4) - (\gamma_5 + 6\gamma_3)^2]. \quad (4.3)$$

2. Из рассмотрения примеров 4.1 и 4.2 можно выделить одно важное свойство объема тела стохастического полинома, заданного в классе степенных функций.

Свойство 4.1. Несмотря на то, что тело случайной величины  $F_s$  зависит от математического ожидания  $\alpha$ , объем тела  $\Delta_s$  не зависит от  $\alpha$ .

3. В разделе 2.2 было отмечено, что объем частичного тела при любом размере тела есть величина больше нуля. Это условие, как было



отмечено раньше, накладывает ограничение на взаимозависимость между кумулянтными коэффициентами.

При  $s=1$  должно выполняться условие  $\chi_2 > 0$ . Это условие выполняется автоматически по определению кумулянта второго порядка, так как он равен дисперсии случайной величины.

При  $s=2$  объем тела равен (4.2) и, следовательно, должно иметь место неравенство

$$\gamma_4 + 2 - \gamma_3^2 > 0,$$

т.е. для любой случайной величины  $\xi$  между кумулянтными коэффициентами  $\gamma_3$  и  $\gamma_4$  имеет место неравенство

$$\gamma_4 + 2 > \gamma_3^2. \quad (4.4)$$

Это неравенство хорошо известно [2; 3; 5]. Согласно этому неравенству область допустимых значений для  $\gamma_3$  и  $\gamma_4$  находится внутри параболы, график которой приведен на рис 4.1.

Если размерность тела равна трем, то согласно (4.3) для кумулянтных коэффициентов  $\gamma_3$ ,  $\gamma_4$ ,  $\gamma_5$  и  $\gamma_6$  должно выполняться неравенство

$$(\gamma_4 + 2 - \gamma_3^2)\gamma_6 + (-\gamma_4^2 + 9\gamma_4 + 6)(\gamma_4 + 2) + 12\gamma_3^2(\gamma_4 - 2) - 9\gamma_3^4 + 2\gamma_3\gamma_4\gamma_5 - \gamma_5(\gamma_5 - 12\gamma_3) > 0. \quad (4.5)$$

Это неравенство определяет область определения для перечисленных выше кумулянтных коэффициентов.

Интересно рассмотреть случай, когда в (4.5) кумулянтные коэффициенты  $\gamma_5$  и  $\gamma_6$  равны нулю. Тогда неравенство (4.5) примет вид

$$(-\gamma_4^2 + 9\gamma_4 + 6)(\gamma_4 + 2) + 12\gamma_3^2(\gamma_4 - 2) - 9\gamma_3^4 > 0. \quad (4.6)$$

Неравенство (4.6) также налагает ограничения только на кумулянтные коэффициенты  $\gamma_3$  и  $\gamma_4$ , но оно существенно отличается от неравенства (4.4).

Возникает вопрос: каким из неравенств пользоваться и в каком случае?

Дело в том, что при получении неравенства (4.4) на кумулянтные коэффициенты  $\gamma_5$ ,  $\gamma_6$  и высших порядков не накладывалось никаких ограничений, т.е. они могли принимать произвольные значения.

Поэтому существуют такие значения  $\gamma_5$ ,  $\gamma_6$  и т.д., для которых имеет место неравенство (4.4). Неравенство (4.6) получено из условия положительности объема тела размером 3 и при условии, что  $\gamma_5 = \gamma_6 = 0$ , а кумулянтные коэффициенты  $\gamma_7$ ,  $\gamma_8$  и высших порядков могут принимать произвольные значения. В этом случае (т.е. когда  $\gamma_5 = \gamma_6 = 0$ ) область допустимых значений  $\gamma_3$  и  $\gamma_4$  определяется



неравенством (4.6) и она естественно отличается от области допустимых значений, когда  $\gamma_5$  и  $\gamma_6$  могут принимать произвольные значения.

На рис. 4.1 приведены области допустимых значений  $\gamma_3$  и  $\gamma_4$ , определенные неравенствами (4.4) (внутри внешней параболы) и (4.6) (внутри сердцеобразной замкнутой фигуры). Из графиков видно, что при  $\gamma_5 = \gamma_6 = 0$  область допустимых значений ограничена и она полностью включается в область, получаемую при произвольных значениях  $\gamma_5, \gamma_6$ .

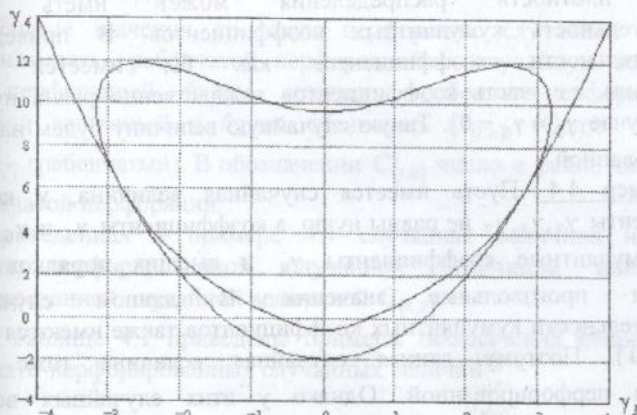


Рис. 4.1.

## 4.2. Перфорированные случайные величины

1. В общем случае тело размером  $s$  случайной величины зависит от всех кумулянтов  $\chi_r$  до  $2s$ -го порядка. Если рассматривается тело размером  $(s+1)$ , то оно будет зависеть дополнительно еще от двух кумулянтов высших порядков. Подобное описание не всегда удобно и возникает потребность как-то ограничить число используемых кумулянтов и, тем самым, как бы задавать определенные типы случайных величин.

Для задания случайных величин с отличными от нуля заданными кумулянтами введем так называемые перфорированные случайные величины. (Perforated – продырявленный, перфорированный).

Определение 4.1. Перфорированной случайной величиной будем называть величину, у которой при ее кумулянтном описании часть

кумулянтных коэффициентов, начиная с порядка 3, отлична от нуля, часть — строго равна нулю, а остальные кумулянтные коэффициенты высших порядков могут принимать произвольные значения.

Пример 4.3. Пусть имеется случайная величина, у которой кумулянтные коэффициенты  $\gamma_3, \gamma_4$  не равны нулю, кумулянтные коэффициенты  $\gamma_5 = \gamma_6 = 0$ , а все кумулянтные коэффициенты высших порядков, начиная с  $\gamma_7$ , могут принимать произвольные значения. По-видимому, имеется семейство (множество) случайных величин, у которых плотность распределения может иметь такую последовательность кумулянтных коэффициентов. В приведенной последовательности коэффициентов как бы имеется дырка (перфорация), т.е. часть коэффициентов тождественно равна нулю (в данном случае  $\gamma_5 = \gamma_6 = 0$ ). Такую случайную величину будем называть перфорированной.

Пример 4.4. Пусть имеется случайная величина, у которой коэффициенты  $\gamma_3, \gamma_5, \gamma_7$  не равны нулю, а коэффициенты  $\gamma_4$  и  $\gamma_6$  равны нулю. Кумулянтные коэффициенты  $\gamma_8$  и высших порядков пусть принимают произвольные значения. В данном случае в последовательности кумулянтных коэффициентов также имеются дырки ( $\gamma_4 = \gamma_6 = 0$ ). Поэтому данная случайная величина тоже будет называться перфорированной. Однако у этих случайных величин перфорация не сплошная, как в примере 4.3, а прерывистая, через одно значение. Подобная перфорация напоминает гребенку.

2. Из рассмотрения примеров 4.3 и 4.4 видно, что перфорированные случайные величины могут иметь различный тип перфорации.

Определение 4.2. Если в последовательности кумулянтных коэффициентов, описывающих случайную величину  $\xi$ , начиная с коэффициента  $\gamma_r$ , порядка  $r, r = 3, 4, \dots$  и кончая коэффициентом  $\gamma_{r+e}$ , все они тождественно равны нулю, т.е.  $\gamma_r = \gamma_{r+1} = \dots = \gamma_{r+e} = 0$ , а коэффициенты  $\gamma_{r+e+1}$  порядка  $(r+e+1)$  и высших порядков могут принимать произвольные значения, то такую перфорацию случайной величины будем называть непрерывной перфорацией и случайную величину с такой перфорацией будем обозначать  $P_{(r,e+1)}$ .

В приведенном обозначении  $r$  равно минимальному порядку кумулянтного коэффициента, равного нулю (т.е. номер коэффициента, с которого начинается перфорация), а  $(e+1)$  будет равна числу кумулянтных коэффициентов, равных нулю. Величину  $(e+1)$  будем называть глубиной перфорации. Так, приведенную в примере 4.3 случайную величину будем называть непрерывно-перфорированной



случайной величиной или просто перфорированной случайной величиной  $P_{(5,2)}$ .

**Определение 4.3.** Если в последовательности кумулянтных коэффициентов, описывающих случайную величину  $\xi$ , начиная с коэффициента  $\gamma_r$  порядка  $r, r=3,4,\dots$  и кончая коэффициентом  $\gamma_{r+p}$  через один коэффициент, все они тождественно равны нулю, т.е.  $\gamma_r = \gamma_{r+2} = \dots = \gamma_{r+p-2} = \gamma_{r+p} = 0$ , коэффициент  $\gamma_{r+p+1}$  не равен нулю, а коэффициенты  $\gamma_{r+p+2}$  и высших порядков могут принимать произвольные значения, то такую перфорацию случайной величины будем называть гребенчатой перфорацией, а случайную величину с такой перфорацией будем называть гребенчато-перфорированной случайной величиной и будем обозначать  $C_{(r,e)}$  (Comb – гребень, combed – гребенчатый). В обозначении  $C_{(r,e)}$  число  $e$  равно числу нулей в гребенчатой перфорации.

Приведенная в примере 4.4 случайная величина называется гребенчато-перфорированной случайной величиной или просто перфорированной случайной величиной  $C_{(4,2)}$ .

В таблице 4.1 приведены примеры обозначения непрерывно- и гребенчато-перфорированных случайных величин.

Таблица 4.1

таблица 4.												
№	Символ перфорированной случ. величины	$\gamma_3$	$\gamma_4$	$\gamma_5$	$\gamma_6$	$\gamma_7$	$\gamma_8$	$\gamma_9$	$\gamma_{10}$	$\gamma_{11}$	$\gamma_{12}$	
1.	$P_{(3,1)}$	0	произвольные									
2.	$P_{(4,1)}$	+	0	произвольные								
3.	$P_{(4,3)}$	+	0	0	0	произвольные						
4.	$P_{(5,4)}$	+	+	0	0	0	0	произвольные				
5.	$P_{(6,7)}$	+	+	+	0	0	0	0	0	0	0	
6.	$P_{(5,2)}$	+	+	0	0	произвольные						
7.	$C_{(3,2)}$	0	+	0	+	произвольные						
8.	$C_{(4,1)}$	+	0	+	произвольные							
9.	$C_{(5,2)}$	+	+	0	+	0	+	произвольные				
10.	$C_{(3,3)}$	0	+	0	+	0	+	произвольные				
11.	$C_{(4,1)+P_{(6,1)}}$	+	0	+	0	произвольные						
12.	$C_{(4,1)+P_{(6,7)}}$	+	0	+	0	0	0	0	0	0	0	
13.	$C_{(3,1)+P_{(5,6)}}$	0	+	0	0	0	0	0	0	произв.		
14.	$C_{(3,1)+C_{(6,2)}}$	0	+	+	0	+	0	+	произвольн.			
15.	$P_{(3,1)+C_{(6,2)}}$	0	+	+	0	+	0	+	произвольн.			



3. Из приведенных примеров видно, что непрерывно- и гребенчато-перфорированные случайные величины обозначаются несколько по-разному. Отличие состоит в обозначении гребенчато-перфорированных случайных величин. Второй номер нижнего индекса у обозначения гребенчато-перфорированной случайной величины указывает на число нулевых значений кумулянтных коэффициентов, взятых через одно значение, начиная с кумулянтного коэффициента под номером первого нижнего индекса. Заканчивается гребенчатая перфорация обязательно ненулевым кумулянтным коэффициентом, следующим за последним нулевым коэффициентом. Только после этого ненулевого коэффициента следуют коэффициенты, принимающие произвольные значения.

Отметим, что для разнообразного задания перфорированных случайных величин можно различные обозначения комбинировать в различной последовательности. При этом операцию комбинирования будем обозначать символом  $+$ . В таблице 4.1 под номерами 11-15 приведены различные примеры такого задания перфорированных случайных величин. При этом будем придерживаться следующего правила. Если заканчивается действие одного обозначения и сразу за ним не начинается действие другого обозначения, то кумулянтные коэффициенты с промежуточными номерами будем считать ненулевыми. Так, в примере под номером 14 действие обозначения  $C_{(3,1)}$  кончается на ненулевом кумулянтном коэффициенте  $\gamma_4$ , а действие обозначения  $C_{(6,2)}$  начинается с кумулянтного коэффициента  $\gamma_6$ , равного нулю, и кончается ненулевым коэффициентом  $\gamma_9$ . Значение коэффициента  $\gamma_5$  оказывается как бы неопределенным, но, согласно приведенному правилу, его необходимо считать ненулевым. Аналогичная ситуация имеет место в примере 15 для кумулянтных коэффициентов  $\gamma_4$  и  $\gamma_5$ .

### 4.3. Тело и объем тела перфорированных случайных величин

1. В разделе 3.1 было показано, что в общем случае частичное тело  $F_s$  размером  $s$  зависит от математического ожидания случайной величины и последовательности кумулянтных коэффициентов  $\gamma_r$  до  $2s$ -го порядка. Поэтому с увеличением размерности тела  $s$  увеличивается и число кумулянтных коэффициентов, от которых зависит частичное тело. Полное тело случайной величины в общем случае зависит от бесконечного числа кумулянтных коэффициентов.

С введением понятия перфорированных случайных величин можно частичное тело  $F_s$  определить не через все  $2s$  кумулянтные коэффициенты, а только через определенные, соответственно задав перфорированную случайную величину.

Определение 4.4. Частичное тело  $F_s$ , соответствующее перфорированной случайной величине, будем называть перфорированным телом размера  $s$ .

Пример 4.5. В примере 4.1 было показано, что тело размером 2 в общем случае зависит от кумулянтных коэффициентов  $\gamma_3$  и  $\gamma_4$ . Рассмотрим перфорированную случайную величину  $C_{(3,1)}$ . Для этой случайной величины начальные моменты до 4-го порядка будут равны:

$$\alpha_1 = \alpha, \quad \alpha_2 = \chi_2 + \alpha^2,$$

$$\alpha_3 = 3\alpha\chi_2 + \alpha^3, \quad \alpha_4 = \chi_4 + 3\chi_2^2 + 6\alpha^2\chi_2 + \alpha^4.$$

Следовательно, значения  $F_{i,j}(\gamma)$  для этой случайной величины будут равны:

$$F_{1,1} = \chi_2, \quad F_{1,2} = 2\alpha\chi_2,$$

$$F_{2,2} = \chi_2^2(\gamma_4 + 2) + 4\alpha^2\chi_2,$$

т.е. эти значения зависят от математического ожидания  $\alpha$ , кумулянта второго порядка  $\chi_2$  и кумулянтного коэффициента  $\gamma_4$ . Так как тело размером 2 определяется через значения  $F_{i,j}$ , то в данном случае тело размером 2 будет зависеть от перечисленных выше коэффициентов.

Если взять перфорированную случайную величину  $P_{(4,1)}$ , то для нее начальные моменты 3-го и 4-го порядков будут равны:

$$\alpha_3 = \chi_2^{1,5}\gamma_3 + 3\alpha\chi_2 + \alpha^3,$$

$$\alpha_4 = 3\chi_2^2 + 4\alpha\chi_2^{1,5}\gamma_3 + 6\alpha^2\chi_2 + \alpha^4,$$

а значения  $F_{1,2}$  и  $F_{2,2}$  будут соответственно иметь вид:

$$F_{1,2} = \chi_2^{1,5}\gamma_3 + 2\alpha\chi_2,$$

$$F_{2,2} = 2\chi_2^2 + 4\alpha\chi_2^{1,5}\gamma_3 + 4\alpha^2\chi_2,$$

т.е. значения  $F_{i,j}$  зависят от  $\alpha$ ,  $\chi_2$  и  $\gamma_3$ . Следовательно, тело размером 2 перфорированной случайной величины  $P_{(4,1)}$  зависит от  $\alpha$ ,  $\chi_2$  и  $\gamma_3$ .

Пример 4.6. Как было показано в примере 4.1, тело размером 3 в общем случае зависит от  $\alpha$ ,  $\chi_2$  и кумулянтных коэффициентов  $\gamma_3 - \gamma_6$ . Для перфорированной случайной величины  $P_{(4,3)}$  кумулянтные коэффициенты  $\gamma_4$ ,  $\gamma_5$  и  $\gamma_6$  равны нулю. Тогда, используя (4.1), легко показать, что



$$F_{1,1} = \chi_2,$$

$$F_{1,2} = \chi_2^{1,5} \gamma_3 + 2\alpha \chi_2,$$

$$F_{1,3} = 3\chi_2^2 + 3\alpha \chi_2^{1,5} \gamma_3 + 3\alpha^2 \chi_2,$$

$$F_{2,2} = 2\chi_2^2 + 4\alpha \chi_2^{1,5} \gamma_3 + 4\alpha^2 \chi_2,$$

$$F_{2,3} = 9\chi_2^{2,5} \gamma_3 + 9\alpha^2 \chi_2^{1,5} \gamma_3 + 6\alpha^3 \chi_2,$$

$$F_{3,3} = \chi_2^3 (9\gamma_3^2 + 15) + 54\alpha \chi_2^{2,5} \gamma_3 + 36\alpha^2 \chi_2^2 + 18\alpha^3 \chi_2^{1,5} \gamma_3 + 9\alpha^4 \chi_2.$$

Так как приведенные значения  $F_{i,j}$  зависят от  $\alpha$ ,  $\chi_2$  и  $\gamma_3$ , то и тело размером 3 перфорированной случайной величины  $P_{(4,3)}$  зависит от этих же параметров.

Если задана гребенчато-перфорированная случайная величина  $C_{(3,2)}$ , то для нее кумулянтные коэффициенты  $\gamma_3$  и  $\gamma_5$  равны нулю. Тогда тело размером 3 случайной величины будет определяться элементами:

$$F_{1,1} = \chi_2,$$

$$F_{1,2} = 2\alpha \chi_2,$$

$$F_{1,3} = \chi_2^2 (\gamma_4 + 3) + 3\alpha^2 \chi_2,$$

$$F_{2,2} = \chi_2^2 (\gamma_4 + 2) + 4\alpha^2 \chi_2,$$

$$F_{2,3} = 5\alpha \chi_2^2 \gamma_4 + 6\alpha^3 \chi_2,$$

$$F_{3,3} = \chi_2^3 (\gamma_6 + 15\gamma_4 + 15) + 3\alpha^2 \chi_2^2 (5\gamma_4 + 12) + 9\alpha^4 \chi_2.$$

Так как эти элементы зависят только от  $\alpha$ ,  $\chi_2$ ,  $\gamma_4$  и  $\gamma_6$ , то и само частичное тело размером 3 будет зависеть от этих кумулянтных коэффициентов.

2. Перфорированному частичному телу соответствует и перфорированный объем тела, который будет зависеть уже не от всех 2s кумулянтных коэффициентов, а только от некоторых, определяемых соответствующей перфорацией случайной величины. При этом, так как объем тела есть величина положительная, то объем перфорированного тела накладывает ограничения на область допустимых значений не всех кумулянтных коэффициентов, а только тех, которые определяются типом перфорации.

Пример 4.7. В примере 4.5 были приведены элементы тела размером 2 перфорированной случайной величины  $C_{(3,1)}$ . Легко показать, что объем этого тела равен

$$\Delta_2(\chi_2, \gamma_4) = \chi_2^2 (\gamma_4 + 2),$$



т.е. в данном случае объем тела зависит только от  $\chi_2$  и  $\gamma_4$ . В силу того, что  $\Delta_2(\chi_2, \gamma_4) > 0$ , получаем неравенство

$$\gamma_4 > -2. \quad (4.7)$$

Отметим, что объем тела размером 2 для любой случайной величины не зависит от кумулянтных коэффициентов  $\gamma_5$  и высших порядков. Поэтому они могут принимать произвольные значения, т.е. быть произвольными. Неравенство (4.7) имеет место, когда  $\gamma_3 = 0$ , а кумулянтные коэффициенты  $\gamma_5$  и высших порядков произвольные.

С другой стороны, для перфорированной случайной величины  $P_{(4.1)}$  объем тела размером 2 равен

$$\Delta_2(\chi_2, \gamma_3) = \chi_2^2(2 - \gamma_3^2),$$

т.е. он зависит уже от  $\chi_2$  и  $\gamma_3$ . Из последнего выражения имеем, что

$$\gamma_3 < \pm\sqrt{2}. \quad (4.8)$$

Неравенство (4.8) для  $\gamma_3$  имеет место, когда  $\gamma_4 = 0$ , а кумулянтные коэффициенты высших порядков принимают произвольные значения.

Пример 4.8. Используя результаты примера 3.6, легко получить, что объем тела размером 3 перфорированной случайной величины  $P_{(4.3)}$  будет равен

$$\Delta_3(\chi_2, \gamma_3) = \chi_2^3(12 - 24\gamma_3^2 - 9\gamma_3^4).$$

Следовательно, для кумулянтного коэффициента  $\gamma_3$  получаем следующее неравенство

$$3\gamma_3^4 + 8\gamma_3^2 - 4 < 0,$$

которое и определяет область допустимых значений коэффициента эксцесса. Решая это неравенство, получим, что  $\gamma_3 < \pm 0,678$ . Как видно, это неравенство отличается от неравенства (4.8). В разделе 4.1 было получено два неравенства, связывающие кумулянтные коэффициенты  $\gamma_3$  и  $\gamma_4$ , и там же было сделано объяснение различия этих неравенств. Повторимся, но поясним, что неравенство (4.8) справедливо, когда  $\gamma_4 = 0$ , а все остальные кумулянтные коэффициенты могут принимать произвольные значения.

Последнее неравенство для  $\gamma_3$  справедливо, когда  $\gamma_4 = \gamma_5 = \gamma_6 = 0$ , а кумулянтные коэффициенты высших порядков могут принимать произвольные значения.

3. Из рассмотрения материала данного раздела видно, что с помощью перфорированных случайных величин можно формировать множества (или совокупности) случайных величин, которые описываются не всей последовательностью кумулянтных

коэффициентов, а только определенными кумулянтными коэффициентами, которые зависят от типа перфорации.

#### 4.4. Описание множеств случайных величин, близких к гауссовским

1. При описании помех в каналах связи широкое распространение получили математические модели этих помех в виде случайных величин, имеющих гауссовский закон распределения или гауссовские помехи. Гауссовские случайные величины при описании их с помощью последовательности кумулянтов имеют замечательное свойство, а именно, они имеют отличные от нуля только два кумулянта — это математическое ожидание (кумулянт первого порядка  $\chi_1$ ) и дисперсия (кумулянт второго порядка  $\chi_2$ ). Все остальные кумулянты высших порядков равны нулю. Показано [2], что все остальные случайные величины, имеющие закон распределения, отличный от гауссовского, описываются бесконечной последовательностью кумулянтов.

В главе 2 предложен метод нахождения оценок параметров случайных величин, основанный на использовании именно кумулянтов разных порядков. При этом кумулянтные коэффициенты могут выступать в качестве параметров, которые необходимо оценивать. Если использовать общее описание случайных величин с помощью последовательности кумулянтов, то задача оценки кумулянтных коэффициентов является не замкнутой в том смысле, что для нахождения оценок методом максимизации полинома всегда необходимо точно знать кумулянтные коэффициенты высших порядков. Поясним это. Если необходимо найти оценку кумулянтного коэффициента  $\gamma_3$  методом максимизации полинома, то необходимо использовать полином с минимальной степенью  $s=3$ . При этом оптимальные коэффициенты  $b_1$  будут зависеть от кумулянтных коэффициентов  $\gamma_4$ ,  $\gamma_5$  и  $\gamma_6$ , то есть при нахождении оценки  $\gamma_3$  необходимо знание кумулянтных коэффициентов высших порядков, что практически невозможно. Поэтому необходимо ввести некоторые частные случайные величины, которые описывались бы конечным числом кумулянтных коэффициентов, и чтобы при увеличении степени полинома это число не увеличивалось. Например, было бы хорошо, чтобы случайная величина описывалась первыми тремя кумулянтами,  $\alpha$ ,  $\chi_2$ ,  $\chi_3$ , а все остальные кумулянты высших порядков были равны нулю (как при описании гауссовских случайных величин двумя кумулянтами). Оказывается, что не существует таких случайных величин. Точнее, не существует таких плотностей вероятности случайных величин, для



которых первые три кумулянта были бы отличны от нуля, а все остальные кумулянты равнялись бы нулю [2].

Однако с помощью перфорированных случайных величин можно ввести такие величины, для которых не все оставшиеся кумулянты равнялись бы нулю, а только определенная их часть, а оставшаяся часть кумулянтов высших порядков может принимать произвольные значения. Такие случайные величины существуют.

В этой связи, учитывая широкое распространение гауссовских случайных величин в технических приложениях, желательно ввести негауссовские случайные величины, но близкие к гауссовским. Что значит «близкие к гауссовским случайным величинам»? Как определить близость негауссовских случайных величин к гауссовским?

2. Интуитивно понятно, что, так как гауссовские случайные величины на языке кумулянтов описываются только кумулянтами 1-го и 2-го порядков, то негауссовская случайная величина, которая описывается только кумулянтom 1-го, 2-го и 3-го порядков, будет близкой к гауссовской. Также будет близкой к гауссовской случайной величине негауссовская случайная величина, описываемая только кумулянтами 1-го, 2-го и 4-го порядков, а кумулянт третьего порядка равен нулю. В дальнейшем, используя понятие близких к гауссовским случайных величин, мы будем определять это понятие только через значения кумулянтных коэффициентов  $\gamma_3$ ,  $\gamma_4$ ,  $\gamma_5$  и  $\gamma_6$ .

Введем три класса множеств случайных величин, близких к гауссовским случайным величинам. Первый класс называется классом асимметричных случайных величин, второй – классом эксцессных случайных величин и третий – классом асимметрично-эксцессных случайных величин. Классы асимметричных и эксцессных случайных величин разделяются каждый на два типа.

Определение 4.5. Асимметричными случайными величинами 1-го типа, близкими к гауссовским случайным величинам, будем называть множество случайных величин, для которых объем тела любого конечного размера  $s$  зависит только от  $\chi_2$  и от коэффициента асимметрии  $\gamma_3$ , а асимметричными случайными величинами 2-го типа – множество случайных величин, для которых объем тела любого конечного размера  $s$  зависит только от  $\chi_2$  и кумулянтных коэффициентов  $\gamma_3$  и  $\gamma_5$ .

Определение 4.6. Эксцессными случайными величинами 1-го типа, близкими к гауссовским случайным величинам, будем называть множество случайных величин, для которых объем тела любого конечного размера  $s$  зависит только от  $\chi_2$  и от коэффициента эксцесса  $\gamma_4$ , а эксцессными случайными величинами 2-го типа – множество

случайных величин, для которых объем тела любого конечного размера  $s$  зависит только от  $\chi_2$  и кумулянтных коэффициентов  $\gamma_4$  и  $\gamma_6$ .

**Определение 4.7.** Асимметрично-эксцессными случайными величинами, близкими к гауссовским случайным величинам, будем называть множество случайных величин, для которых объем тела любого конечного размера  $s$  зависит только от  $\chi_2$  и от коэффициента асимметрии  $\gamma_3$  и эксцесса  $\gamma_4$ .

3. Мы определили близкие к гауссовским случайные величины, используя понятия объемов тел размером  $s$ . Однако случайные величины, близкие к гауссовским, можно теперь определить и непосредственно через понятие перфорированных случайных величин.

Так, асимметричные случайные величины 1-го типа – это непрерывно-перфорированные случайные величины  $P_{(4,2s-3)}$ ,  $s \geq 2$ , а 2-го типа – это смешанные гребенчато- и непрерывно-перфорированные случайные величины  $C_{(4,1)} + P_{(6,2s-5)}$ ,  $s \geq 3$ . В свою очередь, эксцессные случайные величины – это гребенчато-перфорированные случайные величины  $C_{(3,1)}$  при  $s=2$  и смешанно перфорированные случайные величины  $C_{(3,1)} + P_{(5,2s-4)}$  при  $s \geq 3$ , а 2-го типа – это гребенчато-перфорированные случайные величины  $C_{(3,2)}$  при  $s=3$  и смешанно перфорированные случайные величины  $C_{(3,2)} + P_{(7,2s-6)}$  при  $s \geq 4$ .

Асимметрично-эксцессные случайные величины – это непрерывно-перфорированные случайные величины  $P_{(5,2s-4)}$  при  $s \geq 3$ .

#### 4.5. Представление начальных моментов и коррелянтов близких к гауссовским случайных величин через кумулянты

1. В последующих разделах будет применен метод максимизации полинома для нахождения оценок кумулянта  $\chi_2$  и кумулянтных коэффициентов  $\gamma_3 - \gamma_6$  близких к гауссовским случайных величин с использованием стохастических полиномов до 6-го порядка. В связи с этим для получения центрированных коррелянтов  $F_{i,j}$  необходимо иметь представление начальных моментов случайной величины через кумулянты до 12-го порядка. Поэтому в данном разделе первоначально приведем общие выражения для случайной величины с нулевым математическим ожиданием:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 0, & \alpha_2 &= \chi_2, & \alpha_3 &= \chi_2^{1.5} \gamma_3, & \alpha_4 &= \chi_2^2 (\gamma_4 + 3), \\ \alpha_5 &= \chi_2^{2.5} (\gamma_5 + 10\gamma_3), & \alpha_6 &= \chi_2^3 (\gamma_6 + 10\gamma_3^2 + 15\gamma_4 + 15), \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\alpha_7 &= \chi_2^{3,5} (\gamma_7 + 35\gamma_3\gamma_4 + 21\gamma_5 + 105\gamma_3), \\
\alpha_8 &= \chi_2^4 (\gamma_8 + 28\gamma_6 + 280\gamma_3^2 + 35\gamma_4^2 + 56\gamma_3\gamma_5 + 210\gamma_4 + 105), \\
\alpha_9 &= \chi_2^{4,5} (\gamma_9 + 36\gamma_7 + 84\gamma_3\gamma_6 + 126\gamma_4\gamma_5 + 1260\gamma_3\gamma_4 + \\
&\quad + 378\gamma_5 + 280\gamma_3^3 + 1260\gamma_3), \\
\alpha_{10} &= \chi_2^5 (\gamma_{10} + 45\gamma_8 + 120\gamma_3\gamma_7 + 210\gamma_4\gamma_6 + 126\gamma_5^2 + 2100\gamma_3^2\gamma_4 + \\
&\quad + 1575\gamma_4^2 + 2520\gamma_3\gamma_5 + 630\gamma_6 + 6300\gamma_3^2 + 3150\gamma_4 + 945), \\
\alpha_{11} &= \chi_2^{5,5} (\gamma_{11} + 55\gamma_9 + 165\gamma_3\gamma_8 + 330\gamma_4\gamma_7 + 462\gamma_5\gamma_6 + 990\gamma_7 + \\
&\quad + 4620\gamma_3^2\gamma_5 + 5775\gamma_3\gamma_4^2 + 6930\gamma_4\gamma_5 + 4620\gamma_3\gamma_6 + 34650\gamma_3\gamma_4 + \\
&\quad + 6930\gamma_5 + 17325\gamma_3 + 15400\gamma_3^3), \\
\alpha_{12} &= \chi_2^6 (\gamma_{12} + 66\gamma_{10} + 220\gamma_3\gamma_9 + 495\gamma_4\gamma_8 + 792\gamma_5\gamma_7 + 462\gamma_6^2 + \\
&\quad + 7920\gamma_3\gamma_7 + 1485\gamma_8 + 27720\gamma_3\gamma_4\gamma_5 + 9240\gamma_3^2\gamma_6 + 13860\gamma_6 + \\
&\quad + 5775\gamma_4^3 + 15400\gamma_4^2 + 8316\gamma_5^2 + 13860\gamma_4\gamma_6 + 138600\gamma_3^2\gamma_4 + \\
&\quad + 51975\gamma_4^2 + 83160\gamma_3\gamma_5 + 51975\gamma_4 + 138600\gamma_3^2 + 10395).
\end{aligned} \quad (4.9)$$

Используя эти общие формулы, описывающие начальные моменты негауссовских случайных величин через кумулянт второго порядка  $\chi_2$  и кумулянтные коэффициенты  $\gamma_r$  высших порядков, легко можно найти начальные моменты для различных типов перфорированных случайных величин.

2. Так, для класса асимметричных случайных величин 1-го типа, близких к гауссовским случайным величинам, начальные моменты имеют вид:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= 0, & \alpha_2 &= \chi_2, & \alpha_3 &= \chi_2^{1,5} \gamma_3, & \alpha_4 &= 3\chi_2^2, \\
\alpha_5 &= 10\chi_2^{2,5} \gamma_3, & \alpha_6 &= \chi_2^3 (10\gamma_3^2 + 15), & \alpha_7 &= 105\chi_2^{3,5} \gamma_3, \\
\alpha_8 &= \chi_2^4 (280\gamma_3^2 + 105), & \alpha_9 &= \chi_2^{4,5} (280\gamma_3^3 + 1260\gamma_3), \\
\alpha_{10} &= \chi_2^5 (6300\gamma_3^2 + 945), & \alpha_{11} &= \chi_2^{5,5} (17325\gamma_3 + 15400\gamma_3^3), \\
\alpha_{12} &= \chi_2^6 (15400\gamma_4^2 + 138600\gamma_3^2 + 10395).
\end{aligned} \quad (4.10)$$

На основании полученных выражений легко найти центрированные коррелянты  $F_{ij}$  для асимметричных случайных величин 1-го типа:

$$\begin{aligned}
F_{1,1} &= \chi_2, & F_{1,2} &= \chi_2^{1,5} \gamma_3, & F_{2,2} &= 2\chi_2^2, \\
F_{1,3} &= 3\chi_2^2, & F_{2,3} &= 9\chi_2^{2,5} \gamma_3, & F_{3,3} &= \chi_2^3 (9\gamma_3^2 + 15), \\
F_{1,4} &= 10\chi_2^{2,5} \gamma_3, & F_{2,4} &= \chi_2^3 (10\gamma_3^2 + 12), \\
F_{3,4} &= 102\chi_2^{3,5} \gamma_3, & F_{4,4} &= \chi_2^4 (280\gamma_3^2 + 96), \\
F_{1,5} &= \chi_2^3 (10\gamma_3^2 + 15), & F_{2,5} &= 95\chi_2^{3,5} \gamma_3,
\end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned}
F_{3,5} &= \chi_2^4 (270\gamma_3^2 + 105), & F_{4,5} &= \chi_2^{4,5} (280\gamma_3^3 + 1230\gamma_3), \\
F_{5,5} &= \chi_2^5 (6200\gamma_3^2 + 945), & F_{1,6} &= 105\chi_2^{3,5}\gamma_3, \\
F_{2,6} &= \chi_2^4 (270\gamma_3^2 + 90), & F_{3,6} &= \chi_2^{4,5} (270\gamma_3^3 + 1245\gamma_3), \\
F_{4,6} &= \chi_2^5 (6270\gamma_3^2 + 900), & F_{5,6} &= \chi_2^{5,5} (17175\gamma_3 + 15300\gamma_3^3), \\
F_{6,6} &= \chi_2^6 (15300\gamma_3^4 + 138300\gamma_3^2 + 10170).
\end{aligned}$$

Для класса асимметричных случайных величин 2-го типа, близких к гауссовским случайным величинам, начальные моменты запишутся в виде:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= 0, & \alpha_2 &= \chi_2, & \alpha_3 &= \chi_2^{1,5}\gamma_3, & \alpha_4 &= 3\chi_2^2, \\
\alpha_5 &= \chi_2^{2,5}(\gamma_5 + 10\gamma_3), & \alpha_6 &= \chi_2^3(10\gamma_3^2 + 15), \\
\alpha_7 &= \chi_2^{3,5}(21\gamma_5 + 105\gamma_3), & \alpha_8 &= \chi_2^4(280\gamma_3^2 + 56\gamma_3\gamma_5 + 105), \\
\alpha_9 &= \chi_2^{4,5}(378\gamma_5 + 280\gamma_3^3 + 1260\gamma_3), \\
\alpha_{10} &= \chi_2^5(126\gamma_5^2 + 2520\gamma_3\gamma_5 + 6300\gamma_3^2 + 945), & (4.12) \\
\alpha_{11} &= \chi_2^{5,5}(4620\gamma_3^2\gamma_5 + 6930\gamma_5 + 17325\gamma_3 + 15400\gamma_3^3), \\
\alpha_{12} &= \chi_2^6(15400\gamma_3^4 + 8316\gamma_5^2 + 83160\gamma_3\gamma_5 + 138600\gamma_3^2 + 10395).
\end{aligned}$$

Центрированные коррелянты  $F_{i,j}$  для случайных величин этого класса имеют вид:

$$\begin{aligned}
F_{1,1} &= \chi_2, & F_{1,2} &= \chi_2^{1,5}\gamma_3, & F_{2,2} &= 2\chi_2^2, & F_{1,3} &= 3\chi_2^2, \\
F_{2,3} &= \chi_2^{2,5}(\gamma_5 + 9\gamma_3), & F_{3,3} &= \chi_2^3(9\gamma_3^2 + 15), \\
F_{1,4} &= \chi_2^{2,5}(\gamma_5 + 10\gamma_3), & F_{2,4} &= \chi_2^3(10\gamma_3^2 + 12), \\
F_{3,4} &= \chi_2^{3,5}(21\gamma_5 + 102\gamma_3), & F_{4,4} &= \chi_2^4(280\gamma_3^2 + 56\gamma_3\gamma_5 + 96), \\
F_{1,5} &= \chi_2^3(10\gamma_3^2 + 15), & F_{2,5} &= \chi_2^{3,5}(20\gamma_5 + 95\gamma_3), \\
F_{3,5} &= \chi_2^4(270\gamma_3^2 + 55\gamma_3\gamma_5 + 105), \\
F_{4,5} &= \chi_2^{4,5}(375\gamma_5 + 280\gamma_3^3 + 1230\gamma_3), \\
F_{5,5} &= \chi_2^5(125\gamma_5^2 + 2500\gamma_3\gamma_5 + 6200\gamma_3^2 + 945), \\
F_{1,6} &= \chi_2^{3,5}(21\gamma_5 + 105\gamma_3), & F_{2,6} &= \chi_2^4(270\gamma_3^2 + 56\gamma_3\gamma_5 + 90), \\
F_{3,6} &= \chi_2^{4,5}(378\gamma_5 + 270\gamma_3^3 + 1245\gamma_3), & (4.13) \\
F_{4,6} &= \chi_2^5(126\gamma_5^2 + 2520\gamma_3\gamma_5 + 6270\gamma_3^2 + 900), \\
F_{5,6} &= \chi_2^{5,5}(4610\gamma_3^2\gamma_5 + 6915\gamma_5 + 17175\gamma_3 + 15300\gamma_3^3), \\
F_{6,6} &= \chi_2^6(15300\gamma_3^4 + 8316\gamma_5^2 + 83160\gamma_3\gamma_5 + 138300\gamma_3^2 + 10170).
\end{aligned}$$



3. Аналогичным образом, начальные моменты, описывающие класс эксцессных случайных величин 1-го типа, близких к гауссовским случайным величинам, можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 0, & \alpha_2 &= \chi_2, & \alpha_3 &= 0, & \alpha_4 &= \chi_2^2(\gamma_4 + 3), & \alpha_5 &= 0, \\ \alpha_6 &= \chi_2^3(15\gamma_4 + 15), & \alpha_7 &= 0, & \alpha_8 &= \chi_2^4(35\gamma_4^2 + 210\gamma_4 + 105), \\ \alpha_9 &= 0, & \alpha_{10} &= \chi_2^5(1575\gamma_4^2 + 3150\gamma_4 + 945), & \alpha_{11} &= 0, \\ \alpha_{12} &= \chi_2^6(5775\gamma_4^3 + 51975\gamma_4^2 + 51975\gamma_4 + 10395). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Соответственно, коррелянты  $F_{i,j}$  для эксцессных случайных величин 1-го типа имеют вид:

$$\begin{aligned} F_{1,1} &= \chi_2, & F_{1,2} &= 0, & F_{2,2} &= \chi_2^2(\gamma_4 + 2), & F_{1,3} &= \chi_2^2(\gamma_4 + 3), \\ F_{2,3} &= 0, & F_{3,3} &= \chi_2^3(15\gamma_4 + 15), & F_{1,4} &= 0, \\ F_{2,4} &= \chi_2^3(14\gamma_4 + 12), & F_{3,4} &= 0, & F_{4,4} &= \chi_2^4(34\gamma_4^2 + 204\gamma_4 + 96), \\ F_{1,5} &= \chi_2^3(15\gamma_4 + 15), & F_{2,5} &= 0, & F_{3,5} &= \chi_2^4(35\gamma_4^2 + 210\gamma_4 + 105), \\ F_{4,5} &= 0, & F_{5,5} &= \chi_2^5(1575\gamma_4^2 + 3150\gamma_4 + 945), \\ F_{1,6} &= 0, & F_{2,6} &= \chi_2^4(35\gamma_4^2 + 195\gamma_4 + 90), & F_{3,6} &= 0, \\ F_{4,6} &= \chi_2^5(1560\gamma_4^2 + 3090\gamma_4 + 900), & F_{5,6} &= 0, \\ F_{6,6} &= \chi_2^6(5775\gamma_4^3 + 51750\gamma_4^2 + 51525\gamma_4 + 10170). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Начальные моменты, описывающие класс эксцессных случайных величин 2-го типа, близких к гауссовским случайным величинам, имеют вид:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 0, & \alpha_2 &= \chi_2, & \alpha_3 &= 0, & \alpha_4 &= \chi_2^2(\gamma_4 + 3), \\ \alpha_5 &= 0, & \alpha_6 &= \chi_2^3(\gamma_6 + 15\gamma_4 + 15), & \alpha_7 &= 0, \\ \alpha_8 &= \chi_2^4(28\gamma_6 + 35\gamma_4^2 + 210\gamma_4 + 105), & \alpha_9 &= 0, \\ \alpha_{10} &= \chi_2^5(210\gamma_4\gamma_6 + 1575\gamma_4^2 + 630\gamma_6 + 3150\gamma_4 + 945), & \alpha_{11} &= 0, \\ \alpha_{12} &= \chi_2^6(462\gamma_6^2 + 13860\gamma_6 + 5775\gamma_4^3 + 13860\gamma_4\gamma_6 + \\ & \quad + 51975\gamma_4^2 + 51975\gamma_4 + 10395). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Для эксцессных случайных величин 2-го типа коррелянты  $F_{i,j}$  принимают вид:

$$\begin{aligned} F_{1,1} &= \chi_2, & F_{1,2} &= 0, & F_{2,2} &= \chi_2^2(\gamma_4 + 2), \\ F_{1,3} &= \chi_2^2(\gamma_4 + 3), & F_{2,3} &= 0, & F_{3,3} &= \chi_2^3(\gamma_6 + 15\gamma_4 + 15), \\ F_{1,4} &= 0, & F_{2,4} &= \chi_2^3(\gamma_6 + 14\gamma_4 + 12), & F_{3,4} &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{4,4} &= \chi_2^4(28\gamma_6 + 34\gamma_4^2 + 204\gamma_4 + 96), & F_{1,5} &= \chi_2^3(\gamma_6 + 15\gamma_4 + 15), \\
F_{2,5} &= 0, & F_{3,5} &= \chi_2^4(28\gamma_6 + 35\gamma_4^2 + 210\gamma_4 + 105), & F_{4,5} &= 0, \\
F_{5,5} &= \chi_2^5(210\gamma_4\gamma_6 + 1575\gamma_4^2 + 630\gamma_6 + 3150\gamma_4 + 945), & & & (4.17) \\
F_{1,6} &= 0, & F_{2,6} &= \chi_2^4(27\gamma_6 + 35\gamma_4^2 + 195\gamma_4 + 90), & F_{3,6} &= 0, \\
F_{4,6} &= \chi_2^5(209\gamma_4\gamma_6 + 1560\gamma_4^2 + 627\gamma_6 + 3090\gamma_4 + 900), & F_{5,6} &= 0, \\
F_{6,6} &= \chi_2^6(461\gamma_6^2 + 13830\gamma_6 + 5775\gamma_4^3 + 13830\gamma_4\gamma_6 + \\
&\quad + 51750\gamma_4^2 + 51525\gamma_4 + 10170).
\end{aligned}$$

4. Асимметрично-эксцессные случайные величины, близкие к гауссовским случайным величинам, имеют моментное описание следующего вида:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= 0, & \alpha_2 &= \chi_2, & \alpha_3 &= \chi_2^{1,5}\gamma_3, & \alpha_4 &= \chi_2^2(\gamma_4 + 3), \\
\alpha_5 &= 10\chi_2^{2,5}\gamma_3, & \alpha_6 &= \chi_2^3(10\gamma_3^2 + 15\gamma_4 + 15), \\
\alpha_7 &= \chi_2^{3,5}(35\gamma_3\gamma_4 + 105\gamma_3), & \alpha_8 &= \chi_2^4(280\gamma_3^2 + 35\gamma_4^2 + 210\gamma_4 + 105), \\
\alpha_9 &= \chi_2^{4,5}(1260\gamma_3\gamma_4 + 280\gamma_3^3 + 1260\gamma_3), \\
\alpha_{10} &= \chi_2^5(2100\gamma_3^2\gamma_4 + 1575\gamma_4^2 + 6300\gamma_3^2 + 3150\gamma_4 + 945), & & & (4.18) \\
\alpha_{11} &= \chi_2^{5,5}(5775\gamma_3\gamma_4^2 + 34650\gamma_3\gamma_4 + 17325\gamma_3 + 15400\gamma_3^3), \\
\alpha_{12} &= \chi_2^6(5775\gamma_4^3 + 15400\gamma_3^4 + 138600\gamma_3^2\gamma_4 + 51975\gamma_4^2 + \\
&\quad + 51975\gamma_4 + 138600\gamma_3^2 + 10395).
\end{aligned}$$

Используя эти формулы, легко найти центрированные коррелянты  $F_{i,j}$ , описывающие класс асимметрично-эксцессных случайных величин:

$$\begin{aligned}
F_{1,1} &= \chi_2, & F_{1,2} &= \chi_2^{1,5}\gamma_3, & F_{2,2} &= \chi_2^2(\gamma_4 + 2), \\
F_{1,3} &= \chi_2^2(\gamma_4 + 3), & F_{2,3} &= 9\chi_2^{2,5}\gamma_3, & F_{3,3} &= \chi_2^3(9\gamma_3^2 + 15\gamma_4 + 15), \\
F_{1,4} &= 10\chi_2^{2,5}\gamma_3, & F_{2,4} &= \chi_2^3(10\gamma_3^2 + 14\gamma_4 + 12), \\
F_{3,4} &= \chi_2^{3,5}(34\gamma_3\gamma_4 + 102\gamma_3), & F_{4,4} &= \chi_2^4(280\gamma_3^2 + 34\gamma_4^2 + 204\gamma_4 + 96), \\
F_{1,5} &= \chi_2^3(10\gamma_3^2 + 15\gamma_4 + 15), & F_{2,5} &= \chi_2^{3,5}(35\gamma_3\gamma_4 + 95\gamma_3), \\
F_{3,5} &= \chi_2^4(270\gamma_3^2 + 35\gamma_4^2 + 210\gamma_4 + 105), \\
F_{4,5} &= \chi_2^{4,5}(1250\gamma_3\gamma_4 + 280\gamma_3^3 + 1230\gamma_3), \\
F_{5,5} &= \chi_2^5(2100\gamma_3^2\gamma_4 + 1575\gamma_4^2 + 6200\gamma_3^2 + 3150\gamma_4 + 945), \\
F_{1,6} &= \chi_2^{3,5}(35\gamma_3\gamma_4 + 105\gamma_3), & & & (4.19) \\
F_{2,6} &= \chi_2^4(270\gamma_3^2 + 35\gamma_4^2 + 195\gamma_4 + 90),
\end{aligned}$$



$$F_{3,6} = \chi_2^{4,5} (1245\gamma_3\gamma_4 + 270\gamma_3^3 + 1245\gamma_3),$$

$$F_{4,6} = \chi_2^5 (2090\gamma_3^2\gamma_4 + 1560\gamma_4^2 + 6270\gamma_3^2 + 3090\gamma_4 + 900),$$

$$F_{5,6} = \chi_2^{11/2} (5775\gamma_3\gamma_4^2 + 34500\gamma_3\gamma_4 + 17175\gamma_3 + 15300\gamma_3^3),$$

$$F_{6,6} = \chi_2^6 (5775\gamma_4^3 + 15300\gamma_3^4 + 138300\gamma_3^2\gamma_4 + 51750\gamma_4^2 + + 51525\gamma_4 + 38300\gamma_3^2 + 10170).$$

Полученные выражения будут широко использоваться в дальнейшем при нахождении оценок параметров близких к гауссовским случайных величин.

#### 4.6. Краткая историческая справка

Попытки применить конечное число моментов в математической статистике для описания наблюдаемых случайных величин возникли практически с возникновением самой математической статистики. Одной из первых работ, в которых используется конечное число моментов для построения плотностей распределений, является работа К. Пирсона [6], опубликованная в 1894 г., в которой он предложил построение плотностей распределения на основании использования только четырёх первых моментов (кривые Пирсона). В предложенном в 1905 г. Эджвортом разложении плотности распределения практически можно использовать моменты произвольного порядка [21]. Однако при конечном числе членов в разложении получаемые аппроксимации не являются плотностями распределения.

В работе [2] впервые введена классификация случайных процессов на основании использования кумулянтов высших порядков. В этой работе использовались кумулянты до четвёртого порядка, при этом молчаливо полагалось, что все кумулянты высших порядков равны нулю.

В данной работе строго обоснованы три класса близких к гауссовским случайных процессов при использовании кумулянтных коэффициентов до шестого порядка. При этом предполагается, что только часть кумулянтов высших порядков равна нулю, а оставшиеся кумулянты высших порядков могут принимать произвольные значения. Таким образом, задаётся не одна случайная величина, описываемая определённым законом распределения с заданными кумулянтами до бесконечного порядка, а задаётся бесконечное множество случайных величин, законы распределения которых отличаются друг от друга значениями этих неопределённых кумулянтов.

Как будет показано ниже, при таком определении близких к гауссовским случайных величин для кумулянтных коэффициентов существуют области, в которых они принимают значения, т.е. области допустимых значений (или кратко области определения). При этом размеры этих областей изменяются в зависимости от размера объёма тела.

## ОБЪЕМЫ ТЕЛ И ОБЛАСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КУМУЛЯНТНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ БЛИЗКИХ К ГАУССОВСКИМ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

При оценке параметров методом максимизации полинома дисперсия оценки, в первую очередь, определяется объемом тела стохастического полинома. Кроме того, при использовании степенных стохастических полиномов области определения кумулянтных коэффициентов для каждого класса близких к гауссовским случайных величин находятся из условия положительности объема тела. Поэтому в данной главе найдены объемы тел близких к гауссовским случайных величин и определены области определения кумулянтных коэффициентов для каждого класса близких к гауссовским случайных величин при различных степенях стохастических полиномов.

### 5.1. Объемы тел и области определения асимметричных случайных величин 1-го типа

1. Согласно определению, множество асимметричных случайных величин 1-го типа определяется только кумулянтном второго порядка  $\chi_2$  (дисперсией случайной величины) и коэффициентом асимметрии  $\gamma_3$ . Хорошо известно, что  $\chi_2$  всегда больше нуля и  $\chi_2 \in (0; \infty)$ . Что касается  $\gamma_3$ , то область его определения определяется через объем тела размерностью  $s$ . Причем для различных значений  $s$  будет различной область определения для  $\gamma_3$ .

Раньше в примере 4.7 было показано, что при  $s=2$  объем тела асимметричной случайной величины 1-го типа равен

$$\Delta_2(\chi_2, \gamma_3) = \chi_2^3 (2 - \gamma_3^2), \quad (5.1)$$

а так как  $\Delta_2 > 0$ , то при  $s=2$  коэффициент асимметрии  $\gamma_3$  может принимать значения в интервале  $(-1,414; 1,414)$ .

В примере 1.3 раздела 1.4 было показано, что для асимметричных случайных величин 1-го типа объем тела размером 3 равен



$$\Delta_3(\chi_2, \gamma_3) = 3\chi_2^6(4 - 8\gamma_3^2 - 3\gamma_3^4) > 0, \quad (5.2)$$

и, следовательно,  $\gamma_3$  при  $s=3$  может принимать значения в интервале  $(-0,6561; 0,6561)$ .

2. Найдем объем тела  $\Delta_4$  размером 4 асимметричных случайных величин 1-го типа. Так как

$$\Delta_4(\chi_2, \gamma_3) = [F_{i,j}(\chi_2, \gamma_3)], \quad i, j = \overline{1,4},$$

то, подставив  $F_{i,j}(\chi_2, \gamma_3)$  из (4.11), получим, что

$$\Delta_4(\chi_2, \gamma_3) = 36\chi_2^{10}(8 - 40\gamma_3^2 - 45\gamma_3^6). \quad (5.3)$$

Следовательно, коэффициент  $\gamma_3$  должен удовлетворять неравенству, в котором  $\gamma_3$  входит в 6-ой степени, или неравенству третьей степени

$$8 - 40x - 45x^3 > 0,$$

где  $x = \gamma_3^2$ .

Можно показать, что значения  $\gamma_3$ , удовлетворяющие этому неравенству, принадлежат интервалу  $(-0,4382; 0,4382)$ .

3. При  $s=5$  объем тела будет равен

$$\Delta_5(\chi_2, \gamma_3) = 2160\chi_2^{15}[16 + \gamma_3^2\Lambda_{51}(\gamma_3)], \quad (5.4)$$

где

$$\Lambda_{51}(\gamma_3) = -160 + 220\gamma_3^2 - 420\gamma_3^4 - 1035\gamma_3^6 + 135\gamma_3^8.$$

При этом  $\gamma_3$  должен удовлетворять неравенству, в котором он входит в 10-ой степени, или неравенству

$$16 - 160x + 220x^2 - 420x^3 - 1035x^4 + 135x^5 > 0,$$

т.е. в данном случае  $\gamma_3$  должен принадлежать интервалу  $(-0,3356; 0,3356)$ .

4. И, наконец, при  $s=6$  объем тела асимметричной случайной величины будет равен

$$\Delta_6(\chi_2, \gamma_3) = 388800\chi_2^{21}[64 + \gamma_3^2\Lambda_{61}(\gamma_3)], \quad (5.5)$$

где

$$\Lambda_{61}(\gamma_3) = -1120 + 4480\gamma_3^2 - 9240\gamma_3^4 - 14280\gamma_3^6 - 63210\gamma_3^8 + 48825\gamma_3^{10} + 5400\gamma_3^{12},$$

т.е. в данном случае интервал допустимых значений коэффициента асимметрии  $\gamma_3$  определяется из неравенства, в котором он входит в 14-ой степени, или из неравенства

$$64 - 1120x + 4480x^2 - 9240x^3 - 14280x^4 - 63210x^5 + 48825x^6 + 5400x^7 > 0.$$

Решив последнее неравенство, легко показать, что  $\gamma_3$  принадлежит интервалу  $(-0,27589; 0,27589)$ .

Из рассмотрения поведения длины интервала, в котором  $\gamma_3$  принимает допустимые значения, можно сделать вывод, что с увеличением глубины перфорации длина интервала, в котором  $\gamma_3$  принимает значения, уменьшается. При этом можно ожидать, что при стремлении глубины перфорации к бесконечности длина области определения  $\gamma_3$  будет стремиться к нулю. Следовательно, близкие к гауссовским асимметричные случайные величины первого типа с увеличением глубины перфорации стремятся к гауссовским случайным величинам.

## 5.2. Объемы тел и области определения асимметричных случайных величин 2-го типа

1. Согласно определению, множество асимметричных случайных величин 2-го типа описывается кумулянтном второго порядка  $\chi_2$  (дисперсией случайной величины), коэффициентом асимметрии  $\gamma_3$  и кумулянтным коэффициентом  $\gamma_5$ . Так как дисперсия случайных величин всегда положительна, то положительность объема тела перфорированных случайных величин размерности  $s$  накладывает ограничение на области допустимых значений кумулянтных коэффициентов высших порядков. Соответственно для различных значений  $s$  будет различной область определения для кумулянтных коэффициентов  $\gamma_3$  и  $\gamma_5$ .

При  $s=1$  и  $s=2$  объем тела случайных величин данного типа не зависит от параметра  $\gamma_5$ , поэтому рассмотрение необходимо начинать с  $s=3$ . Для этого случая объем тела асимметричной случайной величины 2-го типа равен

$$\Delta_3(\chi_2, \gamma_3, \gamma_5) = 3\chi_2^6 \left( 4 - 8\gamma_3^2 - 3\gamma_3^4 - \frac{1}{3}\gamma_5^2 - 4\gamma_3\gamma_5 \right). \quad (5.6)$$

Так как  $\chi_2 > 0$ , то необходимо, чтобы выполнялось неравенство

$$4 - 8\gamma_3^2 - 3\gamma_3^4 - \frac{1}{3}\gamma_5^2 - 4\gamma_3\gamma_5 > 0.$$

Это неравенство определяет область допустимых значений параметров  $\gamma_3$  и  $\gamma_5$ , которую можно представить в виде двумерного графика, осью абсцисс которого является коэффициент асимметрии, а осью ординат — кумулянтный коэффициент  $\gamma_5$  (см. рис. 5.1).



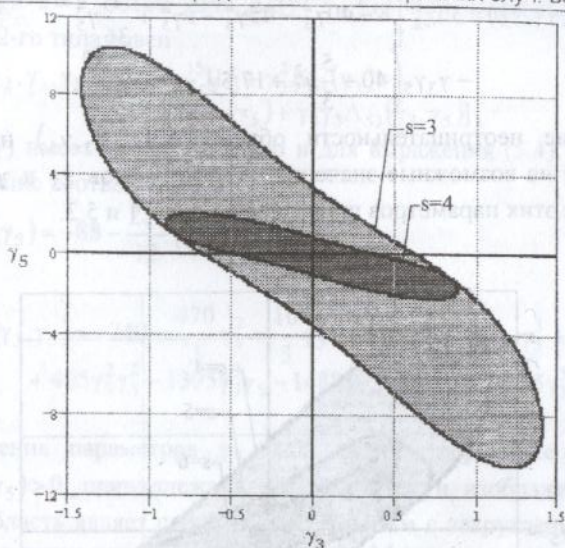


Рис. 5.1

На этом рисунке видно, что при  $s=3$  область определения кумулянтных коэффициентов  $\gamma_3$  и  $\gamma_5$  асимметричных случайных величин 2-го типа представляет из себя деформированный эллипс с центром симметрии в точке пересечения координат. Максимальные габаритные размеры данного эллипса приведены в табл. 5.1.

Таблица 5.1

s	$\gamma_3$		$\gamma_5$	
	min	max	min	max
3	-1,4	1,4	-10,5	10,5
4	-0,9	0,9	-2,1	2,1
5	-0,65	0,65	-1	1
6	-0,54	0,54	-0,92	0,92

Кроме того, из приведенного неравенства можно получить, что в том случае, когда  $\gamma_3 = 0$ , то  $\gamma_5 \in (-\sqrt{12}; \sqrt{12})$ .

2. Объем тела  $\Delta_4(\chi_2, \gamma_3, \gamma_5)$  асимметричных случайных величин 2-го типа равен

$$\Delta_4(\chi_2, \gamma_3, \gamma_5) = 36\chi_2^{10} \left[ 8 - 40\gamma_3^2 - 45\gamma_3^6 - 9\gamma_5^2 + \frac{1}{36}\gamma_5^4 - \gamma_3\gamma_5 \left( 40 + \frac{5}{3}\gamma_5^2 + 17,5\gamma_3\gamma_5 + 9\gamma_3^4 \right) \right]. \quad (5.7)$$

Условие неотрицательности объема  $\Delta_4(\chi_2, \gamma_3, \gamma_5)$  накладывает ограничения на возможные значения коэффициентов  $\gamma_3$  и  $\gamma_5$ . Область определения этих параметров приведена на рис.5.1 и 5.2.

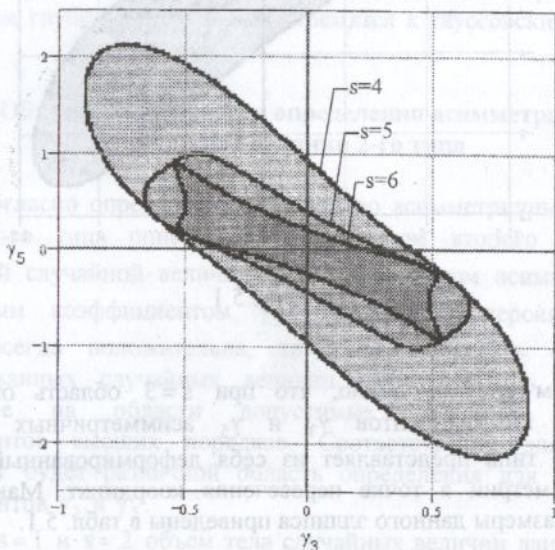


Рис. 5.2

Очевидно, что эта область представляет собой почти правильный симметричный эллипс, максимальные размеры которого приведены в табл. 5.1.

Если  $\gamma_3 = 0$ , то

$$\Delta_4(\chi_2, \gamma_5) = 36\chi_2^{10} \left( 8 - 9\gamma_5^2 + \frac{1}{36}\gamma_5^4 \right)$$

и, следовательно, область определения для параметра  $\gamma_5$  находится из биквадратного неравенства

$$8 - 9\gamma_5^2 + \frac{1}{36}\gamma_5^4 > 0.$$

Легко показать, что в этом случае  $\gamma_5 \in (-0,948; 0,948)$ .



3. При  $s=5$  объем тела  $\Delta_5(\chi_2, \gamma_3, \gamma_5)$  асимметричной случайной величины 2-го типа равен

$$\Delta_5(\chi_2, \gamma_3, \gamma_5) = 2160\chi_2^{15} [16 + \gamma_3^2 \Lambda_{51}(\gamma_3) + \gamma_5^2 \Lambda_{52}(\gamma_5) + \gamma_3 \gamma_5 \Lambda_{53}(\gamma_3, \gamma_5)], \quad (5.8)$$

где  $\Lambda_{51}(\gamma_3)$  имеет тот же вид, что и для выражения (5.4), а остальные составляющие соответственно равны

$$\Lambda_{52}(\gamma_5) = -88 - \frac{221}{12} \gamma_5^2 + \frac{25}{432} \gamma_5^4,$$

$$\Lambda_{53}(\gamma_3, \gamma_5) = -240 - \frac{470}{3} \gamma_5^2 - \frac{10}{3} \gamma_5^4 - 250 \gamma_3 \gamma_5 - 40 \gamma_3 \gamma_5^3 + 120 \gamma_3^2 + \\ + 405 \gamma_3^2 \gamma_5^2 - 1395 \gamma_3^3 \gamma_5 - 1488 \gamma_3^4 + 22,5 \gamma_3^4 \gamma_5^2 - 45 \gamma_3^5 \gamma_5 - 630 \gamma_3^6.$$

Значения параметров  $\gamma_3$  и  $\gamma_5$ , удовлетворяющие неравенству  $\Delta_5(\chi_2, \gamma_3, \gamma_5) > 0$ , принадлежат замкнутой области, изображенной на рис. 5.2. Эта область является собой параллелограмм с закругленными углами и центром в точке пересечения координат. Максимальные значения  $\gamma_3$  и  $\gamma_5$ , принадлежащие этой области, приведены в табл. 5.1.

Если  $\gamma_3 = 0$ , то

$$\Delta_5(\chi_2, \gamma_5) = 2160\chi_2^{15} \left( 16 - 88\gamma_5^2 - \frac{221}{12} \gamma_5^4 + \frac{25}{432} \gamma_5^6 \right).$$

Область определения для  $\gamma_5$  в данном случае находится из неравенства

$$16 - 88\gamma_5^2 - \frac{221}{12} \gamma_5^4 + \frac{25}{432} \gamma_5^6 > 0.$$

Решая это неравенство, получим, что  $\gamma_5 \in (-0,42; 0,42)$ .

4. И, наконец, при  $s=6$  объем тела асимметричной случайной величины 2-го типа будет равен

$$\Delta_6(\chi_2, \gamma_3, \gamma_5) = 388800\chi_2^{21} [64 + \gamma_3^2 \Lambda_{61}(\gamma_3) + \gamma_5^2 \Lambda_{62}(\gamma_5) + \gamma_3 \gamma_5 \Lambda_{63}(\gamma_3, \gamma_5)], \quad (5.9)$$

где  $\Lambda_{61}(\gamma_3)$  имеет тот же вид, что и для выражения (5.5), а остальные составляющие соответственно равны

$$\Lambda_{62}(\gamma_5) = -\frac{3416}{3} - \frac{3311}{3} \gamma_5^2 - \frac{22855}{72} \gamma_5^4 + \frac{875}{144} \gamma_5^6,$$

$$\begin{aligned}
\Lambda_{63}(\gamma_3, \gamma_5) = & -2240 - \frac{8680}{3} \gamma_5^2 - \frac{16135}{3} \gamma_5^4 + \frac{1225}{24} \gamma_5^6 + \frac{8680}{3} \gamma_3 \gamma_5 - \\
& - 31482,5 \gamma_3 \gamma_5^3 + \frac{10325}{24} \gamma_3 \gamma_5^5 + 9520 \gamma_3^2 - \frac{226240}{3} \gamma_3^2 \gamma_5^2 - \\
& - \frac{100975}{36} \gamma_3^2 \gamma_5^4 - 81830 \gamma_3^3 \gamma_5 - \frac{322315}{12} \gamma_3^3 \gamma_5^3 - \frac{1225}{12} \gamma_3^3 \gamma_5^5 - \\
& - 40992 \gamma_3^4 - \frac{322000}{3} \gamma_3^4 \gamma_5^2 + 350 \gamma_3^4 \gamma_5^4 - 179410 \gamma_3^5 \gamma_5 + \\
& + 14656,25 \gamma_3^5 \gamma_5^3 - 105420 \gamma_3^6 + 56875 \gamma_3^6 \gamma_5^2 + 46812,5 \gamma_3^7 \gamma_5 - \\
& - 48720 \gamma_3^8 + 4725 \gamma_3^8 \gamma_5^2 + 23100 \gamma_3^9 \gamma_5 + 55125 \gamma_3^{10} \gamma_5.
\end{aligned}$$

Соответственно, в данном случае область допустимых значений коэффициента асимметрии  $\gamma_3$  и кумулянтного коэффициента  $\gamma_4$  определяется из условия положительности  $\Delta_5(\chi_2, \gamma_3, \gamma_4)$ . График этой области приведен на рис. 5.2. Он имеет вид симметричного относительно начала координат параллелограмма с параболически вогнутыми вовнутрь боковыми сторонами. В табл. 5.1 приведены максимальные значения  $\gamma_3$  и  $\gamma_4$ , которых достигает эта область.

При  $\gamma_3 = 0$  объем тела будет равен

$$\Delta_6(\chi_2, \gamma_5) = 388800 \chi_2^{21} \left( 64 - \frac{3416}{3} \gamma_5^2 - \frac{3311}{3} \gamma_5^4 - \frac{22855}{72} \gamma_5^6 + \frac{875}{144} \gamma_5^8 \right).$$

Тогда область определения для  $\gamma_5$  находится из неравенства

$$64 - \frac{3416}{3} \gamma_5^2 - \frac{3311}{3} \gamma_5^4 - \frac{22855}{72} \gamma_5^6 + \frac{875}{144} \gamma_5^8 > 0.$$

Можно показать, что в данном случае  $\gamma_5 \in (-0,232; 0,232)$ .

Анализируя динамику изменения областей определения кумулянтных коэффициентов  $\gamma_3$  и  $\gamma_5$  асимметричных случайных величин 2-го типа, можно сделать вывод, что с увеличением глубины непрерывной перфорации наряду с сохранением общего характера расположения этих областей (при некоторой их трансформации) их площади значительно уменьшаются. Следовательно, логично предположить, что при бесконечной длине перфорации площадь области определения кумулянтных коэффициентов  $\gamma_3$  и  $\gamma_5$  будет стремиться к нулю, а соответственно плотность распределения близких к гауссовским асимметричных случайных величин 2-го типа с увеличением длины перфорации будет стремиться к гауссовскому распределению.



### 5.3. Объемы тел и области определения эксцессных случайных величин 1-го типа

1. Множество эксцессных случайных величин 1-го типа, согласно определению, описываются лишь кумулянтном второго порядка  $\chi_2$  и коэффициентом эксцесса  $\gamma_4$ . В данном случае условие положительности объема тела размерностью  $s$  накладывает ограничения на область определения  $\gamma_4$ , причем для различных значений  $s$  будет различной область определения  $\gamma_4$ .

Используя примеры предыдущих разделов, легко показать, что при  $s=2$  объем тела эксцессной случайной величины 1-го типа равен

$$\Delta_2(\chi_2, \gamma_4) = \chi_2^3(\gamma_4 + 2), \quad (5.10)$$

а так как  $\Delta_2(\chi_2, \gamma_4) > 0$ , то при  $s=2$  коэффициент эксцесса  $\gamma_4$  принимает значения в интервале  $(-2; +\infty)$ . Отметим, что такая область определения является предельно широкой для любых негауссовских случайных величин.

2. При  $s=3$  объем тела рассматриваемой случайной величины равен

$$\Delta_3(\chi_2, \gamma_4) = \chi_2^6(2 + \gamma_4)(6 + 9\gamma_4 - \gamma_4^2) > 0, \quad (5.11)$$

и, следовательно,  $\gamma_4$  при  $s=3$  может принимать значения в интервале  $(-0,623; 9,623)$ .

3. Подставив соответствующие коррелянты  $F_{i,j}$ , получим, что объем тела  $\Delta_4(\chi_2, \gamma_4)$  размером  $s=4$  эксцессных случайных величин 1-го типа будет равен

$$\Delta_4(\chi_2, \gamma_4) = 2\chi_2^{10}(6 + 9\gamma_4 - \gamma_4^2)(24 + 84\gamma_4 + 38\gamma_4^2 + 17\gamma_4^3) > 0. \quad (5.12)$$

Можно показать, что значения  $\gamma_4$ , удовлетворяющие этому неравенству, принадлежат интервалу  $(-0,327; 9,623)$ .

4. При  $s=5$  объем тела будет равен

$$\Delta_5(\chi_2, \gamma_4) = 20\chi_2^{15}(24 + 84\gamma_4 + 38\gamma_4^2 + 17\gamma_4^3)(72 + 468\gamma_4 + 678\gamma_4^2 + 345\gamma_4^3 - 175\gamma_4^4), \quad (5.13)$$

т.е. в данном случае значения параметра  $\gamma_4$  должны удовлетворять неравенству, в котором он входит в 7-ой степени, решением которого есть интервал  $(-0,21; 3,368)$ .

5. И, наконец, при  $s=6$  объем тела эксцессной случайной величины 1-го типа будет равен

$$\Delta_6(\chi_2, \gamma_4) = 200\chi_2^{19}(72 + 468\gamma_4 + 678\gamma_4^2 + 345\gamma_4^3 - 175\gamma_4^4)[1728 + \Lambda_6(\gamma_4)], \quad (5.14)$$

где  $\Lambda_6(\gamma_4)$  описывается следующим выражением:

$$\Lambda_6(\gamma_4) = 19008\gamma_4 + 61776\gamma_4^2 + 81504\gamma_4^3 + 29700\gamma_4^4 + 28980\gamma_4^5 + 7735\gamma_4^6, \quad (5.15)$$

т.е. в данном случае интервал допустимых значений коэффициента эксцесса  $\gamma_4$  определяется из неравенства, в котором он входит в 10-ой степени.

Решив последнее неравенство, можно показать, что значения параметра  $\gamma_4$  принадлежат интервалу  $(-0,151; 3,368)$ .

Анализируя динамику изменения областей определения коэффициента эксцесса  $\gamma_4$ , можно сделать вывод, что с увеличением глубины непрерывной перфорации ширина интервала, в котором  $\gamma_4$  может принимать значения, уменьшается. При этом также логично предположить, что при бесконечной глубине перфорации длина области определения  $\gamma_4$  будет равна нулю. Следовательно, близкие к гауссовским эксцессы случайные величины первого типа с увеличением глубины перфорации также стремятся к гауссовским случайным величинам.

#### 5.4. Объемы тел и области определения эксцессных случайных величин 2-го типа

1. Множество эксцессных случайных величин 2-го типа описывается кумулянтном второго порядка  $\chi_2$ , коэффициентом эксцесса  $\gamma_4$  и кумулянтным коэффициентом  $\gamma_6$ . Соответственно, от этих параметров зависят и объемы тел случайных величин рассматриваемого типа при любом  $s$ . Условие положительности объемов тел накладывает ограничение на взаимосвязь между кумулянтными коэффициентами  $\gamma_4$  и  $\gamma_6$ . Характер и степень этого ограничения зависят от размера тела  $s$  случайной величины и глубины перфорации.

Используя выражения для центрированных коррелянтов (4.17), можно получить, что для эксцессных случайных величин 2-го типа объем тела размером 3 будет равен

$$\Delta_3(\chi_2, \gamma_4, \gamma_6) = \chi_2^6 (2 + \gamma_4) (6 + 9\gamma_4 - \gamma_4^2 + \gamma_6). \quad (5.16)$$

Область определения параметров  $\gamma_4$  и  $\gamma_6$ , обеспечивающих положительность величины  $\Delta_3(\cdot)$ , ограничена с одной стороны общим для любых случайных величин условием  $\gamma_4 > -2$ , а с двух других — параболой  $\gamma_6 = \gamma_4^2 - 9\gamma_4 - 6$ . График этой области приведен на рис. 5.3.



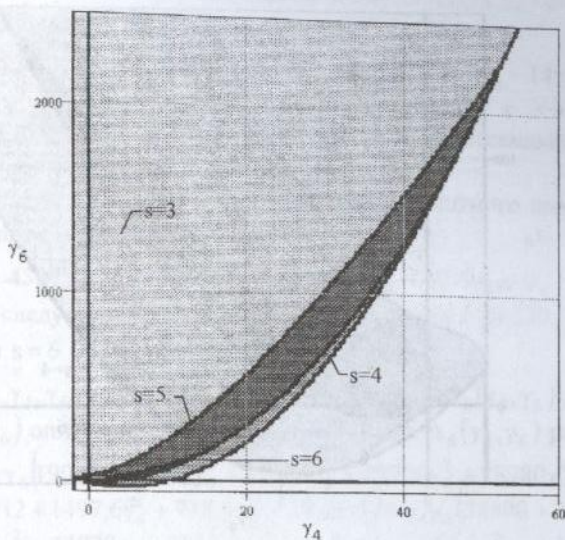


Рис. 5.3

По оси абсцисс на этом рисунке откладываются значения коэффициента эксцесса  $\gamma_4$ , а по оси ординат – значения кумулянтного коэффициента  $\gamma_6$ .

При  $\gamma_4=0$  область определения  $\gamma_6$  равна интервалу  $(-6; \infty)$ .

2. При степени  $s=4$  объем случайных величин рассматриваемого типа приобретает вид

$$\Delta_4(\chi_2, \gamma_4, \gamma_6) = 2\chi_2^{10} (6 + 9\gamma_4 - \gamma_4^2 + \gamma_6) [24 + \Delta_4(\gamma_4, \gamma_6)], \quad (5.17)$$

где

$$\Delta_4(\gamma_4, \gamma_6) = 84\gamma_4 + 38\gamma_4^2 + 17\gamma_4^3 + 16\gamma_6 - 0,5\gamma_6^2. \quad (5.18)$$

Значения параметров  $\gamma_4$  и  $\gamma_6$ , удовлетворяющие неравенству  $\Delta_4(\chi_2, \gamma_4, \gamma_6) > 0$ , представляют собой некоторую замкнутую область, которая представляет собой вытянутую вдоль оси ординат узкую полосу, ограниченную с двух сторон параболami, график которой приведен на рис. 5.3. Крайние значения  $\gamma_4$  и  $\gamma_6$ , ограничивающие распространение области определения параметров эксцессных случайных величин 2-го типа при  $s=4$ , приведены в табл. 5.2. На рис. 5.4 также приведен вид рассматриваемой области в окрестностях точки пересечения координат.

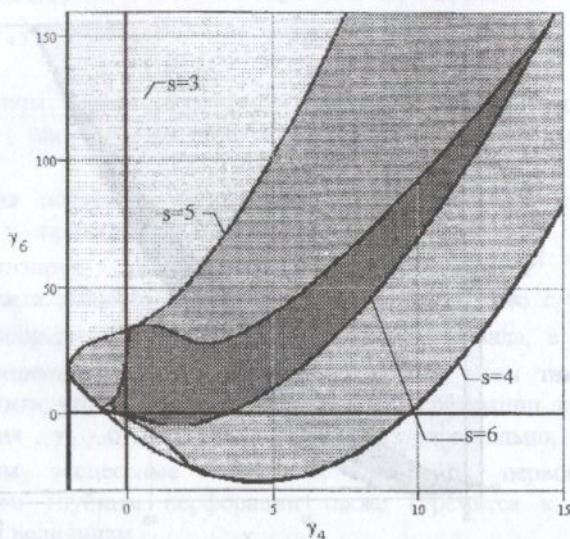


Рис. 5.4

Таблица 5.2

S	$\gamma_4$		$\gamma_6$	
	min	max	min	max
3	-2	-	-27	-
4	-2	52	-27	2300
5	-0,9	52	-4	2300
6	-0,5	14	-4	155

В том случае, если  $\gamma_4 = 0$ , то область определения кумулянтного коэффициента  $\gamma_6$  определяется неравенством

$$48 + 32\gamma_6 - \gamma_6^2 > 0,$$

из которого следует, что значения  $\gamma_6$  должны принадлежать интервалу  $(-1,4356; 33,4356)$ .

3. Объем тела эксцессных случайных величин 2-го типа при  $s = 5$  можно представить в виде

$$\Delta_5(\chi_2, \gamma_4, \gamma_6) = 20\chi_2^{15} [24 + \Lambda_4(\gamma_4, \gamma_6)][72 + \Lambda_5(\gamma_4, \gamma_6)], \quad (5.19)$$



где  $\Lambda_4(\gamma_4, \gamma_6)$  описывается выражением (5.18), а  $\Lambda_5(\gamma_4, \gamma_6)$  равен

$$\Lambda_5(\gamma_4, \gamma_6) = \left[ \gamma_4 (468 + 678\gamma_4 + 345\gamma_4^2 - 175\gamma_4^3) + \gamma_6 (132 - 3,1\gamma_6 - 0,1\gamma_6^2) + \gamma_4\gamma_6 (180 + 22,1\gamma_6 + 167\gamma_4 - 14\gamma_4^2) \right]. \quad (5.20)$$

Из рис. 5.3 и 5.4 видно, что по сравнению с  $s=4$  область определения кумулянтных коэффициентов  $\gamma_4$  и  $\gamma_6$  несколько сужается, однако характер этой области остается таким же.

Если  $\gamma_4 = 0$ , то область определения кумулянтного коэффициента  $\gamma_6$  определяется неравенством вида

$$1728 + 4320\gamma_6 + 2001,6\gamma_6^2 - 118\gamma_6^3 - 0,05\gamma_6^4 + 0,05\gamma_6^5 > 0,$$

из которого следует, что  $\gamma_6$  принадлежит интервалу  $(-0,539; 24,372)$ .

4. При  $s=6$  объем тела  $\Delta_6(\chi_2, \gamma_4, \gamma_6)$  равен

$$\Delta_6(\chi_2, \gamma_4, \gamma_6) = 200\chi_2^{19} [72 + \Lambda_5(\gamma_4, \gamma_6)] [1728 + \Lambda_6(\gamma_4, \gamma_6)], \quad (5.21)$$

где  $\Lambda_5(\gamma_4, \gamma_6)$  описывается выражением (5.20), а  $\Lambda_6(\gamma_4, \gamma_6)$  равно

$$\Lambda_6(\gamma_4, \gamma_6) = \gamma_4 (19008 + 61776\gamma_4 + 81504\gamma_4^2 + 29700\gamma_4^3 + 28980\gamma_4^4 + 7735\gamma_4^5) + \gamma_6 (6912 + 1497,6\gamma_6 + 718,4\gamma_6^2 - 23,05\gamma_6^3) + \gamma_4\gamma_6 (28800 + 8304\gamma_6 + 127,2\gamma_6^2 + 44928\gamma_4 - 3811,2\gamma_4\gamma_6 - 1824\gamma_4^2 - 957,6\gamma_4^2\gamma_6 + 1680\gamma_4^3).$$

В табл. 5.2 приведены значения максимальных величин, которых достигает область допустимых значений кумулянтных коэффициентов  $\gamma_4$  и  $\gamma_6$  эксцессных случайных величин 2-го типа.

Область допустимых значений коэффициента эксцесса  $\gamma_4$  и кумулянтного коэффициента  $\gamma_6$ , обусловленная условием положительности  $\Delta_6(\chi_2, \gamma_4, \gamma_6)$ , изображена на рис. 5.4. Эту область условно можно разделить на две. Первая расположена в окрестности точки пересечения координат (в основном, в положительной области). Вторая, подобно случаям при  $s=4$  и  $s=5$ , представляет собою сужающуюся область, заключенную между двумя параболой.

При  $\gamma_4 = 0$  область определения  $\gamma_6$  определяется из неравенства

$$124416 + 725760\gamma_6 + 1014854,4\gamma_6^2 + 227808\gamma_6^3 + 87835,44\gamma_6^4 - 5419,4\gamma_6^5 - 0,385\gamma_6^6 + 2,305\gamma_6^7 > 0$$

и равна интервалу  $(-0,263; 24,372)$ .

Анализ характера изменения области определения кумулянтных коэффициентов  $\gamma_4$  и  $\gamma_6$  эксцессных случайных величин 2-го типа показывает, что с ростом размера тела  $s$  стохастического полинома площади (размеры) этих областей значительно уменьшаются, т.е. увеличение глубины перфорации накладывает более жесткие ограничения на взаимозависимость отличных от нуля кумулянтных коэффициентов высших порядков. При этом форма областей, в

основном, сохраняется. Поэтому также можно предположить, что при увеличении глубины непрерывной перфорации до бесконечности площади области определения кумулянтных коэффициентов  $\gamma_4$  и  $\gamma_6$  будут стремиться к нулю. Соответственно, плотность распределения исследуемых случайных величин будет стремиться к гауссовскому распределению.

### 5.5. Объемы тел и области определения асимметрично-эксцессных случайных величин

1. Исходя из определения близких к гауссовским асимметрично-эксцессных случайных величин, объемы их тел зависят от кумулянта второго порядка  $\chi_2$ , коэффициента асимметрии  $\gamma_3$  и коэффициента эксцесса  $\gamma_4$ . Как уже отмечалось, кумулянтные коэффициенты высших порядков не могут принимать произвольные значения. Ограничение на область их определения накладывает условие положительности объема тела перфорированной случайной величины, который в общем случае зависит от размера  $s$  этого тела. Так как параметр  $\chi_2 > 0$  при любых условиях, то необходимо определить область значений  $\gamma_3$  и  $\gamma_4$ , удовлетворяющих этому условию.

Минимальный размер тела асимметрично-эксцессных случайных величин равен 2. Для этого случая объем тела определяется выражением

$$\Delta_2(\chi_2, \gamma_3, \gamma_4) = \chi_2^3 (2 - \gamma_3^2 + \gamma_4), \quad (5.22)$$

и, соответственно, неравенство

$$2 - \gamma_3^2 + \gamma_4 > 0 \quad (5.23)$$

накладывает ограничения на взаимозависимость между коэффициентами асимметрии и эксцесса.

Необходимо отметить, что подобное неравенство хорошо известно [2; 3; 5] и является общим для любого типа негауссовских случайных величин, так как при этом размере тела не накладывалось никаких ограничений на кумулянтные коэффициенты более высоких порядков.

Множество допустимых значений кумулянтных коэффициентов  $\gamma_3$  и  $\gamma_4$ , определенное неравенством (5.23), представляет собой область, ограниченную снизу параболой  $\gamma_4 = \gamma_3^2 - 2$ , график которой изображен на рис. 5.5. По оси абсцисс на этом графике изменяются значения  $\gamma_3$ , по оси ординат  $-\gamma_4$ .

2. В случае, если размерность тела  $s$  асимметрично-эксцессных случайных величин равна 3, объем тела выражается формулой



$$\Delta_3(\chi_2, \gamma_3, \gamma_4) = 3\chi_2^6 \left( 4 - 8\gamma_3^2 - 3\gamma_3^4 + 8\gamma_4 + \frac{7}{3}\gamma_4^2 - \frac{1}{3}\gamma_4^3 + 4\gamma_3^2\gamma_4 \right). \quad (5.24)$$

Условие положительности объема  $\Delta_3(\chi_2, \gamma_3, \gamma_4)$  накладывает ограничения на возможные значения  $\gamma_3$  и  $\gamma_4$ . Область определения этих параметров приведена на рис. 5.5. На рисунке видно, что при  $s=3$  множество допустимых значений кумулянтных коэффициентов  $\gamma_3$  и  $\gamma_4$  асимметрично-эксцессных случайных величин представляет собой криволинейную замкнутую область, симметричную относительно оси ординат. Максимальные размеры, которых достигает эта область, приведены в табл. 5.3.

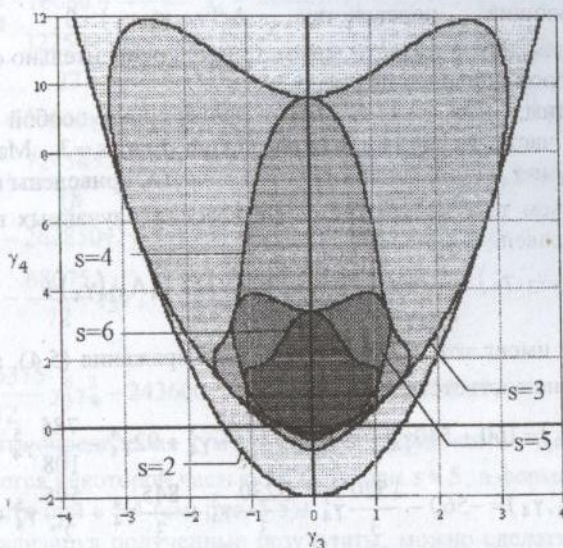


Рис. 5.5

Таблица 5.3

s	$\gamma_3$		$\gamma_4$	
	min	max	min	max
3	-3,2	3,2	-0,8	12
4	-1,6	1,6	-0,4	9,5
5	-1,2	1,2	-0,25	4
6	-1,1	1,1	-0,2	3,3



Из рисунка видно, что при  $s=3$  область допустимых значений меньше и полностью включается в область, получаемую при  $s=2$ . Это связано с тем, что при  $s=3$  вводится дополнительное условие  $\gamma_5 = \gamma_6 = 0$  на последовательность кумулянтных коэффициентов, описывающих случайные величины рассматриваемого типа.

3. При  $s=4$  объем тела  $\Delta_4(\chi_2, \gamma_3, \gamma_4)$  асимметрично-эксцессных случайных величин равен

$$\Delta_4(\chi_2, \gamma_3, \gamma_4) = 36\chi_2^{10} \left[ 8 - 40\gamma_3^2 - 45\gamma_3^6 + 40\gamma_4 + \frac{160}{3}\gamma_4^2 + 20\gamma_4^3 + \right. \\ \left. + \frac{115}{18}\gamma_4^4 - \frac{17}{18}\gamma_4^5 + \gamma_3^2\gamma_4 \left( -20 - \frac{170}{3}\gamma_4 - \frac{85}{3}\gamma_4^2 + 105\gamma_3^2 + 7,5\gamma_3^2\gamma_4 \right) \right]. \quad (5.25)$$

Значения кумулянтных коэффициентов асимметрии и эксцесса, удовлетворяющие неравенству  $\Delta_4(\chi_2, \gamma_3, \gamma_4) > 0$ , принадлежат некоторой замкнутой области, симметричной относительно оси ординат, график которой приведен на рис. 5.5.

Отметим, что эта область представляет собой некоторую усеченную часть от области определения при  $s=3$ . Максимальные значения  $\gamma_3$  и  $\gamma_4$ , принадлежащие этой области, приведены в табл. 5.3.

4. Объем тела асимметрично-эксцессных случайных величин при  $s=5$  будет равен

$$\Delta_5(\chi_2, \gamma_3, \gamma_4) = 2160\chi_2^{15} [16 + \gamma_3^2\Lambda_{51}(\gamma_3) + \gamma_4\Lambda_{52}(\gamma_4) + \gamma_3^2\gamma_4\Lambda_{53}(\gamma_3, \gamma_4)], \quad (5.26)$$

где  $\Lambda_{51}(\gamma_3)$  имеет тот же вид, что и для выражения (5.4), а остальные составляющие соответственно равны

$$\Lambda_{52}(\gamma_4) = 160 + 540\gamma_4 + 780\gamma_4^2 + \frac{1625}{3}\gamma_4^3 + 92\gamma_4^4 - \frac{785}{108}\gamma_4^5 - \frac{2975}{108}\gamma_4^6, \\ \Lambda_{53}(\gamma_3, \gamma_4) = -560 - \frac{1520}{3}\gamma_4^2 + \frac{3230}{3}\gamma_4^3 + \frac{845}{3}\gamma_4^4 - \frac{595}{27}\gamma_4^5 + \\ + 1140\gamma_3^2 - 2100\gamma_3^2\gamma_4 - 2595\gamma_3^2\gamma_4^2 - \frac{4945}{12}\gamma_3^2\gamma_4^3 + 3090\gamma_3^4 + \\ + 1515\gamma_3^4\gamma_4 + 162,5\gamma_3^4\gamma_4^2 - 585\gamma_3^6.$$

Соответственно, и в данном случае область допустимых значений коэффициента асимметрии  $\gamma_3$  и коэффициента эксцесса  $\gamma_4$  определяется из условия положительности  $\Delta_5(\chi_2, \gamma_3, \gamma_4)$ . График этой области приведен на рис. 5.5. Анализируя этот график, можно сделать вывод, что форма области определения кумулянтных коэффициентов асимметрично-эксцессных случайных величин при  $s=5$  подобна области при  $s=3$ , однако имеет значительно меньшие размеры. В табл.

5.3 приведены максимальные значения  $\gamma_3$  и  $\gamma_4$ , которых достигает эта область при  $s=5$ .

5. При  $s=6$  объем тела асимметрично-эксцессных случайных величин описывается следующим выражением:

$$\Delta_6(\chi_2, \gamma_3, \gamma_4) = 388800 \chi_2^{21} [64 + \gamma_3^2 \Lambda_{61}(\gamma_3) + \gamma_4 \Lambda_{62}(\gamma_4) + \gamma_3^2 \gamma_4 \Lambda_{63}(\gamma_3, \gamma_4)], \quad (5.27)$$

где  $\Lambda_{61}(\gamma_3)$  имеет тот же вид, что и для выражения (5.5), а остальные составляющие соответственно равны

$$\begin{aligned} \Lambda_{62}(\gamma_4) = & 1120 + \frac{22400}{3} \gamma_4 + \frac{74480}{3} \gamma_4^2 + \frac{409360}{9} \gamma_4^3 + \frac{137704}{3} \gamma_4^4 + \\ & + \frac{716170}{27} \gamma_4^5 + \frac{267385}{27} \gamma_4^6 + \frac{1674155}{324} \gamma_4^7 - \frac{800975}{648} \gamma_4^8 - \frac{1353625}{1944} \gamma_4^9, \\ \Lambda_{63}(\gamma_3, \gamma_4) = & -10080 - \frac{123760}{3} \gamma_4 - \frac{224000}{3} \gamma_4^2 - \frac{536480}{9} \gamma_4^3 - \frac{293440}{3} \gamma_4^4 - \\ & - \frac{3225005}{27} \gamma_4^5 - \frac{1310050}{27} \gamma_4^6 - \frac{2238775}{216} \gamma_4^7 + \frac{270725}{216} \gamma_4^8 + \\ & + 29960 \gamma_3^2 + 15120 \gamma_3^2 \gamma_4 + \frac{273070}{3} \gamma_3^2 \gamma_4^2 + \frac{1305920}{3} \gamma_3^2 \gamma_4^3 + \\ & + \frac{7245455}{18} \gamma_3^2 \gamma_4^4 + \frac{718025}{9} \gamma_3^2 \gamma_4^5 + \frac{43225}{216} \gamma_3^2 \gamma_4^6 + 33600 \gamma_3^4 - \\ & - 262850 \gamma_3^4 \gamma_4 - \frac{2112880}{3} \gamma_3^4 \gamma_4^2 - 470312,5 \gamma_3^4 \gamma_4^3 - \frac{106400}{3} \gamma_3^4 \gamma_4^4 - \\ & - \frac{68075}{72} \gamma_3^4 \gamma_4^5 + 236250 \gamma_3^6 + 539665 \gamma_3^6 \gamma_4 + 205012,5 \gamma_3^6 \gamma_4^2 - \\ & - \frac{235375}{12} \gamma_3^6 \gamma_4^3 - 243600 \gamma_3^8 + 8662,5 \gamma_3^8 \gamma_4 + 10587,5 \gamma_3^8 \gamma_4^2 - 26775 \gamma_3^{10}. \end{aligned}$$

Область определения кумулянтных коэффициентов  $\gamma_3$  и  $\gamma_4$  в этом случае является некоторой частью области при  $s=5$ , а форма ее подобна форме области при  $s=4$  (см. рис. 5.5).

6. Анализируя полученные результаты, можно сделать вывод, что с увеличением размера тела асимметрично-эксцессной случайной величины происходит постепенное уменьшение размеров областей допустимых значений кумулянтных коэффициентов  $\gamma_3$  и  $\gamma_4$ , причем характер этих изменений зависит от четности или нечетности размеров тела. Следовательно, и в данном случае логично предположить, что с ростом размерности тела, что влечет за собою увеличение глубины перфорации, область определения параметров  $\gamma_3$  и  $\gamma_4$  будет сужаться в окрестностях нулевой точки. В конечном итоге это приведет к вырождению близких к гауссовским асимметрично-эксцессных случайных величин в гауссовские.



1. Крамер Г. Математические методы статистики. – М.: Мир, 1975. – 648 с.
2. Малахов А.Н. Кумулянтный анализ случайных негауссовских процессов и их преобразований. – М.: Сов. радио, 1978. – 376 с.
3. Кунченко Ю.П., Лега Ю.Г. Оценка параметров случайных величин методом максимизации полинома. – К.: Наукова думка, 1992. – 180 с.
4. Кендалл М., Стьюарт. Статистические выводы и связи. – М.: Наука, 1973. – 899 с.
5. Fisher R.A. On an absolute criterion for fitting frequency curves // *Mess. of Math.*, 41 (1912), 155.
6. Pearson K. Contributions to the mathematical theory of evolution // *PTRS*, 185 (1894), 71.
7. Gauss K.F. *Theoria motus corporum coelestium in sectimibus conicis solem aurbientium*. – Hamburg: Perthes and Besser, 1809.
8. Рао С.Р. Линейные статистические методы и их применения. – М.: Наука, 1968. – 574 с.
9. Кунченко Ю.П. Неортогональное разложение случайных величин // *Імовірнісні моделі та обробка випадкових сигналів і полів: Зб. наук. пр.* – Львів-Харків-Тернопіль, 1993. – Т. 2, част. 1.
10. Кунченко Ю.П. Определение неизвестных параметров случайного процесса методом максимизации ряда Вольтерра // *Проблемы кибернетики: Труды Сибирского физ.-тех. института*. – Вып. 62. – Томск, 1971. – С.232-243.
11. Кунченко Ю.П. Применение ряда Вольтерра для нахождения оценок параметров случайных процессов // *Труды V Конференции по теории кодирования и передачи информации*. – Секция III. Статистическая теория передачи сообщений. – Москва-Горький, 1972. – С. 77-82.
12. Кунченко Ю.П. Определение оценок векторного параметра случайного процесса методом максимизации ряда Вольтерра // *Проблемы кибернетики: Труды Сибирского физ.-тех. института*. – Вып. 64. – Томск, 1973. – С. 188-196.
13. Кунченко Ю.П., Герасимов В.И., Бородина Н.В. Определение интенсивности сигнала из квадрата огибающей стационарного гауссовского случайного процесса методом максимизации ряда Вольтерра // *Проблемы кибернетики: Труды Сибирского физ.-тех. института*. – Вып. 62. – Томск, 1971. – С. 244-254.
14. Кунченко Ю.П., Бородина Н.В. Определение произвольного параметра функции корреляции гауссовского случайного сигнала при наличии мультипликативных и аддитивных гауссовских помех // *Труды V Конференции по теории кодирования и передачи*

- информации. – Секция III. Статистическая теория передачи сообщений. – Москва-Горький, 1972. – С. 83-88.
15. Кунченко Ю.П., Терновский А.И. Нахождение оценок параметров стационарных  $2N$ -го порядка случайных процессов методом максимизации полинома при степенных преобразованиях выборочных функций // Вычислительная математика в современном научно-техническом прогрессе: Тезисы докладов III республиканской конференции. – К., 1982, – С. 20-21.
16. Кунченко Ю.П. Применение рядов Вольтерра для нахождения оценок неизвестных параметров случайных процессов: Дис... канд. физ.-мат. наук: 01.04.03. – Томск, 1973. – 161 с.
17. Кунченко Ю.П. Нелинейная оценка параметров негауссовских радиофизических сигналов. – К.: Вища школа, 1987. – 191 с.
18. Кунченко Ю.П. Нелинейная оценка параметров негауссовских радиофизических сигналов: Дис.... доктора физ.-мат. Наук: Харьков, 1988. – 301 с.
19. Кунченко Ю.П. Применение полиномов для нахождения оценок параметров при равнооточных наблюдениях // Статистические методы теории управления: Тезисы докладов IV Всесоюзного совещания. – М.: Наука, 1978. – С. 126-128.
20. Кунченко Ю.П. Применение полиномов для нахождения оценок параметров при частичной априорной информации. – Деп. в УкрНИИТИ, рег. No 3244, 1982, 130 с. Библиограф. опис. опубл. в Библиограф. указателе ВИНТИ «Депонированные рукописи», 1982, No 6(128), 6/о 701.
21. Edgeworth F.Y. The Law of error // PCPS, 20 (1905), 36.