

**А.Н. Малахов, Н.И. Максюков,
В.А. Никишкин**

Высшая математика

Москва 2002

УДК – 517
ББК – 22.11
В – 937

Малахов А.Н., Максюков Н.И., Никишкин В.А. ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА: Учебное пособие / Московский государственный университет экономики, статистики и информатики. - М.: МЭСИ, 2002. - 352 с.

В пособии представлены основные разделы математики, необходимые для успешного усвоения общетеоретических и специальных дисциплин в области экономики, менеджмента, статистики, бизнеса и информационных технологий.

Пособие предназначено для студентов и слушателей, обучающихся на всех формах обучения с использованием дистанционных образовательных технологий, а также для преподавателей высших и средних специальных учебных заведений.

Авторы: *Малахов Александр Николаевич,*
кандидат физико-математических наук, доцент
Максюков Николай Иванович,
доцент
Никишкин Валерий Александрович,
кандидат физико-математических наук, доцент

Председатель редакционного совета: *Тихомиров В.П.,* академик Международной академии наук высшей школы, доктор экономических наук, профессор.

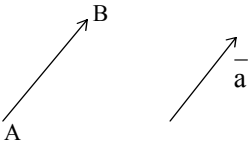
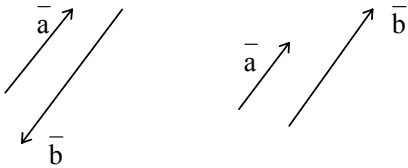
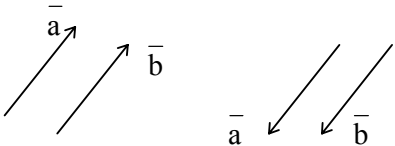
ISBN 5-7764-0137-1

© Максюков Николай Иванович, 2002
© Малахов Александр Николаевич, 2002
© Никишкин Валерий Александрович, 2002
© Московский государственный университет
экономики, статистики и информатики, 2002

Издание 3-е
Выпуск 5-й

Оглавление		Для замечаний
Оглавление		
Введение	4	
1. Основной текст	5	
1.1. Векторная алгебра	5	
1.2. Кривые второго порядка	31	
1.3. Аналитическая геометрия в пространстве	54	
1.4. Введение в математический анализ	68	
1.5. Дифференциальное исчисление	114	
1.6. Неопределенный интеграл	157	
1.7. Определенный интеграл и его геометрические приложения	179	
1.8. Обобщение понятия определенного интеграла. Несобственные интегралы	203	
1.9. Функции нескольких переменных	211	
1.10. Двойные интегралы	252	
1.11. Ряды	263	
1.12. Дифференциальные уравнения	283	
2. Решение типовых задач контрольных работ	306	
3. Задания для контрольных работ	334	
4. Выводы	347	
5. Вопросы к экзамену	348	

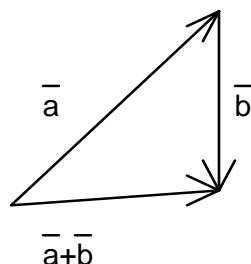
Введение	Для замечаний
<p style="text-align: center;">Введение</p> <p>Знания, приобретаемые студентом в результате изучения математики, играют важнейшую роль в процессе его обучения в институте. Они необходимы для успешного усвоения общетеоретических и специальных дисциплин в области экономики, менеджмента, статистики, бизнеса и информационных технологий. Математические методы широко используются для решения самых разнообразных задач техники, экономики и финансов, планирования и прогнозирования, анализа финансовой и экономической деятельности. Поэтому студент не должен забывать, что и после окончания вуза он не раз столкнется с необходимостью применения математики в практической деятельности.</p> <p>Учебные планы инженерно-экономических, экономических специальностей, специальностей в области статистики, менеджмента, бизнеса, информационных технологий и юриспруденции предусматривают изучение курса “Высшая математика”.</p> <p>Объем и содержание этого курса определяются программами, утвержденными Учебно-методическим управлением министерства общего и профессионального образования Российской Федерации и не зависит от формы обучения (дневное, вечернее, заочное, дистанционное).</p> <p>Данное учебное пособие соответствует учебной программе по курсу высшей математики.</p> <p>При написании данного пособия была использована следующая литература:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. -М.: Наука, 1987г. 2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. т. 1 и 2. -М.: Наука, 1979. 3. Овчинников П.Ф. и др. Высшая математика К.: Высшая школа, 1989г. 4. Коровин Ю.В., Никишкин В.А. Введение в математический анализ. - М.: МЭСИ, 1983г. 5. Коровин Ю.В., Никишкин В.А. Методические указания по изучению курса “Высшая математика” 6. Малахов А.Н. Высшая математика. -М.: МЭСИ, 1997г. 	

1.1. Векторная алгебра	Для замечаний
<p style="text-align: center;">1. Основной текст</p> <p style="text-align: center;">1.1. Векторная алгебра</p> <p style="text-align: center;">1.1.1. Понятие вектора и линейные операции над векторами</p> <p style="text-align: center;">1.1.1.1. Понятие вектора</p> <p>Геометрическим вектором, или просто вектором, будем называть направленный отрезок.</p> <p>Обозначать вектор будем либо как направленный отрезок символом \overline{AB}, где точки A и B обозначают соответственно начало и конец данного вектора, либо символом \vec{a}.</p> <div style="text-align: center;">  </div> <p>Начало вектора называют точкой его приложения. Длину вектора будем обозначать символом модуля: \overline{AB} или \vec{a}.</p> <p>Вектор называется нулевым, если совпадают его начало и конец. Нулевой вектор имеет длину равную нулю.</p> <p>Векторы называются коллинеарными, если они лежат на параллельных прямых.</p> <div style="text-align: center;">  </div> <p>Два вектора называются равными, если они коллинеарны, имеют одинаковую длину и одинаковое направление. Все нулевые векторы считаются равными.</p> <div style="text-align: center;">  </div> <p>Точка приложения вектора может быть выбрана произвольно, поэтому изучаемые векторы называют свободными.</p>	

1.1.1.2. Линейные операции над векторами

Линейными операциями называют операцию сложения векторов и операцию умножения векторов на вещественные числа.

Определение 1. Суммой $\vec{a} + \vec{b}$ двух векторов \vec{a} и \vec{b} называется вектор, идущий из начала вектора \vec{a} в конец вектора \vec{b} при условии, что вектор \vec{b} приложен к концу вектора \vec{a} .



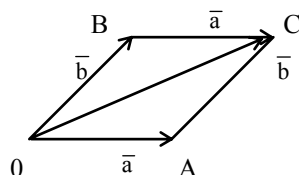
Это правило называют “правилем треугольника”.

Свойства сложения векторов:

$$1. \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

Доказательство. Приложим два произвольных вектора \vec{a} и \vec{b} к общему началу 0. Обозначим A и B концы векторов \vec{a} и \vec{b} соответственно и рассмотрим параллелограмм OBСA.

$$\begin{aligned} \vec{BC} &= \vec{OA} = \vec{a}, \\ \vec{AC} &= \vec{OB} = \vec{b}. \end{aligned}$$



Из определения 1 и $\triangle OAC$ следует, что $\vec{OC} = \vec{a} + \vec{b}$, а из $\triangle OBC$ следует, что $\vec{OC} = \vec{b} + \vec{a}$, ч.т.д.

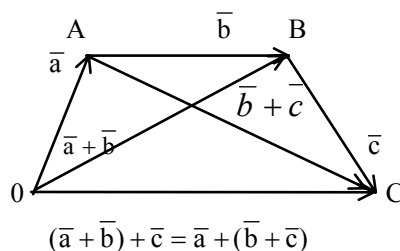
Замечание. При доказательстве свойства 1 нами получено правило сложения векторов, называемое “правилем параллелограмма”: если векторы \vec{a} и \vec{b} приложены к общему началу и на них построен параллелограмм, то сумма $\vec{a} + \vec{b}$ ($\vec{b} + \vec{a}$) этих векторов представляет собой диагональ этого параллелограмма, идущую из общего начала векторов \vec{a} и \vec{b} .

$$2. (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$

Доказательство. Приложим вектор \vec{a} к произвольной точке 0, вектор \vec{b} к концу вектора \vec{a} и вектор \vec{c} к концу вектора \vec{b} .

1.1. Векторная алгебра

Для замечаний



Обозначим буквами A, B, C концы векторов \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} , тогда
 $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = (\vec{OA} + \vec{AB}) + \vec{BC} = \vec{OB} + \vec{BC} = \vec{OC}$
 $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{OA} + (\vec{AB} + \vec{BC}) = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{OC}$, ч.т.д.

3. Существует нулевой вектор $\vec{0}$ такой, что $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ для любого вектора \vec{a} . Это свойство вытекает из определения 1.

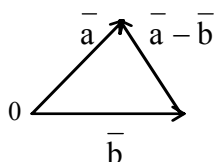
4. Для любого вектора \vec{a} существует противоположный ему вектор $-\vec{a}$ такой, что $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.

Для доказательства этого свойства определим вектор $-\vec{a}$, противоположный вектору \vec{a} , как вектор, коллинеарный вектору \vec{a} , имеющий с ним одинаковую длину и противоположное направление.

Взятая по определению 1 сумма вектора \vec{a} с таким вектором $-\vec{a}$ дает нулевой вектор.

Определение 2. Разностью $\vec{a} - \vec{b}$ вектора \vec{a} и вектора \vec{b} называется такой вектор \vec{c} , который в сумме с вектором \vec{b} дает вектор \vec{a} .

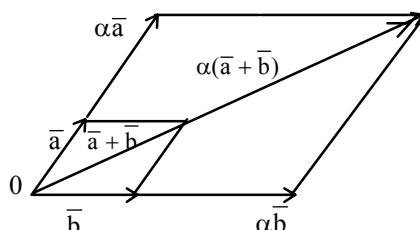
Из определения 2 и из правила треугольника (определение 1) сложения векторов вытекает правило построения разности $\vec{a} - \vec{b}$: разность $\vec{a} - \vec{b}$ приведенных к общему началу векторов \vec{a} и \vec{b} представляет собой вектор, идущий из конца вычитаемого вектора \vec{b} в конец уменьшаемого вектора \vec{a} .



Определение 3. Произведением $\alpha \cdot \vec{a}$ ($\vec{a} \cdot \alpha$) вектора \vec{a} на вещественное число α называется вектор \vec{b} , коллинеарный вектору \vec{a} , имеющий длину $|\alpha| \cdot |\vec{a}|$, и имеющий направление, совпадающее с направлением вектора \vec{a} в случае $\alpha > 0$ и противоположное направлению вектора \vec{a} в случае $\alpha < 0$.

Свойства операции умножения вектора на число:

$$5. \alpha(\bar{a} + \bar{b}) = \alpha\bar{a} + \alpha\bar{b}$$



При “растяжении” сторон параллелограмма в α раз в силу свойств подобия диагональ также “растягивается” в α раз, т.е.

$$\alpha\bar{a} + \alpha\bar{b} = \alpha(\bar{a} + \bar{b})$$

$$6. (\alpha + \beta)\bar{a} = \alpha\bar{a} + \beta\bar{a}.$$

$$7. \alpha(\beta\bar{a}) = (\alpha\beta)\bar{a}.$$

Последние два свойства очевидны из геометрических соображений.

1.1.1.3. Понятие линейной зависимости векторов

Линейной комбинацией n векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ будем называть сумму произведений этих векторов на произвольные вещественные числа:

$$\alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_2\bar{a}_2 + \dots + \alpha_n\bar{a}_n; \quad (1)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ – любые вещественные числа.

Определение 1. Векторы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ называются линейно зависимыми, если найдутся такие вещественные числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, из которых хотя бы одно отлично от нуля, что линейная комбинация векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ с указанными числами обращается в нуль:

$$\alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_2\bar{a}_2 + \dots + \alpha_n\bar{a}_n = 0$$

Векторы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ не являющиеся линейно зависимыми будем называть линейно независимыми.

Приведем другое определение линейно независимых векторов.

Определение 2. Векторы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ называются линейно независимыми, если равенство нулю их линейной комбинации (1) возможно лишь в случае, когда числа $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$

Из определений 1 и 2 следуют два утверждения:

1. Если хотя бы один из векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ является нулевым, то эти векторы являются линейно зависимыми.

2. Если среди n векторов какие-либо $(n-1)$ векторов линейно зависимы, то и все n векторов линейно зависимы.

1.1. Векторная алгебра	Для замечаний
<p style="text-align: center;">1.1.1.4. Линейные комбинации двух векторов</p> <p>Необходимым и достаточным условием линейной зависимости двух векторов является их коллинеарность.</p> <p>Доказательство. 1). Необходимость. Пусть векторы \vec{a} и \vec{b} линейно зависимы. Докажем их коллинеарность.</p> <p>По определению линейной зависимости найдутся такие вещественные числа α и β, хотя бы одно из которых не равно нулю, что справедливо равенство</p> $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = 0$ <p>Пусть $\beta \neq 0$. Тогда $\vec{b} = -\frac{\alpha}{\beta}\vec{a}$.</p> <p>Обозначив $\lambda = -\frac{\alpha}{\beta}$; получим $\vec{b} = \lambda\vec{a}$.</p> <p>Необходимость доказана.</p> <p>2). Достаточность. Пусть векторы \vec{a} и \vec{b} коллинеарны. Докажем, что они линейно зависимы. Если хотя бы один из них нулевой, то \vec{a} и \vec{b} линейно зависимы.</p> <p>Если же вектор \vec{a} ненулевой, то из коллинеарности векторов \vec{a} и \vec{b} следует, что $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ т.е. $\lambda\vec{a} + (-1)\vec{b} = 0$, ч.т.д.</p> <p>Следствие 1. Если векторы \vec{a} и \vec{b} не коллинеарны, то они линейно независимы.</p> <p>Следствие 2. Среди двух неколлинеарных векторов не может быть нулевого вектора.</p> <p style="text-align: center;">1.1.1.5. Линейные комбинации трех векторов</p> <p>Определение. Векторы называются компланарными, если они лежат либо в одной плоскости, либо в параллельных плоскостях.</p> <p>Теорема. Необходимым и достаточным условием линейной зависимости трех векторов является их компланарность.</p> <p>Доказательство. 1). Необходимость. Пусть три вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ линейно зависимы. Докажем их компланарность.</p> <p>По определению линейной зависимости найдутся такие вещественные числа α, β и γ, хотя бы одно из которых отлично от нуля, что</p> $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = 0.$ <p>Пусть $\gamma \neq 0$. Тогда</p> $\vec{c} = -\frac{\alpha}{\gamma}\vec{a} - \frac{\beta}{\gamma}\vec{b}.$	

1.1. Векторная алгебра

Для замечаний

Обозначив $\lambda = -\frac{\alpha}{\gamma}$, $\mu = -\frac{\beta}{\gamma}$, имеем $\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$. Если все три вектора приложены к общему началу O , то отсюда следует, что вектор \vec{c} равен диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\lambda\vec{a}$ и $\mu\vec{b}$

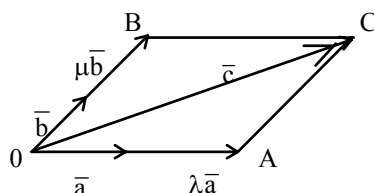


Рис. 1

Но это означает, что векторы \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} лежат в одной плоскости, т.е. компланарны.

2). Достаточность. Пусть векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} компланарны. Докажем, что они линейно зависимы.

Если какая-нибудь пара из указанных трех векторов коллинеарна, то эта пара линейно зависима и все три вектора \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} линейно зависимы.

Осталось рассмотреть случай, когда в тройке векторов \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} ни одна пара векторов не коллинеарна.

Перенесем три компланарных вектора \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} на одну плоскость и приведем их к общему началу O (рис.1). Через конец C вектора \vec{c} проведем прямые, параллельные векторам \vec{a} и \vec{b} . Обозначим A точку пересечения прямой, параллельной вектору \vec{b} с прямой, на которой лежит вектор \vec{a} , а B - точку пересечения прямой, параллельной вектору \vec{a} , с прямой, на которой лежит вектор \vec{b} . (Точка пересечения существует, т.к. векторы \vec{a} и \vec{b} не коллинеарны.)

$$\vec{c} = \vec{OA} + \vec{OB}$$

Т.к. вектор \vec{OA} коллинеарен ненулевому вектору \vec{a} , то

$$\vec{OA} = \lambda\vec{a}.$$

Аналогично $\vec{OB} = \mu\vec{b}$, т.е. $\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$.

Или $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + (-1)\vec{c} = 0$, ч.т.д.

Следствие 1. Каковы бы ни были неколлинеарные векторы \vec{a} и \vec{b} , для любого вектора \vec{c} , лежащего в одной плоскости с векторами \vec{a} и \vec{b} , найдутся такие вещественные числа λ и μ , что

$$\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}.$$

Следствие 2. Если векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} не компланарны, то они линейно независимы.

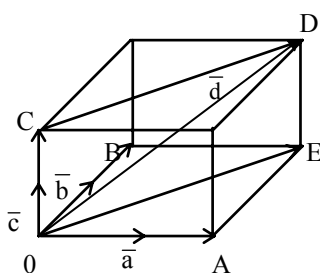
1.1.1.6. Линейная зависимость четырех векторов

Теорема. Любые четыре вектора линейно зависимы.

Доказательство. Исключим случай, когда какая-нибудь тройка из данных четырех векторов компланарна, т.к. тогда указанная тройка линейно зависима и, следовательно, все четыре вектора линейно зависимы.

Осталось рассмотреть случай, когда среди четырех векторов \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} и \vec{d} никакая тройка векторов не компланарна.

Приведем все четыре вектора к общему началу O и проведем через конец D вектора \vec{d} плоскости, параллельные плоскостям, определяемым парами векторов $\vec{b}\vec{c}$, $\vec{a}\vec{c}$ и $\vec{a}\vec{b}$.



$$\vec{d} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}.$$

$$\vec{OA} = \lambda \vec{a}, \vec{OB} = \mu \vec{b}, \vec{OC} = \gamma \vec{c}.$$

Следовательно,

$$\vec{d} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} + \gamma \vec{c}.$$

Или $\lambda \vec{a} + \mu \vec{b} + \gamma \vec{c} + (-1)\vec{d} = 0$, ч.т.д.

Следствие. Каковы бы ни были некопланарные векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} , для любого вектора \vec{d} найдутся такие вещественные числа α , μ и γ , что справедливо равенство

$$\vec{d} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} + \gamma \vec{c}.$$

1.1.1.7. Понятие базиса. Аффинные координаты

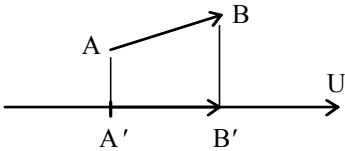
Определение 1. Три линейно независимых вектора \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} образуют в пространстве базис, если любой вектор \vec{d} может быть представлен в виде линейной комбинации векторов \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} .

Аналогично определяется базис на плоскости π .

Определение 2. Два лежащих в плоскости π линейно независимых вектора \vec{a} и \vec{b} образуют на этой плоскости базис, если любой лежащий в этой плоскости вектор \vec{c} может быть представлен в виде линейной комбинации векторов \vec{a} и \vec{b} .

Имеют место следующие фундаментальные утверждения:

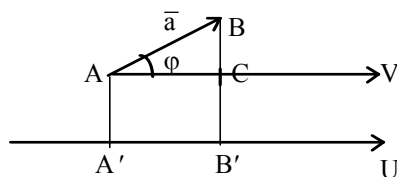
- 1). любая тройка некопланарных векторов \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} образует базис в пространстве;
- 2). любая пара лежащих в данной плоскости неколлинеарных векторов \vec{a} и \vec{b} образует базис на этой плоскости.

1.1. Векторная алгебра	Для замечаний
<p>Теорема. Каждый вектор \vec{d} может быть единственным способом разложен по базису $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:</p> $\vec{d} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} + \gamma \vec{c}.$ <p>Числа λ, μ, γ называются координатами вектора \vec{d} относительно базиса $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.</p> <p>Доказательство. Пусть таких разложений два:</p> $\vec{d} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} + \gamma \vec{c} \text{ и } \vec{d} = \lambda_1 \vec{a} + \mu_1 \vec{b} + \gamma_1 \vec{c}$ <p>Вычитая почленно получаем</p> $(\lambda - \lambda_1) \vec{a} + (\mu - \mu_1) \vec{b} + (\gamma - \gamma_1) \vec{c} = 0.$ <p>В силу линейной независимости базисных векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:</p> $\lambda - \lambda_1 = 0, \mu - \mu_1 = 0, \gamma - \gamma_1 = 0, \text{ или } \lambda = \lambda_1, \mu = \mu_1, \gamma = \gamma_1.$ <p>Единственность разложения по базису доказана.</p> <p>Теорема. При сложении двух векторов \vec{d}_1 и \vec{d}_2 их координаты складываются. При умножении вектора \vec{d}_1 на любое число α все его координаты умножаются на это число.</p> <p>Доказательство. Пусть $\vec{d}_1 = \lambda_1 \vec{a} + \mu_1 \vec{b} + \gamma_1 \vec{c}$, $\vec{d}_2 = \lambda_2 \vec{a} + \mu_2 \vec{b} + \gamma_2 \vec{c}$.</p> <p>Тогда в силу свойств линейных операций</p> $\vec{d}_1 + \vec{d}_2 = (\lambda_1 + \lambda_2) \vec{a} + (\mu_1 + \mu_2) \vec{b} + (\gamma_1 + \gamma_2) \vec{c}.$ $\alpha \vec{d}_1 = (\alpha \lambda_1) \vec{a} + (\alpha \mu_1) \vec{b} + (\alpha \gamma_1) \vec{c}.$ <p>В силу единственности разложения по базису теорема доказана.</p> <p>Аффинные координаты в пространстве определяются заданием базиса $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и некоторой точки О, называемой началом координат.</p> <p>Аффинными координатами любой точки М называются координаты вектора \vec{OM} (относительно базиса $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$).</p> <p>Свойства базиса и понятие аффинных координат на плоскости аналогичны случаю пространства.</p> <p style="text-align: center;">1.1.1.8. Проекция вектора на ось</p> <p>Определение. Проекцией вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ на ось U называется величина $A'B'$ направленного отрезка $\overrightarrow{A'B'}$ оси U, где A', B' - основания перпендикуляров, опущенных на ось U из точек A и B соответственно.</p> <div style="text-align: center;">  </div> <p>Теорема 1.8. Проекция вектора \vec{a} на ось U равна длине вектора \vec{a}, умноженной на косинус ϕ угла наклона вектора \vec{a} к оси U.</p>	

1.1. Векторная алгебра

Для замечаний

Доказательство.



Обозначим через V ось, проходящую через начало A вектора \vec{a} и имеющую тоже направление, что и ось U , и пусть C - проекция B на ось V .

$$\angle BAC = \varphi, \quad A'B' = AC.$$

Т.к. по определению $\text{пр}_V \vec{a} = A'B'$, то $\text{пр}_V \vec{a} = AC$.

Но $AC = |\vec{AB}| \cos \varphi = |\vec{a}| \cos \varphi$. Следовательно $\text{пр}_V \vec{a} = |\vec{a}| \cos \varphi$, ч.т.д.

1.1.1.9. Декартова прямоугольная система координат в пространстве. (ДПСК)

ДПСК является частным случаем аффинной системы, отвечающим тройке взаимно ортогональных и единичных базисных векторов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Принято направления векторов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ брать совпадающими с направлением декартовых осей Ox, Oy, Oz соответственно.

Нами получено, что любой вектор \vec{d} может быть, причем единственным способом, разложен по декартову прямоугольному базису (ДПБ) $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, т.е. для каждого вектора \vec{d} существует единственная тройка чисел X, Y, Z такая, что

$$\vec{d} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}.$$

Числа X, Y, Z называются декартовыми прямоугольными координатами (ДПК) вектора \vec{d} . Если M - любая точка пространства, то ДПК этой точки совпадают с ДПК вектора \vec{OM} .

Вектор $\vec{d} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$ будем также записывать в виде $\vec{d} = \{X, Y, Z\}$.

Теорема 1.9. ДПК вектора \vec{d} равны проекциям этого вектора на оси Ox, Oy и Oz соответственно.

Доказательство.

$$\vec{d} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}.$$

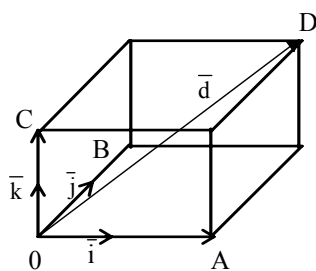
$$\vec{OA} = X\vec{i}, \vec{OB} = Y\vec{j}, \vec{OC} = Z\vec{k}$$

$OA = X$, т.к. из $OA = X\vec{i}$ и того, что $|\vec{i}| = 1$,

$$\text{получаем } |OA| = |X|.$$

1.1. Векторная алгебра

Для замечаний



Но знаки \overline{OA} и X совпадают,

т.к. когда векторы \overline{OA} и \vec{i} направлены в одну сторону оба числа \overline{OA} и X положительны, а в случае когда векторы \overline{OA} и \vec{i} направлены в противоположные стороны, оба числа \overline{OA} и X отрицательны. Т.е. $\overline{OA}=X$. Аналогично $\overline{OB}=Y$, $\overline{OC}=Z$, ч.т.д.

Обозначим α , β , γ углы наклона вектора \vec{d} к осям Ox , Oy , Oz соответственно. Числа $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ называют направляющими косинусами вектора \vec{d} .

Из теорем 8 и 9 имеем

$$X = |\vec{d}| \cos\alpha, \quad Y = |\vec{d}| \cos\beta, \quad Z = |\vec{d}| \cos\gamma \quad (1)$$

Т.к. квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов его сторон, то из равенств $\overline{OA}=X$, $\overline{OB}=Y$, $\overline{OC}=Z$ получим выражение для длины вектора \vec{d} через его координаты:

$$|\vec{d}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \quad (2)$$

Из формул (1) и (2) имеем:

$$\cos\alpha = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}, \quad \cos\beta = \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}},$$

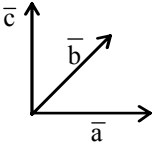
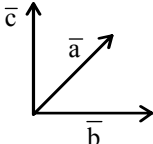
$$\cos\gamma = \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}.$$

Возводя в квадрат и складывая последние равенства получим

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

1.1. Векторная алгебра	Для замечаний
<p style="text-align: center;">1.1.2. Скалярное произведение двух векторов.</p> <p style="text-align: center;">1.1.2.1. Определение скалярного произведения (СП)</p> <p>Определение 1. СП двух векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.</p> <p>Скалярное произведение будем обозначать символом $(\vec{a} \cdot \vec{b})$, угол между векторами \vec{a} и \vec{b} - φ.</p> <p>По определению 1 :</p> $(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \cos \varphi \quad (1)$ <p>Можно сформулировать другое определение СП двух векторов, эквивалентное определению 1.</p> <p>Из теоремы 1.8 имеем:</p> $\text{п } p_{\vec{a}} \vec{b} = \vec{b} \cos \varphi$ <p>(проекция вектора \vec{b} на ось вектора \vec{a}).</p> <p>Отсюда получаем Определение 2 :</p> $(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot \text{п } p_{\vec{a}} \vec{b} \quad \text{или} \quad (2)$ $(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{b} \cdot \text{п } p_{\vec{b}} \vec{a}$ <p style="text-align: center;">1.1.2.2. Геометрические свойства СП</p> <p>Теорема 2.1. Необходимым и достаточным условием ортогональности двух векторов является равенство нулю их скалярного произведения.</p> <p>Доказательство. 1) Необходимость. Пусть векторы \vec{a} и \vec{b} ортогональны, φ-угол между ними. Тогда $\cos \varphi = 0$ и, в силу формулы (1) $(\vec{a} \cdot \vec{b}) = 0$</p> <p>2. Достаточность. Пусть $(\vec{a} \cdot \vec{b}) = 0$. Докажем, что векторы \vec{a} и \vec{b} ортогональны. Если хотя бы один из векторов \vec{a} или \vec{b} является нулевым, то он ортогонален любому вектору.</p> <p>Если же векторы \vec{a} и \vec{b} ненулевые, то $\vec{a} > 0$, $\vec{b} > 0$, поэтому из равенства $(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} \cos \varphi = 0$ вытекает, что $\cos \varphi = 0$, т.е. векторы ортогональны, ч.т.д.</p> <p>Замечание.</p> <p>Углом между двумя векторами считаем тот, который не превосходит π. ($0 \leq \varphi \leq \pi$)</p> <p>Из формулы (1) следует</p> <p>Теорема 2.2. Два ненулевых вектора \vec{a} и \vec{b} составляют острый (тупой) угол тогда и только тогда, когда их СП положительно (отрицательно).</p>	

1.1. Векторная алгебра	Для замечаний
<p style="text-align: center;">1.1.2.3. Алгебраические свойства СП</p> <p>1. $(\bar{a} \cdot \bar{b}) = (\bar{b} \cdot \bar{a})$ 2. $((\alpha \bar{a}) \cdot \bar{b}) = \alpha(\bar{a} \cdot \bar{b})$ 3. $(\bar{a} + \bar{b}) \cdot \bar{c} = (\bar{a} \cdot \bar{c}) + (\bar{b} \cdot \bar{c})$ 4. $(\bar{a} \cdot \bar{a}) > 0$, если \bar{a} - ненулевой вектор, и $(\bar{a} \cdot \bar{a}) = 0$, если \bar{a} - нулевой вектор.</p> <p>Свойство 1. Следует из формулы (1). Второе свойство получается из определения 2 (формула 2) скалярного произведения: $((\alpha \bar{a}) \cdot \bar{b}) = \bar{b} \cdot \text{пр}_{\bar{b}}(\alpha \bar{a}) = \alpha \bar{b} \cdot \text{пр}_{\bar{b}} \bar{a} = \alpha(\bar{a} \cdot \bar{b}).$</p> <p>Свойство 3. получаем из свойств линейности проекции вектора на ось $\text{пр}_{\bar{c}}(\bar{a} + \bar{b}) = \text{пр}_{\bar{c}} \bar{a} + \text{пр}_{\bar{c}} \bar{b}$ и формулы (2): $(\bar{a} + \bar{b}) \cdot \bar{c} = \bar{c} \cdot \text{пр}_{\bar{c}}(\bar{a} + \bar{b}) = \bar{c} \cdot (\text{пр}_{\bar{c}} \bar{a} + \text{пр}_{\bar{c}} \bar{b}) = \bar{c} \cdot \text{пр}_{\bar{c}} \bar{a} + \bar{c} \text{пр}_{\bar{c}} \bar{b} =$ $= (\bar{a} \cdot \bar{c}) + (\bar{b} \cdot \bar{c})$</p> <p>Четвертое свойство вытекает из формулы (1): $(\bar{a} \cdot \bar{a}) = \bar{a} ^2.$</p> <p style="text-align: center;">1.1.2.4. Выражение скалярного произведения (СП) в декартовых прямоугольных координатах (ДПК)</p> <p>Теорема 2.4. Если два вектора \bar{a} и \bar{b} определены своими ДПК $\bar{a} = X_1 \bar{i} + Y_1 \bar{j} + Z_1 \bar{k} = \{X_1, Y_1, Z_1\}$ $\bar{b} = X_2 \bar{i} + Y_2 \bar{j} + Z_2 \bar{k} = \{X_2, Y_2, Z_2\},$ то СП этих векторов равно сумме попарных произведений их соответствующих координат: $(\bar{a} \cdot \bar{b}) = X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2.$</p> <p>Доказательство. По определению $1(\bar{i} \cdot \bar{i}) = \bar{i} \cdot \bar{i} \cdot \cos 0 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$, также $(\bar{j} \cdot \bar{j}) = 1$, $(\bar{k} \cdot \bar{k}) = 1$. $(\bar{i} \cdot \bar{j}) = \bar{i} \cdot \bar{j} \cdot \cos \frac{\pi}{2} = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$, также $(\bar{i} \cdot \bar{k}) = (\bar{j} \cdot \bar{i}) = (\bar{j} \cdot \bar{k}) = (\bar{k} \cdot \bar{i}) = (\bar{k} \cdot \bar{j}) = 0$.</p> <p>Используя алгебраические свойства СП имеем $(\bar{a} \cdot \bar{b}) = X_1 X_2 (\bar{i} \cdot \bar{i}) + X_1 Y_2 (\bar{i} \cdot \bar{j}) + X_1 Z_2 (\bar{i} \cdot \bar{k}) + Y_1 X_2 (\bar{j} \cdot \bar{i}) + Y_1 Y_2 (\bar{j} \cdot \bar{j}) +$ $+ Y_1 Z_2 (\bar{j} \cdot \bar{k}) + Z_1 X_2 (\bar{k} \cdot \bar{i}) + Z_1 Y_2 (\bar{k} \cdot \bar{j}) + Z_1 Z_2 (\bar{k} \cdot \bar{k}) = X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2$</p>	

1.1. Векторная алгебра	Для замечаний
<p>Следствие 1. Необходимым и достаточным условием ортогональности векторов $\vec{a} = \{X_1, Y_1, Z_1\}$ и $\vec{b} = \{X_2, Y_2, Z_2\}$ является равенство</p> $X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2 = 0$ <p>Следствие 2. Угол φ между векторами \vec{a} и \vec{b} определяется по формуле</p> $\cos \varphi = \frac{X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2} \sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}}$ <p style="text-align: center;">1.1.3. Векторное произведение двух векторов.</p> <p style="text-align: center;">1.1.3.1. Правые и левые тройки векторов и системы координат</p> <p>Определение 1. Три вектора называются упорядоченной тройкой (или просто тройкой), если указано какой из них является первым, какой- вторым и какой- третьим.</p> <p>Т.е. запись $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ означает, что первым элементом является вектор \vec{a}, вторым- \vec{b}, третьим- \vec{c}.</p> <p>Определение 2. Тройка некопланарных векторов $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ называется правой (левой), если после приведения к общему началу вектор \vec{c} располагается по ту сторону от плоскости, определяемой векторами \vec{a} и \vec{b}, откуда кратчайший поворот от \vec{a} к \vec{b} виден совершающимся против часовой стрелки (по часовой стрелке).</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;">  <p>Правая тройка</p> </div> <div style="text-align: center;">  <p>Левая тройка</p> </div> </div> <p>Определение 3. Аффинная или декартова система координат называется правой (левой), если три базисных вектора образуют правую (левую) тройку.</p> <p>В дальнейшем будем рассматривать только правые системы координат.</p> <p style="text-align: center;">1.1.3.2. Векторное произведение двух векторов (ВП)</p> <p>Определение. ВП вектора \vec{a} на вектор \vec{b} называется вектор $\vec{c} = [\vec{a} \times \vec{b}]$, удовлетворяющий трем условиям:</p> <p>1) длина вектора \vec{c} равна произведению длин векторов \vec{a} и \vec{b} на синус угла φ между ними:</p> $ \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \sin \varphi ; \quad (1)$	

1.1. Векторная алгебра	Для замечаний
<p>2) вектор \vec{c} ортогонален к каждому из векторов \vec{a} и \vec{b};</p> <p>3) вектор \vec{c} направлен так, что тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ является правой.</p> <p style="text-align: center;">1.1.3.3. Геометрические свойства ВП</p> <p>Теорема 3.3. Необходимым и достаточным условием коллинеарности двух векторов является равенство нулю их ВП.</p> <p>Доказательство. 1). Необходимость вытекает из определения ВП.</p> <p>2). Достаточность. Пусть $[\vec{a} \times \vec{b}] = 0$. Докажем, что векторы \vec{a} и \vec{b} коллинеарны. Если хотя бы один из векторов \vec{a} или \vec{b} является нулевым, то он коллинеарен любому вектору.</p> <p>Если же оба вектора \vec{a} и \vec{b} ненулевые, то $\vec{a} > 0$, $\vec{b} > 0$ и поэтому из равенства $[\vec{a} \times \vec{b}] = \vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \sin \varphi = 0$ следует, что $\sin \varphi = 0$, $\varphi = 0$, т.е. векторы \vec{a} и \vec{b} коллинеарны, ч.т.д.</p> <p>Заметим, что так как площадь параллелограмма равна произведению смежных сторон этого параллелограмма на синус угла между ними, то из определения ВП(пункт 1) получим, что длина (или модуль) ВП $[\vec{a} \times \vec{b}]$ равняется площади параллелограмма, построенного на приведенных к общему началу векторах \vec{a} и \vec{b}.</p> <p style="text-align: center;">1.1.3.4. Алгебраические свойства векторного произведения (ВП)</p> <p>Из определения ВП получаем следующие четыре свойства ВП:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. $[\vec{a} \times \vec{b}] = -[\vec{b} \times \vec{a}]$; 2. $[(\alpha \vec{a}) \times \vec{b}] = \alpha [\vec{a} \times \vec{b}]$; 3. $[(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c}] = [\vec{a} \times \vec{c}] + [\vec{b} \times \vec{c}]$; 4. $[\vec{a} \times \vec{a}] = 0$ для любого вектора \vec{a}. <p style="text-align: center;">1.1.3.5. Понятие матрицы и определителя второго и третьего порядка</p> <p>Прямоугольную таблицу из чисел, содержащую m строк и n столбцов называют матрицей.</p> <p>Если число строк матрицы совпадает с числом ее столбцов, то матрица называется квадратной.</p> <p>Числа, входящие в состав матрицы называют ее элементами.</p> <p>Рассмотрим квадратную матрицу, состоящую из четырех элементов:</p> $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}.$	

1.1. Векторная алгебра	Для замечаний
<p>Определителем второго порядка, соответствующим этой матрице называется число, равное $a_1 b_2 - a_2 b_1$ и обозначаемое символом</p> $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1.$ <p>Рассмотрим квадратную матрицу, состоящую из девяти элементов:</p> $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}.$ <p>Определителем третьего порядка, соответствующим этой матрице называется число, обозначаемое символом Δ и равное</p> $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - c_1 b_2 a_3 - b_1 a_2 c_3 - a_1 c_2 b_3$ <p>Последнюю формулу для удобства запоминания можно записать в виде:</p> $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \cdot \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}.$ <p>Такая запись называется разложением определителя Δ по элементам первой строки.</p> <p>1.1.3.6. Выражение векторного произведения (ВП) в декартовых прямоугольных координатах (ДПК)</p> <p>Теорема. Если два вектора \vec{a} и \vec{b} определены своими ДПК</p> $\vec{a} = X_1 \vec{i} + Y_1 \vec{j} + Z_1 \vec{k} = \{X_1, Y_1, Z_1\}$ $\vec{b} = X_2 \vec{i} + Y_2 \vec{j} + Z_2 \vec{k} = \{X_2, Y_2, Z_2\},$ <p>то их ВП имеет вид</p> $[\vec{a} \times \vec{b}] = (Y_1 Z_2 - Y_2 Z_1) \vec{i} + (Z_1 X_2 - Z_2 X_1) \vec{j} + (X_1 Y_2 - X_2 Y_1) \vec{k} \quad (1)$ <p>Для запоминания этой формулы удобно использовать символ определителя (см. предыдущий пункт) и переписать ее в виде</p> $[\vec{a} \times \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} X_1 & Z_1 \\ X_2 & Z_2 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}.$ <p>Доказательство теоремы. Учитывая, что базисные векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ взаимно ортогональны, образуют правую тройку $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ и $\vec{i} = \vec{j} = \vec{k}$, имеем</p> $\left. \begin{aligned} [\vec{i} \times \vec{i}] &= 0 \text{ т.к. } \llbracket [\vec{i} \times \vec{i}] \rrbracket = \vec{i} \cdot \vec{i} \sin 0 = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0, \text{ так же } [\vec{j} \times \vec{j}] = [\vec{k} \times \vec{k}] = 0 \\ [\vec{i} \times \vec{j}] &= \vec{k}, [\vec{j} \times \vec{i}] = -\vec{k}, [\vec{i} \times \vec{k}] = -\vec{j}, [\vec{k} \times \vec{i}] = \vec{j}, [\vec{j} \times \vec{k}] = \vec{i}, [\vec{k} \times \vec{j}] = -\vec{i} \end{aligned} \right\} \quad (2)$ <p>Перемножая векторно \vec{a} и \vec{b}, получим</p>	

$$[\bar{a} \times \bar{b}] = X_1 X_2 [\bar{i} \times \bar{i}] + X_1 Y_2 [\bar{i} \times \bar{j}] + X_1 Z_2 [\bar{i} \times \bar{k}] + Y_1 X_2 [\bar{j} \times \bar{i}] + Y_1 Y_2 [\bar{j} \times \bar{j}] + Y_1 Z_2 [\bar{j} \times \bar{k}] + Z_1 X_2 [\bar{k} \times \bar{i}] + Z_1 Y_2 [\bar{k} \times \bar{j}] + Z_1 Z_2 [\bar{k} \times \bar{k}]$$

Из этого равенства и соотношений (2) получаем разложение (1).

Следствие. Если два вектора $\bar{a} = \{X_1, Y_1, Z_1\}$ и $\bar{b} = \{X_2, Y_2, Z_2\}$ коллинеарны, то их координаты пропорциональны:

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{Y_1}{Y_2} = \frac{Z_1}{Z_2}.$$

Доказательство. Из равенства нулю векторного произведения и из формулы 1 имеем

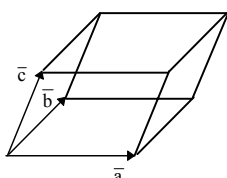
$$X_1 Y_2 - X_2 Y_1 = 0, Z_1 X_2 - Z_2 X_1 = 0, Y_1 Z_2 - Y_2 Z_1 = 0, \text{ ч.т.д.}$$

1.1.3.7. Смешанное произведение трех векторов

Пусть даны три вектора \bar{a}, \bar{b} и \bar{c} . Если вектор \bar{a} векторно умножается на вектор \bar{b} , а затем полученный вектор $[\bar{a} \times \bar{b}]$ скалярно умножается на вектор \bar{c} , то в результате получается число $([\bar{a} \times \bar{b}] \cdot \bar{c})$, называемое смешанным произведением векторов \bar{a}, \bar{b} и \bar{c} .

Из определения следует геометрический смысл смешанного произведения трех векторов:

Смешанное произведение $([\bar{a} \times \bar{b}] \cdot \bar{c})$ равно объему параллелепипеда, построенного на приведенных к общему началу векторах \bar{a}, \bar{b} и \bar{c} , взятому со знаком плюс, если тройка $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ правая, и со знаком минус, если тройка $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ левая. Если же векторы компланарны, то $([\bar{a} \times \bar{b}] \cdot \bar{c}) = 0$.



$$\text{Отсюда видно, что } ([\bar{a} \times \bar{b}] \cdot \bar{c}) = (\bar{a} \cdot [\bar{b} \times \bar{c}]).$$

Поэтому можно записать смешанное произведение трех векторов \bar{a}, \bar{b} и \bar{c} просто в виде

$$(\bar{a} \bar{b} \bar{c}) = ([\bar{a} \times \bar{b}] \cdot \bar{c})$$

не указывая какие именно два вектора перемножаются векторно.

Следствие 1. Необходимым и достаточным условием компланарности трех векторов является равенство нулю их смешанного произведения.

Следствие 2. $(\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}) = -(\bar{b} \cdot \bar{a} \cdot \bar{c})$

1.1. Векторная алгебра	Для замечаний
<p data-bbox="280 250 1142 322">1.1.3.8. Выражение смешанного произведения в декартовых координатах</p> <p data-bbox="188 365 1046 403">Теорема. Если три вектора \vec{a}, \vec{b} и \vec{c} определены своими ДПК</p> $\vec{a} = \{X_1, Y_1, Z_1\}, \quad \vec{b} = \{X_2, Y_2, Z_2\}, \quad \vec{c} = \{X_3, Y_3, Z_3\},$ <p data-bbox="188 539 1181 611">то смешанное произведение $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ равно определителю, строки которого соответственно равны координатам перемножаемых векторов:</p> $(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}$ <p data-bbox="188 824 494 862">Доказательство. Т.к.</p> $[\vec{a} \times \vec{b}] = \{Y_1Z_2 - Y_2Z_1, Z_1X_2 - Z_2X_1, X_1Y_2 - X_2Y_1\}, \quad \vec{c} = \{X_3, Y_3, Z_3\},$ <p data-bbox="188 958 847 996">то скалярное произведение этих векторов равно</p> $ \begin{aligned} (\vec{a}\vec{b}\vec{c}) &= ([\vec{a} \times \vec{b}] \cdot \vec{c}) = X_3(Y_1Z_2 - Y_2Z_1) + Y_3(Z_1X_2 - X_1Z_2) + Z_3(X_1Y_2 - X_2Y_1) = \\ &= X_3 \begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} - Y_3 \begin{vmatrix} X_1 & Z_1 \\ X_2 & Z_2 \end{vmatrix} + Z_3 \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} \end{aligned} $ <p data-bbox="188 1227 260 1254">ч.т.д.</p> <p data-bbox="188 1296 1219 1368">Следствие. Необходимым и достаточным условием компланарности трех векторов</p> <p data-bbox="188 1373 1204 1496">$\vec{a} = \{X_1, Y_1, Z_1\}, \quad \vec{b} = \{X_2, Y_2, Z_2\}, \quad \vec{c} = \{X_3, Y_3, Z_3\}$ является равенство нулю определителя, строками которого являются координаты этих векторов:</p> $\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} = 0.$	

1.1.4. Уравнение линии на плоскости

Пусть на плоскости π заданы декартова прямоугольная система координат Oxy и некоторая линия L . Рассмотрим уравнение, связывающее переменные x и y

$$\Phi(x, y) = 0 \quad (1.1)$$

Определение. Уравнение (1.1) называется уравнением линии L (относительно заданной системы координат), если этому уравнению удовлетворяют координаты x и y любой точки, лежащей на линии L , и не удовлетворяют координаты x и y ни одной точки, не лежащей на линии L .

Т.е. линия L представляет собой геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют уравнению (1.1).

Примеры. 1). Уравнение $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ является уравнением окружности радиуса $r > 0$ с центром в точке $M_0(a, b)$.

2). Уравнение $x^2 + y^2 = 0$ определяет на плоскости Oxy только одну точку $(0, 0)$.

3). Уравнение $x^2 + y^2 + 4 = 0$ вообще не определяет никакого геометрического образа.

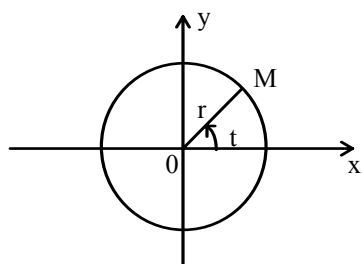
1.1.4.1. Параметрическое представление линии

Для аналитического представления линии L возможно выражать координаты x и y точек этой линии при помощи параметра t :

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad (2.1.)$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ непрерывны по параметру t в области $\{t\}$ изменения этого параметра. Исключение из двух уравнений (2.1) параметра t приводит к уравнению вида (1.1).

Пример. Найдем параметрические уравнения окружности радиуса $r > 0$ с центром в начале координат.

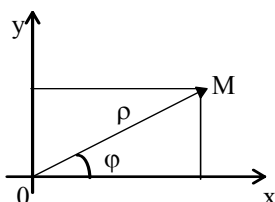


Пусть $M(x, y)$ - любая точка этой окружности, а t - угол между радиусом-вектором \overline{OM} и осью Ox , отсчитываемой против часовой стрелки. Тогда $x = r \cos t$, $y = r \sin t$ (2.2).

Эти уравнения представляют собой параметрические уравнения нашей окружности. Чтобы точка $M(x, y)$ один раз обошла окружность, t должно изменяться в пределах: $0 \leq t < 2\pi$. Для исключения параметра t из уравнения (2.2), нужно возвести в квадрат и сложить уравнения (2.2); получим $x^2 + y^2 = r^2$.

1.1.4.2. Уравнение линии в полярных координатах

Введем на плоскости полярные координаты. выберем на плоскости точку O (полюс) и выходящий из нее луч Ox ; укажем единицу масштаба.



Полярными координатами точки M называются два числа: ρ (полярный радиус) равное расстоянию точки M от полюса O и φ (полярный угол)- угол, на который нужно повернуть против часовой стрелки луч Ox до совмещения с лучом OM . Точку M обозначают символом $M(\rho, \varphi)$ и обычно считают, что $0 \leq \rho < +\infty$, $0 \leq \varphi < 2\pi$.

Если начало декартовой прямоугольной системы находится в полюсе, а ось абсцисс совпадает с полярной осью, то очевидна связь между полярными координатами точки $M(\rho, \varphi)$ и ее декартовыми координатами $M(x, y)$:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi \quad (3.1)$$

Возводя эти уравнения в квадрат и складывая их, получим $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. Разделив одно на другое, получим, что $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$, а также используя знаки x и y , определим четверть, в которой находится точка M . Т.е., зная декартовы координаты точки x и y можно найти ее полярные координаты.

Если $\Phi(x, y) = 0$ представляет собой уравнение линии L в декартовой прямоугольной системе координат Oxy , то достаточно подставить на место x и y их выражения в полярных координатах (3.1): получим $\Phi_1(\rho, \varphi) = 0$, где использовали обозначение $\Phi_1(\rho, \varphi) = \Phi(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)$.

1.1.4.3. Пересечение двух линий

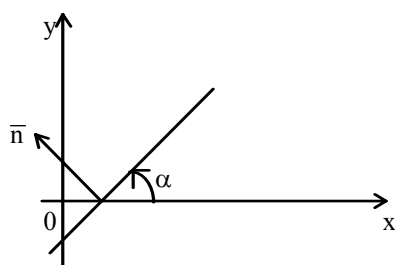
Задача о нахождении точек пересечения двух линий L_1 и L_2 , заданных уравнениями $\Phi_1(x, y) = 0$ и $\Phi_2(x, y) = 0$, состоит в нахождении координат точек, удовлетворяющих каждому из этих уравнений.

Т.е. нужно решить систему уравнений

$$\begin{cases} \Phi_1(x, y) = 0 \\ \Phi_2(x, y) = 0 \end{cases}$$

1.1. Векторная алгебра	Для замечаний
<p>Если эта система не имеет решений, то линии L_1 и L_2 не пересекаются.</p> <p>Пример. Найти точки пересечения окружностей $x^2 + y^2 - 1 = 0$ и $(x-1)^2 + y^2 - 2 = 0$.</p> <p>Решаем систему уравнений</p> $\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ (x-1)^2 + y^2 - 2 = 0 \end{cases}$ <p>Вычитая из первого уравнения второе, получим $x^2 - (x-1)^2 + 1 = 0$ или $2x = 0$, $x = 0$.</p> <p>Отсюда найдем, что $y = \pm 1$. Мы получили две точки пересечения $M_1(0,1)$ и $M_2(0,-1)$.</p> <p>1.1.4.4. Уравнение поверхности и уравнение линии в пространстве</p> <p>Пусть нам заданы декартова прямоугольная система координат Охуз и некоторая поверхность S.</p> <p>Определение 1. Уравнение $\Phi(x, y, z) = 0$ называется уравнением поверхности S (относительно заданной системы координат), если этому уравнению удовлетворяют координаты x, y, z любой точки, лежащей на поверхности S, и не удовлетворяют координаты x, y, z ни одной точки, не лежащей на поверхности S.</p> <p>Пример. Уравнение сферы радиуса $R > 0$ с центром в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ в декартовой прямоугольной системе координат Охуз имеет вид</p> $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2.$ <p>Действительно, точка $M(x, y, z)$ лежит на указанной сфере тогда и только тогда, когда квадрат расстояния между точками $M(x, y, z)$ и $M_0(x_0, y_0, z_0)$ равен R^2.</p> $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2.$ <p>Определение 2. Линия в пространстве есть геометрическое место точек, лежащих одновременно на двух поверхностях.</p> <p>Таким образом линия в пространстве рассматривается как линия пересечения двух поверхностей.</p> <p>Если $\Phi_1(x, y, z) = 0$ и $\Phi_2(x, y, z) = 0$ - уравнения двух поверхностей, пересечением которых является данная линия L, то два уравнения</p> $\begin{cases} \Phi_1(x, y, z) = 0 \\ \Phi_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$ <p>совместно определяют линию L.</p> <p>Как и в случае плоской линии (п.2) можно линию в пространстве представить параметрически, задав координаты x, y, z любой точки данной линии как непрерывные функции некоторого параметра t:</p>	

1.1. Векторная алгебра	Для замечаний
<p> $x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \chi(t),$ определенные в некотором промежутке изменения параметра $\{t\}$. Для отыскания точек пересечения поверхностей и линий следует решить совместно уравнения, определяющие указанные линии и поверхности. </p> <p style="text-align: center;">1.1.5. Различные виды уравнений прямой на плоскости</p> <p style="text-align: center;">1.1.5.1. Общее уравнение прямой</p> <p> Уравнение $Ax + By + C = 0 \quad (6.1)$ с произвольными коэффициентами A, B и C такими, что A и B не равны одновременно нулю, называется общим уравнением прямой L. </p> <p> Уравнение (6.1) имеет хотя бы одно решение x_0, y_0, т.е. существует точка $M_0(x_0, y_0)$, координаты которой удовлетворяют уравнению (6.1): $Ax_0 + By_0 + C = 0 \quad (6.2)$ </p> <p> Вычитая из уравнения (6.1) тождество (6.2), получаем уравнение $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0, \quad (6.3)$ эквивалентное уравнению (6.1). </p> <p> Если точка $M(x, y)$ лежит на прямой L, то ее координаты удовлетворяют уравнению (6.3), векторы $\vec{n} = \{A, B\}$, перпендикулярный к прямой L и $M_0M = \{x - x_0, y - y_0\}$ перпендикулярны и их скалярное произведение $A(x - x_0) + B(y - y_0)$ равно нулю. Если же точка $M(x, y)$ не лежит на прямой L, то ее координаты не удовлетворяют уравнению (6.3). </p> <p> Итак, уравнение (6.3) определяет прямую L, проходящую через точку $M_0(x_0, y_0)$ и перпендикулярную вектору $\vec{n} = \{A, B\}$. Этот вектор будем называть нормальным вектором прямой (6.1). </p> <p> Замечание. Если два уравнения $Ax + By + C = 0$ и $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ определяют одну и ту же прямую, то существует такое вещественное число t, что справедливы равенства $A_1 = At, B_1 = Bt, C_1 = Ct$. </p> <p style="text-align: center;">1.1.5.2. Уравнение прямой с угловым коэффициентом</p>	



Пусть прямая не параллельна оси Ox , тогда в уравнении (6.1) коэффициент $B \neq 0$. Углом наклона этой прямой к оси Ox назовем угол $\alpha > 0$, образованный прямой с положительным направлением оси Ox .

Если прямая параллельна оси Ox , то угол наклона α будем считать равным нулю.

Угловым коэффициентом прямой назовем тангенс угла наклона этой прямой к оси Ox , $k = \operatorname{tg} \alpha$.

Для прямой, параллельной оси Ox , угловой коэффициент равен 0, а для прямой, перпендикулярной оси Ox , угловой коэффициент не существует ($k = \infty$).

Из уравнения (6.3) и того, что $\vec{n} = \{A, B\}$ - нормальный вектор прямой следует, что $\operatorname{tg} \alpha = k = -\frac{A}{B}$.

Отсюда получим уравнение прямой с угловым коэффициентом в виде $y - y_0 = k(x - x_0)$. Если обозначить $b = y_0 - kx_0$, то последнее уравнение примет вид

$$y = kx + b \quad (6.4)$$

Это уравнение и называется уравнением прямой с угловым коэффициентом. Здесь k - угловой коэффициент данной прямой, а b - отрезок, отсекаемый данной прямой на оси Oy , начиная от начала координат (при $x = 0, y = 0$).

1.1.5.3. Уравнение прямой в отрезках

Рассмотрим **полное** (все коэффициенты A, B и C отличны от нуля) уравнение прямой

$$Ax + By + C = 0.$$

Его можно записать в виде (т.к. $A \neq 0, B \neq 0, C \neq 0$)

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1$$

и затем положить $a = -\frac{C}{A}$, $b = -\frac{C}{B}$. Получим $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

Последнее уравнение называется уравнением прямой “в отрезках”. Числа a и b равны соответственно величинам отрезков, отсекаемых прямой на осях Ox и Oy соответственно.

1.1.5.4. Каноническое уравнение прямой

Любой ненулевой вектор, параллельный данной прямой, назовем **направляющим вектором** этой прямой.

Найдем уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_0(x_0, y_0)$ и имеющей заданный направляющий вектор $\vec{q} = \{l, m\}$.

Точка $M(x, y)$ лежит на указанной прямой тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0\}$ и $\vec{q} = \{l, m\}$ коллинеарны, т.е. когда их координаты пропорциональны

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} \quad (6.5)$$

Это уравнение обычно называют каноническим уравнением прямой.

В уравнении (6.5) одно из чисел l или m может равняться нулю, т.к. это есть координаты вектора. например, уравнение оси Ox запишется так $\frac{x - 0}{1} = \frac{y - 0}{0}$.

1.1.5.5. Параметрические уравнения прямой

Примем за параметр t величину, стоящую в правой и левой частях соотношения (6.5), $-\infty < t < \infty$.

Получим $x - x_0 = lt$, $y - y_0 = mt$ или

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \end{cases}$$

Это и есть искомые **параметрические уравнения прямой**.

1.1.5.6. Угол между двумя прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых

1). Пусть прямые L_1 и L_2 заданы общими уравнениями

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad \text{и} \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Задача об определении угла между прямыми сводится к определению угла между нормальными векторами $\vec{n}_1 = \{A_1, B_1\}$ и $\vec{n}_2 = \{A_2, B_2\}$ этих прямых:

$$\cos \alpha = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \quad (6.6)$$

Условие **параллельности** прямых L_1 и L_2 эквивалентно коллинеарности их нормальных векторов \vec{n}_1 и \vec{n}_2 :

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}.$$

Условие перпендикулярности прямых L_1 и L_2 получаем из формулы (6.6) при $\cos \alpha = 0$:

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0.$$

2). Если прямые L_1 и L_2 заданы каноническими уравнениями

$$\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} \quad \text{и} \quad \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2},$$

то рассматривая их направляющие векторы $\vec{q}_1 = \{l_1, m_1\}$ и $\vec{q}_2 = \{l_2, m_2\}$, аналогично случаю 1). имеем:

$$\cos \varphi = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2} \sqrt{l_2^2 + m_2^2}} \quad (6.7)$$

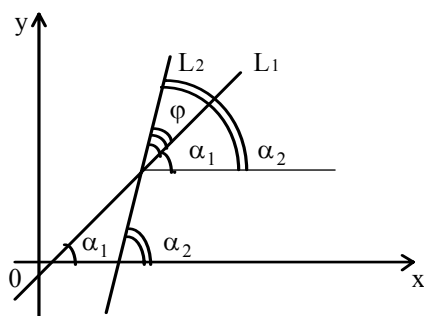
Условие **параллельности** прямых L_1 и L_2 :

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2}.$$

Условие **перпендикулярности** прямых L_1 и L_2 :

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 = 0$$

3). Пусть прямые L_1 и L_2 заданы уравнениями с угловым коэффициентом $y = k_1 x + b_1$ и $y = k_2 x + b_2$.



Здесь α_1 и α_2 - углы наклона прямых L_1 и L_2 к оси Ox , а φ - один из углов между этими прямыми. Из рисунка видно, что $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$.

Отсюда

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{1 + \operatorname{tg} \alpha_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}.$$

Т.е. угол между прямыми L_1 и L_2 определяется по формуле:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \quad (6.8)$$

Если в этой формуле поменять местами k_1 и k_2 , то формула определит нам угол между прямыми, смежный к прежнему углу. Т.к. эти два угла в сумме равны π и их тангенсы отличаются только знаком.

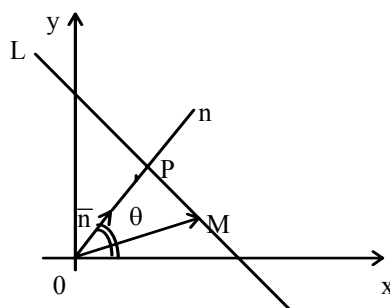
Прямые **параллельны**, если $\operatorname{tg} \varphi = 0$, т.е. $k_1 = k_2$.

Условие **перпендикулярности** прямых L_1 и L_2 получим из формулы (6.8), т.к. $\operatorname{tg} \varphi$ не существует при $k_1 k_2 + 1 = 0$.

Условие перпендикулярности прямых L_1 и L_2 запишем в виде:

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}.$$

1.1.5.7. Нормированное уравнение прямой. Отклонение точки от прямой



Рассмотрим произвольную прямую L . Через начало координат O проведем прямую n , перпендикулярную L , и обозначим через P точку пересечения этих прямых.

На прямой n возьмем единичный вектор \bar{n} , направление которого совпадает с направлением отрезка \overline{OP} (если точки O и P совпадают, то направление вектора \bar{n} выбираем произвольно).

Выразим уравнение прямой L через два параметра:

- 1) длину p отрезка \overline{OP} и
- 2) угол θ между вектором \bar{n} и осью Ox .

Вектор \bar{n} - единичный, следовательно его можно записать в виде

$$\bar{n} = \{\cos \theta, \sin \theta\} \quad (6.9)$$

Точка $M(x, y)$ лежит на прямой L тогда и только тогда, когда проекция вектора \overline{OM} на ось, определяемую вектором \bar{n} , равна p :

$$\text{пр}_{\bar{n}} \overline{OM} = p. \quad (6.10)$$

В силу определения 2 скалярного произведения, учитывая, что $|\bar{n}| = 1$ имеем:

$$\text{пр}_{\bar{n}} \overline{OM} = (\bar{n} \cdot \overline{OM}). \quad (6.11)$$

Учитывая, что $\overline{OM} = \{x, y\}$ и равенство (6.9), получим

$$(\bar{n} \cdot \overline{OM}) = x \cos \theta + y \sin \theta \quad (6.12)$$

Из соотношений (6.9), (6.10) и (6.11) получаем, что точка $M(x, y)$ лежит на прямой L тогда и только тогда, когда ее координаты удовлетворяют уравнению

$$x \cos \theta + y \sin \theta - p = 0 \quad (6.13)$$

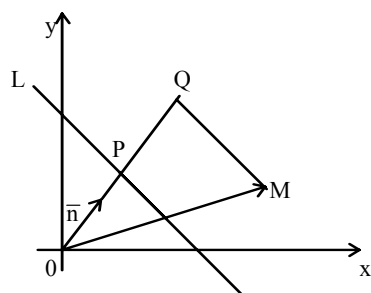
Это уравнение называется **нормированным уравнением прямой**.

Пусть число d обозначает расстояние от точки M до прямой L .

Определение. Отклонением δ точки M от прямой L называется число $+d$ в случае, когда точка M и начало координат O лежат по разные стороны от прямой L , и число $-d$ в случае, когда точки M и O лежат по одну сторону от прямой L . Если же начало координат O лежит на прямой L , положим отклонение равным $+d$ в случае, когда точка M лежит по ту сторону от прямой L , куда направлен вектор \bar{n} , и равным $-d$ в противоположном случае.

Теорема. Геометрический смысл левой части уравнения (6.13) состоит в том, что левая часть этого уравнения равна отклонению точки $M(x, y)$ от прямой L , определяемой уравнением (6.13).

Доказательство.



Спроектируем точку M на ось, определяемую вектором \vec{n} , обозначим эту проекцию Q . Отклонение δ точки M от прямой L равно PQ , где PQ обозначает величину направленного отрезка \overline{PQ} оси, определяемой вектором \vec{n} .

Из рисунка видно, что

$$\delta = PQ = OQ - OP = OQ - p, \quad (6.14)$$

но $OQ = \text{pr}_{\vec{n}} \overline{OM}$, а в силу (6.11) и (6.12) получаем

$$OQ = x \cos \theta + y \sin \theta.$$

Из последнего равенства и (6.14) имеем

$$\delta = x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta - p.$$

Отсюда получаем возможность находить расстояние от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой L :

$$d = |x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta - p|.$$

1.1.5.8. Приведение общего уравнения прямой к нормированному виду

Пусть нам дано общее уравнение прямой $Ax + By + C = 0$. Требуется привести его к виду (6.13).

Т.к. эти уравнения должны определять одну и ту же прямую, то найдется число t такое, что $tA = \cos \theta$, $tB = \sin \theta$, $tC = -p$.

Возводя в квадрат два первых равенства и складывая их, получим

$$t^2(A^2 + B^2) = 1 \text{ или } t = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Т.к. по условию задачи $p \geq 0$, то из равенства $tC = -p$ заключаем, что знак t противоположен знаку C .

Таким образом, для приведения общего уравнения прямой $Ax + By + C = 0$ к нормированному виду следует умножить его на нормирующий множитель $t = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, знак которого противоположен знаку C .

С.

Отсюда очевидна формула для вычисления расстояния d от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

1.2. Кривые второго порядка

Будем рассматривать линии, уравнения которых в декартовой системе координат являются алгебраическими уравнениями второй степени, то есть будем рассматривать алгебраические кривые второго порядка. Будут рассмотрены три вида линий второго порядка: **эллипсы, гиперболы и параболы**. Основной целью является ознакомление с важнейшими геометрическими свойствами указанных линий.

1.2.1. Эллипс

1.2.1.1. Определение эллипса и вывод его канонического уравнения

Эллипсом называется геометрическое место точек на плоскости, для которых сумма расстояний от двух фиксированных точек плоскости, называемых фокусами, есть постоянная величина.

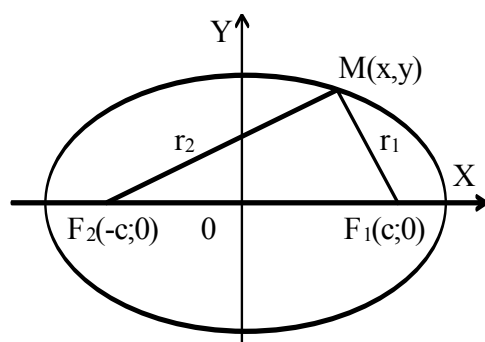


Рис.1

Для вывода уравнения эллипса выберем систему координат XOY так, чтобы фокусы эллипса F_1 и F_2 лежали на оси абсцисс, а начало координат делило бы расстояние между фокусами пополам (Рис.1). Обозначим $F_1F_2=2c$. Тогда координаты фокуса F_1 будут $(c;0)$, а координаты фокуса F_2 будут $(-c;0)$.

Возьмем произвольную точку $M(x,y)$, лежащую на эллипсе. Соединим точку M с фокусами F_1F_2 . Длины отрезков MF_1 и MF_2 обозначим соответственно через r_1 r_2 : $MF_1=r_1$; $MF_2=r_2$. Числа r_1 и r_2 называются фокальными радиусами точки M эллипса. Учитывая, что сумма r_1 и r_2 есть величина постоянная (это следует из определения эллипса) обозначим: $r_1+r_2=2a$, следует $2a>2c$ или $a>c$. В противном случае либо не существует точек, удовлетворяющих поставленным требованиям, либо совокупность этих точек сводится к отрезку F_1F_2 .

На основании определения эллипса как геометрического места точек, можно утверждать, что для всех точек эллипса, и только для них, должно выполняться равенство:

$$r_1+r_2=2a \quad (1)$$

Определим r_1 и r_2 по формулам расстояния между двумя точками:

$$r_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \quad (2)$$

$$r_2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \quad (3)$$

Поставляя найденные значения r_1 и r_2 в уравнение (1), получим:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a \quad (4)$$

Уравнение (4) является **уравнением эллипса**. Однако полученная форма уравнения является неудобной для пользования, поэтому обычно уравнение эллипса дается в ином виде.

Преобразуем уравнение (4). Пусть $M(x, y)$ - точка эллипса, то есть равенство (4) имеет место. Перенесем первый радикал в правую часть и затем возведем обе части в квадрат:

$$(x + c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + (x - c)^2 + y^2, \quad (5)$$

или

$$4cx = 4a^2 - 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2};$$

выделим отсюда оставшийся радикал:

$$a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = a^2 - cx \quad (6)$$

Возведя обе части последнего равенства в квадрат, получим:

$$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 \quad (7)$$

откуда

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \quad (8)$$

Так как по условию $a > c$, то $a^2 - c^2 > 0$. Обозначим разность $a^2 - c^2$, как величину положительную, через $b^2 = a^2 - c^2$. Очевидно, что $b^2 < a^2$

Подставляя $b^2 = a^2 - c^2$ в равенство (8), получим:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

и разделив последнее равенство на a^2b^2 , окончательно получим:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (9)$$

Пусть теперь x и y - любые действительные числа. Рассмотрим уравнение (9). По доказанному, всякая пара чисел x, y , удовлетворяющая уравнению (4), удовлетворяет и уравнению (9). Можно доказать, что и наоборот, всякая пара чисел x, y , удовлетворяющая уравнению (9) удовлетворяет уравнению (4). Произведя предыдущие выкладки в обратном порядке, мы из равенства (9) получим сначала равенство (8), затем равенство (7), которое сейчас запишем в виде:

$$a^2((x - c)^2 + y^2) = (a^2 - cx)^2.$$

Извлекая корень из обеих частей этого равенства, получим

$$a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = \pm(a^2 - cx) \quad (10)$$

Заметим теперь, что в силу равенства (9) должно быть $|x| \leq a$. Так как $|x| \leq a$ и $c < a$, то $|cx| < a$, следовательно, число $a^2 - cx$ положительно. Поэтому в правой части равенства (10) необходимо взять знак плюс. Так мы приходим к равенству (6), после чего получим равенство (5); последнее мы напишем в виде:

$$(x + c)^2 + y^2 = \left[2a - \sqrt{(x - c)^2 + y^2}\right]^2.$$

Отсюда

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm \left(2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right). \quad (11)$$

Исследуем величину

$$(x-c)^2 + y^2 = x^2 - 2cx + c^2 + y^2 \quad (12)$$

В силу равенства (9) имеем $x^2 \leq a^2$. Далее $|cx| < a^2$, следовательно, число $-2cx$ по абсолютному значению меньше $2a^2$. Наконец, также из равенства (9) заключаем, что $y^2 \leq b^2$, то есть $y^2 \leq a^2 - c^2$ или $c^2 + y^2 \leq a^2$. В силу этих неравенств вся сумма в правой части (12) меньше $4a^2$, значит, корень из этой суммы меньше $2a$. Поэтому величина, стоящая внутри скобок в правой части (11), положительна, следовательно, в равенстве (11) перед скобками нужно брать знак плюс. Таким образом мы получаем:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

откуда сразу следует равенство (4).

Итак, уравнение (4) выводится из уравнения (9), как и уравнение (9) выводится из уравнения (4). Тем самым доказано, что уравнение (9) есть уравнение данного эллипса, так как оно эквивалентно уравнению (4).

Уравнение (9) называется каноническим уравнением эллипса, это уравнение второй степени; таким образом, эллипс есть линия второго порядка.

1.2.1.2. Исследование формы эллипса

Приступим к изучению формы эллипса. В уравнении эллипса содержатся только члены с четными степенями текущих координат. Отсюда следует важная геометрическая особенность: эллипс, определяемый уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

симметричен как относительно оси Ox , так и относительно оси Oy . Другими словами, если точка $M_0(x_0; y_0)$ лежит на эллипсе, то точки $M_1(x_0; -y_0)$, $M_3(-x_0; y_0)$, $M_4(-x_0; -y_0)$, симметричные точке M_0 соответственно относительно оси Ox , оси Oy и начала O , также лежат на эллипсе. Это позволяет изучение формы и построения эллипса ограничиться первым квадрантом, а затем получившуюся кривую с помощью зеркального отражения построить во всех четырех квадрантах. В случае канонического задания эллипса координатные оси являются осями симметрии эллипса. Точка пересечения осей симметрии называется центром эллипса.

Из канонического уравнения эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ выразим y через x :

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Так как изучение формы эллипса достаточно провести в первом квадранте, то в этом равенстве надо взять лишь знак плюс, то есть

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

и полагать, что $x \geq 0$.

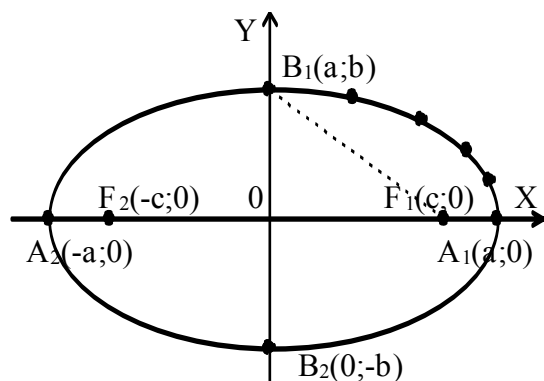


Рис.2

- 1) При $x=0$ имеем $y=b$. Следовательно, точка $B_1(0;b)$ лежит на эллипсе.
- 2) При возрастании x от 0 до a y убывает.
- 3) При $x=a$ имеем $y=0$. Следовательно, точка $A_1(a;0)$ лежит на эллипсе.
- 4) При $x>a$ получаем мнимые значения y . Следовательно, точек эллипса, у которых $x>a$, не существует.

Дадим переменной x несколько значений, $0 < x < a$, и, получив соответствующие значения y , $b > y > 0$, построим ряд точек, принадлежащих эллипсу. Учитывая высказанные ранее соображения и соединив найденные точки эллипса плавной линией, получим дугу эллипса B_1A_1 в первом квадранте. Произведя зеркальное отображение дуги B_1A_1 относительно координатных осей, получим весь эллипс. Отсюда следует, что эллипс представляет собой замкнутую кривую, с двумя взаимно перпендикулярными осями симметрии.

Отрезок A_2A_1 и его длина $2a$ называется **большой осью** эллипса, отрезок OA_1 и его длина a называется **большой полуосью** эллипса. Отрезок B_2B_1 и его длина $2b$ называются **малой осью** эллипса; отрезок OB_1 и его длина b называется **малой полуосью** эллипса. Длина отрезка F_2F_1 , то есть число $2c$, называется **фокусным расстоянием**. Точки пересечения эллипса с его осями A_1, A_2, B_1, B_2 называются **вершинами** эллипса, а точка пересечения его осей называется **центром** эллипса.

Примечание. Если $a=b$, то уравнение эллипса имеет вид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ или $x^2 + y^2 = a^2$. Это уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом, равным a . Можно сказать, что окружность является частным случаем эллипса.

1.2.1.3. Эксцентриситет и фокальные радиусы эллипса

Эксцентриситетом эллипса называется отношение фокусного расстояния к длине большой оси эллипса; обозначив эксцентриситет буквой ε , получим:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}.$$

1.2. Кривые второго порядка

Для замечаний

Так как $c < a$, то $\varepsilon < 1$, то есть эксцентриситет каждого эллипса меньше единицы.

Учитывая, что $c^2 = a^2 - b^2$, поэтому

$$\varepsilon = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2;$$

отсюда

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} \quad \text{и} \quad \frac{b}{a} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}.$$

Следовательно, эксцентриситет определяется отношением осей эллипса, а отношение осей, в свою очередь, определяется эксцентриситетом. Таким образом, эксцентриситет характеризует форму эллипса. Чем больше эксцентриситет к единице, тем меньше $1 - \varepsilon^2$, тем меньше, следовательно, отношение $\frac{b}{a}$; значит, чем больше эксцентриситет, тем более эллипс вытя-

нут. Наоборот, чем больше отношение $\frac{b}{a}$, тем меньше эксцентриситет и эллипс является менее вытянутым. В предельном случае, когда $b = a$, то есть когда эллипс обращается в окружность, его эксцентриситет обращается в нуль.

Пусть $M(x; y)$ - произвольная точка, лежащая на данном эллипсе. Если r_1 и r_2 - фокальные радиусы этой точки, то

$$r_1 = \sqrt{(x - c)^2 + y^2};$$

$$r_2 = \sqrt{(x + c)^2 + y^2};$$

из равенства (6) п. 1 следует:

$$r_1 = a - \frac{c}{a}x;$$

$$r_2 = a + \frac{c}{a}x;$$

или, так как $\varepsilon = \frac{c}{a}$, то:

$$r_1 = a - \varepsilon x;$$

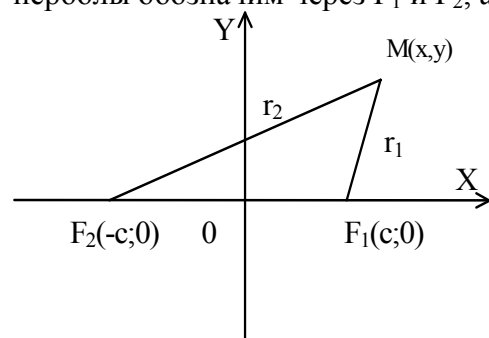
$$r_2 = a + \varepsilon x.$$

В заключение отметим: из определения эллипса непосредственно вытекает способ построения его при помощи нити: если концы нерастяжимой нити длины $2a$ закрепить в фокусах F_1 и F_2 и натянуть нить острием карандаша, то при движении острия оно будет вычерчивать эллипс с фокусами F_1 и F_2 и суммой фокальных радиусов $2a$.

1.2.2. Гипербола

1.2.2.1. Определение гиперболы и вывод ее канонического уравнения

Гиперболой называется геометрическое место точек на плоскости, для которых разность расстояний от двух фиксированных точек плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная; указанная разность берется по абсолютному значению. Кроме того, требуется, чтобы разность была меньше расстояния между фокусами и отлична от нуля. Фокусы гиперболы обозначим через F_1 и F_2 , а расстояние между ними - через $2c$.



Для вывода уравнения гиперболы возьмем систему координат $ХОУ$ так, чтобы фокусы гиперболы F_1 и F_2 лежали на оси абсцисс, а начало координат делило отрезок F_1F_2 ($F_1F_2=2c$) пополам. Тогда координаты фокуса F_1 будут $(c;0)$, а фокуса F_2 - числа $(-c;0)$.

Рис.3

Возьмем точку $M(x;y)$, лежащую на гиперболе, и проведем отрезки MF_1 и MF_2 . Длину отрезка MF_1 обозначим r_1 , а длину отрезка MF_2 - через r_2 :

$$MF_1 = r_1; MF_2 = r_2$$

Числа r_1 и r_2 называются **фокальными радиусами** точки M гиперболы. Обозначив разность фокальных радиусов через $2a$ имеем $2a < 2c$ или $a < c$.

На основании определения гиперболы как геометрического места точек на плоскости, можно утверждать, что для всех точек гиперболы и только для них, должно выполняться равенство:

$$r_1 - r_2 = \pm 2a \quad (1)$$

По формуле расстояния между двумя точками имеем:

$$r_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$r_2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

Подставляя найденные значения r_1 и r_2 в уравнение (1), получим:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a \quad (2)$$

Уравнение (2) является уравнением гиперболы. Приведем уравнение (2) к более удобному виду:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \pm 2a$$

Возведем обе части в квадрат:

$$(x+c)^2 + y^2 = (x-c)^2 + y^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + 4a^2$$

1.2. Кривые второго порядка	Для замечаний
<p>или</p> $4cx = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \quad (3)$ <p>Возводя в квадрат обе части этого равенства, найдем:</p> $c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2$ <p>то есть</p> $(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2) \quad (4)$ <p>Так как по условию $a < c$, то $c^2 - a^2 > 0$, обозначая $c^2 - a^2 = b^2$ (3). Подставив в равенство (4) $b^2 = c^2 - a^2$, а затем деля все его члены на a^2b^2, получим:</p> $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ <p>то есть</p> $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (6)$ <p>Уравнению (6) будут удовлетворять координаты каждой точки, лежащей на гиперболе. Можно показать, что координаты точек, не принадлежащих гиперболе, уравнению (6) не удовлетворяют. Следовательно, уравнение (6) является уравнением рассматриваемой гиперболы. Уравнение (6) называется каноническим уравнением гиперболы.</p> <p style="text-align: center;">1.2.2.2. Исследование формы гиперболы</p> <p>Займемся исследованием гиперболы, определяемой уравнением</p> $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ <p>Прежде всего заметим, что в уравнение гиперболы обе координаты входят только в четных степенях. Следовательно, если некоторая точка $M_0(x_0; y_0)$ лежит на гиперболе, то на гиперболе будут лежать также точки $M_1(x_0; -y_0)$; $M_2(-x_0; y_0)$; $M_3(-x_0; -y_0)$. Отсюда следует, что гипербола является кривой, симметричной относительно обеих координатных осей и начала координат. Это позволяет изучение формы гиперболы ограничить первым квадрантом, а затем получившуюся кривую с помощью зеркального отображения построить во всех четырех квадрантах.</p> <p>В случае канонического задания гиперболы координатные оси являются осями симметрии гиперболы. Таким образом, гипербола, как и эллипс, - центральная кривая.</p> <p>От начала координат на оси абсцисс вправо и влево отложим отрезок, длина которого равна a, и построим точки $A_1(a; 0)$ и $A_2(-a; 0)$, а на оси ординат вверх и вниз отложим отрезок длины b и построим точки $B_1(0; b)$ и $B_2(0; -b)$. Затем через точки A_1, A_2, B_1, B_2 проведем прямые, параллельные координатным осям, до их взаимного пересечения и таким образом построим прямоугольник (Рис. 4), который назовем основным прямоугольником гиперболы.</p>	

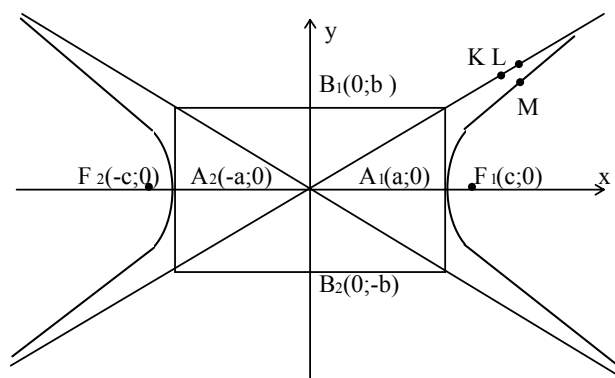


Рис. 4

Раствором циркуля, равным расстоянию A_1B_1 , из начала координат как из центра, сделаем засечки на оси абсцисс. При этом мы найдем точки F_1 и F_2 . Действительно, из прямоугольного треугольника OA_1B_1 : $OA_1=a$, $OB_1=b$. Следовательно, на основании равенства

$$a^2 + b^2 = c^2, \text{ то есть } B_1A_1=c.$$

Определим теперь y из канонического уравнения гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$:

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} \quad (1)$$

Так как исследование гиперболы будет вестись в первом квадранте, то в этом равенстве надо перед корнем взять знак плюс:

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} \quad (2)$$

и рассматривать $x \geq 0$.

- 1) Если $0 \leq x < a$, то y получает мнимые значения. Следовательно, точек гиперболы с абсциссами x , $0 \leq x < a$ не существует.
- 2) Если $x=a$, то $y=0$. Следовательно, точка $A_1(a;0)$ принадлежит гиперболе.
- 3) Если $x>a$, то $y>0$, причем при возрастании x возрастает и y .

Когда x неограниченно возрастает, y также неограниченно возрастает. Следовательно, при неограниченном возрастании x ветвь гиперболы уходит в бесконечность.

Отсюда следует, что гипербола представляет собой кривую, состоящую из двух бесконечных ветвей (для правой ветви $r_1 - r_2 = 2a$, для левой $r_1 - r_2 = +2a$) с двумя взаимно перпендикулярными осями симметрии, причем ни одной точки гиперболы не находится внутри основного прямоугольника.

Отрезок A_2A_1 и его длина $2a$ называются **действительной осью** гиперболы, отрезок OA_1 и его длина a называются **действительной полуосью** гиперболы. Отрезок B_2B_1 и его длина $2b$ называются **мнимой осью** гиперболы; отрезок OB_1 и его длина b называются **мнимой полуосью** гиперболы. Длина $2c$ отрезка F_2F_1 называется **фокусным расстоянием**. Точки пересечения гиперболы с действительной осью A_1 и A_2 называются **вершинами** гиперболы.

Асимптоты гиперболы

Пусть Γ - какая-нибудь линия, M - переменная точка на ней, a - некоторая прямая. Если возможно такое движение точки M по линии Γ , что:

- 1) точка M уходит в бесконечность;
- 2) при этом расстояние от точки M до прямой a стремится к нулю, - то говорят, что линия Γ асимптотически приближается к прямой a . Прямая a в таком случае называется асимптотой линии Γ .

Асимптотами гиперболы называются прямые, имеющие уравнения:

$$y = \frac{b}{a}x \text{ и } y = -\frac{b}{a}x \quad (3)$$

Эти прямые являются диагоналями основного прямоугольника. Построим гиперболу $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ и рассмотрим какую-нибудь точку $M(x; y)$, лежащую на гиперболе в первом квадранте.

Выясним, как в первом квадранте по мере возрастания x будет изменяться расстояние от точки M гиперболы до асимптоты $y = \frac{b}{a}x$. Обозначим через N точку асимптоты с абсциссой x : $N(x; Y)$, где $Y = \frac{b}{a}x$. Тогда

$$Y - y = \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = \frac{b}{a}(x - \sqrt{x^2 - a^2}) \quad (4)$$

Так как $a \leq x$, то в скобках первое слагаемое всегда больше второго, следовательно, $Y - y > 0$, а это означает, что при одной и той же абсциссе точка гиперболы лежит под соответствующей точкой асимптоты.

Преобразуя неравенство (4):

$$MN = Y - y = \frac{b}{a}(x - \sqrt{x^2 - a^2}) = \frac{b}{a} \frac{a^2}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}, \quad (5)$$

убеждаемся, что длина отрезка MN по мере возрастания x уменьшается, и когда x неограниченно растет, то MN стремится к нулю. Так как MN больше расстояния MK от точки M до асимптоты, то при этом MK и подавно стремится к нулю.

Аналогичное рассуждение можно провести в любом квадранте.

Итак, прямые $y = \pm \frac{b}{a}x$ в смысле определения являются асимптотами гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

При построении гиперболы обычно строят основной прямоугольник и проводят асимптоты, так как они позволяют точнее вычерчивать гиперболу.

Равнобочная гипербола

Возьмем каноническое уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

В случае, когда $a=b$, уравнение гиперболы имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$$

или

$$x^2 - y^2 = a^2 \quad (6)$$

Гипербола, у которой полуоси a и b равны, называется **равнобочной гиперболой**. Уравнение (6) называется уравнением равнобочной гиперболы. Так как основной прямоугольник этой гиперболы является квадратом, то асимптоты равнобочной гиперболы будут перпендикулярны друг другу (Рис. 5)

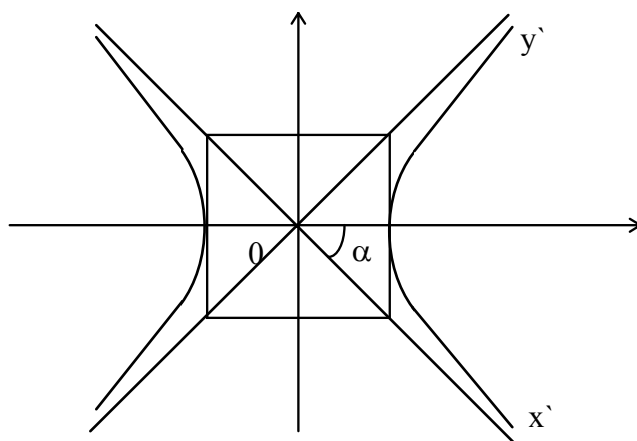


Рис. 5

Сопряженная гипербола

Рассмотрим уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \quad (7)$$

Представим уравнение (7) в следующем виде:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \quad (8)$$

Очевидно, что уравнение (8) представляет собой уравнение гиперболы, у которой действительной осью является ось ординат, а мнимой - ось абсцисс.

Построим основной прямоугольник, проведем асимптоты и построим гиперболу (7). Далее в той же системе координат построим (пунктиром) (Рис. 6) гиперболу

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

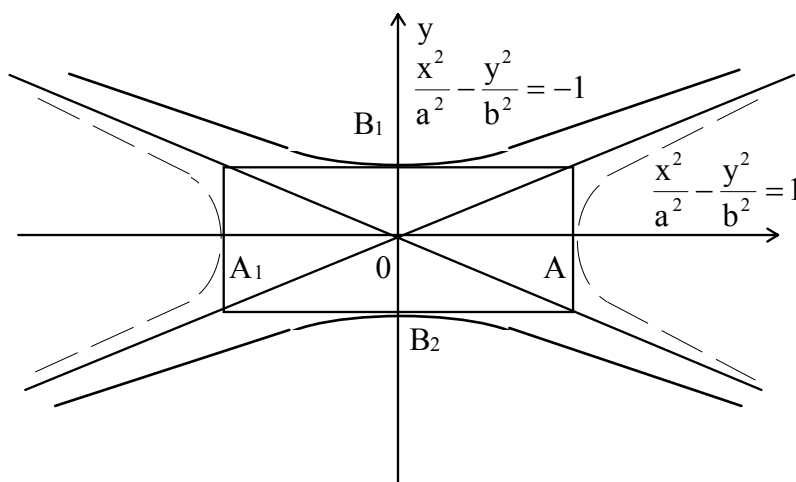


Рис. 6

Очевидно, что гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ и $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ имеют общие асимптоты. Такие гиперболы называются **сопряженными**.

Выведем теперь уравнение гиперболы, асимптотами которой служат оси координат. Возьмем уравнение равнобочной гиперболы $x^2 - y^2 = a^2$ и рассмотрим уравнение этой гиперболы в новой системе координат $X'OY'$, полученной из старой поворотом осей координат на угол $\alpha = -\frac{\pi}{4}$ (Рис. 2).

Используя для этого формулы поворота осей координат:

$$x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha;$$

$$y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha,$$

подставим значения x, y в уравнение гиперболы:

$$x^2 - y^2 = a^2,$$

получим:

$$\left[x' \cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) - y' \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right]^2 - \left[x' \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) + y' \cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right]^2 = a^2$$

$$\frac{1}{2} (x' + y')^2 - \frac{1}{2} (-x' + y')^2 = a^2$$

$$x' y' = \frac{a^2}{2} \quad (9)$$

Обозначая $\frac{a^2}{2} = c$, получим $x' y' = c$.

Уравнение равнобочной гиперболы, для которой координатные оси OX и OY являются асимптотами, будет иметь вид:

$$xy = c$$

или

$$y = \frac{c}{x}.$$

1.2.2.3. Эксцентриситет и фокальные радиусы гиперболы

Эксцентриситетом гиперболы называется отношение фокусного расстояния к длине ее действительной оси:

$$\frac{2c}{2a} = \varepsilon \text{ или } \frac{c}{a} = \varepsilon$$

Так как у гиперболы $c > a$, то эксцентриситет гиперболы больше единицы. Эксцентриситет характеризует отношение сторон основного прямоугольника, а следовательно, и форму самой гиперболы.

Фокальные радиусы

Из определения гиперболы (для правой ветви) следует:

$$r_1 = \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = \frac{c}{a}x - a$$

Так как $r_1 - r_2 = 2a$, то $r_2 = \frac{c}{a}x + a$.

Таким образом, получаем формулы, выражающие фокальные радиусы любой точки $M(x; y)$ правой ветви через x :

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= \frac{c}{a}x - a; \\ r_2 &= \frac{c}{a}x + a. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Для левой ветви эти формулы примут вид:

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= -\left(\frac{c}{a}x - a\right); \\ r_2 &= -\left(\frac{c}{a}x + a\right). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Выражая формулы (1) и (2) через эксцентриситет, получим для точек правой ветви гиперболы:

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= \varepsilon x - a \\ r_2 &= \varepsilon x + a \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

для точек левой ветви гиперболы:

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= -(\varepsilon x - a) \\ r_2 &= -(\varepsilon x + a) \end{aligned} \right\} \quad (4).$$

1.2.3. Парабола

1.2.3.1. Определение параболы и ее уравнение

Параболой называется геометрическое место точек на плоскости, каждая из которых равноудалена от данной точки, называемой **фокусом**, и данной прямой, называемой **директрисой** (предполагается, что эта прямая не проходит через фокус).

Для вывода уравнения параболы за ось Ox возьмем прямую, проходящую через фокус перпендикулярно директрисе. За положительное направление оси абсцисс возьмем направление от директрисы к фокусу.

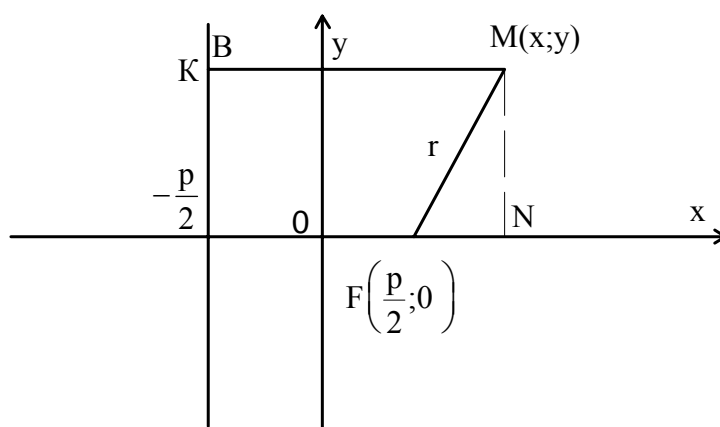


Рис. 7

За начало координат возьмем точку O , которая делит пополам отрезок от директрисы до фокуса. Длину этого отрезка, который называется **параметром параболы**, обозначим через P . Фокус F будет иметь координаты $\left(\frac{p}{2}; 0\right)$, а координаты точки оси Ox , через которую проходит директриса, будут $\left(-\frac{p}{2}; 0\right)$.

Возьмем произвольную точку $M(x; y)$, лежащую на параболе, соединим ее прямой с точкой F , а затем опустим из точки M на директрису перпендикуляр MK . Длина отрезка, соединяющего точку $M(x; y)$ параболы с фокусом, называется **фокальным радиусом** этой точки и обозначается через r (Рис. 1).

Согласно определению параболы:

$$FM = KM \quad (1)$$

Определяя FM и KM по формуле расстояния между двумя точками, получим:

$$FM = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2};$$

$$KM = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + (y - y)^2}$$

Следовательно,

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2} \quad (2)$$

Уравнению (2) будут удовлетворять координаты каждой точки параболы.

Приведем уравнение параболы к более удобному виду, для чего возведем обе части равенства (2) в квадрат:

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = \frac{p^2}{4} + px + x^2$$

Откуда,

$$y^2 = 2px \quad (3)$$

Уравнение (3) называется **каноническим уравнением параболы**. Сопоставляя равенства (1) и (2), можно выразить фокальный радиус точки $M(x;y)$ параболы через абсциссу этой точки:

$$r = \frac{p}{2} + x \quad (4).$$

1.2.3.2. Исследование формы параболы

Для определения вида параболы найдем у из канонического уравнения параболы:

$$y = \pm\sqrt{2px}.$$

Из уравнения (3) п.7 следует, что x не может быть отрицательным. При $x=0$, $y = 0$, следовательно, точка $O(0;0)$ лежит на параболе. Затем заключаем, что каждому значению $x>0$ соответствует два значения y , равных по абсолютной величине, но противоположных по знаку. Следовательно, парабола представляет собой кривую, расположенную вправо от начала координат и симметричную относительно оси абсцисс.

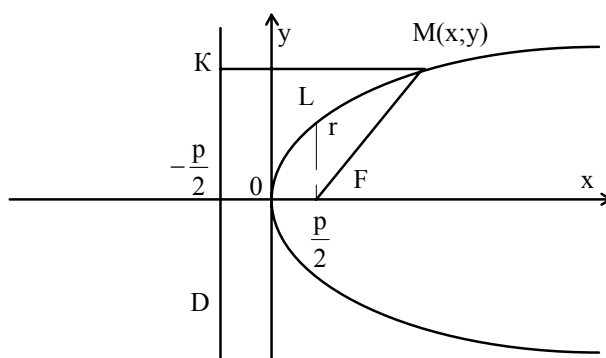


Рис. 8

Из формулы (3) п.7 следует, что по мере возрастания x возрастает и $|y|$, и когда x неограниченно растет, то и y по абсолютной величине неограниченно растет.

У параболы, заданной каноническим уравнением $y^2=2px$, **осью симметрии** является ось абсцисс. Точка пересечения параболы с осью симметрии называется вершиной параболы. В данном случае вершина параболы лежит в начале координат. Заметим, что у параболы одна вершина, у гиперболы - две, у эллипса - четыре.

Проведем на Рис. 1 фокальный радиус перпендикулярно оси симметрии и определим длину LF по формуле (4) п.7. Так как абсцисса точки L равна $\frac{p}{2}$, то $LF=p$. Следовательно, число p равняется длине фокального радиуса, перпендикулярного к оси симметрии. В связи с этим число p называют **фокальным параметром параболы**.

Парабола, уравнение которой $y^2=2px$, $p>0$, является кривой, расположенной справа от оси ординат.

Кривая, уравнение которой $y^2=-2px$, $p>0$, будет также параболой. Вершина этой параболы лежит в начале координат, осью симметрии является ось абсцисс. Все точки этой параболы лежат слева от оси ординат (Рис. 9, а)

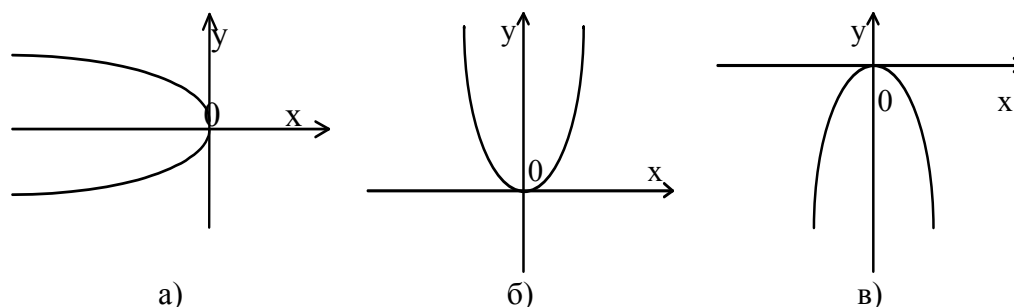


Рис. 9

Рассуждая аналогичным образом, заключаем, что уравнение $x^2=2py$, $p>0$, является уравнением параболы, вершина которой лежит в начале координат, осью симметрии является ось ординат (Рис. 9, б). Эта парабола лежит выше оси абсцисс. Уравнение же вида $x^2=-2py$, $p>0$, является уравнением параболы, лежащей ниже оси абсцисс, с вершиной в начале координат. Ось симметрии этой параболы является ось ординат. (Рис. 9, в).

Примечание. Условимся, наглядности ради, говорить, что “ветви” параболы $y^2=2px$ ($p>0$) “направлены вправо”, “ветви” параболы $x^2=2py$ ($p>0$) “направлены вверх” и т. д.

1.2.4. Общее свойство кривых второго порядка - эллипса, гиперболы

и параболы

1.2.4.1. Директриса эллипса гиперболы и параболы

Построим эллипс, заданный каноническим уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
 Затем построим две прямые, перпендикулярные к большой оси эллипса, на расстоянии $\frac{a}{\varepsilon}$ (Рис. 1). Эти прямые, уравнения которых будут: $x = \frac{a}{\varepsilon}$ и $x = -\frac{a}{\varepsilon}$, называются **директрисами эллипса**.

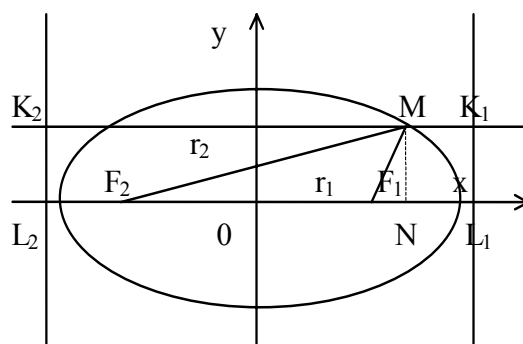


Рис. 10

При их построении следует учесть, что $\frac{a}{\varepsilon} > a$, так как эксцентриситет эллипса $\varepsilon > 1$.

Правая директриса, уравнение которой $x = \frac{a}{\varepsilon}$, будет проходить правее вершины эллипса A_1 , а левая директриса, уравнение которой $x = -\frac{a}{\varepsilon}$, - левее вершины эллипса A_2 (Рис. 10).

Построим гиперболу, заданную каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

и две прямые, перпендикулярные действительной оси гиперболы и симметрично расположенные относительно центра на расстоянии, равном $\frac{a}{\varepsilon}$ (Рис. 11):

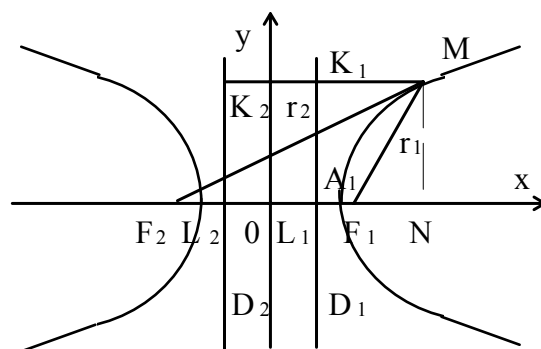


Рис.11

Эти прямые (их уравнения $x = \frac{a}{\varepsilon}$ и $x = -\frac{a}{\varepsilon}$) называются **директрисами гипербола** (соответственно, правой и левой).

При их построении следует учесть, что $\frac{a}{\varepsilon} < a$, так как эксцентриситет гипербола $\varepsilon > 1$.

Правая директриса гипербола $\left(x = \frac{a}{\varepsilon}\right)$ будет проходить левее правой вершины гипербола A_1 , а левая директриса гипербола $\left(x = -\frac{a}{\varepsilon}\right)$ будет проходить правее левой вершины гипербола A_2 .

С помощью директрис и эксцентриситета можно выявить общее свойство, присущее кривым второго порядка: эллипсу, гиперболе и параболе. Имеет место следующая теорема: отношение расстояний от произвольной точки $M(x; y)$ любой из этих кривых до фокуса и до соответствующей директрисы есть величина постоянная, равная эксцентриситету кривой. Докажем эту теорему последовательно для эллипса, гипербола и параболы.

Доказательство. Пусть у эллипса F_1 - правый фокус, прямая D_1L_1 - правая директриса. F_2 - левый фокус, D_2L_2 - левая директриса (Рис. 1). Возьмем на эллипсе произвольную точку $M(x; y)$, соединим ее отрезками MF_1 и MF_2 ($MF_1=r_1$, $MF_2=r_2$) с фокусами и опустим из нее перпендикуляры MK_1 и MK_2 на обе директрисы ($MK_1=d_1$ и $MK_2=d_2$) и на ось Ox . Требуется доказать, что

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon.$$

На основании выведенных ранее формул имеем:

$$r_1 = a - \varepsilon x, \quad r_2 = a + \varepsilon x,$$

$$d_1 = \overline{OL_1} - \overline{ON} = \frac{a}{\varepsilon} - x$$

(Здесь N - основание перпендикуляра, опущенного из точки M на ось Ox)

$$d_2 = \overline{L_2O} + \overline{ON} = \frac{a}{\varepsilon} + x$$

Вычисляя отношения $\frac{r_1}{d_1}$ и $\frac{r_2}{d_2}$, получим:

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{a - \varepsilon x}{\frac{a}{\varepsilon} - x} = \frac{(a - \varepsilon x)\varepsilon}{a - \varepsilon x} = \varepsilon,$$

$$\frac{r_2}{d_2} = \frac{a + \varepsilon x}{\frac{a}{\varepsilon} + x} = \frac{(a + \varepsilon x)\varepsilon}{a + \varepsilon x} = \varepsilon.$$

Таким образом, данная теорема для эллипса доказана.

Пусть у гиперболы F_1 - правый фокус, D_1L_1 - соответствующая ему правая директриса, F_2 - левый фокус, D_2L_2 - соответствующая ему левая директриса (Рис. 11). Возьмем на гиперболе произвольную точку $M(x; y)$, соединим ее с фокусами $F_1M=r_1$, $F_2M=r_2$, затем из точки M опустим перпендикуляры на обе директрисы $K_1M=d_1$ и $K_2M=d_2$. Требуется доказать, что

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon.$$

Применяя выведенные ранее формулы, получим:

$$r_1 = -a + \varepsilon x, \quad r_2 = a + \varepsilon x,$$

$$d_1 = \overline{ON} - \overline{OL_1} = x - \frac{a}{\varepsilon}$$

$$d_2 = \overline{ON} + \overline{L_2O} = x + \frac{a}{\varepsilon}$$

и, следовательно

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{-a + \varepsilon x}{x - \frac{a}{\varepsilon}} = \frac{-(a - \varepsilon x)\varepsilon}{\varepsilon x - a} = \varepsilon;$$

$$\frac{r_2}{d_2} = \frac{a + \varepsilon x}{x + \frac{a}{\varepsilon}} = \frac{(a + \varepsilon x)\varepsilon}{\varepsilon x + a} = \varepsilon.$$

Таким образом, данная теорема доказана и для гиперболы.

Что касается параболы, являющейся геометрическим местом таких точек, которые равноудалены от фокуса и директрисы, то для любой точки параболы будет справедливо равенство $\frac{r}{d} = 1$, где d - расстояние от точки параболы до директрисы. Иначе, отношение расстояний от любой точки параболы до фокуса и до директрисы равно единице. По аналогии с остальными кривыми второго порядка, это постоянное отношение называют эксцентриситетом параболы. Следовательно, эксцентриситет параболы равен единице. Теорема полностью доказана.

Следствие. Для рассматриваемых кривых второго порядка можно дать следующее общее определение: кривые второго порядка есть геометрические места точек на плоскости, отношение расстояний которых до фокуса и до соответствующей директрисы есть величина постоянная, равная ε , причем у эллипса $\varepsilon < 1$, у гиперболы $\varepsilon > 1$, у параболы $\varepsilon = 1$.

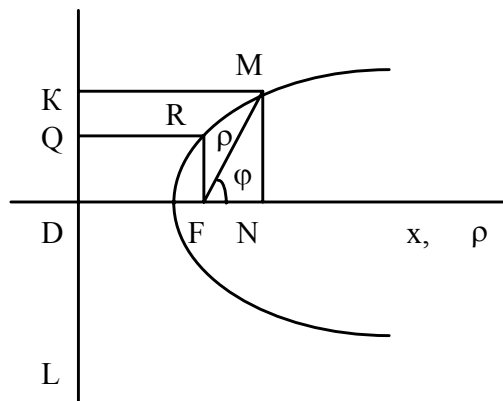
1.2.4.2. Полярное уравнение кривой второго порядка

Пользуясь общим свойством эллипсов, гипербол и парабол, выведем общее уравнение этих кривых второго порядка в полярных координатах при некотором специальном выборе полярной системы координат.

Пусть дана произвольная из указанных линий (эллипс, ветвь гиперболы или парабола). Возьмем фокус F кривой (любой, если их два) и соответствующую ему директрису L (если рассматривается ветвь гиперболы, то берется фокус и директриса, ближайшие к этой ветви).

Введем полярную систему координат так, чтобы полюс O совпал с фокусом F , а полярная ось была направлена по оси симметрии кривой в сторону, противоположную директрисе L .

Возьмем на кривой произвольную точку $M(\rho; \varphi)$, соединим ее отрезком FM с фокусом и опустим перпендикуляр MK на директрису. Кроме того, из точки F проведем перпендикуляр FR к полярной оси до пересечения с кривой в точке R , а из точки R опустим перпендикуляр RQ на директрису (Рис. 12).



Обозначим $FR = p$ и будем называть это число **фокальным параметром**.

На основании общего свойства кривых второго порядка

$$\frac{FM}{KM} = \varepsilon; FM = \rho; KM = DF + \rho \cos \varphi$$

По тем же соображениям:

$$\frac{FR}{QR} = \varepsilon \text{ или } \frac{p}{DF} = \varepsilon, \text{ откуда}$$

$$DF = \frac{p}{\varepsilon}$$

Подставим найденные выражения для FM и KM в равенство $\frac{FM}{KM} = \varepsilon$, получим:

$$\frac{\rho}{\frac{p}{\varepsilon} + \rho \cos \varphi} = \varepsilon \quad (3)$$

$$\rho = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}$$

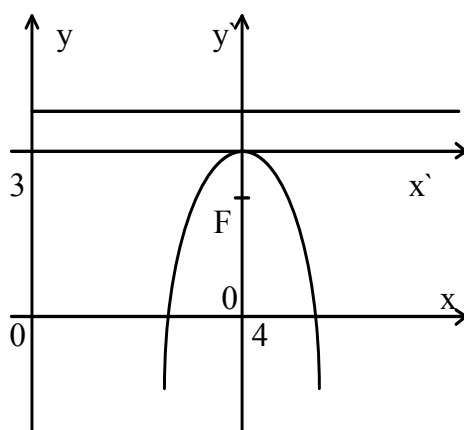
1.2. Кривые второго порядка	Для замечаний
<p>Уравнение (3) называется уравнением кривой второго порядка в полярных координатах. При $\varepsilon < 1$ кривая является эллипсом, при $\varepsilon > 1$ - ветвью гиперболы, при $\varepsilon = 1$ - параболой.</p> <p>Фокальный параметр P из уравнения параболы определяется непосредственно. Для того, чтобы фокальный параметр выразить через параметры эллипса и гиперболы, следует заметить, что фокальный параметр P является ординатой точки кривой, абсцисса которой равна абсциссе соответствующего фокуса (в выбранной при выведении канонического уравнения соответствующей кривой системе XOY).</p> <p>Подставляя вместо координат точки $M(x;y)$ в уравнение эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ координаты точки $(-c;p)$, получим:</p> $\frac{c^2}{a^2} + \frac{p^2}{b^2} = 1 \text{ или } \frac{p^2}{b^2} = 1 - \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - c^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2},$ <p>откуда следует</p> $p = \frac{b^2}{a}$ <p>Аналогично, подставляя в уравнение гиперболы координаты точки $(c;p)$, получим:</p> $\frac{c^2}{a^2} - \frac{p^2}{b^2} = 1 \text{ или } \frac{p^2}{b^2} = \frac{c^2 - a^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2},$ <p>откуда следует соотношение</p> $p = \frac{b^2}{a}.$ <p>Рассмотрим несколько задач на кривые второго порядка:</p> <p>Задача 1.</p> <p>Дано уравнение гиперболы $16x^2 - 9y^2 = 144$. Найти длины ее осей, координаты фокусов, эксцентриситет; составить уравнения директрис и асимптот гиперболы.</p> <p>Решение.</p> <p>Приведем уравнение гиперболы к каноническому виду и определим как параметры гиперболы, так и расстояние c от начала координат до фокуса:</p> $\frac{16x^2}{144} - \frac{9y^2}{144} = 1 \text{ или } \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1,$ <p>откуда $a=3$, $b=4$, $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 5$, эксцентриситет $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{5}{3}$.</p> <p>Действительная ось $2a=6$; мнимая ось $2b=8$.</p> <p>Уравнения директрис: $x = \pm \frac{9}{5}$.</p>	

1.2. Кривые второго порядка	Для замечаний
<p>Уравнения асимптот: $y = \pm \frac{4}{3}x$.</p> <p>Задача 2. Составить уравнение эллипса, симметричного относительно координатных осей, зная, что он проходит через точки $M_1(2;3)$ и $M_2\left(1; \frac{3\sqrt{5}}{2}\right)$.</p> <p>Решение. Учитывая симметричность эллипса относительно осей координат, его каноническое уравнение будет иметь вид: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ и вместо текущих координат подставим в это уравнение сначала координаты точки M_1, а затем координаты точки M_2. Из получившейся системы уравнений:</p> $\begin{cases} \frac{4}{a^2} + \frac{9}{b^2} = 1 \\ \frac{1}{a^2} + \frac{45}{4b^2} = 1 \end{cases}$ <p>определим параметры эллипса a и b. Обозначив</p> $\frac{1}{a^2} = m, \quad \frac{1}{b^2} = n,$ <p>получим следующую систему уравнений:</p> $\begin{cases} 4m + 9n = 1 \\ m + \frac{45}{4}n = 1 \end{cases}$ <p>Решая ее, получим, что:</p> $m = \frac{1}{16}; \quad n = \frac{1}{12},$ <p>откуда $a^2=16, b^2=12$. Следовательно, искомое уравнение эллипса будет:</p> $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1.$ <p>Задача 3. Найти вершину, фокус, ось и директрису параболы $y = -2x^2 + 16x - 29$.</p> <p>Решение. Преобразуем данное уравнение следующим образом:</p> $\begin{aligned} y &= -2\left(x^2 - 8x + \frac{29}{2}\right) = -2\left(x^2 - 8x + 16 + \frac{29}{2}\right) = \\ &= -2\left(x^2 - 2 \times 4x + 4^2 - \frac{3}{2}\right) = -2(x-4)^2 + 3 \end{aligned}$	

$$\text{Отсюда } (x-4)^2 = -\frac{1}{2}(y-3).$$

Обозначив $x' = x-4$ и $y' = y-3$, перейдем к новой системе координат $O'x'y'$, начало которой находится в точке $O'(4;3)$, а оси $O'x'$ и $O'y'$ сонаправлены с осями Ox и Oy . В результате получим простейшее уравнение данной параболы

$$x'^2 = -\frac{1}{2}y'.$$



Отсюда $2p = \frac{1}{2}$, то есть $\frac{p}{2} = \frac{1}{8}$. Итак, вершина параболы находится в точке $O'(4;3)$; координаты фокуса

$$x_F = x_{O'} = 4; y_F = y_{O'} - \frac{p}{2} = 3 - \frac{1}{8} = \frac{23}{8}$$

то есть $F\left(4; \frac{23}{8}\right)$; уравнение оси параболы $x = x_{O'} = 4$, то есть $x-4=0$; урав-

нение директрисы $y = y_{O'} + \frac{p}{2} = 3 + \frac{1}{8} = \frac{25}{8}$, то есть $8y-25=0$.

Задача 4.

Уравнение эллипса $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ привести в полярной системе координат к уравнению вида

$$\rho = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}.$$

Решение:

Найдем из данного уравнения параметры a , b , c , затем найдем эксцентриситет $\varepsilon = \frac{c}{a}$ и фокальный параметр эллипса $p = \frac{b^2}{a}$:

$$a^2=4, b^2=3, c^2=1, \varepsilon = \frac{1}{2}, p = \frac{3}{2}.$$

Искомое уравнение будет иметь вид:

$$\rho = \frac{\frac{3}{2}}{1 - \frac{1}{2} \cos \varphi} \quad \text{или} \quad \rho = \frac{3}{2 - \cos \varphi}.$$

Задача 5.

Данное уравнение кривой в полярных координатах

$$\rho = \frac{8}{1 - 3 \cos \varphi}$$

Привести его к каноническому уравнению в прямоугольных координатах.

Решение.

В данном уравнении $\varepsilon = \frac{c}{a} = 3$, $p = \frac{b^2}{a} = 3$. Так как эксцентриситет $\varepsilon > 1$, то данное уравнение является уравнением гиперболы, у которой $b^2 = c^2 - a^2$. Таким образом, данные параметры могут быть записаны в виде системы двух уравнений

$$\begin{cases} \frac{c}{a} = 3; \\ \frac{c^2 - a^2}{a} = 8 \end{cases}$$

Из этой системы находим, что $a=1$, $c=3$, $b^2=8$. Следовательно, уравнение гиперболы имеет вид:

$$\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{8} = 1.$$

1.3. Аналитическая геометрия в пространстве	Для замечаний
<p style="text-align: center;">1.3. Аналитическая геометрия в пространстве</p> <p style="text-align: center;">1.3.1. Плоскость как поверхность первого порядка</p> <p><u>Теорема.</u> В декартовой прямоугольной системе координат каждая плоскость определяется уравнением первой степени.</p> <p><u>Доказательство.</u> Рассмотрим произвольную плоскость Π и докажем, что эта плоскость определяется уравнением первой степени. Возьмем на плоскости Π какую-нибудь точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$; выберем кроме этого, произвольный вектор (не нулевой) перпендикулярный к плоскости Π. $\vec{N} \perp \Pi$. $\vec{N} = \{A; B; C\}$. Пусть $M(x; y; z)$ - произвольная точка. Она лежит на плоскости тогда и только тогда, когда вектор $\vec{M_0M}$ перпендикулярен вектору \vec{N}:</p> $\vec{M_0M} \perp \vec{N}$ <p>Условием перпендикулярности двух векторов является равенство нулю их скалярного произведения:</p> $\vec{M_0M} = \{x - x_0; y - y_0; z - z_0\}; \quad \vec{N} = \{A; B; C\}.$ $\vec{N} \cdot \vec{M_0M} = 0 \Rightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad (1)$ <p>Это и есть искомое уравнение плоскости Π, т.к. ему удовлетворяют координаты $x; y; z$ точки M тогда и только тогда, когда M лежит на плоскости Π.</p> <p>Раскрывая скобки, представим уравнение (1) в виде $Ax + By + Cz + (-Ax_0 - By_0 - Cz_0) = 0$. Далее, обозначая число $-Ax_0 - By_0 - Cz_0$ буквой D, получим:</p> $Ax + By + Cz + D = 0.$ <p>Мы видим, что плоскость Π действительно определяется уравнением первой степени. Теорема доказана.</p> <p>Произвольный ненулевой вектор, перпендикулярный плоскости, называется нормальным к ней вектором. Употребляя это название, мы можем сказать, что уравнение $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ есть уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и имеющей нормальный вектор $\vec{N} = \{A; B; C\}$.</p> <p>Уравнение вида</p> $Ax + By + Cz + D = 0 \quad (2)$ <p>называется общим уравнением плоскости.</p> <p><u>Теорема.</u> В декартовых координатах каждое уравнение первой степени определяет плоскость.</p> <p><u>Доказательство.</u> Рассмотрим произвольное уравнение первой степени $Ax + By + Cz + D = 0$ (A, B, C одновременно не равны нулю).</p> <p>Пусть x_0, y_0, z_0 произвольная тройка чисел, удовлетворяющая уравнению (2):</p> $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \quad (3)$	

Вычтем из уравнения (2) тождество (3), получим

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0,$$

которое по предыдущему представляет собой уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и имеющей нормальный вектор $N=\{A; B; C\}$. Но уравнение (2) равносильно уравнению (1), т.к. уравнение (1) получается из уравнения (2) путем почленного вычитания тождества (3), а уравнение (2) в свою очередь получается из уравнения (1) путем почленного прибавления тождества (3). Следовательно, уравнение (2) является уравнением той же плоскости. Теорема доказана.

Докажем теперь следующее важное утверждение: *если два уравнения $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ определяют одну и ту же плоскость, то коэффициенты их пропорциональны.* Действительно $\vec{N}_1=\{A_1; B_1; C_1\}$ и $\vec{N}_2=\{A_2; B_2; C_2\}$ перпендикулярны к одной и той же плоскости, следовательно вектора \vec{N}_1 и \vec{N}_2 - коллинеарны, тогда

$$A_1=A_2 \cdot m; B_1=B_2 \cdot m; C_1=C_2 \cdot m.$$

Пусть $M_0(x_0; y_0; z_0)$ - любая точка плоскости: ее координаты должны удовлетворять каждому из данных уравнений, таким образом $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$. Умножим второе из этих равенств на m и вычтем из первого: получим

$$D_1 - D_2m=0 \text{ или } D_1 = D_2m \text{ и } \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2} = m.$$

Тем самым наше утверждение доказано.

1.3.2. Неполные уравнения плоскости

Здесь будем рассматривать частные случаи уравнения первой степени, когда какие-либо из коэффициентов A, B, C, D обращаются в нуль:

1) $D=0$: $Ax+By+Cz=0$ - определяет плоскость, проходящую через начало координат, т.к. числа $x=0; y=0; z=0$ удовлетворяют уравнению $Ax+By+Cz=0$. Следовательно начало координат принадлежит плоскости.

2) $C=0$: $Ax+By+D=0$ определяет плоскость, параллельную оси Oz (или проходящую через эту ось). В этом случае нормальный вектор $\vec{N}=\{A; B; C\}$ имеет нулевую проекцию на ось Oz ($C=0$); следовательно, этот вектор перпендикулярен оси Oz , а сама плоскость параллельна ей (или проходит через нее).

3) $B=0$ и $C=0$: $Ax+D=0$ - определяет плоскость, параллельную координатной плоскости Oyz (или совпадающую с ней). В этом случае нормальный вектор $\vec{N}=\{A; B; C\}$ имеет нулевые проекции на оси Oy и Oz ($B=0$ и $C=0$); следовательно, вектор \vec{N} перпендикулярен к осям Oy и Oz , а сама плоскость параллельна им (или проходит через каждую из них). Но это и означает, что плоскость, определяемая уравнением $Ax+D=0$, параллельна плоскости Oyz или совпадает с ней.

По аналогии с предыдущим легко установить, что:

1. Уравнение $Ax+Cz+D=0$ задает плоскость, параллельную оси Oy (или проходящую через нее). Уравнение $By+Cz+D=0$ задает плоскость, параллельную оси Ox (или проходящую через нее).

2. Уравнение $By+D=0$ задает плоскость, параллельную плоскости Oxz (или совпадающую с ней). Уравнение $Cz+D=0$ задает плоскость, параллельную плоскости Oxy (или совпадающую с ней).

1.3.3. Уравнение плоскости в отрезках

Пусть в уравнении плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ ни один из коэффициентов A, B, C, D не равен нулю. Сделав следующие преобразования:

$$Ax+By+Cz=-D;$$

$$\frac{Ax}{-D} + \frac{By}{-D} + \frac{Cz}{-D} = 1;$$

$$\frac{\frac{x}{-D}}{\frac{-D}{A}} + \frac{\frac{y}{-D}}{\frac{-D}{B}} + \frac{\frac{z}{-D}}{\frac{-D}{C}} = 1.$$

И вводя обозначения $a = -\frac{D}{A}$; $b = -\frac{D}{B}$; $c = -\frac{D}{C}$, получим $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Это специальный вид уравнения плоскости называемый **уравнением плоскости "в отрезках"**. Здесь числа a, b, c имеют простой геометрический смысл, а именно a, b, c - это величины отрезков, которые плоскость отсекает на координатных осях. Чтобы убедиться в этом, достаточно найти точки пересечения плоскости с координатными осями. Точка пересечения плоскости с осью Ox определяется из уравнения этой плоскости $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ при условии $y=z=0$. Отсюда $x=a$. Таким образом, величина отрезка, отсекаемого плоскостью на оси Ox , действительно равна a . Аналогично, отрезки отсекаемые плоскостью на осях Oy и Oz , имеют величины, равные соответственно b и c .

Пример. Составить уравнение плоскости, зная, что она отсекает на координатных осях отрезки $a=3$; $b=-4$; $c=2$.

Решение. На основании предыдущего получаем искомое уравнение сразу:

$$\frac{x}{3} - \frac{y}{4} + \frac{z}{2} = 1 \text{ или } 4x - 3y + 6z - 12 = 0.$$

1.3.4. Нормальное уравнение плоскости. Расстояние от точки до плоскости

Возьмем в пространстве XYZ некоторую плоскость Π . Проведем через начало координат прямую n , перпендикулярную к плоскости Π . Назовем эту прямую **нормалью**, - и отметим буквой P точку пересечения нормали с плоскостью Π . На нормали введем положительное направление от начала координат O к точке P . Если точка P совпадает с O , т.е. данная плоскость проходит через начало координат, то положительное направление нормали выберем произвольно. Обозначим

через α, β, γ углы, которые составляет направленная нормаль с осями координат, через p - длину отрезка OP .

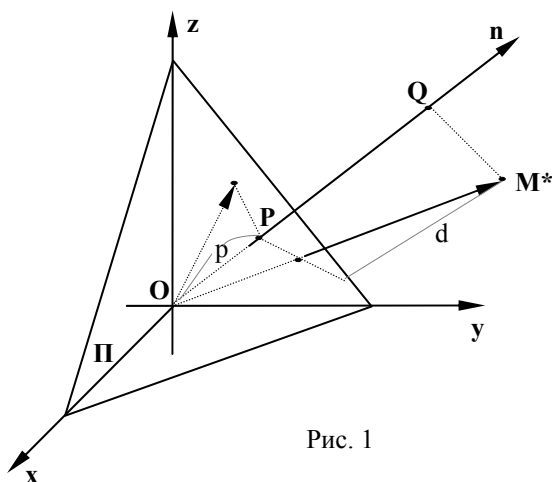


Рис. 1

Мы выведем уравнение данной плоскости Π , считая известными числа $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ и p . С этой целью возьмем на плоскости Π произвольную точку M и обозначим через x, y, z ее координаты. Очевидно, проекция вектора \overline{OM} на нормаль равна OP , а так как положительное направление отрезка \overline{OP} , то величина этого отрезка выражается положительным числом p :

$$n \overline{p_n} \overline{OM} = p \quad (1)$$

Заметим, что $\overline{OM} = \{x; y; z\}$, отсюда $n \overline{p_n} \overline{OM} = x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma \quad (2)$

Из равенств (1) и (2) следует, что $x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = p$ или

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0 \quad (3)$$

Это уравнение плоскости, оно носит специальное название: **нормальное уравнение плоскости**; в этом уравнении $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ суть направляющие косинусы нормали, p - расстояние плоскости от начала координат.

Пусть как и ранее n нормаль к произвольной плоскости Π , M^* - произвольная точка пространства, d - ее расстояние от данной плоскости (см. рис. 1).

Условимся называть отклонением точки M^* от данной плоскости число $+d$, если M^* лежит по ту сторону от плоскости, куда идет положительное направление нормали, $-d$, если M^* лежит с другой стороны от данной плоскости. Отклонение точки от плоскости обозначим буквой δ ; таким образом, $\delta = \pm d$, причем полезно заметить, что $\delta = +d$, когда точка M^* и начало координат лежат по разные стороны от плоскости, и $\delta = -d$, когда точка M^* и начало координат лежат по одну сторону от плоскости (для точек, лежащих на плоскости, $\delta = 0$).

1.3. Аналитическая геометрия в пространстве	Для замечаний
<p><u>Теорема.</u> Если точка M^* имеет координаты $(x^*; y^*; z^*)$, а плоскость задана нормальным уравнением $x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0$, то отклонение точки M^* от этой плоскости задается формулой</p> $\delta = x^* \cos \alpha + y^* \cos \beta + z^* \cos \gamma - p.$ <p><u>Доказательство.</u> Спроектируем точку M^* на нормаль; пусть Q - ее проекция (рис. 1); тогда</p> $\delta = PQ = OQ - OP,$ <p>где PQ, OQ, OP - это величины направленных отрезков нормали: \overline{PQ}, \overline{OQ} и \overline{OP}. Но $OQ = n_{\vec{p}} \overline{OM^*}$, $OP = p$; следовательно</p> $\delta = n_{\vec{p}} \overline{OM^*} - p \quad (5)$ <p>Из ранее доказанного</p> $n_{\vec{p}} \overline{OM^*} = x^* \cos \alpha + y^* \cos \beta + z^* \cos \gamma \quad (6)$ <p>Из равенств (5) и (6) получаем:</p> $\delta = x^* \cos \alpha + y^* \cos \beta + z^* \cos \gamma - p$ <p>Теорема доказана.</p> <p>Покажем, как привести общее уравнение плоскости к нормальному виду. Пусть</p> $Ax + By + Cz + D = 0 \quad (7)$ <p>– общее уравнение некоторой плоскости, а</p> $x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0 \quad (3)$ <p>– ее нормальное уравнение. Так как уравнения (7) и (3) определяют одну и ту же плоскость, то коэффициенты этих уравнений пропорциональны, т.е.</p> $\mu A = \cos \alpha, \mu B = \cos \beta, \mu C = \cos \gamma, \mu D = -p. \quad (8)$ <p>Чтобы найти множитель μ, возведем первые три из этих равенств в квадрат и сложим. Получим:</p> $\mu^2 (A^2 + B^2 + C^2) = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma.$ <p>Т.к. $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$, то $\mu = \frac{\pm 1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$</p> <p>Число μ называется нормирующим множителем. Для определения знака нормирующего множителя используем последнее из равенств (8): $\mu D = -p$. Следовательно: знак нормирующего множителя противоположен знаку свободного члена нормируемого уравнения. Если $D = 0$, то знак нормирующего множителя можно выбирать по желанию.</p> <p><u>Пример.</u> Даны плоскость $12x - 4y + 3z + 14 = 0$ и точка $M(1; 3; 4)$. Найти отклонение точки M от данной плоскости.</p> <p><u>Решение.</u> Приведем данное уравнение к нормальному виду. Найдем нормирующий множитель: $\mu = \frac{-1}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2}} = -\frac{1}{13}.$ Умножая данное уравнение</p>	

на μ , получим исходное нормальное уравнение плоскости: $-\frac{1}{13}(12x - 4y + 3z + 14) = 0$. Подставляя в левую часть этого уравнения координаты точки M , имеем: $\delta = -\frac{1}{13}(12 \cdot 1 - 4 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 14) = -2$. Итак, точка M имеет отрицательное отклонение от данной плоскости и удалена от нее на расстояние $d=2$.

1.3.5. Уравнение прямой в пространстве

Рассмотрим произвольную прямую, обозначим ее буквой a . Обозначим через Π_1 и Π_2 какие-нибудь две различные плоскости, пересекающиеся по прямой a и предположим, что уравнения этих плоскостей будут: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Так как прямая a представляет собой пересечение плоскостей Π_1 и Π_2 , то она определяется совместным заданием двух уравнений:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Поставим задачу: всегда ли два уравнения первой степени совместно определяют некоторую прямую? Очевидно, это будет только в том случае, когда соответствующие им плоскости не параллельны и не совпадают друг с другом, т.е. когда нормальные векторы этих плоскостей $N_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ и $N_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$ не коллинеарны. Два уравнения вида (1) совместно определяют прямую в томи только в том случае, когда коэффициенты A_1, B_1, C_1 одного из них не пропорциональны коэффициентам A_2, B_2, C_2 другого.

1.3.6. Направляющий вектор прямой. Канонические уравнения прямой. Параметрические уравнения прямой

Рассмотрим произвольную прямую. Каждый не равный нулю вектор, лежащий на данной прямой или параллельный ей, называется **направляющим вектором** этой прямой. Указанные векторы называются направляющими именно потому, что любой из них, будучи задан, определяет направление прямой.

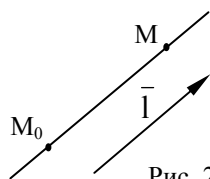


Рис. 2.

Направляющий вектор прямой будем обозначать буквой \bar{l} , его координаты - m, n, p :

$$\bar{l} = \{m; n; p\}$$

Выведем уравнение прямой, проходящей через заданную точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и имеющей данный направляющий вектор $\bar{l} = \{m; n; p\}$.

Пусть $M(x; y; z)$ - произвольная ("текущая") точка прямой (рис. 2). Вектор $\overline{M_0M} = \{x - x_0; y - y_0; z - z_0\}$ коллинеарен направляющему вектору $\bar{l} = \{m; n; p\}$. Следовательно, координаты вектора $\overline{M_0M}$ пропорциональны координатам вектора \bar{l} :

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \quad (1)$$

Этим соотношениям удовлетворяют координаты каждой точки $M(x; y; z)$, лежащей на рассматриваемой прямой, напротив, если точка $M(x; y; z)$ не лежит на прямой, то ее координаты не удовлетворяют соотношениям (1), так как в этом случае векторы $\vec{M_0M}$ и \vec{l} не коллинеарны и координаты их не пропорциональны. Таким образом, уравнения (1) представляют собой уравнения прямой, проходящей, через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ в направлении вектора $\vec{l} = \{m; n; p\}$.

Уравнения (1) прямой мы будем называть **каноническими**. Пусть некоторая прямая задана двумя общими уравнениями:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Покажем, как составить канонические уравнения этой прямой. Обозначим плоскости, определяемые данными уравнениями, через Π_1 и Π_2 , нормальные векторы этих плоскостей через \vec{N}_1 и \vec{N}_2 . Для составления канонических уравнений данной прямой, нужно:

1) найти произвольную ее точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$; для этого следует задать численное значение одной из неизвестных координат x_0, y_0, z_0 и подставить его вместо соответствующей переменной в уравнения (2); после этого две остальные координаты определяются из уравнений (2) путем их совместного решения;

2) найти направляющий вектор $\vec{l} = \{m; n; p\}$. Так как данная прямая определена пересечением плоскостей через Π_1 и Π_2 , то она перпендикулярна к каждому из векторов \vec{N}_1 и \vec{N}_2 . Поэтому в качестве вектора \vec{l} можно взять любой вектор, перпендикулярный к векторам \vec{N}_1 и \vec{N}_2 , например, их векторное произведение: $\vec{l} = [\vec{N}_1 \vec{N}_2]$. Поскольку координаты векторов \vec{N}_1 и \vec{N}_2 известны: $\vec{N}_1 = \{A_1; B_1; C_1\}$, $\vec{N}_2 = \{A_2; B_2; C_2\}$, для вычисления координат вектора $\vec{l} = \{m; n; p\}$ достаточно применить формулу для нахождения координат векторного произведения.

Пример. Найти канонические уравнения прямой

$$\begin{cases} 2x + y - z - 4 = 0 \\ 3x - y + 2z - 5 = 0 \end{cases}$$

Решение. Полагая, например, $x_0=1$, находим из данной системы: $y_0=6, z_0=4$; таким образом, мы уже знаем одну точку прямой: $M_0(1; 6; 4)$. Теперь найдем направляющий вектор. Имеем: $\vec{N}_1 = \{2; 1; -1\}$, $\vec{N}_2 = \{3; -1; 2\}$; отсюда $\vec{l} = [\vec{N}_1 \vec{N}_2] = \{1; -7; -5\}$, т.е. $m=1, n=-7, p=-5$. Каноническое уравнение данной прямой мы получим, подставляя найденные значения x_0, y_0, z_0, m, n, p в равенства (1):

$$\frac{x - 1}{1} = \frac{y - 6}{-7} = \frac{z - 4}{-5}$$

Пусть даны канонические уравнения какой-нибудь прямой. Обозначим буквой t каждое из парных отношений, которые участвуют в этих канонических уравнениях; мы получим:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} = t$$

Отсюда

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases} \quad (3)$$

Это - параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ в направлении вектора $\vec{l} = \{m; n; p\}$. В уравнениях (3) t рассматривается как произвольно изменяющийся параметр, x, y, z - как функции от t ; при изменении t величины x, y, z меняются так, что точка $M(x; y; z)$ движется по данной прямой. Параметрические уравнения прямой удобно применять в тех случаях, когда требуется найти точку пересечения прямой с плоскостью.

Пример. Даны прямая $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-4}{1}$ и плоскость $x+2y+z-6=0$.

Найти точку их пересечения.

Решение. Задача сводится к определению координат точки x, y, z из трех данных уравнений (мы имеем два уравнения прямой и одно уравнение плоскости). Полагая $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-4}{1} = t$, отсюда $x=2+t, y=3+2t, z=4+t$.

Подставляя эти выражения влевую часть уравнения данной плоскости получим $(2+t)+2(3+2t)+(4+t)-6=0$.

Решая это уравнение, находим: $t=-1$, следовательно, координаты искомой точки будут $x=1, y=1, z=3$.

1.3.7. Некоторые дополнительные предложения и примеры

1) В аналитической геометрии часто требуется составить уравнение прямой, зная две ее точки. Решим эту задачу в общем виде, считая данными две произвольные точки:

$$M_1(x_1; y_1; z_1) \text{ и } M_2(x_2; y_2; z_2).$$

Для решения задачи достаточно заметить, что в качестве направляющего вектора рассматриваемой прямой можно взять вектор $\vec{l} = \overrightarrow{M_1M_2}$; отсюда $m=x_2 - x_1; n=y_2 - y_1; p=z_2 - z_1$, окончательно получим

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

Это и есть искомые (канонические) уравнения прямой, проходящей через две данные точки: $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$.

2) Решим также в общем виде задачу: составить уравнение плоскости, проходящей через три различные точки: $M_1(x_1; y_1; z_1); M_2(x_2; y_2; z_2); M_3(x_3; y_3; z_3)$.

Обозначим через x, y, z координаты произвольной точки M пространства и рассмотрим три вектора:

$$\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1; y - y_1; z - z_1\}$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$$

$$\overrightarrow{M_1M_3} = \{x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1\}$$

Точка M лежит на плоскости $M_1M_2M_3$ в том и только в том случае, когда векторы $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ и $\overrightarrow{M_1M_3}$ компланарны; условием компланарности этих трех векторов является равенство нулю их смешанного произведения или равенство нулю определителя третьего порядка, составленного из их координат.

В нашем случае имеем:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Это и есть искомое уравнение плоскости, проходящей через точки M_1, M_2, M_3 , так как ему удовлетворяют координаты x, y, z точки M в том и только в том случае, когда она лежит в этой плоскости.

3) Угол между двумя прямыми.

Углом между двумя прямыми в пространстве называют любой из углов, образованных двумя прямыми, проведенными из одной точки, параллельно данным прямым. Если прямые параллельны, то угол между ними считается равным нулю или π .

Пусть даны уравнения двух прямых:

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1};$$

$$\frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}.$$

Обозначим угол между прямыми через α , а угол между их направляющими векторами \vec{l}_1 и \vec{l}_2 - через φ . При этом

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2|}{|\vec{l}_1| \cdot |\vec{l}_2|} \quad (1)$$

Так как $\alpha = \varphi$ или $\alpha = \pi - \varphi$, то $\cos \alpha = \pm \cos \varphi$. Следовательно,

$$\cos \alpha = \pm \frac{|\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2|}{|\vec{l}_1| \cdot |\vec{l}_2|} \quad (2)$$

или в координатной форме:

$$\cos \alpha = \pm \frac{m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2 + p_1 \cdot p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}} \quad (3)$$

Формулы (2) и (3) являются формулами для определения угла между двумя прямыми в пространстве.

4) Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых в пространстве.

Для того, чтобы две прямые были параллельны, необходимо и достаточно, чтобы их направляющие векторы \vec{l}_1 и \vec{l}_2 были коллинеарны, т.е. соответствующие координаты векторов \vec{l}_1 и \vec{l}_2 были пропорциональны:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}. \quad (4)$$

Условие (4) является условием параллельности двух прямых в пространстве.

Для того, чтобы прямые были перпендикулярны между собой, необходимо и достаточно, чтобы направляющие их векторы \vec{l}_1 и \vec{l}_2 были ортогональными.

Условие ортогональности двух векторов \vec{l}_1 и \vec{l}_2 :

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0 \quad (5)$$

является условием перпендикулярности двух прямых в пространстве.

Пример. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $M(3; 2; -1)$ перпендикулярно двум прямым:

$$a_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y-7}{-3} = \frac{z+4}{5}; \quad a_2: \frac{x+3}{4} = \frac{y+5}{1} = \frac{z-9}{-2}.$$

Составим уравнение любой прямой, проходящей через точку M :

$$\frac{x-3}{m} = \frac{y-2}{n} = \frac{z+1}{p} \quad (5)$$

Используя условие перпендикулярности искомой прямой к прямой a_1 , а затем к прямой a_2 получим

$$\begin{aligned} 2m-3n+5p &= 0 \\ 4m+n-2p &= 0 \end{aligned}$$

Из этой однородной структуры линейных уравнений с неизвестными m, n, p найдем отношения неизвестных:

$$m:n:p = \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1:24:14$$

Подставляя в уравнения прямой (6) вместо m, n, p пропорциональные им величины, получим искомые уравнения:

$$\frac{x-9}{1} = \frac{y+13}{24} = \frac{z-15}{14}$$

5) Углом между прямой и плоскостью называют любой из двух смежных углов, образованных прямой и ее проекцией на плоскость. Пусть дано уравнение плоскости Π :

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

и уравнение прямой l :

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

$\vec{N} = \{A; B; C\}$ - нормальный вектор плоскости

$\vec{l} = \{m; n; p\}$ - направляющий вектор прямой

Обозначим угол между векторами \vec{N} и \vec{l} через φ , а угол между плоскостью Π и прямой l - через α . Найдем косинус угла φ между векторами \vec{N} и \vec{l} :

$$\cos \varphi = \frac{(\vec{N} \cdot \vec{l})}{|\vec{N}| \cdot |\vec{l}|}$$

При этом $\sin \alpha = \pm \cos \varphi$. Следовательно,

$$\sin \alpha = \pm \frac{(\vec{N} \cdot \vec{l})}{|\vec{N}| \cdot |\vec{l}|}$$

или, в координатной форме,

$$\sin \alpha = \pm \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$$

Для того, чтобы плоскость Π была параллельна прямой l необходимо и достаточно, чтобы векторы $\vec{N} = \{A; B; C\}$ и $\vec{l} = \{m; n; p\}$ были ортогональны между собой.

Условие ортогональности двух векторов \vec{N} и \vec{l} может быть записано как равенство нулю их скалярного произведения:

$$(\vec{N} \cdot \vec{l}) = 0$$

или в координатной форме:

$$Am + Bn + Cp = 0$$

Для того, чтобы прямая l была перпендикулярна плоскости Π , необходимо и достаточно, чтобы вектор \vec{l} был коллинеарен вектору \vec{N} .

Условие коллинеарности двух векторов \vec{N} и \vec{l} может быть записано как равенство нулю их векторного произведения:

$$(\vec{N} \times \vec{l}) = 0$$

или

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$$

Пример. Составить уравнение плоскости Π , проходящей через точку $M(-1; 2; -3)$ параллельно двум прямым:

$$(l_1) \quad \frac{x-2}{3} = \frac{y+6}{4} = \frac{z-6}{-5}$$

$$(l_2) \quad \frac{x+3}{2} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z}{1}$$

Напишем уравнение связки плоскостей с центром в точке М:

$$A(x+1)+B(y-2)+C(z+3)=0 \quad (4)$$

Используем условие параллельности плоскости Π и прямой l_1 , а затем к прямой l_2 :

$$3A+4B+5C=0$$

$$2A-3B+C=0$$

Из этой системы однородных уравнений определим отношения коэффициентов A, B, C и затем в уравнение (4) вместо коэффициентов A, B, C подставим пропорциональные им величины:

$$A:B:C = \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -11:-13:-17;$$

$$11(x+1)+13(y-2)+17(z+3)=0;$$

$$11x+13y+17z+36=0.$$

6) Пучок плоскостей.

Через всякую прямую в пространстве можно провести бесчисленное множество плоскостей. Совокупность всех плоскостей, проходящих через одну и ту же прямую, называется **пучком плоскостей**.

Пусть дано уравнение прямой как линии пересечения двух плоскостей:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Составим уравнение:

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0, \quad (2)$$

где λ - произвольное число. При любом λ это уравнение первой степени, кроме того, при любом λ это уравнение определяет плоскость, проходящую через прямую (1).

Действительно, если точка M_0 принадлежит прямой (1), то:

$$\begin{cases} A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1 = 0 \\ A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2 = 0 \end{cases}$$

и следовательно

$$A_1x_0+B_1y_0+C_1z_0+D_1+\lambda(A_2x_0+B_2y_0+C_2z_0+D_2)=0.$$

Уравнение (2) называется **уравнением пучка плоскостей**, проходящих через прямую (1).

Уравнение (2) дает любую плоскость пучка, за исключением плоскости

$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$$

Пример. Найти проекцию прямой

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z - 1 = 0 \\ x + 5y - 2z + 3 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

На плоскость $3x-4y+z-8=0$ (П).

Составим уравнение пучка плоскостей, проходящих через прямую (1)

$$2x-3y+4z-1+\lambda(x+5y-2z+3)=0 \quad (3)$$

или $(2+\lambda)x+(5\lambda-3)y+(4-2\lambda)z+(3\lambda-1)=0$

Определим λ , используя условие перпендикулярности плоскостей: $3(2+\lambda)-4(5\lambda-3)+(4-2\lambda)=0$. Откуда $\lambda = \frac{22}{19}$. Подставив значение в уравнение

(3), найдем уравнение проектирующей плоскости:

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 4z - 1 + \frac{22}{19}(x + 5y - 2z + 3) &= 0 \\ 60x + 53y + 32z + 47 &= 0 \end{aligned}$$

Уравнения искомой проекции можно записать как уравнения линии пересечения плоскостей:

$$\begin{cases} 3x - 4y + z - 8 = 0 \\ 60x + 53y - 32z + 47 = 0 \end{cases}$$

Пример. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$\begin{cases} 3x+2y+5z+6=0 \\ x+4y+3z+4=0 \end{cases} \text{ параллельно прямой } \frac{x-1}{3} = \frac{y-5}{2} = \frac{z+1}{-3}.$$

Решение. Составим уравнение пучка плоскостей, проходящих через первую из данных прямых:

$$3x+2y+5z+6+\lambda(x+4y+3z+4)=0 \quad (*)$$

Преобразуем это уравнение: $(3+\lambda)x+(2+4\lambda)y+(5+3\lambda)z+(6+4\lambda)=0$. Используя условие параллельности прямой и плоскости получим: $3(3+\lambda)+2(2+4\lambda)-3(5+3\lambda)=0$. Отсюда $\lambda=1$. Подставляя найденное значение λ в уравнение (*), найдем: $4x+6y+8z+10=0$ или $2x+3y+4z+5=0$.

Пример. Найти расстояние от точки $M(1; 2; 3)$ до прямой

$$\frac{x-11}{2} = \frac{y-18}{5} = \frac{z-4}{-2}$$

Решение. Проведем через M плоскость Π , перпендикулярную к данной прямой и найдем точку P , где эта плоскость пересекает данную прямую. Искомое расстояние от точки M до данной прямой будет равно расстоянию от точки M до точки P .

Искомое уравнение плоскости Π можно записать в виде:

$$A(x-1)+B(y-1)+C(z-1)=0;$$

эта плоскость должна быть перпендикулярна к данной прямой. По условию перпендикулярности прямой к плоскости имеем:

$$\frac{A}{2} = \frac{B}{5} = \frac{C}{-2}.$$

Выбирая здесь множитель пропорциональности для простоты равным единице, находим $A=2$, $B=5$, $C=-2$. Итак, плоскость имеет уравнение $2(x-1)+5(y-1)-2(z-1)=0$ или $2x+5y-2z=0$.

Теперь мы должны найти точку P , в которой эта плоскость пересекается с данной прямой. Для этого нужно уравнение данной прямой решить совместно с найденным уравнением плоскости Π .

$$\frac{x-11}{2} = \frac{y-18}{5} = \frac{z-4}{-2} = t$$

Отсюда $x=2t+11$, $y=5t+18$, $z=4-2t$. Подставляя эти уравнения в уравнение найденной плоскости $2x+5y-2z-5=0$ получим:

$$\begin{aligned} 4t+22+25t+90+4t-8-5 &= 0; \\ 33t &= -99; \\ t &= -3. \end{aligned}$$

Координаты точки P будут равны $x=5$, $y=3$, $z=10$.

Искомое расстояние d от точки M до данной прямой, равное расстоянию между точками M и P , найдется по формуле нахождения расстояния между двумя точками

$$d = \sqrt{(5-1)^2 + (3-1)^2 + (10-1)^2} = \sqrt{101}.$$

Пример. Определить условие, при котором две прямые

$$\begin{aligned} (l_1) \quad & \frac{x-a_1}{m_1} = \frac{y-b_1}{n_1} = \frac{z-c_1}{p_1} \\ (l_2) \quad & \frac{x-a_2}{m_2} = \frac{y-b_2}{n_2} = \frac{z-c_2}{p_2} \end{aligned}$$

лежат на одной плоскости.

Решение. Пусть $\vec{l}_1 = \{m_1; n_1; p_1\}$ и $\vec{l}_2 = \{m_2; n_2; p_2\}$ направляющие векторы данных прямых, $M_1(a_1; b_1; c_1)$ и $M_2(a_2; b_2; c_2)$ - точки, принадлежащие прямым l_1 и l_2 . Вектор $\overline{M_1M_2} = \{a_2-a_1; b_2-b_1; c_2-c_1\}$ и направляющие векторы прямых \vec{l}_1 и \vec{l}_2 компланарны в том и только в том случае, когда прямые l_1 и l_2 лежат в одной плоскости. Условием компланарности трех векторов является равенство нулю их смешанного произведения: $\overline{M_1M_2} \cdot \vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2 = 0$, что в координатной записи может быть представлено в следующем виде:

$$\begin{vmatrix} a_2-a_1 & b_2-b_1 & c_2-c_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0$$

1.3. Аналитическая геометрия в пространстве	Для замечаний
<p style="text-align: center;">1.3. Аналитическая геометрия в пространстве</p> <p style="text-align: center;">1.3.1. Плоскость как поверхность первого порядка</p> <p><u>Теорема.</u> В декартовой прямоугольной системе координат каждая плоскость определяется уравнением первой степени.</p> <p><u>Доказательство.</u> Рассмотрим произвольную плоскость Π и докажем, что эта плоскость определяется уравнением первой степени. Возьмем на плоскости Π какую-нибудь точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$; выберем кроме этого, произвольный вектор (не нулевой) перпендикулярный к плоскости Π. $\vec{N} \perp \Pi$. $\vec{N} = \{A; B; C\}$. Пусть $M(x; y; z)$ - произвольная точка. Она лежит на плоскости тогда и только тогда, когда вектор $\vec{M_0M}$ перпендикулярен вектору \vec{N}:</p> $\vec{M_0M} \perp \vec{N}$ <p>Условием перпендикулярности двух векторов является равенство нулю их скалярного произведения:</p> $\vec{M_0M} = \{x - x_0; y - y_0; z - z_0\}; \quad \vec{N} = \{A; B; C\}.$ $\vec{N} \cdot \vec{M_0M} = 0 \Rightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad (1)$ <p>Это и есть искомое уравнение плоскости Π, т.к. ему удовлетворяют координаты $x; y; z$ точки M тогда и только тогда, когда M лежит на плоскости Π.</p> <p>Раскрывая скобки, представим уравнение (1) в виде $Ax + By + Cz + (-Ax_0 - By_0 - Cz_0) = 0$. Далее, обозначая число $-Ax_0 - By_0 - Cz_0$ буквой D, получим:</p> $Ax + By + Cz + D = 0.$ <p>Мы видим, что плоскость Π действительно определяется уравнением первой степени. Теорема доказана.</p> <p>Произвольный ненулевой вектор, перпендикулярный плоскости, называется нормальным к ней вектором. Употребляя это название, мы можем сказать, что уравнение $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ есть уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и имеющей нормальный вектор $\vec{N} = \{A; B; C\}$.</p> <p>Уравнение вида</p> $Ax + By + Cz + D = 0 \quad (2)$ <p>называется общим уравнением плоскости.</p> <p><u>Теорема.</u> В декартовых координатах каждое уравнение первой степени определяет плоскость.</p> <p><u>Доказательство.</u> Рассмотрим произвольное уравнение первой степени $Ax + By + Cz + D = 0$ (A, B, C одновременно не равны нулю).</p> <p>Пусть x_0, y_0, z_0 произвольная тройка чисел, удовлетворяющая уравнению (2):</p> $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \quad (3)$	

Вычтем из уравнения (2) тождество (3), получим

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0,$$

которое по предыдущему представляет собой уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и имеющей нормальный вектор $N=\{A; B; C\}$. Но уравнение (2) равносильно уравнению (1), т.к. уравнение (1) получается из уравнения (2) путем почленного вычитания тождества (3), а уравнение (2) в свою очередь получается из уравнения (1) путем почленного прибавления тождества (3). Следовательно, уравнение (2) является уравнением той же плоскости. Теорема доказана.

Докажем теперь следующее важное утверждение: *если два уравнения $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ определяют одну и ту же плоскость, то коэффициенты их пропорциональны.* Действительно $\vec{N}_1=\{A_1; B_1; C_1\}$ и $\vec{N}_2=\{A_2; B_2; C_2\}$ перпендикулярны к одной и той же плоскости, следовательно вектора \vec{N}_1 и \vec{N}_2 - коллинеарны, тогда

$$A_1=A_2 \cdot m; B_1=B_2 \cdot m; C_1=C_2 \cdot m.$$

Пусть $M_0(x_0; y_0; z_0)$ - любая точка плоскости: ее координаты должны удовлетворять каждому из данных уравнений, таким образом $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$. Умножим второе из этих равенств на m и вычтем из первого: получим

$$D_1 - D_2m=0 \text{ или } D_1 = D_2m \text{ и } \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2} = m.$$

Тем самым наше утверждение доказано.

1.3.2. Неполные уравнения плоскости

Здесь будем рассматривать частные случаи уравнения первой степени, когда какие-либо из коэффициентов A, B, C, D обращаются в нуль:

1) $D=0$: $Ax+By+Cz=0$ - определяет плоскость, проходящую через начало координат, т.к. числа $x=0; y=0; z=0$ удовлетворяют уравнению $Ax+By+Cz=0$. Следовательно начало координат принадлежит плоскости.

2) $C=0$: $Ax+By+D=0$ определяет плоскость, параллельную оси Oz (или проходящую через эту ось). В этом случае нормальный вектор $\vec{N}=\{A; B; C\}$ имеет нулевую проекцию на ось Oz ($C=0$); следовательно, этот вектор перпендикулярен оси Oz , а сама плоскость параллельна ей (или проходит через нее).

3) $B=0$ и $C=0$: $Ax+D=0$ - определяет плоскость, параллельную координатной плоскости Oyz (или совпадающую с ней). В этом случае нормальный вектор $\vec{N}=\{A; B; C\}$ имеет нулевые проекции на оси Oy и Oz ($B=0$ и $C=0$); следовательно, вектор \vec{N} перпендикулярен к осям Oy и Oz , а сама плоскость параллельна им (или проходит через каждую из них). Но это и означает, что плоскость, определяемая уравнением $Ax+D=0$, параллельна плоскости Oyz или совпадает с ней.

По аналогии с предыдущим легко установить, что:

1. Уравнение $Ax+Cz+D=0$ задает плоскость, параллельную оси Oy (или проходящую через нее). Уравнение $By+Cz+D=0$ задает плоскость, параллельную оси Ox (или проходящую через нее).

2. Уравнение $By+D=0$ задает плоскость, параллельную плоскости Oxz (или совпадающую с ней). Уравнение $Cz+D=0$ задает плоскость, параллельную плоскости Oxy (или совпадающую с ней).

1.3.3. Уравнение плоскости в отрезках

Пусть в уравнении плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ ни один из коэффициентов A, B, C, D не равен нулю. Сделав следующие преобразования:

$$Ax+By+Cz=-D;$$

$$\frac{Ax}{-D} + \frac{By}{-D} + \frac{Cz}{-D} = 1;$$

$$\frac{\frac{x}{-D}}{\frac{-D}{A}} + \frac{\frac{y}{-D}}{\frac{-D}{B}} + \frac{\frac{z}{-D}}{\frac{-D}{C}} = 1.$$

И вводя обозначения $a = -\frac{D}{A}$; $b = -\frac{D}{B}$; $c = -\frac{D}{C}$, получим $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Это специальный вид уравнения плоскости называемый **уравнением плоскости "в отрезках"**. Здесь числа a, b, c имеют простой геометрический смысл, а именно a, b, c - это величины отрезков, которые плоскость отсекает на координатных осях. Чтобы убедиться в этом, достаточно найти точки пересечения плоскости с координатными осями. Точка пересечения плоскости с осью Ox определяется из уравнения этой плоскости $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ при условии $y=z=0$. Отсюда $x=a$. Таким образом, величина отрезка, отсекаемого плоскостью на оси Ox , действительно равна a . Аналогично, отрезки отсекаемые плоскостью на осях Oy и Oz , имеют величины, равные соответственно b и c .

Пример. Составить уравнение плоскости, зная, что она отсекает на координатных осях отрезки $a=3$; $b=-4$; $c=2$.

Решение. На основании предыдущего получаем искомое уравнение сразу:

$$\frac{x}{3} - \frac{y}{4} + \frac{z}{2} = 1 \text{ или } 4x - 3y + 6z - 12 = 0.$$

1.3.4. Нормальное уравнение плоскости. Расстояние от точки до плоскости

Возьмем в пространстве XYZ некоторую плоскость Π . Проведем через начало координат прямую n , перпендикулярную к плоскости Π . Назовем эту прямую **нормалью**, - и отметим буквой P точку пересечения нормали с плоскостью Π . На нормали введем положительное направление от начала координат O к точке P . Если точка P совпадает с O , т.е. данная плоскость проходит через начало координат, то положительное направление нормали выберем произвольно. Обозначим

через α, β, γ углы, которые составляет направленная нормаль с осями координат, через p - длину отрезка OP .

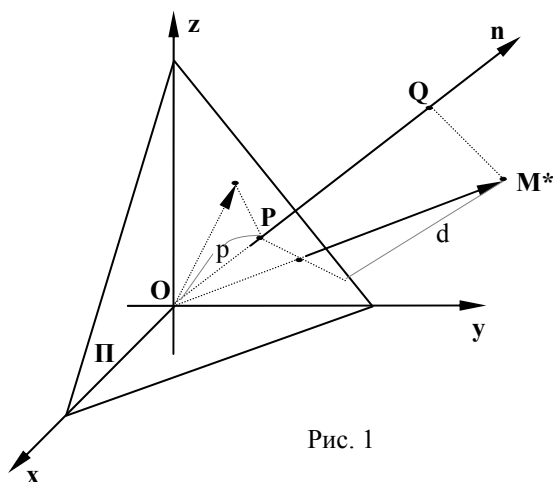


Рис. 1

Мы выведем уравнение данной плоскости Π , считая известными числа $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ и p . С этой целью возьмем на плоскости Π произвольную точку M и обозначим через x, y, z ее координаты. Очевидно, проекция вектора \overrightarrow{OM} на нормаль равна OP , а так как положительное направление отрезка \overrightarrow{OP} , то величина этого отрезка выражается положительным числом p :

$$n \cdot \overrightarrow{OM} = p \quad (1)$$

Заметим, что $\overrightarrow{OM} = \{x; y; z\}$, отсюда $n \cdot \overrightarrow{OM} = x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma \quad (2)$

Из равенств (1) и (2) следует, что $x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = p$ или

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0 \quad (3)$$

Это уравнение плоскости, оно носит специальное название: **нормальное уравнение плоскости**; в этом уравнении $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ суть направляющие косинусы нормали, p - расстояние плоскости от начала координат.

Пусть как и ранее n нормаль к произвольной плоскости Π , M^* - произвольная точка пространства, d - ее расстояние от данной плоскости (см. рис. 1).

Условимся называть отклонением точки M^* от данной плоскости число $+d$, если M^* лежит по ту сторону от плоскости, куда идет положительное направление нормали, $-d$, если M^* лежит с другой стороны от данной плоскости. Отклонение точки от плоскости обозначим буквой δ ; таким образом, $\delta = \pm d$, причем полезно заметить, что $\delta = +d$, когда точка M^* и начало координат лежат по разные стороны от плоскости, и $\delta = -d$, когда точка M^* и начало координат лежат по одну сторону от плоскости (для точек, лежащих на плоскости, $\delta = 0$).

1.3. Аналитическая геометрия в пространстве	Для замечаний
<p><u>Теорема.</u> Если точка M^* имеет координаты $(x^*; y^*; z^*)$, а плоскость задана нормальным уравнением $x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0$, то отклонение точки M^* от этой плоскости задается формулой</p> $\delta = x^* \cos \alpha + y^* \cos \beta + z^* \cos \gamma - p.$ <p><u>Доказательство.</u> Спроектируем точку M^* на нормаль; пусть Q - ее проекция (рис. 1); тогда</p> $\delta = PQ = OQ - OP,$ <p>где PQ, OQ, OP - это величины направленных отрезков нормали: \overline{PQ}, \overline{OQ} и \overline{OP}. Но $OQ = n_{\vec{p}} \overline{OM^*}$, $OP = p$; следовательно</p> $\delta = n_{\vec{p}} \overline{OM^*} - p \quad (5)$ <p>Из ранее доказанного</p> $n_{\vec{p}} \overline{OM^*} = x^* \cos \alpha + y^* \cos \beta + z^* \cos \gamma \quad (6)$ <p>Из равенств (5) и (6) получаем:</p> $\delta = x^* \cos \alpha + y^* \cos \beta + z^* \cos \gamma - p$ <p>Теорема доказана.</p> <p>Покажем, как привести общее уравнение плоскости к нормальному виду. Пусть</p> $Ax + By + Cz + D = 0 \quad (7)$ <p>– общее уравнение некоторой плоскости, а</p> $x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0 \quad (3)$ <p>– ее нормальное уравнение. Так как уравнения (7) и (3) определяют одну и ту же плоскость, то коэффициенты этих уравнений пропорциональны, т.е.</p> $\mu A = \cos \alpha, \mu B = \cos \beta, \mu C = \cos \gamma, \mu D = -p. \quad (8)$ <p>Чтобы найти множитель μ, возведем первые три из этих равенств в квадрат и сложим. Получим:</p> $\mu^2 (A^2 + B^2 + C^2) = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma.$ <p>Т.к. $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$, то $\mu = \frac{\pm 1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$</p> <p>Число μ называется нормирующим множителем. Для определения знака нормирующего множителя используем последнее из равенств (8): $\mu D = -p$. Следовательно: знак нормирующего множителя противоположен знаку свободного члена нормируемого уравнения. Если $D = 0$, то знак нормирующего множителя можно выбирать по желанию.</p> <p><u>Пример.</u> Даны плоскость $12x - 4y + 3z + 14 = 0$ и точка $M(1; 3; 4)$. Найти отклонение точки M от данной плоскости.</p> <p><u>Решение.</u> Приведем данное уравнение к нормальному виду. Найдем нормирующий множитель: $\mu = \frac{-1}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2}} = -\frac{1}{13}.$ Умножая данное уравнение</p>	

на μ , получим исходное нормальное уравнение плоскости: $-\frac{1}{13}(12x - 4y + 3z + 14) = 0$. Подставляя в левую часть этого уравнения координаты точки M , имеем: $\delta = -\frac{1}{13}(12 \cdot 1 - 4 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 14) = -2$. Итак, точка M имеет отрицательное отклонение от данной плоскости и удалена от нее на расстояние $d=2$.

1.3.5. Уравнение прямой в пространстве

Рассмотрим произвольную прямую, обозначим ее буквой a . Обозначим через Π_1 и Π_2 какие-нибудь две различные плоскости, пересекающиеся по прямой a и предположим, что уравнения этих плоскостей будут: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Так как прямая a представляет собой пересечение плоскостей Π_1 и Π_2 , то она определяется совместным заданием двух уравнений:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Поставим задачу: всегда ли два уравнения первой степени совместно определяют некоторую прямую? Очевидно, это будет только в том случае, когда соответствующие им плоскости не параллельны и не совпадают друг с другом, т.е. когда нормальные векторы этих плоскостей $N_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ и $N_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$ не коллинеарны. Два уравнения вида (1) совместно определяют прямую в томи только в том случае, когда коэффициенты A_1, B_1, C_1 одного из них не пропорциональны коэффициентам A_2, B_2, C_2 другого.

1.3.6. Направляющий вектор прямой. Канонические уравнения прямой. Параметрические уравнения прямой

Рассмотрим произвольную прямую. Каждый не равный нулю вектор, лежащий на данной прямой или параллельный ей, называется **направляющим вектором** этой прямой. Указанные векторы называются направляющими именно потому, что любой из них, будучи задан, определяет направление прямой.

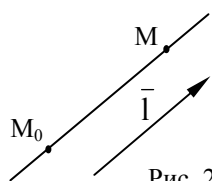


Рис. 2.

Направляющий вектор прямой будем обозначать буквой \bar{l} , его координаты - m, n, p :

$$\bar{l} = \{m; n; p\}$$

Выведем уравнение прямой, проходящей через заданную точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и имеющей данный направляющий вектор $\bar{l} = \{m; n; p\}$.

Пусть $M(x; y; z)$ - произвольная ("текущая") точка прямой (рис. 2). Вектор $\overline{M_0M} = \{x - x_0; y - y_0; z - z_0\}$ коллинеарен направляющему вектору $\bar{l} = \{m; n; p\}$. Следовательно, координаты вектора $\overline{M_0M}$ пропорциональны координатам вектора \bar{l} :

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \quad (1)$$

Этим соотношениям удовлетворяют координаты каждой точки $M(x; y; z)$, лежащей на рассматриваемой прямой, напротив, если точка $M(x; y; z)$ не лежит на прямой, то ее координаты не удовлетворяют соотношениям (1), так как в этом случае векторы $\vec{M_0M}$ и \vec{l} не коллинеарны и координаты их не пропорциональны. Таким образом, уравнения (1) представляют собой уравнения прямой, проходящей, через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ в направлении вектора $\vec{l} = \{m; n; p\}$.

Уравнения (1) прямой мы будем называть **каноническими**. Пусть некоторая прямая задана двумя общими уравнениями:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Покажем, как составить канонические уравнения этой прямой. Обозначим плоскости, определяемые данными уравнениями, через Π_1 и Π_2 , нормальные векторы этих плоскостей через \vec{N}_1 и \vec{N}_2 . Для составления канонических уравнений данной прямой, нужно:

1) найти произвольную ее точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$; для этого следует задать численное значение одной из неизвестных координат x_0, y_0, z_0 и подставить его вместо соответствующей переменной в уравнения (2); после этого две остальные координаты определяются из уравнений (2) путем их совместного решения;

2) найти направляющий вектор $\vec{l} = \{m; n; p\}$. Так как данная прямая определена пересечением плоскостей через Π_1 и Π_2 , то она перпендикулярна к каждому из векторов \vec{N}_1 и \vec{N}_2 . Поэтому в качестве вектора \vec{l} можно взять любой вектор, перпендикулярный к векторам \vec{N}_1 и \vec{N}_2 , например, их векторное произведение: $\vec{l} = [\vec{N}_1 \vec{N}_2]$. Поскольку координаты векторов \vec{N}_1 и \vec{N}_2 известны: $\vec{N}_1 = \{A_1; B_1; C_1\}$, $\vec{N}_2 = \{A_2; B_2; C_2\}$, для вычисления координат вектора $\vec{l} = \{m; n; p\}$ достаточно применить формулу для нахождения координат векторного произведения.

Пример. Найти канонические уравнения прямой

$$\begin{cases} 2x + y - z - 4 = 0 \\ 3x - y + 2z - 5 = 0 \end{cases}$$

Решение. Полагая, например, $x_0=1$, находим из данной системы: $y_0=6, z_0=4$; таким образом, мы уже знаем одну точку прямой: $M_0(1; 6; 4)$. Теперь найдем направляющий вектор. Имеем: $\vec{N}_1 = \{2; 1; -1\}$, $\vec{N}_2 = \{3; -1; 2\}$; отсюда $\vec{l} = [\vec{N}_1 \vec{N}_2] = \{1; -7; -5\}$, т.е. $m=1, n=-7, p=-5$. Каноническое уравнение данной прямой мы получим, подставляя найденные значения x_0, y_0, z_0, m, n, p в равенства (1):

$$\frac{x - 1}{1} = \frac{y - 6}{-7} = \frac{z - 4}{-5}$$

Пусть даны канонические уравнения какой-нибудь прямой. Обозначим буквой t каждое из парных отношений, которые участвуют в этих канонических уравнениях; мы получим:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} = t$$

Отсюда

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases} \quad (3)$$

Это - параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ в направлении вектора $\vec{l} = \{m; n; p\}$. В уравнениях (3) t рассматривается как произвольно изменяющийся параметр, x, y, z - как функции от t ; при изменении t величины x, y, z меняются так, что точка $M(x; y; z)$ движется по данной прямой. Параметрические уравнения прямой удобно применять в тех случаях, когда требуется найти точку пересечения прямой с плоскостью.

Пример. Даны прямая $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-4}{1}$ и плоскость $x+2y+z-6=0$.

Найти точку их пересечения.

Решение. Задача сводится к определению координат точки x, y, z из трех данных уравнений (мы имеем два уравнения прямой и одно уравнение плоскости). Полагая $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-4}{1} = t$, отсюда $x=2+t, y=3+2t, z=4+t$.

Подставляя эти выражения влевую часть уравнения данной плоскости получим $(2+t)+2(3+2t)+(4+t)-6=0$.

Решая это уравнение, находим: $t=-1$, следовательно, координаты искомой точки будут $x=1, y=1, z=3$.

1.3.7. Некоторые дополнительные предложения и примеры

1) В аналитической геометрии часто требуется составить уравнение прямой, зная две ее точки. Решим эту задачу в общем виде, считая данными две произвольные точки:

$$M_1(x_1; y_1; z_1) \text{ и } M_2(x_2; y_2; z_2).$$

Для решения задачи достаточно заметить, что в качестве направляющего вектора рассматриваемой прямой можно взять вектор $\vec{l} = \overrightarrow{M_1M_2}$; отсюда $m=x_2 - x_1; n=y_2 - y_1; p=z_2 - z_1$, окончательно получим

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

Это и есть искомые (канонические) уравнения прямой, проходящей через две данные точки: $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$.

2) Решим также в общем виде задачу: составить уравнение плоскости, проходящей через три различные точки: $M_1(x_1; y_1; z_1); M_2(x_2; y_2; z_2); M_3(x_3; y_3; z_3)$.

Обозначим через x, y, z координаты произвольной точки M пространства и рассмотрим три вектора:

$$\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1; y - y_1; z - z_1\}$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$$

$$\overrightarrow{M_1M_3} = \{x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1\}$$

Точка M лежит на плоскости $M_1M_2M_3$ в том и только в том случае, когда векторы $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ и $\overrightarrow{M_1M_3}$ компланарны; условием компланарности этих трех векторов является равенство нулю их смешанного произведения или равенство нулю определителя третьего порядка, составленного из их координат.

В нашем случае имеем:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Это и есть искомое уравнение плоскости, проходящей через точки M_1, M_2, M_3 , так как ему удовлетворяют координаты x, y, z точки M в том и только в том случае, когда она лежит в этой плоскости.

3) Угол между двумя прямыми.

Углом между двумя прямыми в пространстве называют любой из углов, образованных двумя прямыми, проведенными из одной точки, параллельно данным прямым. Если прямые параллельны, то угол между ними считается равным нулю или π .

Пусть даны уравнения двух прямых:

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1};$$

$$\frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}.$$

Обозначим угол между прямыми через α , а угол между их направляющими векторами \vec{l}_1 и \vec{l}_2 - через φ . При этом

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2|}{|\vec{l}_1| \cdot |\vec{l}_2|} \quad (1)$$

Так как $\alpha = \varphi$ или $\alpha = \pi - \varphi$, то $\cos \alpha = \pm \cos \varphi$. Следовательно,

$$\cos \alpha = \pm \frac{|\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2|}{|\vec{l}_1| \cdot |\vec{l}_2|} \quad (2)$$

или в координатной форме:

$$\cos \alpha = \pm \frac{m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2 + p_1 \cdot p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}} \quad (3)$$

Формулы (2) и (3) являются формулами для определения угла между двумя прямыми в пространстве.

4) Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых в пространстве.

Для того, чтобы две прямые были параллельны, необходимо и достаточно, чтобы их направляющие векторы \vec{l}_1 и \vec{l}_2 были коллинеарны, т.е. соответствующие координаты векторов \vec{l}_1 и \vec{l}_2 были пропорциональны:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}. \quad (4)$$

Условие (4) является условием параллельности двух прямых в пространстве.

Для того, чтобы прямые были перпендикулярны между собой, необходимо и достаточно, чтобы направляющие их векторы \vec{l}_1 и \vec{l}_2 были ортогональными.

Условие ортогональности двух векторов \vec{l}_1 и \vec{l}_2 :

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0 \quad (5)$$

является условием перпендикулярности двух прямых в пространстве.

Пример. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $M(3; 2; -1)$ перпендикулярно двум прямым:

$$a_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y-7}{-3} = \frac{z+4}{5}; \quad a_2: \frac{x+3}{4} = \frac{y+5}{1} = \frac{z-9}{-2}.$$

Составим уравнение любой прямой, проходящей через точку M :

$$\frac{x-3}{m} = \frac{y-2}{n} = \frac{z+1}{p} \quad (5)$$

Используя условие перпендикулярности искомой прямой к прямой a_1 , а затем к прямой a_2 получим

$$\begin{aligned} 2m-3n+5p &= 0 \\ 4m+n-2p &= 0 \end{aligned}$$

Из этой однородной структуры линейных уравнений с неизвестными m, n, p найдем отношения неизвестных:

$$m:n:p = \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1:24:14$$

Подставляя в уравнения прямой (6) вместо m, n, p пропорциональные им величины, получим искомые уравнения:

$$\frac{x-9}{1} = \frac{y+13}{24} = \frac{z-15}{14}$$

5) Углом между прямой и плоскостью называют любой из двух смежных углов, образованных прямой и ее проекцией на плоскость. Пусть дано уравнение плоскости Π :

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

и уравнение прямой l :

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

$\vec{N} = \{A; B; C\}$ - нормальный вектор плоскости

$\vec{l} = \{m; n; p\}$ - направляющий вектор прямой

Обозначим угол между векторами \vec{N} и \vec{l} через φ , а угол между плоскостью Π и прямой l - через α . Найдем косинус угла φ между векторами \vec{N} и \vec{l} :

$$\cos \varphi = \frac{(\vec{N} \cdot \vec{l})}{|\vec{N}| \cdot |\vec{l}|}$$

При этом $\sin \alpha = \pm \cos \varphi$. Следовательно,

$$\sin \alpha = \pm \frac{(\vec{N} \cdot \vec{l})}{|\vec{N}| \cdot |\vec{l}|}$$

или, в координатной форме,

$$\sin \alpha = \pm \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$$

Для того, чтобы плоскость Π была параллельна прямой l необходимо и достаточно, чтобы векторы $\vec{N} = \{A; B; C\}$ и $\vec{l} = \{m; n; p\}$ были ортогональны между собой.

Условие ортогональности двух векторов \vec{N} и \vec{l} может быть записано как равенство нулю их скалярного произведения:

$$(\vec{N} \cdot \vec{l}) = 0$$

или в координатной форме:

$$Am + Bn + Cp = 0$$

Для того, чтобы прямая l была перпендикулярна плоскости Π , необходимо и достаточно, чтобы вектор \vec{l} был коллинеарен вектору \vec{N} .

Условие коллинеарности двух векторов \vec{N} и \vec{l} может быть записано как равенство нулю их векторного произведения:

$$(\vec{N} \times \vec{l}) = 0$$

или

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$$

Пример. Составить уравнение плоскости Π , проходящей через точку $M(-1; 2; -3)$ параллельно двум прямым:

$$(l_1) \quad \frac{x-2}{3} = \frac{y+6}{4} = \frac{z-6}{-5}$$

$$(l_2) \quad \frac{x+3}{2} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z}{1}$$

Напишем уравнение связки плоскостей с центром в точке М:

$$A(x+1)+B(y-2)+C(z+3)=0 \quad (4)$$

Используем условие параллельности плоскости Π и прямой l_1 , а затем к прямой l_2 :

$$3A+4B+5C=0$$

$$2A-3B+C=0$$

Из этой системы однородных уравнений определим отношения коэффициентов A, B, C и затем в уравнение (4) вместо коэффициентов A, B, C подставим пропорциональные им величины:

$$A:B:C = \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -11:-13:-17;$$

$$11(x+1)+13(y-2)+17(z+3)=0;$$

$$11x+13y+17z+36=0.$$

6) Пучок плоскостей.

Через всякую прямую в пространстве можно провести бесчисленное множество плоскостей. Совокупность всех плоскостей, проходящих через одну и ту же прямую, называется **пучком плоскостей**.

Пусть дано уравнение прямой как линии пересечения двух плоскостей:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Составим уравнение:

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0, \quad (2)$$

где λ - произвольное число. При любом λ это уравнение первой степени, кроме того, при любом λ это уравнение определяет плоскость, проходящую через прямую (1).

Действительно, если точка M_0 принадлежит прямой (1), то:

$$\begin{cases} A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1 = 0 \\ A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2 = 0 \end{cases}$$

и следовательно

$$A_1x_0+B_1y_0+C_1z_0+D_1+\lambda(A_2x_0+B_2y_0+C_2z_0+D_2)=0.$$

Уравнение (2) называется **уравнением пучка плоскостей**, проходящих через прямую (1).

Уравнение (2) дает любую плоскость пучка, за исключением плоскости

1.3. Аналитическая геометрия в пространстве	Для замечаний
<p style="text-align: center;">$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$</p> <p><u>Пример.</u> Найти проекцию прямой</p> $\begin{cases} 2x - 3y + 4z - 1 = 0 \\ x + 5y - 2z + 3 = 0 \end{cases} \quad (1)$ <p>На плоскость $3x-4y+z-8=0$ (П).</p> <p>Составим уравнение пучка плоскостей, проходящих через прямую (1)</p> $2x-3y+4z-1+\lambda(x+5y-2z+3)=0 \quad (3)$ <p>или $(2+\lambda)x+(5\lambda-3)y+(4-2\lambda)z+(3\lambda-1)=0$</p> <p>Определим λ, используя условие перпендикулярности плоскостей: $3(2+\lambda)-4(5\lambda-3)+(4-2\lambda)=0$. Откуда $\lambda = \frac{22}{19}$. Подставив значение в уравнение (3), найдем уравнение проектирующей плоскости:</p> $2x - 3y + 4z - 1 + \frac{22}{19}(x + 5y - 2z + 3) = 0$ $60x + 53y + 32z + 47 = 0$ <p>Уравнения искомой проекции можно записать как уравнения линии пересечения плоскостей:</p> $\begin{cases} 3x - 4y + z - 8 = 0 \\ 60x + 53y - 32z + 47 = 0 \end{cases}$ <p><u>Пример.</u> Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую</p> $\begin{cases} 3x+2y+5z+6=0 \\ x+4y+3z+4=0 \end{cases} \text{ параллельно прямой } \frac{x-1}{3} = \frac{y-5}{2} = \frac{z+1}{-3}.$ <p>Решение. Составим уравнение пучка плоскостей, проходящих через первую из данных прямых:</p> $3x+2y+5z+6+\lambda(x+4y+3z+4)=0 \quad (*)$ <p>Преобразуем это уравнение: $(3+\lambda)x+(2+4\lambda)y+(5+3\lambda)z+(6+4\lambda)=0$. Используя условие параллельности прямой и плоскости получим: $3(3+\lambda)+2(2+4\lambda)-3(5+3\lambda)=0$. Отсюда $\lambda=1$. Подставляя найденное значение λ в уравнение (*), найдем: $4x+6y+8z+10=0$ или $2x+3y+4z+5=0$.</p> <p><u>Пример.</u> Найти расстояние от точки $M(1; 2; 3)$ до прямой</p> $\frac{x-11}{2} = \frac{y-18}{5} = \frac{z-4}{-2}$ <p>Решение. Проведем через M плоскость Π, перпендикулярную к данной прямой и найдем точку P, где эта плоскость пересекает данную прямую. Искомое расстояние от точки M до данной прямой будет равно расстоянию от точки M до точки P.</p> <p>Искомое уравнение плоскости Π можно записать в виде:</p> $A(x-1)+B(y-1)+C(z-1)=0;$ <p>эта плоскость должна быть перпендикулярна к данной прямой. По условию перпендикулярности прямой к плоскости имеем:</p>	

$$\frac{A}{2} = \frac{B}{5} = \frac{C}{-2}.$$

Выбирая здесь множитель пропорциональности для простоты равным единице, находим $A=2$, $B=5$, $C=-2$. Итак, плоскость имеет уравнение $2(x-1)+5(y-1)-2(z-1)=0$ или $2x+5y-2z=0$.

Теперь мы должны найти точку P , в которой эта плоскость пересекается с данной прямой. Для этого нужно уравнение данной прямой решить совместно с найденным уравнением плоскости Π .

$$\frac{x-11}{2} = \frac{y-18}{5} = \frac{z-4}{-2} = t$$

Отсюда $x=2t+11$, $y=5t+18$, $z=4-2t$. Подставляя эти уравнения в уравнение найденной плоскости $2x+5y-2z-5=0$ получим:

$$\begin{aligned} 4t+22+25t+90+4t-8-5 &= 0; \\ 33t &= -99; \\ t &= -3. \end{aligned}$$

Координаты точки P будут равны $x=5$, $y=3$, $z=10$.

Искомое расстояние d от точки M до данной прямой, равное расстоянию между точками M и P , найдется по формуле нахождения расстояния между двумя точками

$$d = \sqrt{(5-1)^2 + (3-1)^2 + (10-1)^2} = \sqrt{101}.$$

Пример. Определить условие, при котором две прямые

$$\begin{aligned} (l_1) \quad & \frac{x-a_1}{m_1} = \frac{y-b_1}{n_1} = \frac{z-c_1}{p_1} \\ (l_2) \quad & \frac{x-a_2}{m_2} = \frac{y-b_2}{n_2} = \frac{z-c_2}{p_2} \end{aligned}$$

лежат на одной плоскости.

Решение. Пусть $\vec{l}_1 = \{m_1; n_1; p_1\}$ и $\vec{l}_2 = \{m_2; n_2; p_2\}$ направляющие векторы данных прямых, $M_1(a_1; b_1; c_1)$ и $M_2(a_2; b_2; c_2)$ - точки, принадлежащие прямым l_1 и l_2 . Вектор $\overline{M_1M_2} = \{a_2-a_1; b_2-b_1; c_2-c_1\}$ и направляющие векторы прямых \vec{l}_1 и \vec{l}_2 компланарны в том и только в том случае, когда прямые l_1 и l_2 лежат в одной плоскости. Условием компланарности трех векторов является равенство нулю их смешанного произведения: $\overline{M_1M_2} \cdot \vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2 = 0$, что в координатной записи может быть представлено в следующем виде:

$$\begin{vmatrix} a_2-a_1 & b_2-b_1 & c_2-c_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0$$

1.4. Введение в математический анализ	Для замечаний
<p style="text-align: center;">1.4. Введение в математический анализ</p> <p style="text-align: center;">1.4.1. Основные понятия о множествах, логическая символика</p> <p style="text-align: center;"><i>1.4.1.1. Некоторые сведения о множествах</i></p> <p style="text-align: center;">Основные понятия</p> <p>Множество - есть исходное, начальное (а следовательно, и неопределяемое) понятие. Можно лишь сказать, что множество есть собрание объектов, при этом не будем уточнять, какие собрания объектов являются множествами. Объекты этого собрания называются элементами множества.</p> <p>Множества, состоящие из конечного числа элементов, называются конечными множествами. Если множество состоит из n элементов, то это обозначают следующим образом:</p> $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} = \{x_n\}.$ <p>Часто приходится сталкиваться с другими, неконечными, или, как принято говорить, бесконечными множествами. Таковы, например, множества всех натуральных чисел, всех нечетных чисел и т.д.</p> <p>К числу конечных множеств мы будем относить и пустое множество, т.е. множество, не содержащее ни одного элемента; число элементов пустого множества есть нуль. Такое множество обозначим символом \emptyset.</p> <p>Если элемент x принадлежит множеству A, то пишут $x \in A$.</p> <p>Запись $x \in A$, или $x \notin A$ означает, что x не есть элемент множества A.</p> <p>Запись $A \subseteq B$ (или $B \supseteq A$) означает, что каждый элемент множества A является элементом множества B или, другими словами, множество A есть подмножество множеств B (или множество A включено в множество B).</p> <p>Два множества называются равными, если они состоят из одних и тех же элементов: запись $A=B$.</p> <p>Если A есть подмножество B, причем множество A не совпадает с множеством B, то пишут $A \subset B$ или $B \supset A$.</p> <p>Если множество A не принадлежит множеству B, то пишут $A \not\subset B$, $A \notin B$. Знаки \in, \subset, \subseteq, \supset, \supseteq называются знаками включения.</p> <p>разберем некоторые понятия математической логики. Прежде всего, что такое математическая логика?</p> <p>Математическая логика- наука о законах логического вывода.</p> <p>В математической логике под предложением понимают то же самое, что вкладывают в смысл этого термина в грамматике любого естественного языка.</p> <p>Высказыванием называется предложение, о котором имеет смысл говорить, что оно истинно или ложно. Каждое высказывание либо истинно, либо ложно. Истинному высказыванию будем ставить в соответствие единицу, а ложному- логический ноль (1;0).</p> <p>Пример: $(10=15)=0$ (высказывание “10 равно 15” ложно) $(5>-1)=1$ (высказывание “5 больше -1” истинно).</p> <p>Будем обозначать высказывания буквами какого-либо алфавита: X, Y, L, \dots; A, B, \dots</p>	

Высказывательная форма- это выражение, содержащее одну или несколько переменных и становящееся высказыванием при подстановке чисел или элементов каких-либо множеств вместо своих переменных.

Основные операции алгебры логики.

При записи математических рассуждений будем использовать следующую экономную символику, описывающую различные алгебраические операции (операции алгебры логики).

а) Отрицание (негация) : $\neg X$; \bar{X} -“не X”. Отрицанием высказывания X называется \bar{X} или $\neg X$ (“не X” или “неверно, что X”), которое означает высказывание, утверждающее, что X ложно.

Таблица истинности

X	\bar{X}
1	0
0	1

б) Конъюнкцией (логическим произведением) высказываний X, Y называется высказывание $X \wedge Y$ (“X и Y”), истинное тогда и только тогда, когда оба высказывания, X и Y, истинны.

X	Y	$X \wedge Y$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

в) Дизъюнкция (логическое сложение) высказываний X, Y- $X \vee Y$ (“X или Y”) - высказывание истинное тогда и только тогда, когда истинно хотя бы одно из высказываний X и Y.

X	Y	$X \vee Y$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

г) Импликация (логическое следствие) $X \Rightarrow Y$ (“если X, то Y” или “из X следует, что Y”) есть высказывание, ложное тогда и только тогда, когда X истинно, Y ложно. В остальных случаях $X \Rightarrow Y$ истинно.

$X \Rightarrow Y$ означает: X является достаточным условием для Y. Y является необходимым условием для X.

Таблица истинности

X	Y	$X \Rightarrow Y$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

д) Эквивалентность двух высказываний X и Y (“ X тогда и только тогда, когда Y ”) - есть высказывание $X \Leftrightarrow Y$, истинное тогда и только тогда, когда оба высказывания X и Y сразу истинны или ложны.
 $X \Leftrightarrow Y$ - “ X ” является необходимым и достаточным условием “ Y ”.

Таблица истинности.

X	Y	$X \Leftrightarrow Y$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Кванторы.

Иногда удобно представить некоторые словесные выражения посредством символов.

\forall - каково бы ни было, для любого (квантор всеобщности).

\exists - существует (квантор существования).

$(\forall x \in A): \alpha$ - для любого $x \in A$ выполняется предложение α .

Символом “:” будем обозначать следующую группу слов: “такое, что”, “удовлетворяет условию”, “выполняется”.

Отрицание высказываний, содержащих кванторы

Отрицание под знаком \forall или \exists превращает его, соответственно, в знак \exists или \forall и переносится на свойство, стоящее после двоеточия.

Пример 1.

Пусть имеем высказывание: $(\forall x \in A): x \leq \xi$ (для любого x из множества A имеет место неравенство $x \leq \xi$). Если высказываемое утверждение не имеет места, то следовательно, неравенство $x \leq \xi$ выполняется не для каждого $x \in A$, значит существует элемент $x \in A$, для которого неравенство $x \leq \xi$ не выполняется.

$$\overline{(\forall x \in A): x \leq \xi} \Leftrightarrow (\exists x \in A): \overline{x \leq \xi} \Leftrightarrow (\exists x \in A): x > \xi$$

Пример 2.

Используя закон Моргана, построить отрицание предела функции $f(x)$ в точке $x=a$.

Сформулируем определение предела функции $f(x)$ в точке $x=a$ по Коши с использованием введенной символики

$$(\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b) \stackrel{\text{def}}{=} (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0): (\forall x \in \{x\}) [0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon].$$

Здесь на языке алгебры записано: вещественное число a называется пределом функции $f(x)$ в точке $x=a$, если для любого вещественного положительного числа ε найдется вещественное положительное число δ , что для всех значений аргумента x из области определения таких, что, если

выполнены неравенства $0 < |x - a| < \delta$, будет следовать неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Операции над множествами

Объединение $A \cup B$ множеств A и B

Множество, состоящее из элементов, каждый из которых принадлежит хотя бы одному из данных множеств, называется объединением множеств A и B . Указанное определение легко распространяется на случай трех и более множеств

$$A \cup B \stackrel{\text{def}}{=} \{x : (x \in A) \cup (x \in B)\}$$



$A \cup B$ заштриховано на диаграмме.

Пример 1.

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\},$$

$$B = \{1, 2\},$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Множество $A \cup B$ по определению не содержит неразличимых элементов и, следовательно, элементы 1 и 2, входящие в множества A и B , входят в $A \cup B$ один раз.

Пересечение $A \cap B$ множеств A и B есть множество элементов, принадлежащих и A и B .

$$A \cap B \stackrel{\text{def}}{=} \{x : (x \in A) \wedge (x \in B)\}$$



$A \cap B$ заштриховано на диаграмме.

Пример 2.

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}; B = \{1, 2\}$$

$$A \cap B = \{1, 2\}$$

Два множества A и B называются **непересекающимися**, если $A \cap B = \emptyset$.

Разность $A \setminus B$ множеств A и B

Разностью множеств A и B называется совокупность тех элементов A , которые не содержатся в B .

$$A \setminus B \stackrel{\text{def}}{=} \{x : (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$$



$A \setminus B$ заштриховано на диаграмме.

Пример 3.

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{1, 2\}$$

$$A \setminus B = \{3, 4, 5\}.$$

Взаимно однозначное соответствие и эквивалентность множеств

Если каждому элементу множества A сопоставлен единственный элемент множества B и при этом всякий элемент множества B сопоставляется одному и только одному элементу множества A , то говорят, что между множествами A и B установлено взаимно однозначное соответствие.

Множества, между которыми установлено взаимно однозначное соответствие, называются эквивалентными. Это записывается следующим образом: $A \sim B$. Если два множества эквивалентны, то говорят, что они равномощны, или имеют одну и ту же мощность.

Прямое произведение двух множеств

Пусть имеются два множества A и B и пусть $a \in A$, $b \in B$. Совокупность всевозможных упорядоченных пар (a, b) составляет новое множество, называемое прямым произведением A и B . Прямое произведение обозначается $A \times B$.

1.4.1.2. Вещественные числа и их изображение на числовой оси
Основные свойства рациональных чисел

Основным понятием математики являются числа натурального ряда:

$N \stackrel{\text{def}}{=} 1, 2, 3, \dots, n, \dots$ которые появились в результате счета предметов.

Целые числа: $Z \stackrel{\text{def}}{=} \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$

Рациональным числом называется число, представимое в виде отношения двух целых чисел $\frac{p}{q}$ ($q \neq 0$; p и q - целые числа).

Отметим при этом, что одно и то же рациональное число представимо в виде отношения различных целых чисел $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \dots$. Множество всех рациональных чисел будем обозначать через Q , тогда

$$Q \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ x: \left(x = \frac{p}{q} \right) \wedge (p, q \in Z) \wedge (q \neq 0) \right\}$$

В курсе элементарной математики вводились определения операций сложения и умножения рациональных чисел, давалось правило сравнения этих чисел, доказывались простейшие свойства.

Поэтому перечислим без доказательства основные свойства рациональных чисел, вытекающие из соответствующих свойств целых чисел.

Главную роль среди свойств играют три правила:

- правило сравнения;
- правило образования суммы;
- правило образования произведения.

1. Правило сравнения: любые два рациональные числа a и b связаны одним и только одним из трех знаков $>$, $<$, $=$, причем если $a > b$, то $b < a$.

1.4. Введение в математический анализ	Для замечаний
<p>Правило сравнения рациональных чисел формулируется так: два неотрицательных рациональных числа $a = \frac{p_1}{q_1}$ и $b = \frac{p_2}{q_2}$ связаны тем же знаком, что и два целых числа $p_1 q_2$ и $p_2 q_1$; два неположительных рациональных числа a и b связаны тем же знаком, что и два неотрицательных числа b и a; если a - неотрицательное, а b - отрицательное число, то $a > b$.</p> <p>Правило сравнения обладает следующим свойством:</p> <p>1. (из $a > b$ и $b > c$) $\Rightarrow a > c$ (свойство транзитивности знака $>$); (из $a = b$ и $b = c$) $\Rightarrow a = c$ (свойство транзитивности знака $=$).</p> <p>II. Правило образования сумм.</p> <p>Существует правило, посредством которого любым двум рациональным числам a и b ставится в соответствие определенное рациональное число c, называемое их суммой и обозначаемое символом $c = a + b$.</p> <p>Правило образования суммы рациональных чисел $a = \frac{p_1}{q_1}$ и $b = \frac{p_2}{q_2}$ определяется формулой $\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 q_2 + p_2 q_1}{q_1 q_2}$. Операция нахождения суммы называется сложением.</p> <p>Правило сложения рациональных чисел обладает следующими свойствами:</p> <p>2. $a + b = b + a$ (коммутативность, или переместительное свойство); 3. $(a + b) + c = a + (b + c)$ (ассоциативность, или сочетательное свойство); 4. $(\exists 0 \in \mathbb{Q}: [(\forall a \in \mathbb{Q})((a + 0) = a)])$ (особая роль нуля); 5. $(\forall a \in \mathbb{Q})(\exists a^1 \in \mathbb{Q}): [a + a^1 = 0]$; число a^1 называется противоположным для числа a.</p> <p>III. Правило образования произведения.</p> <p>Существует правило, посредством которого любым двум рациональным числам a и b ставится в соответствие определенное рациональное число c, называемое их произведением и обозначаемое символом $c = ab$.</p> <p>Правило образования произведения рациональных чисел $a = \frac{m_1}{n_1}$ и $b = \frac{m_2}{n_2}$ определяется формулой $\frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1 m_2}{n_1 n_2}$.</p> <p>Операция нахождения произведения называется умножением. Свойства правила умножения рациональных чисел:</p> <p>6. $(\forall a, b \in \mathbb{Q}): [ab = ba]$ (переместительное свойство); 7. $(\forall a, b, c \in \mathbb{Q}): [(ab)c = a(bc)]$ (сочетательное свойство); 8. $(\exists 1 \in \mathbb{Q}): (\forall a \in \mathbb{Q})[a \cdot 1 = a]$ (особая роль единицы); 9. $(\forall a \neq 0 \wedge a \in \mathbb{Q})(\exists a^{-1} \in \mathbb{Q}): [a \cdot a^{-1} = 1]$ рациональное число a^{-1} называется обратным рациональному числу a.</p> <p>Свойства, связывающие правила сложения и умножения:</p> <p>10. $(\forall a, b, c \in \mathbb{Q}) [(a + b)c = ac + bc]$ (распределительное свойство умножения относительно суммы).</p> <p>Свойства, связывающие знак $>$ со знаком сложения и умножения:</p>	

$$11. (\forall a, b, c \in \mathbb{Q})[a > b \Rightarrow a + c > b + c].$$

$$12. (\forall a, b, c \in \mathbb{Q})[(a > b) \wedge (c > 0) \Rightarrow ac > bc].$$

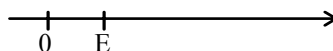
Последнее свойство, называемое аксиомой Архимеда, формулируется следующим образом.

Каково бы ни было рациональное число a , можно число 1 повторить слагаемым столько раз, что полученная сумма превзойдет a .

Из вышеперечисленных основных свойств рациональных чисел могут быть получены как следствие все другие алгебраические свойства этих чисел, относящиеся как к арифметическим действиям, так и к сочетанию равенств и неравенств.

Измерение отрезков числовой оси

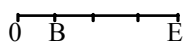
Пусть имеется числовая ось, т.е. прямая, на которой выбраны определенная точка O - начало отсчета, масштабный отрезок OE , длина которого считается равной единице, и положительное направление (обычно направление слева-направо)



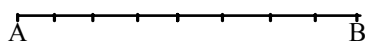
Попытаемся поставить в соответствие каждой точке M числовой оси некоторое число, выражающее длину отрезка OM . Это число считается положительным, если точка M лежит справа от точки O и отрицательным - в противоположном случае.

Очевидно, что каждому рациональному числу соответствует на числовой оси определенная точка.

В самом деле, из курса элементарной математики известно, как построить отрезок, длина которого составляет $\frac{1}{n}$ часть длины масштабного отрезка OE ($\forall n \in \mathbb{N}$). Тогда легко построить отрезок AB , длина которого относится к длине масштабного отрезка OE , как $\frac{m}{n}$ ($\forall m, n \in \mathbb{N}$).

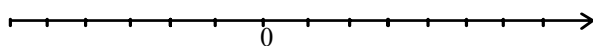


$$|OB| = \frac{1}{n} |OE|$$



$$|AB| = \frac{m}{n} |OE|$$

Отложив отрезок AB вправо (влево) от точки O , получим точку $M_1(M_2)$, соответствующую рациональному числу $+\frac{m}{n} \left(-\frac{m}{n}\right)$



$$M_2\left(-\frac{m}{n}\right)$$

$$M_1\left(+\frac{m}{n}\right)$$

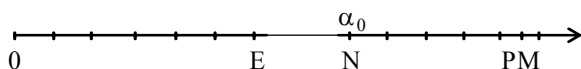
Однако, из курса элементарной математики известно, что наряду с соизмеримыми отрезками (отрезками, отношение длин которых выражается рациональным числом) существуют и несоизмеримые отрезки (примером несоизмеримых отрезков могут служить сторона и высота равносто-

ронного треугольника). Это позволяет утверждать, что **не все точки числовой оси соответствуют рациональным числам.**

Естественно, возникает потребность расширить область рациональных чисел и ввести в рассмотрение такие числа, которые соответствовали бы всем точкам числовой оси и позволяли бы при помощи масштабного отрезка ОЕ измерить любой отрезок.

Опишем процесс, позволяющий измерить любой отрезок ОМ числовой оси. Будет показано, что этот процесс позволяет также поставить в соответствие любой точке М этой оси некоторую вполне определенную бесконечную десятичную дробь.

Пусть М - любая точка числовой оси. Для определенности предположим, что т.М лежит правее О (см. рис.)



Будем измерять отрезок ОМ при помощи масштабного отрезка ОЕ.

Выясним, сколько раз целый отрезок ОЕ укладывается в отрезке ОМ. Могут представиться два случая.

1). Отрезок ОЕ укладывается в отрезке ОМ целое число α_0 раз с некоторым остатком NM, меньшим ОЕ (см.рис.). В этом случае целое число α_0 есть приближенный результат измерения по недостатку с точностью до единицы.

2). Отрезок ОЕ укладывается в отрезке ОМ целое число $\alpha_0 + 1$ раз без остатка. В этом случае α_0 также представляет собой приближенный результат измерения по недостатку с точностью до единицы, ибо отрезок ОЕ укладывается в отрезке ОМ α_0 раз с остатком NM, равным ОЕ (на практике в этом случае процесс измерения считают законченным и полагают длину отрезка ОМ равной α_{0+1}).

Выясним теперь, сколько раз $\frac{1}{10}$ часть масштабного отрезка ОЕ укладывается в остатке NM. Опять могут представиться два случая.

1). $\frac{1}{10}$ часть отрезка ОЕ укладывается в отрезке NM целое число α_1 раз с некоторым остатком PM, меньшим $\frac{1}{10}$ части отрезка ОЕ (см. рис.). В этом случае рациональное число α_0, α_1 есть результат измерения по недостатку с точностью до $\frac{1}{10}$.

2). $\frac{1}{10}$ часть отрезка ОЕ укладывается в отрезке NM целое число α_{0+1} раз без остатка. В этом случае рациональное число α_0, α_1 также есть результат измерения по недостатку с точностью до $\frac{1}{10}$, т.к. $\frac{1}{10}$ часть отрезка ОЕ укладывается в отрезке NM α_1 раз с остатком PM, равным $\frac{1}{10}$ части отрезка ОЕ.

Продолжая неограниченно указанные рассуждения, мы получим бесконечную совокупность рациональных чисел

$$\alpha_0; \alpha_0, \alpha_1; \dots; \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n; \dots, \quad (1)$$

каждое из которых представляет собой результат измерения отрезка ОМ по недостатку с соответствующей степенью точности. Вместе с тем каждое из чисел (1) может быть получено посредством обрывания на соответствующем знаке бесконечной десятичной дроби.

$$\alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n \dots \quad (2)$$

Если точка М лежит левее точки О, то, применяя аналогичные рассуждения, получим, что все числа (1) и бесконечная десятичная дробь будут иметь отрицательный знак.

Таким образом, мы установили, что посредством описанного измерения отрезка ОМ любой точке М числовой оси можно поставить в соответствие вполне определенную бесконечную десятичную дробь.

Итак, описанный выше процесс приводит нас к рассмотрению чисел, представимых в виде бесконечных десятичных дробей.

Вместе с тем каждая бесконечная десятичная дробь (2) полностью характеризуется бесконечной совокупностью (1) рациональных чисел, приближающих эту дробь.

Рассмотрим множество всевозможных бесконечных десятичных дробей. Числа, представимые этими дробями, будем называть вещественными. Множество всех вещественных чисел будем обозначать через R.

Данное вещественное число мы будем считать положительным (отрицательным), если оно представимо в виде положительной (отрицательной) бесконечной десятичной дроби.

В состав множества вещественных чисел входят и все рациональные числа, ибо все они представимы в виде бесконечных десятичных дробей.

Так, рациональному числу $\frac{1}{2}$ ставится в соответствие бесконечная десятичная дробь 0,4999...9..., рациональному числу $\frac{4}{3}$ - бесконечная десятичная дробь 1,333...3... .

Вещественные числа, не являющиеся рациональными, называют иррациональными.

На случай привольных вещественных чисел переносятся три правила и все основные свойства рациональных чисел, перечисленные выше. Тем самым для вещественных чисел обосновываются все правила элементарной алгебры, относящиеся к арифметическим действиям и к сочетанию равенств и неравенств.

1.4.1.3. Ограниченные множества вещественных чисел

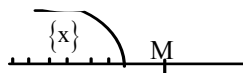
Рассмотрим произвольное множество вещественных чисел, которое будем обозначать символом $\{x\}$. Будем предполагать, что множество $\{x\}$ содержит хотя бы одно число (непустое множество). Обозначение: $\{x\} \neq \emptyset$.

Определение 1. Множество вещественных чисел $\{x\}$ называется ограниченным сверху (снизу), если существует такое вещественное число M (число m), что каждый элемент x множества удовлетворяет неравенству $x \leq M$. ($x \geq m$).

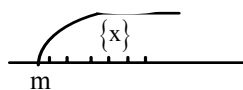
Класс ограниченных сверху (снизу) множеств вещественных чисел будем обозначать символом $\overline{m}(m)$, так что запись $\{x\} \in \overline{m}$ ($\{x\} \in m$) означает, что множество вещественных чисел $\{x\}$ является ограниченным сверху (снизу).

На языке алгебры логики данные определения формулируются следующим образом:

$$(\{x\} \in \overline{m}) \stackrel{\text{def}}{=} (\exists M \in \mathbb{R}) : (\forall x \in \{x\}) [x \leq M]$$



$$(\{x\} \in m) \stackrel{\text{def}}{=} (\exists m \in \mathbb{R}) : (\forall x \in \{x\}) [x \geq m]$$



Числа M и m называются, соответственно, верхней гранью (нижней гранью) множества $\{x\}$.

Замечание. Если вещественное число M является верхней гранью множества $\{x\}$, то и любое вещественное число M^1 , большее M , также является верхней гранью этого множества. Отсюда вытекает, что любое ограниченное сверху множество $\{x\}$ имеет бесконечно много верхних граней.

Аналогичные выводы можно сделать и в отношении нижних граней ограниченного снизу множества $\{x\}$.

Пример 1. Множество всех целых отрицательных чисел $-1, -2, -3, \dots$ ограничено сверху. В качестве верхней грани этого множества можно взять любое вещественное число M , удовлетворяющее неравенству $M \geq -1$.

Пример 2. Множество всех положительных вещественных чисел ограничено снизу. В качестве нижней грани этого множества можно взять любое неположительное вещественное число.

Определение 2. Точной верхней гранью ограниченного сверху множества $\{x\}$ называется наименьшая из всех верхних граней этого множества. Точная верхняя грань $\{x\}$ обозначается символом $\bar{x} = \sup\{x\}$ (\sup - первые три буквы латинского слова *supremum* (“супремум”), которое переводится как “наивысшее”).

Наибольшая из всех нижних граней ограниченного снизу множества $\{x\}$ называется точной нижней гранью этого множества и обозначается

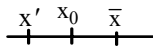
символом $\underline{x} = \inf\{x\}$ (от латинского слова *infimum* (“инфимум”), которое переводится как “наинизшее”).

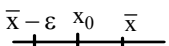
Определение 2 формулируют чаще и по-другому:

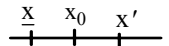
Число \bar{x} (число \underline{x}) называется точной верхней (точной нижней) гранью ограниченного сверху (снизу) множества $\{x\}$, если выполнены следующие два требования:

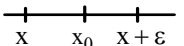
- 1) каждый элемент $x \in \{x\}$ удовлетворяет неравенству $x \leq \bar{x}$ ($x \geq \underline{x}$);
- 2) каково бы ни было вещественное число x^1 меньшее \bar{x} (больше \underline{x}), найдется хотя бы один элемент $x_0 \in \{x\}$, удовлетворяющий неравенству $x_0 > x^1$ ($x_0 < x^1$).

В этом определении требование 1 означает, что число \bar{x} (число \underline{x}) является одной из верхних (нижних) граней, а требование 2 показывает, что эта грань является наименьшей (наибольшей) и уменьшена (увеличена) быть не может.

$$\bar{x} = \sup\{x\} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1. (\forall x \in \{x\}) \Rightarrow (x \leq \bar{x}) \\ 2. [(\forall x^1 \in \mathbb{R}) : (x^1 < \bar{x})] (\exists x_0 \in \{x\}) : [x^1 < x_0 \leq \bar{x}] \end{cases}$$


$$\bar{x} = \sup\{x\} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1. (\forall x \in \{x\}) \Rightarrow (x \leq \bar{x}) \\ 2. (\forall \varepsilon > 0) (\exists x_0 \in \{x\}) : [\bar{x} - \varepsilon < x_0 \leq \bar{x}] \end{cases}$$


$$\underline{x} = \inf\{x\} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1. (\forall x \in \{x\}) \Rightarrow (x \geq \underline{x}) \\ 2. [(\forall x^1 \in \mathbb{R}) : (x^1 > \underline{x})] (\exists x_0 \in \{x\}) : [\underline{x} \leq x_0 < x^1] \end{cases}$$


$$\underline{x} = \inf\{x\} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1. (\forall x \in \{x\}) \Rightarrow (x \geq \underline{x}) \\ 2. (\forall \varepsilon > 0) (\exists x_0 \in \{x\}) : [\underline{x} \leq x_0 < \underline{x} + \varepsilon] \end{cases}$$


Пример 3. У множества всех целых отрицательных чисел $-1, -2, -3, \dots$ существует точная верхняя грань $x = -1$, которая принадлежит этому множеству (т.е. является наименьшим элементом этого множества).

У множества всех положительных вещественных чисел существует точная нижняя грань- число 0, причем это число не принадлежит указанному множеству.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1.

$$(\{x\} \neq \emptyset) \wedge \begin{bmatrix} \{x\} \in \overline{\mathbb{R}} \\ \{x\} \in \underline{\mathbb{R}} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} (\exists \bar{x} \in \mathbb{R}) : (\bar{x} = \sup\{x\}) \\ (\exists \underline{x} \in \mathbb{R}) : (\underline{x} = \inf\{x\}) \end{bmatrix}.$$

Если множество вещественных чисел содержит хотя бы один элемент и ограничено сверху (снизу), то существует вещественное число $\bar{x}(\underline{x})$, которое является точной верхней (точной нижней) гранью этого множества.

Доказательство данной теоремы можно найти в некоторых работах.¹

1.4.1.4. Некоторые конкретные множества вещественных чисел

Пусть имеется произвольное множество вещественных чисел $\{x\} \neq \emptyset$, будем говорить, что точка x_1 множества $\{x\}$ отлична от точки x_2 этого множества, если вещественные числа x_1 и x_2 не равны друг другу. Если при этом справедливо неравенство $x_1 > x_2$ ($x_1 < x_2$), то будем говорить, что точка x_1 лежит правее (левее) точки x_2 .

1. Сегмент (замкнутый отрезок или отрезок)- символическая запись $[a, b]$.

$$[a, b] \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \{x\} \subset \mathbb{R} : \left[(\forall x \in \{x\}) (a \leq x \leq b) \right] \right\} \quad (a < b).$$

Числа a и b называются граничными точками или концами сегмента, а любое число x , удовлетворяющее неравенствам $a < x < b$, будем называть внутренней точкой сегмента.

2. Полусегмент. Символическая запись: $[a, b)$ или $(a, b]$.

$$[a, b) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \{x\} \subset \mathbb{R} : \left[(\forall x \in \{x\}) (a \leq x < b) \right] \right\}$$

$$(a, b] \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \{x\} \subset \mathbb{R} : \left[(\forall x \in \{x\}) (a < x \leq b) \right] \right\}$$

3. Интервал. Символическая запись (a, b) .

$$(a, b) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \{x\} \subset \mathbb{R} : \left[(\forall x \in \{x\}) (a < x < b) \right] \right\}$$

4. Окрестностью точки C называется любой интервал, содержащий точку C .

$$(c - a, c + b) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \{x\} \subset \mathbb{R} : \left[(\forall x \in \{x\}) (c - a < x < c + b) \right] \right\}.$$

5. ε -окрестностью точки C называется интервал $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$.

6. Числовая (бесконечная) прямая- символическая запись $(-\infty, +\infty)$

$$(-\infty, +\infty) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \{x\} \subset \mathbb{R} : \left[(\forall x \in \{x\}) (-\infty < x < +\infty) \right] \right\}.$$

7. Полупрямая $-[a, +\infty)$ или $(-\infty, b]$

$$[a, +\infty) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \{x\} \subset \mathbb{R} : \left[(\forall x \in \{x\}) (a \leq x < +\infty) \right] \right\}$$

$$(-\infty, b] \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \{x\} \subset \mathbb{R} : \left[(\forall x \in \{x\}) (-\infty < x \leq b) \right] \right\}$$

8. Открытая полупрямая - $(a, +\infty)$ или $(-\infty, b)$.

$$(a, +\infty) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \{x\} \subset \mathbb{R} : \left[(\forall x \in \{x\}) (a < x < +\infty) \right] \right\}$$

$$(-\infty, b) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \{x\} \subset \mathbb{R} : \left[(\forall x \in \{x\}) (-\infty < x < b) \right] \right\}$$

¹ 1.См., например: Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа.-М.: Наука, 1971 (и последующие издания), ч.1.

1.4.2. Теория последовательностей

1.4.2.1. Понятие числовой последовательности

Определение 1. Пусть каждому числу n натурального ряда чисел $1, 2, 3, \dots, n$ поставлено в соответствие по определенному закону некоторое вещественное число x_n (при этом может оказаться, что разным натуральным числам n ставятся в соответствие и одинаковые числа). Тогда множество занумерованных вещественных чисел

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \quad (1)$$

называется числовой последовательностью или просто последовательностью. Каждое отдельное число x_n называется элементом или членом последовательности.

Сокращенно последовательность с элементами x_n будем обозначать $\{x_n\}$.

Арифметические операции над числовыми последовательностями вводятся следующим образом.

Пусть даны две произвольные последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$. Суммой, разностью, произведением и частным этих последовательностей называются соответственно последовательности:

$$\{x_n + y_n\}, \{x_n - y_n\}, \{x_n y_n\}, \{x_n / y_n\}.$$

При определении частного предполагается, что либо все y_n от 0, либо все y_n отличны от нуля начиная с некоторого номера. Тогда частное $\{x_n / y_n\}$ определяется с этого номера.

1.4.2.2. Бесконечно большие и бесконечно малые последовательности

Определение 1. Последовательность x_n называется ограниченной сверху (снизу), если существует такое вещественное число M (число m), что все элементы последовательности $\{x_n\}$ удовлетворяют неравенству $x_n \leq M$ ($x_n \geq m$)

$$(\{x_n\} \in \overline{m}) \stackrel{\text{def}}{=} (\exists M \in \mathbb{R})(\forall x_n \in \{x_n\}):(x_n \leq M)$$

$$(\{x_n\} \in \underline{m}) \stackrel{\text{def}}{=} (\exists m \in \mathbb{R})(\forall x_n \in \{x_n\}):(x_n \geq m).$$

Число $M(m)$ называется верхней (нижней) гранью последовательности $\{x_n\}$.

Замечание 1. Любая ограниченная сверху (снизу) последовательность $\{x_n\}$ имеет бесчисленное множество верхних (нижних) граней.

Определение 2. Последовательность называется ограниченной с обеих сторон или просто ограниченной $(\{x_n\} \in m)$, если она ограничена и сверху и снизу, т.е. если существуют такие вещественные числа M и m , что для каждого элемента последовательности x_n выполняются неравенства $m \leq x_n \leq M$

$$(\{x_n\} \in m) \stackrel{\text{def}}{=} (\exists M, m \in \mathbb{R})(\forall x_n \in \{x_n\}:[m \leq x_n \leq M].$$

Замечание 2. Пусть $\{x_n\} \in m$, и M и m - ее верхняя и нижняя грани, тогда, обозначая $A = \max\{|M|, |m|\}$, имеем $|x_n| \leq A$ для всех элементов последовательности $\{x_n\}$. Наоборот, если для всех элементов последовательности $\{x_n\}$ выполнено неравенство $|x_n| \leq A$, то справедливы неравенства $-A \leq x_n \leq A$. Таким образом, определение ограниченной последовательности можно сформулировать следующим образом:

$$(\{x_n\} \in m) \stackrel{\text{def}}{=} (\exists A > 0 \wedge A \in \mathbb{R}) (\forall x_n \in \{x_n\}) : [|x_n| \leq A].$$

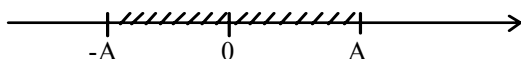
Определение 3. Последовательность $\{x_n\}$ называется неограниченной ($\{x_n\} \notin m$), если для любого положительного числа A найдется элемент x_n последовательности $\{x_n\}$, удовлетворяющий неравенству $|x_n| > A$.

Примеры.

1. Последовательность $\{n^3\} = 1, 8, 27, \dots$ ограничена снизу (нижняя грань - любое действительное число $m \leq 1$) и неограничена сверху.
2. $\{1, -n\} = 1, -1, 1, -2, 1, -3, \dots, 1, -n, \dots$ ограничена сверху и не ограничена снизу, т.е. неограниченна, т.к. для любого положительного действительного числа A , среди элементов последовательности с четными номерами найдутся такие, для которых выполняется неравенство $|x_n| > A$.

Определение 4. Последовательность $\{x_n\}$ называется бесконечно большой последовательностью ($\{x_n\} \in B$), если для любого положительного числа A (сколь бы большим оно не было) можно указать такой номер n_0 (в силу зависимости n_0 от A иногда пишут $n_0 = n_0(A)$), что при $n \geq n_0$ все элементы x_n этой последовательности удовлетворяют неравенству $|x_n| > A$

$$(\{x_n\} \in B) \stackrel{\text{def}}{=} (\forall A > 0 \wedge A \in \mathbb{R}) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) (\forall x_n \in \{x_n\}) : [n \geq n_0 \Rightarrow |x_n| > A]$$



В заштрихованной на рис. области содержится лишь конечное число членов последовательности $\{x_n\}$.

Замечание 3.

Если $(\{x_n\} \in B) \Rightarrow (\{x_n\} \notin m)$. Действительно,

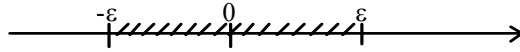
$$(\{x_n\} \in B) \stackrel{\text{def}}{=} (\forall A > 0) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) (\forall x_n \in \{x_n\}) : [n \geq n_0 \Rightarrow |x_n| > A].$$

Следовательно, найдется по крайней мере один такой элемент x_n , что $|x_n| > A$. Обратное, вообще говоря, неверно. Неограниченная последовательность $\{1, -n\}$ не является бесконечно большой, т.к. при $A > 1$ для всех элементов x_n с нечетными номерами неравенство $|x_n| > A$ не имеет места.

Определение 5. Последовательность $\{x_n\}$ называется бесконечно малой последовательностью ($\{x_n\} \in \delta$), если для любого положительного числа ε (сколь бы малым мы его ни взяли) можно указать номер n_0 такой, что при $n \geq n_0$ все элементы x_n этой последовательности удовлетворяли неравенству $|x_n| < \varepsilon$

$$(\{x_n\} \in \delta) \stackrel{\text{def}}{=} (\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) (\forall x_n \in \{x_n\}) : [n \geq n_0 \Rightarrow |x_n| < \varepsilon].$$

Так как номер n_0 , вообще говоря, зависит от ε , то часто пишут $n_0 = n_0(\varepsilon)$



В незаштрихованной на рисунке области останется лишь конечное число элементов последовательности $\{x_n\}$.

1.4.2.3. Основные теоремы о бесконечно малых последовательностях

Теорема 1. Сумма двух бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность

$$(\{\alpha_n\} \in \delta \wedge \{\beta_n\} \in \delta) \Rightarrow (\{\alpha_n \pm \beta_n\} \in \delta).$$

Следствие. Алгебраическая сумма любого конечного числа бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.

Теорема 2. Бесконечно малая последовательность ограничена.

$$(\{\alpha_n\} \in \delta) \Rightarrow (\{\alpha_n\} \in m).$$

Теорема 3. Произведение ограниченной последовательности на бесконечно малую последовательность является бесконечно малой последовательностью

$$(\{x_n\} \in m \wedge \{\alpha_n\} \in \delta) \Rightarrow (\{x_n \alpha_n\} \in \delta).$$

Следствие. Произведение любого конечного числа бесконечно малых последовательностей является бесконечно малой последовательностью.

Замечание 1. Частное двух бесконечно малых последовательностей может быть последовательностью любого типа и даже может не иметь смысла:

1. Если, например, $\alpha_n = 1/n$ и $\beta_n = 1/n$, то все элементы последовательности $\{\alpha_n / \beta_n\}$ равны 1.
2. Если $\alpha_n = 1/n$, $\beta_n = 1/n^2$, то $\{\alpha_n / \beta_n\} \in B$.
3. Если $\alpha_n = 1/n^2$, $\beta_n = 1/n$, то $\{\alpha_n / \beta_n\} \in \delta$.

При определении частного двух последовательностей предполагается, что у последовательности $\{\beta_n\}$ все элементы β_n отличны от нуля, начиная с некоторого номера.

Теорема 4. Если все элементы бесконечно малой последовательности $\{\alpha_n\}$ равны одному и тому же числу c , то $c=0$

$$\left(\{\alpha_n\} \in \delta \wedge \forall \alpha_n = \text{const} \stackrel{\text{def}}{=} c \right) \Rightarrow (c = 0).$$

Теорема 5. Если последовательность $\{x_n\}$ является бесконечно большой, то начиная с некоторого номера n определена последовательность $\{1/x_n\}$, которая является бесконечно малой. Если все элементы бесконечно малой последовательности $\{\alpha_n\}$ не равны 0, то последовательность $\{1/\alpha_n\}$ является бесконечно большой.

$$(\{x_n\} \in B) \Rightarrow (\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}): [n \geq n_0 \Rightarrow \{1/x_n\} \in \delta]$$

$$(\{\alpha_n\} \in \delta \wedge \forall \alpha_n \neq 0) \Rightarrow (\{1/\alpha_n\} \in B).$$

1.4.2.4. Сходящиеся последовательности. Основные определения

Определение 1. Последовательность $\{x_n\}$ называется сходящейся ($\{x_n\} \in c$), если существует такое действительное число a , что последовательность $\{x_n - a\}$ является бесконечно малой последовательностью

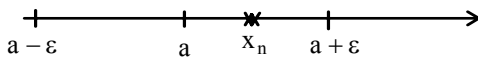
$$(\{x_n\} \in c) \stackrel{\text{def}}{=} (\exists a \in \mathbb{R}) : [\{x_n - a\} \in \delta].$$

Замечание. Исходя из этого определения следует, что всякая бесконечно малая последовательность является сходящейся и имеет своим пределом 0.

Определение 2.

$$(\{x_n\} \in c) \stackrel{\text{def}}{=} (\exists a \in \mathbb{R}) (\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) (\forall x_n \in \{x_n\}) : [n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon].$$

Очевидно, что неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$ эквивалентно неравенствам $- \varepsilon < x_n - a < \varepsilon$ или $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$, которое означает, что некоторый элемент x_n последовательности $\{x_n\}$ принадлежит ε , окрестности числа a , поэтому определение сходящейся последовательности можно дать следующим образом:



Определение 3. Последовательность $\{x_n\}$ называется сходящейся, если существует действительное число a такое, что в любой ε - окрестности числа a находятся все элементы последовательности $\{x_n\}$ начиная с некоторого номера. Число a , фигурирующее в определениях, называется пределом последовательности $\{x_n\}$.

Символическая запись существования предела последовательности $\{x_n\}$, равного a , записывается так : $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, или $\{x_n\} \rightarrow a$ при $n \rightarrow \infty$.

Бесконечно большие последовательности иногда называются последовательностями, сходящимися к бесконечности, поэтому если $\{x_n\} \in B$, то символически это записывается следующим образом: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$, или

$\{x_n\} \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Если элементы бесконечно большой последовательности начиная с некоторого номера имеют определенный знак, то говорят, что $\{x_n\}$ сходятся к бесконечности определенного знака $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$

или $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$.

Замечание 1. Из определения 1 сходящейся последовательности вытекает, что последовательность $\{x_n - a\} \in \delta$. Обозначая элементы этой последовательности через α_n , $\alpha_n = x_n - a$, мы получим, что любой элемент x_n сходящейся последовательности $\{x_n\}$, имеющей пределом число a , может быть представлен в виде $x_n = a + \alpha_n$, где α_n - элемент бесконечно малой последовательности.

Замечание 2. Из определения предела последовательности вытекает, что конечное число элементов не влияет на сходимости этой последовательности и на величину ее предела.

Пример. Покажем, что последовательность $\{1 + (-1)^n/n\}$ сходится. Пределом этой последовательности является число 1. Для доказательства достаточно показать, что последовательность $\{x_n - a\} = \{(-1)^n/n\} \in \delta$. В самом деле, если

$n \geq n_0$, то $\left|(-1)^n/n\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0}$, поэтому по данному $\varepsilon > 0$ следует выбрать

номер n_0 такой, чтобы выполнялось условие $1/n_0 < \varepsilon$, т.е. $n_0 = [1/\varepsilon] + 1$, где $[x]$ - целая часть числа x - т.е. наибольшее целое число, не превышающее x .

(Например, $[6,187] = 6$; $[-5,87] = -6$).

В качестве n_0 можно взять и любой номер $[1/\varepsilon] + k$, где $k > 1$.

Определение 4. Последовательность $\{x_n\}$ называется фундаментальной ($\{x_n\} \in \Phi$), если для любого положительного числа ε найдется номер n_0 такой, что для всех номеров n , удовлетворяющих условию $n \geq n_0$, и для всех натуральных чисел p ($p=1, 2, \dots$), все элементы x_n этой последовательности удовлетворяют неравенству $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$

$$(\{x_n\} \in \Phi) \stackrel{\text{def}}{=} (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall p \in \mathbb{N})(\forall x_n \in \{x_n\}): [n \geq n_0 \Rightarrow |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon]$$

Сформулируем без доказательства Критерий Коши о необходимом и достаточном условии сходимости последовательности.

Теорема. Для того, чтобы последовательность $\{x_n\}$ была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.

$$(\{x_n\} \in \mathbb{C}) \Leftrightarrow (\{x_n\} \in \Phi).$$

1.4.2.5. Основные свойства сходящихся последовательностей

Теорема 1. Сходящаяся последовательность имеет только один предел

$$(\{x_n\} \in \mathbb{C}) \Rightarrow \left[\left(a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right) \wedge \left(b = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right) \Rightarrow (a = b) \right].$$

Теорема 2. Сходящаяся последовательность ограничена

$$(\{x_n\} \in \mathbb{C}) \Rightarrow (\{x_n\} \in \mathbb{M}).$$

Замечание. Обратная теорема не имеет места, ибо ограниченная последовательность, вообще говоря, может и не быть сходящейся. Так, например, $\{x_n\} = \{1 + (-1)^n\} = 0, 2, 0, 2, 0, 2, \dots$ ограничена, но не является сходящейся.

Действительно, если бы $\{x_n\} \in \mathbb{C}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, то $\{x_n - a\} \in \delta$ и $\{x_{n+1} - a\} \in \delta$,

тогда и $\{(x_n - a) - (x_{n+1} - a)\} \in \delta$ (теорема 1,2,3).

Но $\{(x_n - a) - (x_{n+1} - a)\} = \{x_n - x_{n+1}\}$ не является бесконечно малой, т.к.

$$|x_n - x_{n+1}| = 2 \text{ для } \forall n \in \mathbb{N}.$$

1.4.2.6. Арифметические свойства сходящихся последовательностей

Теорема 1. Если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся, то сумма (разность), произведение и частное этих последовательностей (частное при условии, что предел последовательности $\{y_n\} \neq 0$) есть сходящиеся последовательности, пределы которых соответственно равны: сумме (разности), произведению и частному пределов этих последовательностей

$$\left[\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \right) \wedge \left(\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \right) \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b; \lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = ab; \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b} \wedge b \neq 0 \right]$$

1.4.2.7. Монотонные последовательности

Определение 1. Последовательность $\{x_n\}$ называется невозрастающей (неубывающей) последовательностью, если каждый последующий член этой последовательности не больше (не меньше) предыдущего, т.е. если для $\forall n \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство $x_n \geq x_{n+1}$ ($x_n \leq x_{n+1}$). Такие последовательности называются монотонными последовательностями.

Определение 2. Если для всех номеров n элементы последовательности $\{x_n\}$ удовлетворяют неравенству $x_n > x_{n+1}$ ($x_n < x_{n+1}$), то такая последовательность называется убывающей (возрастающей). Убывающие и возрастающие последовательности называются строго монотонными.

Замечание. Отметим, что неубывающие и невозрастающие последовательности ограничены сверху и снизу соответственно своими первыми элементами. Поэтому неубывающая (невозрастающая) последовательность будет ограничена с двух сторон, если она ограничена сверху (снизу).

Введем следующие обозначения:

$\uparrow \{x_n\}$ - невозрастающая последовательность $\{x_n\}$,

$\downarrow \{x_n\}$ - неубывающая последовательность $\{x_n\}$,

$\uparrow \{x_n\}$ - возрастающая последовательность $\{x_n\}$,

$\downarrow \{x_n\}$ - убывающая последовательность $\{x_n\}$.

Пример 1. Последовательность $\{n, n\} = 1, 1, 2, 2, \dots, n, n, \dots$ неубывающая монотонная. Снизу она ограничена первым элементом - "1", а сверху не ограничена.

Пример 2. Последовательность $\left\{ \frac{n}{n+1} \right\} = \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$ возрастающая. Снизу эта последовательность ограничена своим первым элементом $\frac{1}{2}$, а сверху, например, своим пределом - единицей, т.е. эта последовательность ограничена.

Теперь докажем основную теорему о сходимости монотонной последовательности.

Теорема. Если неубывающая (невозрастающая) последовательность ограничена сверху (снизу), то она сходится.

$$[(\{x_n\} \in \overline{m}) \wedge (\downarrow \{x_n\})] \Rightarrow \{x_n\} \in c,$$

$$[(\{x_n\} \in \underline{m}) \wedge (\uparrow \{x_n\})] \Rightarrow \{x_n\} \in c.$$

В силу замечания, сформулированного выше, неубывающие (невозрастающие), ограниченные сверху (снизу) последовательности являются ограниченными с обеих сторон. Поэтому последнюю теорему можно сформулировать так:

$$\left\{ \{x_n\} \in m \wedge \left[\begin{array}{c} \uparrow \{x_n\} \\ \downarrow \{x_n\} \end{array} \right] \right\} \Rightarrow \{x_n\} \in c.$$

Замечание 1. Условие ограниченности монотонной последовательности есть необходимое и достаточное условие ее сходимости.

В самом деле, если монотонная последовательность ограничена, то в силу доказанной теоремы она сходится.

Если же монотонная последовательность (да и, вообще, любая последовательность) сходится, то она ограничена (см. теорему 2).

Замечание 2. Если последовательность сходится, то она может и не быть монотонной. Так, последовательность $\{x_n\} = \{(-1)^n / n\}$ сходится и имеет пределом "0". Однако эта последовательность не является монотонной, т.к. знаки элементов этой последовательности чередуются.

1.4.2.8. Число e

Рассмотрим пример последовательности, для нахождения предела которой будет использована вышеуказанная теорема (п. 2.7.) о пределе монотонной последовательности.

Пусть дана последовательность $\{x_n\} = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}$, т.е. каждый элемент этой последовательности $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Покажем, что эта последовательность возрастает и ограничена сверху.

Используя формулу бинома Ньютона

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \dots + \frac{n(n-1)\dots[n-(m-1)]}{m!}a^{n-m}b^m + \dots + nab^{n-1} + \frac{n(n-1)\dots[n-(n-1)]}{n!}b^n,$$

получим

$$x_n = 1 + n \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \frac{1}{n^3} + \dots + \frac{n(n-1)(n-2)\dots[n-(n-1)]}{n!} \frac{1}{n^n}$$

или

$$x_n = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{n(n-1)}{n \cdot n} + \frac{1}{3!} \frac{n(n-1)(n-2)}{n \cdot n \cdot n} + \dots + \frac{1}{n!} \frac{n(n-1)(n-2)\dots[n-(n-1)]}{n \cdot n \cdot n \dots n},$$

или

$$x_n = 2 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right). \quad (1)$$

Аналогично этому

$$x_{n+1} = 2 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) +$$

$$+ \frac{1}{(n+1)!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{n}{n+1}\right)$$

Очевидно, что 1) $\left(1 - \frac{k}{n}\right) < \left(1 - \frac{k}{n+1}\right)$ для любого $k: 1 \leq k \leq n$;

2) все члены последовательности $\{x_n\}$ строго положительны;

3) x_{n+1} по сравнению с x_n содержит лишний положительный член.

Поэтому $x_n < x_{n+1}$ и $\{x_n\}$ - возрастающая последовательность. Покажем теперь ограниченность сверху этой последовательности.

Используем неравенство

$$\frac{1}{k!} < \frac{1}{2^{k-1}}, \quad k \geq 2. \quad (2)$$

Действительно,

$$\frac{1}{k!} = \frac{1}{\underbrace{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots k}_k} \leq \frac{1}{\underbrace{1 \cdot 2 \cdot 2 \dots 2}_{k-1}} = \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Учитывая, что каждое выражение в круглых скобках формулы (1) строго меньше 1, и заменяя его поэтому единицей, получим, что

$$x_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \quad \text{или} \quad x_n < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Суммируя $n-1$ член убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $1/2$, получим

$$x_n < 2 + \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^{n-1}} - 1 \right)}{\frac{1}{2} - 1} = 2 + 1 - \frac{1}{2^{n-1}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$

Итак, последовательность $\{x_n\}$ возрастает и ограничена сверху.

По доказанной теореме (п. 2.7.) эта последовательность имеет предел, который называют числом e .

$$\text{По определению } e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

1.4.2.9. Предельный переход в неравенствах

Покажем, что неравенства, которым удовлетворяют элементы сходящихся последовательностей, в пределе переходят в соответствующие неравенства для пределов этих последовательностей.

Теорема 1. Если элементы сходящейся последовательности $\{x_n\}$ начиная с некоторого номера удовлетворяют неравенству $x_n \geq b$ ($x_n \leq b$), то и предел a этой последовательности удовлетворяет неравенству $a \geq b$ ($a \leq b$)

$$\left\{ \left(\{x_n\} \rightarrow a \right) \wedge \left[\left(\forall n \geq n_0 \right) \wedge \left(n_0 \in \mathbb{N} \right) : \begin{matrix} (x_n \geq b) \\ (x_n \leq b) \end{matrix} \right] \right\} \Rightarrow \begin{matrix} (a \geq b) \\ (a \leq b) \end{matrix}.$$

Замечание. Если элементы сходящейся последовательности $\{x_n\}$ удовлетворяют строгому неравенству $x_n > b$, то предел a этой последовательности может все же оказаться равным b .

Так, члены последовательности $\{x_n\} = \{1/n\}$ строго положительны ($1/n > 0$), а предел этой последовательности равен нулю.

Следствие 1.

$$\left\{ \left[\left(\{x_n\} \rightarrow a \right) \vee \left(\{y_n\} \rightarrow b \right) \right] \wedge \left[\left(\forall n \geq n_0 \right) \wedge \left(n_0 \in \mathbb{N} \right) : \begin{matrix} (x_n \leq y_n) \\ (x_n \geq y_n) \end{matrix} \right] \right\} \Rightarrow \begin{matrix} (a \leq b) \\ (a \geq b) \end{matrix}.$$

Если элементы x_n и y_n сходящихся последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ начиная с некоторого номера удовлетворяют неравенству $x_n \leq y_n$ ($x_n \geq y_n$), то их пределы удовлетворяют такому же неравенству

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \quad \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \right).$$

Следствие 2. Если все элементы сходящейся последовательности $\{x_n\}$ начиная с некоторого номера находятся на сегменте $[a, b]$, то и ее предел C также находится на этом сегменте.

$$\left\{ \left(\{x_n\} \rightarrow c \right) \wedge \left[\left(\forall n \geq n_0 \right) \wedge \left(n \in \mathbb{N} \right) (a \leq x_n \leq b) \right] \right\} \Rightarrow (a \leq c \leq b).$$

Теорема 2. Пусть последовательности $\{x_n\}$ и $\{z_n\}$ сходятся и имеют общий предел a . Пусть начиная с некоторого номера элементы последовательности $\{y_n\}$ удовлетворяют неравенствам $x_n \leq y_n \leq z_n$. Тогда последовательность $\{y_n\}$ сходится и имеет предел a .

1.4.2.10. Подпоследовательности числовых последовательностей

Пусть $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$ некоторая числовая последовательность. Рассмотрим произвольную возрастающую последовательность целых положительных чисел $n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$ и выберем из последовательности $\{x_k\}$ элементы с номерами $n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$. Расположим эти элементы в таком же порядке, как и числа n_k : $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots$. Полученную таким образом числовую последовательность будем называть подпоследовательностью последовательности $\{x_k\}$. В частности, сама последовательность может рассматриваться как подпоследовательность (в этом случае $n_k = k$).

Замечание. Очевидно, что для любого номера k справедливо неравенство $n_k \geq k$. Это видно из следующего примера:

$$\{x_k\} = x_1, x_2, x_3, \dots, x_k, \dots \quad \{n_k\} = 3, 8, 9, 10, 15, 17, 20, \dots$$

Если $k = 5$, то $n_k = 15$ и $n_k \geq k$.

Свойство 1. Если последовательность $\{x_k\}$ сходится и имеет своим пределом число a , то и любая подпоследовательность этой последовательности сходится и имеет пределом число a

$$(\{x_k\} \rightarrow a) \Rightarrow (\forall \{x_{n_k}\} \in \{x_k\} \rightarrow a).$$

Свойство 2. Если все подпоследовательности данной последовательности $\{x_k\}$ сходятся, то пределы всех этих подпоследовательностей равны одному и тому же числу a ; в частности, к этому же числу сходится и последовательность $\{x_k\}$

$$(\forall \{x_{n_k}\} \in \{x_k\}) \wedge (\forall \{x_{n_k}\} \in c) \Rightarrow [(\forall \{x_{n_k}\} \rightarrow a) \wedge (\{x_k\} \rightarrow a)].$$

Свойство 3. Каждая подпоследовательность бесконечно большой последовательности также будет бесконечно большой

$$(\{x_k\} \in B) \Rightarrow (\forall \{x_{n_k}\} \in B).$$

Лемма 1. Из каждой сходящейся последовательности можно выделить монотонную сходящуюся последовательность.

Замечание. Из каждой бесконечно большой последовательности можно выделить монотонную бесконечно большую последовательность.

1.4.2.11. Предельные точки последовательности

Определение 1. Точка x бесконечной прямой называется предельной точкой последовательности $\{x_n\}$, если в любой ε -окрестности этой точки имеется бесконечно много элементов последовательности $\{x_n\}$.

Лемма 1. Если x - предельная точка последовательности $\{x_k\}$, то из этой последовательности можно выделить подпоследовательность $\{x_{nk}\}$, сходящуюся к числу x .

Замечание. Справедливо и обратное утверждение. Если из последовательности $\{x_k\}$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к числу x , то число x является предельной точкой последовательности $\{x_k\}$. Действительно, в любой ε -окрестности точки x имеется бесконечно много элементов подпоследовательности, а стало быть и самой последовательности $\{x_k\}$.

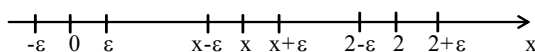
Из леммы 1 следует, что можно дать другое определение предельной точки последовательности, эквивалентное определению 1.

Определение 2. Точка x бесконечно прямой называется предельной точкой последовательности $\{x_k\}$, если из этой последовательности можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к x .

Лемма 2. Каждая сходящаяся последовательность имеет только одну предельную точку, совпадающую с пределом этой последовательности.

Замечание. Если последовательность сходится, то она в силу леммы 2 имеет только одну предельную точку. Однако, если $\{x_n\}$ не является сходящейся, то она может иметь несколько предельных точек (и, вообще бесконечно много предельных точек). Покажем, например, что $\{1+(-1)^n\}$ имеет две предельные точки.

Действительно, $\{1+(-1)^n\}=0,2,0,2,0,2,\dots$ имеет две предельные точки 0 и 2, т.к. подпоследовательности $\{0\}=0,0,0,\dots$ и $\{2\}=2,2,2,\dots$ этой последовательности имеют пределами соответственно числа 0 и 2. Других предельных точек у этой последовательности нет. Действительно, пусть x - любая точка числовой оси, отличная от точек 0 и 2. Возьмем $\varepsilon > 0$ настолько

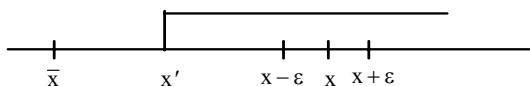


малым, чтобы ε -окрестности точек 0, x и 2 не пересекались. В ε -окрестностях точек 0 и 2 содержатся все элементы последовательности и поэтому ε -окрестность точки x не может содержать бесконечно много элементов $\{1+(-1)^n\}$ и поэтому не является предельной точкой этой последовательности.

Теорема. У всякой ограниченной последовательности существует хотя бы одна предельная точка.

Замечание. Ни одно число x , превосходящее \bar{x} , не является предельной точкой последовательности $\{x_n\}$, т.е. \bar{x} - наибольшая предельная точка последовательности $\{x_n\}$.

Пусть x - любое число, превосходящее \bar{x} . Выберем $\varepsilon > 0$ настолько малым,



что $x - \varepsilon > \bar{x}$.

Так как

$$(\bar{x} = \inf\{x'\}) \stackrel{\text{def}}{=} (\forall x' - \varepsilon > \bar{x})(\exists x^1 \in \{x_n\}) : [\bar{x} \leq x^1 < x' - \varepsilon],$$

и $x^1 \in \{x_n\}$, правее x^1 лежит конечное число элементов последовательности $\{x_n\}$ или их вовсе нет, т.е. x не является предельной точкой последовательности $\{x_n\}$.

Определение. Наибольшая предельная точка \bar{x} последовательности $\{x_n\}$ называется верхним пределом последовательности и обозначается символом $\bar{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Из замечания следует, что у всякой ограниченной последовательности есть верхний предел.

Аналогично вводится понятие нижнего предела $\underline{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ (как наименьшей предельной точки последовательности $\{x_n\}$).

Итак, мы доказали следующее утверждение. У всякой ограниченной последовательности существует верхний и нижний пределы.

Сформулируем без доказательства следующую теорему.

Теорема. Для того, чтобы последовательность $\{x_n\}$ была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы она была ограниченной и чтобы ее верхний и нижний пределы \bar{x} и \underline{x} совпадали.

Результаты этого пункта приводят к следующей основной теореме Больцано-Вейерштрасса.

Теорема Больцано-Вейерштрасса. Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство. Так как последовательность $\{x_n\}$ ограничена, то она имеет хотя бы одну предельную точку x . Тогда из этой последовательности можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к точке x (следует из определения 2 предельной точки).

Замечание. Из любой ограниченной последовательности можно выделить монотонную сходящуюся последовательность.

1.4.3. Понятие функции. Предел функции. Непрерывность

1.4.3.1. Определение функции

Определение 1.

Пусть даны два непустых подмножества $\{x\}$ и $\{y\}$ множества R . Если каждому элементу x из $\{x\}$ ставится в соответствие один элемент y из $\{y\}$, то y называется функцией f (отображением) аргумента x . Это записывается в виде:

$$y = f(x) \forall x \in \{x\}, \text{ или } y = f(x), x \in \{x\}.$$

Другими словами, с помощью функции $y=f(x)$ подмножество $\{x\}$ отображается в подмножество $\{y\}$, поэтому допустима запись $x \mapsto f(x), x \in \{x\}$.

Подмножество $\{x\}$ или $D(f)$ называется областью определения функции y , подмножество $\{y\}$ или $E(f)$ - множеством ее значений. Аргумент x часто

называют независимой переменной, функцию y -зависимой переменной, а соответствие между ними- функциональной зависимостью.

Частным значением функции $y=f(x)$ при $x=a$, $a \in \{x\}$ называется то значение y , которое соответствует заданному значению x . Оно обозначается через $f(a)$, или $y|_{x=a}$.

Функции могут быть заданы аналитически, графически и с помощью таблиц.

1.4.3.2. Способы задания функций

Функция задана аналитически, если функциональная зависимость выражена в виде формулы, которая указывает совокупность тех математических операций, которые должны быть выполнены, чтобы по данному значению аргумента найти соответствующее значение функции.

Пример 1. Функция Дирихле

$$y = D(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{при } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Пример 2. (рис.1)

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0 \\ 0 & \text{при } x = 0 \\ -1 & \text{при } x < 0 \end{cases}$$

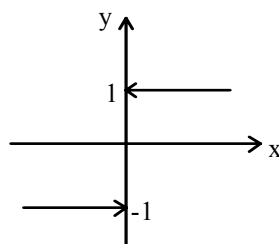


Рис.1

Определение 2. Графиком функции $y=f(x)$, $x \in \{x\}$ называется геометрическое место точек на плоскости с координатами $(x, f(x))$, где $x \in \{x\}$.

Графический способ задания функции, помимо геометрического изображения функции, заданной уравнением, удобен тогда, когда функцию трудно задать аналитически. Задать функцию графически - это значит задать ее график.

При табличном способе задания функции рядом с числовым значением аргумента выписывается соответствующее значение функции. Недостатком табличного способа задания функции является то, что в таблице могут быть указаны не все, а лишь отдельные значения аргумента и функции. Особенности изменения функции при этом могут быть искажены.

1.4.3.3. Монотонные функции

Пусть функция $y=f(x)$ определена на множестве $\{x\}$ и точки

$x_1, x_2 \in \{x\}$ любые точки, связанные соотношением $x_1 < x_2$.

Тогда

$$\left. \begin{aligned} (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)) &\stackrel{\text{def}}{=} f(x) \text{ не убывает} \\ (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)) &\stackrel{\text{def}}{=} f(x) \text{ не возрастает} \end{aligned} \right\} \stackrel{\text{def}}{=} f(x) \text{ монотонна;}$$

$$\left. \begin{aligned} (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)) &\stackrel{\text{def}}{=} f(x) \text{ возрастает} \\ (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)) &\stackrel{\text{def}}{=} f(x) \text{ убывает} \end{aligned} \right\} \stackrel{\text{def}}{=} f(x) \text{ строго монотонна}$$

1.4.3.4. Сложная функция

Функции, полученные в результате суперпозиции (или наложения) двух или нескольких функций, называются сложными.

Если функция y зависит от переменной x , т.е. $y=f(x)$, $x \in \{x\}$; а x , в свою очередь, является какой-либо функцией от независимой переменной t , т.е. $x=\varphi(t)$, $t \in \{t\}$, то переменная y называется функцией от функции (или сложной функцией от t) и записывается в виде

$$y=f(x), \quad x=\varphi(t); \quad \text{или} \quad y=f(\varphi(t)).$$

Область определения сложной функции - это множество тех значений t из $\{t\}$, для которых соответствующие значения x принадлежат области определения $\{x\}$ функции $y=f(x)$.

1.4.3.5. Обратная функция

Пусть задана некоторая функция $y=f(x)$, т.е. некоторое соответствие между множествами $D(f)$ и $E(f)$. Предположим, для определенности, что $D(f)=[a,b]$, а $E(f)=[\alpha,\beta]$. Пусть далее каждому $y \in [\alpha,\beta]$ соответствует одно и только одно значение $x \in [a,b]$, для которого $f(x)=y$ (рис.2). Тогда на сегменте $[\alpha,\beta]$ можно определить функцию $x=f^{-1}(y)$, ставя в соответствие каждому y из $[\alpha,\beta]$ то значение x из $[a,b]$, для которого $f(x)=y$. Функция $x=f^{-1}(y)$ называется обратной для функции $y=f(x)$.

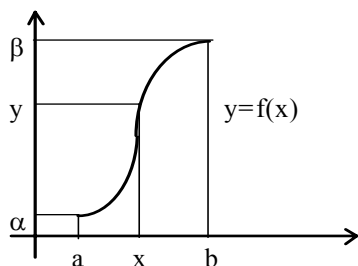


Рис.2.

Замечание 1. Вместо сегментов $[a,b]$ и $[\alpha,\beta]$ можно рассматривать интервалы (a,b) и (α,β) . Можно допускать, что один или оба интервала (a,b) и (α,β) превращаются в бесконечную прямую или в открытую полупрямую.

Замечание 2. Если $x=f^{-1}(y)$ - обратная функция для $y=f(x)$, то очевидно, функция $y=f(x)$ является обратной для функции $x=f^{-1}(y)$. Поэтому функции $y=f(x)$ и $x=f^{-1}(y)$ называются взаимно обратными.

Одна и та же кривая $y=f(x)$ представляет собой график функции $y=f(x)$ и график обратной функции $x=f^{-1}(y)$ (если она существует), но в последнем случае значения аргумента рассматриваются на оси Oy , а значения функции - на оси Ox .

Если придерживаться стандартных обозначений и независимую переменную обозначать через x , а функцию через y , то функция, обратная по отношению к $y=f(x)$, запишется в виде $y=f^{-1}(x)$. В этом случае график функции $y=f^{-1}(x)$ окажется симметричным графику функции $y=f(x)$ относительно прямой $x=y$ - биссектрисы I и III координатных углов.

Для взаимно обратных функций имеют место следующие соотношения: $D(f)=E(f^{-1})$, $E(f)=D(f^{-1})$, т.е. область определения данной функции совпадает с множеством значений обратной функции и наоборот.

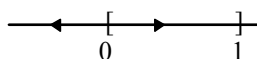
1.4.3.6. Допустимые области определения функций

Рассмотрим бесконечное множество $\{x\} \subset \mathbb{R}$ и точку $a \in \mathbb{R}$.

Определение. Точка a называется предельной для множества $\{x\}$, если в любой δ -окрестности т. a имеются точки множества $\{x\}$, отличные от a .

Замечание 1. Сама точка может принадлежать множеству $\{x\}$, а может и не принадлежать этому множеству.

Пример 1. $\{x\}=[0,1]$, $a=0$



Пример 2. $\{x\}=(-1,1) \setminus \{0\}$, $a=0$

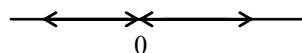


рис.3

Замечание 2. Множество $(a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}$, где $\delta > 0$, называют проколотой δ -окрестностью т. a . (Обозначение $\hat{U}_\delta(a)$).

Мы будем рассматривать функции $y=f(x)$, определенные на множестве $\{x\}$, для которого точка a является предельной.

1.4.3.7. Определение предела функции в точке

Определение 1. Последовательность $\{x_n\}$ называется последовательностью Гейне (для точки a и множества $\{x\}$), если $x_n \in \{x\}$, $\{x\} \rightarrow a$, $x_n \neq a$.

Определение 2. (определение предела по Гейне) Число b называется пределом функции $y=f(x)$ в точке a ($b = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$), если для любой последовательности Гейне $\{x_n\}$ соответствующая последовательность значений функций $\{f(x_n)\}$ сходится к числу b .

$$\left(b = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right) \stackrel{\text{def}}{=} (\forall \{x_n\}) [(x_n \in \{x\}) \wedge (\{x_n\} \rightarrow a) \wedge (x_n \neq a) \Rightarrow \{f(x_n)\} \rightarrow b]$$

Таким образом, для доказательства того, что функция $y=f(x)$ не имеет предела в т. a (в смысле определения по Гейне), достаточно указать две последовательности Гейне $\{x_n^I\}$ и $\{x_n^{II}\}$, для которых

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n^I) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n^{II})$$

Пример 1. Функция Дирихле $y=D(x)$ не имеет предела в т. $\alpha=0$.

Действительно,

$$x^I_n \in Q, \{x^I_n\} \rightarrow 0, D(x^I_n) = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} D(x^I_n) = 1$$

$$x^{II}_n \notin Q, \{x^{II}_n\} \rightarrow 0, D(x^{II}_n) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} D(x^{II}_n) = 0.$$

Пример 2. Функция $y=\operatorname{sgn} x$ не имеет предела в т. $a=0$.

$$x^I_n = \frac{1}{n}, f(x^I_n) = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x^I_n) = 1; \quad x^{II}_n = -\frac{1}{n}, f(x^{II}_n) = -1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x^{II}_n) = -1$$

Определение 2. * (определение предела по Коши). Число b называется пределом функции $y=f(x)$ в точке a , или при $x \rightarrow a$ ($b = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$), если для

любого положительного числа ε найдется положительное число δ такое, что для всех значений аргумента x , удовлетворяющих условию $0 < |x-a| < \delta$, будет выполняться неравенство $|f(x)-b| < \varepsilon$.

$$\left(b = \lim_{x \rightarrow a} f(x)\right) \stackrel{\text{def}}{\equiv} (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0): (\forall x \in \{x\}) [0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-b| < \varepsilon].$$

Замечание 1. Условия $x_n \neq a$ и $0 < |x-a|$ в определениях 2 и 2* исключают из рассмотрения т. a . В этой точке функция $y=f(x)$ может быть не определена, либо ее значение может быть отличным от b . Таким образом, предел функции в т. a не зависит от значения функции в этой точке.

Замечание 2. Условие $0 < |x-a| < \delta \Leftrightarrow (a-\delta < x < a+\delta) \wedge (x \neq a) \Leftrightarrow x$ принадлежит проколотой δ -окрестности т. a . Условие $|f(x)-b| < \varepsilon \Leftrightarrow b-\varepsilon < f(x) < b+\varepsilon \Leftrightarrow f(x)$ принадлежит ε -окрестности т. b . Это условие означает, что точки графика функции $y=f(x)$ с координатами $(x, f(x))$ попадают в ε полосу $\{b-\varepsilon < y < b+\varepsilon\}$ прямой $y=b$.

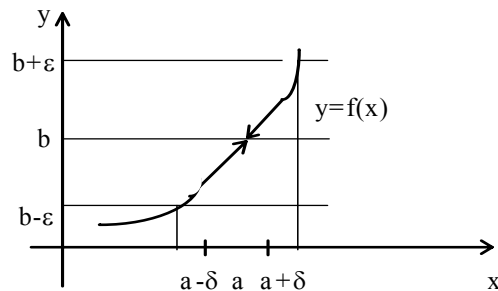


Рис. 4

Замечание 3. В определении 2* достаточно найти $\delta = \delta(\varepsilon)$ только для малых $\varepsilon > 0$. Так как из неравенства $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ и $|f(x)-b| < \varepsilon_1$, очевидно, следует неравенство $|f(x)-b| < \varepsilon_2$ для тех же значений x (и, следовательно, для $\delta(\varepsilon_2) = \delta(\varepsilon_1)$).

С другой стороны, если $\delta(\varepsilon)$ найдено лишь для достаточно больших ε , то этого может быть недостаточно для существования предела функции (см. рис.5)

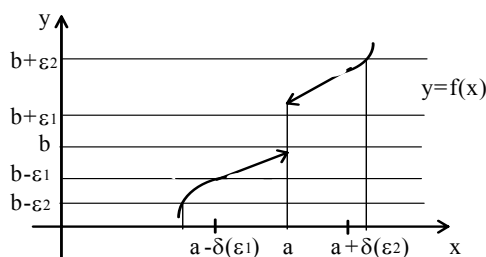


Рис. 5

Очевидно, для $\varepsilon_1 > 0$ нельзя найти $\delta(\varepsilon_1)$, для которого при всех x из проколотой $\delta(\varepsilon_1)$ -окрестности т. а график попадал бы в ε_1 -полоску $y=b$. (Для $\varepsilon_2 > 0$ такое $\delta(\varepsilon_2)$ существует).

Замечание 4. Если в определении 2* по данному $\varepsilon > 0$ найдено $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, то любое $\delta_1 : 0 < \delta_1 < \delta(\varepsilon)$ такое можно взять в качестве δ . Действительно, $0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow 0 < |x-a| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x)-b| < \varepsilon$. Отсюда следует, что в определении 2* не нужно искать наибольшее возможное значение δ по данному значению $\varepsilon > 0$.

Замечание 5. Определение 2* можно сформулировать следующим образом: $b = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, если для любой ε -окрестности точки b , существует такая δ -окрестность т. а, что для всех значений аргумента x , принадлежащих этой δ -окрестности и отличных от a , значение функции $f(x)$ попадает в ε -окрестность т. b .

Замечание 6. В определении предела требуется существование симметричной окрестности (δ -окрестности) точки a , но для ε -окрестности т. b , может существовать несимметричная большая окрестность. (см. рис. 2).

Теорема. Определения 2 и 2* предела функции по Гейне и Коши эквивалентны.

Пример 3. Доказать по определению, что $\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 + x) = 10$.

Запишем определение предела по Коши для данной функции.

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0): (0 < |x-2| < \delta \Rightarrow |x^3 + x - 10| < \varepsilon.)$$

Задача состоит в том, чтобы по ε найти δ , при котором справедлива эта импликация.

Рассмотрим неравенство $|x^3 + x - 10| < \varepsilon$ и будем искать часть множества его решений вида $|x-2| < h(\varepsilon)$, тогда $h(\varepsilon)$ можно будет взять в качестве δ .

$$\begin{aligned} x^3 + x - 10 &= x^3 - 8 + x - 2 = (x-2)(x^2 + 2x + 4 + 1) \\ |x^3 + x - 10| < \varepsilon &\Leftrightarrow |x-2| \cdot |x^2 + 2x + 5| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Рассмотрим сегмент $[1, 3]$, на котором функция $x^2 + 2x + 5$ является ограниченной: $|x^2 + 2x + 5| \leq 9 + 6 + 5 = 20$, тогда

$$(|x-2| \cdot 20 < \varepsilon) \wedge (x \in [1, 3]) \Rightarrow |x^3 + x - 10| < \varepsilon$$

$$\left(|x-2| < \frac{\varepsilon}{20}\right) \wedge (x \in [1, 3]) \Rightarrow |x^3 + x - 10| < \varepsilon.$$

Отсюда, в качестве δ можно взять $\delta = \min\left(\frac{\varepsilon}{20}, 1\right)$. Число $\delta \leq 1$, т.к. $x \in [1, 3]$.

Таким образом, условие ограниченности $x^2 + 2x + 5$, а следовательно, воз-

возможность сведения неравенства $|x^3 + x - 10| < \varepsilon$ к более простому $|x - 2| < \frac{\varepsilon}{20}$ повлекло за собой ограничение области изменения x , т.е. ограничение на величину δ сверху. Если ε мало (например, $\varepsilon < 1$), то $\frac{\varepsilon}{20} < 1$ и $\delta = \frac{\varepsilon}{20}$, т.е. ограничение $\delta \leq 1$ не является существенным. Далее заметим, что даже при малых $\varepsilon > 0$ число $\delta = \frac{\varepsilon}{20}$ не является наибольшим возможным $\delta(\varepsilon)$. Однако, как мы уже отмечали, наибольшее $\delta(\varepsilon)$ в определении предела и не нужно.

1.4.3.8. Односторонние пределы

Определение 1. (предел $f(x)$ слева в т. а. Обозначение $f(a-0)$).

$$\left(b = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x)\right) \stackrel{\text{def}}{=} (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0): (\forall x \in \{x\}) (0 < a - x < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon).$$

Определение 2. (предел $f(x)$ справа в т. а. Обозначение $f(a+0)$).

$$\left(b = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)\right) \stackrel{\text{def}}{=} (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0): (\forall x \in \{x\}) (0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon).$$

Пример 3. $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $a=0$,

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+0} 1 = 1 \quad (\text{т.к. } f(x)=1 \text{ при } x>0).$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-0} -1 = -1 \quad (\text{т.к. } f(x)=-1 \text{ при } x<0).$$

Односторонние пределы существуют, в то время как предел функции $y = \operatorname{sgn} x$ в точке 0 не существует.

Замечание. $\left(b = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)\right) \wedge \left(b = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x)\right) \Rightarrow b = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, т.е. справедлива

теорема: Если в точке a правый и левый пределы функции равны, то в точке a существует предел этой функции, равный указанным односторонним пределам.

Действительно, если неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$ в определении предела справедливо при $a < x < a + \delta$ и $a - \delta < x < a$, то оно будет справедливо и при $0 < |x - a| < \delta$.

1.4.3.9. Пределы на бесконечности

Определение 1. (предел $f(x)$ при $x \rightarrow \infty$).

$$\left(b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)\right) \stackrel{\text{def}}{=} (\forall \varepsilon > 0)(\exists B > 0): (\forall x \in \{x\}) (|x| > B \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon).$$

Определение 2. (предел $f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$).

$$\left(b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)\right) \stackrel{\text{def}}{=} (\forall \varepsilon > 0)(\exists B > 0): (\forall x \in \{x\}) (x > B \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon).$$

Определение 3. (предел $f(x)$ при $x \rightarrow -\infty$).

$$\left(b = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)\right) \stackrel{\text{def}}{=} (\forall \varepsilon > 0)(\exists B > 0): (\forall x \in \{x\}) (x < -B \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon).$$

Задача. Сформулировать определения 4-6 пределов по Гейне.

Замечание. Предел последовательности- частный случай предела функции $\{x\}=\mathbb{N}$, $x \rightarrow \infty$.

Замечание. Определения односторонних пределов получаются как частный случай определения предела функции, если область определения функции $\{x\}$ представляет собой правую (левую) полуокрестность т. а (или, соответственно, правую (левую) полупрямую) (см. рис.3 п.1.4.3.6.).

1.4.3.10. Арифметические операции над функциями, имеющими предел

Теорема 1. $\left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b\right) \wedge \left(\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c\right) \wedge (x \in \{x\}) \Rightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b \pm c \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b \cdot c \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{b}{c} \quad (c \neq 0) \quad (3)$$

Доказательство:

Пусть $\{x_n\}$ - произвольная последовательность Гейне, тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = c$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b$. Но по теоремам о пределах суммы, разности, произведения и частного для последовательностей следует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n) \pm g(x_n)) = b \pm c, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \cdot g(x_n) = b \cdot c, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{b}{c} \quad (c \neq 0).$$

Так как $\{x_n\}$ - произвольная последовательность Гейне, то по определению Гейне справедливы равенства (1)-(3).

Замечание. Доказательство для случаев $x \rightarrow \pm\infty$, $x \rightarrow \infty$ проводятся по той же схеме.

Пример. Найти предел функции : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$.

Теорема о пределе частного сразу не применима, т.к. $\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - 1) = 0$. Но так

$$\text{как } x \neq 1, \text{ то } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2 + x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x^2 + x + 1} = \frac{2}{3}.$$

1.4.3.11. Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Пусть $y=\alpha(x)$ определена на $\{x\}$ и a - предельная точка для $\{x\}$.

Определение 1. Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой в точке a (при $x \rightarrow a$), если $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$ (обозначение: $\alpha(x) = o(x)$).

Определение 2. (по Гейне). Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой функцией в точке a , если

$$[(\forall \{x_n\} \rightarrow a) \wedge (x_n \in \{x\}) \wedge (x_n \neq a)] \Rightarrow \{\alpha(x_n)\} \rightarrow 0$$

Определение 3. (по Коши).

$$(\alpha(x) = o(1)) \stackrel{\text{def}}{=} (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0): (\forall x \in \{x\}) (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon).$$

Замечание 1. Через $\delta(x_0)$ будем обозначать класс бесконечно малых в точке x_0 функций.

Теорема 1. Для того, чтобы функция $y=f(x)$ имела равный b предел в точке a , необходимо и достаточно, чтобы функция $\alpha(x)=f(x)-b$ являлась бесконечно малой в точке a .

Необходимость. Пусть $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, тогда рассмотрим функцию $\alpha(x)=f(x)-b$.

Так как $\lim_{x \rightarrow a} b = b$, то $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - b] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - b = 0$, т.е.

$$\alpha(x) \in \delta(a).$$

Достаточность. Пусть $[\alpha(x) = f(x) - b] \wedge [\alpha(x) \in \delta(a)]$, тогда $f(x) = \alpha(x) + b$ и

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} [\alpha(x) + b] = \lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) + b, \text{ т.е. } \exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b.$$

Определение 4. Функция $y=f(x)$ называется бесконечно большой в точке a ($f(x) \in B(a)$), если $(\forall B > 0)(\exists \delta > 0): (\forall x \in \{x\}) (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x)| > B)$.

Обозначение: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$.

Аналогично даются определения $\lim_{x \rightarrow a \pm 0} f(x) = \infty$.

Пример. $f(x) = \frac{1}{x}$ является бесконечно большой в т. $a=0$.

Действительно, следующая импликация определения очевидна:

$$(\forall B > 0) \left(\exists \delta > \frac{1}{B} \right) : (\forall x \neq 0) \left[|x| < \frac{1}{B} \Rightarrow \left| \frac{1}{x} \right| > B \right].$$

Кроме того, $\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{1}{x} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{1}{x} = -\infty$.

Определение 5. $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = -\infty$

$$(\forall B > 0)(\exists \delta > 0): (\forall x \in \{x\}) [0 < x - a < \delta \Rightarrow f(x) < -B].$$

Определение 6. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

$$(\forall B > 0)(\exists A > 0): (\forall x \in \{x\}) [x < -A \Rightarrow f(x) > B].$$

Аналогично даются определения:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm\infty.$$

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ - бесконечно малые в т. а функции, тогда

1) $\alpha(x)$ называется бесконечно малой более высокого порядка, чем $\beta(x)$,

если $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$ (Обозначения: $\alpha(x)=o(\beta(x))$). Читается: α есть 0 малое от

β .

2) $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются бесконечно малыми одного порядка в т. а, если

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c (0 < |c| < \infty) \text{ (Обозначения } \alpha(x)=O(\beta(x))). \text{ Читается: } \alpha \text{ есть } 0$$

большое от β .

3) $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются эквивалентными бесконечно малыми в т. а, если

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1 \text{ (Обозначения: } \alpha(x) \sim (\beta(x)).$$

4) Бесконечно малая в т. а функция $\alpha(x)$ имеет порядок малости m относительно некоторой бесконечно малой в т. а функции $\beta(x)$, если

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^m} = c \quad (0 < |c| < \infty).$$

Замечание 2. Если не существует $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называют не-сравнимыми бесконечно малыми функциями.

Из определения 5 вытекают следующие утверждения:

1) $o(\beta) \pm o(\beta) = o(\beta)$; 2) $\gamma = o(\beta) \Rightarrow o(\beta) \pm o(\gamma) = o(\beta)$;

3) $\alpha = o(1)$, $\beta = o(1) \Rightarrow \alpha\beta = o(\alpha), \alpha\beta = o(\beta)$.

Докажем, например, утверждение 2). В силу утверждения 1) для этого достаточно доказать, что $\gamma = o(\beta) \Rightarrow o(\gamma) = o(\beta)$.

Пусть $\rho = o(\gamma)$. Это значит, что $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\rho(x)}{\gamma(x)} = 0$. Нужно доказать, что

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\rho(x)}{\beta(x)} = 0. \text{ Доказательством является целая цепочка равенств}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\rho(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\rho(x)}{\gamma(x)} \cdot \frac{\gamma(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\rho(x)}{\gamma(x)} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{\gamma(x)}{\beta(x)} = 0 \cdot 0 = 0$$

Докажем еще одно утверждение:

$$4) \alpha \sim \beta \Leftrightarrow \beta = \alpha + o(\alpha) \vee \beta = \alpha + o(\beta)$$

Доказательство: а) $\alpha \sim \beta \Rightarrow \beta = \alpha + o(\alpha)$ (см. теорему этого пункта)

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 1 \Rightarrow \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 1 + o(x) \Rightarrow \beta(x) = \alpha(x) + o(x) \cdot \alpha(x)$$

В силу утверждения 3) $o(x) \cdot \alpha(x) = o(\alpha)$, поэтому $\beta(x) = \alpha(x) + o(\alpha(x))$

$$б) \beta = \alpha + o(\alpha) \Rightarrow \alpha \sim \beta$$

$$\beta = \alpha + o(\alpha) \Rightarrow \frac{\beta}{\alpha} = 1 + \frac{o(\alpha)}{\alpha} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \left(1 + \frac{o(\alpha)}{\alpha} \right) = 1 + \lim_{x \rightarrow a} \frac{o(\alpha)}{\alpha}$$

$$\text{Но } \lim_{x \rightarrow a} \frac{o(\alpha)}{\alpha} = 0 \text{ в силу определения } o(\alpha), \text{ поэтому } \lim_{x \rightarrow a} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 1.$$

Аналогично доказывается, что $\alpha \sim \beta \Leftrightarrow \beta = \alpha + o(\beta)$.

Таким образом, если $\beta(x) \sim \alpha(x)$, то $\alpha(x)$ приближает функцию $\beta(x)$ при $x \rightarrow a$ (и наоборот).

Замечание. Свойство 1) $o(\beta) - o(\beta) = o(\beta)$ означает следующее:

$\alpha_1 = o(\beta), \alpha_2 = o(\beta) \Rightarrow \alpha_1 - \alpha_2 = o(\beta)$. [$\alpha_1 - \alpha_2 \neq 0$, вообще говоря, т.к. это разные функции, обозначенные одним символом $o(\beta)$].

Аналогично бесконечно малым сравниваются бесконечно большие в данной точке функции.

Пусть $\lim_{x \rightarrow a} A(x) = +\infty$ и $\lim_{x \rightarrow a} B(x) = +\infty$, тогда

1) $A(x)$ имеет в т. а более высокий порядок роста, чем $B(x)$, если

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{A(x)}{B(x)} = +\infty$$

2) $A(x)$ и $B(x)$ имеют в т. а одинаковый порядок роста, если

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{A(x)}{B(x)} = c \quad (0 < |c| < +\infty).$$

3) Бесконечно большая функция $A(x)$ в точке a называется величиной k -го порядка относительно бесконечно большой функции $B(x)$, если

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{A(x)}{[B(x)]^k} = c \quad (0 < |c| < +\infty).$$

4) $A(x)$ и $B(x)$ называются эквивалентными в точке a , если

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{A(x)}{B(x)} = 1.$$

5) Если не $\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{A(x)}{B(x)}$, то $A(x)$ и $B(x)$ называются несравнимыми.

Замечание 2. Эти определения сохраняются для бесконечно больших функций в точке a слева и справа.

Пример. 1) $\alpha(x) = x^3 - x^5$, $\beta(x) = 5x^3 + x^4$, $x \rightarrow 0$. Эти функции бесконечно малые в т. $x=0$ одного порядка; действительно,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - x^5}{5x^3 + x^4} = \frac{1}{5} \Rightarrow \alpha(x) = o(\beta(x)), \quad \alpha(x) \sim \frac{1}{5}\beta(x),$$

2) $A(x) = \frac{2+x}{x}$, $B(x) = \frac{1}{x}$ - бесконечно большие одинакового порядка роста при $x \rightarrow 0$, действительно,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{A(x)}{B(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2+x}{x}}{\frac{1}{x}} = 2.$$

1.4.3.12. Предельный переход в функциональных неравенствах

Пусть функции $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ заданы в проколотовой δ -окрестности т. a ($\hat{U}_\delta(a)$).

Теорема 1.

$$\left[\left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \right) \wedge \left(\forall x \in \hat{U}_\delta(a) \Rightarrow \begin{cases} f(x) \leq c \\ f(x) \geq c \end{cases} \right) \right] \Rightarrow \begin{cases} b \leq c \\ b \geq c \end{cases} \quad (\text{рис.6})$$

Пусть функция $f(x)$ имеет в т. a предел, равный b . Если в указанной окрестности точки a (за исключением, может быть, самой точки) выполняется неравенство $f(x) \leq c$ ($f(x) \geq c$), где c - некоторая константа, то предел функции $f(x)$ в т. a удовлетворяет неравенству $b \leq c$ ($b \geq c$).

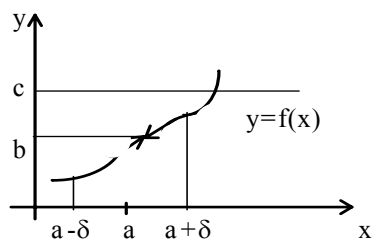


Рис. 6

Доказательство:

Пусть $\{x_n\}$ - какая-нибудь последовательность Гейне, тогда по определению предела (по Гейне) функции $f(x)$ в т. a : $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b$, причем $f(x_n) \leq c$. По теореме о предельном переходе для последовательностей $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \leq c$. Но $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b$, поэтому $b \leq c$. Для случая $f(x) \geq c$ доказательство аналогично.

Следствие 1.

$$\left[\left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \right) \wedge \left(\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c \right) \wedge \left(\forall x \in \hat{U}_\delta(a) \Rightarrow f(x) \leq g(x) \right) \right] \Rightarrow b \leq c$$

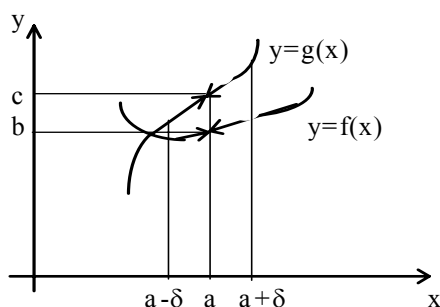


Рис. 7

Следствие 2.

$$\left[\left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \right) \wedge \left(\forall x \in \hat{U}_\delta(a) \Rightarrow c \leq f(x) \leq d \right) \right] \Rightarrow c \leq b \leq d$$

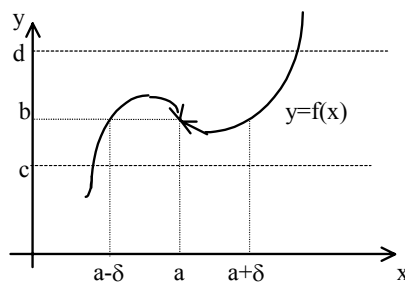


Рис. 8

Теорема 2.

$$\left[\left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b \right) \wedge \left(\forall x \in \hat{U}_\delta(a) \Rightarrow f(x) \leq h(x) \leq g(x) \right) \right] \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} h(x) = b$$

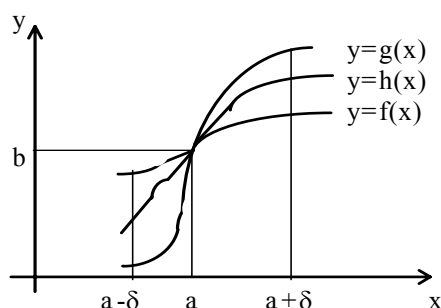


Рис.9

Доказательство: В отличие от предыдущих утверждений, здесь нужно доказать существование предела $h(x)$ при $x \rightarrow a$. Пусть $\{x_n\}$ - произвольная последовательность Гейне. Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = b$ и, кроме того, $f(x_n) \leq h(x_n) \leq g(x_n)$. По теореме 2 п. 2.9 для последовательностей существует $\lim_{n \rightarrow \infty} h(x_n) = b$. Так как последовательность $\{x_n\}$ - произвольная последовательность Гейне и $\lim_{n \rightarrow \infty} h(x_n) = b$, то по определению предела (по Гейне) существует $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = b$. Теорема доказана.

1.4.3.13. Определение непрерывности функции в точке и на множестве

Пусть $\{x\}$ - область определения функции $f(x)$, $a \in \{x\}$ и любая δ -окрестность т. а содержит точки $\{x\}$, отличные от а.

Определение 1. Функция $f(x)$ называется непрерывной в т. а, если

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a). \quad (\text{Обозначение : } f(x) \in C\{a\}).$$

Определение 2.

$$f(x) \in C\{a\} \stackrel{\text{def}}{=} \left[(\forall \{x_n\} \rightarrow a) \wedge (x_n \in \{x\}) \right] \Rightarrow \{f(x_n)\} \rightarrow f(a).$$

Определение 3.

$$f(x) \in C\{a\} \stackrel{\text{def}}{=} (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0): (\forall x \in \{x\}) [|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon].$$

Замечание 1. В определении 2 нет условия $x_n \neq a$, в 3 - нет условия

$|x - a| > 0$. Эти определения (2 и 3) эквивалентны.

Определение 4. Функция $f(x)$ непрерывна в т. а слева, если

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = f(a).$$

Определение 5. Функция $f(x)$ непрерывна в т. а справа, если

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a).$$

Замечание 2. Если функция непрерывна в т. а справа и слева, то она непрерывна в т. а. Это следует из замечания п.1.4.3.8.

Определение 6. Точки, в которых функция $f(x)$ не обладает свойством непрерывности, называются точками разрыва этой функции.

Пример 1. $f(x)=x^n$ ($n \in \mathbb{N}$) непрерывна в т. а ($a \in \mathbb{R}$).

$$\lim_{x \rightarrow a} x = a \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} x^n = \lim_{x \rightarrow a} x \cdot \dots \cdot \lim_{x \rightarrow a} x = a^n.$$

Пример 2.

$$y = f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, x > 0 \\ 0, x = 0 \\ -1, x < 0 \end{cases} \quad \text{разрывна в т. } x=0,$$

$\lim_{x \rightarrow 0-0} \operatorname{sgn} x = -1, \lim_{x \rightarrow 0+0} \operatorname{sgn} x = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sgn} x$ не существует $\Rightarrow y = \operatorname{sgn} x$ разрывна в т. $x=0$. В остальных точках она непрерывна.

Пример 3. Функция Дирихле $y=D(x)$ разрывна в каждой точке, т.к. нет предела в каждой точке. (Докажите это, построив последовательность ра-

циональных и последовательность иррациональных чисел, сходящихся к этой точке).

Определение 7. Функция $f(x)$ непрерывна на множестве $M(f(x) \in C(M))$, если она непрерывна в каждой точке множества M .

Определение 8. Функция $f(x)$ называется непрерывной на сегменте $[a, b]$, если она непрерывна в каждой внутренней точке этого сегмента и, кроме того, непрерывна справа в т. a и непрерывна слева в b ($f(x) \in C[a, b]$); (для интервала $f(x) \in C(a, b)$).

1.4.3.14. Арифметические действия над непрерывными функциями

Теорема. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ заданы на множестве $\{x\}$. Если эти функции непрерывны в т. $x=a$, то функции $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ непрерывны в точке $x=a$ (частное при условии $g(a) \neq 0$)

$$\left(f(x) \in C\{a\} \right) \wedge \left(g(x) \in C\{a\} \right) \Rightarrow \left(f(x) \pm g(x) \in C\{a\} \right) \wedge \left(f(x) \cdot g(x) \in C\{a\} \right) \wedge \left[\frac{f(x)}{g(x)} \in C\{a\} \quad (g(a) \neq 0) \right]$$

Доказательство:

$$\left(f(x) \in C\{a\} \right) \wedge \left(g(x) \in C\{a\} \right) \Leftrightarrow \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \right) \wedge \left(\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a) \right).$$

По теореме о пределе разности, суммы, произведения и частного двух функций (теорема п.3.10)

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = f(a) \pm g(a), \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = f(a) \cdot g(a), \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)}$$

(если $g(a) \neq 0$). Эти равенства и означают непрерывность в т. a функций $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$.

1.4.3.15. Сложная функция и ее непрерывность

Пусть функция $x=\varphi(t)$ задана на множестве $\{t\}$, и пусть $\{x\}$ - множество ее значений. Допустим, что на множестве $\{x\}$ задана функция $y=f(x)$. Тогда на множестве $\{t\}$ задана сложная функция $y=f(\varphi(t))=F(t)$. Предположим, что $a \in \varphi(t)$ является предельной точкой множества $\{t\}$; $a \in \varphi(t)$; $b=\varphi(a) \in \{x\}$ является предельной точкой множества $\{x\}$.

Теорема. Пусть $x=\varphi(t) \in C\{a\}$, $y=f(x) \in C\{b\}$, где $b=\varphi(a)$. Тогда $y=f(\varphi(t))=F(t) \in C\{a\}$.

1.4.3.16. Замечательные пределы

Первый замечательный предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Доказательство. Сначала установим справедливость неравенства

$$0 < \sin x < x < \operatorname{tg} x \quad \text{при } 0 < x < \frac{\pi}{2}. \quad (1)$$

Рассмотрим следующие фигуры (см. рис. 1):

треугольники $\triangle OAB$ и $\triangle OAC$ и сектор AOB

Для них

$$S_{\triangle OAB} < S_{\text{сект. } AOB} < S_{\triangle OAC}, \text{ т.е.}$$

$$\frac{1}{2} R^2 \sin x \leq \frac{1}{2} R^2 x \leq \frac{1}{2} R^2 \operatorname{tg} x.$$

Сокращая на $\frac{1}{2} R^2$, получаем неравенства (1)

Пусть $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

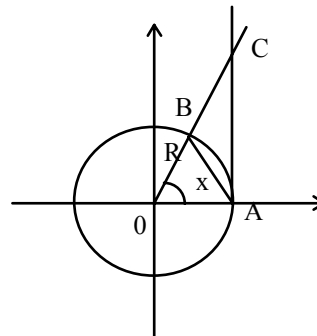


рис.10

Из (1) деля на $\sin x$, имеем $0 < 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$ или $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$.

Эти неравенства справедливы и для значений x , удовлетворяющих условиям $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, так как $\cos x = \cos(-x)$ и $\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin(-x)}{-x}$. Функция $y = \cos x$ непрерывна на всей числовой оси (см., например, Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа.- М.: Наука, 1971, ч.1, гл.4, ?5, п.6, с.120)

поэтому $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$. Итак, для функции $\cos x$, $1, \frac{\sin x}{x}$ в некоторой δ -окрестности точки $x=0$ выполняются все условия теоремы 2 п.3.12. о предельном переходе в функциональных неравенствах ($f(x)=\cos x$, $g(x)=1$, $h(x)=\frac{\sin x}{x}$ и $\delta=\frac{\pi}{2}$).

Следовательно, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$.

Второй замечательный предел

Число e было определено как $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \equiv e$

Можно доказать, что $e = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}}$.

1.4.3.17. Точки разрыва функций**Устранимый разрыв.**

Определение 1. Точка a называется точкой устранимого разрыва функции $y=f(x)$, если существует $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, но в т. a $f(x)$ либо не определена, либо $f(a) \neq \lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Пример 1.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{п при } x \neq 0 \\ 0 & \text{п при } x = 0 \end{cases}$$

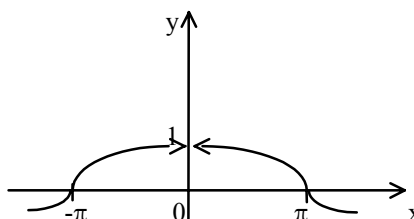


Рис.11

Так как $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, то т. $x=0$ является для этой функции точкой устранимого разрыва.

Замечание 1. В точке a устранимого разрыва функции $f(x)$ можно переопределить (или доопределить) так, чтобы она стала непрерывной, положив ее равной в т. a значению предела $f(x)$ при $x \rightarrow a$. В примере 1 достаточно положить $f(0)=1$ и $f(x)$ станет непрерывной в т. $x=0$ (и на всей числовой прямой в силу теоремы п.1.4.3.14.).

Разрыв первого рода

Определение 2. Точка a называется точкой разрыва первого рода, если

$$\left(\exists \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) \right) \wedge \left(\exists \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) \right) \wedge \left(\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) \right).$$

Пример 2. $f(x) = \frac{\sin x}{|x|}$. Точка $a=0$ является точкой разрыва первого рода.

Действительно, односторонние пределы в т. 0 существуют, но не равны между собой

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{\sin x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{\sin x}{-x} = -1; \quad \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\sin x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\sin x}{x} = +1.$$

Разрыв второго рода

Определение 3. Точка a называется точкой разрыва второго рода функции $y=f(x)$, если $f(x)$ в этой точке не имеет хотя бы одного одностороннего предела или хотя бы один из односторонних пределов бесконечен.

Пример 3. $f(x) = \frac{1}{x}$, $a = 0$. Эта функция бесконечно большая при $x \rightarrow \pm 0$, следовательно, т. $a=0$ - точка разрыва второго рода.

Пример 4. $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{при } x \neq 0 \\ 0 & \text{при } x = 0 \end{cases}$

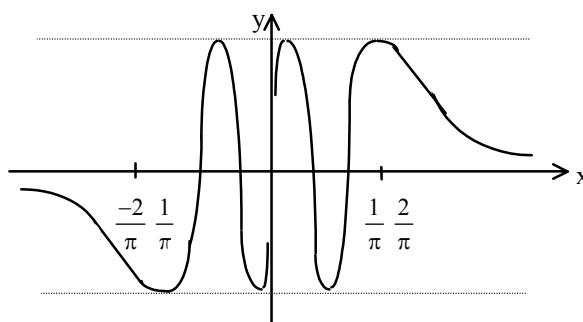


Рис. 12.

Эта функция в точке $x=0$, не имеет ни правого, ни левого пределов.

В силу нечетности функции достаточно проверить, что нет правого предела. Построим две положительные последовательности, сходящиеся к нулю, на которых соответствующие последовательности значений имеют разные пределы, тогда по определению Гейне функция не будет иметь правого предела в точке 0.

$$x_n^I = \frac{1}{n\pi}, \quad f(x_n^I) = \sin \frac{1}{\frac{1}{n\pi}} = \sin n\pi = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n^I) = 0$$

$$x_n^{II} = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}, \quad f(x_n^{II}) = \sin \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} = \sin \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi \right) = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n^{II}) = 1$$

Таким образом, $x=0$ - точка разрыва 2-го рода.

Пример 5. $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{при } x > 0 \\ 1 & \text{при } x \leq 0 \end{cases}$

не имеет только правого предела в т. 0. Точка $x=0$ - точка разрыва 2-го рода.

Определение 4. Функция $f(x)$ называется кусочно непрерывной на сегменте $[a,b]$, если эта функция определена всюду на сегменте $[a,b]$, непрерывна во всех внутренних точках этого сегмента, за исключением, быть может,

конечного числа точек, в которых она имеет разрыв первого рода, кроме того, имеет правый предел в точке a и левый предел в точке b .

1.4.3.18. Свойства непрерывных функций

Устойчивость знака непрерывной в точке функции

Определение 1. Функция $f(x)$ называется ограниченной сверху (снизу) на множестве $\{x\}$, если

$$(\exists M(m) \in \mathbb{R}): (\forall (x) \in \{x\}) \Rightarrow f(x) \leq M \quad (f(x) \geq m).$$

Определение 2. Функция $f(x)$ называется ограниченной на множестве $\{x\}$, если она ограничена на этом множестве сверху и снизу, т.е.

$$(\exists M, m \in \mathbb{R}): (\forall (x) \in \{x\}) \Rightarrow m \leq f(x) \leq M.$$

Обозначения: $f(x) \in B(x)$.

Теорема 1. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности U точки a , непрерывна в точке a и $f(a) \neq 0$. Тогда существует такая δ -окрестность т. a , что для всех значений аргумента из указанной δ -окрестности функция $f(x)$ не обращается в нуль и имеет знак, совпадающий со знаком $f(a)$.

$$(f(x) \in C\{a\}) \wedge \begin{cases} f(a) > 0 \\ f(a) < 0 \end{cases} \Rightarrow (\exists \delta > 0): \left(\forall x \in (a - \delta, a + \delta) \Rightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) < 0 \end{cases} \right).$$

Замечание 1. Теорема 1 справедлива для полуокрестностей точки a . (см. рис. 13.)

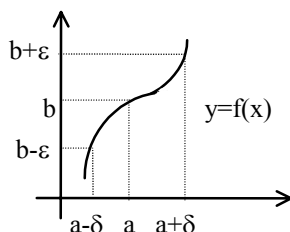


Рис. 13

Теорема 2. (прохождение непрерывной функции через нуль при смене знаков).

Пусть непрерывная на сегменте функция принимает на концах этого сегмента значения разных знаков, тогда внутри сегмента найдется точка, в которой значение функции равно нулю.

$$(f(x) \in C[a, b]) \wedge (f(a) \cdot f(b) < 0) \Rightarrow [\exists \xi \in (a, b): f(\xi) = 0].$$

Теорема 3. Непрерывная на сегменте функция принимает все значения, заключенные между значениями этой функции на концах сегмента.

$$(f(x) \in C[a, b]) \wedge (f(a) = \alpha) \wedge (f(b) = \beta) \Rightarrow \left[\begin{matrix} \forall \gamma \in [\alpha, \beta] \\ \forall \gamma \in [\beta, \alpha] \end{matrix} \right] \Rightarrow (\exists \xi \in [a, b]): (f(\xi) = \gamma)$$

Доказательство. Если $\alpha = \beta$, утверждение очевидно. Утверждение также

очевидно и в том случае, когда $(\gamma=\alpha) \vee (\gamma=\beta)$. Теперь, не ограничивая общность, будем считать, что $\alpha > \beta$, $\alpha > \gamma > \beta$, (см. рис.14)

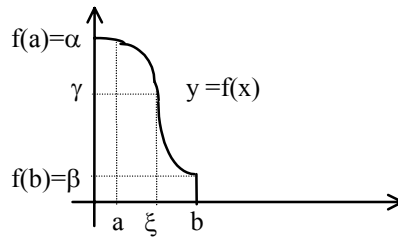


Рис. 14

Рассмотрим функцию $\varphi(x)=f(x)-\gamma$. Тогда

$$\varphi(x) \in C[a, b], \quad \varphi(a) = f(a) - \gamma = \alpha - \gamma > 0, \quad \varphi(b) = f(b) - \gamma = \beta - \gamma < 0.$$

Таким образом, к функции $\varphi(x)$ применима теорема 2. По этой теореме существует $\xi \in (a, b): \varphi(\xi)=0$. Но тогда $\varphi(\xi)=f(\xi)-\gamma=0$, т.е. $f(\xi)=\gamma$. Теорема доказана.

Теорема 4. (Первая теорема Вейерштрасса). Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте, то она ограничена на этом сегменте.

$$f(x) \in C[a, b] \Rightarrow f(x) \in B[a, b].$$

Замечание 2. Для интервала или полусегмента утверждение теоремы 4 неверно.

Пример 1. $f(x) = \frac{1}{x}$ непрерывна на $(-1, 0)$, но не является ограниченной на

этом интервале: $\lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{1}{x} = -\infty$. Доказательство не пройдет для последова-

тельности $x_n = -\frac{1}{n}: x_n \rightarrow 0-0, f(x_n) \rightarrow -\infty$, но $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \notin (-1, 0)$.

Определение 3. (рис.15). Число M (число m) называется точной верхней (точной нижней) гранью функции $f(x)$ на множестве $\{x\}$, если выполнены два требования

$$1) \forall x \in \{x\} \Rightarrow f(x) \leq M \quad (f(x) \geq m).$$

$$2) (\forall \varepsilon > 0)(\exists x_0 \in \{x\}): f(x_0) > M - \varepsilon \quad (f(x_0) < m + \varepsilon).$$

$$\text{Обозначения: } M = \sup_{\{x\}} f(x), \quad m = \inf_{\{x\}} f(x).$$

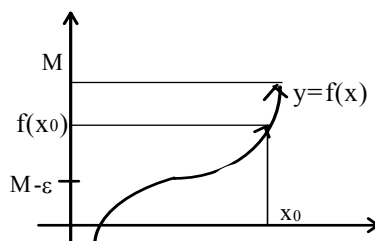


Рис. 15.

Таким образом, точные верхняя и нижняя грани функции - это точные верхняя и нижняя грани множества значений $E(f)$ функции $f(x)$ на множестве $\{x\}$. Следовательно, справедливо следующее утверждение. Если функция $y=f(x)$ ограничена на множестве $\{x\}$ сверху (снизу), то у нее существует на этом множестве точная верхняя грань (точная нижняя грань). Возникает вопрос, достигается ли на множестве $\{x\}$ точная верхняя и точная нижняя грани, т.е. существует ли $x_0 \in \{x\}$:

$$f(x_0) = \sup_{\{x\}} f(x), \quad \left(f(x_0) = \inf_{\{x\}} f(x) \right),$$

Пример 2 (рис. 15).

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{при } 0 < x < 1, \\ \frac{1}{2} & \text{при } x = 0 \text{ и } x = 1, \end{cases}$$

$\sup_{[0,1]} f(x) = 1$, $\inf_{[0,1]} f(x) = 0$, но эти точные грани не достигаются функцией на сегменте $[0,1]$

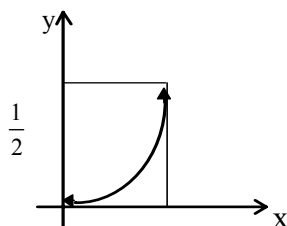


Рис. 16.

Теорема 5 (вторая теорема Вейерштрасса). Если функция непрерывна на сегменте, то она достигает на этом сегменте своих точных верхней и нижней граней.

$$f(x) \in C[a, b] \Rightarrow (\exists x_1, x_2 \in [a, b]): \left(f(x_1) = \sup_{[a, b]} f(k) \wedge f(x_2) = \inf_{[a, b]} f(k) \right)$$

Замечание 3. Функции, не являющиеся непрерывными на данном сегменте, могут принимать точную верхнюю и точную нижнюю грани. Пример - функция Дирихле.

Замечание 4. Утверждение теоремы 5, вообще говоря, не будет верным для интервала.

Пример: $y=x$ на $(0,1)$ (рис. 17).

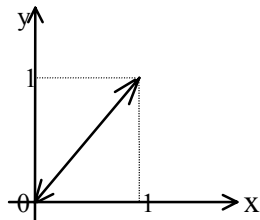


Рис. 17

1.5. Дифференциальное исчисление

1.5.1. Определение производной

Пусть функция $y=f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и пусть x - некоторая точка этой окрестности. Если существует предел отношения $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ при $x \rightarrow x_0$, то этот предел называется производной

функции $y=f(x)$ в точке x_0 и обозначается $f'(x_0)$.

Итак, $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Обозначив $x - x_0 = \Delta x$, $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(x) - f(x_0)$,

получим $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Замечание 1. Условие непрерывности $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ в принятых обозначениях можно записать в виде $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = 0$ или $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$.

Это равенство называется разностной формой условия непрерывности функции в т. x_0 .

Если для некоторого значения x_0 выполняется условие

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty$; $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\infty$; $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \infty$, то говорят, что для этого значения x_0 существует бесконечная производная, равная соответственно $+\infty$, $-\infty$, ∞ .

В дальнейшем под выражением “функция имеет производную” мы будем понимать наличие конечной производной, если не оговорено противное.

Если функция $y=f(x)$ определена в правосторонней (левосторонней) окрестности точки x_0 и существует конечный или бесконечный предел отношения $\lim_{\Delta x \rightarrow 0+0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0-0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \right)$, то он называется, соответственно, конечной или бесконечной производной справа (слева) функции $y=f(x)$ в точке $x=x_0$ и обозначается $f'(x_0 + 0)$ ($f'(x_0 - 0)$).

Правая и левая производные называются односторонними производными.

Теорема. Функция $y=f(x)$, определенная в некоторой окрестности точки $x=x_0$, имеет производную $f'(x_0)$ тогда и только тогда, когда

$f'(x_0 - 0)$ и $f'(x_0 + 0)$ существуют и равны друг другу, т.е.

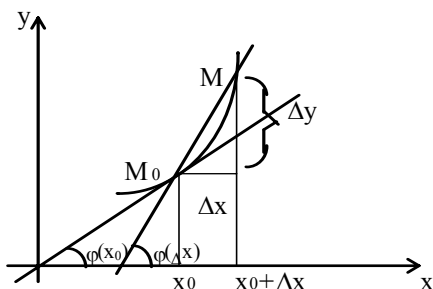
$f'(x_0 - 0) = f'(x_0 + 0)$. В этом случае $f'(x_0) = f'(x_0 - 0) = f'(x_0 + 0)$.

Доказательство теоремы следует из теоремы об односторонних пределах.

Операция вычисления производной от функции называется операцией дифференцирования.

1.5.2. Геометрический смысл производной

Рассмотрим график функции $y=f(x)$, определенной и непрерывной на некотором интервале (a,b) . Точка M_0 на графике (см. рис.)



соответствует значению аргумента $x_0 \in (a,b)$, а точка $M - (x=x_0+\Delta x \in (a,b))$, где Δx - некоторое приращение аргумента. Прямая, проходящая через точки M_0, M , называется секущей. Обозначим через $\varphi(\Delta x)$ угол, который образует секущая M_0M с положительным направлением оси Ox .

Определение. Касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке M_0 называется предельное положение секущей M_0M при стремлении точки M к точке M_0 по графику (или при $\Delta x \rightarrow 0$ вследствие непрерывности $y=f(x)$).

$$\text{Очевидно, что } \operatorname{tg} \varphi(\Delta x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Докажем следующую лемму.

Лемма. Пусть функция $y=f(x)$ имеет производную в точке $x=x_0$, тогда справедливы следующие два утверждения:

- 1) график функции $y=f(x)$ имеет касательную в точке M_0 , соответствующей значению аргумента x_0 ;
- 2) угловой коэффициент касательной равен $f'(x_0)$.

Доказательство.

Пусть Δx - любое, достаточно малое и отличное от нуля значение приращения аргумента x в точке x_0 , тогда $\varphi(\Delta x) = \operatorname{arctg} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Так как

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) \text{ и функция } u = \operatorname{arctg} x \text{ непрерывна в любой точке}$$

$$x \in (-\infty, +\infty), - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varphi(\Delta x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{arctg} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{arctg} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{arctg}(f'(x_0)), \text{ т.е.}$$

существует предельное значение (при $\Delta x \rightarrow 0$) угла наклона секущей M_0M , что доказывает существование касательной в точке M_0 .

Обозначим, далее, угол наклона касательной к оси Ox через φ_0 , тогда $\varphi_0 = \operatorname{arctg} f'(x_0)$, откуда $\operatorname{tg} \varphi_0 = f'(x_0)$.

1.5.3. Дифференцируемость функции

Пусть функция $y=f(x)$ определена на (a,b) , x - некоторое фиксированное значение аргумента $x \in (a,b)$, Δx - любое приращение аргумента такое, что $(x+\Delta x) \in (a,b)$.

Определение. Функция $y=f(x)$ называется дифференцируемой в точке x , если приращение Δy этой функции в точке x , соответствующее приращению аргумента Δx , может быть представлено в виде

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha \cdot \Delta x, \quad (1)$$

где A - некоторая константа, не зависящая от Δx , а α - функция от Δx ($\alpha(\Delta x)$), являющаяся бесконечно малой при $\Delta x \rightarrow 0$.

Замечание 1. При $\Delta x=0$ функция $\alpha(\Delta x)$, вообще говоря, не определена, поэтому в этой точке для удобства припишем значение $\alpha(0)$, равное нулю. В этом случае функция $\alpha(x)$ станет непрерывной в точке $\Delta x=0$, и равенство (1) можно распространить на значение $\Delta x=0$.

Замечание 2. Так как $\alpha(\Delta x)$ и Δx - бесконечно малые функции в точке $\Delta x=0$, $\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x = o(\Delta x)$, тогда

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x). \quad (2)$$

Теорема 1. Для того, чтобы функция $y=f(x)$ являлась дифференцируемой в точке x (символическая запись: $f(x) \in C'(x)$), необходимо и достаточно, чтобы она имела в этой точке конечную производную.

Необходимость. Пусть функция $y=f(x) \in C'(x)$, тогда $\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha$.

$$\text{Отсюда } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (A + \alpha) = A.$$

Достаточность. Пусть функция $y=f(x)$ имеет в данной точке x конечную производную, т.е. существует $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$, тогда $\alpha(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x)$ - бесконечно малая при $\Delta x \rightarrow 0$ (см. теорему 1 п.3.11).

Отсюда $\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha \cdot \Delta x$, где $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(x) = 0$, и если $f'(x)$ обозначить через A , то $\Delta y = A\Delta x + \alpha \cdot \Delta x$.

Замечание 3. Доказанная теорема позволяет в дальнейшем отождествлять понятие дифференцируемости функций в данной точке и наличие у этой функции в данной точке конечной производной.

Теорема 2. Если функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке x , то она непрерывна в этой точке.

$$[f(x) \in C'\{x\}] \Rightarrow [f(x) \in C\{x\}].$$

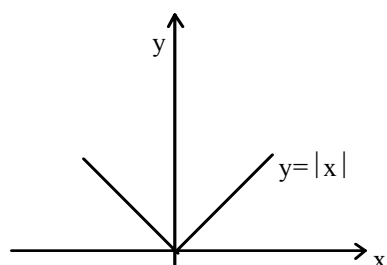
Доказательство.

Так как функция дифференцируема в точке x , $\Delta y = A\Delta x + \alpha\Delta x$. Но тогда $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (A\Delta x + \alpha\Delta x) = 0$; $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$. В силу разностной формы ус-

ловия дифференцируемости функция $y=f(x)$ непрерывна в точке x (см. замечание 1 п.4.1.)

Замечание 4. Обратное утверждение, вообще говоря, места не имеет, т.е. непрерывная в точке x функция не является дифференцируемой в этой точке.

Пример. Рассмотрим функцию $y=|x|$.



Поскольку $\Delta y = |x+\Delta x| - |x| \leq |x+\Delta x - x| = |\Delta x|$, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$ и функция непрерывна в любой точке $x \in (-\infty, +\infty)$. Покажем, что эта функция не имеет в точке $x=0$ производной.

Действительно, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{|0+\Delta x| - |0|}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} 1, & \text{если } \Delta x > 0. \\ -1, & \text{если } \Delta x < 0. \end{cases}$

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \begin{cases} 1, & \text{если } \Delta x > 0 \\ -1, & \text{если } \Delta x < 0 \end{cases}$ и правая производная функции в точке $x=0$ отлична от левой.

В остальных точках производная функции $y=|x|$ существует и равна

1.5.4. Правила вычисления производных, связанные с арифметическими действиями над функциями

Теорема. Пусть функции $y_1=f_1(x)$ и $y_2=f_2(x)$ имеют производные в точке x_0 . Тогда их сумма, разность, произведение и частное (частное при условии $y_2 \neq 0$ в точке $x=x_0$) также имеют производные в точке $x=x_0$, причем

$$1. (y_1 \pm y_2)' = y_1' \pm y_2'.$$

$$2. (y_1 \cdot y_2)' = y_1' y_2 + y_1 y_2'.$$

$$3. \left(\frac{y_1}{y_2} \right)' = \frac{y_1' y_2 - y_1 y_2'}{y_2^2}.$$

1.5.5. Вычисления производных некоторых элементарных функций

1. $y=c$ ($c=\text{const}$) $\Delta y=c-c \Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$. Итак, $c' = 0$.

Замечание 1. Производная произведения функции на постоянную равна произведению этой постоянной на производную функции, т.е. $(cy)' = cy'$.

Доказательство. $(cy)' = c'y + cy' = 0 \cdot y + cy' = cy'$.

Замечание 2. Если n - любое фиксированное целое число, то

$$(c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n)' = c_1 y_1' + c_2 y_2' + \dots + c_n y_n'.$$

Следует из предыдущей теоремы с помощью метода математической индукции.

2. $y = x^n$ (степенная функция), где n - положительное целое число.

Если использовать формулу бинома Ньютона, получим

$$\begin{aligned} \Delta y &= (x + \Delta x)^n - x^n = x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta x^2 + \dots + \Delta x^n - x^n = \\ &= nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta x^2 + \dots + \Delta x^n. \end{aligned}$$

При $\Delta x \neq 0$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta x + \dots + \Delta x^{n-1}.$$

При $\Delta x \rightarrow 0$ все слагаемые правой части, начиная со второго, стремятся к нулю, т.к. содержат Δx в некоторой положительной степени. Первое слагаемое Δx не содержит, поэтому предел правой части при $\Delta x \rightarrow 0$ равен nx^{n-1} ¹. Следовательно, существует предел левой части при $\Delta x \rightarrow 0$, равный nx^{n-1} . По определению производной указанный предел равен производной функции $y = x^n$, т.е. $y' = (x^n)' = nx^{n-1}$.

Данные рассуждения справедливы для любой точки $x \in (-\infty, +\infty)$.

Кроме того, эту формулу можно обобщить на тот случай, когда n является произвольным вещественным числом (доказательство этого положения см. в п. 4.6.).

3. $y = \sin x$.

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right). \quad \text{При } \Delta x \neq 0$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right). \quad (1)$$

В силу непрерывности функции $\cos x$ в любой точке $x \in (-\infty, +\infty)$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x^1. \quad \text{Если учесть также, что } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1 \quad (\text{см.}$$

п.3.16), получим, что предел правой части равенства (1) существует и равен $\cos x$ (на основании теоремы 1 п.3.10), а тогда и предел левой части это-

¹ См., например: Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. - М.: Наука, 1971 (и последующие издания), ч.1.

го равенства существует и равен $\cos x$. По определению производной указанный предел равен производной функции $y=\sin x$, т.е. $(\sin x)' = \cos x$.

4. Аналогичным образом можно показать, что $(\cos x)' = -\sin x$.

5. $y = \log_a x (0 < a \neq 1)$. Пусть $x \in (0, \infty)$, и Δx - произвольное приращение

аргумента, такое что $|\Delta x| < x$. $\Delta y = \log_a(x + \Delta x) - \log_a x = \log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$.

При $\Delta x \neq 0$ $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}} = \frac{1}{x} \log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$. Если

x - фиксировано, то при $\Delta x \rightarrow 0$ $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} = e$ и на основании непрерывности функции $\log_a x$ в любой точке полупрямой $(0, \infty)$ и, в частности, в точке $x = e$ ($\lim_{x \rightarrow e} \log_a x = \log_a e$) получим, что

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \frac{1}{x} \log_a e$. Поэтому существует предел правой части

равенства при $\Delta x \rightarrow 0$ $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \log_a e$. Но по определению,

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = (\log_a x)'$, поэтому $(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e$. В частности, при $a=e$

имеем $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

6. $y = \operatorname{tg} x$, $(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$ (см. теорему 1

п.3.10) $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

7. $y = \operatorname{ctg} x$. Аналогично этому $(\operatorname{ctg} x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$.

Прежде, чем вычислять производные других элементарных функций, докажем теорему о производной обратной функции.

Теорема.

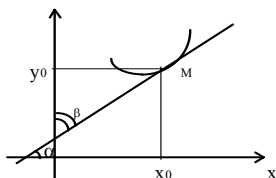
Пусть функция $y=f(x)$.

1) определена, непрерывна и строго монотонна в некоторой окрестности точки x_0 .

2) в точке x_0 существует отличная от 0 производная $f'(x_0) \neq 0$. Тогда и обратная функция $x = f^{-1}(y)$ имеет производную в точке $y_0 = f(x_0)$, причем

$$\left[f^{-1}(y_0) \right]' = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Раскроем геометрический смысл этого положения.



Рассмотрим в окрестности $x=x_0$ график функции $y=f(x)$. Если провести касательную к графику в точке $M(x_0, y_0)$, то $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$ (α - угол наклона касательной к положительному направлению оси Ox).

$$\left[f^{-1}(y_0) \right]' = \operatorname{tg} \beta \quad (\beta - \text{угол наклона той же касательной к положительному направлению оси } Oy).$$

Поскольку $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, формула $\left[f^{-1}(y_0) \right]' = \frac{1}{f'(x_0)}$ выражает очевидный

$$\text{факт: } \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Используя эту теорему, можно получить производные следующих элементарных функций, являющихся строго монотонными в области их определения.

8. $y = a^x$ ($0 < a \neq 1$) Функция $y = a^x$ ($-\infty < x < +\infty$) является обратной для логарифмической функции $x = \log_a y$, определенной на полупрямой $y > 0$. Поскольку в окрестности любой точки y выполнены условия теоремы, то

$$(a^x)' = \frac{1}{(\log_a y)'} = \frac{1}{\frac{1}{y} \log_a e} = \frac{y}{\log_a e} = a^x \ln a. \text{ Итак, } (a^x)' = a^x \ln a. \text{ При}$$

$$a=e, \text{ получим } (e^x)' = e^x.$$

9. $y = \arcsin x$, $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ при $-1 \leq x \leq 1$ и $x = \sin y$. Будем рассматривать

интервал $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ при $-1 < x < 1$. В этом случае

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y}. \text{ Так как}$$

$$\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} \quad \left(\cos y > 0, \text{ иб } -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \right),$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\text{Итак, } (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

10. Аналогично этому $(\operatorname{arccs} \operatorname{os} x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

11. $y = \operatorname{arctg} x$ и $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$, если $-\infty < x < +\infty$; $x = \operatorname{tg} y$, тогда

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \cos^2 y = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}.$$

12. По аналогии с предыдущим $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}.$

Сведем теперь в единую таблицу производные элементарных функций.

1. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, в частности, $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ и $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ($\alpha = \text{const}$).

2. $(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e$ ($x > 0$, $0 < a \neq 1$). В частности $(\ln x)' = \frac{1}{x}.$

3. $(a^x)' = a^x \ln a$ ($0 < a \neq 1$). В частности $(e^x)' = e^x.$

4. $(\sin x)' = \cos x.$

5. $(\cos x)' = -\sin x.$

6. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$, $\left(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\right).$

7. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \operatorname{ctg}^2 x)$, $(x \neq \pi k, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$

8. $(\operatorname{arcsin} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, |x| < 1.$

9. $(\operatorname{arccos} x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, |x| < 1.$

10. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$

11. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$

По определению, гиперболическим синусом ($\operatorname{sh} x$), косинусом ($\operatorname{ch} x$), тангенсом ($\operatorname{th} x$) и котангенсом ($\operatorname{cth} x$) называются функции

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}; \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}; \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}},$$

производные которых вычисляются по следующим формулам:

13. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$

14. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$

$$15. (\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$$

$$16. (\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} \quad (x \neq 0).$$

1.5.6. Правило дифференцирования сложной функции

Теорема. Пусть

- 1) задана сложная функция $y = f[\varphi(t)]$, где $x = \varphi(t)$ и $y = f(x)$,
- 2) функция $x = \varphi(t)$ дифференцируема в точке t_0 , а функция $y = f(x)$ дифференцируема в соответствующей точке $x_0 = \varphi(t_0)$. Тогда сложная функция $f[\varphi(t)]$ дифференцируема в точке t_0 , причем $\{f[\varphi(t_0)]\}' = f'(x_0) \varphi'(t_0)$.

Замечание. Обычно формулу для производной сложной функции записывают в виде $\{f[\varphi(x_0)]\}' = f'[\varphi(x_0)] \cdot \varphi'(x_0)$.

Пример 1. Найти производную функции $y = 5^{\operatorname{arctg} t}$. Имеем $y = 5^x$, где $x = \operatorname{arctg} t$. Поэтому $(5^{\operatorname{arctg} t})' = (5^x)' \cdot (\operatorname{arctg} t)' = 5^x \ln 5 \frac{1}{1+t^2} = \frac{5^{\operatorname{arctg} t}}{1+t^2} \ln 5$.

Пример 2. Найти производную функции

$$y = x^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R}, \alpha = \text{const}, x \in (0, \infty))$$

$$y = x^\alpha = (e^{\ln x})^\alpha = e^{\alpha \ln x}$$

$$y' = (e^t)' \Big|_{t=\alpha \ln x} = \alpha \ln x \cdot (\alpha \ln x)' = e^t \Big|_{t=\alpha \ln x} \frac{\alpha}{x} = e^{\alpha \ln x} \frac{\alpha}{x} = x^{\alpha-1} \alpha = \alpha x^{\alpha-1}$$

1.5.7. Дифференциал функции

Пусть $y = f(x) \in C^1(x)$, тогда $\Delta y = A \Delta x + \alpha(\Delta x) \Delta x$ (1.)

Если $A \neq 0$, то слагаемое $A \Delta x$ есть линейная и однородная относительно Δx

функция. * При $\Delta x \rightarrow 0$ $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{A \Delta x}{\Delta x} = A \neq 0$ и поэтому $A \Delta x$ бесконечно малая того же порядка, что и Δx .

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha(\Delta x) \Delta x}{\Delta x} = 0 \quad \text{и} \quad \alpha \Delta x = o(\Delta x), \quad \text{т.е. второе слагаемое } \alpha \Delta x$$

при $\Delta x \rightarrow 0$ есть бесконечно малая более высокого порядка, чем Δx . Итак, при $A \neq 0$ первое слагаемое $A \Delta x$ является главной частью приращения дифференцируемой функции.

Определение. При $A \neq 0$ дифференциалом функции $y = f(x)$ в данной точке x , соответствующим приращению аргумента Δx , называют главную ли-

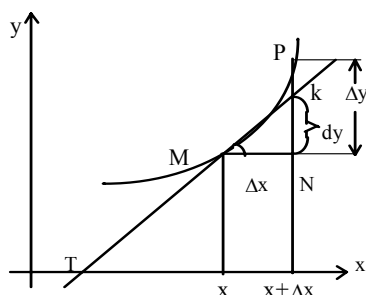
* Функция $y = Ax + B$, где $A \neq 0$ - линейная функция аргумента x , где A и B - некоторые постоянные. Если $B = 0$, то линейная функция называется однородной.

нейную относительно Δx часть приращения этой функции в точке x . Символическое обозначение дифференциала функции $|y = f(x)|$ dy .

Итак, по определению, $dy = A\Delta x$ или $dy = df(x) = f'(x)\Delta x$ (вытекает из теоремы 1 п.4.3.).

Если $A=0$, то первое слагаемое $A\Delta x$ равенства (1) перестает быть главной частью приращения дифференцируемой функции, ибо $A\Delta x=0$, а $\alpha\Delta x \neq 0$ однако, по договоренности и в этом случае считают $dy = A\Delta x=0$.

1.5.8. Геометрический смысл дифференциала функции



Пусть дана кривая $y=f(x)$. Точка M на кривой соответствует значению аргумента x , а точка $P(x+\Delta x)$. MT - касательная к кривой $y=f(x)$ в точке M . Очевидно, что $\Delta y = PN$ и $dy = f'(x)\Delta x = KN$, откуда вытекает, что величины PN и KN , вообще говоря, различны, ибо если Δy есть приращение

ординаты кривой, то dy является соответственным приращением ординаты касательной.

1.5.9. Дифференциал независимой переменной

Под дифференциалом dx независимой x понимают любое, не зависящее от x число, поэтому, по определению, дифференциалом независимой переменной x называют ее приращение Δx , т.е. полагают, что $dx = \Delta x$.

Введенное определение оправдывается следующими рассуждениями.

Рассмотрим независимую переменную x как функцию вида $y=x$, тогда $dy = dx = f'(x)\Delta x = 1 \cdot \Delta x$ и $dx = \Delta x$.

Таким образом, если аргумент x функции $y=f(x)$ является независимой переменной, то $dy = f(x)\Delta x = f'(x)dx$ и $f'(x) = \frac{dy}{dx}$.

Замечание. $f'(x)$ - есть число, а $\frac{dy}{dx}$ - отношение неопределенных чисел dy и dx , которые изменяются пропорционально с коэффициентом пропорциональности $f'(x)$.

1.5.10. Инвариантность формы первого дифференциала

В предыдущем пункте было показано, что если x - есть независимая переменная функции $y=f(x)$, то $dy=f'(x)dx$. Покажем, что эта формула справедлива и в том случае, когда аргумент x является дифференцируемой функцией некоторой новой переменной t . Это свойство дифференциала называется инвариантностью его формы.

Итак, пусть дана функция $y = f(x) \in C'(x)$, и $x = \varphi(t) \in C'(t)$. Рассмотрим сложную функцию $y=f[\varphi(t)]$. Если рассматривать здесь t как независимую переменную, то по определению дифференциала функции

$$dy = \{f[\varphi(t)]\}' dt. \quad (1)$$

$$\text{Аналогично этому } dx = \varphi'(t)dt. \quad (2)$$

Используя теорему о сложной функции: $\{f[\varphi(t)]\}' = f'(x)\varphi'(t)$ равенство

(1) можно переписать в виде $dy = f'(x)\varphi'(t)dt$, и из (2) имеем,

что $dy = f'(x)dx$.

Итак, в любом случае дифференциал функции $y=f(x)$ может быть записан в форме $dy = f'(x)dx$. Будет ли x независимой переменной или нет; разница будет в том, что если за независимую переменную выбрано t , то dx означает не произвольное приращение Δx , а дифференциал x как функции от t .

1.5.11. Производные высших порядков

Определение 1. Пусть функция $y=f(x)$ определена на (a,b) , $f(x) \in C'\{(a,b)\}$ и $x_0 \in (a,b)$. Производная функции $f'(x)$ в точке x_0 называется второй производной функции f и обозначается $f''(x_0)$ или $f^{(2)}(x_0)$, т.е. $f''(x) = [f'(x)]_{x=x_0}$ или $y'' = (y')'$.

Аналогично определяется производная $y^{(n)}$ любого порядка $n=1, 2, \dots$

Если существует производная $y^{(n-1)}$ $(n-1)$ -го порядка, то по определению

$$y^{(n)} = [y^{(n-1)}]'. \quad \text{При этом производная нулевого порядка - сама функция}$$

$y^{(0)} = y$, а производная первого порядка - производная y' . Символическая запись производной n -го порядка функции $y=f(x)$ на $\{x\}$: $f(x) \in C^{(n)}[\{x\}]$.

Определение 2. Функция называется n раз дифференцируемой на $\{x\}$, если на $\{x\}$ она имеет производные до порядка n включительно.

Сформулируем (без доказательства) теорему о вычислении n -ой производной произведения и суммы двух функций, имеющую большое прикладное значение.

Теорема.

Пусть функции $y_1=f_1(x)$ и $y_2=f_2(x)$ определены в некоторой окрестности точки x_0 , имеют производные n -го порядка в точке x_0 , тогда функции $y_1 + y_2 = f_1(x) + f_2(x)$ и $y_1 y_2 = f_1(x)f_2(x)$ также имеют производные n -го порядка в точке x_0 , причем $(y_1 + y_2)^{(n)} = y_1^{(n)} + y_2^{(n)}$,

$$(y_1 y_2)^{(n)} = y_1^{(n)} y_2 + n y_1^{(n-1)} y_2^{(1)} + \frac{n(n-1)}{2!} y_1^{(n-2)} y_2^{(2)} + \dots + y_1 y_2^{(n)} = \sum_{i=0}^n C_n^i y_1^{(n-i)} y_2^{(i)}$$

Последняя формула называется формулой Лейбница.¹

Пример. Вычислить $y^{(n)} = (x^2 e^x)^{(n)}$. Обозначим $y_1 = e^x$ и $y_2 = x^2$.

Очевидно, что $y_1^{(k)} = e^x$; $y_2' = 2x$, $y_2'' = 2$, $y_2^{(3)} = y_2^{(4)} = \dots = y_2^{(n)} = \dots = 0$

Поэтому, $y^{(n)} = e^x x^2 + n e^x \cdot 2x + \frac{n(n-1)}{2!} e^x \cdot 2 = e^x [x^2 + 2nx + n(n-1)]$.

1.5.12. Дифференциалы высших порядков

Для удобства проведения дальнейших выкладок для обозначения дифференциала наряду с символом d будем употреблять также символ δ (δx и δy).

Пусть $f(x) \in C^1\{(x_0 - \delta, x_0 + \delta)\}$, тогда $dy = f'(x)dx$. Дифференциал функции dy есть функция двух переменных: точки x и переменной dx . Пусть, далее, $y_1 = f'(x) \in C^1\{(x_0 - \delta, x_0 + \delta)\}$, и dx имеет одно и то же фиксированное значение для $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, тогда

$$S(dy) = \delta[f'(x)dx]_{x=x_0} = [f'(x)dx]_{x=x_0}' \delta x = f''(x_0)dx\delta x = f''(x_0)dx^2.$$

Определение. Значение $\delta(dy)$ дифференциала от первого дифференциала dy в некоторой точке x_0 , взятое при $\delta x = dx$, называют вторым дифференциалом функции $y=f(x)$ (в точке x_0) и обозначают символом $d^2 y$, т.е. $d^2 y = f''(x_0)dx^2$.

Замечание 1. Из определения следует, что $d^2 x = 0$, т.к. приращение $\Delta x = dx$ считается постоянным.

Аналогично определяются дифференциалы более высоких порядков.

Предположим, что производная $(n-1)$ -го порядка $y^{(n-1)}$ дифференцируема в окрестности точки x_0 (т.е. функция $y=f(x)$ имеет в точке x_0 производную n -го порядка), тогда дифференциалом n -го порядка $d^n y$ функции $y=f(x)$ в точке x_0 называется дифференциал $\delta(d^{n-1}y)$ от дифференциала $(n-1)$ -го порядка $d^{n-1}y$, взятый при $\delta x = dx$, т.е.

¹ Доказательство см.: Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. -М.: Наука, 1971 (и последующие издания) ч.1.

$$d^n y = \delta(d^{n-1} y)_{\delta x = dx}.$$

Методом математической индукции можно получить, что

$$d^n y = f^{(n)}(x_0) dx^n \quad (1)$$

или
$$f^{(n)}(x_0) = \frac{d^n y}{dx^n} \quad (2)$$

Замечание 2. Формулы (1) и (2) справедливы при $n > 1$ лишь в том случае, когда x является независимой переменной, т.е. второй и последующие дифференциалы не обладают, вообще говоря, свойством инвариантности формы. Действительно, пусть $y = f(x) \in C^2[\{x\}]$ и $x = \varphi(t) \in C^2[\{t\}]$, тогда

$$d^2 y = \delta(dy)_{\delta x = dx} = \delta[f'(x)dx]_{\delta x = dx} = [f'(x)dx]'_{\delta x = dx} \delta x_{\delta x = dx} = [f'(x)]' dx \delta x_{\delta x = dx} +$$

$$+ f'(x)[dx]'_{\delta x = dx} \delta x_{\delta x = dx} = f''(x)dx^2 + f'(x)d^2 x$$

и мы имеем дополнительный, отличный от 0 член $f'(x)d^2 x$.

1.5.13. Дифференцирование функции, заданной параметрически

Пусть функции $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$ определены в некоторой окрестности точки t_0 . Пусть одна из функций, например,

$\varphi(t): (\varphi(t) \in C^1(t_0 - \delta, t_0 + \delta)) \wedge (\varphi(t) \uparrow)$, тогда $\exists t = \varphi^{-1}(x)$ и в некоторой окрестности точки x_0 ($x_0 - \delta, x_0 + \delta$), имеет смысл функция $y = \psi[\varphi^{-1}(x)]$.

Функция $y = \psi[\varphi^{-1}(x)]$ называется заданной параметрически формулами $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$ функцией.

Лемма.

$$(\psi(t) \in C^1(t_0)) \wedge (\varphi(t) \in C^1(t_0)) \wedge (\varphi'(t_0) \neq 0) \Rightarrow$$

$$(y = \psi[\varphi^{-1}(x)] \in C^1(x_0)) \wedge (x_0 = \varphi(t_0)) \wedge \left(y'_x = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)} \right).$$

Если $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$ имеют в точке t_0 производные и если

$\varphi'(t_0) \neq 0$, то $y = \psi[\varphi^{-1}(t)]$ имеет в точке $x_0 = \varphi(t_0)$ производную, причем

$$y'_x = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)} \quad (1)$$

Действительно, по правилу дифференцирования сложной функции и обратной функции имеем:

$$y'_x = \left\{ \psi[\varphi^{-1}(x)] \right\}'_{x|_{t=t_0+1}} = \psi'_t \cdot t'_x|_{t=t_0} = \psi'_t \frac{1}{x'_t} \Big|_{t=t_0} = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}.$$

Для вычисления второй производной y''_{xx} следует представить ее в виде

$$y''_{xx} = \frac{d}{dx}(y'_x) \text{ и воспользоваться формулой (1) и правилом дифференцирования частного.}$$

1.5.14. Свойства дифференцируемых функций

1.5.14.1. Возрастание (убывание) функций в точке. Локальный экстремум.

1. Рассмотрим функцию $y=f(x)$, определенную в некоторой окрестности $U(c)$ точки C .

Определение 1. Функция $f(x)$ называется возрастающей в точке C , если существует δ - окрестность точки $c(U_\delta(c))$ такая, что

$$(U_\delta(c) \subset U(c)) \wedge (\forall x \in U_\delta(c)) \begin{cases} x < c \Rightarrow f(x) < f(c) \\ x > c \Rightarrow f(x) > f(c) \end{cases}.$$

Определение 2. Функция $f(x)$ называется убывающей в точке C , если существует δ - окрестность точки $c(U_\delta(c))$ такая, что

$$(U_\delta(c) \subset U(c)) \wedge (\forall x \in U_\delta(c)) \begin{cases} x < c \Rightarrow f(x) > f(c) \\ x > c \Rightarrow f(x) < f(c) \end{cases}.$$

Определение 3. Точка c называется точкой локального максимума (локального минимума) функции $f(x)$ ($f(x)$ имеет локальный минимум в точке C), если существует такая δ - окрестность точки $c(U_\delta(c))$ такая, что

$$(U_\delta(c) \subset U(c)) \wedge (\forall x \in U_\delta(c) \Rightarrow f(x) \leq f(c)),$$

$$(U_\delta(c) \subset U(c)) \wedge (\forall x \in U_\delta(c) \Rightarrow f(x) \geq f(c)).$$

Определение 4. Будем говорить, что функция $y=f(x)$ имеет в точке C локальный экстремум, если эта функция имеет в точке C либо локальный максимум, либо локальный минимум (рис.1)

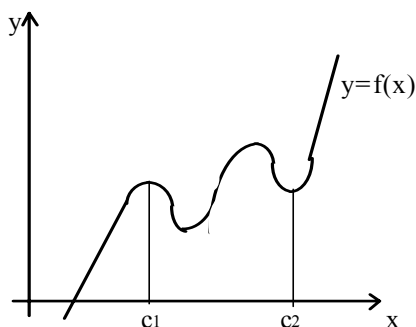


Рис. 1

Функция $f(x)$ имеет в точке c_1 локальный максимум, в точке c_2 - локальный минимум. Заметим, что $f(c_1) < f(c_2)$.

Теорема 1. (лемма Ферма) (достаточное условие возрастания (убывания) функции в точке). Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке c и $f'(c) > 0$ ($f'(c) < 0$), тогда $y=f(x)$ возрастает (убывает) в точке C .

Замечание 1. Положительность (отрицательность) производной $f'(c)$ не является необходимым условием возрастания (убывания) дифференцируемой в точке C функции $y=f(x)$.

Пример 1. (рис.2). $f(x)=x^3$ возрастает в точке $C=0$, но $y'|_{x=0} = 3x^2|_{x=0} = 0$

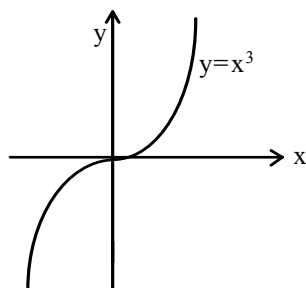


рис. 2

Теорема 2. (необходимое условие экстремума дифференцируемой в данной точке функции) (теорема Ферма).

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке C и имеет в этой точке локальный экстремум, тогда $f'(c) = 0$ (рис. 3).

Доказательство. По условию теоремы существует $f'(c)$. Так как функция $y=f(x)$ имеет в точке C локальный экстремум, она не может в этой точке ни возрастать, ни убывать. Следовательно, по теореме 1 $f'(c)$ не может быть ни положительной ни отрицательной, т.е. $f'(c) = 0$.

Теорема доказана.

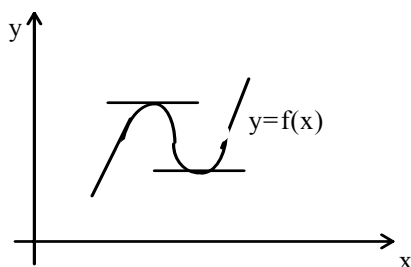


Рис. 3

Замечание 2. Как показано на рис. 3 касательная к графику дифференцируемой функции в точке экстремума горизонтальна.

Пример 2. $y=x^3$, $y'(0) = 0$, но функция не имеет экстремума, т.е. необходимое условие (теорема 2) экстремума не является достаточным.

1.5.14.2. Теорема о нуле производной

Теорема (теорема Ролля).

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на сегменте и дифференцируема во всех внутренних точках этого сегмента, а значения функции на концах сегмента одинаковы, тогда внутри сегмента найдется такая точка, в которой значение производной $f'(\xi)$ обращается в нуль.

$$\left[(f(x) \in C[a, b]) \wedge (\forall x \in (a, b) \exists f'(x)) \wedge (f(a) = f(b)) \right] \Rightarrow [\exists \xi \in (a, b): f'(\xi) = 0].$$

Доказательство. $f(x) \in C[a, b]$ (по второй теореме Вейерштрасса) $f(x)$ достигает на $[a, b]$ своих точных верхней и нижней граней (M и m соответственно). Могут представиться два случая:

1) $M=m$; 2) $M>m$. Рассмотрим оба этих случая.

1) $M=m \Rightarrow f(x)=M=m=\text{const} \Rightarrow f'(x) \equiv 0 \quad \forall x \in [a, b]$.

2) $M>m$. Так как $f(a)=f(b)$, хотя бы одно из двух значений M и m достигается во внутренней точке ξ сегмента $[a, b]$. Но тогда функция $f(x)$ имеет в точке ξ локальный экстремум. По необходимому условию экстремума (теорема Ферма см. п.5.1) $f'(\xi)=0$. Теорема доказана.

Замечание 3. Кратко можно сказать, что между двумя равными значениями дифференцируемой функции обязательно лежит нуль производной, то есть существует хотя бы одна точка, в которой касательная к графику функции горизонтальна (рис.1).

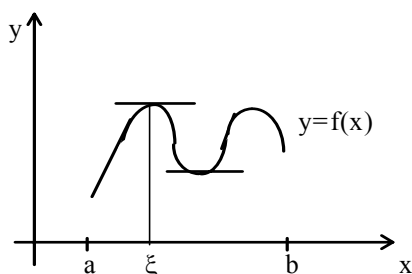


Рис. 1

Приведем несколько примеров, когда при нарушении хотя бы одного из условий теоремы утверждение теоремы не имеет места.

а) Функция $f(x)=x-E(x)$ ($E(x)$ - целая часть от x) на сегменте $[0, 1]$ не является непрерывной (рис.2). И хотя все остальные условия теоремы выполнены, однако на $(0, 1)$ не существует точки ξ такой, чтобы $f'(\xi)=0$.

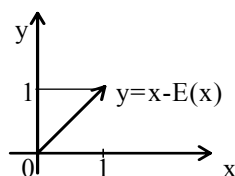


Рис. 2

б) Нарушено условие дифференцируемости на (a, b)

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

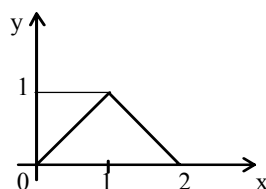


Рис. 3

в) Нарушено условие $f(a)=f(b)$.

Для функции $f(x)=x$ на $[0, 1]$ (рис.4) нет точки $\xi \in (0, 1)$, в которой значение производной обращалось бы в 0.

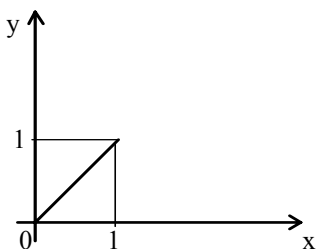


Рис. 4

1.5.14.3. Формула конечных приращений (теорема Лагранжа)

Теорема. Если функция определена и непрерывна на $[a,b]$ и дифференцируема на (a,b) , то внутри сегмента $[a,b]$ найдется точка ξ такая, что справедлива формула $f(b)-f(a)=f'(\xi) \cdot (b-a)$.

$$\left[(f(x) \in C[a,b]) \wedge (\forall x \in (a,b) \exists f'(x)) \right] \Rightarrow [\exists \xi \in (a,b): f(b) - f(a) = f'(\xi) \cdot (b-a)]$$

(Формула $f(b)-f(a)=f'(\xi) \cdot (b-a)$ называется формулой Лагранжа или формулой конечных приращений).

Доказательство. Рассмотрим на сегменте $[a,b]$ вспомогательную функцию (рис.1)

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a).$$

Проверим, что для функции $F(x)$ выполнены все условия теоремы Ролля.

1) $F(x) \in C[a,b]$ (как разность $f(x)$ и линейной функции);

$$2) \exists F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \forall x \in (a, b);$$

$$3) F(a)=F(b)=0.$$

По теореме Ролля $\exists \xi \in (a, b): F'(\xi) = 0$, т.е.

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \Rightarrow f(b) - f(a) = f'(\xi) \cdot (b - a).$$

Теорема доказана.

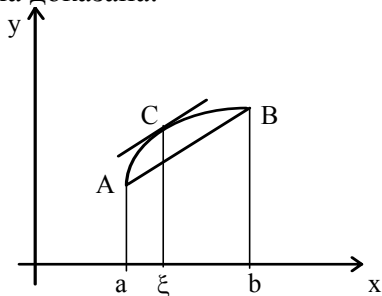


Рис. 1

Замечание 1. Напишем уравнение прямой l , проходящей через точки $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$.

$$l: \frac{x - a}{b - a} = \frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)}.$$

$$\text{Отсюда } l: y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a).$$

Вычитая эту функцию из $f(x)$, получим $F(x)$, для которой $F(a)=F(b)=0$.

Угловым коэффициентом построенной прямой l равен $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Теорема

Лагранжа утверждает, что найдется такая точка $\xi \in (a,b)$, в которой угловым коэффициентом касательной $f'(\xi)$ совпадает с угловым коэффициентом прямой l , т.е. касательная к графику функции в точке $C(\xi, f(\xi))$ параллельна прямой l , проходящей через точки A и B .

Замечание 2. Другой вид формулы Лагранжа.

Пусть x_0 -любое значение аргумента из $[a,b]$, а Δx - произвольное приращение аргумента, но такое, что $(x_0 + \Delta x) \in [a,b]$. Тогда формула Лагранжа для сегмента $[x_0, x_0 + \Delta x]$ имеет следующий вид: $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta x \cdot f'(\xi)$, где ξ - некоторая точка из интервала $(x_0, x_0 + \Delta x)$ (см. рис.2).

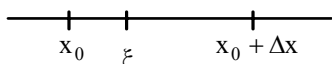


Рис. 2

Можно утверждать, что найдется такое число θ ($0 < \theta < 1$), зависящее от Δx , что $\xi = x_0 + \theta \Delta x$, тогда $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta x \cdot f'(x_0 + \theta \Delta x)$, где θ -некоторое число: $0 < \theta < 1$.

Этот вид формулы оправдывает термин “формула конечных приращений”, ибо дается выражение для приращения функции через вызвавшее его произвольное конечное приращение Δx аргумента.

Следствие 1.

$$\left[(\exists f'(x) \forall x \in (a,b)) \wedge (f'(x) \equiv 0 \forall x \in (a,b)) \right] \Rightarrow f(x) = \text{const}$$

Доказательство. Пусть $x_0 \in (a,b)$ - фиксированна, $x \in (a,b)$ - произвольная точка. На $[x_0, x]$ (и $[x, x_0]$ соответственно) $f(x)$ дифференцируема. Применим теорему Лагранжа на этом сегменте:

$$\exists \xi \in (x_0, x) \left[\xi \in (x, x_0) \right]: f(x) - f(x_0) = f'(\xi) \cdot (x - x_0). \text{ Но } f'(\xi) = 0 \Rightarrow f(x) = f(x_0), \text{ т.е. } f(x) = \text{const}.$$

1.5.14.4. Обобщенная формула конечных приращений (формула Коши).

Теорема. (теорема Коши)

$$\left[(f(x) \in C[a,b]) \wedge (g(x) \in C[a,b]) \wedge (\forall x \in (a,b) (\exists f'(x)) \wedge (\exists g'(x))) \wedge (\forall x \in (a,b) g'(x) \neq 0) \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\exists \xi \in (a,b)): \left(\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \right)$$

(Формула $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ называется обобщенной формулой конечных приращений (формулой Коши)).

Доказательство.

1) Докажем, что $g(a) \neq g(b)$. Предположим, что $g(a) = g(b)$, тогда к функции $y = g(x)$ применима теорема Ролля на сегменте $[a, b]$, по этой теореме

$\exists \xi \in (a, b): g'(\xi) = 0$. Противоречие с условием теоремы

$g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$. Таким образом, $g(a) \neq g(b)$.

2) Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot [g(x) - g(a)].$$

Для функции $F(x)$ выполнены на сегменте $[a, b]$ все условия теоремы Ролля, действительно:

1) $F(x) \in C[a, b]$;

2) $\forall x \in (a, b) \exists F'(x): F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(x)$;

3)

$$F(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot [g(a) - g(a)] = 0,$$

$$F(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot [g(b) - g(a)] = 0.$$

По этой теореме

$\exists \xi \in (a, b)$:

$$F'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Теорема доказана.

Замечание. Формула Лагранжа является частным случаем формулы Коши для $g(x) = x$. (Теорема Ролля является частным случаем теоремы Лагранжа лишь формально, так как доказательство теоремы Лагранжа основано на теореме Ролля).

1.5.14.5. Раскрытие неопределенностей (правило Лопиталья).

Раскрытие неопределенностей вида $\frac{0}{0}$.

Будем говорить, что $\frac{f(x)}{g(x)}$ представляет собой при $x \rightarrow a$ неопределенность

вида $\frac{0}{0}$, если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$.

Теорема. (первое правило Лопиталья).

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы в проколлотой окрестности $U(a)$ точки a . Пусть, кроме того, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$

и $g'(x) \neq 0 \forall x \in U(a)$. Тогда, если существует $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (конечный или бес-

конечный), то существует $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$, причем справедливо равенст-

$$\text{во } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\left\{ \left[(\forall x \in U(a)) ((\exists f'(x)) \wedge (\exists g'(x)) \wedge (g'(x) \neq 0)) \right] \wedge \right. \\ \left. \wedge \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \right) \wedge \left(\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \right) \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\left(\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \right) \wedge \left(\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \right) \right]$$

Замечание 1. Предел отношений производных может не существовать, в то время, как предел отношения функций существует.

Пример 1. $a=0$, $f(x) = x^2 \cos \frac{1}{x}$, $g(x) = \sin x$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos \frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \cos \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{2x \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x}}{\cos x} \text{ не существует, так как } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cos \frac{1}{x}}{\cos x} = 0$$

$$\text{, а } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\cos x} \text{ не существует (см. пример 4 п.3.17.).}$$

Замечание 2. Если производные $f'(x)$ и $g'(x)$ обладают теми же свойствами, что и функции $f(x)$ и $g(x)$, то правило Лопиталья можно применить повторно

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

Пример 2.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$$

Замечание 3. Правило Лопиталья для неопределенности $\frac{0}{0}$ справедливо для случаев 1) $x \rightarrow a+0$, 2) $x \rightarrow a-0$, 3) $x \rightarrow \infty$, 4) $x \rightarrow -\infty$, 5) $x \rightarrow +\infty$.

Раскрытие неопределенностей вида $\frac{\infty}{\infty}$.

Будем говорить, что $\frac{f(x)}{g(x)}$ представляет собой при $x \rightarrow a$ неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$, если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$.

Теорема 2. (второе правило Лопиталя).

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы в проколотой окрестности $\hat{U}(a)$ точки a и, кроме того, $g'(x) \neq 0$ $\hat{U}(a)$. Пусть, далее, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$. Тогда, если существует (конечный или бес-

конечный предел) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$, то существует

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ и } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Замечание 4. Второе правило Лопиталя также имеет место для случаев 1) $x \rightarrow a \pm 0$, 2) $x \rightarrow \infty$, 3) $x \rightarrow \pm\infty$. Изменения в доказательстве аналогичны теореме 1.

Пример 3.
$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\ln x}{x^{-\frac{1}{2}}} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\frac{1}{x}}{\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}}} = -2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0+0} \sqrt{x} = 0.$$

Раскрытие неопределенностей других видов.

Кроме неопределенностей $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$, часто встречаются неопределенности вида: $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 1^∞ , ∞^0 , 0^0 . Все эти неопределенности сводятся к изученным выше двум неопределенностям. Рассмотрим неопределенность вида $\infty - \infty$. Пусть имеем выражение $f(x) - g(x)$, причем

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \text{ и } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty, \text{ тогда } f(x) - g(x) = \frac{1}{\frac{1}{f(x)}} - \frac{1}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)} \cdot \frac{1}{g(x)}},$$

а это неопределенность вида $\frac{0}{0}$.

Рассмотрим теперь неопределенности типа 1^∞ , 0^0 , ∞^0 . Каждая из этих неопределенностей имеет вид $y = f(x)^{g(x)}$, где при $x \rightarrow a$ $f(x) \rightarrow 1$; 0 ; ∞ , а $g(x) \rightarrow \infty$; 0 ; ∞ . Логарифмируя это выражение (считая, что $f(x) > 0$), получим $\ln y = g(x) \ln f(x)$. В любом из трех случаев это выражение представляет собой при $x \rightarrow a$ неопределенность вида $0 \cdot \infty$.

Покажем теперь, как сводить эту неопределенность к виду $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$.

Итак, пусть $z = \varphi(x) \cdot \psi(x)$, причем $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow a} \psi(x) = \infty$

$$z = \varphi(x) \cdot \psi(x) - \frac{\varphi(x)}{\frac{1}{\psi(x)}} = \frac{\psi(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}}. \text{ Это неопределенности } \frac{0}{0} \text{ и } \frac{\infty}{\infty}.$$

Пример 4. $\lim_{x \rightarrow 0+0} x^{-2x}$. Здесь $y = x^{-2x}$, тогда $\ln y = -2x \ln x = -2 \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0+0} (-2) \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = -2 \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\frac{1}{x}}{-1/x^2} = 2 \lim_{x \rightarrow 0+0} x = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0+0} x^{-2x} = 1.$$

1.5.14.6. Формула Тейлора с остаточным членом в общей форме (в форме Шлемильха-Роша)

Теорема. (Тейлора). Пусть функция $f(x)$ имеет в некоторой окрестности точки a производную порядка $n+1$ (где n - любой фиксированный номер). Пусть x - любое значение аргумента из указанной окрестности, p - произвольное положительное число. Тогда между точками a и x найдется точка ξ такая, что справедлива следующая формула:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1}(x), \quad (1)$$

$$\text{где } R_{n+1}(x) = \left(\frac{x-a}{x-\xi} \right)^p \frac{(x-\xi)^{n+1}}{n!p} f^{(n+1)}(\xi). \quad (2)$$

Формула (1) называется формулой Тейлора с центром в точке a , а $R_{n+1}(x)$ - остаточный член в общей форме (форме Шлемильха-Роша).

Замечание.

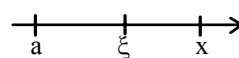
1) Независимо от расположения точки x относительно a (справа или слева от точки a) $\frac{x-a}{x-\xi} > 0$ и для любого $p > 0$ определено $\left(\frac{x-a}{x-\xi} \right)^p$.

2) Функция $f(x)$ и ее производные непрерывны до порядка n включительно.

1.5.14.7. Остаточный член в форме Лагранжа, Коши, Пеано

Запишем остаточный член в общей форме:

$$R_{n+1}(x) = \left(\frac{x-a}{x-\xi} \right)^p \frac{(x-\xi)^{n+1}}{n!p} f^{(n+1)}(\xi), \text{ где } a < \xi < x$$



$$\left(x < \xi < a \quad \begin{array}{ccc} | & | & | \\ x & \xi & a \end{array} \right). \text{ Отметим, что } \xi \text{ зависит от } x, n, p.$$

Очевидно, найдется такое число θ (θ зависит от x, n, p): $0 < \theta < 1$, что $\xi - a = \theta(x - a)$. Отсюда $\xi = a + \theta(x - a)$, $x - \xi = (x - a) - \theta(x - a) = (x - a)(1 - \theta)$ и

$$R_{n+1}(x) = \left[\frac{x - a}{(x - a)(1 - \theta)} \right]^p \frac{[(x - a)(1 - \theta)]^{n+1}}{n! p} f^{(n+1)}[a + \theta(x - a)].$$

Итак, $R_{n+1}(x) = \frac{(x - a)^{n+1} (1 - \theta)^{n-p+1}}{n! p} f^{(n+1)}[a + \theta(x - a)].$

1. Пусть $p = n + 1$, тогда $R_{n+1}(x) = \frac{(x - a)^{n+1}}{(n + 1)!} f^{(n+1)}[a + \theta(x - a)]$ - остаточный член в форме Лагранжа.

2. Если $p = 1$, то $R_{n+1}(x) = \frac{(x - a)^{n+1} (1 - \theta)^n}{n!} f^{(n+1)}[a + \theta(x - a)]$ - остаточный член в форме Коши.

Отметим, что в этих формулах значения θ , вообще говоря, считаются различными, так как θ зависит от p , которое различно в этих формулах.

Сформулируем без доказательства следующую теорему.

Теорема. Пусть функция $f(x)$ имеет производные до порядка $(n - 1)$ в некоторой окрестности точки a и производную порядка n в самой точке a , тогда справедливо равенство $R_{n+1}(x) = O[(x - a)^n]$ (бесконечно малая при $x \rightarrow a$ более высокого порядка малости, чем $(x - a)^n$). Последняя формула есть остаточный член в форме Пеано.

Замечание. Запишем формулу Тейлора в несколько ином виде:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x - a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!} (x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n + \\ + \left(\frac{x - a}{x - \xi} \right)^p \frac{(x - \xi)^{n+1}}{n! p} f^{(n+1)}(\xi).$$

Пусть $a = x_0$, $x - a = \Delta x$. Остаточный член запишем в форме Лагранжа, тогда

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f'(x_0)}{1!} \Delta x + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!} \Delta x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \Delta x^n + \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta \Delta x)}{(n + 1)!} \Delta x,$$

где $0 < \theta < 1$. При $n = 0$ приходим к формуле Лагранжа:

$f(x) - f(x_0) = f'(x_0 + \theta \Delta x) \Delta x$. Таким образом, формула Тейлора является обобщением формулы Лагранжа.

1.5.14.8. Формула Маклорена

Формулой Маклорена называют формулу Тейлора с центром в точке $a = 0$, т.е. формула Маклорена дает представление функции в окрестности точки $x = 0$. Формула Маклорена с остаточным членом в форме Лагранжа, Коши и Пеано имеет вид:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + R_{n+1}(x),$$

где

$$1) R_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x) \quad (0 < \theta < 1) \quad (\text{остаточный член, записанный в форме Лагранжа}).$$

$$2) R_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}(1-\theta)^n}{n!} f^{(n+1)}(\theta x) \quad (0 < \theta < 1) \quad (\text{остаточный член, записанный в форме Коши}).$$

$$3) R_{n+1}(x) = 0(x^n) \quad (\text{остаточный член, записанный в форме Пеано})$$

1.5.14.8.1. Оценка остаточного члена в форме Лагранжа.

Пусть функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема в некоторой окрестности точки $x=0$ и существует $M>0$ такое, что $\forall n \in \mathbb{N} \quad |f^{(n)}(x)| \leq M \quad \forall x \in u$, тогда

$$|R_{n+1}(x)| \leq M \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Действительно,

$$|R_{n+1}(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\theta x) x^{n+1}}{(n+1)!} \right| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} |f^{(n+1)}(\theta x)|.$$

Здесь $(0 < \theta < 1)$, $x \in u \Rightarrow \theta x \in u \Rightarrow |f^{(n+1)}(\theta x)| \leq M$,

поэтому

$$|R_{n+1}(x)| \leq M \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}. \quad (1)$$

Замечание 1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ при любом фиксированном x .

Докажем это. Положим

$$y_n = \frac{|x|^n}{n!}, \text{ тогда } y_{n+1} = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Так как x фиксированно,

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow |x| < n+1).$$

Пусть $n \geq n_0$, тогда

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{|x|^{n+1} n!}{(n+1)! |x|^n} = \frac{|x|}{n+1} < 1 \Rightarrow y_{n+1} < y_n,$$

т.е. начиная с номера n_0 последовательность $\{y_n\}$ является убывающей. Так как, кроме того, эта последовательность ограничена снизу (например, числом нуль), то по теореме п.2.7. она имеет предел y .

Для нахождения предела заметим, что

$$y_{n+1} = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{|x|^n}{n!} \cdot \frac{|x|}{n+1} = \frac{|x|}{n+1} y_n.$$

Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получим $y=0 \cdot y$, т.е. $y=0$.

Таким образом, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ (2)

Замечание 2. Из условий (1) и (2) следует, что, выбирая достаточно большой номер n , мы можем сделать $R_{n+1}(x)$ как угодно малым. Таким образом, если заменить значение $f(x)$ приближенным, равным

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,$$

то ошибка $R_{n+1}(x)$ по абсолютной величине может быть сделана сколь угодно малой, если только в формуле Маклорена взято достаточно большое число членов.

1.5.14.8.2. Разложение по формуле Маклорена некоторых элементарных функций

1) $f(x)=e^x$, $f^{(n)}(x)=e^x$, $f^{(n)}(0)=1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$,

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_{n+1}(x).$$

Остаточный член в форме Лагранжа равен

$$R_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x} \quad (0 < \theta < 1).$$

На любом сегменте $[-r, r]$ ($r > 0$) в силу того, что $|e^{\theta x}| \leq e^{\theta r} < e^r$, получим следующую оценку остаточного члена:

$$|R_{n+1}(x)| < \frac{r^{n+1}}{(n+1)!} e^r.$$

2) $f(x)=\sin x$. Поскольку $f^{(n)}(x) = \sin(x + m \frac{\pi}{2})$ (доказывается методом математической индукции),

$$f^{(m)}(0) = \sin m \frac{\pi}{2} = \begin{cases} 0 & \text{для } m = 2k \\ (-1)^k & \text{для } m = 2k + 1 \end{cases} \quad k = 0, 1, \dots \quad (1)$$

Формула Маклорена имеет вид:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+3}(x).$$

Мы записали $R_{2n+3}(x)$, а не $R_{2n+2}(x)$, т.к. все члены разложения с четными номерами в силу (1) равны нулю.

$$R_{2n+3}(x) = \frac{\sin\left(\theta x + (2n+3)\frac{\pi}{2}\right)}{(2n+3)!} x^{2n+3} = (-1)^{n+1} \cos \theta x \cdot \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}.$$

На любом сегменте $[-r, r]$ ($r > 0$) $|R_{2n+3}(x)| \leq \frac{r^{2n+3}}{(2n+3)!}.$

3) $f(x) = \cos x$. Поскольку $f^{(m)}(x) = \cos(x + m \frac{\pi}{2})$,

$$f^{(m)}(0) = \cos m \frac{\pi}{2} = \begin{cases} 0 & \text{для } m = 2k + 1 \\ (-1)^k & \text{для } m = 2k \end{cases} \quad k = 0, 1, \dots \quad (2)$$

Формула Маклорена имеет вид:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n+2}(x).$$

Мы записали $R_{2n+2}(x)$, а не $R_{2n+1}(x)$, т.к. следующий за последним выписанным слагаемым член многочлена Тейлора в силу (2) равен нулю.

$$R_{2n+2}(x) = \frac{\cos\left(\theta x + (2n+2) \frac{\pi}{2}\right)}{(2n+2)!} x^{2n+2} = (-1)^n \cos \theta x \cdot \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

$$\text{На любом сегменте } [-r, r] \quad |R_{2n+2}(x)| \leq \frac{r^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

4) $f(x) = \ln(1+x)$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}; \quad f''(x) = (-1)(1+x)^{-2}; \quad f'''(x) = (-1)(-2)(1+x)^{-3}; \dots;$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}; \quad f(0) = 0, \quad f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1} (n-1)!.$$

Формула Маклорена имеет вид:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + R_{n+1}(x).$$

Остаточный член запишем в формах Лагранжа и Коши

$$R_{n+1}(x) = \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}} \quad (\text{в форме Лагранжа}). \quad (3)$$

$$R_{n+1}(x) = (-1)^n x^{n+1} \cdot \frac{(1-\theta)^n}{(1+\theta x)^{n+1}} \quad (\text{в форме Коши}). \quad (4)$$

Пусть $x \in (0, 1]$, тогда

$$|R_{n+1}(x)| \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}} < \frac{1}{n+1} \quad (\text{следует из (3)}),$$

т.к. $x > 0$,

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{x} + \theta\right)^{n+1}} < 1 \quad (x = 0 \Rightarrow R_{n+1}(0) = 0).$$

Оценим теперь $|R_{n+1}(x)|$ на $[-r, 0]$, где $0 < r < 1$.

Будем исходить из формы Коши для $R_{n+1}(x)$.

Перепишем этот остаточный член в виде

$$R_{n+1}(x) = (-1)^n \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x} \right)^n \frac{x^{n+1}}{1+\theta x}.$$

Заметим, что $\frac{1-\theta}{1+\theta x} < 1$ для $x \in [-r, 0]$, $0 < r < 1$

$1-\theta < 1+\theta x \Leftrightarrow \theta x > -\theta \Leftrightarrow \theta x + \theta > 0 \Leftrightarrow \theta(x+1) > 0 \Leftrightarrow x > -1$
(что верно по предположению)

$$|R_{n+1}(x)| < \frac{r^{n+1}}{1-r}.$$

Таким образом, $R_{n+1}(x) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty \forall x \in [-r, 1]$, где $r < 1$.

5) $f(x) = (1+x)^\alpha$, где α - вещественное число

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n},$$

$$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1).$$

Формула Маклорена имеет вид:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + R_{n+1}(x),$$

где остаточный член в форме Лагранжа равен

$$R_{n+1}(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-(n+1)}x^{n+1}.$$

В частном случае, когда $\alpha = n$ - целое число, $R_{n+1}(x) = 0$ и мы получим формулу бинома Ньютона

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \dots + x^n \text{ и}$$

$$(a+x)^n = a^n \left(1 + \frac{x}{a} \right)^n = a^n \left[1 + \frac{n}{1!} \left(\frac{x}{a} \right) + \frac{n(n-1)}{2!} \left(\frac{x}{a} \right)^2 + \dots + \left(\frac{x}{a} \right)^n \right]$$

или

$$(a+x)^n = a^n + \frac{n}{1!}a^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}x^2 + \dots + x^n.$$

Итак, общий случай бинома Ньютона является частным случаем формулы Маклорена.

1.5.14.8.3. Приложения формулы Маклорена Приближенное вычисление числа e

$e \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$. Ранее были установлены оценки $2 \leq e < 3$. Положим в формуле Маклорена для e^x , $x=1$ и $r=1$, получим

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!} + R_{n+1}(1),$$

где

$$|R_{n+1}(1)| \leq \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}.$$

Выбирая номер n достаточно большим, получим приближенное значение e с любой наперед заданной точностью.

1.5.14.8.4. Вычисление пределов с помощью формулы Маклорена

Из полученных нами ранее разложений по формуле Маклорена элементарных функций легко следуют более грубые разложения (с остаточным членом в форме Пеано).

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n),$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}),$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n),$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n).$$

Эти разложения могут быть использованы при вычислении пределов функций при $x \rightarrow 0$.

Пример. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - e^{\operatorname{tg} x}}{x^3(1 + \sin^3 x)}$.

Так как в знаменателе старшая степень x - третья, то в числителе нужно учитывать степени, не выше третьей.

Получим разложения функций, входящих в числитель, до членов с x^3 .

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + o(z^3),$$

$$e^{\sin x} = 1 + \sin x + \frac{(\sin x)^2}{2!} + \frac{(\sin x)^3}{3!} + o[(\sin x)^3]. \quad (1)$$

Так как $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $o[(\sin x)^3] = o(x^3)$,

далее,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + 0(x^4).$$

Подставляя это разложение в (1) будем иметь

$$e^{\sin x} = 1 + \left(x - \frac{x^3}{3!} + 0(x^4)\right) + \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!} + 0(x^4)\right)^2}{2!} + \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!} + 0(x^4)\right)^3}{3!} + 0(x^3).$$

Раскрывая скобки и учитывая, что $x^k \cdot 0(x^m) = 0(x^{m+k}) = 0(x^m)$, получим

$$e^{\sin x} = 1 + \left(x - \frac{1}{6}x^3\right) + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + 0(x^3),$$

$$e^{\sin x} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + 0(x^3).$$

Получим теперь разложение $\operatorname{tg} x$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x &= \frac{\sin x}{\cos x} = \left(x - \frac{x^3}{6} + 0(x^3)\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{2} + 0(x^3)\right)^{-1} = \\ &= \left(x - \frac{x^3}{6} + 0(x^3)\right) \left(1 + (-1)\left(-\frac{x^2}{2} + 0(x^3)\right) + 0(x^3)\right) = \end{aligned}$$

Здесь использовано разложение $(1+z)^{-1} = 1 - z + 0(z)$

$$= \left(x - \frac{x^3}{6} + 0(x^3)\right) \left(1 + \frac{x^2}{2} + 0(x^3)\right) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^3}{2} + 0(x^3) = x + \frac{x^3}{3} + 0(x^3)$$

$$e^{\operatorname{tg} x} = 1 + \left(x + \frac{x^3}{3}\right) + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + 0(x^3) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + 0(x^3).$$

Подставляя в заданную функцию полученные разложения, будем иметь

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - e^{\operatorname{tg} x}}{x^3(1 + \sin^3 x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x + \frac{1}{2}x^2 + 0(x^3) - \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + 0(x^3)\right)}{x^3(1 + \sin^3 x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^3 + 0(x^3)}{x^3(1 + \sin^3 x)} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

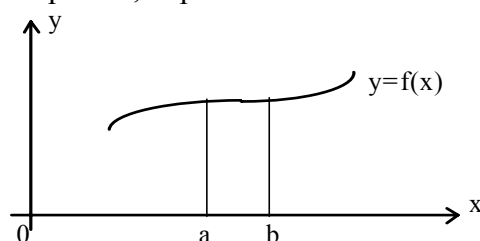
В этом примере использование правила Лопиталя было бы затруднительным, в то время как применение формулы Маклорена опиралось только на известные разложения элементарных функций.

1.5.15. Исследование поведения функций с помощью производных.**1.5.15.1. Условие постоянства функций.****Теорема 1.**

Пусть функция $f(x)$ определена, дифференцируема на интервале X , и $f'(x) = 0$ на X . Тогда функция $f(x)$ является постоянной на X .

Доказательство. Пусть x_0 - некоторая фиксированная точка из X и x - любая другая точка из X . Для сегмента $[x_0, x]$ (или $[x, x_0]$) удовлетворены все условия теоремы Лагранжа, следовательно, между точками x_0 и x найдется точка ξ , такая что $f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0)$. Так как $f'(\xi) = 0$, то для $\forall x \in X$ $f(x) = f(x_0)$, т.е. значение функции $f(x)$ в любой точке $x \in X$ равно ее значению в фиксированной точке x_0 , т.е. постоянна всюду в X .

Замечание. Геометрический смысл теоремы: если касательная в каждой точке некоторого участка графика функции $y=f(x)$ параллельна оси OX , то этот участок есть отрезок прямой, параллельный оси OX .

**1.5.15.2. Признак монотонности функции**

Теорема. (Достаточное условие возрастания (убывания) функции на интервале X).

Пусть функция $f(x)$

- 1) определена на интервале X ;
- 2) имеет на X конечную производную $f'(x)$;
- 3) $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) на X .

Тогда $f(x)$ является возрастающей (убывающей) на интервале X .

Доказательство. Рассмотрим случай, когда $f'(x) < 0$ на X . Возьмем любые два значения x_1 и x_2 из X такие, что $x_1 < x_2$, тогда на сегменте $[x_1, x_2]$ $f(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Лагранжа, поэтому справедливо равенство $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$, где ξ - некоторая точка из (x_1, x_2) : $x_1 < \xi < x_2$. Так как $x_2 > x_1$, и $f'(\xi) < 0$, то $f(x_2) < f(x_1)$, что означает убывание функции на множестве X .

Для случаев $f'(x) > 0$ на X доказательство проводится аналогично.

Замечание 1. Положительность (отрицательность) производной $f'(x)$ на X не является необходимым условием возрастания (убывания) функции $f(x)$, т.е. если на некотором участке функция возрастает (убыва-

ет), то отсюда не следует, вообще говоря, что на этом участке производная этой функции всюду положительна (отрицательна).

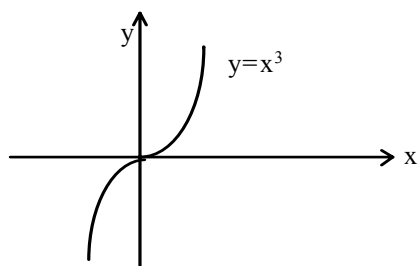


Рис.1

Например, для возрастающей на всей числовой оси функции $y = x^3$ производная в точке $x=0$ обращается в 0: $y'|_{x=0} = 3x^2|_{x=0} = 0$ (рис.1).

Замечание. Геометрическая интерпретация теоремы: поскольку производная функции представляет собой угловой коэффициент касательной к графику функции, то знак производной показывает острый (если $f'(x) > 0$) или тупой (если $f'(x) < 0$) угол с положительным направлением оси ОХ составляет касательная к $f(x)$. В соответствии с этим, кривая идет вверх (функция $f(x)$ возрастает) или вниз (функция $f(x)$ убывает). В отдельных точках при этом касательная может быть параллельной оси ОХ, что соответствует обращению в нуль производной функции $f(x)$ (рис.2,3)

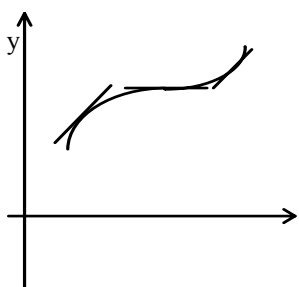


Рис.2

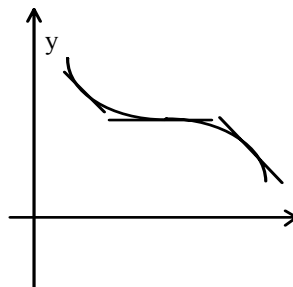


Рис.3

1.5.15.3. Экстремум дифференцируемой функции

Необходимое условие экстремума функции в точке : если $f(x)$ дифференцируема в точке C и имеет в этой точке локальный экстремум, то $f'(c) = 0$. Таким образом, экстремум дифференцируемой функции следует искать лишь в тех точках, где производная равна нулю. Такие точки называются **стационарными**. Заметим, что если точка стационарна, то отсюда, вообще говоря, не следует, что в этой точке функция достигает экстремума, т.е. указанное необходимое условие экстремума функции не является достаточным (для $f(x)=x^3$ в точке $x=0$ экстремума нет, однако $f'(0) = 3x^2|_{x=0} = 0$).

Теорема 1. (первое достаточное условие экстремума дифференцируемой функции).

Пусть функция $y=f(x)$.

- 1) дифференцируема всюду в некоторой окрестности т. С.
 2) т. С - стационарная, т.е. $f'(c) = 0$, тогда а) если существует окрестность, в которой производная $f'(x)$ положительна (отрицательна) слева от точки С и отрицательна (положительна) справа от точки С, то функция $f(x)$ имеет в т. С локальный максимум (минимум) (рис. 1,2);
 б) если же производная $f'(x)$ имеет один и тот же знак слева и справа от точки С, то экстремума в т. С нет (рис.3,4).

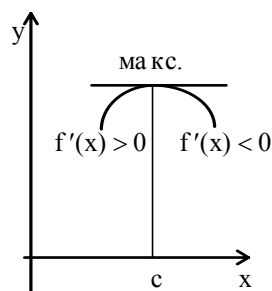


Рис.1

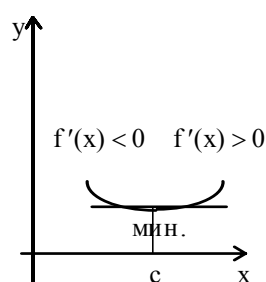


Рис.2

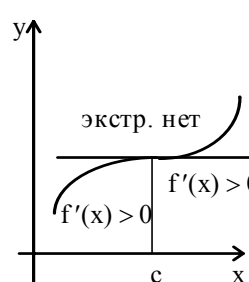


Рис.3

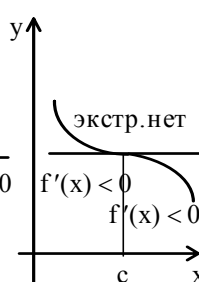


Рис.4

Доказательство. Докажем теорему для точки максимума. Пусть $f'(x)$ положительна в окрестности слева от точки С и отрицательна справа от точки С. $f'(x) > 0 \quad \forall x < C$ и $f'(x) < 0 \quad \forall x > C$. Обозначим через x_0 -любое значение аргумента из окрестности $x_0 > C$. На сегменте $[C, x_0]$ функция $f(x)$ дифференцируема, следовательно, и непрерывна, поэтому по теореме Лагранжа

$$f(C) - f(x_0) = f'(\xi)(C - x_0), \quad (1)$$

где ξ - некоторое значение аргумента между точками С и x_0 .

Аналогично рассматривается случай $x_0 < C$.

При $x_0 > C$ $f'(\xi) < 0$, $C - x_0 < 0$, поэтому $f(C) > f(x_0)$. Это и означает, что в точке С $f(x)$ имеет локальный максимум.

Теорема 2. (второе достаточное условие экстремума).

Пусть функция $y=f(x)$

- 1) имеет производную всюду в некоторой окрестности т. С;
- 2) т. С - стационарная: $f'(c)=0$;
- 3) имеет конечную вторую производную в т. С.

Тогда, если $f''(C) < 0$, то в т. $x=C$ $f(x)$ имеет локальный максимум, если же $f''(C) > 0$, то в точке $x= C$ $f(x)$ имеет локальный минимум.

Замечание. Теорема 2 не дает ответ о наличии экстремума в том случае, когда $f''(C) = 0$ или не существует в т. $x= C$. В этом случае поведение функции в т. С следует изучить с помощью первого достаточного условия экстремума.

Пример. Найти экстремум функции $y = 4x + x^2 - \frac{x^4}{4} - x^3$. Вычислим производную: $y' = 4 - 3x^2 - x^3 + 2x$. Производная определена и дифференци-

руема на всей числовой оси. Найдем стационарные точки, решив уравнение $y'(x) = 0$. $4 - 3x^2 - x^3 + 2x = 0$ или $x^3 + 3x^2 - 2x - 4 = 0$. Рассматриваем делители свободного члена: $\pm 1; \pm 2$. Отсюда получаем корень $x_1 = -1$. Деля $x^3 + 3x^2 - 2x - 4$ на $x+1$, получим: $x^3 + 3x^2 - 2x - 4 = (x+1)(x^2 + 2x - 4)$

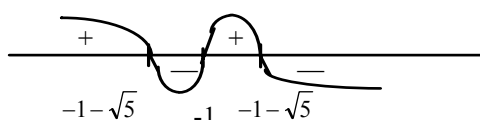
$$\begin{array}{r} x^3+3x^2-2x-4 \mid x+1 \\ \underline{x^3+x^2} \\ 2x^2-2x-4 \\ \underline{2x^2+2x} \\ -4x-4 \\ \underline{-4x-4} \\ 0 \end{array}$$

Решая квадратное уравнение $x^2+2x-4=0$, получим $x_2 = -1 + \sqrt{5}$, $x_3 = -1 - \sqrt{5}$

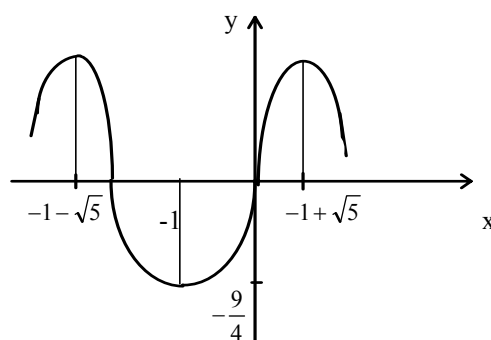
Итак, имеем:

$$y'(x) = -(x+1+\sqrt{5})(x+1)(x+1-\sqrt{5})$$

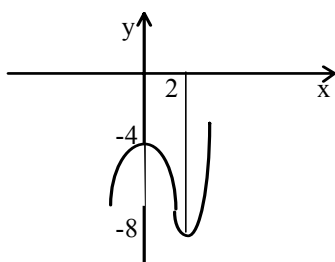
Определим участки возрастания и убывания функции и исследуем функцию на экстремум.



x	$(-\infty, -1-\sqrt{5})$	$-1-\sqrt{5}$	$(-1-\sqrt{5}, -1)$	-1	$(-1, -1+\sqrt{5})$	$-1+\sqrt{5}$	$(-1+\sqrt{5}, +\infty)$
y'	+	0	+	0	—	0	+
y		4		$-\frac{9}{4}$		4	
Рис.		лок. макс. 		лок. мин. 		лок. макс. 	



Пример 2. Найти экстремум функции $y = x^3 - 3x^2 - 4$. Находим производную $y' = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$. Стационарные точки $x_1 = 0$ и $x_2 = 2$. Вычислим $y'' = 6x - 6 = 6(x-1)$. Так как $y''(0) = -6 < 0$ и $y''(2) = 6 > 0$, то в т. $x=0$ - локальный максимум, а в точке $x=2$ - локальный минимум.



1.5.15.4. Экстремум функции, недифференцируемой в данной точке

Теорема. Пусть функция $y=f(x)$.

- 1) дифференцируема всюду в некоторой окрестности точки C , за исключением, быть может, самой точки C ;
- 2) непрерывна в точке C .

Тогда, если существует окрестность точки C , в пределах которой производная $f'(x)$ положительна (отрицательна) слева от точки C и отрицательна (положительна) справа от точки C , то функция $f(x)$ имеет в точке C локальный максимум (минимум). Если же производная $f'(x)$ имеет один и тот же знак слева и справа от точки C , то экстремума в точке C нет.

Замечание. Требование 2) непрерывности функции в точке C существенно, ибо отсутствие этого требования может привести к функциям (см. рис. 1), не имеющим экстремума в т. C .

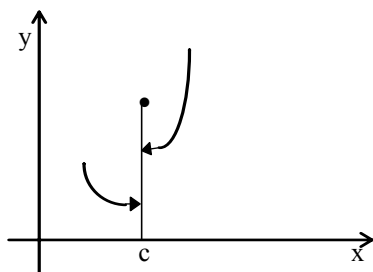


Рис.1.

Пример. Найти точки экстремума функции $y = x^{\frac{2}{3}}$.

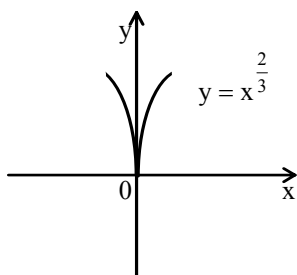


Рис.2

Эта функция непрерывна на всей бесконечной прямой (см.рис.2), дифференцируема всюду на этой прямой, за исключением точки $x=0$. Производная функции

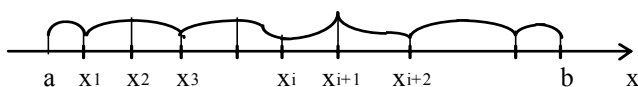
при $x \neq 0$ $y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$. В точке $x=0$ эта

производная имеет разрыв 2-го рода. Поскольку при $x < 0$ $y' < 0$, а при $x > 0$ $y' > 0$, то, следовательно, в силу теоремы в точке $x=0$ функция имеет минимум.

Замечание. Сформулируем общую схему нахождения точек экстремума. Пусть функция $f(x)$.

- 1) непрерывна на множестве X ;
- 2) производная $f'(x)$ существует и непрерывна внутри X всюду, кроме быть может, конечного числа точек;
- 3) пусть производная $f'(x)$ обращается в 0 внутри X лишь, может быть, для конечного числа точек.

Обозначим через x_1, x_2, \dots, x_n точки, в которых производная не существует или равна нулю, а через a и b - концы X (a и b могут быть и бесконечными).



На каждом интервале $(a, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_{i-1}, x_i), \dots, (x_n, b)$ производная $f'(x)$ в силу условий 1)-3) сохраняет постоянный знак. Поэтому вопрос о наличии экстремума в каждой точке x_i может быть решен при помощи рассмотренных достаточных условий.

1.5.15.5. Направление выпуклости графика функции

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в любой точке интервала (a, b) , тогда через любую точку $M(x, f(x))$ этого графика функции можно провести касательную к графику функции $f(x)$, причем эта касательная не параллельна оси OY , т.к. ее угловой коэффициент конечен, ибо равен производной $f'(x)$.

Определение. Говорят, что график функции $f(x)$ имеет на (a, b) выпуклость направленную вниз (вверх), если график этой функции в пределах (a, b) лежит не ниже (см. рис 1, 2) (не выше) любой своей касательной.

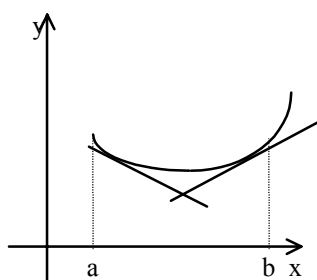


Рис.1

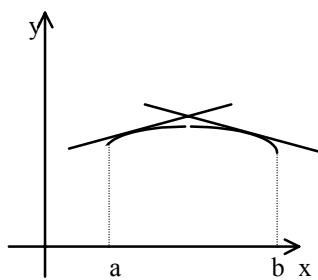


Рис.2

Теорема 1. Пусть функция $y=f(x)$ имеет на интервале (a, b) конечную вторую производную, тогда если $f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b)$ ($f''(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a, b)$), то график функции $y=f(x)$ имеет на (a, b) выпуклость, направленную вниз (вверх).

Замечание. Если $f''(x) = 0 \forall x \in (a, b)$, то $y = f(x)$ - линейная функция, т.е. ее графиком является прямая линия. В этом случае направление выпуклости можно считать произвольным.

Пример.

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 4; \quad f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2); \quad f''(x) = 6x - 6 = 6(x - 1)$$

Таким образом, при $x > 1$ $f''(x) > 0$, а при $x < 1$ $f''(x) < 0$ и, следовательно, при $-\infty < x < 1$ график функции имеет выпуклость вверх, а при $1 < x < \infty$ - вниз (см. рис.4).

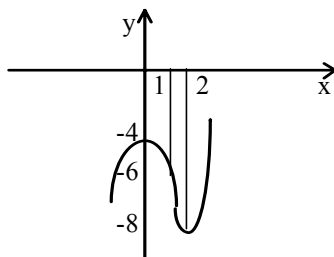


Рис.4

1.5.15.6. Точки перегиба графика функции

Предположим, что график функции $y=f(x)$ имеет определенное направление выпуклости на каждом из интервалов (a, c) и (c, b) , где числа a, b, c связаны неравенствами $a < c < b$. Предположим, что к графику функции $y=f(x)$ в точке $M(c, f(c))$ существует касательная не параллельная оси OY , тогда точка $M(c, f(c))$ графика функции $y=f(x)$ называется точкой перегиба этого графика, если существует такая окрестность точки C оси абсцисс, в пределах которой график функции $y=f(x)$ слева и справа от точки C имеет разные направления выпуклости (см.рис.1)

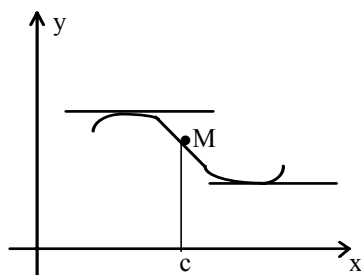
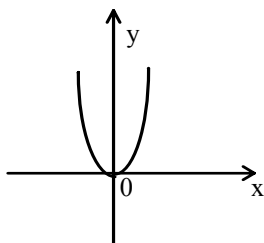


Рис.1

Теорема 1. (необходимое условие существования точки перегиба).

Пусть график функции $y=f(x)$ имеет перегиб в точке $M(c, f(c))$ и функция $y=f(x)$ имеет в точке C непрерывную вторую производную тогда $f''(c)=0$.

Замечание1. Равенство нулю второй производной не является достаточным условием перегиба. Например, для функции $y=x^4$ в точке $(0,0)$ нет перегиба, однако $y''(0) = 12x^2|_{x=0} = 0$. (см. рис. 2)



Замечание 2. Все точки перегиба дважды непрерывно дифференцируемой функции находятся среди точек, в которых вторая производная равна нулю.

1.5.15.7. Теоремы о достаточных условиях перегиба графика функции

Теорема 1. (первое достаточное условие перегиба).

Пусть функция $f(x)$

- 1) имеет вторую производную в некоторой окрестности точки C ;
- 2) $f''(c) = 0$, тогда, если существует окрестность, в пределах которой вторая производная $f''(x)$ имеет разные знаки слева и справа от точки C , то график этой функции имеет перегиб в точке $M(c, f(c))$.

Замечание 1. Сформулируем обобщение теоремы 1. При определении точки перегиба будем считать, что касательная к графику функции в рассматриваемой точке может быть параллельной оси Oy (т.е. $f'(c) = \pm\infty$).

Пусть функция $f(x)$: 1) имеет конечную вторую производную всюду в некоторой окрестности точки C , за исключением, быть может, самой точки C ; 2) функция $f(x)$ непрерывна в точке C ; 3) график функции имеет касательную в точке $M(c, f(c))$ (может быть и параллельно оси Oy). Тогда, если существует окрестность точки C , в пределах которой $f''(x)$ имеет разные знаки слева и справа от точки C , то график функции $y=f(x)$ имеет перегиб в точке $M(c, f(c))$.

Замечание 2.

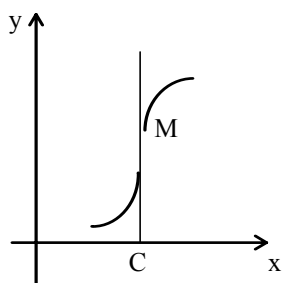


Рис. 1

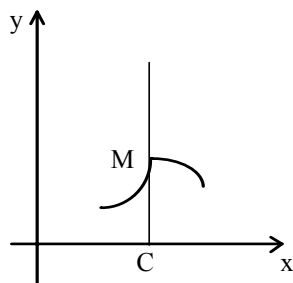


Рис. 2

Пункт 2 в условии теоремы исключает случай, приведенный на рис. 1, а пункт 3 - на рис. 2 (слева от точки C график функции касается прямой $x=C$ в точке M , а справа касания нет)

Пример. Найти точки перегиба графика функции $y = \sqrt[3]{x}$.

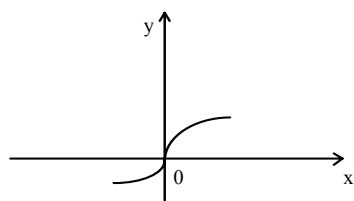


Рис. 3

Так как $y'(x) = \frac{1}{3}\sqrt[3]{x^2}$, то в точке $x=0$

$y' = +\infty$ и график функции касается в точке

$(0,0)$ оси ОУ. $y''(x) = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^5}}$ и поэтому

$y''(x) > 0$ при $x < 0$ и $y'' < 0$ при $x > 0$, а в точке $x=0$ $y''(x)|_{x=0} = \infty$.

Отсюда следует, что точка $(0,0)$ является точкой перегиба; слева от этой точки график функции имеет выпуклость вниз, а справа вверх.

1.5.15.8. Асимптоты графика функции

Определение 1. Прямая $x=a$ называется вертикальной асимптотой графика функции $y=f(x)$, если хотя бы одно из предельных значений

$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ равно $+\infty$ или $-\infty$.

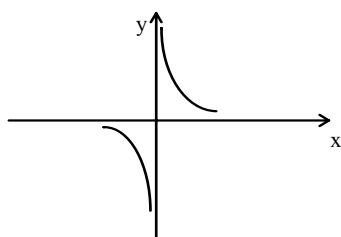


Рис. 1

Пример. $y = \frac{1}{x}$. Так как

$\lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{1}{x} = -\infty$ и $\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{1}{x} = +\infty$, то прямая

$x=0$ - вертикальная асимптота графика

функции $y = \frac{1}{x}$. (см. рис. 1)

Определение 2. Пусть функция $y=f(x)$ определена для всех $x>a$ ($x<a$). Прямая $Y=kx+b$ называется наклонной асимптотой графика функции $y=f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow -\infty$), если функция $f(x)$ представима в виде

$f(x) = kx + b + \alpha(x)$, где $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha(x) = 0$ ($\lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha(x) = 0$).

Теорема. Для того, чтобы график функции $y=f(x)$ имел при $x \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow -\infty$) наклонную асимптоту, необходимо и достаточно, чтобы существовали два предела:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k$ ($\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = k$) и $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx] = b$ ($\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - kx] = b$).

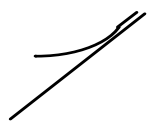
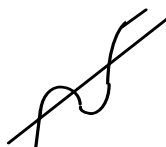
Доказательство. Необходимость. Пусть график функции $y=f(x)$ имеет асимптоту, для определенности, при $x \rightarrow +\infty$, т.е. $f(x)$ может быть представлена в виде $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha(x) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{kx + b + \alpha(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x} \right] = k$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [b + \alpha(x)] = b$$

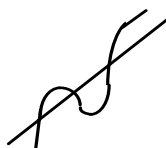
Достаточность. Пусть существует $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx] = b$, тогда $f(x) - kx = b + \alpha(x)$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha(x) = 0$. Отсюда следует, что $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ - бесконечно малая функция при $x \rightarrow +\infty$.

Замечание. Расположение графика относительно асимптоты при больших x определяется знаком разности $\Delta = f(x) - kx - b$

 $\Delta > 0$  $\Delta < 0$ 

Δ меняет знак при
сколь угодно больших x .

При $x \rightarrow -\infty$ аналогично

 $\Delta > 0$  $\Delta < 0$ 

Δ меняет знак при
сколь угодно больших по
абсолютной величине x .

Расположение графика относительно вертикальных и наклонных асимптот позволяет проверить исследование функции на экстремум, а также на направление выпуклости графика.

1.5.15.9. Примеры построения графиков функций

Будем проводить построение графиков функций, последовательно отвечая на вопросы, сформулированные ниже.

1. Построить график функции $y = x^2(x - 4)^2$

1. Область определения: $-\infty < x < +\infty$;
2. Периодичность: функция не периодическая;
3. Четность: функция не является ни четной, ни нечетной, поскольку $f(x) \neq f(-x)$ и $f(x) \neq -f(-x)$;
4. Точки пересечения с осями OX и OY .

$$\text{с осью } OX: \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{с осью } OY: \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases};$$

5. Непрерывность: функция непрерывна $\forall x \in (-\infty, +\infty)$;








6. Асимптоты: функция не имеет ни вертикальных, ни наклонных асимптот;



7. Участки монотонности функции, нахождения экстремума.

$$y'(x) = 2x(x-4)^2 + 2x^2(x-4) = 2x(x-4)(x+x-4) = 4x(x-4)(x-2)$$

Стационарные точки функции: $x_1=0$, $x_2=2$, $x_3=4$.

Составим таблицу

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, 4)$	4	$(4, \infty)$
y'	—	0	+	0	—	0	+
Рис.		 лок. мин.		 лок. макс.		 лок. мин.	
y		0		16		0	

Здесь  и  означают убывание и возрастание функции на соответствующих интервалах.

Примерный график функции представлен на рис.1.

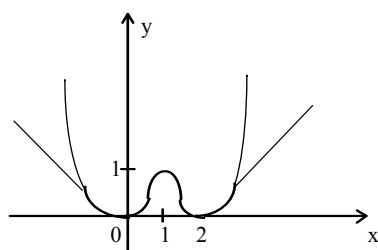


Рис. 1






8. Нахождение точек перегиба: участки выпуклости вверх и вниз графика функции. Вычисляем $y''(x)$.

$$\begin{aligned} y''(x) &= 4[(x-2)(x-4) + x(x-4) + x(x-2)] \\ &= 4(x^2 - 6x + 8 + x^2 - 4x + x^2 - 2x) = \\ &= 4(3x^2 - 12x + 8) \end{aligned}$$

Приравняем нулю $y''(x)$: $3x^2 - 12x + 8 = 0$; $x_{1,2} = \frac{2(3 \pm \sqrt{3})}{3} = 2\left(1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

Таким образом $y''(x) = 4\left(x - 2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\left(x - 2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$

Составим таблицу

x	$\left(-\infty, 2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$	$2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\left(2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}, 2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$	$2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\left(2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$
y''	+	0	—	0	+
Рис.					
y		$\frac{64}{9}$		$\frac{64}{9}$	

Окончательный график функции представлен на рис. 2.

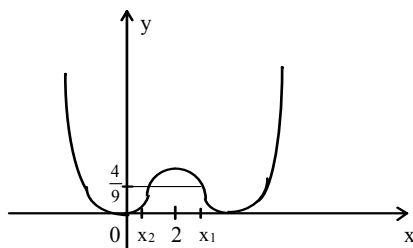


Рис. 2

3. Построить график функции $y = \frac{x^3 + x^2 - 3x + 1}{x^2 - 1}$

1. Область определения: $x \neq \pm 1$.

2. Четность: функция не является ни четной, ни нечетной.

3. Периодичность: функция не является периодической.

4. Точки пересечения с осями координат: $x^3 + x^2 - 3x + 1 = 0$

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -1 - \sqrt{2}, \quad x_3 = -1 + \sqrt{2}$$

Так как $x \neq 1$, то точки пересечения

С осью OX

$$\begin{cases} x = -1 - \sqrt{2} \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1 + \sqrt{2} \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} \frac{x^3 + x^2 - 3x + 1}{x^3 - x^2} \quad \frac{x-1}{x^2 + 2x - 1} \\ \hline \frac{2x^2 - 3x + 1}{2x^2 - 2x} \\ \hline \frac{-x + 1}{-x + 1} \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\text{С осью OY} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

5. Непрерывность: функция имеет разрывы в точках $x = \pm 1$.

Исследуем характер точек разрыва

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{x^3 + x^2 - 3x + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{(x-1)(x^2 + 2x - 1)}{(x-1)(x+1)} = +\infty$$

$x = -1$;

$$\lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{x^3 + x^2 - 3x + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{(x^2 + 2x - 1)}{(x+1)} = -\infty$$

Точка $x = -1$ - точка разрыва 2-го рода

Пусть $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1 \pm 0} \frac{x^3 + x^2 - 3x + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1 \pm 0} \frac{x^2 + 2x - 1}{x + 1} = 1$$

Точка $x = 1$ - точка устранимого разрыва.

6. Асимптоты.

$x = -1$ - вертикальная асимптота.

Наклонные асимптоты.

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x^2 - 3x + 1}{x(x^2 - 1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{1 - \frac{1}{x^2}} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^3 + x^2 - 3x + 1}{x^2 - 1} - x \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x^2 - 3x + 1 - x^3 + x}{x^2 - 1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = 1$$

Уравнение наклонной асимптоты $y=x+1$.

7. Участки монотонности, локальный экстремум функции.

$$y' = \left(\frac{x^3 + x^2 - 3x + 1}{x^2 - 1} \right)' = \frac{(3x^2 + 2x - 3)(x^2 - 1) - (x^3 + x^2 - 3x + 1)2x}{(x^2 - 1)^2} =$$

$$= \frac{(3x^2 + 2x - 3)(x-1)(x+1) - 2x(x-1)(x^2 + 2x - 1)}{(x-1)^2(x+1)^2} =$$

$$= \frac{3x^3 + 5x^2 - x - 3 - 2x^3 - 4x^2 + 2x}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{x^3 + x^2 + x - 3}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{(x-1)(x^2 + 2x + 3)}{(x-1)(x+1)^2} =$$

$$= \frac{x^2 + 2x + 3}{(x+1)^2}$$

$$\begin{array}{r} \frac{x^3 + x^2 + x - 3}{x^3 - x^2} \quad \frac{x-1}{x^2 + 2x + 3} \\ \hline \frac{2x^2 + x - 3}{2x^2 - 2x} \\ \hline \frac{3x - 3}{3x - 3} \\ \hline 0 \end{array}$$



$$\text{Итак, } y'(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{(x+1)^2}$$

Отсюда следует, что

$\forall x \ y'(x) \neq 0$ и стационарных точек функция не имеет.

При $x=-1$ $y'(x)$ не существует.

Составим таблицу

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, \infty)$
y'	+	не сущ.	+
Рис.			

8. Нахождение точек перегиба; участки выпуклости вверх и вниз графика функции.

$$y'''(x) = \left[\frac{x^2 + 2x + 3}{(x+1)^2} \right]' = \frac{(2x+2)(x+1) - (x^2 + 2x + 3)2(x+1)}{(x+1)^3} =$$

$$= \frac{2(x+1)^2 - 2(x^2 + 2x + 3)}{(x+1)^3} = 2 \frac{x^2 - 2x + 1 - x^2 - 2x - 3}{(x+1)^3} = -\frac{4}{(x+1)^3}$$

$$y''(x) > 0 \quad \forall x \in (-\infty, -1) \quad \text{и} \quad y''(x) < 0 \quad \forall x \in (-1, \infty)$$

$$y''(x) \neq 0 \quad \forall x \in (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$$

Составим таблицу



x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, \infty)$
y''	+		—
Рис.			

График функции $y = \frac{x^3 + x^2 - 3x + 1}{2x^2 - 2}$ приведен на рис. 4

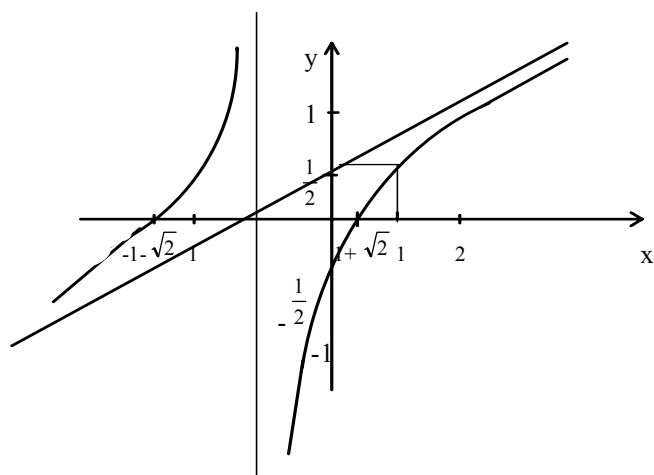


Рис. 4

1.6. Неопределенный интеграл	Для замечаний
<p style="text-align: center;">1.6. Неопределенный интеграл</p> <p style="text-align: center;">1.6.1. Первообразная функция</p> <p>Пусть функция $f(x)$ определена на множестве M, которое является либо интервалом (конечным или бесконечным), либо сегментом.</p> <p>Замечание. Рассмотрение сегмента необходимо для применения неопределенного интеграла в дальнейшем для вычисления определенного интеграла.</p> <p>Определение. Функция $F(x)$ называется первообразной (функцией) для функций $f(x)$ на множестве M, если она дифференцируема в каждой точке x множества M и $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in M$.</p> <p>Замечание. В концевых точках сегмента рассматриваются односторонние производные.</p> <p>Пример. $f(x)=2x \Rightarrow F(x) = x^2 \quad \forall x \in (-\infty, +\infty)$ Действительно: $F'(x) = 2x \quad \forall x \in (-\infty, +\infty)$ Очевидно, что если $F(x)$ является первообразной для функций $f(x)$ на множестве M, то $F(x)+C$ ($C = \text{const}$) также является первообразной для $f(x)$ на множестве M $\left([F(x) + C]' = F'(x) = f(x) \right)$.</p> <p>Теорема 1. Пусть $F_1(x)$ и $F_2(x)$ - любые первообразные для функции $f(x)$ на множестве M, тогда $F_1(x) - F_2(x) = C \quad \forall x \in M$, где $C = \text{const}$.</p> <p>Доказательство. Положим, $G(x) = F_1(x) - F_2(x)$, тогда $G(x)$ дифференцируема на M (в случае сегмента в концевых точках существуют односторонние производные) и</p> $G'(x) = (F_1(x) - F_2(x))' = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0 \quad \forall x \in M,$ <p>откуда следует, что $G(x) = C = \text{const} \quad \forall x \in M$, т.е.</p> $F_1(x) - F_2(x) \equiv C = \text{const} \quad \forall x \in M.$ <p>Теорема доказана. Таким образом показано, что любые первообразные для одной и той же функции на множестве M могут отличаться лишь на константу.</p> <p>Следствие. Если $F(x)$ - одна из первообразных для $f(x)$ на множестве M, то любая первообразная $\Phi(x)$ для $f(x)$ на M представляются в виде $\Phi(x) = F(x) + C$, где C - некоторая константа.</p>	

1.6. Неопределенный интеграл	Для замечаний
<p style="text-align: center;">1.6.2. Неопределенный интеграл</p> <p>Определение. Совокупность всех первообразных функций $f(x)$ на множестве M называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$ (на этом множестве) и обозначается символом</p> $\int f(x)dx$ <p>В этом обозначении знак \int называется знаком интеграла, выражение $f(x)dx$ - подынтегральным выражением, а функция $f(x)$ - подынтегральной функцией.</p> <p>Если $F(x)$ - одна из первообразных функций для функции $f(x)$ на множестве M, то в силу следствия из теоремы п.1.1.</p> $\int f(x)dx = F(x) + C \quad (1)$ <p>где C - любая постоянная. Это равенство следует понимать как равенство двух множеств, точнее следовало бы записать так:</p> $\int f(x)dx = \{F(x) + C\}.$ <p>Пример. $\int \cos x dx = \sin x + C \quad -\infty < x < +\infty.$</p> <p>Замечание. Если $F(x)$ - первообразная функции $f(x)$ на множестве M, то в формуле (1) под знаком интеграла стоит дифференциал функции $F(x)$, действительно: $dF = F'(x)dx = f(x)dx$.</p> <p>Будем считать по определению, что</p> $\int f(x)dx \equiv \int F'(x)dx \equiv \int dF(x) \quad (2)$ <p style="text-align: center;">1.6.3. Основные свойства неопределенного интеграла</p> <p>1⁰. Пусть функция $F(x)$ дифференцируема на M, тогда</p> $\int dF(x) = F(x) + c \quad \text{или} \quad \int F'(x)dx = F(x) + c$ <p>Справедливость этих равенств вытекает из соотношений (1), (2) п.1.2.</p> <p>2⁰. Пусть функция $f(x)$ имеет первообразную на множестве M, тогда</p> $d \int f(x)dx = f(x)dx$ <p>Здесь под интегралом $\int f(x)dx$ понимается любая первообразная $F(x)$ функции $f(x)$. Справедливость этой формулы очевидна в силу определения первообразной: так</p> $\int f(x)dx = F(x) + c \Rightarrow d \int f(x)dx = d[F(x) + c] = dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx.$ <p>3⁰. Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеют первообразные на M, то и функция $f_1(x) + f_2(x)$ также имеет первообразную на M, и</p> $\int [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx \quad (1)$ <p>Это равенство означает совпадение двух множеств функций, т.е., что сумма каких-либо первообразных для функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ является первообразной для функции $f_1(x) + f_2(x)$, и наоборот, всякая первообразная для</p>	

1.6. Неопределенный интеграл	Для замечаний
<p>функции $f_1(x) + f_2(x)$ является суммой некоторых первообразных для функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$.</p> <p>Доказательство. Пусть $\int f_1(x)dx = F_1(x) + c_1$, $\int f_2(x)dx = F_2(x) + c_2$;</p> <p>Положим $F(x)=F_1(x)+F_2(x)$, тогда $F(x)$ дифференцируема на M и</p> $F'(x) = (F_1(x) + F_2(x))' = F_1'(x) + F_2'(x) = f_1(x) + f_2(x) \quad \forall x \in M,$ <p>т.е $F(x)$ является первообразной функции $f_1(x) + f_2(x)$ на M. Таким образом,</p> $\int (f_1(x) + f_2(x))dx = F(x) + c = F_1(x) + F_2(x) + c,$ $\int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx = F_1(x) + c_1 + F_2(x) + c_2 = F_1(x) + F_2(x) + c_1 + c_2$ <p>Так как c_1+c_2 - также произвольная постоянная, то множества $\{F_1(x) + F_2(x) + c_1 + c_2\}$ и $\{F_1(x) + F_2(x) + c\}$ совпадают.</p> <p>Свойство 3⁰ доказано. Аналогично доказывается, что</p> $\int [f_1(x) - f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx - \int f_2(x)dx .$ <p>4⁰. Если функция $f(x)$ имеет первообразную на M и $a \in \mathbb{R}$, то функция $af(x)$ также имеет на M первообразную, причем $a \neq 0$ имеет место равенство</p> $\int af(x)dx = a \int f(x)dx \quad (2)$ <p>Доказательство. Пусть $\int f(x)dx = F(x) + c$, тогда $(aF(x))' = aF'(x) = af(x)$.</p> <p>Таким образом $a \int f(x)dx = a(F(x) + c) = aF(x) + ac$, $\int af(x)dx = aF(x) + c_1$.</p> <p>Так как $a \neq 0$, то ac также является произвольной постоянной, и множества $\{aF(x) + ac\}$, $\{aF(x) + c\}$ совпадают. Свойство 4⁰ доказано.</p> <p>Свойства 3⁰ и 4⁰ выражают свойства линейности неопределенного интеграла относительно подынтегральной функции.</p> <p>Вопрос о существовании первообразных остается пока открытым.</p> <p>1.6.4. Таблица основных неопределенных интегралов</p> <p>Ранее мы получили таблицу. Каждая формула таблицы производных простейших элементарных функций, устанавливающая, что та или иная функция $F(x)$ имеет производную $f(x)$, приводит нас, в силу определения неопределенного интеграла, к соответствующей формуле интегрального исчисления</p> $\int f(x)dx = F(x) + c$ <p>Таким образом, приходим к следующей таблице интегралов.</p> <ol style="list-style-type: none"> $\int 0 \cdot dx = c$ $\int 1 \cdot dx = x + c$ $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad (\alpha \neq -1)$ 	

1.6. Неопределенный интеграл	Для замечаний
<p>4. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + c \quad \left(\begin{array}{l} \text{Если } x > 0 \text{ } \ln x = \ln x \text{ и } (\ln x)' = \frac{1}{x}. \\ \text{Если } x < 0 \text{ } \ln x = \ln(-x) \text{ и } [\ln(-x)]' = -\frac{1}{x} \cdot (-1) = \frac{1}{x} \end{array} \right)$</p> <p>5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \quad (0 < a \neq 1), \quad \int e^x dx = e^x + c$</p> <p>6. $\int \sin x dx = -\cos x + c$</p> <p>7. $\int \cos x dx = \sin x + c$</p> <p>8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c \quad \left(x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z} \right)$</p> <p>9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c \quad (x \neq n\pi, \quad n \in \mathbb{Z})$</p> <p>10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + c \\ -\arccos x + c \end{cases} \quad (-1 < x < 1)$</p> <p>11. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + c \\ -\operatorname{arcctg} x + c \end{cases}$</p> <p>12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln x + \sqrt{x^2 \pm 1} + c \quad (x > 1 \text{ в случае знака “-”})$</p> <p>13. $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left \frac{1+x}{1-x} \right + c \quad (x \neq 1)$</p> <p>14. $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + c$</p> <p>15. $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + c$</p> <p>16. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + c$</p> <p>17. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{ch} x + c$</p> <p>Замечание 1. Доказательство формул 12 и 13 следует провести непосредственным дифференцированием правых частей и проверкой совпадения результата с подынтегральными функциями слева.</p> <p>Замечание 2. Операция дифференцирования не выводит нас из класса элементарных функций, однако можно доказать, что интегралы от некоторых элементарных функций уже не являются элементарными функциями, например,</p> $\int e^{-x^2} dx \text{ - интеграл Пуассона.}$ <p>Теорема 2. Пусть функция $\varphi(x)$ определена и дифференцируема на множестве M. Пусть, далее, для функции $g(u)$ существует первообразная функции $G(u)$ на множестве $U = \{\varphi(x) x \in M\}$, т.е.</p> $\int g(u) du = G(u) + c.$	

1.6. Неопределенный интеграл	Для замечаний
<p>Тогда на множестве М для функции $g(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$ существует первообразная, равная $G[\varphi(x)]$, т.е.</p> $\int g(\varphi(x))\varphi'(x)dx = G(\varphi(x)) + c$ <p style="text-align: center;">или</p> $\int g(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int g(u)du \Big _{u=\varphi(x)} \quad (1)$ <p>Доказательство. По теореме о производной сложной функции имеем</p> $\frac{d}{dx} \{G(\varphi(x))\} = G'_u(u) \Big _{u=\varphi(x)} \cdot \varphi'(x).$ <p>Но $G'_u(u)$ по определению первообразной есть $g(u)$, поэтому</p> $\frac{d}{dx} \{G(\varphi(x))\} = g(u) \Big _{u=\varphi(x)} \cdot \varphi'(x) = g(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x).$ <p>Таким образом, $G(\varphi(x))$ является первообразной функции $g(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$ на множестве М, и формула (1) доказана.</p> <p>Существует два варианта метода замены переменной.</p> <p>а) Метод подведения под знак дифференциала.</p> <p>Пусть требуется вычислить интеграл $\int f(x)dx$. Предположим, что существует дифференцируемая функция $\varphi(x)$ и функция $g(u)$ такие, что подынтегральное выражение $f(x)dx$ может быть записано в виде</p> $f(x)dx = g(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)dx = g(\varphi(x))d\varphi(x) = g(u)du$ <p>(это преобразование называется подведением $\varphi(x)$ под знак дифференциала). По теореме 2 имеем</p> $\int f(x)dx = \int g(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int g(u)du \Big _{u=\varphi(x)}$ <p>Поэтому вычисление $\int f(x)dx$ сводится к вычислению интеграла $\int g(u)du$ (который может оказаться проще исходного) и последующей подстановке $u=\varphi(x)$.</p> <p>Пример.</p> $\int \sin^3 x \cdot \cos x dx = \int \sin^2 x d \sin x = \int u^2 du \Big _{u=\sin x} = \frac{u^3}{3} \Big _{u=\sin x} + c = \frac{\sin^3 x}{3} + c$ <p>Пример.</p> $\int \frac{2x+1}{x^2+x-3} dx = \int \frac{d(x^2+x-3)}{x^2+x-3} = \int \frac{du}{u} \Big _{u=x^2+x-3} = \ln u \Big _{u=x^2+x-3} + c = \ln x^2+x-3 + c.$ <p>б) Метод подстановки. Пусть требуется вычислить интеграл $\int f(x)dx$.</p> <p>Введем новую переменную u формулой $x=\varphi(u)$, где $\varphi(u)$ строго монотонная, дифференцируемая функция.</p>	

Подставим $x=\varphi(u)$ в исходное подынтегральное выражение, получим $f(x)dx = f(\varphi(u)) \cdot \varphi'(u)du = g(u)du$

По теореме 2 справедливо равенство

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(u)) \cdot \varphi'(u)du \Big|_{u=\varphi^{-1}(x)} = \int g(u)du \Big|_{u=\varphi^{-1}(x)}$$

т.е. вычисление интеграла $\int f(x)dx$ сводится к вычислению интеграла $\int g(u)du$ (который может оказаться проще исходного) и последующей подстановке $u=\varphi^{-1}(x)$

Пример $\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}} dx$, $x>0$. Положим $x=u^2$ $u \in (0, +\infty)$; u^2 строго монотонна

на этом множестве $dx = (u^2)' du = 2u du$, $u = \varphi^{-1}(x) = \sqrt{x}$, откуда

$$\begin{aligned} \int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}} dx &= 2 \int \frac{u^3+u}{u+1} du = 2 \int (u^2 - u + 2) du - 4 \int \frac{du}{u+1} = \\ &= \left(2 \left(\frac{1}{3} u^3 - \frac{1}{2} u^2 + 2u \right) - 4 \ln(u+1) \right) \Big|_{u=\sqrt{x}} + c = \\ &= 2 \left(\frac{1}{3} x^{3/2} - \frac{1}{2} x + 2x^{1/2} \right) - 4 \ln(\sqrt{x}+1) + c. \end{aligned}$$

Конечно, такой прием применим не ко всякому интегралу. Кроме того, следует подчеркнуть, что выбор правильной подстановки в значительной мере определяется искусством вычислителя.

Рассмотрим еще один пример, который позволит нам расширить таблицу интегралов

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{a^2+x^2} &= \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a} \int \frac{d\frac{x}{a}}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a} \int \frac{du}{1+u^2} \Big|_{u=\frac{x}{a}} = \\ &= \frac{1}{a} \operatorname{arctgu} \Big|_{u=\frac{x}{a}} + c = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c = -\frac{1}{a} \operatorname{arccotg} \frac{x}{a} + c \end{aligned}$$

Аналогично вычисляются следующие интегралы:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2-a^2} &= \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c \\ \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} &= \arcsin \frac{x}{a} + c = -\arccos \frac{x}{a} + c, \quad |x| < |a|. \\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} &= \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + c \end{aligned}$$

1.6.5. Интегрирование по частям

Теорема. Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы на множестве M и, кроме того, на этом множестве существует первообразная для функции

1.6. Неопределенный интеграл	Для замечаний
<p>$v(x)u'(x)$. Тогда на множестве M существует первообразная для функции $u(x)v'(x)$ и справедлива формула</p> $\int u(x)v'(x)dx = u(x) \cdot v(x) - \int v(x)u'(x)dx \quad (1)$ <p>Замечание 1. В концевых точках множества M (если M - сегмент) рассматриваются односторонние производные.</p> <p>Замечание 2. Определение дифференциала и свойство инвариантности его формы позволяют записать эту формулу в виде</p> $\int u dv = u(x)v(x) - \int v du$ <p>Доказательство теоремы. Запишем формулу для производной произведения функций $u(x)$ и $v(x)$.</p> $[u(x)v(x)]' = u(x)v'(x) + u'(x)v(x); \quad u(x)v'(x) = [u(x)v(x)]' - u'(x)v(x).$ <p>Умножим последнее равенство на dx и возьмем интеграл от обеих частей полученного равенства. Так как по условию на M существует $\int v(x)u'(x)dx$, и $\int [u(x)v(x)]' dx = u(x)v(x) + c$, то на M существует $\int u(x)v'(x)dx$ и справедлива формула</p> $\int u(x)v'(x)dx = u(x) \cdot v(x) + c - \int u'(x)v(x)dx$ <p>Включая произвольную постоянную C в $\int u'(x)v(x)dx$, получим формулу (1).</p> <p>Формула (1) сводит вопрос о вычислении интеграла $\int u dv$ к вычислению интеграла $\int v du$. В ряде конкретных случаев этот последний интеграл проще исходного.</p> <p>Вычисление интеграла $\int u dv$ посредством применения формулы (1) называют интегрированием по частям.</p> <p>Примеры:</p> <p>1⁰. $J = \int x^n \ln x dx \quad (n \neq -1)$</p> $u = \ln x, \quad dv = x^n dx; \quad du = \frac{dx}{x}, \quad v = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ $J = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{1}{n+1} \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \left(\ln x - \frac{1}{n+1} \right) + C$ <p>2⁰. $J = \int x \arctg x dx; \quad u = \arctg x, \quad dv = x dx; \quad du = \frac{dx}{1+x^2}, \quad v = \frac{x^2}{2}$</p>	

1.6. Неопределенный интеграл	Для замечаний
<p> $J = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{[(1+x^2)-1]}{1+x^2} dx =$ $= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{x^2+1}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + C$ </p> <p> $3^0. J = \int x^2 \cos x dx = \int x^2 d \sin x = x^2 \sin x - 2 \int x \sin x dx =$ <p>Еще раз применим формулу интегрирования по частям</p> $= x^2 \sin x + 2 \int x d \cos x = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C$ </p> <p> $4^0. J = \int e^x \cos x dx; \quad u = e^x, \quad dv = \cos x dx; \quad du = e^x dx, \quad v = \sin x$ $J = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx$ <p>Еще раз применим формулу интегрирования по частям</p> $u = e^x, \quad dv = \sin x dx; \quad du = e^x dx, \quad v = -\cos x$ $J = e^x \sin x + e^x \cos x - J$ <p>Это равенство понимается как равенство множеств (т.е. как равенство представителей множеств J и $e^x \sin x + e^x \cos x - J$) с точностью до произвольной постоянной, поэтому отсюда получаем</p> $J = \frac{\sin x + \cos x}{2} e^x + C$ </p> <p> $5^0. J = \int \sqrt{a^2 - x^2} dx; \quad u = \sqrt{a^2 - x^2}, \quad dv = dx; \quad du = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad v = x$ $J = \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = x \sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ <p>Добавим и вычтем a^2 в числителе подынтегральной функции интеграла, стоящего в правой части равенства; тогда, произведя деление на $\sqrt{a^2 - x^2}$, будем иметь</p> $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{a^2 - (a^2 - x^2)}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = a^2 \arcsin \frac{x}{a} - J$ <p>Подставим это выражение в формулу (2), получим</p> $J = x \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} - J$ <p>Отсюда</p> $J = \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C$ </p> <p> $6^0. \text{Проводя аналогичные вычисления, легко получить, что}$ </p>	

$$\int \sqrt{a^2 \pm x^2} dx = x\sqrt{a^2 \pm x^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln|x + \sqrt{a^2 \pm x^2}| + C$$

Теорема 3. Пусть $\frac{P(x)}{Q(x)}$ - правильная рациональная дробь с вещественными коэффициентами, знаменатель которой имеет вид:

$$Q(x) = (x - b_1)^{\beta_1} \cdot \dots \cdot (x - b_m)^{\beta_m} (x^2 + p_1x + q_1)^{\lambda_1} \cdot \dots \cdot (x^2 + p_nx + q_n)^{\lambda_n}$$

Тогда для этой дроби справедливо следующее разложение на сумму простейших дробей:

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} = & \frac{B_1^{(1)}}{x - b_1} + \frac{B_2^{(1)}}{(x - b_1)^2} + \dots + \frac{B_{\beta_1}^{(1)}}{(x - b_1)^{\beta_1}} + \dots + \frac{B_1^{(m)}}{x - b_m} + \dots + \frac{B_{\beta_m}^{(m)}}{(x - b_m)^{\beta_m}} + \\ & \frac{M_1^{(1)}x + N_1^{(1)}}{(x^2 + p_1x + q_1)} + \frac{M_2^{(1)}x + N_2^{(1)}}{(x^2 + p_1x + q_1)^2} + \dots + \frac{M_{\lambda_1}^{(1)}x + N_{\lambda_1}^{(1)}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{\lambda_1}} + \dots \\ & + \frac{M_1^{(n)}x + N_1^{(n)}}{(x^2 + p_nx + q_n)} + \frac{M_2^{(n)}x + N_2^{(n)}}{(x^2 + p_nx + q_n)^2} + \dots + \frac{M_{\lambda_n}^{(n)}x + N_{\lambda_n}^{(n)}}{(x^2 + p_nx + q_n)^{\lambda_n}} \end{aligned} \quad (1)$$

В этом разложении $B_1^{(1)}, B_2^{(1)}, \dots, B_{\beta_m}^{(m)}, M_1^{(1)}, N_1^{(1)}, \dots, M_{\lambda_n}^{(n)}, N_{\lambda_n}^{(n)}$ - некоторые вещественные постоянные, часть которых может быть равна 0.

Замечание. Для определения постоянных $M_j^{(i)}, N_j^{(i)}, B_j^{(i)}$ в общем случае следует привести равенство (1) к общему знаменателю и после этого сравнить коэффициенты при одинаковых степенях в числителях. При этом, если степень многочлена $Q(x)$ равна 1, то вообще говоря, в числителе правой части равенства (1) после приведения к общему знаменателю получается многочлен степени 1-1, т.е. многочлен с 1 коэффициентом, число же неизвестных $M_j^{(i)}, N_j^{(i)}, B_j^{(i)}$ также равняется 1.

Таким образом, мы получаем систему 1 уравнений с 1 неизвестными. Существование у нее решения вытекает из доказанной теоремы.

Рассмотрим основные методы разложения на простейшие дроби.

1.6.6. Метод неопределенных коэффициентов

Найдем разложение на простейшие дроби для $\frac{x^2 - 1}{x(x^2 - 1)}$.

Общий вид разложения в этом случае

$$\frac{x^2 - 1}{x(x^2 + 1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{(x^2 + 1)^2} + \frac{Dx + E}{x^2 + 1}$$

Приводя к общему знаменателю и отбрасывая его, имеем

$$x^2 - 1 = A(x^2 + 1)^2 + (Bx + C)x + (Dx + E)(x^2 + 1)x$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x :

1.6. Неопределенный интеграл	Для замечаний
<div data-bbox="188 241 944 434" data-label="Equation-Block"> $\begin{array}{l l} \text{при } x^0 & A=-1 \\ \text{при } x & C+E=0 \\ \text{при } x^2 & 2A+B+D=1 \\ \text{при } x^3 & E=0 \\ \text{при } x^4 & A+D=0 \end{array} \quad \text{Отсюда находим: } \begin{cases} A=-1 \\ B=2 \\ C=0 \\ D=1 \\ E=0 \end{cases},$ </div> <div data-bbox="188 454 746 483" data-label="Text"> <p>поэтому искомое разложение имеет вид:</p> </div> <div data-bbox="491 490 938 571" data-label="Equation-Block"> $\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2} = -\frac{1}{x} + \frac{2x}{(x^2+1)^2} + \frac{x}{x^2+1}$ </div> <div data-bbox="513 618 911 651" data-label="Section-Header"> <h3>1.6.7. Метод вычеркивания</h3> </div> <div data-bbox="188 658 1230 864" data-label="Text"> <p>Пусть знаменатель $Q(x)$ правильной рациональной дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ имеет вещественное число a корнем кратности α. Тогда среди простейших дробей, на сумму которых раскладывается дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$, есть дробь</p> </div> <div data-bbox="194 875 1102 958" data-label="Equation-Block"> $\frac{A}{(x-a)^\alpha}. \text{ По лемме 1 коэффициент } A = \frac{P(a)}{\varphi(a)}, \text{ где } \varphi(x) = \frac{Q(x)}{(x-a)^\alpha}.$ </div> <div data-bbox="188 1003 1118 1041" data-label="Text"> <p>Правило: для вычисления коэффициента A при простейшей дроби</p> </div> <div data-bbox="194 1048 1225 1126" data-label="Equation-Block"> $\frac{A}{(x-a)^\alpha}, \text{ соответствующей вещественному корню } a \text{ многочлена } Q(x) \text{ кратности } \alpha,$ </div> <div data-bbox="188 1137 1233 1335" data-label="Text"> <p>следует вычеркнуть в знаменателе дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ скобку $(x-a)^\alpha$ и в оставшемся выражении положить $x=a$. Отметим, что этот прием применим лишь для вычисления коэффициентов при старших степенях простейших дробей, соответствующих вещественным корням $Q(x)$.</p> </div> <div data-bbox="188 1339 1228 1449" data-label="Text"> <p>Метод вычеркивания особенно эффективен в случае, когда знаменатель $Q(x)$ имеет лишь однократные вещественные корни, т.е. когда $Q(x)=(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)$. Тогда справедливо представление</p> </div> <div data-bbox="477 1453 951 1536" data-label="Equation-Block"> $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \dots + \frac{A_n}{x-a_n},$ </div> <div data-bbox="188 1545 1214 1617" data-label="Text"> <p>все коэффициенты которого могут быть вычислены по методу вычеркивания. Для вычисления коэффициента A_k следует вычеркнуть в знаменателе дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ скобку $(x-a_k)$ и в оставшемся выражении положить $x=a_k$.</p> </div> <div data-bbox="188 1713 1013 1792" data-label="Equation-Block"> <p>Найти разложение дроби $\frac{x}{(x^2-1)(x-2)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+1} + \frac{A_3}{x-2}$</p> </div>	

1.6. Неопределенный интеграл	Для замечаний
<div data-bbox="443 212 912 293" data-label="Equation-Block"> $A_1 = \frac{x}{(x-2)(x+1)} \Big _{x=1} = \frac{1}{-1 \cdot 2} = -\frac{1}{2}$ </div> <div data-bbox="443 304 975 385" data-label="Equation-Block"> $A_2 = \frac{x}{(x-1)(x-2)} \Big _{x=-1} = \frac{-1}{(-2)(-3)} = -\frac{1}{6}$ </div> <div data-bbox="443 398 705 479" data-label="Equation-Block"> $A_3 = \frac{x}{x^2-1} \Big _{x=2} = \frac{2}{3}$ </div> <div data-bbox="188 481 296 515" data-label="Text"> <p>Отсюда</p> </div> <div data-bbox="411 517 1010 600" data-label="Equation-Block"> $\frac{x}{(x^2-1)(x-2)} = -\frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{6(x+1)} + \frac{2}{3(x-2)}$ </div> <div data-bbox="188 647 1193 721" data-label="Text"> <p>Замечание. Метод вычеркивания снижает трудоемкость вычислений и в более сложных случаях.</p> </div> <div data-bbox="188 759 598 795" data-label="Text"> <p>Разложить правильную дробь</p> </div> <div data-bbox="587 797 834 882" data-label="Equation-Block"> $\frac{3x^4 + 2x^3 + 3x^2 - 1}{(x-2)(x^2+1)^2}$ </div> <div data-bbox="188 887 659 929" data-label="Text"> <p>x^2+1 имеет комплексные корни \Rightarrow</p> </div> <div data-bbox="371 931 1050 1016" data-label="Equation-Block"> $\frac{3x^4 + 2x^3 + 3x^2 - 1}{(x-2)(x^2+1)^2} = \frac{B}{x-2} + \frac{M_1x + N_1}{x^2+1} + \frac{M_2x + N_2}{(x^2+1)^2}$ </div> <div data-bbox="188 1064 1233 1173" data-label="Text"> <p>Метод неопределенных коэффициентов приводит к системе 5-го порядка. Если же B определить методом вычеркивания, то система будет уже только 4-го порядка.</p> </div> <div data-bbox="336 1211 1086 1249" data-label="Section-Header"> <h3>1.6.8. Интегрирование некоторых классов функций</h3> </div> <div data-bbox="376 1285 1046 1323" data-label="Section-Header"> <h4>1.6.8.1. Интегрируемость рациональной дроби</h4> </div> <div data-bbox="188 1359 1201 1509" data-label="Text"> <p>Прежде всего отметим, что всякую неправильную рациональную дробь можно (посредством деления числителя на знаменатель “уголком”) представить в виде суммы алгебраического многочлена и правильной рациональной дроби.</p> </div> <div data-bbox="188 1512 833 1597" data-label="Equation-Block"> <p>Пример. $\frac{x^4 - x^3 + 1}{x^2 + x + 2} = (x^2 - 2x) + \frac{4x + 1}{x^2 + x + 2}$</p> </div> <div data-bbox="188 1597 486 1792" data-label="Equation-Block"> $\begin{array}{r} x^4 - x^3 + 1 \quad \quad x^2 + x + 2 \\ \underline{x^4 + x^3 + 2x^2} \\ -2x^3 - 2x^2 + 1 \\ \underline{-2x^3 - 2x^2 - 4x} \\ 1 + 4x \end{array}$ </div> <div data-bbox="284 1830 470 1863" data-label="Text"> <p>Остаток $1+4x$</p> </div> <div data-bbox="188 1868 1198 1977" data-label="Text"> <p>Интегрировать многочлен мы умеем. В силу теоремы о разложении правильной рациональной дроби с вещественными коэффициентами на простейшие, вопрос сводится к интегрированию простейших дробей:</p> </div>	

1.6. Неопределенный интеграл	Для замечаний
<div data-bbox="319 212 1098 313" data-label="Equation-Block"> $1. \frac{B}{x-b} \quad II. \frac{B}{(x-b)^\beta} \quad III. \frac{Mx+N}{x^2+px+q} \quad IV. \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^\lambda}$ </div> <div data-bbox="185 324 1197 436" data-label="Text"> <p>Здесь $\beta=2,3,\dots$; $\lambda=2,3,\dots$; B, M, N, b, p, q - некоторые вещественные числа, причем трехчлен x^2+px+q не имеет вещественных корней, т.е. $p^2-4q<0$.</p> </div> <div data-bbox="180 436 1023 521" data-label="Equation-Block"> $I. \int \frac{B}{(x-b)} dx = B \int \frac{dt}{t} = B \ln t + c = B \ln x-b + c \quad (t = x-b)$ </div> <div data-bbox="180 528 1008 622" data-label="Equation-Block"> $II. \int \frac{B}{(x-b)^\beta} = B \int \frac{dt}{t^\beta} = -\frac{B}{(\beta-1)} \cdot \frac{1}{t^{\beta-1}} + c = \frac{B}{1-\beta} \cdot \frac{1}{(x-b)^{\beta-1}} + c$ </div> <div data-bbox="180 627 346 663" data-label="Text"> <p>Здесь $t=x-b$</p> </div> <div data-bbox="180 667 687 754" data-label="Equation-Block"> $III. x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)$ </div> <div data-bbox="180 766 1184 860" data-label="Text"> <p>Положим $a = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}} \quad \left(q - \frac{p^2}{4} > 0\right)$. Произведя подстановку $t = \frac{p}{2}$,</p> </div> <div data-bbox="180 873 363 909" data-label="Text"> <p>будем иметь</p> </div> <div data-bbox="180 909 1228 1348" data-label="Equation-Block"> $\begin{aligned} \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} &= \int \frac{Mt + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)}{t^2 + a^2} dt = \frac{M}{2} \int \frac{d(t^2 + a^2)}{t^2 + a^2} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \frac{1}{a} \int \frac{d\left(\frac{t}{a}\right)}{\left(\frac{t}{a}\right)^2 + 1} \\ &= \frac{M}{2} \ln(t^2 + a^2) + \frac{2N - Mp}{2a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + c = \frac{M}{2} \ln(x^2 + px + q) + \\ &\quad + \frac{2N - Mp}{2\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} + c \end{aligned}$ </div> <div data-bbox="180 1350 588 1391" data-label="Text"> <p>IV. Аналогично III получаем</p> </div> <div data-bbox="316 1391 1099 1619" data-label="Equation-Block"> $\begin{aligned} \int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^\lambda} &= \frac{M}{2} \int \frac{d(t^2 + a^2)}{(t^2 + a^2)^\lambda} + \frac{2N - Mp}{2} \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^\lambda} = \\ &= \frac{M}{2(1-\lambda)(t^2 + a^2)^{\lambda-1}} + \frac{2N - Mp}{2} \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^\lambda} \end{aligned}$ </div> <div data-bbox="180 1628 1203 1771" data-label="Text"> <p>Обозначим $K_\lambda = \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^\lambda}$. Установим для этого интеграла рекуррентную формулу</p> </div>	

1.6. Неопределенный интеграл	Для замечаний
$K_{\lambda} = \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^{\lambda}} = \frac{1}{a^2} \int \frac{a^2 dt}{(t^2 + a^2)^{\lambda}} = \frac{1}{a^2} \int \frac{[(t^2 + a^2) - t^2] dt}{(t^2 + a^2)^{\lambda}} =$ $= \frac{1}{a^2} \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^{\lambda-1}} - \frac{1}{2a^2} \int t \frac{2t dt}{(t^2 + a^2)^{\lambda}} = \frac{1}{a^2} K_{\lambda-1} - \frac{1}{2a^2} \int t \frac{d(t^2 + a^2)}{(t^2 + a^2)^{\lambda}}$ <p>Для вычисления последнего интеграла применим формулу интегрирования по частям, полагая в ней $u=t$, $du=dt$</p> $dv = \frac{d(t^2 + a^2)}{(t^2 + a^2)^{\lambda}}, \quad v = -\frac{1}{(\lambda-1)(t^2 + a^2)^{\lambda-1}}$ $K_{\lambda} = \frac{1}{a^2} K_{\lambda-1} + \frac{t}{2a^2(\lambda-1)(t^2 + a^2)^{\lambda-1}} - \frac{1}{2a^2(\lambda-1)} K_{\lambda-1}$ <p>Отсюда</p> $K_{\lambda} = \frac{t}{2a^2(\lambda-1)(t^2 + a^2)^{\lambda-1}} + \frac{2\lambda-3}{a^2(2\lambda-2)} K_{\lambda-1}$ $(\lambda=1) \quad K_1 = \int \frac{dt}{t^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + c$ <p>Используя рекуррентную формулу, вычислим K_2, K_3, ... и т.д.</p> <p>Замечание. На практике K_{λ} чаще вычисляют непосредственно с помощью подстановки $t=a \cdot \operatorname{tg} u$</p> <p>Примеры.</p> <p>1. $\int \frac{x dx}{(x^2-1)(x-2)}$</p> $\frac{x}{(x^2-1)(x-2)} = \frac{-1}{2(x-1)} - \frac{1}{6(x+1)} + \frac{2}{3(x-2)},$ $\int \frac{x dx}{(x^2-1)(x-2)} = -\frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{6} \int \frac{dx}{x+1} + \frac{2}{3} \int \frac{dx}{x-2} =$ $= -\frac{1}{2} \ln x-1 - \frac{1}{6} \ln x+1 + \frac{2}{3} \ln x-2 + C = \ln \left \frac{(x-2)^{2/3}}{(x-1)^{1/2}(x+1)^{1/6}} \right + C$ <p>2. Вычислим $\int \frac{x^6 + 2x^4 + 2x^2 - 1}{x(x^2 + 1)^2} dx$. Согласно общему правилу, выделим целую часть, разделив числитель на знаменатель; получим</p> $\frac{x^6 + 2x^4 + 2x^2 - 1}{x(x^2 + 1)^2} = x + \frac{x^2 - 1}{x(x^2 + 1)^2}.$ <p>Правильную рациональную дробь разложим на простейшие</p> $\frac{x^2 - 1}{x(x^2 + 1)^2} = -\frac{1}{x} + \frac{2x}{(x^2 + 1)^2} + \frac{x}{x^2 + 1}, \text{ отсюда}$	

1.6. Неопределенный интеграл	Для замечаний
$\int \frac{x^6 + 2x^4 + 2x^2 - 1}{x(x^2 + 1)^2} dx = \int x dx - \int \frac{dx}{x} + \int \frac{2x dx}{(x^2 + 1)^2} + \int \frac{x}{x^2 + 1} dx =$ $= \frac{x^2}{2} - \ln x + \int \frac{d(x^2 + 1)}{x^2 + 1} + \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 + 1)}{x^2 + 1} =$ $= \frac{x^2}{2} - \ln x - \frac{1}{x^2 + 1} + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{x^2 + 1} + \ln \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{ x } + C$ <p>1.6.8.2. Интегрирование некоторых иррациональностей</p> <p>1.6.8.2.1. Рациональные функции от нескольких аргументов</p> <p>Определение 1. Многочленом степени n от двух аргументов x и y называется выражение вида</p> $P_n(x, y) = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + \dots + a_{n0}x^n + \dots + a_{0n}y^n,$ <p>в котором через $a_{00}, a_{10}, \dots, a_{n0}, \dots, a_{0n}$ обозначены постоянные вещественные числа такие, что среди чисел $a_{n0}, a_{(n-1)1}, \dots, a_{0n}$ есть хотя бы одно число, отличное от нуля.</p> <p>Определение 2. Рациональной функцией от двух аргументов x и y называется выражение вида</p> $R(x, y) = \frac{P_n(x, y)}{Q_m(x, y)},$ <p>где $P_n(x, y)$ и $Q_m(x, y)$ - многочлены от двух переменных степени n и m соответственно.</p> <p>Утверждение. Если $R(x, y)$ - рациональная функция от двух аргументов x и y, $R_1(t), R_2(t), R_3(t)$ - три произвольных рациональных функции от одной переменной t, то выражение</p> $R(R_1(t), R_2(t)) \cdot R_3(t)$ <p>представляет собой рациональную функцию от одной переменной.</p> <p>Замечание. В дальнейшем для доказательства интегрируемости в элементарных функциях некоторых выражений мы будем посредством специально подобранной подстановки сводить интеграл от рассматриваемых выражений к интегралу от рациональной дроби.</p> <p>1.6.8.2.2. Интегрирование выражений вида</p> $R\left(x, \sqrt[m]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}\right),$ <p>где $m \in \mathbb{N}^+$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta = \text{const}$.</p> <p>Положим $t = \sqrt[m]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}$, тогда $t^m = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$, $x = \frac{\delta t^m - \beta}{\alpha - \gamma t^m} \equiv \varphi(t)$.</p> <p>Интеграл перейдет в $\int (R(\varphi), t) \cdot \varphi'(t) dt$.</p>	

1.6. Неопределенный интеграл

Для замечаний

Аналогично можно рассмотреть рациональные функции нескольких переменных и интегралы вида

$$\int R \left(x, \left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} \right)^r, \left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} \right)^s, \dots \right) dx,$$

где все показатели r, s, \dots рациональны; надо лишь привести эти показатели к общему знаменателю m , чтобы под знаком интеграла получить рациональную функцию от x и радикала $\sqrt[m]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}$.

Пример. $\int \frac{\sqrt{x+1} + 2}{(x+1)^2 - \sqrt{x+1}} dx.$

Здесь дробно-линейная функция $\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$, в частности, свелась просто к линейной функции $x+1$. Полагаем $t = \sqrt{x+1}$, $x = t^2 - 1$, тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x+1} + 2}{(x+1)^2 - \sqrt{x+1}} dx &= 2 \int \frac{(t+2)tdt}{t^4 - t} = 2 \int \frac{t+2}{t^3 - 1} dt = \\ &= \int \left(\frac{2}{t-1} - \frac{2t+2}{t^2+t+1} \right) dt = \ln \frac{(t-1)^2}{t^2+t+1} - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C \end{aligned}$$

где остается лишь подставить $t = \sqrt{x+1}$.

а) $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ Этот интеграл легко сводится к табличному, если выделить в трехчлене $ax^2 + bx + c$ полный квадрат.

Пример $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}}$

$$x^2 + 2x + 5 = (x+1)^2 + 4$$

Отсюда,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}} = \int \frac{d(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2 + 4}} = \ln \left| x+1 + \sqrt{x^2 + 2x + 5} \right| + C$$

б) $\int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$. В числителе дроби необходимо выделить производную квадратного трехчлена.

$$\begin{aligned} \int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx &= \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax + b) + B - \frac{Ab}{2a}}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = \\ &= \frac{A}{2a} \int \frac{d(ax^2 + bx + c)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} + \left(B - \frac{Ab}{2a} \right) \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} \end{aligned}$$

Пример

$$\begin{aligned}
\int \frac{5x-3}{\sqrt{2x^2+8x+1}} dx &= \int \frac{\frac{5}{4}(4x+8)-13}{\sqrt{2x^2+8x+1}} dx = \\
&= \frac{5}{4} \int \frac{4x+8}{\sqrt{2x^2+8x+1}} dx - 13 \int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+8x+1}} = \\
&= \frac{5}{2} \sqrt{2x^2+8x+1} - \frac{13}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+\frac{1}{2}}} = \\
&= \frac{5}{2} \sqrt{2x^2+8x+1} - \frac{13}{\sqrt{2}} \ln \left| x+2 + \sqrt{x^2+4x+\frac{1}{2}} \right| + C
\end{aligned}$$

1.6.8.2.3. Тригонометрические и гиперболические подстановки

В интегралах вида $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx$ можно выделить полный квадрат в трехчлене ax^2+bx+c и свести их линейной заменой к интегралам вида

$$\int R(t, \sqrt{1-t^2}) dt, \quad \int R(t, \sqrt{1+t^2}) dt, \quad \int R(t, \sqrt{t^2-1}) dt.$$

Для вычисления этих интегралов часто оказывается удобным использовать тригонометрические подстановки

$$t = \sin u, \quad t = \cos u, \quad t = \operatorname{tg} u,$$

а также гиперболические подстановки

$$t = \operatorname{sh} u, \quad t = \operatorname{ch} u, \quad t = \operatorname{th} u.$$

Пример

$$J = \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} dx.$$

Положим, $x = \sin t$, тогда $dx = \cos t dt$ и заданный интеграл принимает вид

$$\begin{aligned}
J &= \int \frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin t} \cos t dt = \int \frac{\cos^2 t}{\sin t} dt = \int \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} \sin t dt = \\
&\quad (\cos t > 0) \\
&= - \int \frac{\cos^2 t \operatorname{tg} t}{1-\cos^2 t} = - \int \frac{u^2 du}{1-u^2} = \int \frac{1-u^2}{1-u^2} du - \int \frac{du}{1-u^2} = \\
&\quad u = \cos t \\
&= u - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+u}{1-u} \right| + C = \cos t - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\cos t}{1-\cos t} \right| + C = \\
&= \cos(\arcsin x) - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\cos(\arcsin x)}{1-\cos(\arcsin x)} \right| + C =
\end{aligned}$$

1.6. Неопределенный интеграл	Для замечаний
<div data-bbox="488 215 935 434" data-label="Equation-Block"> $= \sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2} \ln \left \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}} \right + C =$ $= \sqrt{1-x^2} - \ln \left \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} \right + C$ </div> <div data-bbox="284 479 1139 515" data-label="Section-Header"> <p>1.6.8.2.4. Интегрирование биномиальных дифференциалов</p> </div> <div data-bbox="595 555 825 607" data-label="Equation-Block"> $\int x^m (a + bx^n)^p dx$ </div> <div data-bbox="188 618 1220 689" data-label="Text"> <p>где a, b - любые постоянные; m, n и p - рациональные числа. Рационализирующая подстановка существует в трех случаях.</p> </div> <div data-bbox="188 728 343 763" data-label="Text"> <p>1. p - целое</p> </div> <div data-bbox="188 763 1233 862" data-label="Text"> <p>$\int R(x, \sqrt[r]{x}) dx$, где r - наименьшее общее кратное знаменателей рациональных чисел m и n.</p> </div> <div data-bbox="188 862 472 907" data-label="Text"> <p>Подстановка $t = \sqrt[r]{x}$</p> </div> <div data-bbox="188 952 414 1025" data-label="Text"> <p>2. $\frac{m+1}{n}$ - целое.</p> </div> <div data-bbox="188 1037 917 1111" data-label="Text"> <p>Положим $z=x^n$, обозначив $\frac{m+1}{n} - 1 \equiv q$, будем иметь</p> </div> <div data-bbox="381 1122 1098 1196" data-label="Equation-Block"> $\int x^m (a + bx^n)^p dx = \frac{1}{n} \int (a + bz)^p z^q dz \quad (q - \text{целое}).$ </div> <div data-bbox="188 1202 1233 1361" data-label="Text"> <p>Это есть интеграл вида $\int R(z, \sqrt[s]{a + bz}) dz$, где s - знаменатель числа p. Рационализирующая подстановка имеет вид $t = \sqrt[s]{a + bz}$, или для исходного интеграла $t = \sqrt[s]{a + bx^n}$.</p> </div> <div data-bbox="188 1404 820 1478" data-label="Text"> <p>3. $\frac{m+1}{n} + p$ - целое. Сначала положим $z=x^n$</p> </div> <div data-bbox="437 1487 983 1662" data-label="Equation-Block"> $\int x^m (a + bx^n)^p dx = \frac{1}{n} \int (a + bz)^p z^q dz =$ $= \frac{1}{n} \int \left(\frac{a}{z} + b \right)^p z^{p+q} dz = \int R \left(z, \sqrt[s]{\frac{a}{z} + b} \right) dz.$ </div> <div data-bbox="188 1680 1233 1753" data-label="Text"> <p>Здесь $p+q = p + \frac{m+1}{n} - 1$ - целое, поэтому рационализирующая подстановка</p> </div> <div data-bbox="188 1760 1233 1890" data-label="Text"> <p>$t = \sqrt[s]{\frac{a}{z} + b}$, или для исходного интеграла $t = \sqrt[s]{ax^{-n} + b}$, где s - знаменатель числа p.</p> </div>	

1.6. Неопределенный интеграл	Для замечаний
<p>Примеры.</p> <p>1. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int x^{-1/2} \left(1+x^{1/4}\right)^{1/3} dx, \quad m = -\frac{1}{2}, \quad n = \frac{1}{4}, \quad p = \frac{1}{3}$</p> <p>Так как $\frac{m+1}{n} = \frac{-\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{4}} = 2$, то имеем второй случай (знаменатель p равен 3).</p> <p>Положим $t = \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}, \quad x = (t^3-1)^4, \quad dx = 12t^2(t^3-1)^3 dt$, тогда</p> $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx = 12 \int (t^6 - t^3) dt = \frac{3}{7} t^4 (4t^3 - 7) + c = \frac{3}{7} (1+\sqrt[4]{x})^{4/3} (4(1+\sqrt[4]{x}) - 7) + c$ <p>2. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = \int x^0 (1+x^4)^{-1/4} dx.$</p> <p>Здесь $m=0, n=4, p = -\frac{1}{4}$; третий случай интегрируемости, так как</p> $\frac{m+n}{n} + p = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0 - \text{целое}; \quad p = -\frac{1}{4}; \quad \text{знаменатель } p \text{ равен } 4.$ <p>Положим $t = \sqrt[4]{x^{-4}+1} = \frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x} \Rightarrow x = (t^4-1)^{-1/4} \quad dx = -t^3(t^4-1)^{-5/4} dt$</p> $\sqrt[4]{1+x^4} = tx = t(t^4-1)^{-1/4},$ $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = -\int \frac{t^2 dt}{t^4-1} = \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1} \right) dt - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{4} \ln \left \frac{t+1}{t-1} \right - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t + c =$ $= \frac{1}{4} \ln \left \frac{\sqrt[4]{x^{-4}+1}+1}{\sqrt[4]{x^{-4}+1}-1} \right - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \sqrt[4]{x^{-4}+1} + c$ <p>1.6.9. Интегрирование тригонометрических функций</p> <p>1.6.9.1. Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x) dx$, где R - рациональная функция</p> <p>9.1. Такие интегралы приводятся к интегралам от рациональных функций с помощью универсальной тригонометрической подстановки $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. В результате этой подстановки имеем</p> $\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \left(\frac{x}{2} \right)} = \frac{2t}{1+t^2}; \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \left(\frac{x}{2} \right)}{1 + \operatorname{tg}^2 \left(\frac{x}{2} \right)} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ $x = 2 \operatorname{arctg} t; \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$	

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Пример.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{4 \sin x + 3 \cos x + 3} &= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{4 \cdot \frac{2t}{1+t^2} + 3 \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2} + 3} = 2 \int \frac{dt}{2(4t+3)} = \int \frac{dt}{4t+3} = \\ &= \frac{1}{4} \ln|4t+3| + c. \end{aligned}$$

Возвращаясь к старой переменной, получим

$$\int \frac{dx}{4 \sin x + 3 \cos x + 3} = -\frac{1}{4} \ln \left| 4 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 3 \right| + c.$$

Замечание. Универсальная подстановка $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ во многих случаях приводит к сложным вычислениям, так как при ее применении $\sin x$ и $\cos x$ выражаются через t в виде рациональных дробей t^2 .

В некоторых частных случаях нахождение интегралов вида

$\int R(\sin x, \cos x) dx$ может быть упрощено.

1. Если $R(\sin x, \cos x)$ - нечетная функция относительно $\sin x$, т.е. $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то интеграл рационализуется подстановкой $\cos x = t$.

2. Если $R(\sin x, \cos x)$ - нечетная функция относительно $\cos x$, т.е. $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то интеграл рационализуется с помощью подстановки $\sin x = t$.

3. Если $R(\sin x, \cos x)$ - четная функция относительно $\sin x$ и $\cos x$, т.е. если $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то следует применить подстановку $\operatorname{tg} x = t$.

Примеры.

$$1. \int \frac{(\sin x - \sin^3 x)}{\cos 2x} dx = \int \frac{(\sin x - \sin^3 x)}{\cos^2 x - \sin^2 x} dx$$

Так как подынтегральная функция нечетна относительно $\sin x$, то полагаем $\cos x = t$. Отсюда $\sin^2 x = 1 - t^2$, $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 2t^2 - 1$, $dt = -\sin x dx$.

Таким образом,

$$\begin{aligned} \int \frac{(\sin x - \sin^3 x)}{\cos 2x} dx &= -\int \frac{\cos^2 x d \cos x}{2 \cos^2 x - 1} = \int \frac{t^2 dt}{2t^2 - 1} = -\frac{1}{2} \int dt - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{2t^2 - 1} = \\ &= \frac{t}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{d(t\sqrt{2})}{(\sqrt{2}t)^2 - 1} = \frac{t}{2} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{t\sqrt{2} - 1}{t\sqrt{2} + 1} \right| + c. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\int \frac{\sin x - \sin^3 x}{\cos 2x} dx = \frac{1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{8} \ln \left| \frac{\sqrt{2} \cos x - 1}{\sqrt{2} \cos x + 1} \right| + c.$$

$$2. \int \frac{\cos x - \cos^3 x}{\cos 2x} dx.$$

Здесь подынтегральная функция является нечетной относительно косинуса. Поэтому применяем подстановку $\sin x = t$, тогда $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - t^2$, $\cos x dx = dt$.

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int \frac{(\cos x + \cos^3 x)}{\cos 2x} dx &= \int \frac{(1 + \cos^2 x) \cos x}{1 - 2 \sin^2 x} dx = \int \frac{(2 - t^2)}{1 - 2t^2} dt = \int \frac{t^2 - 2}{2t^2 - 1} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2t^2 - 4}{2t^2 - 1} dt = \frac{1}{2} \int dt - \frac{3}{2} \int \frac{dt}{2t^2 - 1} = \frac{t}{2} - \frac{3}{2\sqrt{2}} \int \frac{d(\sqrt{2}t)}{(\sqrt{2}t)^2 - 1} = \\ &= \frac{t}{2} - \frac{3}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2}t - 1}{\sqrt{2}t + 1} \right| + c \end{aligned}$$

Окончательно получим:

$$\int \frac{\cos x - \cos^3 x}{\cos 2x} dt = \frac{1}{2} \sin x - \frac{3\sqrt{2}}{8} \ln \left| \frac{\sqrt{2} \sin x - 1}{\sqrt{2} \sin x + 1} \right| + c.$$

Заметим, что в этом случае интеграл всегда может быть записан в виде

$$\int R(\sin x, \cos^2 x) \cos x dx.$$

$$3. \int \frac{dx}{\sin^2 x + 2 \sin x \cdot \cos x - 3 \cos^2 x}.$$

Здесь подынтегральная функция является четной относительно $\sin x$ и $\cos x$, поэтому полагаем $t = \operatorname{tg} x$.

Тогда

$$\begin{aligned} x &= \arctg t, & \sin x &= \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}} = \frac{t}{\sqrt{1 + t^2}} \\ dx &= \frac{dt}{1 + t^2}, & \cos x &= \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin^2 x + 2 \sin x \cdot \cos x - 3 \cos^2 x} &= \int \frac{\frac{dt}{1 + t^2}}{\frac{t^2}{1 + t^2} + \frac{2t}{\sqrt{1 + t^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}} - \frac{3}{1 + t^2}} = \\ &= \int \frac{dt}{t^2 + 2t - 3} = \int \frac{dt}{(t - 1)(t + 3)} = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{t - 1}{t + 3} \right| + c = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\operatorname{tg} x + 3} \right| + c \end{aligned}$$

Замечание. То же преобразование можно сделать проще, если в исходном интеграле числитель и знаменатель разделить на $\cos^2 x$.

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2 \sin x \cdot \cos x - 3 \cos^2 x} = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x - 3} = \int \frac{d \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x - 3}.$$

1.6.9.2. Интегралы вида $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$.

1-й случай. По крайней мере один из показателей m или n нечетное целое, положительное число.

Если n - нечетно, то применяется подстановка $\sin x = t$, если же m - нечетно, то подстановка $\cos x = t$.

Примеры.

1. $\int \sin^4 x \cdot \cos^5 x dx$

Положим $\sin x = t$, $\cos x dx = dt$, тогда

$$\begin{aligned} \int \sin^4 x \cdot \cos^5 x dx &= \int \sin^4 x (1 - \sin^2 x)^2 \cos x dx = \int t^4 (1 - t^2)^2 dt = \\ &= \int t^4 dt - 2 \int t^6 dt + \int t^8 dt = \frac{1}{5} t^5 - \frac{2}{7} t^7 + \frac{1}{9} t^9 + c = \frac{1}{5} \sin^5 x - \frac{2}{7} \sin^7 x + \frac{1}{9} \sin^9 x + c. \end{aligned}$$

2.

$$\int \frac{\sin^3 x dx}{\cos x \sqrt[3]{\cos x}} = \int \sin^3 x \cdot \cos^{-4/3} x dx = \int (1 - \cos^2 x) \cos^{-4/3} x \sin x dx =$$

Положив $\cos x = t$, $-\sin x dx = dt$, получим:

$$\begin{aligned} &= - \int (1 - t^2) t^{-4/3} dt = - \int t^{-4/3} dt + \int t^{2/3} dt = 3t^{-1/3} + \frac{3}{5} t^{5/3} + c = \\ &= \frac{3}{\sqrt[3]{\cos x}} + \frac{3}{5} \cos \cdot \sqrt[3]{\cos^2 x} + c. \end{aligned}$$

2-ой случай. Показатели степеней m и n - четные положительные числа. Здесь нужно преобразовать подынтегральную функцию с помощью формул.

$$\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} (1 - \cos 2x)$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} (1 + \cos 2x)$$

Пример. $\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x dx$.

Здесь

$$\begin{aligned} \sin^2 x \cdot \cos^2 x &= (\sin x \cdot \cos x)^2 = \left(\frac{1}{2} \sin 2x \right)^2 = \\ &= \frac{1}{4} \sin^2 2x = \frac{1}{4} \frac{1 - \cos 4x}{2} = \frac{1}{8} (1 - \cos 4x). \end{aligned}$$

1.6. Неопределенный интеграл	Для замечаний
<p>Отсюда</p> $\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x dx = \frac{1}{8} \int (1 - \cos 4x) dx = \frac{1}{8} \int dx - \frac{1}{8} \int \cos 4x dx =$ $= \frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \sin 4x + C.$ <p>1.6.9.3. Интегралы вида $\int \operatorname{tg}^m x dx$ (или $\int \operatorname{ctg}^m x dx$), где m - целое положительное число</p> <p>При нахождении таких интегралов применяется формула</p> $\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \quad (\operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1),$ <p>с помощью которой последовательно снижается степень тангенса и котангенса.</p> <p>Пример.</p> $\begin{aligned} \int \operatorname{tg}^7 x dx &= \int \operatorname{tg}^5 x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \int \operatorname{tg}^5 x d(\operatorname{tg} x) - \int \operatorname{tg}^5 x dx = \\ &= \frac{\operatorname{tg}^6 x}{6} - \int \operatorname{tg}^3 x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \frac{\operatorname{tg}^6 x}{6} - \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} + \int \operatorname{tg} x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \\ &= \frac{\operatorname{tg}^6 x}{6} - \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} + \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \ln \cos x + C. \end{aligned}$ <p>1.6.9.4. Интегралы вида $\int \sin mx \cdot \cos nx dx$, $\int \cos mx \cdot \cos nx dx$, $\int \sin mx \cdot \sin nx dx$.</p> <p>Используя формулы</p> $\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$ $\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$ $\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)],$ <p>представляем подынтегральную функцию в виде суммы косинусов или синусов.</p> <p>Пример.</p> $\begin{aligned} \int \sin 2x \cdot \cos 5x dx &= \frac{1}{2} \int [\sin 7x + \sin(-3x)] dx = \\ &= \frac{1}{2} \int \sin 7x dx - \frac{1}{2} \int \sin 3x dx = -\frac{1}{14} \cos 7x + \frac{1}{6} \cos 3x + C. \end{aligned}$	

1.7. Определенный интеграл и его геометрические приложения

1.7.1. Интегрируемость функции на сегменте.

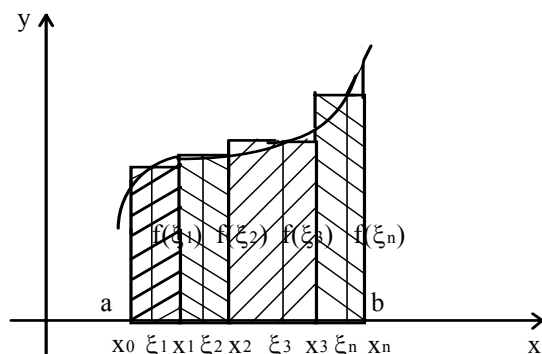


Рис.1

Пусть функция $f(x)$ задана на сегменте $[a, b]$ ($a < b$). Обозначим через T разбиение $[a, b]$ при помощи не совпадающих друг с другом точек $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ на n **частичных** сегментов $[x_0, x_1] \dots [x_{n-1}, x_n]$. Точки x_0, x_1, \dots, x_n называются точками разбиения T . Пусть ξ_i - произвольная точка частичного сегмента $[x_{i-1}, x_i]$. Разность $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ будем называть длиной частичного сегмента $[x_{i-1}, x_i]$.

Определение 1. Число $I\{x_i, \xi_i\}$, где

$$I\{x_i, \xi_i\} = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$$

называется интегральной суммой функции $f(x)$, соответствующей данному разбиению T сегмента $[a, b]$ и данному выбору промежуточных точек ξ_i на частичных сегментах $[x_{i-1}, x_i]$.

Обозначим $\Delta = \max_i \Delta x_i$ ($i = \overline{1, n}$) - диаметр разбиения T сегмента $[a, b]$.

Геометрический смысл интегральной суммы $I\{x_i, \xi_i\}$. Рассмотрим криволинейную трапецию - фигуру, ограниченную графиком функции $f(x)$ (будем считать ее положительной и непрерывной), двумя ординатами, проведенными в точках a и b оси абсцисс и осью абсцисс.

Интегральная сумма $I\{x_i, \xi_i\}$ - площадь ступенчатой фигуры (рис.1)

Определение 2. Число I называется пределом интегральных сумм $I\{x_i, \xi_i\}$ при $\Delta \rightarrow 0$, если для $\forall \varepsilon > 0$ можно указать такое положительное число $\delta = \delta(\varepsilon)$, что для любого разбиения T сегмента $[a, b]$, максимальная длина Δ частичных сегментов которого $< \delta$, независимо от выбора точек ξ_i на сегментах $[x_{i-1}, x_i]$ выполнено неравенство

$$|I\{x_i, \xi_i\} - I| < \varepsilon$$

Если интегральная сумма $I\{x_i, \xi_i\}$ при $\Delta \rightarrow 0$ имеет пределом число I , то будем записывать это так $I = \lim_{\Delta \rightarrow 0} I\{x_i, \xi_i\}$.

Определение 3. Функция $f(x)$ называется интегрируемой по Риману на $[a, b]$, если существует конечный предел I интегральных сумм этой функ-

ции при $\Delta \rightarrow 0$. Указанный предел I называется определенным интегралом функции $f(x)$ по $[a, b]$ и обозначается так:

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

Из рисунка видно, что определенный интеграл численно равен площади криволинейной трапеции, определяемой графиком функции $f(x)$ на $[a, b]$. Справедлива следующая **теорема**. Неограниченная на $[a, b]$ функция $f(x)$ не интегрируема на этом сегменте.

Доказательство: Пусть функция $f(x)$ неограничена на $[a, b]$, тогда она неограничена на некотором частичном сегменте $[x_{k-1}, x_k]$ любого данного разбиения T сегмента $[a, b]$. Тогда слагаемое $f(\xi_k) \Delta x_k$ интегральной суммы $I\{x_i, \xi_i\}$, отвечающее этому разбиению T за счет выбора т. ξ_k может быть сделано как угодно большим по абсолютной величине, т.е. интегральные суммы $I\{x_i, \xi_i\}$ отвечающие любому разбиению T , не ограничены и поэтому не существует конечного предела интегральных сумм. Итак, будем рассматривать лишь ограниченные на $[a, b]$ функции.

Замечание: Отметим, что вообще говоря, не всякая ограниченная на $[a, b]$ функция является интегрируемой на этом сегменте.

Проверить это положение для функции Дирихле (значения в рациональных точках 1, а в иррациональных - 0). Эта функция не интегрируема на $[a, b]$.

1.7.2. Верхние и нижние суммы и их свойства.

Пусть функция $f(x)$ - ограниченная на $[a, b]$ функция, т.е. $(\exists m, M) (\forall x \in [a, b]): [m \leq f(x) \leq M]$. T - разбиение $[a, b]$ точками $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Обозначим через M_i - точную верхнюю и через m_i - точную нижнюю грани этой функции на $[x_{i-1}, x_i]$.

$$\text{Суммы} \quad S = M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + \dots + M_n \Delta x_n = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$$

$$s = m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \dots + m_n \Delta x_n = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i$$

называются верхней и нижней суммами функции $f(x)$ для данного разбиения T сегмента $[a, b]$.

Заметим, что любая интегральная сумма $I\{x_i, \xi_i\}$ данного разбиения T сегмента $[a, b]$ заключена между верхней и нижней суммами S и s этого разбиения.

Геометрический смысл верхней и нижней сумм. Рассмотрим для простоты положительную и непрерывную функцию $f(x)$ и криволинейную трапецию, определяемую этой функцией.

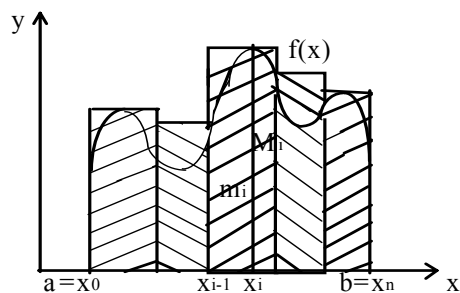


Рис.1

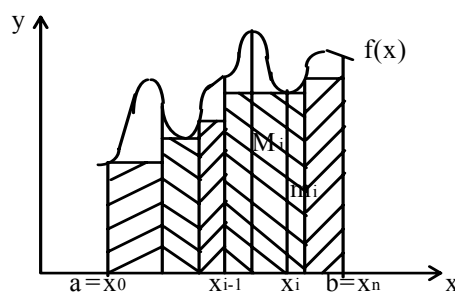


Рис.2

M_i и m_i в случае непрерывности функции представляют собой максимальное и минимальное значения этой функции на частичном сегменте $[x_{i-1}, x_i]$ разбиения T , S и s - площади заштрихованных ступенчатых фигур, изображенных на рисунках 1 и 2 соответственно.

Свойства верхних и нижних сумм подробно изложены в [2] (стр. 321-323), поэтому приведем лишь формулировки теорем и прокомментируем каждую из них с помощью рисунков.

Свойство 1. Для любого фиксированного разбиения T и для любого $\varepsilon > 0$ промежуточные точки ξ_i на сегментах $[x_{i-1}, x_i]$ можно выбрать так, что интегральная сумма $I\{x_i, \xi_i\}$ будет удовлетворять неравенствам $0 \leq S - I\{x_i, \xi_i\} < \varepsilon$. Точки ξ_i можно выбрать и таким образом, что интегральная сумма будет удовлетворять неравенствам $0 \leq I\{x_i, \xi_i\} - s < \varepsilon$.

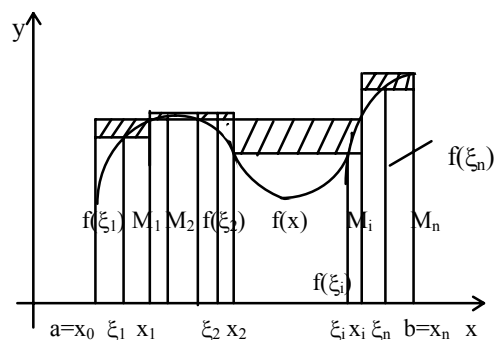


Рис. 3

На рисунке 3 изображена функция $f(x)$, заданная на сегменте $[a, b]$. ξ_i - промежуточные точки на частичных сегментах $[x_{i-1}, x_i]$

$$\begin{aligned} \text{Преобразуем разность } S - I\{x_i, \xi_i\} &= M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + \dots + M_i \Delta x_i + \dots + M_n \Delta x_n - \\ &- f(\xi_1) \Delta x_1 - f(\xi_2) \Delta x_2 - \dots - \\ &- f(\xi_i) \Delta x_i - \dots - f(\xi_n) \Delta x_n = \\ &= [M_1 - f(\xi_1)] \Delta x_1 + [M_2 - f(\xi_2)] \Delta x_2 + \dots + \\ &+ [M_i - f(\xi_i)] \Delta x_i + \dots + [M_n - f(\xi_n)] \Delta x_n. \end{aligned}$$

Здесь S - верхняя сумма. Каждое слагаемое последней суммы представляет собой площадь заштрихованного прямоугольника, поэтому $S - I\{x_i, \xi_i\}$ есть сумма площадей заштрихованных прямоугольников, которая, очевидно, может быть сколь угодно уменьшена за счет выбора точек ξ_i (если промежуточные точки ξ_i выбирать близкими к точкам сегментов $[x_{i-1}, x_i]$, в которых функция $f(x)$ принимает значения M_i).

Для нижних сумм рассуждения проводятся аналогичным образом.

Свойство 2. Если разбиение T' сегмента $[a,b]$ получено путем добавления новых точек к точкам разбиения T этого сегмента, то верхняя сумма S' разбиения T' не больше ($S' \leq S$) верхней суммы S разбиения T , а нижняя сумма s' разбиения T' не меньше ($s \leq s'$) нижней суммы s разбиения T .

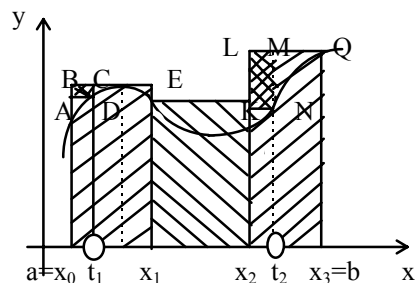


Рис. 4

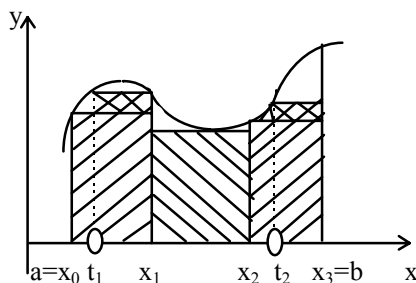


Рис. 5

На рис. 4 точки x_0, x_1, x_2, x_3 - точки разбиения сегмента $[a,b]$, соответствующие разбиению T . Кружками отмечены новые точки t_1, t_2 , которые вместе с точками x_i дают новое разбиение T' сегмента $[a,b]$.

Сегменты $[x_0, x_1]$ и $[x_2, x_3]$ поделились на сегменты $[x_0, t_1]$, $[t_1, x_1]$ и $[x_2, t_2]$, $[t_2, x_3]$, соответственно. Верхняя сумма на сегментах $[x_0, t_1]$ и $[x_2, t_2]$ уменьшилась на величину, равную площадям прямоугольников $ABCD$ и $KLMN$, а на остальных частичных сегментах осталась без изменения, поэтому верхняя сумма S' разбиения T' уменьшилась по сравнению с верхней суммой.

На рис.5 приведена аналогичная картина для нижних сумм.

Свойство 3. Пусть T' и T'' любые два разбиения $[a,b]$. Тогда нижняя сумма одного из этих разбиений не превосходит верхнюю сумму другого. Именно, если s', S' ; s'', S'' соответственно нижние и верхние суммы разбиений T' и T'' , то $s' \leq S''$; $s'' < S'$.

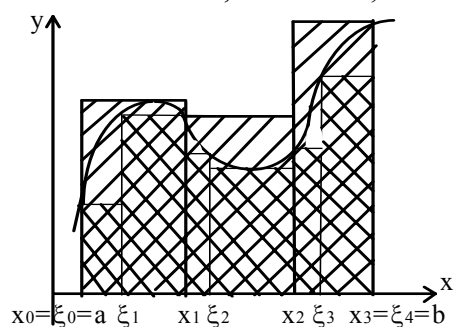


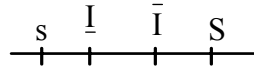
Рис.6

На рис. 6 одинарной штриховкой показана верхняя сумма S' разбиения T' сегмента $[a,b]$ точками $x_0=a < x_1 < x_2 < x_3=b$, а двойной штриховкой - нижняя сумма s'' разбиения T'' сегмента $[a,b]$ точками

$$\xi_0=a < \xi_1 < \xi_2 < \xi_3 < \xi_4=b$$

Свойство 4. Множество $\{S\}$ верхних сумм данной функции $f(x)$ для всевозможных разбиений сегмента $[a,b]$ ограничено снизу. Множество $\{s\}$ нижних сумм ограничено сверху.

Обозначим через \bar{I} точную нижнюю грань множества $\{S\}$ верхних сумм $\bar{I} = \inf\{S\}$, а через \underline{I} точную верхнюю грань множества $\{s\}$ нижних сумм $\underline{I} = \sup\{s\}$. Числа \underline{I} и \bar{I} называются соответственно нижним и верхним интегралами Дарбу от функции $f(x)$. Легко показать, что $\underline{I} \leq \bar{I}$



Свойство 5. Пусть разбиение T' $[a,b]$ получено из разбиения T добавлением к последнему p новых точек, и пусть s', S' ; s, S - соответственно нижние и верхние суммы разбиений T' и T . Тогда для разностей $S-S'$ и $s'-s$ может быть получена оценка, зависящая от максимальной длины Δ частичных сегментов разбиения T , числа p добавленных точек и точных верхней и нижней граней M и m функции $f(x)$ на сегменте $[a,b]$, а именно: $S-S' \leq (M-m) \cdot p \cdot \Delta$ и $s'-s \leq (M-m) \cdot p \cdot \Delta$

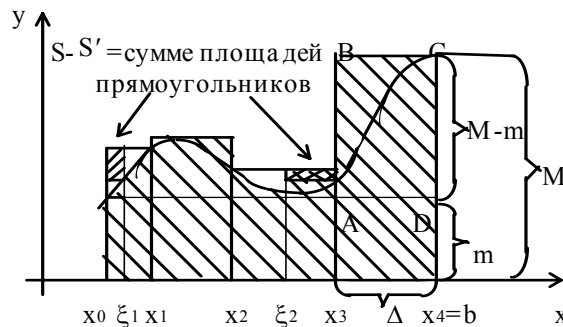


Рис.7

На рис.7 точки $x_0 = a < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 = b$ соответствуют разбиению T сегмента $[a,b]$, а две добавленные точки ξ_1 и ξ_2 образуют вместе с точками x_i : $x_0 = a < \xi_1 < x_1 < x_2 < \xi_2 < x_3 < x_4 = b$ разбиение T' этого сегмента.

Одинарной штриховкой показана верхняя сумма S разбиения T , а двойной штриховкой два прямоугольника, сумма площадей которых дает уменьшение S до величины S' . Если через M и m обозначить точные верхнюю и нижнюю грани функции $f(x)$ на $[a,b]$, а через Δ максимальную длину частичного сегмента $[x_{i-1}, x_i]$ разбиения T , то площадь прямоугольника $ABCD$, равная $(M-m)\Delta x$ будет больше площади каждого из двух прямоугольников, заштрихованных двойной штриховкой, отсюда очевидна оценка: $S-S' \leq (M-m)\Delta \cdot 2$ (здесь 2 - число добавленных точек). Для нижних сумм может быть дана аналогичная интерпретация.

В заключение данной темы приведем без доказательства формулировку теоремы, известной под названием леммы Дарбу, имеющей фундаментальное значение для построения теории в теме “Определенный интеграл”.

Лемма Дарбу. Верхний и нижний интегралы Дарбу \bar{I} и \underline{I} от функции $f(x)$ по сегменту $[a, b]$ являются соответственно пределами верхних и нижних сумм при $\Delta \rightarrow 0$, т.е. $\lim_{\Delta \rightarrow 0} S = \bar{I}$ и $\lim_{\Delta \rightarrow 0} s = \underline{I}$.

Замечание 1. Число \bar{I} , например, называется пределом верхних сумм S при $\Delta \rightarrow 0$, если $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0): [(\forall T) \Delta < \delta \Rightarrow |S - \bar{I}| < \varepsilon]$.

Замечание 2. В случае, когда $\underline{I} = \bar{I} = I$ лемма Дарбу позволяет переходить к пределам в неравенствах вида $s \leq I\{x_i, \xi_i\} \leq S$ при стремлении к нулю диаметра Δ разбиения T сегмента $[a, b]$. При этом $s \rightarrow I$ и $S \rightarrow I$, откуда $I\{x_i, \xi_i\} \rightarrow I$.

1.7.3. Необходимое и достаточное условие интегрируемости функции на сегменте.

Вышеперечисленные свойства верхних и нижних сумм позволяют доказать теорему об интегрируемости функции на сегменте.

Теорема. Для того, чтобы ограниченная на сегменте $[a, b]$ функция $f(x)$ была интегрируемой на этом сегменте, необходимо и достаточно, чтобы $\forall \varepsilon > 0$ нашлось такое разбиение T сегмента $[a, b]$, для которого $S - s \leq \varepsilon$.

Не будем приводить доказательство этой теоремы, отметим лишь, что из неравенства $S - s \leq \varepsilon$ следует равенство $\underline{I} = \bar{I} = I$, что в силу замечания 2 гарантирует существование предела интегральных сумм $I\{x_i, \xi_i\}$, равного I .

Определение. Число $\omega_i = M_i - m_i$, где M_i и m_i - точные верхняя и нижняя грани функции $f(x)$ на $[x_{i-1}, x_i]$ называются колебанием функции $f(x)$ на сегменте $[x_{i-1}, x_i]$. Очевидно, что $\omega_i > 0$, ибо $M_i \geq m_i$.

После введенного определения колебания функции $f(x)$ разность

$$S - s = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i - \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i \geq 0$$

(так как все $\omega_i \geq 0$ и $\Delta x_i > 0$) и последнюю теорему можно сформулировать так:

Для того, чтобы ограниченная на сегменте $[a, b]$ функция $f(x)$ была интегрируема на $[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы для $\forall \varepsilon > 0$ нашлось та-

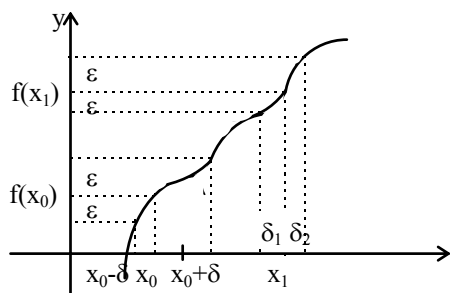
кое разбиение T сегмента, для которого $\sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i \leq \varepsilon$

$$\{f(x) \in B[a, b] \wedge f(x) \in L[a, b]\} \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists T): \left[\sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i \leq \varepsilon \right].$$

1.7.4. Равномерная непрерывность функции на множестве.

Пусть функция $f(x) \in C\{X\}$ (непрерывна на множестве $\{X\}$; $\{X\}$ - множество замкнуто или нет, конечно или бесконечно), т.е. она непрерывна в каждой точке этого промежутка $x_0 \in \{X\}$. Это означает, что

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \{X\}): [|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon]$$



Отметим, что для фиксированного ε число δ зависит не только от ε , но и от точки x_0 .

Существует ли при заданном ε такое δ , которое годилось бы для всех точек x_0 из этого промежутка?

Определение. Функция $f(x)$ называется равномерно непрерывной на $\{X\}$, если для $\forall \varepsilon > 0$ можно указать такое положительное число $\delta(\delta = \delta(\varepsilon))$ зависящее **только** от ε , что для любых двух точек x' и x'' множества $\{X\}$, удовлетворяющих условию $|x'' - x'| < \delta$, выполняется неравенство

$$|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$$

Пример 1. $y = \ln x$ равномерно непрерывна на полупрямой $x \geq 1$. В самом деле, по теореме Лагранжа для любых $x' \geq 1, x'' \geq 1$ (пусть для определенности $x' < x''$).

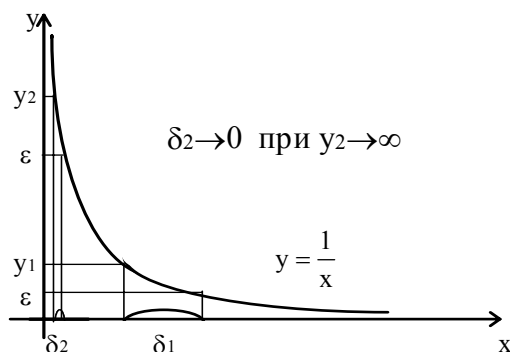
$$|f(x'') - f(x')| = |f'(\xi)| |x'' - x'| = \frac{1}{\xi} |x'' - x'| < |x'' - x'|, \text{ ибо } x' < \xi < x'' \text{ и } \xi > 1$$

Следовательно, по данному $\varepsilon > 0$, если выбрать $0 < \delta \leq \varepsilon$, то из

$$|x'' - x'| < \delta \Rightarrow |f(x'') - f(x')| < \varepsilon$$

Пример 2. Функция $f(x) = 1/x$ на интервале $(0, 1)$ непрерывна, но не является на нем равномерно непрерывной, т.е. для некоторого $\varepsilon > 0$ нельзя выбрать $\delta > 0$ такое, что неравенство $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$ будет выполнено для всех x'' и x' при условии, что $|x'' - x'| < \delta$.

Покажем это. Пусть $\delta > 0$, $x' = \delta$, $x'' = \delta/2$, тогда $|x'' - x'| < \delta/2$, а величина $|f(x'') - f(x')| = 2/\delta - 1/\delta = 1/\delta$ может быть сделана сколь угодно большой.



Для непрерывной на сегменте функции справедлива следующая теорема.

Теорема (Кантора). Непрерывная на сегменте $[a, b]$ функция $f(x)$ равномерно непрерывна на этом сегменте.

Теперь, с очевидностью, вытекает **следствие:** пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, тогда для $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)$ такое, что на каждом, принадлежащем сегменту $[a, b]$ частичном сегменте $[c, d]$, длина $d - c$ которого меньше δ , колебание ω функции $f(x)$ меньше ε . Сформулируем и докажем следующую основную теорему.

Теорема. Непрерывная на сегменте $[a, b]$ функция $f(x)$ интегрируема на этом сегменте.

Пусть дано $(\forall \varepsilon > 0)$. Так как $f(x)$ равномерно непрерывна на сегменте $[a, b]$ (теорема Кантора), то для положительного числа $\varepsilon/(b - a)$ можно указать такое $\delta > 0$, что при разбиении T сегмента $[a, b]$ на частичные сегменты $[x_{i-1}, x_i]$, длина максимального из которых $\Delta < \delta$, колебание ω_i функции $f(x)$ на каждом из них меньше $\varepsilon/(b - a)$ (следствие из теоремы

Кантора). Тогда для таких разбиений T $S - s = \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{b - a} \sum_{i=1}^n \Delta x_i = \varepsilon$ и

выполняется достаточное условие интегрируемости функции $f(x)$.

Замечание. Если $f(x)$ имеет на $[a, b]$ конечное число точек разрыва 1-го рода, то функция $f(x)$ также интегрируема на этом сегменте. При этом, если,

например, $f(x)$ разрывна в одной точке $x = c$, то $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$,

и значение этих интегралов не зависит от значения функции в точке c .

1.7.5. Основные свойства определенного интеграла.

$$1) \int_a^a f(x) dx = 0 \quad (\text{по определению}).$$

$$2) \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx \quad (\text{по определению, при } a < b).$$

$$3) \int_a^b c f(x) dx = c \int_a^b f(x) dx \quad (c = \text{const}).$$

1.7. Определенный интеграл и его геометрические приложения	Для замечаний
<p>4) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$</p> <p>5) $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$ для произвольных c, при условии интегрируемости функции $f(x)$.</p> <p>6) $\int_a^b f(x) dx \geq 0$, если $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$.</p> <p>7) Если функция $f(x) \in C[a, b]$, то свойство 6) можно уточнить при $f(x) \equiv 0$.</p> <p>8) $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$ если $f(x) \geq g(x) \quad \forall x \in [a, b]$.</p> <p>9) $\left \int_a^b f(x) dx \right \leq \int_a^b f(x) dx$.</p> <p>10) $m \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x) g(x) dx \leq M \int_a^b g(x) dx$, если $g(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b], \quad M = \sup_{[a, b]} f(x), m = \inf_{[a, b]} f(x)$.</p> <p>1.7.6. Первая и вторая формулы среднего значения.</p> <p>Докажем формулу, которая называется первой формулой среднего значения.</p> <p>Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на сегменте $[a, b]$, и функция $g(x)$ не меняет знака на этом сегменте. Если $M = \sup_{[a, b]} f(x), m = \inf_{[a, b]} f(x)$, то существует число μ, удовлетворяющее неравенствам $m \leq \mu \leq M$, такое, что справедлива формула</p> $\int_a^b f(x) g(x) dx = \mu \int_a^b g(x) dx. \quad (1)$ <p>Если, в частности, $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, то $\exists \xi \in [a, b]$, что будет выполняться равенство</p> $\int_a^b f(x) g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx. \quad (2)$ <p>Замечание. Формула (1) и (2) называется первой формулой среднего значения.</p> <p>Доказательство. Будем предполагать, что $g(x) \geq 0$ (в случае $g(x) \leq 0$ рассуждения аналогичные).</p> <p>а) Если $\int_a^b g(x) dx = 0$, то в силу свойства 10 определенного интеграла (см. тему 5)</p>	

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0,$$

и тогда в качестве μ можно взять любое число.

в) Пусть $\int_a^b g(x)dx > 0$, тогда из (10)

$$m \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \bigg/ \int_a^b g(x)dx \leq M.$$

Обозначая через $\mu = \int_a^b f(x)g(x)dx \bigg/ \int_a^b g(x)dx$, будем иметь формулу (1).

Формула (1) доказана.

Для доказательства формулы (2) нужно показать, что в случае непрерывной функции $f(x)$ найдется такая точка $\xi \in [a, b]$, что $f(\xi) = \mu$ в формуле (1). Однако это вытекает из того, что непрерывная на сегменте $[a, b]$ функция достигает на этом сегменте как своих точных граней M и m , так и любого промежуточного между ними значения μ ($m \leq \mu \leq M$).

Следствие. В частном случае, когда $g(x) \equiv 1$, формула (1) принимает вид:

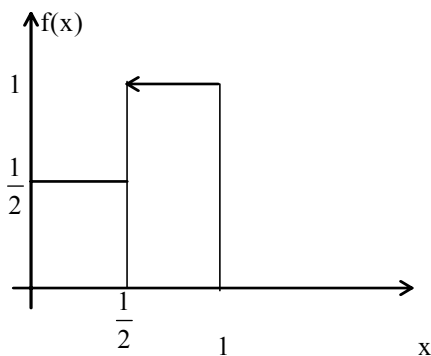
$$\int_a^b f(x)dx = \mu \cdot (b - a),$$

а (в предположении непрерывности функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$) формула (2) превращается в

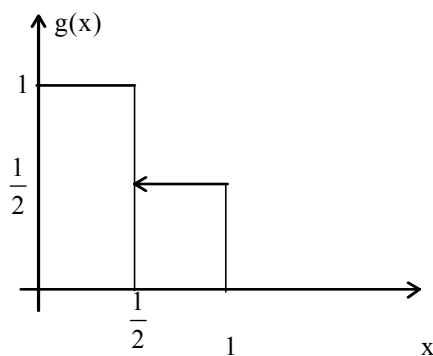
$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi) \cdot (b - a)$$

Замечание. Если $f(x)$ не является непрерывной, то формула (1) вообще говоря, неверна.

Пример.



$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1, & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$



$$g(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{2} dx = \mu \left(\int_0^{1/2} 1 \cdot dx + \int_{1/2}^1 \frac{1}{2} \cdot dx \right) \Rightarrow \frac{1}{2} = \mu \cdot \frac{3}{4}; \quad \mu = \frac{2}{3}.$$

и для $\forall \xi \in [0,1] \quad f(\xi) \neq \mu$.

Сформулируем без доказательства теорему, позволяющую получить формулу, известную под названием второй формулы среднего значения, или формулы Бонне. Эта формула будет неоднократно использоваться в разных разделах математического анализа, в частности, в разделе “Несобственные интегралы”.

Теорема. Если на сегменте $[a,b]$ функция $g(x)$ монотонна, а $f(x)$ интегрируема, то на этом сегменте существует такая точка ξ , что

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a) \int_a^{\xi} f(x)dx + g(b) \int_{\xi}^b f(x)dx$$

- вторая формула среднего значения или формула Бонне.

1.7.7. Интеграл с переменным верхним пределом.

Одним из важных понятий для непрерывных и интегрируемых на сегменте $[a,b]$ функций является понятие интеграла с переменным верхним пределом, используя которое, можно получить основную формулу интегрального исчисления - формулу Ньютона-Лейбница.

Определение. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на любом сегменте $[\alpha, \beta] \in (a,b)$ и пусть c - некоторая фиксированная точка, принадлежащая интервалу (a,b) , тогда, каково бы ни было число $x \in (a,b)$, функция $f(x)$ интегрируема на $[c,x]$, и на интервале (a,b) определена функция

$F(x) = \int_c^x f(t)dt$, которая называется интегралом с переменным верхним пределом.

Теорема. Любая непрерывная на интервале (a,b) функция $f(x)$ имеет на этом интервале первообразную. Одной из первообразных является функция $F(x) = \int_c^x f(t)dt$, где c - любая фиксированная точка интервала (a,b) .

Достаточно доказать, что для $\forall x \in (a,b) \exists \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = f(x)$

(Δx берем таким, чтобы $(x+\Delta x) \in (a,b)$). Рассмотрим разность

$$\begin{aligned} F(x+\Delta x) - F(x) &= \int_c^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_c^x f(t)dt = \int_c^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_c^x f(t)dt = \\ &= \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = f(\xi)\Delta x, \end{aligned}$$

1.7. Определенный интеграл и его геометрические приложения	Для замечаний
<p>где ξ - некоторое число, заключенное между x и $x+\Delta x$ (Здесь было использовано свойство 6 определенного интеграла и первая формула среднего значения для непрерывной на сегменте функции).</p> <p>Так как $f(x)$ непрерывна в точке x, то при $\Delta x \rightarrow 0$ $f(\xi) \rightarrow f(x)$, и поэтому</p> $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = f(x).$ <p>Замечание 1. Аналогично доказывается теорема для непрерывной на сегменте $[a, b]$ функции $f(x)$. В этом случае в качестве c можно взять точку a и</p> $F(x) = \int_a^x f(t) dt.$ <p>Замечание 2. Мы показали, что $\frac{d}{dx} \left(\int_c^x f(t) dt \right) = f(x)$.</p> <p>Замечание 3. Если $f(x)$ интегрируема на любом сегменте, содержащемся в интервале (a, b), то интеграл с переменным верхним пределом представляет собой непрерывную функцию на интервале (a, b) от верхнего предела. В самом деле</p> $\Delta F = F(x + \Delta x) - F(x) = \int_c^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_c^x f(t) dt = \mu \cdot \Delta x,$ <p>где $m \leq \mu \leq M$ $\left(\begin{array}{l} M = \sup_{[a,b]} f(x) \\ m = \inf_{[a,b]} f(x) \end{array} \right)$</p> <p>Отсюда $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta F = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\mu \cdot \Delta x) = 0$, и в силу разностной формы условия непрерывности $F(x)$ есть непрерывная на интервале (a, b) функция.</p> <p>1.7.8. Основная формула интегрального исчисления или формула Ньютона-Лейбница.</p> <p>В разделе “Неопределенный интеграл” было показано, что любые две первообразные функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ отличаются лишь на константу. В предыдущей теме данного пособия была доказана теорема, что интеграл с переменным верхним пределом $F(x) = \int_c^x f(t) dt$ является одной из первообразных функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ ($c, x \in [a, b]$), поэтому любая первообразная $\varphi(x)$ непрерывной на сегменте $[a, b]$ функции $f(x)$ может быть представлена в виде $\varphi(x) = \int_a^x f(t) dt + c$, где c - произвольная постоянная. Используя свойство 1 определенного интеграла, имеем</p>	

$\varphi(a) = \int_a^a f(t)dt + c = c$. Очевидно также, что при $x=b$

$$\varphi(b) = \int_a^b f(t)dt + c = \int_a^b f(x)dx + c, \text{ откуда } \int_a^b f(x)dx = \varphi(b) - c.$$

Подставляя вместо c $\varphi(a)$ в последнее равенство, получим формулу

$$\int_a^b f(x)dx = \varphi(b) - \varphi(a).$$

Для удобства записи разность $\varphi(b) - \varphi(a)$ записывают в форме $\varphi(x)\Big|_a^b$, и

$\int_a^b f(x)dx = \varphi(x)\Big|_a^b$ - основная формула интегрального исчисления или формула Ньютона-Лейбница.

Примеры:

$$1. \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_1^{\sqrt{3}} = \operatorname{arctg} \sqrt{3} - \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$$

$$2. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx = -\frac{1}{2} \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2} \left(\cos 2 \cdot \frac{\pi}{2} - \cos 2 \cdot 0 \right) = -\frac{1}{2} (-1 - 1) = 1$$

$$3. \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{4} \Big|_0^2 = \operatorname{arcsin} \frac{1}{2} - \operatorname{arcsin} 0 = \frac{\pi}{6}$$

$$4. \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx = -\frac{1}{2 \sin^2 x} \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{2}} - \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{6}} \right) = -\frac{1}{2} (1 - 4) = \frac{3}{2}$$

1.7.9. Формулы замены переменной и интегрирования по частям в определенном интеграле.

Теорема. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$. Сегмент $[a, b]$ является множеством значений некоторой функции $x=g(t)$, определенной на сегменте $\alpha \leq t \leq \beta$, причем $g(\alpha)=a$, $g(\beta)=b$.

Пусть также $g'(t)$ непрерывна $\forall t \in [\alpha, \beta]$. Тогда справедлива формула: $\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[g(t)]g'(t)dt$ - формула замены переменной под знаком определенного интеграла.

Доказательство. Пусть $\varphi(x)$ - некоторая первообразная функции $f(x)$, т.е. $\varphi'(x) = f(x)$ и $\int_a^b f(x)dx = \varphi(b) - \varphi(a)$. Так как функции $\varphi(x)$ и $x=g(t)$ дифференцируемы на соответствующих сегментах, то сложная функция φ

$[g(t)]$ дифференцируема на сегменте $[\alpha, \beta]$. Применяя правило дифференцирования сложной функции, получим

$$\frac{d}{dt} \varphi[g(t)] = \varphi'(g(t)) \cdot g'(t), \quad (1)$$

где производная φ' вычисляется по аргументу x : $\varphi'[g(t)] = \varphi'(x)$, где $x=g(t)$. Так как $\varphi'(x) = f'(x)$, то при $x=g(t)$ получим $\varphi'[g(t)] = f[g(t)]$. Подставляя это значение $\varphi'[g(t)]$ в правую часть (1), получим

$\frac{d}{dt} \varphi[g(t)] = f[g(t)]g'(t)$, откуда следует, что $\varphi[g(t)]$ на сегменте $[\alpha, \beta]$ является первообразной для функции $f[g(t)]g'(t)$. Поэтому по формуле Ньютона-Лейбница

$$\int_{\alpha}^{\beta} f[g(t)]g'(t)dt = \varphi[g(\beta)] - \varphi[g(\alpha)],$$

а так как $g(\beta)=b$ и $g(\alpha)=a$, то окончательно получим

$$\int_{\alpha}^{\beta} f[g(t)]g'(t)dt = \varphi(b) - \varphi(a)$$

Пример 1. Рассмотрим $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} dx$. Положим $\sin x = t$, и, следовательно,

$dt = \cos x dx$; так как $t=0$ при $x=0$ и $t=1$ при $x = \frac{\pi}{2}$, то

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} dx = \int_0^1 \frac{dt}{1 + t^2} = \arctg t \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

Пример 2. Вычислить $\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} x\sqrt{1+x^2} dx$. Положим $1+x^2=t$, тогда $dt=2x dx$.

Поскольку $t=4$ при $x = \sqrt{3}$ и $t=9$ при $x = \sqrt{8}$, то

$$\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} x\sqrt{1+x^2} dx = \int_4^9 \frac{\sqrt{t}}{2} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} t^{3/2} \Big|_4^9 = \frac{1}{3} (9^{3/2} - 4^{3/2}) = \frac{19}{3}$$

Теорема. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ на сегменте $[a, b]$ имеют непрерывные производные, то справедлива следующая формула

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)] \Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx,$$

которая называется формулой интегрирования по частям для определенных интегралов.

Доказательство. Поскольку $[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$, то функция $u(x) \cdot v(x)$ является первообразной для функции $[u'(x)v(x) + u(x)v'(x)]$, откуда следует, что $\int_a^b [u'(x)v(x) + u(x)v'(x)]dx = [u(x)v(x)]_a^b$. Используя свойства определенного интеграла, получим

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx.$$

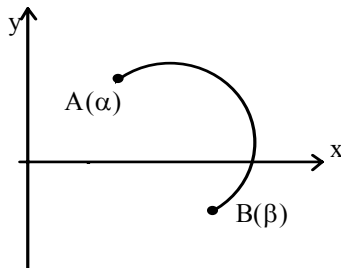
Замечание. Так как $v'(x)dx = dv$ и $u'(x)dx = du$, то полученная формула может быть записана в виде $\int_a^b u dv = (uv)_a^b - \int_a^b v du$.

Пример 1. Вычислить $\int_0^{\pi} x \sin x dx$. Полагая $u=x$, $dv=\sin x dx$, получим $du=dx$, $v = -\cos x$, тогда

$$\int_0^{\pi} x \sin x dx = -x \cos x \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (-\cos x) dx = \pi + \sin x \Big|_0^{\pi} = \pi.$$

1.7.10. Спрямолинейность и длина дуги плоской кривой.

Пусть заданы функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$, непрерывные на сегменте $[\alpha, \beta]$. Множество $\{M\}$ всех точек M , координаты x и y которых определяются уравнениями $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \alpha \leq t \leq \beta$ называется простой кривой, если различным значениям параметра t из сегмента $[\alpha, \beta]$ отвечают различные точки этого множества.



Будем называть точки A и B , отвечающие граничным значениям α и β параметра t граничными точками простой кривой. Простой замкнутой кривой называется кривая L , которая образуется объединением двух простых кривых L_1 и L_2 следующим образом:

1) граничные точки кривой L_1 , совпадают с граничными точками кривой L_2 ; 2) любые не граничные точки кривых L_1 и L_2 различны.

Определение. Пусть $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ непрерывны на $\{t\}$. Уравнения

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (1)$$

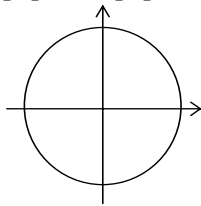
задают параметрически кривую L , если существует такая система сегментов $\{[t_{i-1}, t_i]\}$, разбивающих множество $\{t\}$, что для значений t из каждого данного сегмента этой системы уравнения (1) определяют простую кри-

вую. При этом точки кривой L рассматриваются в определенном порядке в соответствии с возрастанием параметра t , т.е. если M_1 соответствует значению параметра t_1 , а M_2 - t_2 , то M_1 считается предшествующей M_2 , если $t_1 < t_2$. Точки, отвечающие различным значениям параметра, всегда считаются различными.

Пример. Рассмотрим кривую L , задаваемую параметрически уравнениями

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad (2)$$

$0 \leq t \leq 4\pi$ - это не простая кривая, но если взять систему сегментов $[0, \pi]$, $[\pi, 2\pi]$, $[2\pi, 3\pi]$, $[3\pi, 4\pi]$, разбивающих $[0, 4\pi]$, то для значений t из каждого



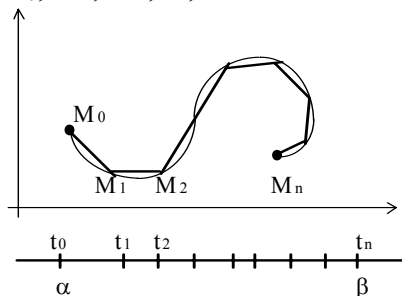
указанного сегмента данной системы уравнения (2) определяют простую кривую (полуокружность).

Кривая L - дважды обходимая окружность.

Итак, пусть кривая L задается параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad \alpha \leq t \leq \beta. \text{ Пусть } T - \text{ произвольное разбиение } [\alpha, \beta] \text{ точками}$$

$\alpha_0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = \beta$. Соответствующие точки кривой L обозначим через $M_0, M_1, M_2, \dots, M_n$



Ломаную $M_0M_1M_2\dots M_n$ будем называть ломаной, вписанной в кривую L и отвечающей данному разбиению T сегмента $[\alpha, \beta]$. Длина l_i звена $M_{i-1}M_i$ этой ломаной равна

$$\begin{aligned} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} &= \\ = \sqrt{[\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})]^2 + [\psi(t_i) - \psi(t_{i-1})]^2} \end{aligned}$$

Длина $\bar{l}(T)$ всей этой ломаной равна

$$\bar{l}(T) = \sum \bar{l}_i = \sum \sqrt{[\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})]^2 + [\psi(t_i) - \psi(t_{i-1})]^2}$$

Определение. Если множество $\{\bar{l}(T)\}$ длин вписанных в кривую L ломаных, отвечающих всевозможным разбиением T $[\alpha, \beta]$ ограничено, то кривая L называется **спрямляемой**. Точная верхняя грань l множества $\{\bar{l}(T)\}$ называется **длиной дуги кривой L** .

Теорема (о достаточных условиях спрямляемости и длине дуги плоской кривой). Если функции $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$ имеют на сегменте $[\alpha, \beta]$ непрерывные производные, то кривая L , определяемая параметрическими урав-

нениями $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} t \in [\alpha, \beta]$, спрямляема, и длина l ее дуги может быть вычислена по формуле

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt \quad (3)$$

Поясним без детального обоснования схему доказательства данной теоремы.

Этап 1. Рассматривается выражение

$\bar{l}(T) = \sum_{i=1}^n \sqrt{[\varphi(t_{i-1}) - \varphi(t_i)]^2 + [\psi(t_{i-1}) - \psi(t_i)]^2}$ длины ломаной, вписанной в кривую L и отвечающей произвольному разбиению T сегмента $[\alpha, \beta]$, и показывается ее ограниченность, т.е. кривая L - спрямляема. Длина кривой L обозначается через l .

Этап 2. Показывается, что $\bar{l}(T)$ сколь угодно мало отличается от величины

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt \text{ при } \Delta \rightarrow 0, \text{ где } \Delta - \text{диаметр разбиения } T \text{ сегмента}$$

$$[\alpha, \beta], \text{ а именно, } |\bar{l}(T) - I| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (4)$$

Этап 3. Показывается, что среди ломаных, длины $\bar{l}(T)$ которых удовлетворяют неравенству (4), **имеются** такие, длины которых мало отличаются от длины l дуги кривой L , а именно, $0 < l - \bar{l}(T) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Отсюда следует, что $|l - I| < \varepsilon$, и в силу произвольности ε

$$l = I = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}$$

1.7.10.1. Вычисление длины дуги плоской кривой при различных способах ее задания.

1) Если кривая L является графиком функции $y=f(x)$ и $f'(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то кривая L спрямляема, и длина l ее дуги вычисляется по формуле

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Доказательство. График функции представляет кривую, определяемую параметрическими уравнениями $x=t, y=f(t)$, $a \leq t \leq b$, и выполнены условия теоремы о достаточных условиях спрямляемости и длине дуги плоской кривой. Полагая $\varphi(t)=t, \psi(t)=f(t)$ и заменяя переменную интегрирования t на x , получим $l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$.

2) Кривая L определяется полярным уравнением $r=r(\theta)$, $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ и $r(\theta)$ имеет на $[\theta_1, \theta_2]$ непрерывную производную, тогда кривая L **спрямляема**, и длина l дуги L может быть найдена по формуле

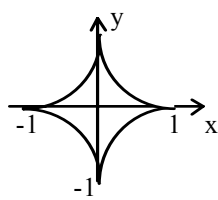
$$l = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{r^2(\theta) + [r'(\theta)]^2} d\theta$$

Формула перехода от полярных координат к декартовым координатам $\begin{cases} x = r(\theta) \cos \theta \\ y = r(\theta) \sin \theta \end{cases}$, следовательно, L определяется параметрическими уравнениями, в которых функции $\varphi = r(\theta) \cos \theta$; $\psi = r(\theta) \sin \theta$ удовлетворяют условиям теоремы, откуда следует, что

$$\begin{aligned} l &= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{(r' \cos \theta - r \sin \theta)^2 + (r' \sin \theta + r \cos \theta)^2} d\theta = \\ &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{r^2(\theta) + [r'(\theta)]^2} d\theta \end{aligned}$$

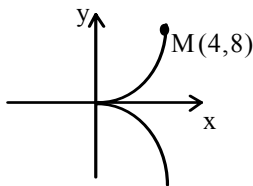
Примеры. 1) Найти длину линии, заданной уравнениями $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$

Перейдем к параметрическим уравнениям $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$



$$\begin{aligned} l &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9 \cos^4 t \sin^2 t + 9 \sin^4 t \cos^2 t} dt = 12 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos t \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} dt = \\ &= 6 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t dt = -3 \cos 2t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 6 \end{aligned}$$

2) Найти длину дуги полукубической параболы $y^2 = x^3$, заключенной между точками $(0,0)$ и $(4,8)$.

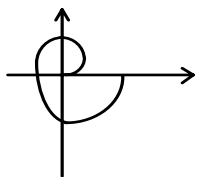


Так как $x \geq 0$, то $y' = \frac{3}{2} \sqrt{x}$ и $\sqrt{1 + (y')^2} = \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}$

Следовательно,

$$l = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} \left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{3/2} \Big|_0^4 = \frac{8}{27} (10\sqrt{10} - 1)$$

3. Найти длину первого витка архимедовой спирали $\rho = a\varphi$



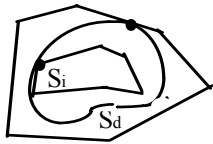
Первый виток архимедовой спирали образуется при изменении полярного угла φ от 0 до 2π

$$\begin{aligned} \text{Поэтому } l &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \varphi^2 + a^2} d\varphi = a \int_0^{2\pi} \sqrt{\varphi^2 + 1} d\varphi = \\ &= a \left[\pi \sqrt{4\pi^2 + 1} + \frac{1}{2} \ln(2\pi + \sqrt{4\pi^2 + 1}) \right]. \end{aligned}$$

1.7.11. Квадратируемость и площадь плоской фигуры.

Определение 1. Плоской фигурой Q будем называть конечную часть плоскости, ограниченную простой замкнутой кривой L . Кривая L в этом случае называется границей фигуры Q .

Будем говорить, что многоугольник **вписан** в фигуру Q , если каждая точка этого многоугольника принадлежит фигуре Q или ее границе.



Если все точки плоской фигуры и ее границы принадлежат некоторому многоугольнику, то говорят, что указанный многоугольник **описан** вокруг фигуры Q . Очевидно, что площадь любого вписанного в фигуру Q многоугольника

S_i не больше площади любого описанного вокруг фигуры Q многоугольника $S_d (S_i \leq S_d)$. Обозначим через $\{S_i\}$ и $\{S_d\}$ числовые множества площадей вписанных в фигуру Q и описанных вокруг плоской фигуры Q многоугольников. Множество $\{S_i\}$ ограничено сверху (площадью любого описанного вокруг Q многоугольника), а множество $\{S_d\}$ ограничено снизу (например, числом нуль). Обозначим через $\underline{P} = \sup\{S_i\}$ и $\bar{P} = \inf\{S_d\}$. Числа \underline{P} и \bar{P} называются нижней и верхней площадью плоской фигуры Q соответственно.

Лемма. Нижняя площадь \underline{P} фигуры Q не больше верхней площади \bar{P} этой фигуры, т.е. $\underline{P} \leq \bar{P}$

$$\begin{array}{ccc} \times & & \times \\ \hline \sup S_i = \underline{P} & & \bar{P} = \inf S_d \end{array}$$

Доказательство: Предположим противное, т.е. $\underline{P} > \bar{P}$ и положим

$$\begin{array}{ccccccc} & & \bar{P} + \varepsilon = \frac{\bar{P} + \underline{P}}{2} & & & & \\ & & \downarrow & & & & \\ \bar{P} & \times & \varepsilon & \times & \varepsilon & \times & \underline{P} \\ & & \bar{P} - \varepsilon = \frac{\bar{P} + \underline{P}}{2} & & & & \\ & & \uparrow & & & & \\ & & S_d & & S_i & & \end{array}$$

$(\underline{P} - \bar{P})/2 = \varepsilon > 0$. Так как $\underline{P} = \sup\{S_i\}$, то найдется такой вписанный в фигуру Q многоугольник, площадь S_i которого

$$S_i > \underline{P} - \varepsilon = (\underline{P} - \bar{P})/2 \quad (1)$$

Так как $\bar{P} = \inf\{S_d\}$, то найдется такой описанный вокруг фигуры Q многоугольник, площадь которого S_d будет меньше числа $\bar{P} + \varepsilon$

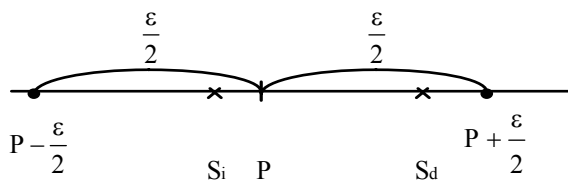
$$S_d < \bar{P} + \varepsilon = (\underline{P} + \bar{P})/2 \quad (2).$$

Из неравенства (1) и (2) следует, что $S_d < S_i$, чего не может быть.

Определение 2. Плоская фигура Q называется квадратуемой, если верхняя площадь \bar{P} этой фигуры совпадает с ее нижней площадью \underline{P} . При этом число $P = \underline{P} = \bar{P}$ называется площадью фигуры Q .

Теорема (о необходимом и достаточном условии квадратуемости плоской фигуры). Для того, чтобы плоская фигура Q была квадратуемой, необходимо и достаточно, чтобы для любого положительного числа ε можно было указать такой описанный вокруг фигуры Q многоугольник и такой вписанный в фигуру Q многоугольник, разность $S_d - S_i$ площадей которых была бы меньше ε , $S_d - S_i < \varepsilon$.

Доказательство. Необходимость. Пусть фигура Q квадратуема, т.е. $\underline{P} = \bar{P} = P$.

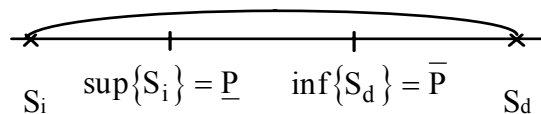


Так как $\underline{P} = \sup\{S_i\}$ и $\bar{P} = \inf\{S_d\}$, то для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такой вписанный в фигуру Q многоугольник, площадь

S_i которого удовлетворяет неравенству $\underline{P} - S_i < \frac{\varepsilon}{2}$ (3) и такой описанный около фигуры Q многоугольник, площадь S_d которого удовлетворяет неравенству $S_d - \bar{P} < \frac{\varepsilon}{2}$ (4).

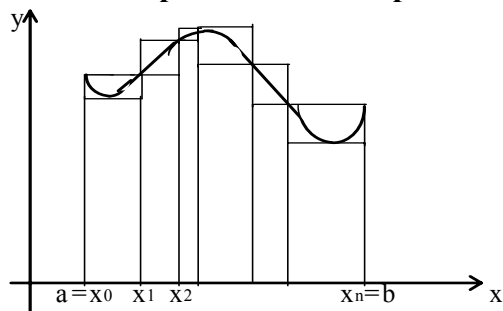
Складывая неравенства (3) и (4) получим $S_d - S_i < \varepsilon$.

Достаточность. Пусть S_d и S_i площади многоугольников, для которых $S_d - S_i < \varepsilon$ и так как $S_i \leq \underline{P} \leq \bar{P} \leq S_d$, то $\bar{P} - \underline{P} < \varepsilon$. Так как ε - произвольное число, то $\bar{P} = \underline{P}$ и фигура квадратуема.



Теорема доказана.

Площадь криволинейной трапеции.



Рассмотрим криволинейную трапецию - фигуру, ограниченную графиком непрерывной и неотрицательной функции $f(x)$, заданной на сегменте $[a, b]$, ординатами, проведенными в точках a и b и отрезком оси Ox между точками a и b . Докажем теорему.

Теорема. Криволинейная трапеция представляет собой квадрируемую фигуру, площадь P которой может быть вычислена по формуле

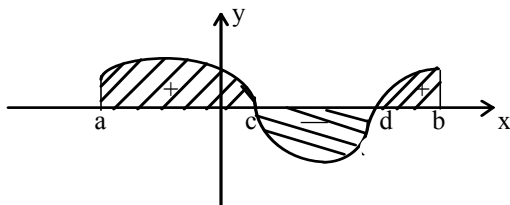
$$P = \int_a^b f(x) dx$$

Доказательство. Так как функция $f(x) \in C[a, b]$, то эта функция интегрируема на этом сегменте, поэтому $(\forall \varepsilon > 0)(\exists T): [S - s < \varepsilon]$, где S и s - верхняя и нижняя суммы разбиения T соответственно.

$S = S_d$ и $s = S_i$, где S_d и S_i - площади ступенчатых многоугольников, причем многоугольник площади S_d содержит криволинейную трапецию, а площади S_i - содержится в ней. Поскольку $S_d - S_i < \varepsilon$, то из теоремы о необходимом и достаточном условии квадрируемости плоской фигуры вытекает, что криволинейная трапеция квадрируема. Поскольку

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} S = \lim_{\Delta \rightarrow 0} s = \int_a^b f(x) dx \text{ и } s \leq p \leq S, \text{ то } p = \int_a^b f(x) dx.$$

Замечание 1. Если функция $f(x)$ непрерывна и знакопеременна на сегменте $[a, b]$, то определенный интеграл $\int_a^b f(x) dx$ будет давать алгебраическую сумму площадей, заключенных между осью Ox , графиком функции $f(x)$ и



ординатами $x=a$, $x=b$. При этом площади над осью Ox будут получаться с положительным знаком, а под осью Ox с отрицательным.

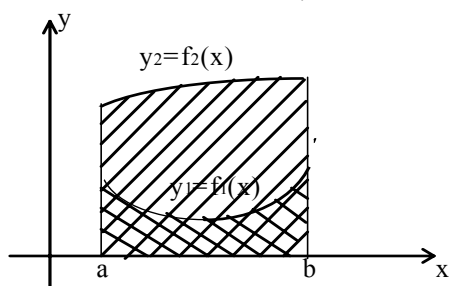
Для того, чтобы получить сумму этих площадей в обычном смысле, нужно

вычислить $\int_a^b |f(x)| dx$. Так, сумма заштрихованных на рисунке площадей

равна

$$\int_a^c f(x) dx - \int_c^d f(x) dx + \int_d^b f(x) dx$$

Замечание 2. Площадь, заключенная между двумя кривыми:



$y_1=f_1(x)$, $y_2=f_2(x)$ и двумя ординатами: $x=a$, $x=b$ в том случае, когда одна кривая лежит над другой, т.е. $f_2(x) \geq f_1(x)$ на сегменте $[a, b]$ выражается интегралом.

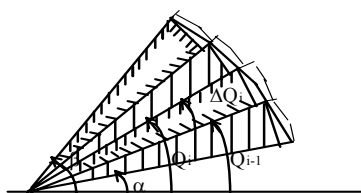
$$P = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx$$

Если обе кривые лежат над осью Ox , то из чертежа видно, что

$$P = \int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_1(x)dx = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx$$

В общем случае, если кривые как угодно расположены относительно оси Ox , можно прийти к разобранному, если передвинуть ось Ox на сколько вниз, чтобы обе кривые оказались над осью Ox . В этом случае к обеим функциям $f_2(x)$ и $f_1(x)$ прибавляется одно и то же постоянное слагаемое, причем разность $f_2(x) - f_1(x)$ остается без изменения.

Площадь плоской фигуры в полярных координатах.



Пусть кривая L задана в полярной системе координат уравнением $r=r(\theta), \theta \in [\alpha, \beta]$. Будем считать, что $r(\theta)$ непрерывна и неотрицательна на сегменте $[\alpha, \beta]$. Криволинейным сектором называется плоская фигура, ограниченная кривой L и двумя лучами, составляющими с полярной осью углы α и β . Сформулируем без

доказательства следующую теорему.

Теорема. Криволинейный сектор представляет собой квадрируемую фигуру, площадь которой может быть вычислена по формуле

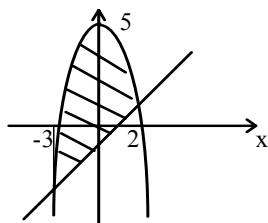
$$P = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\theta) d\theta$$

Примеры.

1. Найти площадь фигуры, заключенной между кривыми $y=5-x^2$ и

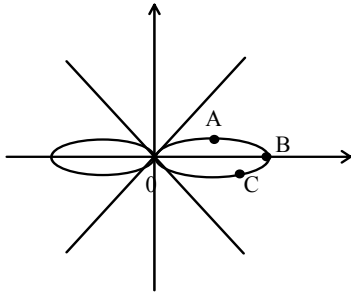
$y=x-1$. Решая совместно уравнения $\begin{cases} y = 5 - x^2 \\ y = x - 1 \end{cases}$, получим

$$\begin{cases} x_1 = -3, \\ y_1 = -4 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = 2 \\ y_2 = 1 \end{cases}. \text{ Следовательно,}$$



$$P = \int_{-3}^2 [(5 - x^2) - (x - 1)] dx = \int_{-3}^2 (6 - x - x^2) dx = \left(6x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-3}^2 = 20\frac{5}{6}$$

2. Найти площадь фигуры, ограниченной одним лепестком кривой $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$ (лемниската).



Правая часть уравнения данной кривой неотрицательна при тех значениях φ , для которых $\cos 2\varphi \geq 0$, поэтому первый лепесток лежит в угле, где $-\frac{\pi}{2} \leq 2\varphi \leq \frac{\pi}{2}$, т.е.

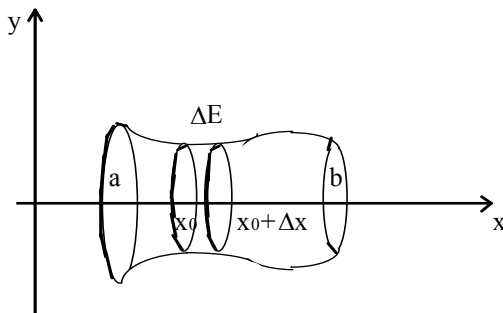
$$-\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}.$$

Следовательно,

$$P_{OABC} = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos 2\varphi d\varphi = \frac{a^2}{2} \frac{1}{2} \sin 2\varphi \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{a^2}{4} (1 + 1) = \frac{a^2}{2}$$

1.7.12. Объем тела вращения.

Вычисление объема тела сводится также к вычислению определенного интеграла. Пусть рассматриваемое тело E получается от вращения данной кривой $y=f(x)$, заданной на сегменте $[a, b]$, вокруг оси Ox . Обозначим через V объем данного тела. Разобьем тело поперечными сечениями, перпендикулярными к оси Ox , начиная от $x=a$ и кончая $x=b$.



Очевидно поперечные сечения - круги радиуса y . Рассмотрим один из элементов ΔE , образованный сечениями с абсциссами x и $x+\Delta x$. Будем считать, что Δx достаточно мало и заменим объем тела ΔE объемом прямого цилиндра, высота которого Δx , а площадь ос-

нования $S(x) = \pi f^2(x)$ и, следовательно, для объема V тела получим приближенное выражение $V \approx \sum S(x) \Delta x$ (суммирование берется по всем элементам, на которые наше тело разбито поперечными сечениями). При переходе к пределу, когда число элементов беспрестанно возрастает и наибольшее из $\Delta x \rightarrow 0$, написанная сумма превращается в определенный интеграл, который дает точное значение объема V ,

$$V = \int_a^b \pi f^2(x) dx.$$

Итак, приходим к следующей теореме.

Теорема. Объем тела, получаемого при вращении вокруг оси Ox кривой $y=f(x)$, заключенный между ординатами $x=a$ и $x=b$, выражается формулой

$$V = \int_a^b \pi y^2 dx = \int_a^b \pi f^2(x) dx$$

Пример. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг осей Ox и Oy фигуры, ограниченной ветвью параболы $x = \sqrt{y}$ и отрезком $1 \leq y \leq 4$ оси координат.

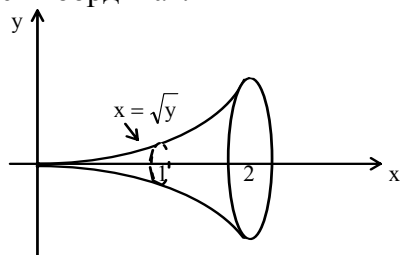


Рис.1

1. Вычислим объем V тела образованного вращением параболы вокруг оси Ox . (см. рис.1)

Так как $x = \sqrt{y}$, то $y = x^2$

$$V = \pi \int_1^2 x^4 dx = \frac{\pi}{5} x^5 \Big|_1^2 = \frac{\pi}{5} (32 - 1) = \frac{31}{5} \pi$$

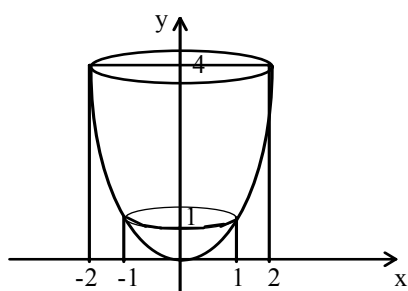


Рис.2

2. Если V_1 - объем тела, образованного вращением параболы вокруг оси Oy (см. рис.2)

$$V_1 = \pi \int_1^4 (\sqrt{y})^2 dy = \pi \frac{y^2}{2} \Big|_1^4 = \frac{\pi}{2} (16 - 1) = \frac{15}{2} \pi$$

<p align="center">1.8. Обобщение понятия определенного интеграла. Несобственные интегралы.</p>	<p align="center">Для замечаний</p>
<p align="center">1.8. Обобщение понятия определенного интеграла. Несобственные интегралы.</p> <p>Введенное ранее понятие определенного интеграла не пригодно для неограниченной функции и для случая, когда подынтегральная функция не ограничена. Рассмотрим некоторые возможные обобщения понятия определенного интеграла.</p> <p align="center">1.8.1. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования</p> <p>Будем предполагать, что функция $f(x)$ непрерывна на полупрямой $a \leq x < +\infty$, тогда она непрерывна на любом отрезке $[a, b]$, где $b > a$ и, следовательно, существует интеграл</p> $\int_a^b f(x) dx.$ <p>Этот интеграл является функцией своего верхнего предела b</p> $F(b) = \int_a^b f(x) dx,$ <p>определенной на промежутке $a \leq b < +\infty$. Если при $b \rightarrow +\infty$ $F(b)$ стремится к конечному пределу, то этот предел обозначают $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ и называют несобственным интегралом по бесконечному промежутку (от a до бесконечности) от функции $f(x)$. Таким образом, по определению</p> $\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx,$ <p>если этот предел существует и конечен. В этом случае принято говорить, что несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ существует или сходится.</p> <p>В противном случае: если предел не существует или предел бесконечен, то символу $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ никакого числового смысла не приписывают и, называя его снова несобственным интегралом, говорят, что этот несобственный интеграл не существует или расходится.</p> <p>Аналогичным образом для функции $f(x)$, непрерывной на полупрямой $-\infty < x \leq b$, определяется несобственный интеграл $\int_{-\infty}^b f(x) dx$.</p> <p>При этом $\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$, если этот предел существует и конечен.</p>	

1.8. Обобщение понятия определенного интеграла. Несобственные интегралы.

Для замечаний

Для функции $f(x)$, непрерывной на всей числовой оси, несобственный интеграл определяется равенством:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx ,$$

где c – любое число, а каждый из интегралов в правой части равенства сходится. При этом несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ называется сходящимся. (Его величина, очевидно, не зависит от числа c). Если хотя бы один

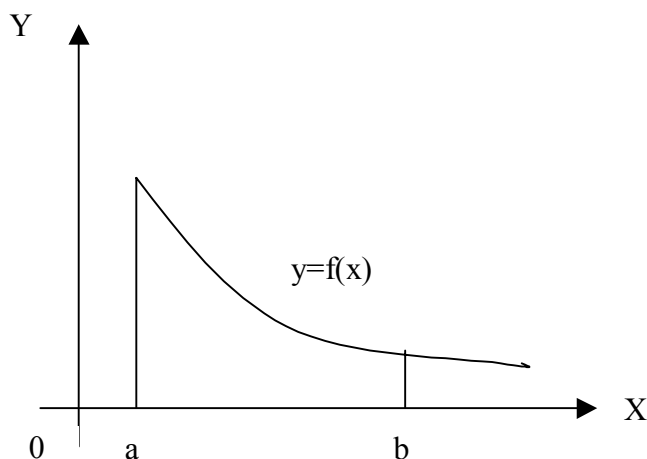
из интегралов $\int_{-\infty}^c f(x)dx$ и $\int_c^{+\infty} f(x)dx$ расходится, то несобственный инте-

грал $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ называется расходящимся.

Из сделанных выше определений сходящихся несобственных интегралов с бесконечными пределами интегрирования следует, что эти интегралы являются не пределами интегральных сумм, а пределами определенных интегралов с переменными верхними или нижними пределами при стремлении этих пределов к бесконечности.

Если функция $f(x)$ непрерывна и неотрицательна на бесконечном промежутке $[a, +\infty)$, то $\int_a^b f(x)dx$ численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной снизу отрезком $[a, b]$ оси OX , сверху кривой $y=f(x)$, слева и справа - прямыми $x=a$ и $x=b$. При возрастании b прямая $x=b$, ограничивающая эту криволинейную трапецию, движется направо.

В случае, если при этом несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, его величину естественно принять за площадь бесконечной полосы, ограниченной снизу осью OX , сверху – графиком функции $y=f(x)$, слева – прямой $x=a$ (рис.).



1.8. Обобщение понятия определенного интеграла. Несобственные интегралы.

Для замечаний

Аналогичные рассуждения имеют место и для интегралов вида:

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx.$$

Несобственные интегралы с бесконечными пределами иногда называют несобственными интегралами первого рода.

Рассмотрим несколько примеров несобственных интегралов первого рода:

Пример 1.

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \arctg x \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow \infty} (\arctg b - \arctg 0) = \frac{\pi}{2}.$$

Пример 2.

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{x dx}{1+x^2} &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{x dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_0^b \frac{d(x^2+1)}{1+x^2} = \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \ln(1+x^2) \Big|_0^b = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} (\ln(1+b^2) - \ln 1) = \infty, \text{ следовательно} \\ \int_0^{\infty} \frac{x dx}{1+x^2} &\text{ - расходится.} \end{aligned}$$

Пример 3.

$$\int_0^{+\infty} \cos x dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \cos x dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \sin x \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow \infty} (\sin b - \sin 0) - \text{этот предел не существует, значит } \int_0^{\infty} \cos x dx \text{ - расходится.}$$

Пример 4.

Исследуем на сходимость интеграл, зависящий от параметра p :

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}.$$

1. Если $p=1$, то имеем:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln x \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} (\ln b - \ln 1) = \infty - \text{интеграл расходится.}$$

2. Если $p \neq 1$, то для любого $b > 0$ имеем:

$$\int_1^b \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p} (b^{1-p} - 1) \quad \text{и} \quad \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \frac{1}{p-1}, & \text{если } p > 1 \\ \infty, & \text{если } p < 1 \end{cases}$$

1.8. Обобщение понятия определенного интеграла. Несобственные интегралы.

Для замечаний

Таким образом, несобственный интеграл $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$ сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$.

Некоторые свойства несобственных интегралов

Приведем без доказательства свойства несобственных интегралов первого рода.

1. Пусть $f(x)$ – непрерывна на полупрямой $[a, +\infty)$, тогда интегралы $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int_{a_1}^{+\infty} f(x)dx$ $a_1 > a$, ведут себя одинаково относительно сходимости.

2. Если $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится и равен S , то интеграл $\int_a^{+\infty} cf(x)dx$, где c – произвольное число, также сходится и равен $c \times S$.

3. Если интегралы $\int_a^{+\infty} f_1(x)dx$ и $\int_a^{+\infty} f_2(x)dx$ сходится и соответственно равны S_1 и S_2 , то интеграл $\int_a^{+\infty} (f_1(x) + f_2(x))dx$ также сходится и равен $S_1 + S_2$.

Критерий Коши

Для сходимости интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $A=A(\varepsilon)$, такое, что для любых R_1 и R_2 , больших A , выполняется неравенство:

$$\left| \int_{R_1}^{R_2} f(x)dx \right| < \varepsilon$$

Необходимое условие сходимости несобственных интегралов

Если интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, то его частные интегралы ограничены, то есть существует такое число $M > 0$, что для всех $b > a$ выполняется неравенство $\left| \int_a^b f(x)dx \right| < M$

Это утверждение непосредственно вытекает из существования конечного предела частных интегралов при $b \rightarrow \infty$.

1.8. Обобщение понятия определенного интеграла. Несобственные интегралы.

Для замечаний

Таким образом, если частные интегралы не ограничены, то несобственный интеграл расходится. Если же частные интегралы ограничены, то о сходимости несобственного интеграла еще ничего сказать нельзя: в одних случаях интеграл может сходиться, а в других – расходиться.

Например, у несобственного интеграла $\int_0^{+\infty} \cos x dx$ частные интегралы $\int_0^b \cos x dx = \sin x \Big|_0^b = \sin b$ ограничены, но они не имеют предела при $b \rightarrow +\infty$ (так как $\sin b$ при $b \rightarrow +\infty$ не имеет предела) и, следовательно, несобственный интеграл $\int_0^{+\infty} \cos x dx$ - расходится.

Несобственные интегралы от неотрицательных функций

Если подынтегральная функция $f(x)$ на полупрямой $[a, +\infty)$ непрерывна и неотрицательна, то ограниченность частных интегралов является необходимым и достаточным условием сходимости интеграла $\int_a^{+\infty} f(x) dx$.

Признак сравнения несобственных интегралов

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на полупрямой $[a, +\infty)$ и удовлетворяют на нем условию $0 \leq f(x) \leq g(x)$, то из сходимости интеграла

$$\int_a^{+\infty} g(x) dx \quad (1)$$

следует сходимость интеграла

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \quad (2),$$

и обратно: из расходимости интеграла (2) следует расходимость интеграла (1).

Следствие:

Если $f(x)$ и $g(x)$ – непрерывные функции на полупрямой $[a, +\infty)$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = R$ (где R – действительное число: $0 < R < \infty$), то интегралы

$\int_0^{+\infty} f(x) dx$ и $\int_0^{+\infty} g(x) dx$ сходятся или расходятся одновременно.

1.8. Обобщение понятия определенного интеграла. Несобственные интегралы.

Для замечаний

Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов

Определение. Пусть $f(x)$ – произвольная непрерывная на полупрямой $[a, +\infty)$ функция, необязательно знакопостоянная. Интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ называется абсолютной сходящимся, если сходится интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$.

Теорема. Если сходится интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$, то сходится и интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

Отметим, что сходимость несобственного интеграла от знакопеременной функции не влечет за собой его абсолютной сходимости, а для интегралов от знакопостоянных функций из сходимости интеграла следует его абсолютная сходимость.

Например, интеграл $\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ ($a > 0$) сходится, а интеграл $\int_a^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$ расходится, то есть интеграл $\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ не является абсолютно сходящимся. (Такие интегралы называют условно сходящимися).

Интеграл $\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$ ($a > 0$) сходится абсолютно, так как $\left| \frac{\sin x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$, и интеграл $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ сходится.

1.8.2. Несобственные интегралы от неограниченных функций

Пусть теперь функция $f(x)$ задана на полуинтервале $[a, b)$. Точку b будем называть особой, если функция $f(x)$ не ограничена на $[a, b)$, но ограничена на любом $[a, b-\alpha] \subset [a, b)$. Будем также предполагать, что на любом таком сегменте функция $f(x)$ интегрируема.

В наших предположениях на $[a, b-\alpha]$ задана функция аргумента α

$$F(\alpha) = \int_a^{b-\alpha} f(x)dx.$$

Исследуем вопрос о правом предельном значении функции $F(x)$ в точке $\alpha=0$, то есть вопрос о существовании предела:

$$\lim_{\alpha \rightarrow +0} \int_a^{b-\alpha} f(x)dx.$$

1.8. Обобщение понятия определенного интеграла. Несобственные интегралы.

Для замечаний

При этом для обозначения этого выражения будем использовать обозначение: $\int_a^b f(x)dx$. В дальнейшем этот символ будем называть несобственным интегралом второго рода от функции $f(x)$ по полуинтервалу $[a;b)$. Если указанный предел существует, интервал будем называть сходящимся, если предел не существует или равен ∞ , то интеграл будем называть расходящимся.

Аналогично для функции $f(x)$, непрерывной на полуинтервале $(a;b]$ и неограниченной вблизи a , вводится понятие несобственного интеграла $\int_a^b f(x)dx$.

Полагают, что $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\alpha \rightarrow +0} \int_{a+\alpha}^b f(x)dx$, если этот предел существует и конечен.

Несобственный интеграл от функции $f(x)$, непрерывной на интервале $(a;b)$ и неограниченной вблизи его концов a и b , определяется равенством:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

где c – любая точка интервала $(a;b)$, если каждый из несобственных интегралов $\int_a^c f(x)dx$ и $\int_c^b f(x)dx$ сходится. При этом несобственный $\int_a^b f(x)dx$ называется сходящимся, его величина не зависит от выбора числа c . Если хотя бы один из интегралов $\int_a^c f(x)dx$ и $\int_c^b f(x)dx$ расходится, то несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ называют расходящимся.

Пусть теперь функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ всюду, кроме некоторой точки c , $a < c < b$, и не ограничена вблизи c .

Несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ определяется равенством

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, если каждый из интегралов в правой части равенства сходится. Если хотя бы один из этих интегралов расходится, то несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ называется расходящимся.

<p align="center">1.8. Обобщение понятия определенного интеграла. Несобственные интегралы.</p>	<p align="center">Для замечаний</p>
<p>Аналогично определяется несобственный интеграл по отрезку $[a;b]$ от функции, непрерывной на нем всюду, кроме конечного числа точек, и неограниченной вблизи этих точек.</p> <p>Рассмотрим несколько примеров несобственных интегралов второго рода.</p> <p>Пример 1.</p> $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}, \text{ где } p > 0.$ <p>Это несобственный интеграл второго рода, так как $y = \frac{1}{x^p}$, где $p > 0$, – неограниченная на $(0;1)$ функция: $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x^p} = +\infty$.</p> <p>При $p \neq 1$: $\int_0^1 \frac{dx}{x^p} = \lim_{\alpha \rightarrow +0} \int_{\alpha}^1 \frac{dx}{x^p} = \lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{1}{1-p} x^{1-p} \Big _{\alpha}^1 = \begin{cases} \infty, & p > 1 \\ \frac{1}{1-p}, & p < 1 \end{cases}$</p> <p>При $p = 1$: $\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\alpha \rightarrow +0} \int_{\alpha}^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\alpha \rightarrow +0} \ln x \Big _{\alpha}^1 = \infty.$</p> <p>Таким образом, несобственный интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ сходится при $p < 1$ и расходится при $p \geq 1$.</p> <p>Пример 2.</p> $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\alpha \rightarrow +0} \int_{\alpha}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\alpha \rightarrow +0} \arcsin x \Big _{\alpha}^1 = \arcsin 1 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2}.$	

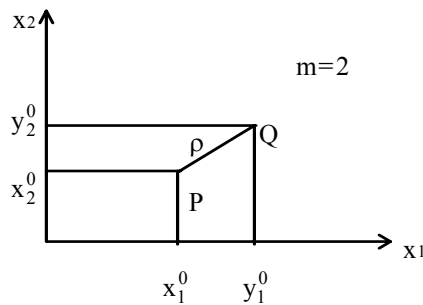
1.9. Функции нескольких переменных

1.9.1. Множества в евклидовом пространстве R^m

Определение 1. Совокупность всех упорядоченных наборов из m действительных чисел (x_1, \dots, x_m) (точек R^m) называется m -мерным евклидовым пространством R^m , если расстояние между любыми двумя точками $P(x_1^0, \dots, x_m^0)$ и $Q(y_1^0, \dots, y_m^0)$ определяется формулой

$$\rho(P, Q) = \sqrt{(x_1^0 - y_1^0)^2 + \dots + (x_m^0 - y_m^0)^2}$$

Пример 1.



$$\rho = \sqrt{(x_1^0 - y_1^0)^2 + (x_2^0 - y_2^0)^2}$$

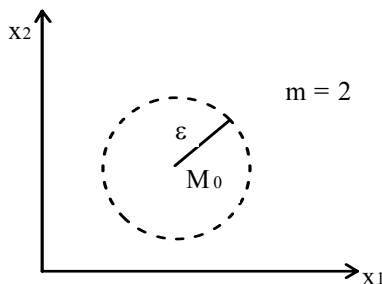
$m=1$

P	ρ	Q
x_1^0		y_1^0

$$\rho = |x_1^0 - y_1^0|$$

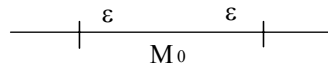
Пример 2. Пусть $M_0(x_1^0, \dots, x_m^0)$, $M(x_1, \dots, x_m)$

$$Q_\varepsilon(M_0) \stackrel{\text{def}}{=} \{M \in R^m \mid \rho(M_0, M) < \varepsilon\} \quad - \quad \varepsilon - \text{окрестность т. } M_0$$



$m=2$

$m=1$



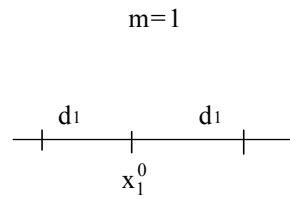
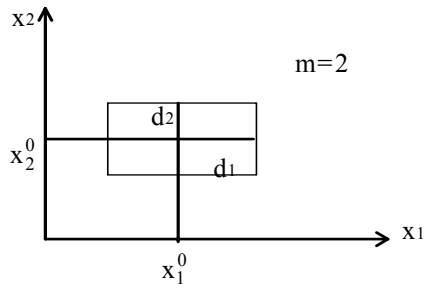
$$Q_\varepsilon(M_0) = \left\{ (x_1, x_2) \in R^2 \mid \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2} < \varepsilon \right\}$$

$$Q_\varepsilon(M_0) = \left\{ x_1 \in R \mid |x_1 - x_1^0| < \varepsilon \right\}$$

Пример 3. Пусть d_1, \dots, d_m - положительные числа

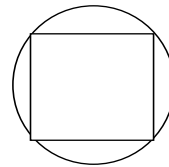
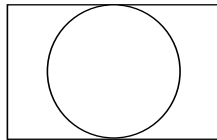
$$P_d(M_0) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ M \in R^m \mid |x_i - x_i^0| < d_i \right\} \quad - \quad \text{прямоугольная окрестность т. } M_0$$

($i = 1, \dots, m$)



Утверждение 1. Любая E - окрестность т. M_0 содержит некоторую прямоугольную окрестность этой точки; любая прямоугольная окрестность точки M_0 , содержит E - окрестность т. M .

Прежде всего заметим, что для $m = 1$ прямоугольные и E - окрестности совпадают. Для $m = 2$ содержание утверждения также очевидно.



Для всех $m > 1$ доказать этот факт можно только аналитически (хотя наглядные представления для двумерного случая несомненно этому помогают).

Доказательство: 1. Для фиксированного $E > 0$ положим $d_1 = d_2 = \dots =$

$$= d_m = \frac{E}{\sqrt{m}}, \text{ тогда}$$

$$\left| x_i - x_i^0 \right| < \frac{E}{\sqrt{m}} (i = 1, \dots, m) \Rightarrow \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + \dots + (x_m - x_m^0)^2} < \underbrace{\sqrt{\frac{E^2}{m} + \dots + \frac{E^2}{m}}}_{m \text{ раз}} = E$$

т.е. точка, принадлежащая такой прямоугольной окрестности т. M_0 , принадлежит и E - окрестности т. M_0 , иными словами E - окрестность т. M_0

содержит прямоугольную окрестность т. M_0 с $d_i = \frac{E}{\sqrt{m}} (i = 1, \dots, m)$. 2. Для

фиксированных d_1, \dots, d_m положим $E = \min \{d_1, \dots, d_m\}$, тогда

$$\sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + \dots + (x_m - x_m^0)^2} < \min \{d_1, \dots, d_m\} \Rightarrow \left| x_1 - x_1^0 \right| < \min \{d_1, \dots, d_m\} \Rightarrow \left| x_1 - x_1^0 \right| < d_1.$$

Аналогично $\left| x_i - x_i^0 \right| < d_i (i = 1, \dots, m)$.

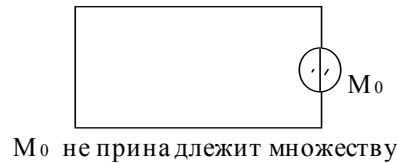
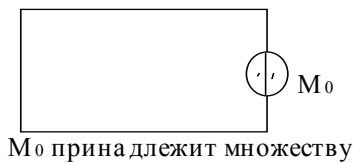
Таким образом, мы получим, что точка, принадлежащая E - окрестности т. M_0 (для $E = \min \{d_1, \dots, d_m\}$) принадлежит заданной прямоуголь-

ной окрестности т. M_0 , т.е. прямоугольная окрестность содержит некоторую (мы указали, какую, например) E - окрестность т. M_0 .
Утверждение 1 доказано.

Определение 2. Точка M_0 множества из R^m называется внутренней точкой этого множества, если существует некоторая E - окрестность т. M_0 , целиком принадлежащая этому множеству



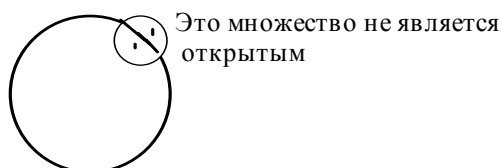
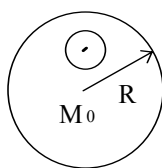
Определение 3. Точка M_0 множества из R^m называется граничной точкой этого множества, если любая E - окрестность т. M_0 содержит как точки принадлежащие множеству, так и не принадлежащие ему.



Определение 4. Множество из R^m называется открытым множеством или областью, если любая точка этого множества - внутренняя.

Примером открытого множества может служить открытый шар

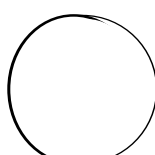
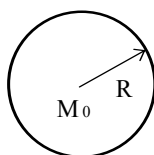
$$Q_R(M_0) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ M \in R^m \mid (x_1 - x_1^0)^2 + \dots + (x_m - x_m^0)^2 < R^2 \right\}.$$



Определение 5. Если каждая граничная точка множества принадлежит этому множеству, то множество называется замкнутым.

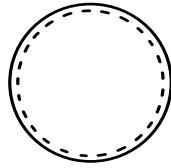
Примером может служить “замкнутый” шар

$$\overline{Q}_R(M_0) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ M \in R^m \mid (x_1 - x_1^0)^2 + \dots + (x_m - x_m^0)^2 \leq R^2 \right\}.$$



Это множество не является ни замкнутым, ни открытым.

Определение 6. Замкнутой областью называется объединение области и множества ее граничных точек.



Определение 7. Непрерывной кривой L в R^m назовем множество точек, координаты которых задаются параметрическими уравнениями

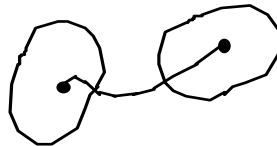
$$x_1 = \varphi_1(t); \dots; x_m = \varphi_m(t), \quad t \in [\alpha, \beta],$$

где $\varphi_i(t) \in [\alpha, \beta]$ ($i = 1, \dots, m$). При $t = \alpha, \beta$ получаем начало и конец кривой (Будем говорить, что начало и конец соединены непрерывной кривой).

Определение 8. Множество из R^m называется связным, если любые две его точки можно соединить непрерывной кривой, все точки которой принадлежат этому множеству.



связное множество



множество не является связным

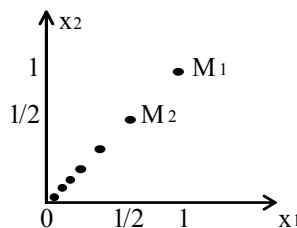
Замечание. Часто в определение области включают требование связности.

Определение 9. Множество называется ограниченным, если оно содержится в некотором шаре.

1.9.2. Последовательности точек из R^m .

Определение 1. Пусть каждому натуральному числу n поставлена в соответствие некоторая точка $M_n \in R^m$ (не обязательно различные точки для разных n). Тогда множество точек $M_1, M_2, \dots, M_n, \dots$, взятых в указанном порядке, называется последовательностью $\{M_n\}$ точек из пространства R^m .

Пример 1. $\left\{ \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right) \right\}$ - последовательность точек из R^2

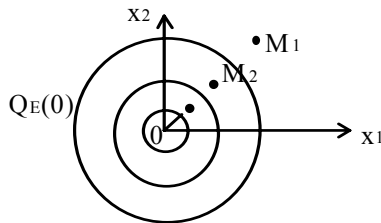


Определение предела последовательности точек из R^m по своей структуре не отличается от определения в одномерном случае:

последовательность $\{M_n\}$ сходится к т. $A \in R^m$, если начиная с некоторого номера, все элементы последовательности попадают в любую наперед заданную окрестность т.А. (Точка А называется пределом последовательности, а последовательность - сходящейся). Используя логическую символику определение предела последовательности можно записать в следующей форме

$$\text{Опр. 2 } \lim_{n \rightarrow \infty} M_n = A \stackrel{\text{def}}{=} (\forall \varepsilon > 0) (\exists N \in N^+) : (\forall n > N \Rightarrow \rho(M_n, A) < \varepsilon)$$

$$\text{Пример 2. } M_n = \left(\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right); \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right) = (0, 0)$$



На этом примере мы видим, что не только последовательность сходится к началу координат, но и каждая координата M_n имеет нулевой предел. В общем случае справедливо

Утв. 1 Для того, чтобы последовательность $\{M_n\} \equiv \left\{ \left(x_1^{(n)}, \dots, x_m^{(n)} \right) \right\}$

сходилась к точке $A(a_1, \dots, a_m)$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_i^{(n)} = a_i \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Доказательство: 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = A \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_i^{(n)} = a_i \quad (i = 1, \dots, m).$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = A \stackrel{\text{def}}{=} (\forall \varepsilon > 0) (\exists N \in N^+) : (\forall n > N \Rightarrow \rho(M_n, A) < \varepsilon)$$

Отсюда при $n > N \Rightarrow \sqrt{(x_1^{(n)} - a_1)^2 + \dots + (x_m^{(n)} - a_m)^2} < \varepsilon$ и, в частности,

$$|x_1^{(n)} - a_1| < \varepsilon, \dots, |x_m^{(n)} - a_m| < \varepsilon \quad \text{а это означает, что последовательности}$$

$\{x_1^{(n)}\}, \dots, \{x_m^{(n)}\}$ координат точек M_n сходится соответственно к a_1, \dots, a_m .

$$2) \left[\lim_{n \rightarrow \infty} x_i^{(n)} = a_i \quad (i = 1, \dots, m) \right] \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} M_n = A$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_i^{(n)} = a_i \stackrel{\text{def}}{=} (\forall \varepsilon > 0) (\exists N_i \in N^+) : (\forall n > N_i \Rightarrow |x_i^{(n)} - a_i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}})$$

$(i=1, \dots, m).$

Положим $N = \max_{1 \leq i \leq m} N_i$, тогда для $n > N$ выполнено неравенство

$$\sqrt{(x_1^{(n)} - a_1)^2 + \dots + (x_m^{(n)} - a_m)^2} < \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{m} + \dots + \frac{\varepsilon^2}{m}} = \varepsilon$$

т.е. $(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N}^+)(\forall n > N \Rightarrow \rho(M_n, A) < \varepsilon)$, и, следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = A$$

Утверждение 1 доказано.

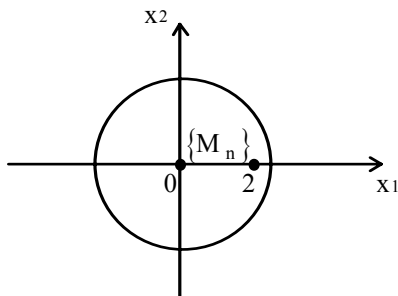
Опр. 3 Последовательность $\{M_n\}$ называется ограниченной, если все ее элементы содержатся в некотором шаре.

Опр. 4 Пусть $n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$ - произвольная строго возрастающая последовательность натуральных чисел, тогда последовательность $M_{n_1}, M_{n_2}, \dots, M_{n_k}, \dots$ называется подпоследовательностью последовательности $\{M_n\}$.

Замечание: Если последовательность имеет предел, то и любая ее подпоследовательность имеет предел.

Теорема 1. Из любой ограниченной последовательности точек из \mathbb{R}^m можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Пример 3. $\{M_n\} = \{(1 + (-1)^n; 0)\}$ $\rho(0, M_n) = \sqrt{(1 + (-1)^n)^2} \leq 2 \Rightarrow \{M_n\}$ ограничена (но не имеет предела).



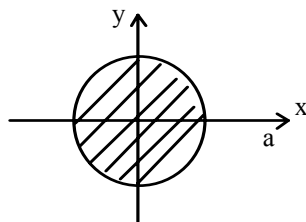
$$\{M_{2k}\} = \{(2; 0)\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (2; 0)$$

$$\{M_{2k+1}\} = \{(0; 0)\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (0; 0)$$

1.9.3. Понятие функции нескольких переменных

Опр.1 Если каждой точке M множества $\{M_n\}$ из \mathbb{R}^m поставлено в соответствие вещественное число u , то говорят, что на этом множестве определена функция $u=f(M)$ (или $u=f(x_1, \dots, x_m)$). Множество $\{M_n\}$ называется областью определения функции.

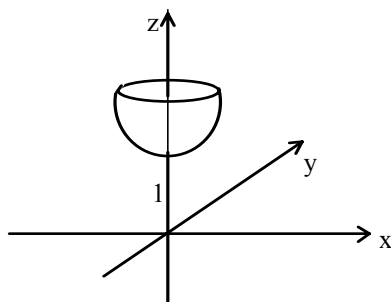
Пример 1. $u = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$. Область определения находим из условия $a^2 - x^2 - y^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq a^2$.

$\{M_n\}$ 

Пример 2. $u = \ln(z - x^2 - y^2)$. Следовательно, область определения расположена над эллиптическим параболоидом $z = x^2 + y^2$.

Опр. 2 Графиком функции $u=f(M)$ называется совокупность точек $(M, f(M))$, $M \in \{M_n\}$. График функции $u=f(M)$ является гиперповерхностью в пространстве R^{m+1} .

Пример 3. $z = x^2 + y^2 + 1$. График функции имеет вид

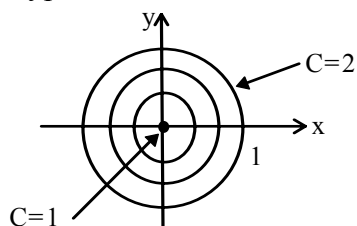


Опр. 3 Множество точек $M(x_1, \dots, x_m)$ пространства R^m , удовлетворяющих уравнению $f(x_1, \dots, x_m) = C$, где $C - \text{const}$, называется множеством уровня функции f .

Линии уровня ($m = 2$) и поверхности ($m = 3$) дают информацию о поведении функции.

Пример 4. $z = x^2 + y^2 + 1$. Линии уровня имеют вид:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 1 &= C \\ x^2 + y^2 &= C - 1 \end{aligned}$$



Пример 5. $u = x^2 + z^2 - y^2$. Поверхности уровня имеют уравнения

$C = 0$ $x^2 + z^2 - y^2 = 0$ - конус

$C > 0$ $x^2 + z^2 - y^2 = C$ - семейство однополостных гиперболоидов

$C < 0$ $x^2 + z^2 - y^2 = C$ - семейство двухполостных гиперболоидов

1.9.4. Предел функции нескольких переменных

Пусть функция $u=f(M)$ определена на множестве $\{M_n\} \subseteq R^m$ и т.А обладает свойством, что в любой ее окрестности есть точки из $\{M_n\}$ (отличные от А, если $A \subseteq \{M_n\}$). Сама точка А может не принадлежать области определения функции $u=f(M)$.

Определение предела функции нескольких переменных по своей структуре не отличается от определения предела функции одной переменной. Основное содержание его: если аргумент М мало отличается от А, то значение функции $f(M)$ мало отличается от b (предела функции). Определения предела функции нескольких переменных по Гейне и Коши имеют вид:

Опр. 1*

$$b = \lim_{M \rightarrow A} f(M) \stackrel{\text{def}}{=} \left[\forall \{M_n\}: (M_n \in \{M\} \wedge M_n \neq A \wedge M_n \rightarrow A) \Rightarrow (f(M_n) \rightarrow b) \right]$$

Число b называется пределом функции $u=f(M)$ при $M \rightarrow A$, если для любой последовательности $\{M_n\}$ точек из $\{M\}$, сходящейся к т.А

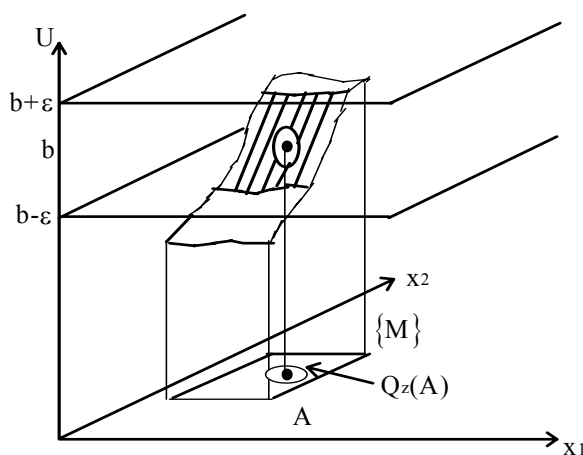
($M_n \neq A$), соответствующая последовательность значений функции $\{f(M_n)\}$ сходится к b.

Опр. 1

$$b = \lim_{M \rightarrow A} f(M) \stackrel{\text{def}}{=} (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0): (\forall M \in \{M\}) [0 < \rho(M, A) < \delta \Rightarrow |f(M) - b| < \varepsilon].$$

Число b называется пределом функции $u=f(M)$ при $M \rightarrow A$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех точек $M \in \{M\}$, удовлетворяющих условию $0 < \rho(M, A) < \delta$, справедливо неравенство $|f(M) - b| < \varepsilon$.

Замечание 1. Иногда пишут $\lim_{\substack{x_1 \rightarrow a_1 \\ \dots \\ x_m \rightarrow a_m}} f(x_1, \dots, x_m) = b$.



На рисунке дана иллюстрация определения предела по Коши для случая $m=2$. Для любого $\varepsilon > 0$ существует такая проколота δ -окрестность т.А, значения функции в которой отличаются от b меньше, чем на ε (другими словами, график функции попадает в ε -полосу плоскости $u=b$).

Пример 1. $u = (x^2 + y^2)^{1/4}$. Проверим, что $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2)^{1/4} = 0$, для этого

$\forall \varepsilon > 0$ надо найти такое $\delta > 0$, что из неравенства

$$0 < \rho(M, 0) < \delta \Rightarrow \left| (x^2 + y^2)^{1/4} - 0 \right| < \varepsilon \quad \text{или}$$

$$0 < (x^2 + y^2)^{1/2} < \delta \Rightarrow (x^2 + y^2)^{1/4} < \varepsilon$$

Очевидно, можно положить $\delta = \varepsilon^2$.

Заметим, что если существует предел функции $u = f(M)$ при $M \rightarrow A$, то существуют пределы $f(M)$, когда M стремится к т.А вдоль любого луча, причем все эти пределы одинаковы и совпадают с пределом функции. Следовательно, если для функции удастся указать, по крайней мере, два направления, вдоль которых пределы функций различны, то предела у функции нет.

Пример 2.

$$u = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4} & \text{при } x^4 + y^4 \neq 0 \\ 0 & \text{при } x = y = 0 \end{cases}$$

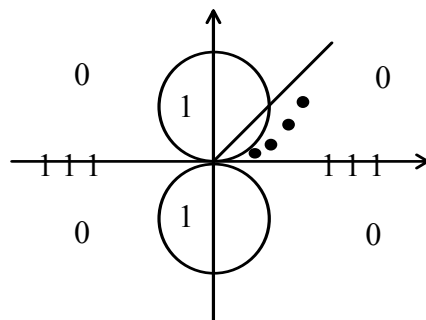
Для этой функции вдоль осей Ox и Oy пределы существуют и равны 0 (на координатных осях функция равна 0), но вдоль оси $y = kx$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0 \\ y = kx}} \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot k^2 y^2}{x^4 + k^4 \cdot x^4} = \frac{k^2}{1 + k^4} \quad \text{зависит от } k.$$

Отсюда получаем, что предела в нуле этой функции нет.

Возникает вопрос, будет ли функция нескольких переменных иметь предел, если все пределы вдоль лучей будут одинаковы? Ответ отрицательный, что видно из следующего примера.

Пример 3. Функция равна 1 на оси Ox и двух кругах радиуса 1, касающихся оси Ox в начале координат, в остальных точках она равна 0 (см. рис.)



Любой луч, кроме Ox , идущий в начало координат, попадает в круг, а там функция равна 1, следовательно, предел вдоль любого луча равен 1. С другой стороны, есть последовательности точек, расположенных между

осью Ox и окружностью $\left[\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^3}\right)\right]$ например, сходящиеся к нулю, вдоль которых функция равна 0, и, следовательно, предел ее вдоль таких последовательностей равен нулю. Отсюда получаем, что предела в нуле функция не имеет.

Аналогично одномерному случаю можно дать определение предела функции при $M \rightarrow \infty$ (при этом $\{M\}$ должно быть не ограниченным).

Определение 2.

$$\lim_{M \rightarrow \infty} f(M) = b \stackrel{\text{def}}{=} (\forall \varepsilon > 0)(\exists \Delta > 0): (\forall M \in \{M\}) \\ [\rho(O, M) > \Delta \Rightarrow |f(M) - b| < \varepsilon].$$

Пример 4. $\lim_{(x,y) \rightarrow \infty} e^{-x^2-y^2} = 0$. Запишем определение предела

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \Delta > 0): [\sqrt{x^2 + y^2} > \Delta \Rightarrow e^{-(x^2+y^2)} < \varepsilon].$$

Из неравенства $e^{-(x^2+y^2)} < \varepsilon$ ($\varepsilon < 1$), получаем

$$e^{-(x^2+y^2)} < \varepsilon \Leftrightarrow -(x^2 + y^2) < \ln \varepsilon \Leftrightarrow x^2 + y^2 > -\ln \varepsilon \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} > \sqrt{\ln \frac{1}{\varepsilon}}.$$

Отсюда очевидно, что можно положить $\Delta = \sqrt{\ln \frac{1}{\varepsilon}}$.

Замечание 2. Для пределов суммы, разности, произведения и частного функций нескольких переменных справедливы те же формулы, что и в одномерном случае.

1.9.5. Непрерывность функции нескольких переменных

Определение 1. Функция $u=f(M)$ называется непрерывной в т. A , если

$$\lim_{M \rightarrow A} f(M) = f(A).$$

Определение 2. Функция $u=f(M)$ называется непрерывной на множестве $\{M\}$, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Условию непрерывности можно придать разностную форму. Пусть

$$\Delta u \equiv f(x_1, \dots, x_m) - f(a_1, \dots, a_m) \equiv f(a_1 + \Delta x_1, \dots, a_m + \Delta x_m) - f(a_1, \dots, a_m),$$

тогда условие непрерывности имеет вид:

$$\lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0, \dots, \Delta x_m \rightarrow 0} \Delta u = 0.$$

(В примере 1 предыдущей темы рассмотрена непрерывная в нуле функция.)

Фиксируем все переменные, кроме одной, проложив, например, $x_2=a_2, \dots, x_m=a_m$, тогда получим функцию одной переменной $f(x_1, a_2, \dots, a_m)$, которая будет непрерывной в т. $x_1=a_1$, если $f(x_1, \dots, x_m)$ непрерывна в

т. А (очевидно). Таким образом, из непрерывности функции нескольких переменных в точке следует ее непрерывность по каждой координате (при фиксированных остальных). Обратное утверждение неверно, что показывает пример 2 предыдущей темы:

$$u = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4} & \text{при } x^4 + y^4 \neq 0 \\ 0 & \text{при } x = y = 0. \end{cases}$$

На координатных осях функция непрерывна (просто тождественно равна 0), но даже не имеет предела в т. (0,0). Непрерывности вдоль лучей также не достаточно для непрерывности в точке функции нескольких переменных. Это показывает пример 3 предыдущей темы.

1.8.9.1. Основные свойства непрерывных функций

1. Арифметические операции над непрерывными функциями приводят к непрерывным функциям (для частного знаменатель отличен от нуля).

2. Непрерывность сложной функции.

Пусть функции $\begin{cases} x_1 = \varphi_1(t_1, \dots, t_k) \\ \dots \\ x_m = \varphi_m(t_1, \dots, t_k) \end{cases}$ заданы на множестве $T \subseteq \mathbb{R}^k$, тогда

каждой точке $(t_1, \dots, t_k) \in T$ ставится в соответствие число u по формулам $u = f(\varphi_1(t_1, \dots, t_k), \dots, \varphi_m(t_1, \dots, t_k))$, т.е. на множестве T определена функция, которую мы назовем сложной функцией.

Пример 1. $u = e^{x+y^2}$; $y=t$; $x=t+s$, тогда сложная функция имеет вид

$$u = e^{t^2+t+s}$$

Теорема. Пусть имеет смысл сложная функция $f(\varphi_1, \dots, \varphi_m)$. Если функции $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ непрерывны в т. $(t_1^0, \dots, t_k^0) \equiv t^{(0)}$, а функция f непрерывна в т. $x^{(0)} \equiv (\varphi_1(t^{(0)}), \dots, \varphi_m(t^{(0)}))$, тогда сложная функция $f(\varphi_1, \dots, \varphi_k)$ непрерывна в т. $t^{(0)}$.

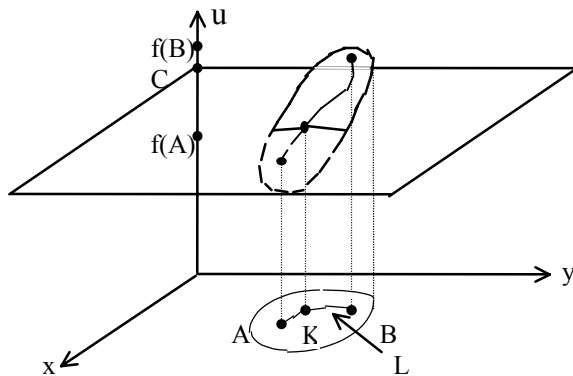
По этой теореме функция e^{t^2+t+s} непрерывна при всех $(t,s) \in \mathbb{R}^2$.

3. Устойчивость знака непрерывной функции.

Теорема. Пусть функция $u=f(M)$ непрерывна в т.А и $f(A) \neq 0$, тогда существует такая δ -окрестность т.А, в которой $f(M)$ имеет тот же знак, что и $f(A)$.

4. Прохождение непрерывной функции через любое промежуточное значение.

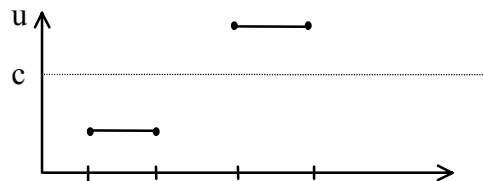
Теорема. Пусть функция $u=f(M)$ непрерывна на **связном** множестве $\{M\}$. Тогда для любых точек $A, B \in \{M\}$ и для любой кривой, L , соединяющей эти точки и лежащей в $\{M\}$, найдется точка на этой кривой, в которой функция принимает любое заданное промежуточное значение между $f(A)$ и $f(B)$.



$$f(A) \leq C \leq f(B)$$

$$K \in L, f(K) = C$$

Условие связности существенно уже в одномерном случае:



5. Теоремы Вейерштрасса.

Теорема 1. Функция, непрерывная на ограниченном замкнутом множестве, ограничена на этом множестве.

Теорема 2. Функция, непрерывная на ограниченном замкнутом множестве, достигает на этом множестве своих точных верхней и нижней граней. Для неограниченных или не замкнутых множеств эти утверждения неверны уже в одномерном случае.

1.9.6. Дифференцируемость функций нескольких переменных

1.9.6.1. Частные производные функции нескольких переменных

Пусть $M(x_1, x_2, \dots, x_m)$ внутренняя точка области определения функции $u=f(x_1, \dots, x_m)$. Пусть Δx_k - приращение k -ой координаты в данной фиксированной т.М, ему соответствует частное приращение функции

$$\Delta x_k u \equiv f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k + \Delta x_k, x_{k+1}, \dots, x_m) - f(x_1, \dots, x_m).$$

Рассмотрим отношение $\frac{\Delta x_k u}{\Delta x_k}$, которое зависит от Δx_k и определено

при всех достаточно малых Δx_k , отличных от нуля.

Определение 1. Если существует $\lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \frac{\Delta x_k u}{\Delta x_k}$, то он называется частной производной функции $u=f(x_1, \dots, x_m)$ в т. $M(x_1, \dots, x_m)$ по аргументу x_k и обозначается одним из символов: $\frac{\partial u}{\partial x_k}$, $\frac{\partial f}{\partial x_k}$, u'_{x_k} , f'_{x_k} . Таким образом,

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = \lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \frac{\Delta x_k u}{\Delta x_k}.$$

Замечание. Так как изменяется только $x_k + \Delta x_k$, т.е. k -я координата аргумента функции f , то частная производная $\frac{\partial u}{\partial x_k}$ является обыкновенной

производной функции f как функции только k -й переменной (при фиксированных остальных переменных). Это позволяет вычислить частные производные по одной из переменных по обычным формулам дифференцирования, если зафиксировать все остальные переменные.

Пример 1. $u = x^2 + 3xy - y$

$\frac{\partial u}{\partial x}$ вычисляем при условии, что $y = \text{const}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 3y$$

$\frac{\partial u}{\partial y}$ вычисляем при условии, что $x = \text{const}$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 3x - 1$$

Пример 2. $u = e^{x^2 - y^2}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{x^2 - y^2} \cdot (+2x) \quad (\text{при фиксированном } y \text{ применима обычная}$$

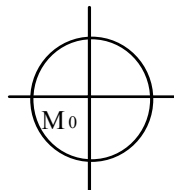
теорема о производной сложной функции)

Аналогично

$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^{x^2 - y^2} \cdot (-2y)$$

Выясним теперь, насколько полную информацию дают частные производные функции в данной точке о поведении функции в окрестности этой точки.

Сразу отметим, что частные производные в т. M_0 могут дать информацию о поведении функции только на прямых, проходящих через т. M_0 и параллельных координатным осям.



Конечно, этой информации совсем не достаточно, чтобы судить о поведении функции в целой окрестности т. M_0 (и, в частности, на других лучах, проходящих через т. M_0).

Пример 3. Функции $u = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4} & \text{при } x^4 + y^4 \neq 0 \\ 0 & \text{при } x = y = 0. \end{cases}$ показывает, что

частные производные ее

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{(x,0)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, 0) - u(x, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{(x + \Delta x)^2 \cdot 0^2}{(x + \Delta x)^4 + 0^4} - \frac{x^2 \cdot 0^2}{x^4 + 0^4}}{\Delta x} = 0$$

(аналогично $\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{(0,y)} \equiv 0$)

существуют и обращаются в нуль не только в т. $(0,0)$, но и всюду на координатных осях, а сама функция не имеет в т. $(0,0)$ предела (см. тему 4). Заметим, что в одномерном случае из существования производной следовала непрерывность функции.

Таким образом, мы приходим к необходимости ввести более сильное условие, чем существование частных производных, чтобы оно было аналогом дифференцируемости функции одной переменной. Это условие должно быть связано с **полным** приращением функции в точке.

1.9.6.2. Дифференцируемость функции нескольких переменных

Определение 2. Функция $u = f(x_1, \dots, x_m)$ называется дифференцируемой в точке $M(x_1, \dots, x_m)$, если ее полное приращение в этой точке может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} f(x_1 + \Delta x_1, \dots, x_m + \Delta x_m) - f(x_1, \dots, x_m) &\equiv \\ &\equiv \Delta u = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \dots + A_m \Delta x_m + \alpha_1 \Delta x_1 + \dots + \alpha_m \Delta x_m, \end{aligned}$$

где A_1, A_2, \dots, A_m - некоторое, не зависящие от $\Delta x_1, \dots, \Delta x_m$, числа, а $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ - бесконечно малые при $\Delta x_1 \rightarrow 0, \dots, \Delta x_m \rightarrow 0$ функции, равные 0 при $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \dots = \Delta x_m = 0$.

Если положить $\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \dots + \Delta x_m^2}$, то условие дифференцируемости может быть записано в виде:

$$\Delta u = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \dots + A_m \Delta x_m + o(\rho) \quad (1)$$

Оба представления эквивалентны и означают, что приращение функции представимо в виде линейной части (по $\Delta x_1, \dots, \Delta x_m$) и членов более высокого порядка (по $\Delta x_1, \dots, \Delta x_m$ или ρ).

Теорема 1. Если функция $u = f(x_1, \dots, x_m)$ дифференцируема в точке $M(x_1, \dots, x_m)$, то в этой точке существуют частные производные по всем аргументам, причем $\frac{\partial u}{\partial x_i} = A_i$, где A_i определяются из условия дифференцируемости.

Доказательство: Положим в условии дифференцируемости все приращения, кроме Δx_k , равными нулю, тогда для частного приращения справедливо представление

$$\Delta x_k u = A_k \Delta x_k + \alpha_k \cdot \Delta x_k$$

Отсюда

$$\frac{\Delta x_k u}{\Delta x_k} = A_k + \alpha_k \text{ и т.к. } \alpha_k \rightarrow 0 \text{ при } \Delta x_k \rightarrow 0, \text{ то}$$

$$\lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \frac{\Delta x_k u}{\Delta x_k} = \frac{\partial u}{\partial x_k} = A_k.$$

Следствие. Условие дифференцируемости функции в данной точке можно записать в виде:

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x_1} \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m} \Delta x_m + o(\rho)$$

Замечание 1. Существование частных производных в точке не достаточно для дифференцируемости функции в этой точке.

Пример 4. $u = \sqrt[5]{xy}$

$$u'_x(0,0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(0+\Delta x,0) - u(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{(0+\Delta x,0) \cdot 0} - \sqrt[5]{0 \cdot 0}}{\Delta x} = 0$$

$$u'_y(0,0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(0,0+\Delta y) - u(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{0 \cdot (0+\Delta y)} - \sqrt[5]{0 \cdot 0}}{\Delta y} = 0$$

Покажем, что эта функция не дифференцируема в т. $(0,0)$. Этого следует ожидать, т.к. порядок приращения функции в нуле равен $\frac{2}{5}$ ($u = \sqrt[5]{\Delta x \cdot \Delta y}$), а в условии дифференцируемости требуется, чтобы порядок приращения был не ниже первого.

Предположим, что приращение функции представляется в виде

$$\Delta u = 0 \cdot \Delta x + 0 \cdot \Delta y + o(\rho)$$

Это означает, что $\sqrt[5]{\Delta x \cdot \Delta y} = o(\rho)$; $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$

т.е. должно выполняться условие

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{\Delta x \cdot \Delta y}}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0$$

Положив $\Delta x = \Delta y$, получим

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0 \\ \Delta x = \Delta y}} \frac{\sqrt[5]{\Delta x \cdot \Delta y}}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{(\Delta x)^2}}{\sqrt{2(\Delta x)^2}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2}} |\Delta x|^{-\frac{3}{5}} = \infty$$

Отсюда следует, что $\sqrt[5]{\Delta x \cdot \Delta y}$ не является $o(\rho)$, т.е. функция не является дифференцируемой в нуле.

Замечание 2. Из дифференцируемости функции в точке следует ее непрерывность в этой точке. Действительно, из представления (1) следует, что $\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \Delta x = 0$.

$$\dots$$

$$\Delta x_m \rightarrow 0$$

Обратное неверно даже в одномерном случае.

В предыдущем примере функция не является дифференцируемой, но является непрерывной. Действительно

$$|\sqrt[5]{\Delta x \cdot \Delta y}| = (|\Delta x| \cdot |\Delta y|)^{1/5} \leq \left(\frac{|\Delta x|^2 + |\Delta y|^2}{2} \right)^{1/5} = \left(\frac{\rho^2}{2} \right)^{1/5} \rightarrow 0$$

при $\rho \rightarrow 0$.

Здесь использовано неравенство $ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$, которое, очевидно, следует из неравенства $(a-b)^2 \geq 0$.

1.9.6.3. Достаточное условие дифференцируемости

Пусть функция $u = f(x_1, \dots, x_m)$ имеет частные производные по всем аргументам в некоторой окрестности точки $M_0(x_1^0, \dots, x_m^0)$, и эти частные производные непрерывны в самой точке M_0 , тогда эта функция дифференцируема в т. M_0 . Принимая утверждение без доказательства, мы только отметим, что здесь частные производные рассматриваются как функции m переменных $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_m)$ в окрестности точки M_0 , причем эти функции непрерывны по совокупности переменных в т. M_0 (и противоречия с примером 3 этой темы нет).

1.9.6.4. Геометрический смысл условия дифференцируемости функции двух переменных $u=f(x,y)$

Определение 1. Касательной плоскостью к графику функции $u=f(x,y)$ в точке $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ называется такая плоскость, что разность ее аппликаты и значения функции $f(x,y)$ является величиной, бесконечно малой по сравнению с ρ при $\rho \rightarrow 0$, где

$$\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

Пусть $u_0 = f(x_0, y_0)$, $u = f(x, y)$, тогда условие дифференцируемости в т. (x_0, y_0) этой функции записывается в виде

$$u - u_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0) + o(\rho),$$

или

$$u = u_0 + A(x - x_0) + B(y - y_0) + o(\rho).$$

Рассмотрим следующую плоскость

$$U - u_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0)$$

(U - откладывается на той же оси Oz , что и u), тогда ее аппликата U определяется равенством

$$U = u_0 + A(x-x_0) + B(y-y_0),$$

и разность

$$U-u = u_0 + A(x-x_0) + B(y-y_0) - (u_0 + A(x-x_0) + B(y-y_0) + 0(\rho)) = 0(\rho).$$

Таким образом, если функция $u=f(x,y)$ дифференцируема в т. (x_0, y_0) , то график этой функции в соответствующей точке $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ имеет касательную плоскость, задаваемую уравнением

$$z - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

Из аналитической геометрии известно, что нормальный вектор к этой касательной плоскости имеет координаты

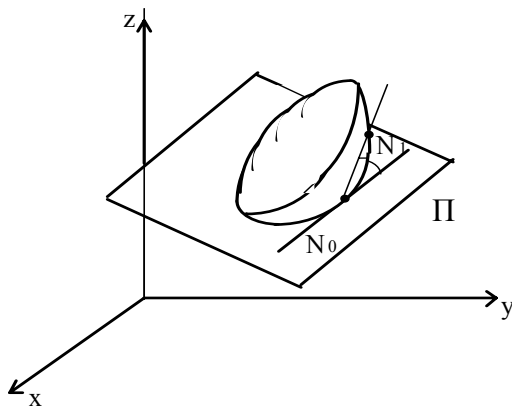
$$\left\{ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0); \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0); -1 \right\}.$$

Уравнения нормали к касательной плоскости в т. $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ имеют вид:

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)} = \frac{z - f(x_0, y_0)}{-1}$$

Замечание. Касательная плоскость может быть определена также следующим эквивалентным образом.

Определение 2. Плоскость Π , проходящая через точку N_0 поверхности, называется касательной плоскостью в этой точке, если угол между этой плоскостью и секущей, проходящей через точку N_0 и любую точку N_1 поверхности, стремится к нулю, когда точка N_1 стремится к N_0 .



Пример 1. Дана функция $z = 2x^2 - 3xy + 4y^2 - 2x + y$ и точка $(1, 1)$. Написать уравнение касательной плоскости в соответствующей точке графика этой функции, а также уравнения нормали.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x - 3y - 2 \quad \frac{\partial z}{\partial x}(1,1) = 4 - 3 - 2 = -1$$

$$; z(1,1) = 2.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -3x + 8y + 1 \quad \frac{\partial z}{\partial y}(1,1) = -3 + 8 + 1 = 6$$

Уравнение касательной плоскости

$$z - 2 = -1 \cdot (x - 1) + 6 \cdot (y - 1)$$

Уравнение нормали к графику функции в той же точке имеют вид:

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{6} = \frac{z-2}{-1}$$

1.9.6.5. Дифференцирование сложной функции

Пусть функция $u = f(x_1, \dots, x_m)$ и система функций

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(t_1, \dots, t_k) \\ \dots \\ x_m = \varphi_m(t_1, \dots, t_k) \end{cases}$$

определяют сложную функцию, тогда справедлива следующая

Теорема. Пусть функции $\varphi_i(t_1, \dots, t_k)$ ($i = 1, \dots, m$) дифференцируемы в точке $A_0(t_1^0, \dots, t_k^0)$, а функция $u = f(x_1, \dots, x_m)$ дифференцируема в соответствующей точке $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$, где $x_i^0 = \varphi_i(t_1^0, \dots, t_k^0)$. Тогда сложная функция $u = f(\varphi_1(t_1, \dots, t_k), \dots, \varphi_m(t_1, \dots, t_k))$ дифференцируема в точке A_0 . Для частных производных в т. A_0 справедливы следующие формулы:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t_1} &= \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial t_1} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m} \cdot \frac{\partial \varphi_m}{\partial t_1} \\ \frac{\partial u}{\partial t_2} &= \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_2} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial t_2} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m} \cdot \frac{\partial \varphi_m}{\partial t_2} \\ &\dots \\ \frac{\partial u}{\partial t_k} &= \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_k} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial t_k} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m} \cdot \frac{\partial \varphi_m}{\partial t_k}, \end{aligned}$$

в которых частные производные $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ ($i = 1, \dots, m$) берутся в точке M_0 , а частные производные $\frac{\partial \varphi_i}{\partial t_s}$ ($i = 1, \dots, m; s = 1, \dots, k$) берутся в точке A_0 .

Идея доказательства такая же, как и в одномерном случае.

В условие дифференцируемости внешней функции

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m} \Delta x_m + o(\rho),$$

где $\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^m (\Delta x_i)^2},$

подставляются не произвольные приращения переменных $\Delta x_1, \dots, \Delta x_m$, а приращения функции $\varphi_i(t_1, \dots, t_k)$ ($i = 1, \dots, m$), соответствующие приращениям аргументов $\Delta t_1, \dots, \Delta t_k$. Эти приращения представимы в виде (следует из условия дифференцируемости функций $\varphi_i(t_1, \dots, t_k)$ ($i = 1, \dots, m$))

$$\Delta x_i = \Delta \varphi_i = \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_1} \Delta t_1 + \dots + \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_k} \Delta t_k + o(\delta),$$

где
$$\delta = \sqrt{\sum_{s=1}^k (\Delta t_s)^2}.$$

Выделяя затем линейную часть Δu относительно $\Delta t_1, \dots, \Delta t_k$, мы получаем выражения для частных производных сложной функции.

Заметим, что в случае, когда x_1, \dots, x_m зависят только от одной переменной t , производная по t сложной функции (обыкновенная) вычисляется по формуле

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{d\varphi_1}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot \frac{d\varphi_2}{dt} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m} \cdot \frac{d\varphi_m}{dt}$$

и если, кроме того, f зависит от одной переменной x , то формула принимает вид: $\frac{du}{dt} = \frac{du}{dx} \cdot \frac{d\varphi}{dt}$, т.е. совпадает с формулой для одномерного случая.

Пример 1. $z = e^{x^2 - y}$, где $x = \cos t$, $y = \sin t$.

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = e^{x^2 - y} \cdot 2x \cdot (-\sin t) + e^{x^2 - y} \cdot (-1) \cdot \cos t =$$

здесь вместо x и y надо поставить их выражения через t

$$= e^{\cos^2 t - \sin t} [2 \cos t (-\sin t) - \cos t] = -e^{\cos^2 t - \sin t} \cos t [2 \sin t + 1].$$

Пример 2. $z = \ln(t^2 + x^3)$, где $x = \sin t$. Вычислить $\frac{\partial z}{\partial t}$.

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{1}{t^2 + x^3} \cdot 2t \quad (\text{Здесь } t \text{ и } x \text{ считаются независимыми переменными})$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{2t}{t^2 + x^3} + \frac{3x^2}{t^2 + x^3} \cdot \cos t =$$

(Здесь вместо x необходимо подставить его выражение через t)

$$= \frac{2t}{t^2 + \sin^3 t} + \frac{3 \sin^2 t \cdot \cos t}{t^2 + \sin^3 t} = \frac{2t + 3 \sin^2 t \cdot \cos t}{t^2 + \sin^3 t}.$$

Пример 3. $z = x^2 - y^2$, где $x = t_1 \cdot t_2$, $y = t_1 - t_2^2$.

Вычислить $\frac{\partial z}{\partial t_1}, \frac{\partial z}{\partial t_2}$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial t_1} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t_1} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t_1} = 2x \cdot t_2 + (-2y) \cdot 1 = 2t_1 t_2 \cdot t_2 - 2(t_1 - t_2^2) = \\ &= 2t_1 t_2^2 + 2t_2^2 - 2t_1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial t_2} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t_2} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t_2} = 2x \cdot t_1 + (-2y) \cdot (-2t_2) = 2t_1 t_2 \cdot t_1 + 4t_2(t_1 - t_2^2) = \\ &= 2t_1^2 t_2 + 4t_1 t_2 - 4t_2^3.\end{aligned}$$

1.9.6.6. Дифференциал функции нескольких переменных

Дифференциал функции нескольких переменных определяется как линейная (относительно приращений аргументов) часть приращения дифференцируемой функции

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m} dx_m,$$

где $dx_i \equiv \Delta x_i$ ($i=1, \dots, m$), если x_1, \dots, x_m - независимые переменные.

Как и в случае одной переменной первый дифференциал обладает свойством инвариантности его формы, т.е. выражение для первого дифференциала имеет тот же вид и в случае, когда x_1, \dots, x_m являются функциями некоторых переменных t_1, \dots, t_k . Свойство инвариантности формы первого дифференциала позволяет установить следующие формулы

$$d(c \cdot u) = c \cdot du \quad (c = \text{const})$$

$$d(u \pm v) = du \pm dv$$

$$d(u \cdot v) = u \cdot dv + v \cdot du$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2}$$

Например, для дифференциала произведения рассуждаем следующим образом. Рассмотрим функцию $\omega = u \cdot v$ двух переменных u, v . Дифференциал этой функции равен

$$d\omega = \frac{\partial \omega}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial \omega}{\partial v} \cdot dv,$$

но $\frac{\partial \omega}{\partial u} = v \cdot \frac{\partial \omega}{\partial v} = u$, следовательно,

$$d\omega = v \cdot du + u \cdot dv.$$

Пример 1. $u = x^{y^2-z}$. Найти полный дифференциал функции

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(x^{y^2-z} \right)'_x = (y^2 - z) \cdot x^{y^2-z-1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left(x^{y^2-z} \right)'_y = x^{y^2-z} \cdot \ln x \cdot 2y$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \left(x^{y^2-z} \right)'_z = x^{y^2-z} \cdot \ln x \cdot (-1)$$

Таким образом,

$$du = (y^2 - z) \cdot x^{y^2-z-1} dx + x^{y^2-z} \cdot \ln x \cdot 2y dy - x^{y^2-z} \cdot \ln x \cdot dz$$

Пример 2. $z = e^{x^2+y}$, где $x=\cos t$, $y=t^2$. Вычислить дифференциал сложной функции.

Воспользуемся инвариантностью формы первого дифференциала

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

Здесь

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x^2+y} \cdot 2x = e^{\cos^2 t + t^2} \cdot 2 \cos t; \quad dx = -\sin t \cdot dt$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{x^2+y} \cdot 1 = e^{\cos^2 t + t^2}; \quad dy = 2t \cdot dt$$

$$dz = e^{\cos^2 t + t^2} \cdot 2 \cos t (-\sin t) dt + e^{\cos^2 t + t^2} \cdot 2t dt = e^{\cos^2 t + t^2} (2t - \sin 2t) dt.$$

1.9.6.7. Производная по направлению. Градиент

Пусть задана функция двух переменных $u=f(x,y)$ (для большего числа переменных все аналогично), которая определена в окрестности т. (x_0, y_0) и дифференцируема в этой точке. Мы будем рассматривать нашу функцию на лучах, проходящих через т. (x_0, y_0) . Луч задается начальной точкой и направляющим единичным вектором $\vec{e} = \{\cos \alpha; \cos \beta\}$,

его параметрические уравнения имеют вид:

$$\begin{cases} x = x_0 + t \cdot \cos \alpha \\ y = y_0 + t \cdot \cos \beta \end{cases} \quad t \in [0, +\infty) \quad (\cos \beta = \sin \alpha)$$

Подставляя эти выражения вместо аргументов функции $u=f(x,y)$, мы получим функцию одной переменной $u(t)$: $u = f(x_0 + t \cdot \cos \alpha, y_0 + t \cdot \cos \beta)$.

Если $u'_t|_{t=0}$ существует, то эту производную $\frac{du}{dt}|_{t=0}$ мы назовем производной функции $u=f(x,y)$ в точке (x_0, y_0) в направлении вектора \vec{e} (обозначение $\frac{\partial u}{\partial \vec{e}}$). Используя формулы для производных сложной функции, получаем (для точки $t=0$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \vec{e}} &= \frac{df(x_0 + t \cdot \cos \alpha; y_0 + t \cdot \cos \beta)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot \frac{dx}{dt} + \\ &+ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot \cos \beta. \end{aligned}$$

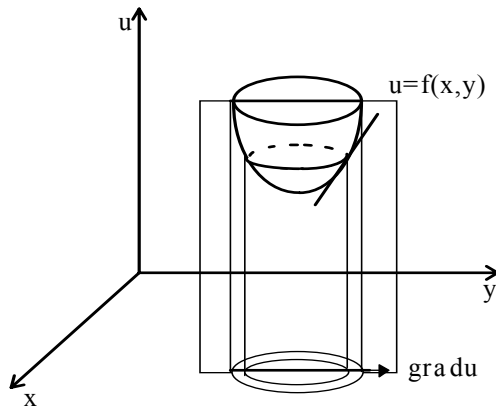
Если ввести в рассмотрение вектор $\left\{ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0); \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right\}$ (обозначаемый gradu), то выражение для производной в направлении вектора \vec{e} , можно записать в виде

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{e}} = (\vec{e}, \text{gradu}) \quad \text{или} \quad \frac{\partial u}{\partial \vec{e}} = |\text{gradu}| \cdot \cos(\widehat{\vec{e}, \text{gradu}})$$

Меняя направление вектора \vec{e} , мы будем получать различные значения $\frac{\partial u}{\partial \vec{e}}$. В частности:

- 1) $\frac{\partial u}{\partial \vec{e}} = 0$, если $\vec{e} \perp \text{gradu}$ ($(\vec{e}, \text{gradu}) = 0$).
- 2) $\frac{\partial u}{\partial \vec{e}} = |\text{gradu}|$, если $\vec{e} = \frac{\text{gradu}}{|\text{gradu}|}$, и это значение является наибольшим из возможных ((\vec{e}, gradu) принимает наибольшее значение).
- 3) $\frac{\partial u}{\partial \vec{e}} = -|\text{gradu}|$, если $\vec{e} = -\frac{\text{gradu}}{|\text{gradu}|}$ ((\vec{e}, gradu) принимает наименьшее значение).

Таким образом, gradu определяет направление, в котором скорость возрастания функции является наибольшей.



Пример 1. Найти производную функции $z = x^2 y^3$ в точке $(1, 2)$ в направлении вектора, составляющего с положительным направлением оси Ox угол 45° .

Координаты вектора \vec{e} имеют вид $\vec{e} = \{\cos \alpha; \sin \alpha\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1, 2) = 2xy^3 \Big|_{(1, 2)} = 2 \cdot 8 = 16; \quad \frac{\partial z}{\partial y}(1, 2) = x^2 \cdot 3y^2 \Big|_{(1, 2)} = 3 \cdot 4 = 12$$

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{e}} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \sin \alpha = 16 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 12 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{28}{\sqrt{2}} = 14\sqrt{2}$$

Пример 2. Найти $\text{grad}(x^2 - y)$ в точке $(1, 1)$ и вычислить производную функции в направлении градиента в этой точке

$$\text{grad} z = \left\{ \frac{\partial z}{\partial x}; \frac{\partial z}{\partial y} \right\}; \quad \text{grad}(x^2 - y) \Big|_{(1, 1)} = \{2x; -1\} \Big|_{(1, 1)} = \{2; -1\}.$$

Производная функции в направлении градиента равна модулю градиента.

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{e}} = |\text{grad} z| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}; \quad \text{где } \vec{e} = \frac{\text{gradu}}{|\text{gradu}|}.$$

В трехмерном случае

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \cos \gamma,$$

где $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ - направляющие косинусы вектора \vec{e} .

Соответственно,

$$\text{gradu} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right\}.$$

1.9.7. Частные производные и дифференциалы высших порядков функций нескольких переменных.

1.9.7.1. Частные производные высших порядков

Пусть частная производная $\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_m)$ функции $u=f(x_1, \dots, x_m)$

существует в каждой точке некоторого множества $\{M\}$, т.е. представляет собой функцию переменных x_1, \dots, x_m .

Если эта функция имеет частную производную по переменной x_k в некоторой точке M_0 , то она называется второй частной производной функции $f(x_1, \dots, x_m)$ по переменным x_i и x_k и обозначается

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_i}, \quad f''_{x_i x_k}.$$

Совершенно аналогично определяются и последующие частные производные функции f .

Таким образом,

$$\frac{\partial^n u}{\partial x_{i_n} \partial x_{i_{n-1}} \dots \partial x_{i_2} \partial x_{i_1}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_n}} \left(\frac{\partial^{n-1} u}{\partial x_{i_{n-1}} \dots \partial x_{i_2} \partial x_{i_1}} \right)$$

Если не все индексы i_1, \dots, i_n совпадают между собой, то частная производная называется смешанной.

Вычисляются частные производные по тем же правилам, что и обыкновенные производные. Необходимо только следить при каждом дифференцировании, чтобы все переменные, кроме одной, считались постоянными.

Пример 1. $u = e^{\frac{x}{y}}$ Вычислить все частные производные второго порядка.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{\frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{y}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = e^{\frac{x}{y}} \cdot \left(-\frac{x}{y^2} \right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{\frac{x}{y}} \cdot \left(\frac{-x}{y^2} \right) \right) = e^{\frac{x}{y}} \cdot \frac{-x}{y^3} - e^{\frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{y^2}$$

(Здесь $y = \text{const}$)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(e^{\frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{y} \right) = e^{\frac{x}{y}} \cdot \left(\frac{-x}{y^3} \right) + e^{\frac{x}{y}} \cdot \left(\frac{-1}{y^2} \right)$$

(Здесь $x = \text{const}$)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{\frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{y} \right) = e^{\frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{y^2}$$

(Здесь $y = \text{const}$)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(e^{\frac{x}{y}} \cdot \left(\frac{-x}{y^2} \right) \right) = e^{\frac{x}{y}} \cdot \frac{x^2}{y^4} + e^{\frac{x}{y}} \cdot \frac{2x}{y^3}$$

(Здесь $x = \text{const}$)

Замечание. В этом примере $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$. Равенство смешанных производных будет иметь место не всегда, а при выполнении некоторых условий; а именно, справедлива следующая теорема.

Теорема. Пусть функция $u=f(x_1, \dots, x_m)$ определена в открытой m -мерной области D и имеет в этой области всевозможные частные производные n -го порядка, причем все эти производные непрерывны в D . Тогда значение любой k -ой смешанной производной не зависит от того порядка, в котором производятся последовательные дифференцирования.

В подавляющем большинстве конкретных задач условия теоремы выполняются, и смешанную производную можно вычислять, не обращая внимания на порядок последовательных дифференцирований.

1.9.7.2. Дифференциалы высших порядков

Пусть в некоторой области задана дифференцируемая функция $u=f(x_1, \dots, x_m)$, тогда в каждой точке этой области определен дифференциал

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m} dx_m$$

Здесь частные производные являются функциями от x_1, \dots, x_m . Если существуют непрерывные частные производные второго порядка для u , то du будет иметь непрерывные частные производные по x_1, \dots, x_m . Будем считать, что dx_1, \dots, dx_m постоянны, тогда можно определить дифференциал от первого дифференциала:

$$d(du) = d\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m} dx_m\right) = d\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) dx_1 + \dots + d\left(\frac{\partial u}{\partial x_m}\right) dx_m$$

При вычислении дифференциалов от частных производных будем считать, что dx_1, \dots, dx_m имеют те же самые значения, что и в исходном дифференциале du .

$$d(du) = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} dx_1 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_m} dx_m\right) dx_1 + \dots + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_m \partial x_1} dx_1 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_m \partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2} dx_m\right) dx_m$$

Полученное таким образом выражение мы назовем дифференциалом второго порядка функции u

$$d^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} (dx_1)^2 + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2} (dx_m)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 dx_2 + \dots + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_m} dx_1 dx_m + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_3} dx_2 dx_3 + \dots + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_{m-1} \partial x_m} dx_{m-1} dx_m$$

Точно так же мы определим и последующие дифференциалы функции u с помощью равенства

$$d^k u = d(d^{k-1} u)$$

Пример 1. $z = x^2 y^3$ Найти $d^2 z$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^3; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 \cdot 3y^2; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2y^3; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6xy^2; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6x^2 y$$

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} (dx)^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} (dy)^2 = 2y^3 (dx)^2 + 2 \cdot 6xy^2 dx dy + 6x^2 y (dy)^2.$$

Развернутые выражения для дифференциалов высших порядков довольно громоздки. Однако, символически они записываются очень компактно. Запишем дифференциал в символической форме.

$$du = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m \right) u$$

(u вносим в скобки и считаем $\frac{\partial}{\partial x_i} \cdot u \equiv \frac{\partial u}{\partial x_i}$ и получаем обычное выражение для du). Тогда

$$d^2 u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} \cdot dx_m \right)^2 \cdot u.$$

Здесь выражение в скобках возводится по обычным правилам в квадрат и затем считаем, что

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \cdot u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$$

Выражение для дифференциала порядка k принимает вид:

$$d^k u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} \cdot dx_m \right)^k \cdot u.$$

Пример 2. $z = x^2 y^3$ Вычислить $d^3 z$

$$\begin{aligned} d^3 z &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial}{\partial y} \cdot dy \right)^3 \cdot z = \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^3 (dx)^3 + 3 \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) (dx)^2 dy + \right. \\ &\quad \left. + 3 \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^2 dx (dy)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^3 (dy)^3 \right] \cdot z = \\ &= \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} (dx)^3 + 3 \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} (dx)^2 dy + 3 \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} dx (dy)^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} (dy)^3 \end{aligned}$$

На основе примера 1 получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} &= (2y^3)'_x = 0; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = (6xy^2)'_x = 6y^2; \\ \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} &= (6xy^2)'_y = 12xy; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = (6x^2y)'_y = 6x^2. \end{aligned}$$

Отсюда

$$d^3 z = 3 \cdot 6y^2 (dx)^2 dy + 3 \cdot 12xy dx (dy)^2 + 6x^2 (dy)^3.$$

Замечание. Дифференциалы высших порядков, вообще говоря, не обладают свойством инвариантности их формы. Это имеет место уже для функций одной переменной. Однако, если x_1, \dots, x_m являются **линейными** функциями переменных t_1, \dots, t_k , то высшие дифференциалы можно вычислять по тем же самым формулам, которые мы только что рассмотрели. При этом, если

$$x_i = \alpha_i^{(1)} t_1 + \dots + \alpha_i^{(k)} t_k + \beta_i \quad (\alpha_i^{(1)}, \dots, \alpha_i^{(k)}, \beta_i - \text{константы}),$$

$$\text{то } dx_i = \alpha_i^{(1)} dt_1 + \dots + \alpha_i^{(k)} dt_k \quad (i = 1, \dots, m).$$

В частности, если все x_i зависят от одной переменной t , то в формулы для дифференциалов надо подставлять $dx_i = \alpha_i dt$.

Это обстоятельство используется при доказательстве формулы Тейлора.

1.9.8. Формула Тейлора.

Пусть функция $f(x_1, \dots, x_m)$ задан и $n+1$ раз дифференцируема в некоторой окрестности точки $M_0(x_1^0, \dots, x_m^0)$, тогда для всех точек $M(x_1, \dots, x_m)$ из этой окрестности справедлива формула

$$f(x_1, \dots, x_m) = f(x_1^0, \dots, x_m^0) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \left((x_1 - x_1^0) \frac{\partial}{\partial x_1} + (x_2 - x_2^0) \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + (x_m - x_m^0) \frac{\partial}{\partial x_m} \right)^k f(x_1^0, \dots, x_m^0) + R_{n+1}(x_1, \dots, x_m),$$

где

$$R_{n+1}(x_1, \dots, x_m) = \frac{1}{(n+1)!} \left((x_1 - x_1^0) \frac{\partial}{\partial x_1} + (x_2 - x_2^0) \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + (x_m - x_m^0) \frac{\partial}{\partial x_m} \right)^{n+1} \cdot f(x_1^0 + \theta(x_1 - x_1^0), \dots, x_m^0 + \theta(x_m - x_m^0)), \quad 0 < \theta < 1,$$

где θ зависит, вообще говоря, от $M(x_1, \dots, x_m)$.

Заметим, что в принятых нами символических обозначениях

$$\left((x_1 - x_1^0) \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + (x_m - x_m^0) \frac{\partial}{\partial x_m} \right)^k f(x_1^0, \dots, x_m^0) = d^k f(x_1^0, \dots, x_m^0),$$

причем $dx_1 = x_1 - x_1^0, dx_2 = x_2 - x_2^0, \dots, dx_m = (x_m - x_m^0)$.

Таким образом, формула Тейлора может быть записана более компактно:

$$f(x_1, \dots, x_m) = f(x_1^0, \dots, x_m^0) + \sum_{k=1}^n \frac{d^k f(x_1^0, \dots, x_m^0)}{k!} + R_{n+1}(x_1, \dots, x_m),$$

где

$$R_{n+1}(x_1, \dots, x_m) = d^{n+1} f(x_1^0 + \theta(x_1 - x_1^0), \dots, x_m^0 + \theta(x_m - x_m^0)).$$

Замечание 1. При более слабых предположениях, а именно, если $f(x_1, \dots, x_m)$ дифференцируема $(n-1)$ раз в окрестности т. M_0 и n раз в самой точке M_0 , для остаточного члена в формуле Тейлора $R_{n+1}(x_1, \dots, x_m)$ справедливо представление $R_{n+1}(x_1, \dots, x_m) = O(\rho^n)$ (форма Пеано), где

$$\rho = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + \dots + (x_m - x_m^0)^2}$$

Замечание 2. В случае двух переменных ($u=f(x,y)$) формула Тейлора второго порядка в развернутом виде записывается следующим образом:

$$f(x,y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!} \left(f'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) \right) + \frac{1}{2!} \left(f''_{xx}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0)^2 + 2f''_{xy}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) \cdot (y - y_0) + f''_{yy}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)^2 \right) + O(\rho^2), \quad \text{где } \rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Пример 1. Разложить по формуле Тейлора второго порядка в окрестности т. $(1,1)$ функцию $f(x,y) = x^3 - 3xy^3 + xy - y^2 + 6x - y + 1$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 3x^2 - 3y^3 + y + 6; \quad \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 3 - 3 + 1 + 6 = 7; \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -9xy^2 + x - 2y - 1; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = -9 + 1 - 2 - 1 = -11; \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 6x; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = 6; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -9y^2 + 1; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1) = -9 + 1 = -8; \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= -18xy - 2; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1) = -18 - 2 = -20; \\ f(1,1) &= 1 - 3 + 1 - 1 + 6 - 1 + 1 = 4;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(x,y) &= 4 + 7 \cdot (x-1) - 11 \cdot (y-1) + \frac{1}{2} \left(6 \cdot (x-1)^2 - 2 \cdot 8 \cdot (x-1) \cdot (y-1) - \right. \\ &\quad \left. - 20 \cdot (y-1)^2 + 0 \cdot ((x-1)^2 + (y-1)^2) \right) = \\ &= 4 + 7(x-1) - 11(y-1) + 3(x-1)^2 - 8(x-1)(y-1) - 10(y-1)^2 + \\ &\quad + 0((x-1)^2 + (y-1)^2)\end{aligned}$$

Пример 2. Разложить по формуле Маклорена до членов третьего порядка функцию $u = \sqrt{1-x^2-y^2}$ (по формуле Тейлора с центром в т. $M_0(0,0)$). Последовательно находим дифференциалы функции u до третьего порядка включительно.

$$\begin{aligned}u(x,y) &= (1-x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}; \quad du = \frac{1}{2}(1-x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}(-2xdx-2ydy); \\ d^2u &= d(du) = d\left(\frac{1}{2}(1-x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}(-2xdx-2ydy)\right) = \\ &= d\left(\frac{1}{2}(1-x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot (-2xdx-2ydy) + \frac{1}{2}(1-x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}d(-2xdx-2ydy) = \\ &= -\frac{1}{4}(1-x^2-y^2)^{-\frac{3}{2}}(-2xdx-2ydy)^2 + \frac{1}{2}(1-x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}(-2(dx)^2-2(dy)^2). \\ d^3u &= d(d^2u) = d\left(-\frac{1}{4}(1-x^2-y^2)^{-\frac{3}{2}}(-2xdx-2ydy)^2\right) + \\ &\quad + d\left(\frac{1}{2}(1-x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}(-2(dx)^2-2(dy)^2)\right) = \\ &= \frac{3}{8}(1-x^2-y^2)^{-\frac{5}{2}}(-2xdx-2ydy)^3 - \frac{1}{4}(1-x^2-y^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2(-2xdx-2ydy) \cdot \\ &\quad \cdot (-2(dx)^2-2(dy)^2) + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (1-x^2-y^2)^{-\frac{3}{2}}(-2xdx-2ydy)(-2(dx)^2-2(dy)^2) = \\ &= -3(1-x^2-y^2)^{-\frac{5}{2}}(xdx+ydy)^3 - 3(1-x^2-y^2)^{-\frac{3}{2}}(xdx+ydy)((dx)^2+(dy)^2).\end{aligned}$$

Полагая здесь $x=y=0$, $dx=x$, $dy=y$, получаем

$$u(0,0)=1; \quad du(0,0)=0; \quad d^2u(0,0)=-(x^2+y^2); \quad d^3u=0$$

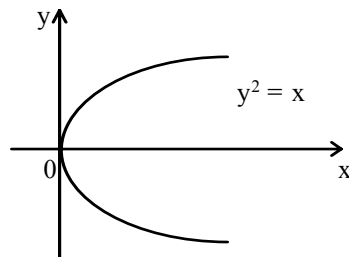
и

$$u(x,y) \equiv \sqrt{1-x^2-y^2} = 1 - \frac{1}{2}(x^2+y^2) + 0 \left((x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} \right).$$

1.9.9. неявные функции.

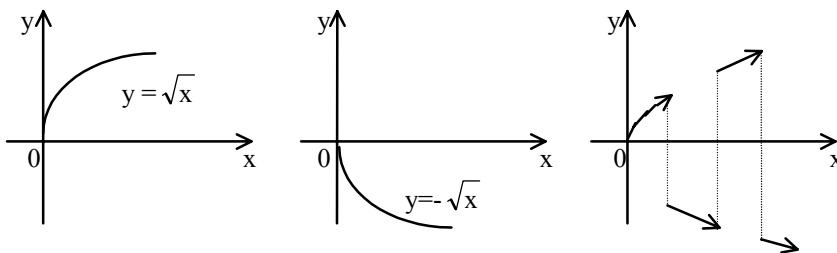
Пусть задано уравнение $f(x,y)=0$, где f - дифференцируемая функция переменных x и y . Возникает вопрос о том, при каких условиях это функциональное уравнение однозначно разрешимо относительно y , т.е. однозначно определяет явную функцию $y=\varphi(x)$, и следующий вопрос о том, при каких условиях эта явная функция непрерывна и дифференцируема.

Трудность этих вопросов видна уже на простейшем примере уравнения $y^2 - x = 0$. Это уравнение



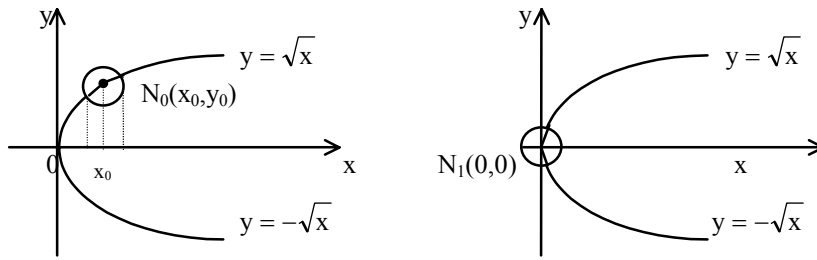
определяет при $x \geq 0$ бесконечно много явных функций.

Например, $y = +\sqrt{x}$, $y = -\sqrt{x}$ и любая функция, равная $+\sqrt{x}$ для одних значений x , и $-\sqrt{x}$ для других значений.



Вопрос 1. При каких условиях существует единственная явная функция удовлетворяющая уравнению $y^2 = x$. Фиксируем точку $N_0(x_0, y_0)$ на кривой $y^2 - x = 0$, отличную от начала координат.

Очевидно, что часть кривой, лежащая в достаточно малой окрестности точки N_0 , однозначно проектируется на ось Ox .



Аналитически это означает, что если рассматривать функцию $f(x,y)=y^2-x$ только в этой достаточно малой окрестности точки N_0 , то уравнение $f(x,y)=0$ однозначно разрешимо относительно y и определяет единственную явную функцию $y = +\sqrt{x}$ для $y_0 > 0$ (см. рис.) и $y = -\sqrt{x}$ для $y_0 < 0$.

Если мы теперь рассмотрим точку $N_1(0,0)$, то часть кривой $y^2-x=0$ не однозначно проектируется на ось OX (см. рис.). Аналитически это означает, что если рассматривать функцию $f(x,y)=y^2-x$ в **любой** окрестности т. $N_1(0,0)$, то уравнение $f(x,y)=y^2-x=0$ не является однозначно разрешимым относительно y . Заметим, что в этой точке $N_1(0,0)$ частная производная $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$ функции $f(x,y)=y^2-x$ обращается в нуль. В общем случае это обстоятельство имеет принципиальное значение: для однозначной разрешимости уравнения $f(x,y)=0$ в окрестности т. (x_0, y_0) относительно y требуется, чтобы $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.

В случае, когда рассматривается уравнение вида $F(u, x_1, \dots, x_m)=0$, имеют место те же трудности, что и в случае одной переменной: для однозначной разрешимости этого уравнения относительно u нужно рассматривать функцию $F(u, x_1, \dots, x_m)$ в окрестности точки $N_0(u_0, x_1^0, \dots, x_m^0)$ (для которой $F(u_0, x_1^0, \dots, x_m^0) = 0$), и требовать, чтобы $\frac{\partial f}{\partial u} \neq 0$ в т. N_0 .

Формулировка теоремы о неявной функции имеет вид.

Теорема. Пусть функция $F(u, x_1, \dots, x_m)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки $N_0(u_0, x_1^0, \dots, x_m^0) \in \mathbb{R}^{m+1}$, причем $\frac{\partial f}{\partial u}(N_0) \neq 0$ и $F(u_0, x_1^0, \dots, x_m^0) = 0$. Тогда для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ существует такая окрестность точки $M_0(x_1^0, \dots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$, в которой определена (единственная) функция $u=u(x_1, \dots, x_m)$ удовлетворяющая условию $|u-u_0| < \varepsilon$ и являющаяся решением уравнения $F(u, x_1, \dots, x_m)=0$. Эта функция $u=u(x_1, \dots, x_m)$ непрерывна и дифференцируема в окрестности т. M_0 .

Замечание 1. Частные производные $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ вычисляются по формулам

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}}{\frac{\partial F}{\partial u}} \quad (i = 1, \dots, m).$$

Эти формулы получаются следующим образом: подставим неявную функцию $u=u(x_1, \dots, x_m)$ в уравнение $F(u, x_1, \dots, x_m)=0$ получим

$$F(u(x_1, \dots, x_m), x_1, \dots, x_m)=0.$$

Это равенство является тождеством по x_1, \dots, x_m . Вычислим частные производные от обеих частей этого равенства по x_i , используя теорему о производной сложной функции,

$$\frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_i} = - \frac{\partial F}{\partial x_i} / \frac{\partial F}{\partial u}$$

Аналогично можно найти и высшие k -е производные неявной функции, если функция $F(u, x_1, \dots, x_m)$ дифференцируема k раз.

Пример 1. Найти частные производные функции z , заданной неявно:

$$F \equiv z^3 + x^5 + y^5 - 2xyz + 2x - 4 = 0.$$

Уравнение разрешимо относительно z , если $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$, т.е. $3z^2 - 2xy \neq 0$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = - \frac{5x^4 - 2yz + 2}{3z^2 - 2xy},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = - \frac{5y^4 - 2xz}{3z^2 - 2xy}.$$

Теорема о неявной функции имеет следующие геометрические приложения:

Пусть задана поверхность уравнением $F(x,y,z)=0$.

Требуется написать уравнение касательной плоскости к этой поверхности и вычислить координаты нормального вектора к этой поверхности в некоторой точке (x_0, y_0, z_0) . Предположим, что одна из частных производных $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$ отлична от нуля в этой точке. Это значит, что одна из

переменных может быть выражена как функция двух других.

Пусть, например, $\frac{\partial F}{\partial x} \neq 0$, тогда $x = \varphi(y, z)$, а для такой функции, уравнение касательной плоскости имеет вид

$$x - x_0 = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot (y - y_0) + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot (z - z_0).$$

Нормальный вектор имеет координаты:

$$\vec{n} = \left\{ -1; \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right\}$$

Подставляя сюда выражения для $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$, получим

$$x - x_0 = \left(-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial x}} \right) \cdot (y - y_0) + \left(-\frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\frac{\partial F}{\partial x}} \right) \cdot (z - z_0),$$

или $\frac{\partial F}{\partial x} \cdot (x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot (y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot (z - z_0) = 0$, а в качестве нормального вектора к поверхности можем взять следующий:

$$\vec{n}_1 = \left\{ \frac{\partial F}{\partial x}; \frac{\partial F}{\partial y}; \frac{\partial F}{\partial z} \right\}$$

Замечание: Если рассматривать поверхность уровня $F(x, y, z) = C$ функции $u = F(x, y, z)$, то мы получим, что $\text{grad} u \equiv \left\{ \frac{\partial F}{\partial x}; \frac{\partial F}{\partial y}; \frac{\partial F}{\partial z} \right\}$ ортогонален поверхности уровня.

Пример 2. Дана поверхность $x^2 + 4y^2 + 2z^2 = 7$. Написать уравнения касательных плоскостей к этой поверхности, которые параллельны плоскости $x + y + z = 1$

Здесь $F(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + 2z^2 - 7$,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 8y; \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 4z.$$

Нормальный вектор к поверхности имеет координаты $\vec{n} = \{2x, 8y, 4z\}$ он должен быть коллинеарен нормальному вектору к заданной плоскости, т.е. вектору $\{1, 1, 1\}$.

Отсюда $\frac{2x}{1} = \frac{8y}{1} = \frac{4z}{1}$

Решив систему уравнений $\begin{cases} x^2 + 4y^2 + 2z^2 = 7 \\ 2x = 8y = 4z \end{cases}$, находим координаты точек

касания $\left(2; \frac{1}{2}; 1\right)$ и $\left(-2; -\frac{1}{2}; -1\right)$.

Касательные плоскости имеют уравнения:

$$4(x - 2) + 4(y - \frac{1}{2}) + 4(z - 1) = 0; \quad x + y + z - 3,5 = 0$$

$$-4(x + 2) - 4(y + \frac{1}{2}) - 4(z + 1) = 0; \quad x + y + z + 3,5 = 0.$$

1.9.10. Экстремум функции нескольких переменных.

Определение 1. Пусть функция $f(x_1, \dots, x_m)$ определена на множестве $\{M\} \subset \mathbb{R}^m$. Внутренняя точка $M_0(x_1^0, \dots, x_m^0) \in \{M\}$ называется точкой локального максимума (минимума), если существует такая окрестность $U(M_0)$ точки M_0 , что для всех $M(x_1, \dots, x_m) \in U(M_0)$ выполняется неравенство $f(M) \leq f(M_0)$ [$f(M) \geq f(M_0)$].

Определение 2. Точка M_0 локального максимума или локального минимума называется точкой локального экстремума.

Теорема (Необходимое условие локального экстремума). Пусть функция $f(x_1, \dots, x_m)$ определена в некоторой окрестности т. $M_0(x_1^0, \dots, x_m^0)$, дифференцируема в точке M_0 , и имеет в этой точке локальный экстремум, тогда все частные производные первого порядка функции f в т. M_0 равны нулю:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_m}(M_0) = 0 \quad (\text{или } df(M_0) = 0).$$

Доказательство: Докажем, что $\frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0) = 0$. Если точка $M_0(x_1^0, \dots, x_m^0)$ является локальным экстремумом функции $f(x_1, \dots, x_m)$, то, очевидно, точка x_1^0 является точкой локального экстремума функции $f(x_1, x_2^0, \dots, x_m^0)$ одной переменной x_1 . По теореме Ферма получаем (см. рис. 1)

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0) = \left. \frac{df(x_1, x_2^0, \dots, x_m^0)}{dx_1} \right|_{x_1=x_1^0} = 0.$$

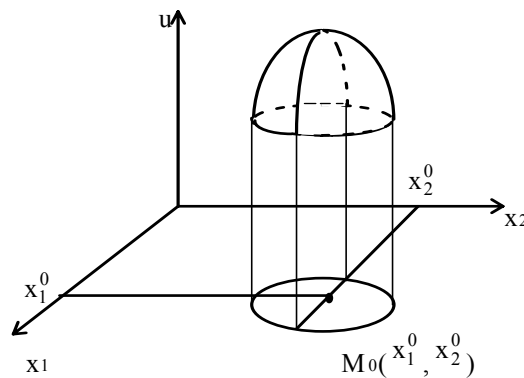


Рис.1

Пример 1. Найдем точки экстремума функции $z = x^2 + y^2$. Точки экстремума в силу доказанного находятся среди тех, для которых $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = 0$,

т.е. $\begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$. Система имеет единственное решение $(0,0)$. Убедимся, что в

этой точке действительно функция имеет экстремум. Для этого заметим, что в т. $(0,0)$ $z=0$, во всех других точках $z=x^2+y^2>0$. Поэтому точка $(0,0)$ является не только точкой локального минимума (но и “глобального” минимума) (см. рис.2).

Пример 2. Исследуем точки экстремума функции $z=x^2-y^2$.

Поступая аналогично предыдущему случаю, находим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x = 0; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2y = 0.$$

Решение $(0,0)$, т.е. если функция $z=x^2-y^2$ имеет экстремум, то он может быть только в этой точке.

Исследуем, имеет ли функция $z=x^2-y^2$ в точке $(0,0)$ локальный экстремум. В т. $(0,0)$ $z=0$. Однако здесь при $y=0$ и любых $x \neq 0$ $z=x^2>0$, а при $x=0$ и любом $y \neq 0$ $z=-y^2<0$. Поэтому точка $(0,0)$ не является точкой локального экстремума функции $z=x^2-y^2$ вообще не имеет точек экстремума. (см. рис.3).

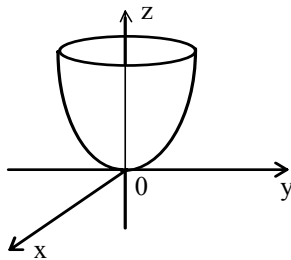


Рис.2

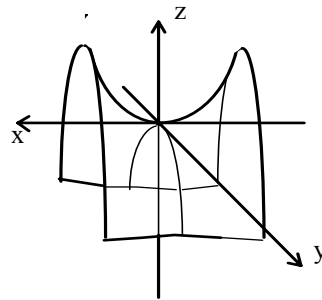


Рис.3

Точки, в которых обращаются в нуль все частные производные первого порядка функции $f(x_1, \dots, x_m)$, называются стационарными точками этой функции.

Примеры 1 и 2 показывают, что в каждой стационарной точке требуется дополнительное исследование на экстремум, т.е. нужны достаточные условия экстремума.

Прежде, чем их сформулировать, напомним некоторые сведения из теории квадратичных форм:

Определение 3. Функция $A(h_1, \dots, h_m) = \sum_{i,k=1}^m a_{ik} h_i h_k$ ($a_{ik} = a_{ki}$) (1)

переменных h_1, \dots, h_m называется квадратичной формой.

Числа a_{ik} называются коэффициентами квадратичной формы.

Определение 4. Квадратичная форма (1) называется положительно определенной (отрицательно определенной), если для любых значений переменных h_1, \dots, h_m , для которых выполняется условие $h_1^2 + \dots + h_m^2 > 0$, эта

форма имеет положительные (отрицательные) значения. Положительно определенные и отрицательно определенные формы объединяются общим названием - знакоопределенные формы.

Сформулируем критерий знакоопределенности квадратичной формы - критерий Сильвестра.

Для того, чтобы квадратичная форма (1) была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства:

$$a_{11} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0, \dots, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2m} \\ a_{m1} & a_{m2} \dots & a_{mm} \end{vmatrix} > 0.$$

Для того, чтобы квадратичная форма (1) была отрицательно определенной, необходимо и достаточно, чтобы имели место неравенства:

$$a_{11} < 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} < 0, \dots, (-1)^n \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots & a_{mm} \end{vmatrix} > 0.$$

Пример 3. $A(h_1, h_2) = h_1^2 + h_2^2$ - положительно определенная квадратичная форма, т.к.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad a_{11} = 1 > 0; \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0.$$

Пример 4. $A(h_1, h_2) = h_1^2 - h_2^2$ не является знакоопределенной, т.к.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad a_{11} = 1 > 0; \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 < 0.$$

Вернемся теперь к рассмотрению функции $f(x_1, \dots, x_m)$ и заметим, что второй дифференциал функции в т. $M_0(x_1^0, \dots, x_m^0)$ представляет собой квадратичную форму относительно переменных dx_1, \dots, dx_m :

$$d^2f(M_0) = \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(M_0) dx_i dx_j$$

Замечание. Если функция f имеет непрерывные вторые частные производные, то второй дифференциал является квадратичной формой с симметричной матрицей, т.к.

$$a_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = a_{ji}$$

Достаточное условие экстремума функции нескольких переменных.

Теорема. Пусть в некоторой окрестности стационарной точки $M_0(x_1^0, \dots, x_m^0)$ определены частные производные второго порядка функции $f(x_1, \dots, x_m)$, которые являются непрерывными в т. M_0 . Если в этой точке второй дифференциал $d^2f(M_0)$ является знакоопределенной квадратичной формой от dx_1, \dots, dx_m , то в т. M_0 функция имеет локальный экстремум (локальный максимум, если $d^2f(M_0)$ отрицательно определена, и локальный минимум, если $d^2f(M_0)$ положительно определена), если же $d^2f(M_0)$ знакопеременна, то в т. M_0 экстремума нет.

Пример 5. Исследовать на экстремум функцию

$$u = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y + 4z.$$

Находим стационарные точки

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 2; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y + 2; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 2z + 4,$$

$$\begin{cases} 2x + 2 = 0 & x = -1 \\ 2y + 2 = 0 & y = -1 \\ 2z + 4 = 0 & z = -2 \end{cases} \quad \text{Стационарная точка } M_0(-1, -1, -2).$$

Вычисляем второй дифференциал функции в этой точке

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = 0; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 0; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 2; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2$$

$$d^2u = 2(dx)^2 + 2(dy)^2 + 2(dz)^2,$$

матрица квадратичной формы имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad a_{11} = 2 > 0; \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0;$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 > 0.$$

Квадратичная форма является положительно определенной, поэтому в т. $(-1, -1, -2)$ функция имеет локальный минимум (не трудно проверить, что он является и глобальным).

Замечание. Если второй дифференциал функции $f(x_1, \dots, x_m)$ в т. M_0 не является ни знакоопределенной, ни знакопеременной квадратичной формой ($d^2f(M_0) \geq 0$ всюду или $d^2f(M_0) \leq 0$ всюду, причем есть ненулевые наборы dx_1, \dots, dx_m , в которых $d^2f(M_0) = 0$), т.е. является квазизнакоопределенной квадратичной формой, то ничего нельзя сказать о наличии или отсутствии в этой точке локального экстремума, и требуется дополнительное исследование. Это показано на следующих двух переменных.

Пример 6. $f(x, y) = x^3 + y^3$.

1.9. Функции нескольких переменных	Для замечаний
<div data-bbox="188 212 1107 385" data-label="Equation-Block"> $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 = 0 \end{cases} \quad \text{Стационарная точка } (0,0)$ </div> <div data-bbox="188 398 1011 488" data-label="Equation-Block"> $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 6x _{(0,0)} = 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 6y _{(0,0)} = 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0.$ </div> <div data-bbox="181 499 1219 622" data-label="Text"> <p>$d^2f(0,0) = 0 \cdot (dx)^2 + 2 \cdot 0 \cdot dx \cdot dy + 0 \cdot (dy)^2 \equiv 0$ - является квазизнакоопределенной квадратичной формой. Экстремума в т. $(0,0)$ нет, т.к. $f(x,x)=2x^3$ меняет знак вдоль прямой $y=x$ при переходе через т. $(0,0)$.</p> </div> <div data-bbox="181 640 639 685" data-label="Text"> <p>Пример 7. $f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2$</p> </div> <div data-bbox="188 685 411 763" data-label="Equation-Block"> $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2y = 0$ </div> <div data-bbox="561 748 1136 788" data-label="Text"> <p>Стационарных точек - целая прямая $y=-x$</p> </div> <div data-bbox="188 772 411 853" data-label="Equation-Block"> $\frac{\partial f}{\partial y} = 2x + 2y = 0$ </div> <div data-bbox="181 857 464 896" data-label="Text"> <p>Рассмотрим т. $(0,0)$:</p> </div> <div data-bbox="496 898 920 981" data-label="Equation-Block"> $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2,$ </div> <div data-bbox="367 990 1043 1034" data-label="Equation-Block"> $d^2f = 2(dx)^2 + 2 \cdot 2dx dy + 2(dy)^2 = 2(dx + dy)^2 \geq 0.$ </div> <div data-bbox="181 1046 1238 1164" data-label="Text"> <p>d^2f является квазизнакоопределенной квадратичной формой ($d^2f=0$ при $dx=-dy$). Заметив, что $f(x,y)=(x+y)^2 \geq 0$, мы получаем, что т. $(0,0)$ (не строгий) минимум.</p> </div> <div data-bbox="181 1164 1236 1240" data-label="Text"> <p>В частном случае двух переменных можно сформировать следующее достаточное условие экстремума.</p> </div> <div data-bbox="181 1274 1238 1352" data-label="Text"> <p>Теорема. Пусть функция $f(x,y)$ определена и имеет непрерывные частные производные второго порядка в окрестности точки (x_0, y_0), которая является</p> </div> <div data-bbox="181 1352 831 1435" data-label="Text"> <p>стационарной для $f(x,y)$, т.е. в ней $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$</p> </div> <div data-bbox="181 1442 518 1476" data-label="Text"> <p>Тогда если в этой точке</p> </div> <div data-bbox="181 1478 1206 1581" data-label="Text"> <p>1) $f''_{xx} \cdot f''_{yy} - (f''_{xy})^2 > 0, \quad f''_{xx} > 0,$ то (x_0, y_0) - точка локального минимума,</p> </div> <div data-bbox="181 1581 1219 1682" data-label="Text"> <p>2) $f''_{xx} \cdot f''_{yy} - (f''_{xy})^2 > 0, \quad f''_{xx} < 0,$ то (x_0, y_0) - точка локального максимума,</p> </div> <div data-bbox="181 1682 1165 1738" data-label="Text"> <p>3) $f''_{xx} \cdot f''_{yy} - (f''_{xy})^2 < 0,$ то в т. (x_0, y_0) нет экстремума,</p> </div> <div data-bbox="181 1738 1216 1843" data-label="Text"> <p>4) $f''_{xx} \cdot f''_{yy} - (f''_{xy})^2 = 0,$ то требуется дополнительное исследование.</p> </div> <div data-bbox="181 1877 1043 1921" data-label="Text"> <p>Пример 8. Найти экстремум функции $z = x^2 + 2x + y^2 + 4y + 1$.</p> </div>	

$$\begin{cases} f'_x = 2x + 2 = 0 & x = -1 \\ f'_y = 2y + 4 = 0 & y = -2 \end{cases} \quad \text{Стационарная точка } (-1, -2)$$

$$f''_{xx} = 2; \quad f''_{xy} = 0; \quad f''_{yy} = 2;$$

$$f''_{xx} \cdot f''_{yy} - (f''_{xy})^2 = 2 \cdot 2 - 0 = 4 > 0, \quad f''_{xx} = 2 > 0.$$

Следовательно, в т. $(-1, -2)$ локальный минимум.

1.9.11. Условный экстремум функции нескольких переменных.

Определение 1. Функция $u=f(x_1, \dots, x_m)$ имеет условный максимум (условный минимум) в точке $M_0(x_1^0, \dots, x_m^0)$, если существует такая окрестность $U(M_0)$ точки M_0 , что для всех точек $M(x_1, \dots, x_m)$ этой окрестности, удовлетворяющих уравнениям связи

$$\begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_m) = 0 \\ \dots \\ F_s(x_1, \dots, x_m) = 0, \end{cases}$$

выполняется неравенство $f(M_0) \geq f(M)$ ($f(M_0) \leq f(M)$).

То, что условный экстремум не совпадает, вообще говоря, с обычным экстремумом функции видно на следующем примере.

Пример 1. $u = x^2 + y^2$ при условии $x+y-1=0$

Безусловный экстремум этой функции достигается в точке $(0,0)$ и равен 0.

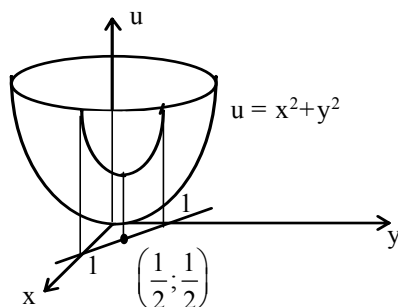
Условный экстремум ищем при условии $x+y-1=0$, т.е. для функции

$$u = x^2 + y^2 = x^2 + (1-x)^2 = 2x^2 - 2x + 1$$

$$u'(x) = 4x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad y = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

$$u''\left(\frac{1}{2}\right) = 4 > 0, \quad \text{поэтому в т. } \frac{1}{2} \text{ локальный минимум.}$$

Следовательно функция $u = x^2 + y^2$ имеет условный минимум в т. $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, который равен $\frac{1}{2}$.



Задача нахождения условного экстремума сводится к исследованию на обычный экстремум функции Лагранжа

$$L(x_1, \dots, x_m, \lambda_1, \dots, \lambda_s) = f(x_1, \dots, x_m) + \sum_{k=1}^s \lambda_k F_k(x_1, \dots, x_m).$$

Параметры $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ - называются множителями Лагранжа.

Необходимые условия условного экстремума записываются в виде системы

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_i}(M) = 0 & (i = 1, \dots, m) \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_k}(M) \equiv F_k(M) = 0 & (k = 1, \dots, s), \end{cases}$$

из которой находятся $x_1^0, \dots, x_m^0, \lambda_1^0, \dots, \lambda_s^0$, где (x_1^0, \dots, x_m^0) - координаты точки, в которой возможен условный экстремум (для каждой такой точки получается свой (!) набор параметров $\lambda_1, \dots, \lambda_s$).

Достаточным условием условного экстремума является знакоопределенность второго дифференциала функции L при $\lambda_1 = \lambda_1^0, \dots, \lambda_s = \lambda_s^0$, вычисленного в точке (x_1^0, \dots, x_m^0) . При этом требуется знакоопределенность второго дифференциала не для произвольных наборов dx_1, \dots, dx_m , а для наборов, связанных соотношениями:

$$\sum_{j=1}^m \frac{\partial F_k(x_1^0, \dots, x_m^0)}{\partial x_j} dx_j = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, s).$$

(Эти соотношения получаются, если взять дифференциалы от уравнений связи).

Пример 2. Исследовать на условный экстремум функцию $f(x, y) = xy$ при наличии связи $x^2 + y^2 = 1$.

Функция Лагранжа имеет вид:

$$L = xy + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = y + 2\lambda x = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = x + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Решая эту систему, получим четыре решения:

$$\begin{cases} x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad \lambda = \pm \frac{1}{2}$$

(+, если x, y разных знаков)
(-, если x, y одного знака).

Рассмотрим, например, точку $x_1 = y_1 = \frac{1}{2}$; $\lambda = -\frac{1}{2}$

Для $\lambda = -\frac{1}{2}$ функция Лагранжа принимает вид:

$$L(x,y) = xy - \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - 1).$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = -1; \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 1; \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = -1,$$

$$d^2 L\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) = -(dx)^2 + 2 \cdot 1 \cdot dx dy - (dy)^2 = -(dx - dy)^2.$$

Этот дифференциал является квазизнакоопределенным для произвольных dx и dy . Однако, dx и dy не являются независимыми, и из уравнения связи следует

$x^2 + y^2 - 1 = 0 \Rightarrow 2x dx + 2y dy = 0$, и в т. $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ получаем $dx + dy = 0$, или $dy = -dx$.

Подставим это соотношение в $d^2 L\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, получим

$$d^2 L\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) = -(dx - (-dx))^2 = -(-2dx)^2 = -4(dx)^2$$

Эта квадратичная форма отрицательно определена, и в т. $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ исходная функция $f=xy$ имеет условный максимум.

Замечание. Для разыскания наибольшего (наименьшего) значения дифференцируемой функции $u = f(x_1, \dots, x_m)$ в замкнутой области D , ограниченной гладкой кривой, поступаем следующим образом:

1) находим стационарные точки внутри D , решая систему

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial f}{\partial x_m} = 0 \end{cases};$$

2) находим стационарные точки функции Лагранжа для случая, когда уравнением связи является уравнение границы области D ;

3) сравниваем значения функции f в полученных точках: наибольшее из них будет наибольшим значением функции в области D ; наименьшее - наименьшим значением функции в области D .

В предыдущем примере внутри круга $x^2 + y^2 \leq 1$ функция $f(x,y)=xy$ имеет четыре стационарных точки

$$\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}; \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

1.9. Функции нескольких переменных	Для замечаний
<p>Вычислив значения функции в этих точках, получим, что наибольшее значение функции в круге равно $\frac{1}{2}$ и достигается в точках $(-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}})$, а наименьшее значение равно $-\frac{1}{2}$.</p>	

1.10. Двойные интегралы

Двойные интегралы представляют собой одно из возможных обобщений понятия определенного интеграла на случай функции двух переменных. К введению этого понятия естественным образом приводит решение задачи об объеме цилиндрического тела.

Рассмотрим тело V , которое сверху ограничено поверхностью $z=f(x,y)$, где $f(x,y)$ – непрерывная функция, с боков – цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси z , наконец снизу – областью σ плоскости XOY (σ – проекция поверхности S заданной уравнением $z=f(x,y)$ на плоскость XOY). Такое тело V будем называть цилиндрическим телом с основанием σ (рис. 1). В частных случаях боковая поверхность может отсутствовать, например: $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$.

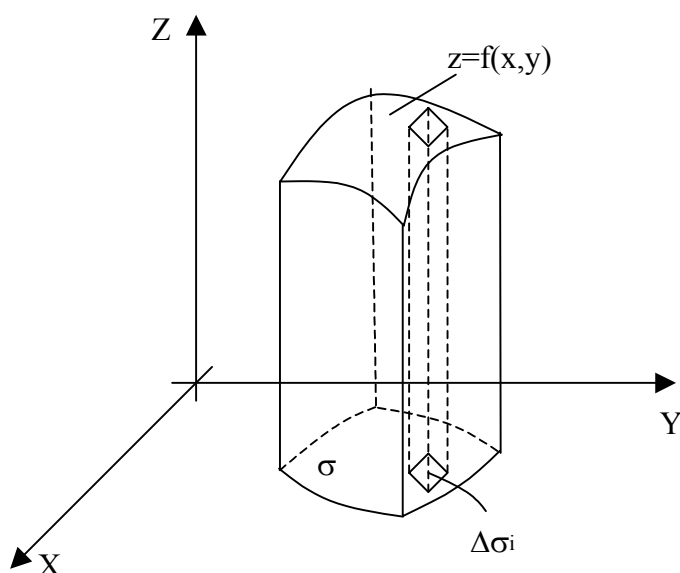


Рис. 1

Требуется найти объем этого цилиндрического тела.

Для решения этой задачи применим обычный в интегральном исчислении метод, состоящий в разложении искомой величины на элементарные части, приближенному подсчету каждой части, суммированию и последующему предельному переходу. С этой целью разобьем область σ на n частей: $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$ и рассмотрим ряд цилиндрических столбиков, которые имеют своими основаниями эти частичные области и в совокупности составляют данное тело. Напомним два принципа из которых мы исходим при определении объема тела:

1. Если разбить тело на части, то его объем будет равен сумме объемов всех частей.
2. Объем прямого цилиндра, т.е. цилиндрического тела, ограниченного плоскостью, параллельной плоскости XOY , равен площади основания, умноженной на высоту тела.

1.10. Двойные интегралы	Для замечаний
<p>Для определения объема ΔV_i столбца с основанием $\Delta\sigma_i$ возьмем в области $\Delta\sigma_i$ произвольную точку $P_i(x_i; y_i)$ и построим цилиндр с основанием $\Delta\sigma_i$ и высотой $h_i=f(x_i; y_i)$ на $\Delta\sigma_i$ можно принять за приближенное значение объема ΔV_i:</p> $\Delta V_i \approx f(x_i; y_i) \cdot \Delta\sigma_i$ <p>Рассмотрим $V_n = f(x_1; y_1)\Delta\sigma_1 + f(x_2; y_2)\Delta\sigma_2 + \dots + f(x_n; y_n)\Delta\sigma_n = \sum_{i=1}^n f(x_i; y_i)\Delta\sigma_i$.</p> <p>Принимая объем V данного цилиндрического тела приближенно равному V_n, будем считать, что V_n тем точнее выражает V, чем больше n и чем меньше каждая из частичных областей.</p> <p>Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, мы будем требовать, чтобы не только площадь каждой частичной области стремилась к нулю, но чтобы стремились к нулю все ее размеры.</p> <p>Назовем диаметром области наибольшее расстояние между точками ее границы. Если диаметр области устремить к нулю, то сама область будет стягиваться в точку. Обозначим через λ максимальный из диаметров разбиения области σ на части $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$. Если при стремлении λ к нулю ($\lambda \rightarrow 0$) интегрирование суммы $\sum_{i=1}^n f(x_i; y_i)\Delta\sigma_i$ имеют конечный предел, то этот предел называют двойным интегралом от функции $f(x, y)$ по области σ и обозначают символами:</p> $\iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma \text{ или } \iint_{\sigma} f(x, y) dx dy$ <p>Здесь $f(x, y)$ – подынтегральная функция, σ – область интегрирования, x и y – переменные интегрирования, $d\sigma(dx, dy)$ – элемент площади.</p> <p>Таким образом, по определению</p> $\iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i; y_i) \Delta\sigma_i,$ <p>если этот предел существует и конечен.</p> <p>Таким образом получим:</p> $V = \iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma.$ <p>Функцию $f(x, y)$, для которой существует двойной интеграл будем называть интегрируемой в области σ.</p>	

1.10. Двойные интегралы	Для замечаний
<p>1.10.1. Условия существования двойного интеграла и его свойства</p> <p>Очевидно, что интегрируемая в области σ функция должна быть ограничена в замкнутой области σ, т.к. в противном случае за счет выбора точек P_i интегральную сумму можно было бы сделать сколь угодно большой, по абсолютной величине, и это противоречит определению.</p> <p>Приведем без доказательства достаточные условия существования двойного интеграла.</p> <p>Теорема 1. Если функция $f(x,y)$ непрерывна в замкнутой области σ, то двойной интеграл $\iint_{\sigma} f(x,y)d\sigma$ существует.</p> <p>Теорема 2. Если функция $f(x,y)$ ограничена в замкнутой области σ и непрерывна в ней всюду, кроме конечного числа кусочно-гладких линий, то двойной интеграл $\iint_{\sigma} f(x,y)d\sigma$ существует.</p> <p>Пусть m_i и M_i наименьшее и наибольшее значение функции $f(x,y)$ на $\Delta\sigma_i$. Сформулируем критерий существования двойного интеграла:</p> <p>Теорема 3. Для существования двойного интеграла необходимо и достаточно</p> $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta\sigma_i = 0$ <p>Приведем свойства двойного интеграла.</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Двойной интеграл $\iint_{\sigma} f(x,y)dx dy$ не зависит от обозначения переменных интегрирования. 2. Постоянный множитель подынтегральной функции можно выносить за знак двойного интеграла \iint: $\iint_{\sigma} k \cdot f(x,y)d\sigma = k \iint_{\sigma} f(x,y)d\sigma$ <ol style="list-style-type: none"> 3. Двойной интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме двойных интегралов от слагаемых функций $\iint_{\sigma} (f(x,y) \pm \varphi(x,y) \pm \dots \pm g(x,y))d\sigma = \iint_{\sigma} f(x,y)d\sigma \pm \iint_{\sigma} \varphi(x,y)d\sigma \pm \dots \pm \iint_{\sigma} g(x,y)d\sigma$	

4. Если область σ разбита на две не имеющие общих внутренних точек области σ_1 и σ_2 , то:

$$\iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma = \iint_{\sigma_1} f(x, y) d\sigma + \iint_{\sigma_2} f(x, y) d\sigma$$

5. Если во всех точках области σ функции $f(x, y)$ и $\varphi(x, y)$ удовлетворяют условию $f(x, y) \geq \varphi(x, y)$ то:

$$\iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma \geq \iint_{\sigma} \varphi(x, y) d\sigma$$

6. Если $f(x, y)$ во всех точках области интегрирования σ удовлетворяет неравенствам:

$$m \leq f(x, y) \leq M$$

$$m \cdot S \leq \iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma \leq M \cdot S,$$

где S – площадь области σ .

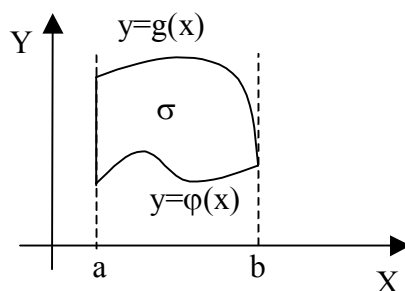
7. Если функция $f(x, y)$ непрерывна в замкнутой области σ , то в этой области существует точка $P(a, b)$, такая, что

$$\iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma = f(a, b) \cdot S$$

1.10.2. Вычисление двойных интегралов

Продолжая трактовать двойной интеграл геометрически, как объем цилиндрического тела, мы дадим здесь указания относительно его вычисления путем сведения к вычислению определенных интегралов.

Теорема. Если функция $f(x, y)$ непрерывна в замкнутой области σ ограниченной линиями $x=a$, $x=b$ ($a < b$), $y=\varphi(x)$, $y=g(x)$ ($\varphi(x)$ и $g(x)$ – непрерывные функции на отрезке $[a, b]$, причем $\varphi(x) \leq g(x)$ на этом отрезке), то имеет место равенство



$$\iint_{\sigma} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{g(x)} f(x, y) dy \right) dx, (*)$$

позволяющее свести вычисление двойного интеграла к последовательному вычислению определенного интеграла от определенного интеграла (или, что тоже, к вычислению повторного интеграла).

Повторный интеграл заданный в правой части равенства (*), обычно записывается в виде:

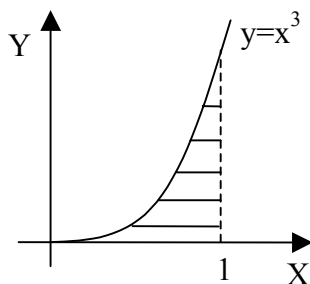
$$\int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{g(x)} f(x, y) dy$$

При вычислении двойного интеграла с помощью повторного по формуле (*) сначала вычисляется внутренний интеграл

$$\int_{\varphi(x)}^{g(x)} f(x, y) dy$$

при постоянном значении переменной x , в пределах изменения y (для области σ), затем полученная функция от x интегрируется по x в максимальных пределах изменения переменной для области σ .

Рассмотрим пример. Вычислить интеграл $\iint_{\sigma} (x - y) dx dy$ если область σ ограничена линиями $y=0$; $y=x^3$, $x=1$.



Так как область σ и функция $f(x, y)$ удовлетворяют условиям теоремы получим:

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} (x - y) dx dy &= \int_0^1 dx \int_0^{x^3} (x - y) dy = \int_0^1 \left(xy - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{y=0}^{y=x^3} dx = \\ &= \int_0^1 \left(x^4 - \frac{x^6}{2} \right) dx = \left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{14} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{5} - \frac{1}{14} = \frac{9}{70} \end{aligned}$$

Если область σ представляет собой криволинейную трапецию другого типа и ограничена линиями $y=c$; $y=d$; ($c < d$), $x=g_1(y)$; $x=g_2(y)$ ($c \leq y \leq d$), ($g_1(y)$, $g_2(y)$ непрерывные на $[c; d]$ функции причем всюду на этом отрезке $g_1(y) \leq g_2(y)$), то получим формулу

$$\iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma = \int_c^d dy \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x, y) dx$$

Замечание. Если контур области σ пересекается лишь в двух точках прямыми параллельными оси ординат, так и параллельными оси абсцисс (как, например, в случае, изображенном на рис. 2).

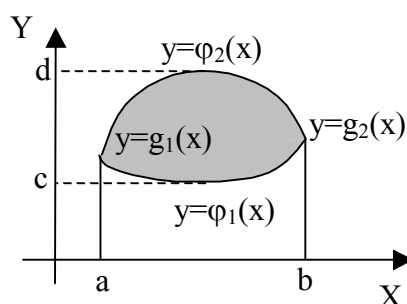


Рис. 2.

то при выполнении указанных условий применимы обе упомянутые формулы. Из сопоставления их получается равенство:

$$\int_a^b dx \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x, y) dx$$

Пример. Вычислить двойной интеграл $\iint_D x dx dy$ по области D ограниченной линиями $y=1-x$, $y=2$, $y=x^2+1$ (рис. 3).

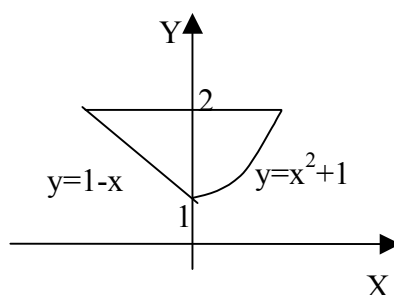


Рис. 3.

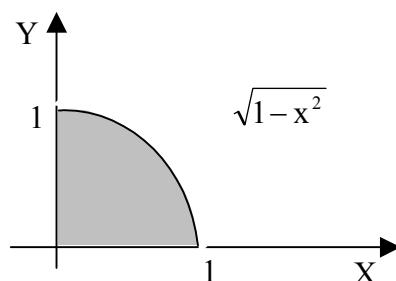
Применяя формулу сведения двойного интеграла к повторному (условия теоремы выполнены), получим:

$$\begin{aligned}\iint_D x dx dy &= \int_1^2 dy \int_{1-y}^{\sqrt{y-1}} x dx = \int_1^2 \left. \frac{x^2}{2} \right|_{1-y}^{\sqrt{y-1}} dy = \int_1^2 \left(\frac{y-1}{2} - \frac{(1-y)^2}{2} \right) dy = \\ &= \frac{1}{2} \int_1^2 (-2 + 3y - y^2) dy = \frac{1}{2} \left(-2y + \frac{3y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_1^2 = \frac{1}{12}\end{aligned}$$

Пример. Найти пределы двукратного интеграла $\iint_D f(x, y) dx dy$ для данных (конечных) областях интегрирования D.

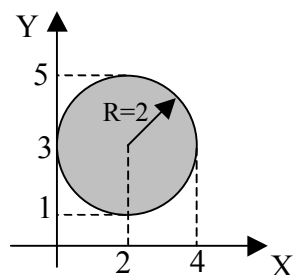
1. $x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$.

Решение. Полезно сделать чертеж, хотя бы грубо, чтобы получить общее представление об области.



$$\begin{aligned}\iint_D (x, y) dx dy &= \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy, \text{ или} \\ \iint_D (x, y) &= \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx\end{aligned}$$

2. $(x-2)^2 + (y-3)^2 \leq 4$



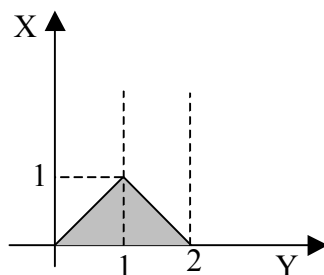
$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^4 dx \int_{3-\sqrt{4-(x-2)^2}}^{3+\sqrt{4-(x-2)^2}} f(x, y) dy, \text{ или}$$

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_1^5 dy \int_{2-\sqrt{4-(y-3)^2}}^{2+\sqrt{4-(y-3)^2}} f(x, y) dx$$

Пример. Переменив порядок интегрирования, записать данное выражение в виде одного двукратного интеграла:

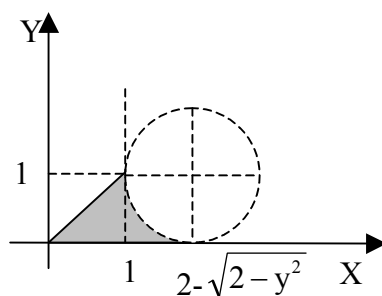
$$1. \int_0^1 dx \int_0^x f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x, y) dy = \iint_D f(x, y) dx dy$$

Сделаем чертеж области:



получим $\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^1 dy \int_{xy}^{2-y} f(x, y) dx$.

$$2. \int_0^1 dx \int_0^{\frac{2}{x^3}} f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{1-\sqrt{4x-x^2-3}} f(x, y) dy = \iint_D f(x, y) dx dy$$



$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^1 dy \int_{\frac{2}{y^3}}^{2-\sqrt{2-y^2}} f(x, y) dx$$

1.10.2. Замена переменных в двойном интеграле

Пусть имеются две плоскости с выбранными на них прямоугольными декартовыми системами координат XOY и область UOV . Рассмотрим в этих плоскостях две замкнутые области: области D на плоскости XOY и области σ на плоскости UOV , и предположим, что функции:

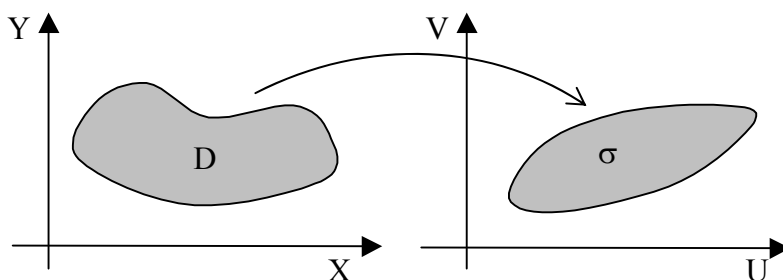
$$\begin{aligned} x &= \varphi(U, V) \\ y &= \psi(U, V) \end{aligned} \quad (1)$$

устанавливают взаимно однозначное соответствие между точками этих областей.

Пусть функции $\varphi(U, V)$ и $\psi(U, V)$ непрерывны в области σ вместе со своими частными производными первого порядка. Тогда определитель

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi(U, V)}{\partial U} & \frac{\partial \varphi(U, V)}{\partial V} \\ \frac{\partial \psi(U, V)}{\partial U} & \frac{\partial \psi(U, V)}{\partial V} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial U} & \frac{\partial x}{\partial V} \\ \frac{\partial y}{\partial U} & \frac{\partial y}{\partial V} \end{vmatrix}$$

будет непрерывной функцией переменных U и V , определенных в области σ . Этот функциональный определитель, называемый определителем Якоби или якобианом отображения (1), принято обозначать $J(U, V)$ или символом $\frac{\partial(x, y)}{\partial(U, V)}$. Абсолютная величина Якобиана играет роль коэффициента плоскости UOV при преобразовании ее в плоскость XOY .



Рассмотрим двойной интеграл

$$\iint_D f(x, y) dx dy$$

от непрерывной в заданной области D , ограниченной кусочно-гладкой линией.

Поставим своей целью заменить двойной интеграл по переменным x и y (по области D) равным уде двойным интегралом по переменным U и V (по области σ).

Эта цель достигается с помощью формулы замены переменной в двойном интеграле:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\sigma} (f(\varphi(U, V), \psi(U, V)) |J(U, V)| dU dV.$$

Применим эту формулу при переходе к полярным координатам: $x = \rho \cos \alpha$; $y = \rho \sin \alpha$.

Вычислим Якобиан:

$$O(\rho, \alpha) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \alpha)} = \begin{vmatrix} \cos \alpha - \rho \sin \alpha \\ \sin \alpha - \rho \cos \alpha \end{vmatrix} = \rho \cos^2 \alpha + \rho \sin^2 \alpha = \rho.$$

В итоге получим формулу перехода к полярным координатам

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\sigma} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho d\varphi$$

Пример. Вычислить интеграл Пуассона $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$. Для вычисления рассмотрим двойной интеграл $\iint_D e^{-x^2-y^2} dx dy$, где D четверть круга радиуса R , расположенная в первом квадранте. Преобразуем его к полярным координатам:

$$\iint_D e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R e^{-\rho^2} \rho \cdot d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{e^{-\rho^2}}{2} \Big|_0^R \right) d\varphi = \frac{\pi}{4} (1 - e^{-R^2})$$

Предположим, что $R \rightarrow +\infty$, т.е. область D расширяясь заполняет весь первый квадрант. По аналогии с несобственным интегралом от функции одной переменной запишем

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-x^2-y^2} dx dy = \frac{\pi}{4} \lim_{R \rightarrow \infty} (1 - e^{-R^2}) = \frac{\pi}{4} \quad (*)$$

Примем теперь в качестве области D квадрат $0 \leq x \leq a$; $0 \leq y \leq a$, тогда

$$\iint_D e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_0^a dx \int_0^a e^{-x^2-y^2} dy = \int_0^a e^{-x^2} dx \int_0^a e^{-y^2} dy$$

1.10. Двойные интегралы	Для замечаний
<p>Т.к. величина определенного интеграла не зависит от обозначения переменной интегрирования, то полученное выражение равно $\left(\int_0^a e^{-x^2} dx\right)^2$.</p> <p>Устремляя $a \rightarrow \infty$ получим:</p> $\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x^2-y^2} dx dy = \lim_{a \rightarrow \infty} \left(\int_0^a e^{-x^2} dx\right)^2 = \left(\int_a^\infty e^{-x^2} dx\right)^2 \quad (**)$ <p>Сравнивая равенства (*) и (**) получим</p> $\left(\int_0^\infty e^{-x^2} dx\right)^2 = \frac{\pi}{4} \text{ или } \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{ и окончательно } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$	

1.11. Ряды

1.11.1. Числовые ряды

1.11.1.1. Основные понятия

Пусть задана некоторая бесконечная последовательность чисел:

$$U_1, U_2, \dots, U_n, \dots \quad (1).$$

Составленный из этих чисел символ (формальное выражение)

$$U_1 + U_2 + \dots + U_n + \dots \quad (2).$$

называется бесконечным числовым рядом (или просто рядом). Вместо (2), пользуясь знаком суммы, часто пишут так:

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n \quad (2a)$$

где символ \sum заменяет слово “сумма”, а индексы внизу и вверху означают, что нужно взять сумму чисел U_n , когда n пробегает все целочисленные значения от 1 до ∞ . (Впрочем, нумерацию членов ряда иногда бывает удобнее начинать не с единицы, а с нуля или же с какого-либо натурального числа, большего единицы).

Числа $U_1, U_2, \dots, U_n, \dots$ - называются членами ряда, а член ряда, стоящий на n -ом месте от начала - его общим членом.

Примеры рядов:

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots,$$

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots,$$

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots$$

Задать ряд - это значит указать правило, закон образования его членов, по которому можно найти любой его член. Ряд можно задать формулой его общего члена. Например, если $U_n = \frac{1}{2n-1}$, то тем самым определен следующий ряд:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \dots$$

Выражение (2) является формальным, поскольку сумма бесконечного числа слагаемых не определена. Но поскольку в этом выражении между числами ряда знак суммирования, то подразумевается, что члены ряда как-то складываются. Сумма любого числа слагаемых будет найдена, если их складывать последовательно по одному. Это приводит к мысли поставить в соответствие ряду некоторое число и назвать его суммой ряда. С этой целью вводят понятие частичной суммы ряда.

Определение: Частичной суммой S_n числового ряда (2) называется сумма его первых n слагаемых, т.е.

$$S_1 = U_1, S_2 = U_1 + U_2, S_3 = U_1 + U_2 + U_3, \dots, S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n.$$

Определение: Суммой числового ряда называется предел последовательности его частичных сумм, если этот предел существует

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n.$$

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ существует, то ряд (2) называется сходящимся, если же $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ не существует, то ряд (2) называется расходящимся. В частности, если $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$, то ряд расходится.

Примеры:

1. Рассмотрим ряд $1-1+1-1+1-\dots$. Найдем его частичные суммы $S_1=1$, $S_2=0$, $S_3=1$, $S_4=0, \dots$. Последовательность его частичных сумм $1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots$ не имеет предела, следовательно ряд расходится.

2. Рассмотрим ряд

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots,$$

Найдем его частичные суммы:

$$S_1 = \frac{1}{1 \cdot 2} = 1 - \frac{1}{2};$$

$$S_2 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) = 1 - \frac{1}{3}, \dots$$

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \dots + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{n+1}) = 1$, то рассматриваемый ряд сходится: его сумма равна 1.

3. Рассмотрим сумму членов геометрической прогрессии с первым членом a и знаменателем q (будем считать $a \neq 0$):

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots + aq^{n-1} + \dots$$

Известно, что сумма S_n первых прогрессии определяется по формуле

$$S_n = \frac{a - aq^n}{1 - q}, \text{ или } S_n = \frac{a}{1 - q} - \frac{aq^n}{1 - q}.$$

Рассмотрим несколько случаев в зависимости от величины q :

1. $|q| < 1$. Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{a}{1 - q} - \frac{aq^n}{1 - q}) = \frac{a}{1 - q}$ (т.к. $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$).

Следовательно, при $|q| < 1$ ряд сходится и его сумма $S = \frac{a}{1 - q}$.

2. $|q| > 1$. Тогда $|q^n| \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, поэтому $S_n \rightarrow \infty$, т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ не существует.

3. $q = 1$. В этом случае ряд имеет вид $a + a + a + \dots + a + \dots$

При этом $S_n = n \cdot a$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$, так как $a \neq 0$. Следовательно, ряд расходится.

4. $q = -1$. Тогда ряд имеет вид $a - a + a - a + \dots + (-1)^{n-1}a + \dots$. Его частичные суммы попеременно равны a и 0 : $S_1 = a$, $S_2 = 0$, $S_3 = a$, $S_4 = 0$, ..., но такая последовательность не имеет предела, и, следовательно, рассматриваемый ряд расходится.

1.11. Ряды	Для замечаний
<p>Итак, ряд составленный из членов геометрической прогрессии сходится тогда и только тогда, когда знаменатель прогрессии q по абсолютной величине меньше единицы.</p> <p style="text-align: center;">1.11.1.2. Основные теоремы</p> <p>Если в ряде (2) отбросить первые m членов, то получится ряд:</p> $U_{m+1}+U_{m+2}+\dots+U_{m+k}+\dots=\sum_{n=m+k}^{\infty} U_n \quad (3)$ <p>называемый остатком ряда (2) после m-ого члена.</p> <p>1°. Если сходится ряд (2), то сходится и любой из его остатков (3); обратно, их сходимости остатка (3) вытекает сходимость исходного ряда (2).</p> <p>Фиксируем m и обозначим k-ю частичную сумму ряда (3) через $S_k^$</p> $S_k^ =U_{m+1}+U_{m+2}+\dots+U_{m+k}$ <p>Тогда, очевидно,</p> $S_k^ =S_{m+k}-S_m \quad (4).$ <p>Если ряд (2) сходится, так что $S_n \rightarrow S$, то при неограниченном возрастании R -существует конечный предел</p> $S^ =S-S_m \quad (5)$ <p>и для суммы $S_k^$, что и означает сходимость ряда (3). Обратно, если дано, что сходится ряд (3), так что $S_k^ \rightarrow S^$, то перепишем равенство (4), полагая в нем $R=n-m$ (при $n>m$), так:</p> $S_n=S_m+S_{n-m}^ $ <p>отсюда можно усмотреть, что при неограниченном возрастании n - частичная сумма S_n имеет предел</p> $S=S_m+S^ \quad (6),$ <p>т.е. сходится ряд (2).</p> <p>Иными словами, отбрасывание конечного числа начальных членов ряда или присоединение вначале его нескольких новых членов не отражается на сходимости ряда.</p> <p>Сумму ряда (3), если он сходится, обозначим вместо $S^$ символом α_m, указывая значком, после какого члена берется остаток. Тогда формулы (6) и (5) перепишутся следующим образом:</p> $S=S_m+\alpha_m, \alpha_m=S-S_m.$ <p>Если увеличивать m до бесконечности, то $S_m \rightarrow S$, а $\alpha_m \rightarrow 0$. Итак:</p> <p>2°. Если ряд (2) сходится, то сумма α_m его остатка после m-ого члена с возрастанием m стремиться к нулю.</p> <p>Упомянем следующие простые свойства сходящихся рядов:</p> <p>3°. Если члены сходящегося ряда (2) умножить на один и тот же множитель c, то его сходимость не нарушится (а сумма лишь умножится на c).</p> <p>В самом деле, частичная сумма \bar{S}_n ряда</p> $cU_1+cU_2+\dots+cU_n+\dots$ <p>очевидно, равна</p> $\bar{S}_n=cU_1+cU_2+\dots+cU_n=c(U_1+U_2+\dots+U_n)=cS_n$ <p>и имеет пределом cA.</p> <p>4°. Два сходящихся ряда</p> $A=a_1+a_2+\dots+a_n+\dots \text{ и }$	

$$B = b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots$$

можно почленно складывать (или вычитать), так что ряд

$$(a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + \dots + (a_n \pm b_n) + \dots$$

также сходится, и его сумма равна, соответственно, $A \pm B$.

Если A_n , B_n и C_n означают частичные суммы упомянутых рядов, то, очевидно

$$\begin{aligned} C_n &= (a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + \dots + (a_n \pm b_n) = \\ &= (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \pm (b_1 + b_2 + \dots + b_n) = A_n \pm B_n. \end{aligned}$$

Переходя к пределу, найдем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} B_n$, что и доказывает наше утверждение.

В заключение сделаем еще одно замечание.

5°. Общий член U_n сходящегося ряда стремится к нулю. Это может быть доказано совершенно элементарно: ряд S_n (а с ним и S_{n-1}) имеет конечный предел S , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

Следствие. Если предел общего члена ряда при $n \rightarrow \infty$ не равен нулю, то ряд расходится.

Доказательство проведем от противного, т.е. допустим, что ряд сходится. Тогда в силу необходимого признака сходимости должно выполняться условие $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 0$. Но по условию предел общего члена ряда не равен нулю. Это противоречие означает, что предположение о сходимости ряда ошибочно; следовательно, ряд расходится.

Пример. Исследовать сходимость ряда

$$\frac{10}{1001} + \frac{20}{2001} + \dots + \frac{10n}{1000n+1} + \dots$$

Найдем предел общего члена ряда при $n \rightarrow \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10n}{1000n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10}{1000 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{100} \neq 0.$$

Значит, данный ряд расходится.

Однако важно подчеркнуть, что необходимо условие сходимости ряда не является само по себе достаточным для сходимости ряда. Иными словами, даже при выполнении его ряд может расходиться. Примером такого ряда служит ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots,$$

который называется гармоническим. Последовательность его частичных сумм $S_1=1$, $S_2 = 1 + \frac{1}{2}$; $S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$, ... монотонно возрастает, поскольку члены ряда положительны. Покажем, что она возрастает неограниченно. Для этого члены гармонического ряда, начиная с третьего, объединим в группы:

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16}\right) + \dots$$

В первую включим два члена (3-й и 4-й), во вторую $2^2=4$ члена (с 5-го по 8-й), в третью $2^3=8$ членов (с 9-го по 16-й) и т.д., каждый раз увеличивая вдвое число членов в группе. Таких групп, очевидно, бесконечное множество. Если заменить члены ряда в каждой группе их последними членами, то сумма членов этой группы уменьшится, т.е. справедливы неравенства

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}, \dots$$

Таким образом, сумма членов каждой группы больше $\frac{1}{2}$, а сумма членов, включенных в достаточно большое число групп, как угодно велика. Следовательно, последовательность частичных сумм гармонического ряда неограниченно возрастает, а ряд расходится, хотя его общий член $U_n = \frac{1}{n}$ при $n \rightarrow \infty$ стремится к нулю.

Заметим, что частичные суммы гармонического ряда возрастают, хотя и медленно. Например подсчитано, что $S_{1000} \approx 7,48$, а $S_{1000000} \approx 14,39$.

1.11.1.3. Сходимость положительных рядов

Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ будет положительным, т.е. $a_n > 0$ ($n=1,2,3,\dots$).

Тогда очевидно, $A_{n+1} = A_n + a_{n+1} > A_n$, т.е. A_n оказывается возрастающей. На основании теоремы о пределе монотонной последовательности, мы непосредственно приходим к следующему основному в теории положительных рядов предложению!

Положительный ряд всегда имеет сумму; эта сумма будет конечной (и, следовательно, ряд - сходящимся), если частичные суммы ряда ограничены сверху, и бесконечной (а ряд - расходящимся) в противном случае.

1.11.1.4. Теоремы сравнения рядов

Сходимость или расходимость положительного ряда часто устанавливают путем сравнения его с другим рядом, заведомо сходящимся или расходящимся. В основе такого сравнения лежит следующая теорема.

Теорема 1. Пусть даны два положительных ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad (A)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots \quad (B)$$

Если, хотя бы начиная с некоторого места (скажем, для $n > N$), выполняется неравенство: $a_n \leq b_n$, то из сходимости ряда (B) вытекает сходимость ряда (A) или - что то же - из расходимости ряда (A) следует расходимость ряда (B).

Доказательство. На основании того, что отбрасывание конечного числа начальных членов ряда не отражается на его поведении, мы можем считать, не нарушая общности, что $a_n \leq b_n$ при всех значениях $n=1,2,3,\dots$

Обозначим частные суммы рядов (A) и (B), соответственно, через A_n и B_n , будем иметь: $A_n \leq B_n$.

Пусть ряд (B) сходится, тогда его частичные суммы B_n ограничены: $B_n \leq L$ ($L = \text{const}$; $n=1,2,3,\dots$).

В силу предыдущего неравенства, и подобно $A_n \leq L$, а это, по той же теореме, влечет за собой сходимость ряда (A).

Иногда на практике более удобна следующая теорема, вытекающая из первой:

Теорема 2. Если существует предел (в предположении, что $v_n \neq 0$)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{v_n} = K \quad (0 \leq K \leq +\infty)$$

то из сходимости ряда (B), при $K < +\infty$, вытекает сходимость ряда (A), а из расходимости первого ряда, при $K > 0$, вытекает расходимость второго. (Таким образом, при $0 < K < +\infty$ оба ряда сходятся или оба расходятся одновременно).

Доказательство. Пусть ряд (B) сходится и $K < +\infty$. Взяв произвольное число $\varepsilon > 0$, по самому определению предела, для достаточно больших n будем иметь

$$\frac{a_n}{v_n} < K + \varepsilon, \text{ откуда } a_n < (K + \varepsilon)v_n.$$

В силу 3^о одновременно с рядом (B) будет сходиться и ряд $\sum (K + \varepsilon)v_n$, полученный умножением его членов на постоянное число $K + \varepsilon$. Отсюда, по предыдущей теореме, вытекает сходимость ряда (A).

Если же ряд (B) расходится и $K > 0$, то в этом случае обратное отношение $\frac{v_n}{a_n}$ имеет конечный предел; ряд (A) должен быть расходящимся, ибо если бы он сходил, то, по доказанному, сходил бы и ряд (B).

Примеры.

1. Исследовать сходимость ряда

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^2} + \dots + \frac{1}{n \cdot 2^n} + \dots$$

Члены ряда не превосходят соответствующих членов сходящегося ряда, составленного из членов геометрической прогрессии с общим чис-

лом $U_n = \frac{1}{2^n}$:

$$\frac{1}{n \cdot 2^n} \leq \frac{1}{2^n} \quad (n=1,2,3,\dots).$$

Согласно теореме 1 данный ряд также сходится.

2. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{x}{n}$ ($0 < x < \pi$) расходится по теореме 2; в силу $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{x}{n}}{\frac{1}{n}} = x$

$(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \text{расходится}).$

Трудность применения на практике признаков (теорем 1 и 2) сравнения состоит в необходимости иметь “запас” рядов, сходимость (или расходимость) которых известна.

1.11.1.5. Признаки Даламбера и Коши

Теорема (признак Даламбера). Пусть для числового ряда с положительными членами:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots, \quad a_n > 0$$

существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$, то

при $l < 1$ ряд сходится,

при $l > 1$ ряд расходится,

при $l = 1$ ряд может сходиться или расходиться (в этом случае признак на вопрос о сходимости ряда ответа не дает).

По определению предела $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon)$, что $\forall n > N$ выполняется неравенство:

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - l \right| < \varepsilon \text{ или } l - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < l + \varepsilon.$$

Выберем N так, чтобы для $n > N$ было $l + \varepsilon = q < 1$, тогда

$$\frac{a_{N+1}}{a_N} < q; \quad a_{N+1} < q a_N; \quad a_{N+2} < q a_{N+1} < q^2 a_N;$$

$$a_{N+3} < q^3 a_N; \dots; a_{N+m} < q^m a_N; \dots$$

Ряд $a_N q + a_N q^2 + \dots + a_N q^m + \dots$ сходится, так как знаменатель прогрессии $q < 1$. Тогда по теореме 1 ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ также сходится.

Для случая $q > 1$ доказательство аналогично, только нужно рассмотреть $\frac{a_{n+1}}{a_n} > l - \varepsilon = q$.

Пример. Исследовать на сходимость ряд

$$1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

Решение. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$ - ряд сходится.

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами $a_n > 0$.

Признак Коши: Если существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l$, то при $l < 1$ ряд сходится; $l > 1$ - ряд расходится; $l = 1$ — определить сходимость невозможно.

Доказательство признака Коши аналогично доказательству признака Даламбера.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$.

Применим признак Коши:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = \frac{1}{2} < 1 - \text{ряд сходится.}$$

1.11.1.6. Интегральный признак Коши-Маклорена

Пусть $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ числовой ряд с положительными числами.

Теорема.

Пусть члены ряда удовлетворяют следующим условиям:

- 1) составляют монотонную невозрастающую последовательность
 $a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_n \geq \dots$;
- 2) можно построить монотонную невозрастающую функцию $y = f(x)$ такую, что $f(0) = a_0$; $f(1) = a_1$; $f(2) = a_2$; ... ; $f(n) = a_n$; ... ;
- 3) несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x) dx$ - сходится, тогда заданный ряд также сходится. Если же интеграл расходится, то и ряд расходится.

Доказательство.

Составим частичную сумму $S_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

Поскольку $a_i = f(i) \times 1$, то

$$S_n = f(0) \times 1 + f(1) \times 1 + f(2) \times 1 + \dots + f(n) \times 1$$

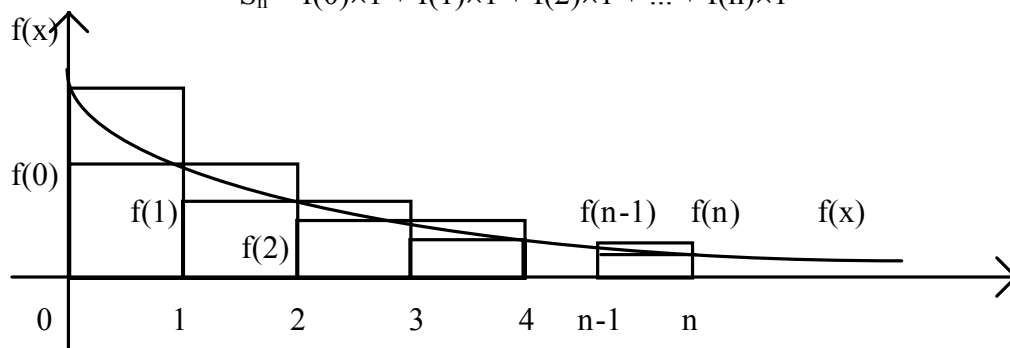


Рис. 1

Каждое слагаемое частичной суммы есть площадь прямоугольника с основанием единица и высотой, равной $f(i)$ (Рис. 1). Добавление к частичной сумме нового члена ряда означает добавление новой площади, а потому $S_n \leq S_{n+1}$, то есть последовательность частичных сумм неубывающая.

Рассмотрим частичную сумму $S_{n-1} = a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1}$ и примем за a_i площадь прямоугольника, лежащего справа от $f(i)$, т. е. с большей высотой. Тогда получим сумму площадей прямоугольников, часть площади которых расположена над кривой $f(x)$. Эта площадь равна $S_n - a_n$. Рассмотрим сумму

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = S_n - a_0.$$

Каждое слагаемое этой суммы есть площадь прямоугольника с основанием, равным единице, и маленькой высотой. Тогда сумма $a_1 + a_2 + \dots$

$+ a_n = S_n - a_0$ есть сумма площадей прямоугольников, лежащих под кривой $f(x)$. Рассмотрим

$$\int_1^n f(x) dx = I_n.$$

С геометрической точки зрения этот интеграл есть площадь, ограниченная кривой $f(x)$ при $0 \leq x < n$ и осью Ox .

Тогда из рис. 1 имеем

$$S_n - a_0 \leq J_n \leq S_n - a_n \Rightarrow S_n \leq J_n + a_0.$$

По условию теоремы существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n f(x) dx = J,$$

тогда $S_n \leq J + a_0$. Таким образом, последовательность $\{S_n\}$ ограничена сверху, а потому имеет предел, значит ряд сходится.

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} J_n = \infty$, то учитывая, что $S_n > J_n + a_n$, откуда следует, что ряд расходится.

Доказанная теорема называется интегральным признаком Коши-Маклорена.

Пример

Исследовать на сходимость обобщенный гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$.

Решение. Члены ряда составляют монотонно убывающую последовательность $1 > \frac{1}{2^p} > \frac{1}{3^p} > \dots > \frac{1}{n^p} > \dots$.

Следовательно, функцией $f(x)$ будет $\frac{1}{x^p}$; $f(x) = \frac{1}{x^p}$.

Рассмотрим $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ и $\int_1^N \frac{dx}{x^p}$

$$\int_1^N \frac{dx}{x^p} = \int_1^N x^{-p} dx = \left. \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right|_1^N = \frac{N^{-p+1}}{-p+1} - \frac{1}{-p+1};$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N^{-p+1} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^{p-1}} = \begin{cases} 0, & p > 1; \\ \infty, & p < 1. \end{cases}$$

$$\text{Тогда } \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n} = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_1^N \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} 0, & p > 1; \\ \infty, & p < 1. \end{cases}$$

Если $p=1$, то имеем $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ - гармонический ряд, расходимость которого доказана ранее.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$.

1.11.2. Знакопеременные ряды

Прежде чем рассматривать ряды с членами произвольных знаков, рассмотрим их частный случай, а именно ряды, члены которых имеют чередующиеся знаки, такие ряды называются **знакочередующимися**.

Знакочередующийся ряд, если первый член положителен, можно записать в виде:

$$U_1 - U_2 + U_3 - U_4 + \dots + (-1)^{n+1} U_n + \dots, \text{ где } U_n > 0, n=1, 2, 3, \dots$$

1.11.2.1. Признак Лейбница

Если члены знакочередующегося ряда

$$U_1 - U_2 + U_3 - U_4 + \dots$$

монотонно убывают по абсолютной величине, т. е.

$$U_1 \geq U_2 \geq U_3 \geq \dots \geq U_n \geq U_{n+1} \geq \dots$$

и общий член ряда стремится к нулю, $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 0$, то:

1) ряд сходится;

2) его сумма не превосходит величины первого члена ряда

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} U_n \leq U_1;$$

3) модуль суммы остатка ряда не превосходит абсолютной величины первого отброшенного члена (первого члена остатка):

$$|r_n| \leq U_{n+1}; \quad r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k U_k \text{ и имеет знак своего первого члена.}$$

Доказательство.

Построим $S_{2n} = U_1 - U_2 + U_3 - U_4 + \dots + U_{2n-1} - U_{2n} = (U_1 - U_2) + (U_3 - U_4) + \dots + (U_{2n-1} - U_{2n})$.

Поскольку любая скобка в этой сумме больше нуля, то последовательность $\{S_{2n}\}$ возрастающая. Докажем, что она ограниченная. Для этого представим S_{2n} следующим образом:

$$S_{2n} = U_1 - [(U_2 - U_3) + (U_4 - U_5) + \dots + (U_{2n-2} - U_{2n-1}) + U_{2n}].$$

Итак, последовательность $\{S_{2n}\}$ монотонно возрастающая, ограниченная и, следовательно, сходящаяся. Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = S$.

Чтобы доказать сходимость ряда, нужно доказать еще, что последовательность частичных сумм нечетного числа членов этого ряда также сходится и имеет предел, равный S .

Так как $S_{2n+1} = S_{2n} + U_{2n+1}$ и $U_{2n+1} \rightarrow 0$ (по условию), то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_{2n} + U_{2n+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} + \lim_{n \rightarrow \infty} U_{2n+1} = S + 0 = S$$

Заметим, что для суммы S ряда (1) справедливо соотношение $0 < S < U_1$. Действительно, частные суммы четных номеров S_{2n} , приближаясь к сумме S , возрастают, следовательно, $S > S_{2n}$ при любом n . Кроме того, $S_{2n} > 0$ ($n=1, 2, \dots$), а значит и $S > 0$. Частные суммы нечетных номеров S_{2n+1} можно записать в виде:

$$S_{2n+1} = U_1 - (U_2 - U_3) - \dots - (U_{2n} - U_{2n+1}).$$

Отсюда видно, что последовательность $\{S_{2n+1}\}$ монотонно убывающая и что $S_{2n+1} < U_1$ при любом n . Так как $S < S_{2n+1}$ при любом n , то, следовательно, $S < U_1$. Суммируя сказанное, получаем: $0 < S < U_1$.

Рассмотрим теперь остаток ряда, умноженный на $(-1)^n$
 $(-1)^n r_n = U_{n+1} - U_{n+2} + \dots$

Это ряд. По доказанному ряд сходится и его сумма не превосходит первого члена, то есть $|r_n| < U_{n+1}$.

Теорема доказана.

Пример

Ряд $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + \dots$ сходится по признаку Лейбница.

Этот ряд отличается от гармонического только знаками членов четных номеров.

Пример

Ряд $1 - \frac{1}{3 \times 3} + \frac{1}{5 \times 3^2} - \frac{1}{7 \times 3^3} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n-1)3^{n-1}} + \dots$ сходится по признаку Лейбница:

$$\frac{1}{(2n-1)3^{n-1}} > \frac{1}{(2n+1)3^n}; \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2n-1)3^{n-1}} = 0.$$

Если положить его сумму S , приближенно равной сумме первых шести членов этого ряда, то получим ошибку, абсолютная величина которой меньше, чем

$$\frac{1}{13 \times 3^6} < \frac{1}{9477} < 0,001, S \approx 0,907.$$

1.11.2.2. Абсолютная и условная сходимость рядов

Рассмотрим произвольный знакопеременный ряд

$$U_1 + U_2 + \dots + U_n + \dots, \quad (8.1)$$

т. е. ряд с членами произвольных знаков. Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин членов ряда (8.1):

$$|U_1| + |U_2| + \dots + |U_n| + \dots, \quad (8.2)$$

Теорема.

Если сходится ряд (8.2), то сходится и ряд (8.1).

Доказательство сразу получается из принципа сходимости : неравенство

$$|U_{n+1} + U_{n+2} + \dots + U_{n+m}| \leq |U_{n+1}| + |U_{n+2}| + \dots + |U_{n+m}|$$

показывает, что если условие сходимости выполняется для ряда (8.2), то оно тем более выполняется для ряда (8.1).

Можно рассуждать иначе. Из **положительных** членов ряда (8.1), перенумеровав их по порядку, составим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = p_1 + p_2 + K + p_k + K ; \quad (P),$$

так же поступим с **отрицательными** членами и составим ряд из их абсолютных величин

$$\sum_{m=1}^{\infty} q_m = q_1 + q_2 + K + q_m + K \quad (Q)$$

Сколько бы членов того или другого ряда ни взять, все они содержатся среди членов сходящегося ряда (8.2), и для всех частичных сумм P_k и Q_m выполняется неравенства

$$P_k \leq S^*; Q_m \leq S^*,$$

так что оба ряда (P) и (Q) сходятся; обозначим их суммы соответственно, через P и Q.

Если взять n членов ряда (A), то в их составе окажется k положительных и m отрицательных, так что

$$S_n = P_k - Q_m. \quad (8.3)$$

Здесь номера k и m зависят от n. Если в ряде (8.1) как положительных, так и отрицательных членов бесчисленное множество, то при $n \rightarrow \infty$ одновременно $k \rightarrow \infty$ и $m \rightarrow \infty$.

Переходя в равенстве (8.3) к пределу, приходим снова к заключению о сходимости ряда (8.1), причем его сумма оказывается равной

$$S = P - Q.$$

Можно сказать, что при сделанных предположениях сумма данного ряда равна разности между суммой ряда, составленного из одних положительных его членов, и суммой ряда, составленного из абсолютных величин отрицательных членов.

Если ряд (8.1) сходится вместе с рядом (8.2), составленным из абсолютных величин его членов, то про ряд (8.1) говорят, что он абсолютно сходится.

Если ряд (8.1) сходится и ряд (8.2) расходится. Тогда ряд (8.1) называют условно сходящимся.

Между свойствами абсолютно и условно сходящихся рядов имеется глубокое различие.

Теорема.

Если ряд сходится абсолютно, то он остается абсолютно сходящимся при любой перестановке его членов, причем сумма ряда не зависит от порядка его членов.

Если ряд сходится условно, то какое бы мы ни задали число A, или символ $+\infty$ или $-\infty$, можно так переставить члены этого ряда, чтобы его сумма оказалась в точности равной A (или $+\infty$ или $-\infty$). Более того, можно так переставить члены условно сходящегося ряда, что ряд, полученный после перестановки членов, окажется расходящимся.

На доказательство этой теоремы мы не будем останавливаться.

Приведем пример, показывающий, что сумма условно сходящегося ряда меняется при перестановке его членов.

Рассмотрим условно сходящийся ряд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots \quad (8.3)$$

Переставим его члены так, чтобы после одного положительного члена шло два отрицательных. Получим ряд

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} + \dots \quad (8.4)$$

Обозначим через S сумму данного ряда, покажем, что сумма полученного ряда равна $\frac{1}{2}S$. Обозначим через S_n и σ_n частичные суммы рядов (8.3) и (8.4) и рассмотрим частичную сумму σ_n при $n = 3k$.

$$\begin{aligned} \sigma_{3k} &= \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \dots \\ &\quad \dots + \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \dots \\ &\quad \dots + \left(\frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}\right) = \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right) = \frac{1}{2} S_{2k} \end{aligned}$$

$$\text{Следовательно, } \lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_{3k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2} S_{2k} = \frac{1}{2} S.$$

Далее замечаем, что

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_{3k+1} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sigma_{3k} + \frac{1}{2k+1} \right) = \frac{1}{2} S \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_{3k+2} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sigma_{3k} + \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{4k+2} \right) = \frac{1}{2} S \end{aligned}$$

$$\text{Таким образом, } \sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} = \frac{1}{2} S.$$

Итак, доказано, что в результате перестановки членов ряда его сумма изменилась (она вдвое уменьшилась).

Этот вывод, который на первый взгляд кажется парадоксальным, говорит о том, что бесконечные ряды отличаются по своим свойствам от сумм конечного числа слагаемых.

1.11.3. Функциональные ряды. Область сходимости. Степенные ряды

Функциональным рядом называется выражение

$$U_1(x) + U_2(x) + U_3(x) + \dots + U_n(x) + \dots,$$

члены которого $U_1(x)$, $U_2(x)$, ..., $U_n(x)$, ... являются функциями от x .

Давая x числовое значение x_0 , мы получаем числовой ряд

$$U_1(x_0) + U_2(x_0) + U_3(x_0) + \dots + U_n(x_0) + \dots,$$

который может быть как сходящимся, так и расходящимся.

Множество тех значений x , при которых функциональный ряд сходится, называется его областью сходимости. Ясно, что в области сходимости

сти сумма функционального ряда является некоторой функцией от x . Обозначим ее через $S(x)$.

Специальный класс функциональных рядов составляют так называемые степенные ряды вида

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots + c_n x^n + \dots, \quad (9.1)$$

где $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ - последовательность действительных чисел, коэффициенты ряда.

Выясним, какой вид имеет "область сходимости" степенного ряда, то есть множество $\{x\}$ тех значений переменной, для которых ряд (9.1) сходится.

Теорема Абеля.

Если степенной ряд (9.1) сходится в точке $x_0 \neq 0$, то он сходится и притом абсолютно в интервале $(-|x_0|, |x_0|)$, то есть при всех значениях x , удовлетворяющих условию $|x| < |x_0|$.

Доказательство.

Заметим, что вследствие сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n$ его общий член стремится к нулю: $c_n x_0^n \rightarrow 0$; поэтому абсолютные величины членов этого ряда, начиная с некоторого $n=N$ меньше любого наперед заданного числа $\varepsilon > 0$. Так как имеется конечное число членов ряда с номерами, меньшими N , то абсолютные величины этих членов ограничены некоторым числом M (в качестве M можно взять максимальную абсолютную величину членов ряда с этими номерами или ε , если оно больше). Следовательно, абсолютные величины всех членов ряда не превосходят числа M .

$$|c_n x_0^n| \leq M \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (9.2)$$

Представим ряд (9.1) в виде

$$c_0 + c_1 x_0 \times \frac{x}{x_0} + c_2 x_0^2 \left(\frac{x}{x_0} \right)^2 + \dots + c_n x_0^n \left(\frac{x}{x_0} \right)^n + \dots$$

и составим ряд из абсолютных величин его членов:

$$|c_0| + |c_1 x_0| \times \left| \frac{x}{x_0} \right| + |c_2 x_0^2| \times \left| \frac{x}{x_0} \right|^2 + \dots + |c_n x_0^n| \times \left| \frac{x}{x_0} \right|^n + \dots \quad (9.3)$$

Сравним его с рядом, составленным из членов геометрической прогрессии

$$M + M \times \left| \frac{x}{x_0} \right| + M \times \left| \frac{x}{x_0} \right|^2 + \dots + M \times \left| \frac{x}{x_0} \right|^n + \dots \quad (9.4)$$

Если $|x| < |x_0|$, то для этого ряда $\varepsilon = \left| \frac{x}{x_0} \right| < 1$, а поэтому он сходится.

Так как при любом n имеют места неравенства (9.2), то члены ряда (9.3) не превосходят соответствующих членов ряда (9.4). Члены этих рядов положительны, и, значит, в силу признака сравнения ряд (9.3) также сходится. Следовательно, и ряд (9.1) сходится, и притом абсолютно, при любом $|x| < |x_0|$.

Теорема доказана.

Следствие.

Если степенной ряд расходится при некотором значении $x = x_1$, то он расходится и при всех значениях $|x| > |x_1|$.

Любой степенной ряд сходится при значении $x=0$. Есть степенные ряды, которые сходятся только при $x=0$ и расходятся при остальных значениях x . Этот случай может быть иллюстрирован рядом

$$1 + x + 2^2 x^2 + \dots + n^n x^n + \dots ;$$

действительно, если x фиксировано и $x \neq 0$, то начиная с достаточно большого n , будет $|nx| > 1$, откуда вытекает неравенство $|n^n x^n| > 1$, означающее, что общий член ряда не стремится к нулю.

Область сходимости может состоять из всех точек оси Ox , другими словами, ряд может сходиться при всех x .

Пример.

Рассмотрим ряд $1 + x + \frac{x^2}{2^2} + \dots + \frac{x^n}{n^n} + \dots$.

Для любого x , начиная с достаточно большого n , будет $\left|\frac{x}{n}\right| < 1$. Так

как $\left|\frac{x}{n+1}\right|^{n+1} < \left|\frac{x}{n}\right|^{n+1}$, $\left|\frac{x}{n+2}\right|^{n+2} < \left|\frac{x}{n}\right|^{n+2}$ и т. д., то, начиная с номера n , члены ряда по абсолютной величине будут меньше членов сходящейся геометрической прогрессии. Следовательно, при любом x ряд сходится.

Область сходимости ряда может состоять более чем из одной точки оси Ox , причем есть точки оси, не принадлежащие области сходимости.

Например, ряд $1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$, представляющий геометрическую прогрессию со знаменателем x , сходится при $|x| < 1$ и расходится при $|x| \geq 1$.

Из теоремы Абеля и ее следствия получаем, что все точки сходимости расположены от начала координат не дальше, чем любая из точек расходимости. Совершенно ясно, что точки сходимости будут целиком заполнять некоторый интервал с центром в начале координат.

Таким образом, можно сказать, что для каждого степенного ряда, имеющего как точки сходимости, так и точки расходимости, существует такое положительное число R , что для всех x , по модулю меньших R ($|x| < R$), ряд абсолютно сходится, а для всех x , по модулю больших R ($|x| > R$), ряд расходится.

Что касается значений $x = R$ и $x = -R$, то здесь могут быть различные возможности: ряд может сходиться в обеих точках, или только в одной из них, или ни в одной. При этом ряд может сходиться как абсолютно, так и условно.

Определение.

Радиусом сходимости степенного ряда (9.1) называется такое число R , что для всех x , $|x| < R$, степенной ряд сходится, а для всех x , $|x| > R$, расходится. Интервал $(-R, R)$ называется интервалом сходимости.

Условимся для рядов, расходящихся при всех x , кроме $x=0$, считать $R=0$, а для рядов, сходящихся при всех x , считать $R=\infty$.

Теорема.

Если все коэффициенты степенного ряда, начиная с некоторого, отличны от нуля, то его радиус сходимости равен пределу при $n \rightarrow \infty$ отношения абсолютных величин коэффициентов общего и следующего за ним членов ряда.

Доказательство.

Составим ряд из абсолютных величин членов ряда (9.1)

$$|c_0| + |c_1 x| + |c_2 x^2| + \dots + |c_n x^n| + \dots \quad (9.5)$$

Найдем отношение $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ для этого ряда:

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{|c_{n+1} \times x^{n+1}|}{|c_n x^n|} = |x| \times \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|},$$

а затем предел его при $n \rightarrow \infty$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(|x| \times \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} \right) = |x| \times \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = |x| \times \frac{1}{R}.$$

Здесь множитель $|x|$ вынесен за знак предела, как не зависящий от n , и введено обозначение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = \frac{1}{R}, \quad (9.6)$$

если этот предел существует и не равен нулю. Согласно признаку Даламбера, ряд (9.5) сходится, если $|x| \times \frac{1}{R} < 1$, откуда $|x| < R$. Отсюда следует, что ряд (9.1) сходится, и притом абсолютно, при значениях $|x| < R$. Согласно тому же признаку Даламбера, ряд (9.5) расходится, если $|x| \times \frac{1}{R} > 1$, или $|x| > R$. Однако в этом случае из признака Даламбера следует, что члены ряда (9.5) не стремятся к нулю. Тогда при $n \rightarrow \infty$ не стремятся к нулю и члены ряда (9.1), а потому и он расходится при значениях $|x| > R$. Следовательно, согласно определению, число R - радиус сходимости степенного ряда (9.1). Из соотношения (9.6) получим

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}}, \text{ т. е. } R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}. \quad (9.7)$$

Приведем примеры:

1⁰ Найдем радиус сходимости ряда $1 + x + \frac{x}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty.$$

2⁰ Найти область сходимости степенного ряда

$$1 + \frac{x}{10} + \frac{2!x^2}{10^2} + \dots + \frac{n!x^n}{10^n} + \dots$$

Найдем отношение

$$\frac{c_n}{c_{n+1}} = \frac{n!}{10^n} : \frac{(n+1)!}{10^{n+1}} = \frac{10n!}{n!(n+1)} = \frac{10}{n+1}.$$

$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10}{n+1} = 0$, т. е. ряд сходится только при $x=0$ и расходится при остальных значениях x .

3⁰ Найти область сходимости степенного ряда:

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots$$

Здесь $|c_n| = \frac{1}{n}$, $|c_{n+1}| = \frac{1}{n+1}$, т. е. $\frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1.$$

Исследуем сходимость ряда на концах интервала сходимости.

При $x=1$ имеем ряд $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \dots$, он сходится по теореме Лейбница.

При $x=-1$ имеем ряд $-1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \dots - \frac{1}{n} - \dots$, который расходится как произведение расходящегося гармонического ряда на -1 . Следовательно, областью сходимости служит полуинтервал $(-1; 1]$.

4⁰ Найти область сходимости степенного ряда

$$1 + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{3^2} + \dots + \frac{x^n}{3^n} + \dots$$

Найдем радиус сходимости ряда

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3^n} : \frac{1}{3^{n+1}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1}}{3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 = 3.$$

Исследуем сходимость ряда при значениях $x = \pm 3$. Подставив их в данный ряд соответственно получим $1 + 1 + 1 + \dots + 1 + 1 + \dots$;

$1 - 1 + 1 - \dots + (-1)^n + \dots$. Оба ряда расходятся, так как не выполняется необходимое условие сходимости (их общие члены не стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$). На обоих концах интервала сходимости данный ряд расходится, а область его сходимости $(-3; 3)$.

Формула радиуса сходимости степенного ряда получена в предположении, что все коэффициенты членов ряда, начиная с некоторого, отличны от нуля. Применение формулы (9.7) допустимо только в этих случаях. Если это условие нарушается, то радиус сходимости степенного ряда следует искать или с помощью признаков Даламбера, Коши, или же сделав замену переменной, преобразованием ряда к виду, в котором указанное условие выполняется.

1.11.3.1. Свойства степенных рядов

Рассмотрим степенной ряд

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + \dots, \quad (10.1)$$

имеющий радиус сходимости $R > 0$ (R может равняться ∞). Тогда каждому значению x из интервала сходимости соответствует некоторая сумма ряда. Следовательно, сумма степенного ряда есть функция от x на интервале сходимости. Обозначим ее через $S(x)$. Тогда можно записать равенство

$$S(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + \dots, \quad (10.2)$$

понимая его в том смысле, что сумма ряда в каждой точке x из интервала сходимости равна значению функции $S(x)$ в этой точке. В этом же смысле будем говорить, что ряд (10.1) сходится к функции $S(x)$ на интервале сходимости. Вне интервала сходимости равенство (10.2) не имеет смысла.

Пример.

Найти сумму степенного ряда

$$1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + \dots$$

Это ряд, составленный из членов геометрической прогрессии, у которой $b_1=1$, $q=-x$. Следовательно, его сумма есть функция $S(x) = \frac{1}{1+x}$. Ряд сходится, если $|x| < 1$. Поэтому равенство

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + \dots$$

справедливо лишь для значений $x \in (-1; 1)$, хотя функция $S(x) = \frac{1}{1+x}$ определена для всех значений x , кроме $x = -1$.

Можно доказать, что сумма степенного ряда $S(x)$ непрерывна и дифференцируема на любом отрезке $[a, b]$ внутри интервала сходимости.

Равенство (10.2), справедливое в интервале сходимости степенного ряда, называют разложением $S(x)$ в степенной ряд.

Для степенных рядов справедливы следующие утверждения:

Теорема 1.

Степенной ряд в интервале его сходимости можно почленно дифференцировать неограниченное число раз, причем получающиеся при этом степенные ряды имеют тот же радиус сходимости, что и исходный ряд, а суммы их соответственно равны $S'(x)$, $S''(x)$, ..., $S^{(n)}(x)$.

Теорема 2.

Степенной ряд можно неограниченное число раз почленно интегрировать в пределах от 0 до x , если $x \in (-R; R)$, причем получающиеся при этом степенные ряды имеют тот же радиус сходимости, что и исходный

ряд, а суммы их соответственно равны $\int_0^x S(x)dx$, $\int_0^x \left(\int_0^x S(x)dx \right) dx$, K .

1.11.3.2. Разложение функций в степенные ряды

Пусть дана функция $f(x)$, которую требуется разложить в степенной ряд, т. е. представить в виде

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (11.1)$$

Задача состоит в определении коэффициентов a_n ($n=0, 1, 2, \dots$) ряда (11.1). Для этого продифференцируем равенство (11.1) почленно, последовательно получаем:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \times a_1 + 2 \times a_2 x + 3 \times a_3 x^2 + \dots + n \times a_n x^{n-1} + \dots \\ f''(x) &= 1 \times 2a_2 + 2 \times 3a_3 x + \dots + n(n-1) \times a_n x^{n-2} + \dots \end{aligned} \quad (11.2)$$

M

$$f^{(n)}(x) = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-2) \times (n-1) \times n a_n + \dots$$

Полагая в этих равенствах (11.2) $x=0$, найдем

$$\begin{aligned} f(0) &= a_0, \quad f'(0) = a_1, \quad f''(0) = 2! \times a_2, \quad f^{(3)}(0) = 3! \times a_3, \quad \dots, \\ f^{(n)}(0) &= 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-2) \times (n-1) \times n a_n = n! \times a_n. \end{aligned}$$

$$\text{Тогда } a_0 = f(0), a_1 = \frac{f'(0)}{1!}, a_2 = \frac{f''(0)}{2!}, a_3 = \frac{f^{(3)}(0)}{3!}, \dots, a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \dots$$

Подставляя значения найденных коэффициентов a_n в равенство (11.2), получим

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!} x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \dots \quad (11.3)$$

Это разложение функции $f(x)$ в ряд называется рядом Маклорена.

Примеры.

1. Разложить в ряд Маклорена функцию e^x .

Найдем производные $(e^x)^{(n)} = e^x$, поэтому при $x=0$ имеем $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n)}(0) = \dots = 1$. Подставляя эти значения в формулу (11.3) получим искомое разложение

1.11. Ряды	Для замечаний
$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (11.4)$ <p>Этот ряд сходится на всей числовой прямой $R=\infty$.</p> <p>2. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = \sin x$. $f(x) = \sin x$, $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$, $f^{IV}(x) = \sin x$. Так как производная четвертого порядка совпадает с функцией, то производные следующих порядков повторяются в той же последовательности. Найдем значения функции и ее производных при $x=0$: $f(0)=0$, $f'(0)=1$, $f''(0)=0$, $f'''(0)=-1$, $f^{IV}(0)=0$, Поэтому ряд Маклорена для функции $f(x) = \sin x$ имеет вид</p> $\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots \quad (11.5)$ <p>Аналогично</p> $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2(n-1)}}{(2(n-1))!} + \dots$ <p>Можно доказать, что ряды (11.5) и (11.6) сходятся на всей числовой прямой.</p>	

1.12. Дифференциальные уравнения

Обыкновенным дифференциальным уравнением n -го порядка называется выражение вида $f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ или $f(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}) = 0$, то есть уравнение, содержащее неизвестную, а следовательно искомую функцию $y = y(x)$ под знаком производной или дифференциала n -го порядка и других порядков $k < n$.

Пример. $y' = f(x, y)$, $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$

Исходя из определения дифференциального уравнения следует, что его порядок равен порядку старшей производной, содержащейся в нем.

Степенью дифференциального уравнения называется степень старшей производной, содержащейся в нем.

Пример. $(y''')^2 + (y')^3 = x^4$ - это дифференциальное уравнение третьего порядка, второй степени.

Решением дифференциального уравнения называется любая функция, которая будучи подставлена в это уравнение, обращает его в тождество.

Пример. $y' = x$ $y = \frac{x^2}{2}$ - решение, $y = \frac{x^2}{2} + c$ - тоже.

Процедура отыскания решения, называется интегрированием дифференциального уравнения.

Если задачу об отыскании всех решений дифференциального уравнения удастся свести к вычислению конечного числа интегралов и производных от известных функций и к алгебраическим операциям, то говорят, что уравнение интегрируется в квадратурах.

Пример. Уравнение $y' + y^2 = x^\alpha$ интегрируется при $\alpha = -4n(2n-1)$, где n - целое и $\alpha = -\alpha$, во всех остальных случаях не интегрируется.

1.12.1. Геометрическая интерпретация дифференциальных уравнений

Пусть $y = y(x)$ есть решение уравнения $y' = f(x, y)$. Геометрически это значит, что в прямоугольных координатах касательная к кривой $y = y(x)$

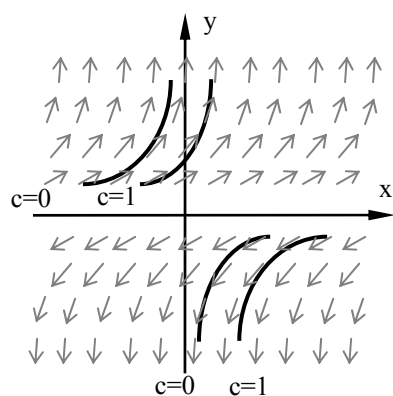


Рис. 1

имеет в каждой лежащей на ней точке $M(x, y)$ угловой коэффициент $k = f(x, y)$. Таким образом, нахождение решений $y = y(x)$ геометрически сводится к такой задаче: в каждой точке некоторой области на плоскости задано "направление", требуется найти все кривые, которые в любой своей точке M имеют направление, заранее сопоставленное в этой точке. Если функция $f(x, y)$ непрерывна, то это направление меняется при перемещении точки M непрерывно, и можно наглядно изобразить поле направлений, проводя в достаточно большом числе достаточно густо расположенных по всей рас-

смаатриваемой области точек короткие черточки с заданными для этих точек направлением.

На рис. 1 это выполнено для уравнения $y'=y^2$. Рисунок позволяет сразу представить себе, как должны выглядеть графики решения - интегральные кривые. Вычисление показывает, что решение данного уравнения есть уравнение $y=\frac{1}{c-x}$. На рис. 1 вычерчены интегральные кривые, соответствующие значениям параметра $c=0$ и $c=1$.

1.12.2. Общий и частный интегралы. Общее и частное решения

Рассмотрим некоторую функцию $y=\varphi(x,c)$, где c есть некоторый параметр или произвольная постоянная. Найдем дифференциальное уравнение, которому эта функция удовлетворяет. С этой целью возьмем производную от функции y , получим

$$y'=\varphi'(x,c).$$

Если в этой операции будет исключено c , т.е. получается

$$y'=\lambda(x),$$

то это и будет дифференциальным уравнением первого порядка, разрешенным относительно производной, а $y=\varphi(x,c)$ является его решением; очевидно, в этом случае зависимость y от c линейна, т.е.

$$y=\varphi(x)+c.$$

Но допустим, что в $\varphi'(x,c)$ содержится c . Тогда выражение $y'=\varphi'(x,c)$ нельзя назвать дифференциальным уравнением (ввиду неопределенности c) до тех пор, пока из выражения $y'=\varphi'(x,c)$ не исключим c .

Для этого разрешим уравнение $y=\varphi(x,c)$ относительно c : $c=\psi(x,y)$. Это возможно, если функция $\varphi(x,c)$ имеет отличную от нуля производную по c (по теореме о существовании обратной функции), т.е.

$$\varphi'_c(x,y)=\frac{\partial \varphi}{\partial c} \neq 0.$$

Пусть это условие выполнено, тогда, подставив $c=\psi(x,y)$ в выражение $y'=\varphi'(x,c)$, получим $y'=\varphi'(x,\psi(x,y))$ - искомое дифференциальное уравнение, решением которого будет $y=\varphi(x,c)$. Итак, функция, зависящая от одной произвольной постоянной $y=\varphi(x,c)$, тогда является общим решением дифференциального уравнения, когда выполнено условие: $\frac{\partial \varphi}{\partial c} \neq 0$. Слово "общее" означает, что все частные функции, удовлетворяющие уравнению $y'=\varphi'(x,\psi(x,y))$ могут быть получены из функции $y=\varphi(x,c)$ приданием c определенных значений.

Пусть дана неявная функция одной переменной $\psi(x,y,c)=0$, содержащая одну произвольную переменную. Найдем дифференциальное уравнение, для которого эта неявная функция будет решением. Для этого продифференцируем $\psi(x,y,c)=0$. Получим $\psi'_x(x,y,c)+y'\psi'_y(x,y,c)=0$. Разрешая $\psi(x,y,c)=0$ относительно $c=\lambda(x,y)$ и вставляя его в уравнение $\psi'_x(x,y,c)+y'\psi'_y(x,y,c)=0$, получим искомое дифференциальное уравнение

$$\psi'_x(x,y,\lambda(x,y))+y'\psi'_y(x,y,\lambda(x,y))=0$$

Решение дифференциального уравнения первого порядка, записанное в виде $\psi(x, y, c) = 0$, зависящее от произвольной постоянной, является общим интегралом. Рассмотрим теперь неявную функцию от одной переменной и n произвольных постоянных

$$\psi(x, y, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0 \quad (*)$$

Получим дифференциальное уравнение, для которого эта функция будет решением. Допустим, что $\psi(x, y, c_1, c_2, \dots, c_n)$ имеет производные по переменным x, y , n -го порядка. Дифференцируя $\psi(x, y, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0$ n раз, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x} + y' \frac{\partial \psi}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} y' + y'' \frac{\partial \psi}{\partial y} + (y')^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= 0 \quad (**) \\ \frac{\partial^n \psi}{\partial x^n} + \dots + y^{(n)} \frac{\partial \psi}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

Рассмотрим совместно выражения (*) и (**). Объявим в этих выражениях неизвестными c_1, c_2, \dots, c_n . Тогда (*) и (**) составляют систему $n+1$ уравнений, из которых можно исключить n произвольных постоянных. В результате получим уравнение n -го порядка

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Выражение (*) является общим интегралом этого уравнения. Функция (*) называется **общим интегралом** уравнения тогда, когда после n -кратного дифференцирования образуется система конечных уравнений (*) и (**), допускающая существование единственного решения для постоянных c_1, c_2, \dots, c_n . Если (*) можно разрешить относительно $y = \varphi(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$, то получим общее решение уравнения.

Частным интегралом или частным решением дифференциального уравнения называется общий интеграл или общее решение, для которых указаны конкретные значения произвольных постоянных. Для определения произвольных постоянных необходимо задать столько условий, сколько постоянных. Эти условия включают задание значения функции и ее производных в определенной точке. Так для уравнения n -го порядка необходимо задать

$$y(x_0) = y|_{x=x_0} = y_0, \quad y'(x_0) = y'|_{x=x_0} = y'_0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}$$

Числа $x_0, y_0, y'_0, \dots, y^{(n-1)}$ называются начальными значениями, эти равенства - начальными условиями.

1.12.3. Теорема о существовании и единственности решения дифференциальных уравнений первого и n-го порядка

Если дифференциальное уравнение разрешить относительно его старшей производной, то полученное уравнение называется разрешенным относительно старшей производной. Рассмотрим уравнение первого порядка $y'=f(x,y)$. (1.1)

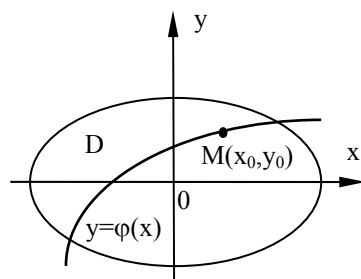


Рис. 1

Пусть функция $f(x,y)$ определена в некоторой открытой области D плоскости xy (Рис. 1) и $y=\varphi(x)$ есть решение уравнения (1). Тогда область определения функции $y=\varphi(x)$ должна принадлежать области D и быть в ней дифференцируемой. Пусть в D дана точка M с координатами x_0, y_0 , такая, что $y(x_0)=y_0$. Ставится задача: найти условия, налагаемые на функцию $f(x,y)$, при которых уравнение (1) имеет решение, удовлетворяющее начальному

условию $y(x_0)=y_0$. Такая задача называется **задачей Коши**. Решение этой задачи определяется следующей теоремой.

Теорема. Если функция $f(x,y)$ определена и непрерывна в области D вместе со своей частной производной по неизвестной функции y , $\frac{\partial f}{\partial y}$, то для всякой точки $M(x_0, y_0)$, принадлежащей области D в некоторой окрестности точки M , существует единственное решение $y=\varphi(x)$ уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию

$$y|_{x=x_0} = y_0 = \varphi(x_0).$$

Геометрически это означает, что при выполнении условий теоремы через каждую внутреннюю точку области D проходит единственная интегральная кривая.

Сформулируем теперь теорему для уравнения n -го порядка, разрешенного относительно старшей производной

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \quad (1.2)$$

с начальными условиями

$$y|_{x=x_0} = y_0, \quad y'|_{x=x_0} = y'_0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)} \quad (1.3)$$

Теорема. Если функция $f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$, зависящая от $n+1$ переменных: $x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$ определена и непрерывна в некоторой $(n+1)$ -мерной открытой области D вместе со своими производными $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, \frac{\partial f}{\partial y''}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$, то для всякой точки $M(x_0, y_0, y'_0, y''_0, \dots, y^{(n-1)}_0)$, принадлежащей области D в некоторой окрестности точки M , существует

1.12. Дифференциальные уравнения	Для замечаний
<p>единственное решение $y=\varphi(x)$ уравнения (1.2), удовлетворяющее начальным условиям (1.3), причем $y_0=\varphi(x_0)$, $y'_0=\varphi'(x_0)$, ..., $y_0^{(n-1)}=\varphi^{(n-1)}(x_0)$.</p> <p>Условия, накладываемые в теоремах на правые части уравнений (1.1) и (1.2), достаточны как для существования, так и для единственности решений уравнений. Для существования решения достаточно потребовать ограниченности производных $f'_y, f'_{y'}, \dots, f'_{y^{(n-1)}}$ в открытой области D. Теоремы примем без доказательств.</p> <p style="text-align: center;">1.12.4. Интегрируемые типы дифференциальных уравнений первого порядка</p> <p>Рассмотрим уравнение первого порядка, разрешенное относительно первой производной:</p> $y'=f(x,y); \quad x'=q(x,y), \quad (2.1)$ <p>где неизвестной является функция $y(x)$ (либо $x(y)$), а известной является функция $f(x,y)$ (либо $q(x,y)$). Учитывая, что $y'=\frac{dy}{dx}$, а $x'=\frac{dx}{dy}$, и полагая возможным представить $f(x,y)$ или $q(x,y)$ в виде $-\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$, уравнение (2.1) можно записать в симметричной форме</p> $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 \quad (2.2)$ <p>Если в этом уравнении $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ можно представить в виде $P(x,y)=N(x)R(y)$ и $Q(x,y)=M(x)K(y)$, то уравнение (2.2) записывается как</p> $N(x)R(y)dx+M(x)K(y)dy=0 \quad (2.3)$ <p>Это уравнение называется уравнением с разделяющимися переменными. Метод его решения: разделив (2.3) на произведение $M(x)K(y)$ получим</p> $\frac{N(x)}{M(x)}dx+\frac{K(y)}{R(y)}dy=0 \quad (2.4)$ <p>Уравнение (2.4) называется уравнением с разделенными переменными. Операция деления уравнения (2.3) на произведение $M(x)R(y)$ называется разделением переменных. Интегрируя (2.4), получим общий интеграл</p> $\int \frac{N(x)}{M(x)}dx+\int \frac{K(y)}{R(y)}dy=c$ <p>исходного уравнения. При делении (2.3) на произведение $M(x)R(y)$, можно потерять некоторые решения, которые получаются из уравнения</p> $M(x)R(y)=0$ <p>Определяя из этого уравнения решения $y=\varphi(x)$, следует проверить, является ли оно решением уравнения (2.3). Если не является, его следует отбросить, а если является, то проверить, входит ли оно в общий интеграл. Если</p>	

входит, то оно есть частное решение, а если не входит, то это решение называется **особым**.

Пример. Решить уравнение $y(x+1)dx+(y-1)x dy=0$.

Решение. Разделим уравнение на произведение xy , получим:

$$\frac{x+1}{x}dx+\frac{y+1}{y}dy=0; \quad dx+\frac{dx}{x}+dy+\frac{dy}{y}=0.$$

Интегрируя получим общий интеграл

$$x+\ln|x|+y+\ln|y|=c;$$

$$\ln|xy|+x+y=c.$$

В этом уравнении $M(x)R(y)$ имеет вид $xy=0$. Его решения $x=0$, $y=0$ являются решениями исходного уравнения, но не входят в общий интеграл. Следовательно, решения $x=0$, $y=0$ являются особыми.

1.12.5. Однородные уравнения

Функция $f(x,y)$ называется однородной степени m , если для любых x , y и $t \geq 0$ выполняется равенство

$$f(tx,ty)=t^m f(x,y).$$

Если функции $M(x,y)$ и $N(x,y)$ однородные одной и той же степени m , то дифференциальное уравнение $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ называется однородным. Оно приводится к виду $\frac{dy}{dx}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ и решается подстановкой $\frac{y}{x}=u$

или $y=ux$, $\frac{dy}{dx}=x\frac{du}{dx}+u$. Тогда $x\frac{du}{dx}+u=f(u)$ или $\frac{du}{f(u)-u}=\frac{dx}{x}$. Следовательно-

но, $\ln\left|\frac{x}{c}\right|=\int \frac{du}{f(u)-u}$ ($c \neq 0$) или $x=c \cdot e^{\int \frac{du}{f(u)-u}}$, где $c \neq 0$ - произвольная постоянная.

Пример. $(x^2+y^2)dx+xydy=0$. Данное уравнение является однородным, так как функции $M(x,y)=x^2+y^2$, $N(x,y)=xy$ однородные степени $m=2$. Сделаем замену $y=ux$, $dy=udx+xdu$. Тогда уравнение переписется так: $(x^2+u^2x^2)dx+x^2u(udx+xdu)=0$ или $(1+2u^2)dx+uxdu=0$.

Разделяя переменные, получим

$$\frac{dx}{x}=-\frac{udu}{1+2u^2}, \quad \ln\left|\frac{x}{c}\right|=-\frac{1}{4}\ln(1+2u^2), \quad x=\frac{c}{\sqrt[4]{1+2u^2}}.$$

Так как у нас $u=\frac{y}{x}$, то $x^4=\frac{c^4x^2}{x^2+2y^2}$, $2y^2+x^2=\frac{c^4}{x^2}$, $y=\pm\sqrt{\frac{c^4}{2x^2}-\frac{x^2}{2}}$.

Рассмотрим более общее уравнение чем $\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right)$, а именно

$$\frac{dy}{dx}=x^{n-1}f\left(\frac{y}{x^n}\right) \quad (2.5)$$

Его можно решить подстановкой $y = x^n u$, $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}u + x^n \frac{du}{dx}$; тогда

$$nx^{n-1}u + x^n \frac{du}{dx} = x^{n-1}f(u)$$

$$x^n \frac{du}{dx} = x^{n-1}(f(u) - nu)$$

$$\frac{du}{f(u) - nu} = \frac{dx}{x}$$

$$\ln \left| \frac{x}{c} \right| = \int \frac{du}{f(u) - nu} \quad (c \neq 0), \quad x = ce^{\int \frac{du}{f(u) - nu}},$$

где $c \neq 0$ - произвольная постоянная.

Пример. $y' = Ax^n + By^m$ (2.6)

$$y' = x^n \left(A + B \frac{y^m}{x^n} \right) = x^n \left(A + B \left(\frac{y}{x^{n/m}} \right)^m \right).$$

Это уравнение есть частный случай (2.5), если $n+1 = \frac{n}{m}$ (2.7)

Уравнение (2.6) при $n=-2$ и $m=2$ (условие (2.7) выполнено) имеет вид

$$\frac{dy}{dx} = Ax^{-2} + By^2$$

и его решение может быть найдено по формуле $x = ce^{\int \frac{du}{f(u) - nu}}$, решения уравнения (2.5), где $f(u) = A + Bu^2$, $n = -2 + 1 = -1$.

Полученное уравнение есть частный случай уравнения Рикатти

$$y' = By^2 + R(x),$$

которое интегрируется в квадратурах только в исключительных случаях. Мы доказали, что при $R(x) = Ax^{-2}$ уравнение Рикатти решается в квадратурах. Отметим, что при $R(x) = \text{const}$ уравнение Рикатти является уравнением с разделяющимися переменными. Если $R(x) = Ax^\alpha$ и $\alpha = \alpha_k = -\frac{4k}{2k-1}$ (k - целое), то подстановка

$$\frac{1}{\varphi(z)} = x^2 y(x) + \frac{x}{B}, \quad z = x^{\alpha_k + 3} \quad (n \geq 1)$$

приводит уравнение Рикатти к виду

$$\varphi' = -\frac{A}{\alpha_k + 3} \varphi^2 - \frac{B}{\alpha_k + 3} z^{\alpha_k - 1}.$$

Последовательно применяя эту подстановку, можно исходное уравнение свести к случаю $\alpha_0 = 0$ ($R(x) = \text{const}$).

Если же $n \leq 1$, то подстановка $\frac{1}{y(x)} = z^2 \varphi(z) + \frac{\alpha_k + 1}{A} z$, $z = x^{-\alpha_k - 1}$ приводит уравнение к виду

$$\varphi' = -\frac{A}{\alpha_k + 1} z^2 + \frac{B}{\alpha_k + 1} z^{\alpha_k + 1}.$$

Применяя эту подстановку необходимое число раз, мы сведем уравнение Рикатти к случаю $\alpha_0=0$. Во всех других случаях уравнение Рикатти не решается в квадратурах.

Пример. Решить уравнение $xydy - (x^4 + y^2)dx = 0$. Имеем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^4 + y^2}{xy} = \frac{x^4(1 + (\frac{y}{x})^2)}{x^3 \frac{y}{x^2}} = x \frac{1 + (\frac{y}{x})^2}{\frac{y}{x^2}}$$

Это уравнение есть частный случай уравнения (2.5) при $n=2$ $f(u) = (1+u^2)/u$.

1.12.6. Уравнения, приводимые к уравнениям с однородной функцией

Общий вид таких уравнений следующий

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right) \quad (3.1)$$

Рассмотрим несколько случаев

1. Если $c=c_1=0$, то имеем уравнение с однородной функцией и его можно решить методом, изложенным ранее. Если $u = \frac{y}{x}$, то уравнение преобразуется в уравнение $u'x + u = f\left(\frac{a+bu}{a_1+b_1u}\right)$, которое является уравнением с разделяющимися переменными.

2. Пусть $c, c_1 \neq 0$. Положим

$$x = x_1 + h; \quad y = y_1 + k, \quad (3.2)$$

где h и k - постоянные. Учитывая, что $dx = dx_1$ и $dy = dy_1$; $\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx_1}$ можно записать

$$\frac{dy_1}{dx_1} = f\left(\frac{ax_1 + by_1 + ah + bk + c}{a_1x_1 + b_1y_1 + a_1h + b_1k + c_1}\right)$$

Подберем h и k так, чтобы
$$\begin{cases} ah + bk + c = 0 \\ a_1h + b_1k + c_1 = 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

Тогда уравнение (3.1) переходит в уравнение

$$\frac{dy_1}{dx_1} = f\left(\frac{ax_1 + by_1}{a_1x_1 + b_1y_1}\right),$$

которое решается подстановкой $y_1 = x_1 u$.

3. Изложенный метод не подходит, если определитель системы (3.3)

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0$$

Рассмотрим этот случай, обозначив $\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \lambda$; $a_1 = a\lambda$; $b_1 = b\lambda$, уравнение (3.1) запишется в виде

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax+by+c}{\lambda(ax+by)+c_1}\right).$$

Это уравнение сводится к уравнению с разделяющимися переменными подстановкой $z=ax+by$.

Приведенные операции геометрически означают следующее: числитель и знаменатель в функции $f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$ можно рассматривать как левые части уравнений прямых в плоскости, которые либо пересекаются (определитель не равен нулю): $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0$, либо параллельны (определитель равен нулю). Подстановка (2.3) геометрически означает параллельный перенос системы координат, что позволяет перенести начало координат в точку пересечения прямых.

Пример. $(2x-y+3)dx+(x+y-1)dy=0$

Запишем уравнение в форме (3.1)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x+y-3}{x+y-1} \quad (3.4)$$

Здесь $a=-2$; $b=1$; $c=-3$; $a_1=1$; $b_1=1$; $c_1=-1$. Определитель $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$. Следовательно уравнение (3.4) относится к случаю 2. Введем новые переменные x_1 и y_1 так, что $x=x_1+h$; $y=y_1+k$. Теперь запишем уравнение (3.4) в виде

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{-2x_1+y_1-2h+k-3}{x_1+y_1+h+k-1} \quad (3.5)$$

Система (3.3) для уравнения (3.5) следующая: $\begin{cases} -2h+k-3=0 \\ h+k-1=0 \end{cases}$. Отсюда

$h=-\frac{2}{3}$; $k=\frac{5}{3}$. Уравнение (3.5) можно записать в виде $\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{-2x_1+y_1}{x_1+y_1} \quad (3.6)$

Положим $y_1=ux_1$, тогда $\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{du}{dx_1}x_1+u$; $\frac{-2x_1+y_1}{x_1+y_1} = \frac{u-2}{u+1}$. Подставим полученные результаты в (3.6):

$$\frac{du}{dx_1}x_1+u = \frac{u-2}{u+1}$$

Разделим переменные $\frac{du}{dx_1}x_1 = \frac{u-2}{u+1} - u$; $\frac{u+1}{u^2+2}du = -\frac{dx_1}{x_1}$. Найдем

$$\int \frac{u+1}{u^2+2} du = \int \frac{u}{u^2+2} du + \int \frac{du}{u^2+2} = \frac{1}{2} \ln|u^2+2| + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{u}{\sqrt{2}}$$

Следовательно, $\frac{1}{2}\ln(u^2+2)+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{u}{\sqrt{2}}+\ln|x_2c|=0$, но $u=\frac{y_1}{x_1}=\frac{y-k}{x-h}=\frac{y-\frac{5}{3}}{x+\frac{2}{3}}=\frac{3y-5}{3x+2}$.

После объединения первого и последнего логарифмов получим общий интеграл уравнения (3.4)

$$\ln\left|c\left(x+\frac{2}{3}\right)\sqrt{(3y-5)^2(3x+2)^{-2}+2}\right|+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{3y-5}{(3x+2)\sqrt{2}}=0$$

1.12.7. Уравнения в полных дифференциалах

Выражение вида $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ называется полным (точным) дифференциалом, если существует функция $u(x,y)$ двух переменных, для которой $du=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$. (4.1)

$$\text{Уравнение } P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0, \quad (4.2)$$

в котором левая часть есть полный дифференциал некоторой функции $u(x,y)$, называется уравнением в полных дифференциалах.

Если левая часть уравнения есть полный дифференциал функции $u(x,y)$, то (4.2) можно записать $du=0$. Решением этого уравнения является $u(x,y)=c$.

Для существования решения $y=y(x)$ уравнения (4.2), соответствующего начальным значениям x_0, y_0 , необходимо по $u(x,y)$ иметь возможность определить неявную функцию $y(x)$. Для этого необходимо $\frac{\partial u}{\partial x} \neq 0$ при $x=x_0, y=y_0$. Учитывая равенства $du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy$ и (4.1), имеем

$$P(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x}; \quad Q(x,y)=\frac{\partial u}{\partial y}. \quad (4.3)$$

Для того, чтобы выражение (4.1), где $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ - непрерывные функции двух переменных, вместе с частными производными $\frac{\partial Q}{\partial x}$ и $\frac{\partial P}{\partial y}$ в их общей части области определения D , было полным дифференциалом, необходимо и достаточно выполнение условия $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$. (4.4)

Докажем необходимость. Пусть (4.4) - полный дифференциал. Тогда дифференцируя (4.3) и вспомнив, что смешанные частные производные $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ равны между собой, получим (4.4).

Докажем достаточность. Дано (4.3) и (4.4), то есть дана система дифференциальных уравнений (4.3) с условием (4.4), из которой подлежит найти функцию $u(x,y)$. Если в первом уравнении системы (4.3) зафиксировать y и проинтегрировать уравнение по x , то получим

$$u = \int_{x_0}^x P(x, y) dx + \varphi(y). \quad (4.5)$$

Здесь произвольная постоянная $c = \varphi(y)$ зависит от y . В решении (4.5) не известна лишь $\varphi(y)$. Для определения $\varphi(y)$ продифференцируем (4.5) по y :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int_{x_0}^x \frac{\partial P}{\partial y} dx + \varphi'(y). \quad (4.6)$$

Используя второе уравнение (4.3) и (4.4), (4.6) можно записать так:

$$Q(x, y) = \int_{x_0}^x \frac{\partial Q}{\partial x} dx + \varphi'(y), \text{ но } \int_{x_0}^x \frac{\partial Q}{\partial x} dx = Q(x, y) \Big|_{x_0}^x = Q(x, y) - Q(x_0, y),$$

поэтому $Q(x, y) = Q(x, y) - Q(x_0, y) + \varphi'(y)$ или $\varphi'(y) = Q(x_0, y)$.

Это дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции $\varphi(y)$. Решив его, имеем одно значение функции:

$$\varphi(y) = \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy.$$

$$\text{Таким образом, } u = \int_{x_0}^x P(x, y) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy. \quad (4.7)$$

Здесь x_0, y_0 - координаты произвольной точки области определения $u(x, y)$. Из (4.6) следует $du = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$, то есть достаточность доказана. Выра-

жение (4.7) с учетом $u(x, y) = c$ дает $u(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy = c$.

При решении дифференциальных уравнений вида (4.2) вначале проверяют выполнение условия (4.4). Затем из любого уравнения (4.3) отыскивают $u(x, y)$. Дифференцируя полученное для $u(x, y)$ выражение и используя другое уравнение (4.3) определяют $\varphi(y)$ ($\varphi(x)$), а с ней и функцию $u(x, y)$. Решение получают в виде $u(x, y) = c$.

Пример. Решить уравнение $(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0$.

Решение. $P(x, y) = 3x^2 + 6xy^2; \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 12xy;$

$$Q(x, y) = 6x^2y + 4y^3; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 12xy;$$

$$u(x, y) = \int (6x^2y + 4y^3) dy = 3x^2y^2 + y^4 + \varphi(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 6xy^2 + \varphi'(x) \quad 6xy^2 + \varphi'(x) = 3x^2 + 6xy^2$$

$$\varphi'(x) = 3x^2 \quad \varphi(x) = x^3 \quad u(x, y) = 3x^2y^2 + y^4 + x^3$$

Решением уравнения является $x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = c$.

1.12.8. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

$$\text{Уравнение } \frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x) \quad (a < x < b), \quad (5.1)$$

где $p(x)$, $f(x)$ - непрерывные функции от x на интервале (a, b) , называется линейным дифференциальным уравнением первого порядка. Неизвестная функция $y(x)$ и ее производная входят в это уравнение в первой степени - линейно.

$$\text{Если } f(x)=0, \text{ то уравнение } \frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \quad (5.2)$$

называется линейным однородным, а в связи с этим уравнение (5.1) называют линейным неоднородным.

Однородное линейное уравнение имеет решение $y(x)=0$. Оно является уравнением с разделяющимися переменными, решим его:

$$\frac{dy}{dx} = -p(x)y; \quad \frac{dy}{y} = -p(x)dx \quad (y \neq 0); \quad \ln \left| \frac{y}{c} \right| = -\int p(x)dx \quad (c \neq 0); \quad y = ce^{-\int p(x)dx} \quad (5.3)$$

Если в (5.3) разрешить постоянную c принимать нулевое значение, то формула (5.3) дает и решение $y(x)=0$.

Уравнение (5.1) обычно решают методом Бернулли. Представим искомую функцию в виде произведения двух неизвестных функций $u(x)$ и $v(x)$. Пусть $y=uv$, тогда $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}v + \frac{dv}{dx}u$ и уравнение (5.1) примет вид

$$\frac{du}{dx}v + \frac{dv}{dx}u + p(x)uv = f(x) \quad \text{или} \quad v \frac{du}{dx} + u \left[\frac{dv}{dx} + p(x)v \right] = f(x) \quad (5.4)$$

Выберем функцию $v(x)$ так, чтобы в уравнении (5.4) выражение в скобках обратилось в нуль: $\frac{dv}{dx} + p(x)v = 0$.

Относительно $v(x)$ имеем линейное однородное уравнение, следовательно, по формуле (5.3) можем положить $v = e^{-\int p(x)dx}$. При такой функции v , подстановка ее в уравнение (5.4) дает $v \frac{du}{dx} = f(x)$, откуда $du = \frac{f(x)}{v(x)}dx$.

$$u = \int \frac{f(x)}{v(x)}dx + c = \int (f(x)e^{\int p(x)dx})dx + c.$$

Следовательно, общее решение уравнения (5.1) запишется в виде

$$y = uv = ce^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx} \int f(x)e^{\int p(x)dx}dx,$$

где c - произвольная постоянная.

Пример. Решить уравнение $y' - \frac{2x}{x^2+1}y = x\sqrt{x^2+1}$. Здесь $p(x) = -\frac{2x}{x^2+1}$; $f(x) = x\sqrt{x^2+1}$. Положим $y=uv$, $y'=u'v+uv'$. Подставляя выражения для u и y' в данное уравнение получим:

$$vu' + u(v' - \frac{2x}{x^2+1}v) = x\sqrt{x^2+1} \quad (*)$$

$$v' - \frac{2x}{x^2+1}v = 0.$$

После разделения переменных: $\frac{dv}{v} = \frac{2xdx}{x^2+1}$. Отсюда $\ln|v| = \ln(x^2+1)$ или $v = x^2+1$. Подставим найденное значение v в равенство(*), получим

$$(x^2+1)\frac{du}{dx} = x\sqrt{x^2+1}.$$

Отсюда, разделяя переменные и интегрируя:

$$du = \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}} \quad u = \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{x^2+1} + c.$$

Теперь можно записать общее решение данного дифференциального уравнения: $y = (\sqrt{x^2+1} + c)(x^2+1)$.

1.12.9. Уравнение Бернулли

Уравнение Бернулли имеет вид $y' + p(x)y = y^n f(x)$, где n - любое вещественное число.

Если n равно нулю или единице, то мы получим линейное дифференциальное уравнение. Если $n \neq 0, 1$, то замена $z = y^{1-n}$ приводит нас снова к линейному уравнению относительно функции $z(x)$.

Уравнение Бернулли можно сразу решать методом Бернулли, полагая $y = u(x)v(x)$. Следует отметить, что при $n > 0$ функция $y(x) \equiv 0$ является решением уравнения Бернулли.

Пример. Решить уравнение $y' + \frac{y}{x} = x^2 y^4$.

Сделаем замену $z = y^{1-4} = y^{-3}$, $z' = -3y^{-4}y'$. Поделив исходное уравнение на y^4 : $y^{-4}y' + \frac{1}{xy^3} = x^2$. Подставим в него значения для z и z' , сделав необходимые преобразования, получим уравнение $z' - \frac{3z}{x} = -3x^2$, которое является линейным.

Приведем также решение непосредственно методом Бернулли. Полагая $y = uv$, получим $u'v + uv' + \frac{uv}{x} = x^2 u^4 v^4$; $u(v' + \frac{v}{x}) + u'v = x^2 u^4 v^4$ (*)

$\frac{dv}{dx} + \frac{v}{x} = 0$; $\frac{dv}{dx} = -\frac{dx}{x}$; $\ln v = -\ln x$; $v = \frac{1}{x}$. Подставив v в (*) получим

$$u' \frac{1}{x} = xu^4 \frac{1}{x^4}; \quad \frac{du}{dx} = \frac{u^4}{x^2}; \quad \int \frac{du}{u^4} = \int \frac{dx}{x^2}; \quad -\frac{1}{3u^3} = -\frac{1}{x} + c; \quad \frac{1}{u^3} = \frac{3(1+cx)}{x}; \quad u = \sqrt[3]{\frac{x}{3(1+cx)}}$$

и окончательно $y = \frac{1}{x} \sqrt[3]{\frac{x}{3(1+cx)}}$.

1.12.10. Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка

1⁰ Уравнение вида $y^{(n)} = f(x)$ решается последовательным n -кратным интегрированием правой части. При каждом интегрировании получается одно произвольное постоянное, а в окончательном результате – n произвольных постоянных.

Пример. Решить уравнения:

$$1) \ y''' = \frac{6}{x^3}$$

Последовательно интегрируя получим:

$$y'' = \int \frac{6}{x^3} dx; \quad y'' = -\frac{3}{x^2} + c_1; \quad y' = \int \left(-\frac{3}{x^2} + c_1 \right) dx;$$

$$y' = \frac{3}{x} + c_1 x + c_2; \quad y = \int \left(\frac{3}{x} + c_1 x + c_2 \right) dx; \quad y = 3 \ln|x| + \frac{c_1 x^2}{2} + c_2 x + c_3.$$

$$2) \ y'' = 4 \cos 2x; \quad y' = \int 4 \cos 2x dx = 2 \sin 2x + c_1;$$

$$y = -\cos 2x + c_1 x + c_2.$$

2⁰. Если в уравнение не входит искомая y , то есть она имеет вид $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0$, то порядок уравнения можно понизить, взяв за новую неизвестную функцию низшую из производных, входящую в уравнение, т.е. сделав замену $y^{(k)} = z$.

Пример 1. Уравнение вида $y'' = f(x, y')$ не содержит явным образом искомой функции y .

Решение. Обозначим производную $y' = \frac{dy}{dx}$ через P , т.е. положим $\frac{dy}{dx} = P$.

$$\text{Тогда } y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dP}{dx}.$$

Подставляя эти выражения производных в исходное уравнение, получим уравнение первого порядка

$$\frac{dP}{dx} = f(x, P)$$

относительно неизвестной функции P от x . Проинтегрировав это уравнение, найдем его общее решение:

$$P = P(x, c_1),$$

а затем из соотношения $\frac{dy}{dx} = P$ получим общий интеграл исходного уравнения:

$$y = \int P(x, c_1) dx + c_2.$$

Пример 2. Решить уравнение

$$x^3 y'' + x^2 y' = 1.$$

Положим $y' = \frac{dy}{dx} = P$, тогда $y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dP}{dx}$ и мы получаем дифференциальное уравнение первого порядка относительно вспомогательной функции P от x :

$$x^3 \frac{dP}{dx} + x^2 P = 1.$$

Поделив уравнение на x^3 получим

$$\frac{dP}{dx} + \frac{P}{x} = \frac{1}{x^3}$$

линейное дифференциальное уравнение первого порядка. Представим функцию P в виде $P = u \cdot v$, тогда

$$\frac{dP}{dx} = v \frac{du}{dx} + u \frac{dv}{dx}.$$

Подставляя их в уравнение получим

$$v \frac{du}{dx} + u \frac{dv}{dx} + \frac{uv}{x} = \frac{1}{x^3}.$$

$$\text{Далее } v \frac{du}{dx} + u \left(\frac{dv}{dx} + \frac{v}{x} \right) = \frac{1}{x^3}$$

$$\frac{dv}{dx} + \frac{v}{x} = 0; \quad \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x} \quad \ln v = -\ln x \quad v = \frac{1}{x}$$

$$\text{отсюда } \frac{1}{x} \frac{du}{dx} = \frac{1}{x^3} \text{ или } du = \frac{dx}{x^2}, \quad u = -\frac{1}{x} + c$$

$$P = -\frac{1}{x^2} + \frac{c_1}{x}; \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2} + \frac{c_1}{x}$$

$$y = \frac{1}{x} + c_1 \ln x + c_2.$$

3⁰. Если в уравнение не входит независимое переменное x , т.е. уравнение имеет вид $F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$, то порядок уравнения можно понизить, взяв за новое независимое переменное y , а за неизвестную функцию $y' = P(y)$.

Пример. Решить уравнение $y \cdot y'' + (y')^2 = 0$.

В уравнение не входит x . Полагаем $y' = P(y)$. Тогда

$$y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{dP(y)}{dx} = \frac{dP}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = P' \cdot P.$$

Подставляя $y' = P$ и $y'' = P' \cdot P$ в уравнение, получим:

1.12. Дифференциальные уравнения	Для замечаний
<p style="text-align: center;"> $y \cdot P \cdot P' + P^2 = 0$ или $y \cdot P \frac{dP}{dy} + P^2 = 0,$ </p> <p>откуда</p> <p style="text-align: center;"> $y P dP = -P^2 dy, \quad \frac{dP}{P} = -\frac{dy}{y}, \quad P = \frac{c_1}{y}$ </p> <p>или</p> <p style="text-align: center;"> $\frac{dy}{dx} = \frac{c_1}{y}, \quad y dy = c_1 dx, \quad \frac{y^2}{2} = c_1 x + c_2.$ </p> <p style="text-align: center;">1.12.11. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами</p> <p>Определение. Дифференциальное уравнение n-го порядка называется линейным, если оно первой степени относительно искомой функции y и ее производных $y', y'', y''', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}$, т.е. имеет вид</p> $a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(x),$ <p>где $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ и $f(x)$ – заданные функции от x или постоянные, причем $a_0 \neq 0$ для всех значений x из той области, в которой мы рассматриваем уравнение. В дальнейшем мы будем предполагать, что функции $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ – постоянные, а $f(x)$ непрерывна на всех значениях x, причем коэффициент $a_0=1$ (если он не равен 1, мы можем все члены уравнения поделить на него). Функция $f(x)$, стоящая в правой части уравнения, называется правой частью уравнения.</p> <p>Если $f(x)$ не тождественна нулю, то уравнение называется неоднородным или уравнением с правой частью. Если же $f(x) \equiv 0$, то уравнение имеет вид</p> $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0$ <p>и называется линейным однородным или уравнением без правой части (левая часть этого уравнения является однородной функцией первой степени относительно $y, y', y'', y''', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}$).</p> <p>Установим некоторые основные свойства линейных однородных уравнений.</p> <p>Рассмотрим линейное однородное уравнение n-го порядка</p> $L[y] = y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = 0.$ <p>Выражение</p> $L[y] = y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y$ <p>называется линейным дифференциальным оператором от функции y.</p> <p>С помощью линейного дифференциального оператора дифференциальное уравнение запишется так</p> $L[y] = 0.$ <p>Рассмотрим свойства которыми обладает линейный дифференциальный оператор</p> <p>1. $L[cy] = c \cdot L[y]$</p>	

это справедливо для любой постоянной в том числе и комплексной.

$$2. \quad L[y_1+y_2]=L[y_1]+L[y_2]$$

Теорема 1. Если $y_1(x)$ есть решение дифференциального уравнения $L[y]=0$, то $c_1 \cdot y_1(x)$ тоже решение уравнения $L[y]=0$, где c_1 – произвольная постоянная.

Доказательство.

$$L[c_1 y_1] = c_1 y_1^{(n)} + c_1 a_1(x) y_1^{(n-1)} + \dots + c_1 a_n(x) y_1 = c_1 L[y_1]$$

но $L[y_1]=0$, тогда $c_1 L[y_1]=0$ и $L[c_1 y_1]=0$.

Теорема 2. Если y_1 и y_2 – частные решения уравнения $L[y]=0$, то $c_1 y_1 + c_2 y_2$ – также решения этого уравнения, где c_1, c_2 – произвольные постоянные.

Доказательство. Подставив $c_1 y_1 + c_2 y_2$ получим

$$L[c_1 y_1 + c_2 y_2] = (c_1 y_1 + c_2 y_2)^{(n)} + a_1(c_1 y_1 + c_2 y_2)^{(n-1)} + \dots + a_n(c_1 y_1 + c_2 y_2) =$$

$$= c_1 L[y_1] + c_2 L[y_2] = 0; \quad L[c_1 y_1 + c_2 y_2] = 0;$$

то есть $c_1 y_1 + c_2 y_2$ также является решением.

Теорема 3. Если функции $y_1(x); y_2(x); \dots; y_n(x)$ – частные решения уравнения $L[y]=0$, то их линейная комбинация, т.е. $y=c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n$, также является решением.

Какие же условия следует наложить на функции $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$, чтобы их линейная комбинация с произвольными постоянными являлась общим решением уравнения $L[y]=0$. Для этого введем понятие линейно независимой системы функций.

Система функций $y_1(x); y_2(x); \dots; y_n(x)$ определенных на множестве X , называется линейно зависимой, если существуют такие, не все равные нулю, действительные числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, что линейная комбинация $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_n y_n = 0$ для всех x из X .

Функции $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ называются линейно зависимыми на X , если из тождества

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_n y_n \equiv 0$$

следует, что

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0.$$

Назовем определителем Вронского для системы функций $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$, определенных на X , следующий функциональный определитель n -го порядка:

$$W(x) = W(y_1, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

Мы предполагаем, что функции y_1, y_2, \dots, y_n на множестве X непрерывны и имеют все производные до порядка $n-1$ включительно. Это функциональный определитель.

Теорема. Если функции y_1, y_2, \dots, y_n линейно зависимы на множестве X , то определитель Вронского равен нулю.

Теорема. Если решения $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ линейно однородного уравнения $L[y]=0$ являются линейно независимыми на множестве X , где коэффициенты уравнения непрерывны, то определитель Вронского на этом множестве X нигде не обращается в нуль.

Примем эти две теоремы без доказательств, также без доказательства примем следующие утверждения:

1. Если y_1, y_2, \dots, y_n – система из n линейно независимых частных решений линейного однородного дифференциального уравнения n -го порядка, то $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n$ есть общее решение этого уравнения.
2. Максимальное число линейно независимых частных решений линейного однородного уравнения $L[y]=0$ с непрерывными на множестве X коэффициентами равно порядку уравнения.
3. Независимо от начальных условий все другие решения уравнения $L[y]=0$ являются линейной комбинацией линейно независимых частных решений.

Таким образом, для решения линейного однородного уравнения n -го порядка необходимо найти n линейно независимых частных решений. Общее решение уравнения получится как линейная комбинация этих частных решений.

Назовем фундаментальной системой решений линейного дифференциального уравнения $L[y]=0$ любые n линейно независимых частных решений.

Будем искать частные решения уравнения $L[y]=0$ или $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$ в виде $y = e^{\lambda x}$, где λ – неизвестно.

Подставляя $y = e^{\lambda x}$ в уравнение получим:

$$\lambda^n e^{\lambda x} + a_1 \lambda^{n-1} e^{\lambda x} + \dots + a_{n-1} \lambda e^{\lambda x} + a_n e^{\lambda x} = 0$$

учитывая, что $e^{\lambda x} \neq 0$, то деля уравнение на $e^{\lambda x}$ получим

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0.$$

Полученное уравнение называется характеристическим. Среди корней характеристического уравнения $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ могут встретиться следующие:

1. Все корни характеристического уравнения $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ действительные и различные. Тогда функциональную систему образуют функции линейно независимые на $(-\infty; \infty)$:

$y_1 = e^{\lambda_1 x}, y_2 = e^{\lambda_2 x}, \dots, y_n = e^{\lambda_n x}$, линейная независимость этой системы следует из неравенства нулю определителя Вронского

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & \dots & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} & \dots & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 x} & \dots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} = e^{\lambda_1 x + \lambda_2 x + \dots + \lambda_n x} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0,$$

поэтому общее решение будет:

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + c_n e^{\lambda_n x}.$$

1.12. Дифференциальные уравнения	Для замечаний
<p>Пример. Решить уравнение $y'' - 7y' + 6y = 0$.</p> <p>Составим характеристическое уравнение $\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$.</p> $\lambda_1=1 \quad \lambda_2=6 \quad y_1=e^x \quad y_2=e^{6x}.$ <p>Общее решение будет $y = c_1 e^x + c_2 e^{6x}$.</p> <p>2. Среди корней характеристического уравнения, кроме действительных, есть и комплексно-сопряженные, но нет кратных.</p> <p>Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ – действительные корни, а $\lambda_e = \alpha_e \pm \beta_e \cdot i$; ($2l=m+1, m+2, \dots, n$), где $i^2=-1$.</p> <p>Тогда действительным корням отвечают частные решения вида</p> $y_k = e^{\lambda_k x}, \quad k = 1, 2, \dots, m,$ <p>а паре комплексно-сопряженных корней $\alpha_e \pm \beta_e \cdot i$</p> $y_e = e^{(\alpha_e + \beta_e \cdot i)x}; \quad y_{e+1} = e^{(\alpha_e - \beta_e \cdot i)x}$ <p>или</p> $y_e = e^{\alpha_e x} \cdot e^{\beta_e x i}; \quad y_{e+1} = e^{\alpha_e x} \cdot e^{-\beta_e x i}.$ <p>По формуле Эйлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$, имеем</p> $\begin{aligned} e^{\beta_e i x} &= \cos\beta_e x + i \sin\beta_e x; \\ e^{-\beta_e i x} &= \cos\beta_e x - i \sin\beta_e x; \\ y_e &= e^{\alpha_e x} \cos\beta_e x + i e^{\alpha_e x} \sin\beta_e x; \\ y_{e+1} &= e^{\alpha_e x} \cos\beta_e x - i e^{\alpha_e x} \sin\beta_e x. \end{aligned}$ <p>Докажем следующую лемму.</p> <p>Лемма. Если функция $y = v(x) + i \cdot u(x)$ является решением линейного дифференциального уравнения n-го порядка, то $v(x)$ и $u(x)$, также являются решением уравнения.</p> <p>Доказательство. По условию дано:</p> $L[y]=0; \quad L[v(x)] + i \cdot L[u(x)]=0.$ <p>Это равенство возможно, если $L[v]=0, L[u]=0$. На основании этой леммы примем за частные решения уравнения:</p> $y_e = e^{\alpha_e x} \cos\beta_e x \quad y_{e+1} = e^{\alpha_e x} \sin\beta_e x.$ <p>Система частных решений:</p> $\begin{aligned} &e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_m x}, \\ &e^{\alpha_{m+1} x} \cos\beta_{m+1} x, e^{\alpha_{m+1} x} \sin\beta_{m+1} x, e^{\alpha_{m+2} x} \cos\beta_{m+2} x, e^{\alpha_{m+2} x} \sin\beta_{m+2} x, \dots, \\ &\dots, e^{\frac{\alpha_{m+n} x}{2}} \cos\beta_{\frac{m+n}{2}} x, e^{\frac{\alpha_{m+n} x}{2}} \sin\beta_{\frac{m+n}{2}} x \quad \left(\text{так как } m + \frac{n-m}{2} = \frac{m+n}{2} \right) \end{aligned}$ <p>как легко доказать, образует линейно независимую систему функций. Общее решение в этом случае будет представлять линейную комбинацию указанных функций.</p> <p>3. Среди корней характеристического уравнения есть кратные корни.</p> <p>Пусть λ_i – действительный корень кратности m, тогда этому корню отвечает m частных решений вида</p> $e^{\lambda_i x}, x \cdot e^{\lambda_i x}, x^2 e^{\lambda_i x}, \dots, x^{m-1} e^{\lambda_i x}.$	

1.12. Дифференциальные уравнения	Для замечаний
<p>Если среди корней характеристического уравнения имеются комплексные корни, тогда каждой паре комплексно-сопряженных корней</p> $\lambda^{(1)} = \alpha + \beta \cdot i \quad \lambda^{(2)} = \alpha - \beta \cdot i$ <p>кратности m соответствует $2m$ частных решений:</p> $e^{\alpha x} \cos \beta x, x \cdot e^{\alpha x} \cos \beta x, \dots, x^{m-1} e^{\alpha x} \cos \beta x,$ $e^{\alpha x} \sin \beta x, x \cdot e^{\alpha x} \sin \beta x, \dots, x^{m-1} e^{\alpha x} \sin \beta x.$ <p>Можно доказать, что найденные таким образом частные решения y_1, y_2, \dots, y_n составляют систему линейно независимых функций, то есть фундаментальную систему. Общее решение однородного уравнения с постоянными коэффициентами запишется так:</p> $y_{oo} = \sum_{i=1}^n c_i y_i.$ <p>Примеры.</p> <p>1. Найти общее решение уравнения $y^{IV} - y = 0$.</p> <p>Решение. Составляем характеристическое уравнение</p> $\lambda^4 - 1 = 0.$ <p>Корни характеристического уравнения будут:</p> $\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = i, \quad \lambda_4 = -i.$ <p>Частные решения:</p> $y_1 = e^x, \quad y_2 = e^{-x}, \quad y_3 = \cos x, \quad y_4 = \sin x.$ <p>Общее решение:</p> $y_{oo} = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x,$ <p>где c_1, c_2, c_3, c_4 – произвольные постоянные.</p> <p>2. Найти общее решение уравнения $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$.</p> <p>Решение. Составляем характеристическое уравнение:</p> $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0 \quad \text{или} \quad (\lambda - 1)^3 = 0.$ <p>Корни характеристического уравнения:</p> $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1.$ <p>Частные решения:</p> $y_1 = e^x, \quad y_2 = x \cdot e^x, \quad y_3 = x^2 \cdot e^x.$ <p>Составляют фундаментальную систему, и следовательно, общее решение будет:</p> $y_{oo} = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x$ <p>или</p> $y_{oo} = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2) e^x.$ <p>1.12.12. Линейные неоднородные дифференциальные</p>	

уравнения

Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение

$$L[y]=f(x),$$

где $f(x)$ непрерывная функция. Однородное уравнение соответствующее неоднородному уравнению будет

$$L[y]=0.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема. Пусть $\bar{y}(x)$ – частное решение уравнения $L[y]=f(x)$, а y_{00} – общее решение уравнения $L[y]=0$, то общее решение уравнения $L[y]=f(x)$ равно сумме частного решения неоднородного уравнения и общего решения однородного уравнения

$$y_{\text{он}} = y_{00} + \bar{y}.$$

Эта теорема о структуре общего решения неоднородного дифференциального уравнения.

Применение следующей теоремы позволяет упростить процесс отыскания частных решений неоднородных уравнений.

Теорема. Если правая часть уравнения $L[y]=f(x)$ есть сумма нескольких функций, то частное решение уравнения равно сумме частных решений, отвечающих каждой функции в отдельности.

Доказательство. Пусть $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, а частные решения уравнений

$$L[y] = f_1(x); \quad L[y] = f_2(x)$$

соответственно $\bar{y}_1(x)$ и $\bar{y}_2(x)$. Тогда

$$L[\bar{y}_1(x)] = f_1(x), \quad L[\bar{y}_2(x)] = f_2(x);$$

$$L[\bar{y}] = L[\bar{y}_1 + \bar{y}_2] = L[\bar{y}_1] + L[\bar{y}_2] = f_1(x) + f_2(x);$$

$$\bar{y} = \bar{y}_1 + \bar{y}_2.$$

Как мы убедились раньше, задача отыскания общего решения неоднородного уравнения $L[y] = f(x)$ сводится к отысканию общего решения однородного уравнения $L[y] = 0$ и частного решения неоднородного уравнения \bar{y} .

Приведем без доказательства метод, позволяющий определить общее решение неоднородного уравнения по общему решению однородного уравнения.

Метод вариации постоянных

1. Решить однородное уравнение $L[y] = 0$ и записать его общее решение

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n; \quad (*)$$

2. Записать общее решение неоднородного уравнения в форме общего решения, но с переменными коэффициентами

$$y = c_1(x) y_1 + c_2(x) y_2 + \dots + c_n(x) y_n;$$

3. Построить систему уравнений

$$c'_1(x) y_1 + c'_2(x) y_2 + \dots + c'_n(x) y_n = 0$$

$$c'_1(x) y'_1 + c'_2(x) y'_2 + \dots + c'_n(x) y'_n = 0$$

.....

$$c'_1(x) y_1^{(n-2)} + c'_2(x) y_2^{(n-2)} + \dots + c'_n(x) y_n^{(n-2)} = 0$$

$$c'_1(x) y_1^{(n-1)} + c'_2(x) y_2^{(n-1)} + \dots + c'_n(x) y_n^{(n-1)} = f(x)$$

и решить ее;

4. Полученное решение подставить в (*).

Пример.

Решить уравнение $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$ $0 < x < \pi$.

Для соответствующего однородного уравнения $y'' + y = 0$ общее решение имеет вид

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$

Запишем его в виде

$$y = c_1(x) \cos x + c_2(x) \sin x. \quad (**)$$

Составляем для данного случая систему

$$\begin{aligned} c_1'(x) \cdot \cos x + c_2'(x) \cdot \sin x &= 0 \\ -c_1'(x) \cdot \sin x + c_2'(x) \cdot \cos x &= \frac{1}{\sin x}. \end{aligned}$$

Решаем эту систему

$$c_1'(x) = -1 \quad c_2'(x) = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Найдем $c_1(x)$ и $c_2(x)$ из уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dc_1(x)}{dx} &= -1 & \frac{dc_2(x)}{dx} &= \frac{\cos x}{\sin x} \\ c_1(x) &= -x + c_1 & c_2(x) &= \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \ln|\sin x| + c_2. \end{aligned}$$

Подставляя найденные $c_1(x)$ и $c_2(x)$ в (**) получим

$$y = (-x + c_1) \cos x + (\ln|\sin x| + c_2) \sin x.$$

1.12.13. Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами и специальной правой частью

Пусть дано уравнение $L[y] = f(x)$. Если $f(x)$ имеет специальный вид, то, пользуясь методом вариации произвольного постоянного, можно доказать, что частное решение может быть также найдено методом неопределенных коэффициентов.

Пусть $f(x) = U_m(x) e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x$ или

$$f(x) = V_m(x) e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x,$$

где $U_m(x)$ и $V_m(x)$ – многочлены степени m (при $m=0$ $U_m(x)$ и $V_m(x)$ обращаются в постоянные), α и β некоторые действительные постоянные.

Если $\beta=0$, то $f(x) = U_m(x) e^{\alpha x}$ и, в частности, при $m=0$ $f(x) = a \cdot e^{\alpha x}$ ($a = \text{const}$).

При $\alpha=0$ имеем

$$f(x) = U_m(x) \cdot \cos \beta x \text{ или } f(x) = V_m(x) \cdot \sin \beta x.$$

Если $\alpha=0$ и $\beta=0$, то $f(x) = U_m(x)$ и, в частности, при $m=0$ $f(x)=a$ ($a = \text{const}$).

Тогда если $\alpha + \beta i$ не является корнем характеристического уравнения

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0,$$

то уравнение $L[y] = f(x)$ заведомо имеет частное решение вида

$$y = e^{\alpha x} (P_m(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x),$$

где $P_m(x)$ и $Q_m(x)$ – некоторые многочлены степени не выше m .

Если же $\alpha + \beta i$ является корнем характеристического уравнения кратности r , то уравнение $L[y] = f(x)$ заведомо имеет частное решение вида

$$y = x^r e^{\alpha x} (P_m(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x),$$

где $P_m(x)$ и $Q_m(x)$ – многочлены степени не выше чем m .

Пример. Решить уравнение $y'' - y = 2e^x - x^2$.

Решение.

$$\lambda^2 - 1 = 0 \quad \lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = -1.$$

Общее решение однородного уравнения будет

$$y_{\text{оо}} = c_1 e^x + c_2 e^{-x}.$$

Частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде:

$$\bar{y} = A x e^x + B x^2 + C x + D;$$

$$\bar{y}' = A(e^x + x e^x) + 2Bx + C;$$

$$\bar{y}'' = 2A e^x + A x e^x + 2B.$$

Подставляя в исходное уравнение получим:

$$2A e^x + A x e^x + 2B - A x e^x - B x^2 - C x - D = 2e^x - x^2.$$

Приравнявая коэффициенты при подобных членах в обеих частях уравнения получим:

$$\begin{cases} 2A = 2 \\ -B = -1 \\ -C = 0 \\ 2B - D = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 1 \\ C = 0 \\ D = 2 \end{cases}$$

$$\bar{y} = x e^x + x^2 + 2;$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + x e^x + x^2 + 2.$$

2. Решение типовых задач контрольных работ	Для замечаний
<p style="text-align: center;">2. Решение типовых задач контрольных работ</p> <p>Задание 1. Написать уравнение прямой, проходящей через две известные точки $A(2;3)$ и $B(6;-2)$ и вычислить длину отрезка AB.</p> <p>Решение. Уравнение прямой, проходящей через две известные точки $M_1(x_1, y_1)$ $M_2(x_2, y_2)$ имеет вид:</p> $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ <p>поэтому уравнение прямой (AB) примет вид:</p> $\frac{x - 2}{6 - 2} = \frac{y - 3}{-2 - 3} \text{ или } 5x + 4y - 22 = 0$ <p>Расстояние между точками M_1 и M_2 определяется по формуле:</p> $ M_1 M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ <p>поэтому длина отрезка AB:</p> $ AB = \sqrt{(6 - 2)^2 + (-2 - 3)^2} = \sqrt{41}.$ <p>Задание 2. Написать уравнение высоты (BN) и вычислить ее длину в треугольнике $A(6;0)$, $B(2;-3)$, $C(-4;9)$.</p> <p>Решение: Уравнение пучка прямых, проходящих через точку $M(x_0, y_0)$ имеет вид : $y - y_0 = k(x - x_0)$.</p> <p>Угловой коэффициент прямой (BN) найдем из того условия, что $(BN) \perp (AC)$. Условие перпендикулярности двух прямых, имеющих угловые коэффициенты k_1, k_2:</p> $k_1 = -\frac{1}{k_2} \text{ (при } k_2 \neq 0 \text{)}.$ <p>Угловой коэффициент прямой, проходящей через точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$ - $k_{(M_1 M_2)} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ (при $x_1 \neq x_2$);</p> <p>т.о., $k_{(AC)} = \frac{9}{-10} = -\frac{9}{10}$</p> <p>$k_{(BN)} = \frac{10}{9}$ и уравнение (BN), следовательно, имеет вид :</p> $y + 3 = \frac{10}{9}(x - 2) \text{ или } 10x - 9y - 47 = 0$ <p>Для вычисления высоты BN воспользуемся формулой, определяющей расстояние d точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямой, заданной уравнением $Ax + By + C = 0$:</p> $d = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$	

Нам нужно определить расстояние точки $B(2;-3)$ до прямой, идущей через точки $A(6;0)$ и $C(-4;9)$.

Уравнение: (AC)

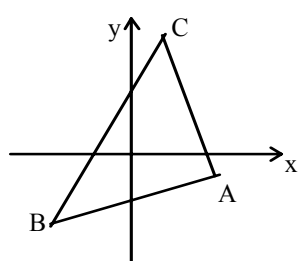
$$\frac{y-9}{0-9} = \frac{x+4}{6+4}$$

$$9x + 10y - 54 = 0$$

$$|BN| = \frac{9 \cdot 2 + 10 \cdot (-3) - 54}{\sqrt{9^2 + 10^2}} = \frac{66}{\sqrt{181}}.$$

Задание 3. Вычислить в радианах величину внутреннего угла B в треугольнике $A(4;-1)$, $B(-4;-5)$, $C(1;10)$.

Решение: Для определения угла B воспользуемся формулой тангенса



угла между двумя прямыми, имеющими уг-

ловые коэффициенты k_1 и k_2 : $\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}$,

где k_1 - угловой коэффициент той прямой, которая поворачивается до совмещения со второй против часовой стрелки.

Рис. 2

В нашем случае такой прямой является (BA) (см. рис.2)

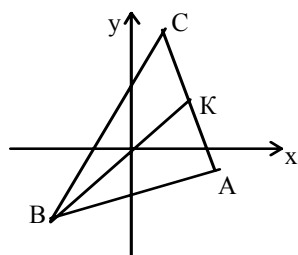
$$k_{BA} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-5 + 1}{-4 - 4} = \frac{1}{2}$$

$$k_{BC} = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} = \frac{-5 - 10}{-4 - 1} = 3$$

$$\operatorname{tg} B = \frac{k_{BC} - k_{BA}}{1 + k_{BC} k_{BA}} = \frac{3 - \frac{1}{2}}{1 + 3 \cdot \frac{1}{2}} = 1$$

$$\angle B = \frac{\pi}{4}.$$

Задание 4. Написать уравнение (ВК) биссектрисы внутреннего угла треугольника с вершинами $A(4;-1)$, $B(-4;-5)$, $C(1;5)$.



Решение: Воспользуемся уравнениями биссектрис углов, образованных пересечением двух прямых, заданных уравнениями:

Рис. 3

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \text{ и } A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

Уравнения таких биссектрис имеют вид:

$$\left| \frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} \right| = \left| \frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \right|$$

Точка $M(x; y)$, координаты которой удовлетворяют этому условию, равноудалена от двух данных прямых, т.к. в левой и правой части равенства записаны расстояния ее до этих прямых.

В нашем случае уравнения прямых (AB) и (BC) имеют вид:

$$(AB): \frac{y+5}{-1+5} = \frac{x+4}{4+4} \text{ или } x-2y-6=0 \text{ или } y = \frac{1}{2}x-3$$

$$(BC): \frac{y-5}{-5-5} = \frac{x-1}{-4-1} \text{ или } 2x-y+3=0 \text{ или } y=2x+3$$

Уравнения двух биссектрис угла В (внутреннего и внешнего) имеют вид:

$$\left| \frac{x-2y-6}{\sqrt{1+4}} \right| = \left| \frac{2x-y+3}{\sqrt{4+1}} \right|, \text{ что равносильно уравнениям:}$$

$$x-2y-6=2x-y+3 \text{ или } y=-x-9 \quad (1)$$

$$x-2y-6=-(2x-y+3) \text{ или } x-y-1=0 \quad (2) \text{ и } y=x-1 \quad (2)$$

Из уравнений (1), (2) угловые коэффициенты этих биссектрис $k=-1$, $k=1$

Искомый угловой коэффициент должен удовлетворять неравенству:

$$k_{(BA)} < k_{(BK)} < k_{(BC)}, \text{ (см. рис.3)}$$

$$\text{Так как } k_{(BA)} = \frac{1}{2}, \text{ а } k_{(BC)} = 2, \text{ то } k_{(BK)} = k_2 = 1$$

и уравнение биссектрисы (BK) есть $x-y-1=0$.

Задание 5. Составить уравнение линии, каждая точка которой вдвое дальше от прямой $y+2=0$, чем от точки $F(-3;1)$.

Решение: Пусть точка $M(x,y)$ обладает указанными свойствами:

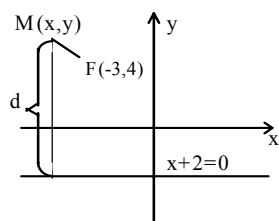


Рис. 4

$2 \cdot |MF| = d$, где d - расстояние точки M до заданной прямой.

$$MF = \sqrt{(x+3)^2 + (y-1)^2}$$

$$d = \left| \frac{y+2}{\sqrt{0+1}} \right| = |y+2|$$

Координаты x, y точки M должны удовлетворять следующему уравнению:

$$2\sqrt{(x+3)^2 + (y-1)^2} = |y+2|$$

После возведения в квадрат и соответствующих преобразований получим уравнение:

$$4x^2 + 24x + 3y^2 - 12y + 36 = 0 \quad \text{или}$$

$$4(x^2 + 6x + 9 - 9) + 3(y^2 - 4y + 4 - 4) - 36 = 0$$

$$\frac{4(x+3)^2}{3} + \frac{3(y-2)^2}{4} - 48 + 36 = 0$$

$$\frac{(x+3)^2}{3} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$$

Это уравнение эллипса с осями симметрии, параллельными координатным осям с центром в точке $C(-3;2)$ и полуосями $a = \sqrt{3}$, $b = 2$

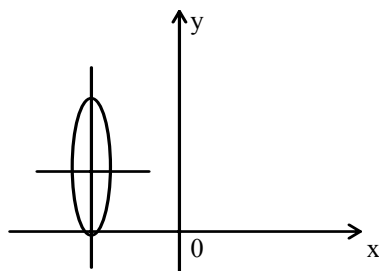


Рис. 5

Задание 6. Составить уравнение гиперболы, симметричной относительно координатных осей, с фокусами на оси Ox , если уравнения ее асимптот

$$y = \pm \frac{3}{4}x, \text{ а расстояние между директрисами } -12\frac{4}{5}.$$

Решение: Уравнение такой гиперболы имеет вид $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ и для его записи необходимо вычислить величины a и b . Так как уравнения асимптот гиперболы имеют вид $y = \pm \frac{a}{b}x$, то для нее имеем соотношение:

$$\frac{b}{a} = \frac{3}{4} \quad (1)$$

Так как расстояние между директрисами равно $\frac{2a}{\varepsilon}$, где ε - эксцентриситет, то :

$$\frac{2a}{\varepsilon} = 12 \frac{4}{5} \quad (2)$$

Кроме того, $\varepsilon = \frac{c}{a}$ $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, поэтому условие (2) можно записать так: $2a \cdot a = \frac{64}{5}$

Для a и b получим следующую систему:

$$\begin{cases} \frac{b}{a} = \frac{3}{4} \Rightarrow b = \frac{3}{4}a \\ \frac{2a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{64}{5} \Rightarrow \frac{2a^2}{\sqrt{a^2 + \frac{9}{16}a^2}} = \frac{64}{5} \end{cases}$$

$a=8$, $b=6$ и уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1.$$

Задание 7. Даны вершины пирамиды: $A_1(2;-1;1)$, $A_2(5;5;4)$, $A_3(3;2;-1)$, $A_4(4;1;3)$. Написать уравнение высоты A_4K , вычислить ее длину, вычислить объем пирамиды и площадь грани $A_1 A_2 A_3$.

Решение: Каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $M(x_0; y_0; z_0)$ параллельно вектору $\vec{l}\{m; n; p\}$ имеет вид:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.$$

Поэтому канонические уравнения прямой, проходящей через точку $A_4(4;1;3)$ имеют вид:

$$\frac{x - 4}{m} = \frac{y - 1}{n} = \frac{z - 3}{p}, \text{ где вектор } \{m; n; p\} - \text{ направляющий, т.е. параллельный искомой плоскости.}$$

Т.к. $(A_4 K) \perp$ плоскости $(A_1 A_2 A_3)$, то нормальный вектор этой плоскости будет направляющим для искомой прямой. Уравнение плоскости, проходящей через точки $A_1(2;-1;1)$, $A_2(5;5;4)$, $A_3(3;2;-1)$ можно записать как условие компланарности векторов $\overrightarrow{A_1 A_2}$, $\overrightarrow{A_1 A_3}$, $\overrightarrow{A_1 M}$, где $M(x; y; z)$ - любая точка плоскости.

$$\overrightarrow{A_1 A_2} = \{3; 6; 3\}$$

$$\overrightarrow{A_1 A_3} = \{1; 3; -2\}$$

$$\overrightarrow{A_1 M} = \{x - 2; y + 1; z - 1\}$$

Необходимым и достаточным условием компланарности этих векторов является равенство нулю их смешанного произведения:

$$\overline{A_1} \overline{A_2} \cdot \overline{A_1} \overline{A_3} \cdot \overline{A_1} \overline{M} = 0.$$

Или в координатной форме:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-1 \\ 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-2) \cdot (-21) - (y+1) \cdot (-9) + (z-1) \cdot 3 = 0 \quad \text{или}$$

$$7x - 3y - z - 16 = 0.$$

Нормальный вектор плоскости $(A_1 A_2 A_3)$ $\overline{N} = \{7; -3; -1\}$, а канонические уравнения высоты $(A_4 K)$:

$$\frac{x-4}{7} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-3}{-1}.$$

Для вычисления длины высоты $(A_4 K)$ воспользуемся формулой. Расстояние d точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$

$$d = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|$$

$$|AK| = \left| \frac{7 \cdot 4 - 3 \cdot 1 - 1 \cdot 3 - 16}{\sqrt{49 + 9 + 1}} \right| = \frac{6}{\sqrt{59}}$$

Площадь грани $A_1 A_2 A_3$ можно вычислить по формуле:

$$S_{\Delta A_1 A_2 A_3} = \frac{1}{2} |\overline{A_1} \overline{A_2} \times \overline{A_1} \overline{A_3}|,$$

где $\overline{A_1} \overline{A_2} \times \overline{A_1} \overline{A_3}$ - векторное произведение векторов.

$$\overline{A_1} \overline{A_2} \times \overline{A_1} \overline{A_3} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \{-21; 9; 3\}$$

$$|\overline{A_1} \overline{A_2} \times \overline{A_1} \overline{A_3}| = \sqrt{21^2 + 9^2 + 3^2} = 3\sqrt{7+3+1} = 3\sqrt{59}$$

$$S_{\Delta A_1 A_2 A_3} = \frac{3}{2} \sqrt{59}$$

Объем пирамиды вычислим по формуле:

$V_{A_1 A_2 A_3 A_4} = \frac{1}{6} |\overline{A_1} \overline{A_2} \times \overline{A_1} \overline{A_3} \cdot \overline{A_1} \overline{A_4}|$, где $\overline{A_1} \overline{A_2} \times \overline{A_1} \overline{A_3} \cdot \overline{A_1} \overline{A_4}$ - смешанное произведение векторов.

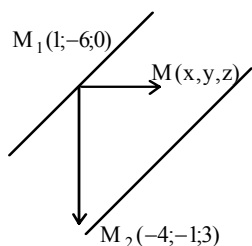
$$\overline{A_1} \overline{A_4} = \{2; 2; 2\}$$

$$(A_1 A_2 A_3 A_4) = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 6 \cdot (-3) = -18$$

$$V_{A_1 A_2 A_3 A_4} = \frac{1}{6} |6 \cdot (-3)| = 3$$

Задание 8. Составить уравнение плоскости, проходящей через две параллельные прямые:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+6}{3} = \frac{z}{0} \quad \text{и} \quad \frac{x+4}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-3}{0}.$$



Решение: Из канонических уравнений прямых видно, что первая идет через точку $M_1(1; -6; 0)$, а вторая - через $M_2(-4; -1; 3)$, и обе прямые имеют направленный вектор $\vec{l} = \{2; 3; 0\}$. Пусть точка $M(x; y; z)$ принадлежит искомой плоскости, тогда вектора

$\overline{M_1 M_2}$, $\overline{M_1 M}$, \vec{l} должны быть компланарны, т.е. $\overline{M_1 M_2} \cdot \overline{M_1 M} \times \vec{l} = 0$, что в координатной форме записывается равенством:

$$\begin{vmatrix} x+4 & y+1 & z-3 \\ 5 & -5 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

что и является уравнением заданной плоскости. Раскрывая определитель и приводя подобные члены получим: $9x - 6y + 25z - 45 = 0$.

Задание 9. Найти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 4x^2 + 5}{2x^3 + x}$

Решение. При $x \rightarrow \infty$ числитель и знаменатель этой дроби являются бесконечно большими функциями, такое отношение, условно обозначаемое символом $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$, представляет собой неопределенность, для раскрытия которой нужно провести преобразования.

Разделим числитель и знаменатель почленно на наивысшую в данной дроби степень x (на x^3):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 4x^2 + 5}{2x^3 + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^3}}{2 + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}$$

Замечание. $\frac{4}{x}$, $\frac{5}{x^3}$, $\frac{1}{x^2}$ представляют собой бесконечно малые функции при $x \rightarrow \infty$, т.е. их пределы равны 0.

Задание 10. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{\sqrt{x + 3} - \sqrt{3}}$

При $x \rightarrow 0$ числитель и знаменатель дроби являются бесконечно малыми функциями, такое отношение, условно обозначаемое символом $\left[\frac{0}{0} \right]$, представляет собой неопределенность, для ее раскрытия сделаем следующие преобразования:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{\sqrt{x + 3} - \sqrt{3}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - 1)(\sqrt{x^2 + 1} + 1)(\sqrt{x + 3} + \sqrt{3})}{(\sqrt{x + 3} - \sqrt{3})(\sqrt{x + 3} + \sqrt{3})(\sqrt{x^2 + 1} + 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 1 - 1)(\sqrt{x + 3} + \sqrt{3})}{(x + 3 - 3)(\sqrt{x^2 + 1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(\sqrt{x + 3} + \sqrt{3})}{x(\sqrt{x^2 + 1} + 1)} = \frac{0 \cdot 2\sqrt{3}}{2} = 0 \end{aligned}$$

Задание 11. Найти $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 9x + 6}{x^2 + 2x - 3}$

Для раскрытия такого вида неопределенности $\left[\frac{0}{0} \right]$ сделаем следующие преобразования:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 9x + 6}{x^2 + 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-2)}{x+3} = \frac{3 \cdot (-1)}{4} = \frac{-3}{4}$$

Задание 12. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x + \sin 2x}{6x}$

Для раскрытия неопределенности $\left[\frac{0}{0} \right]$ проведем следующие преобразования:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x + \sin 2x}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 3x \cdot \cos x}{3x \cdot 2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1 \cdot 1 = 1$$

При вычислении заданного предела мы воспользуемся следующим результатом, называемым “первым замечательным пределом”:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$$

При этом под α подразумевается любая бесконечно малая функция.

Например: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{2x-2}$ можно вычислить, используя этот же ре-

зультат. Заменим $x-1=t$. При $x \rightarrow 1$ новая переменная $t \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{2x-2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin t}{2 \cdot t} = \frac{1}{2}$$

Задание 13.

Найти:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{1}{x}}$

б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+1}{3x+2} \right)^{2x}$

Решение:

И в первом и во втором случае мы имеем дело с неопределенностью вида $[1^\infty]$, так как:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$

б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+1}{3x+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{1}{x}}{3 + \frac{2}{x}} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} 2x = \infty$

Для раскрытия такого вида неопределенностей можно воспользоваться следующей формулой:

$$\lim_{x \rightarrow a} (U(x))^{V(x)} = (1^\infty) = e^{\lim_{x \rightarrow a} (U(x)-1)V(x)}$$

Вычислим первый предел, пользуясь этой формулой:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} (1+3x-1) \cdot \frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{x}} = e^3$$

Для вычисления второго предела воспользуемся непосредственно результатом, называемым “вторым замечательным пределом”:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e \quad \text{или} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t} \right)^t = e$$

где e - некоторое число, равное пределу числовой последовательности

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \quad e \approx 2,72.$$

Для вычисления заданного предела сделаем следующие преобразования:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+1}{3x+2} \right)^{2x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+2-1}{3x+2} \right)^{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-1}{3x+2} \right)^{2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-1}{3x+2} \right)^{\frac{3x+2}{-1} \cdot \frac{-1}{3x+2} \cdot 2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{-1}{3x+2} \right)^{\frac{3x+2}{-1}} \right]^{\frac{-2x}{3x+2}} = e^{-\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

Выражение, выделенное в квадратные скобки при $x \rightarrow \infty$ имеет пределом e , а показатель степени $\frac{-2x}{3x+2}$ при $x \rightarrow \infty$ имеет пределом $\frac{-2}{3}$, в чем не трудно убедиться, разделив числитель и знаменатель на x .

Задание 14. Найти $\lim_{x \rightarrow +\infty} x[\ln(x+2) - \ln(x-4)]$

В данном случае второй сомножитель представляет собой неопределенность, обозначаемую символом $[\infty - \infty]$, поэтому и произведение является неопределенностью. Для ее раскрытия проведем такие преобразования

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x[\ln(x+2) - \ln(x-4)] &= \lim_{x \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{x+2}{x-4}\right)^x = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \ln\left(1 + \frac{6}{x-4}\right)^{\frac{x-4}{6} \cdot \frac{6}{x-4} \cdot x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln\left[\left(1 + \frac{6}{x-4}\right)^{\frac{x-4}{6}}\right]^{\frac{6x}{x-4}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x}{x-4} \ln\left(1 + \frac{6}{x-4}\right)^{\frac{x-4}{6}} = 6 \cdot \ln e = 6 \end{aligned}$$

Задание 15. Дана функция: $y = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ -\cos x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} + x, & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$

исследовать ее непрерывность и схематически построить график.

Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0 , если

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Любая элементарная функция непрерывна в своей области определения. Заданная нам функция y непрерывна в следующих интервалах:

$(-\infty; 0)$; $(0; \frac{\pi}{2})$ и $(\frac{\pi}{2}; +\infty)$, т.к. в каждом из них задана элементарная функция: постоянная (-1) , простейшая элементарная $(-\cos x)$, линейная $(\frac{\pi}{2} + x)$.

Но в точках перехода от одной функции к другой, т.е. в точках $x_1=0$ и $x_2=\frac{\pi}{2}$ функция, хотя и определена, но может иметь разрыв, т.е. в этих точках могут быть нарушены условия непрерывности. Исследуем непрерывность функции y в точке $x_1=0$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+0} y &= \lim_{x \rightarrow 0+0} (-1) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0+0} y &= \lim_{x \rightarrow 0+0} (-\cos x) = -1 \\ y(0) &= -\cos 0 = -1 \end{aligned}$$

так как три полученных результата совпадают, условие непрерывности выполняется и y непрерывна в точке $x_1=0$.

Исследуем непрерывность функции в точке $x_2=\frac{\pi}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} y = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} (-\cos x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} y = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} \left(\frac{\pi}{2} + x \right) = \pi$$

Несовпадение полученных результатов уже говорит о невыполнении условий непрерывности, и в точке $x_2 = \frac{\pi}{2}$ функция имеет разрыв.

На рис. 8 схематически

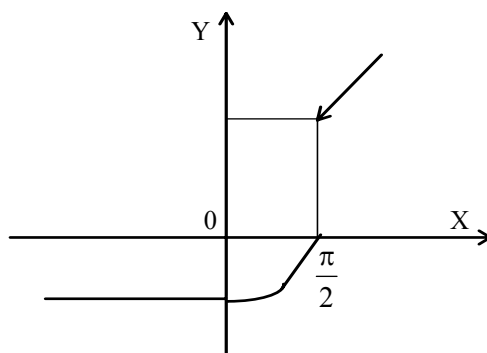


Рис. 8

показан график функции y .

Задание 16. Найти производную функции $y = \cos(x^2)$

Решение: При вычислении производных пользуются таблицей производных основных элементарных функций и теоремой дифференцирования сложной функции:

пусть $y = f(u)$ дифференцируема в точке u_0 , $u = f(x)$ дифференцируема в точке x_0 , причем $\varphi(x_0) = u_0$, тогда сложная функция $y = f(\varphi(x))$ дифференцируема в точке x_0 и

$$y'(x_0) = f'(u_0) \cdot \varphi'(x_0) \text{ или } y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

В нашем случае $u = x^2$, $y = \cos u$,

$$y' = (\cos u)'_u \cdot (x^2)'_x = -\sin u \cdot 2x = (-\sin x^2) \cdot 2x.$$

Задание 17. Найти производную функции $y = \ln \sin a^x$

Решение: $y = \ln u$, $u = \sin v$, $v = a^x$,

$$\text{тогда } y' = (\ln u)'_u \cdot (\sin v)'_v \cdot (a^x)'_x = \frac{1}{u} \cos v \cdot a^x \ln a =$$

$$= \frac{1}{\sin a^x} \cdot \cos a^x \cdot a^x \cdot \ln a = a^x \ln a \cdot \operatorname{ctg} a^x.$$

Как видно из приведенных примеров, следует начинать дифференцирование с “внешней” элементарной функции, последовательно приближаясь к “внутренней”.

Задание 18. Найти производные функций:

а). $y = \sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 3x}$ б). $y = \ln \sqrt{1 + e^x + e^{4x}}$

в). $y = e^{2x} \cdot \operatorname{arctg} x^3$

Решение:

а). $\left(\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 3x}\right)' = \left((\operatorname{tg} 3x)^{\frac{2}{3}}\right)' = \frac{2}{3}(\operatorname{tg} 3x)^{-\frac{1}{3}} \cdot \frac{1 \cdot 3}{\cos^2 3x} = \frac{2}{\sqrt[3]{\operatorname{tg} 3x} \cos^2 3x}$

б). $\left(\ln \sqrt{1 + e^x + e^{4x}}\right)' = \left(\frac{1}{2} \ln(1 + e^x + e^{4x})\right)' =$
 $= \frac{1}{2} \frac{1}{1 + e^x + e^{4x}} \cdot (e^x + e^{4x} \cdot 4) = \frac{e^x + 4e^{4x}}{2(1 + e^x + e^{4x})}$

в). $(e^{2x} \cdot \operatorname{arctg} x^3)' = (e^{2x})' \cdot \operatorname{arctg} x^3 + e^{2x} \cdot (\operatorname{arctg} x^3)' =$
 $= e^{2x} \cdot 2 \cdot \operatorname{arctg} x^3 + e^{2x} \cdot \frac{1}{1 + (x^3)^2} \cdot 3x^2 = e^{2x} \left(2 \cdot \operatorname{arctg} x^3 + \frac{3x^2}{1 + x^6}\right)$

Задание 19. Найти производную функции, заданной неявно:
 $x^4 + y^2 x + y^7 = 0$.

Решение. Правило вычисления производной функции, заданной неявно, заключается в том, что дифференцируют левую и правую часть равенства в предположении, что y есть функция от x :

$$(x^4 + y^2 x + y^7)' = (0)'$$

$$4x^3 + 2y \cdot y' x + y^2 \cdot 1 + 7y^6 y' = 0$$

Выражая из последнего равенства y' , получим:

$$y' = -\frac{y^2 + 4x^3}{2xy + 7y^6}$$

Задание 20. Найти $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$ для функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$$

Решение: Известна теорема о производной функции, заданной параметрически: пусть $x=f(t)$ дифференцируема и $f'(t) \neq 0$

$y = \varphi(t)$ - дифференцируемая функция, тогда производная $\frac{dy}{dx} = \frac{\varphi'(t)}{f'(t)}$ или

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}. \text{ При выполнении этого действия производная функции } y(x)$$

также выражена через параметр t .

$$y'(t) = (\sin t)' = \cos t; \quad x'(t) = -\sin t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos t}{-\sin t} = -\operatorname{ctg} t$$

Для отыскания производной второго порядка $\frac{d^2y}{dx^2}$ можно использовать тот

же подход для функции $\frac{dy}{dx}$ заданной параметрически:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{\varphi'(t)}{f'(t)} \\ x = f(t) \end{cases} \quad \text{а в нашем случае} \quad \begin{cases} \frac{dy}{dx} = -\operatorname{ctg} t \\ x = \cos t \end{cases}$$

тогда
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{\left(\frac{dy}{dx} \right)'}{x'_t}$$

В нашем случае:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(-\operatorname{ctg} t)'}{(\cos t)'} = -\frac{1}{\sin^3 t}$$

Можно использовать и готовую формулу для вычисления производной

второго порядка $\frac{d^2y}{dx^2}$ функции

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = \varphi(t) \end{cases}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\varphi''(t) \cdot f'(t) - f''(t) \cdot \varphi'(t)}{(f'(t))^3}$$

Задание 21.

Провести полное исследование функции и построить ее график.

$$f(x) = x + \ln(x^2 - 1)$$

Решение.

Исследование функции будем проводить по следующей схеме:

- 1.) Найдем область определения функции и точки пересечения ее графика с осями координат;
- 2.) Выясним четность (или нечетность) функции (если она задана на симметричном промежутке);
- 3.) Выясним периодичность функции;

2. Решение типовых задач контрольных работ	Для замечаний
<p>4.) Исследуем функцию на непрерывность, найдем точки разрыва и выясним характер разрывов;</p> <p>5.) Найдем асимптоты графика функции;</p> <p>6.) Исследуем функцию на экстремум, найдем интервалы монотонности функции;</p> <p>7.) Найдем точки перегиба и интервалы выпуклости и вогнутости графика функции.</p> <p>Исследуем функцию $f(x) = x + \ln(x^2 - 1)$ по приведенной схеме.</p> <p>1.) Функция определена при всех значениях x, для которых $x^2 - 1 > 0$ или $x > 1$, т.е. при $-\infty < x < -1$ и $+1 < x < +\infty$</p> <p>С осью ОХ график функции пересекается в точке $(x \approx 1,25; 0)$.</p> <p>С осью ОУ график функции не пересекается.</p> <p>2.) Функция не является ни четной, ни нечетной.</p> <p>3.) Функция не является периодической.</p> <p>4.) На интервале $(-\infty; -1)$ и $(+1; +\infty)$ функция непрерывна.</p> <p>5.) Вертикальные асимптоты:</p> $\lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-0} [x + \ln(x^2 - 1)] = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+0} [x + \ln(x^2 - 1)] = -\infty; \quad x = -1 \text{ и } x = 1$ <p>— две вертикальные асимптоты.</p> <p>Ищем наклонные асимптоты:</p> $k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x + \ln(x^2 - 1)}{x} = 1; \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \ln(x^2 - 1) = \infty$ <p>Следовательно, ни наклонных, ни горизонтальных асимптот нет.</p> <p>6.) Находим производную данной функции: $f'(x) = 1 + \frac{2x}{x^2 - 1}$. Производная существует и конечна во всех точках области определения функции. Следовательно, стационарные точки могут быть лишь в “нулях” производной:</p> $f'(x) = \frac{x^2 - 1 + 2x}{x^2 - 1}; \quad f'(x) = 0 \quad \text{при } x_1 = -1 - \sqrt{2}, \quad x_2 = -1 + \sqrt{2}$ <p>В точке $x_2 = -1 + \sqrt{2}$ функция не определена. Следовательно, имеется только одна критическая точка $x_1 = -1 - \sqrt{2}$, принадлежащая области определения функции.</p> <p>В интервале $(-\infty; -1 - \sqrt{2})$ производная $f'(x) > 0$, а в интервале $(-1 - \sqrt{2}; -1)$ $f'(x) < 0$. Следовательно, точка $x = -1 - \sqrt{2}$ точка максимума и $f(-1 - \sqrt{2}) = -1 - \sqrt{2} + \ln(2 + 2\sqrt{2}) \approx -0,84$. В интервале $(-\infty; -1 - \sqrt{2})$ функция возрастает, а в интервале $(-1 - \sqrt{2}; -1)$ - убывает. В интервале $(1, \infty)$ производная $f'(x) > 0$ и, следовательно, функция возрастает.</p> <p>7.) Находим вторую производную функции $f''(x) = \frac{2(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2}$</p> <p>Значение $f''(x) < 0$ на всей области определения функции. Следовательно, кривая везде выпукла и точек перегиба не имеет.</p>	

2. Решение типовых задач контрольных работ

Для замечаний

Внесем теперь результаты исследования в таблицу, а затем построим график (рис. 9) функции.

Замечание:

Таблицу можно заполнять постепенно, по мере исследования функции.

x	$(-\infty; -1 - \sqrt{2})$	$-1 - \sqrt{2}$	$(-1 - \sqrt{2}; -1)$	-1	1	$-1; \infty$
y'	+	0	—			+
y''	—	—	—			—
y	вып.	мах. -0,84	вып.	верт. ас.	верт. ас.	вып.

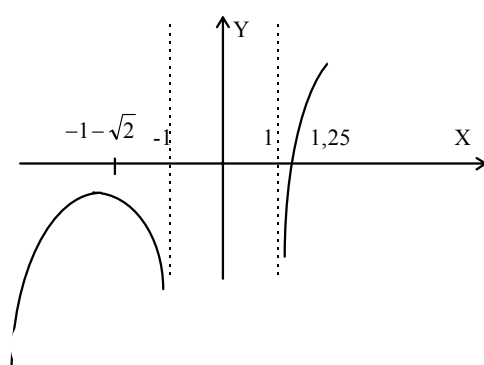


Рис. 9

Задание 22. Найти частные производные функции $z = (x + 2y) \cdot e^{-xy}$

Решение: Если переменная z зависит от двух и более независимых переменных x, y, \dots, u, v , то $z = f(x, y, \dots, u, v)$ называют функцией нескольких независимых переменных. Важнейшим понятием в теории функций нескольких переменных является понятие частной производной. Частная производная функции z по данной переменной, например по y , обозначается одним из символов $z'_y, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y}$ (не путать с обозначением производной

для функции одной переменной $y', \frac{dy}{dx}, \frac{df}{dy}$) и вычисляется в предполо-

жении, что все остальные переменные являются зафиксированными, т.е. их следует рассматривать как константы. Рассмотрим пример нахождения частных производных от заданной функции нескольких переменных (в частности, двух) переменных. $z = (x + 2y) \cdot e^{-xy}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} [(x + 2y) \cdot e^{-xy}] = e^{-xy} + (x + 2y) \cdot e^{-xy} (-y) = e^{-xy} \cdot (1 - xy - 2y^2),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} [(x + 2y) \cdot e^{-xy}] = 2 \cdot e^{-xy} + (x + 2y) \cdot e^{-xy} (-x) = e^{-xy} \cdot (2 - x^2 - 2xy).$$

Задание 23. Вычислить интеграл

$$\int \frac{2 + 3\sqrt[3]{x^2} + 5\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}} dx$$

Решение: Преобразуем подынтегральную функцию:

$$\frac{2 + 3\sqrt[3]{x^2} + 5\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}} = 2 \cdot x^{-\frac{3}{2}} + 3 \cdot x^{-\frac{5}{6}} + 5 \cdot \frac{1}{x}$$

Далее представляем интеграл алгебраической суммы в виде суммы интегралов слагаемых, вынося постоянные множители за знаки интегралов, и, пользуясь таблицей интегралов, получим:

$$\begin{aligned} \int \frac{2 + 3\sqrt[3]{x^2} + 5\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}} dx &= 2 \int x^{-\frac{3}{2}} dx + 3 \int x^{-\frac{5}{6}} dx + 5 \int \frac{dx}{x} = \\ &= \frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} + 3 \frac{x^{-\frac{5}{6}+1}}{-\frac{5}{6}+1} + 5 \ln|x| + c = -\frac{4}{\sqrt{x}} + 18\sqrt[6]{x} + 5 \ln|x| + c \end{aligned}$$

Проверка:

$$\begin{aligned} \left(-\frac{4}{\sqrt{x}} + 18\sqrt[6]{x} + 5 \ln|x| + c \right)' &= \left(-4x^{-\frac{1}{2}} + 18x^{\frac{1}{6}} + 5 \ln x + c \right)' = \\ &= \left(-4 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) x^{-\frac{1}{2}-1} + 18 \cdot \frac{1}{6} \cdot x^{\frac{1}{6}-1} + 5 \cdot \frac{1}{x} \right) = x^{-\frac{2}{3}} \left(2 + 3x^{\frac{2}{3}} + 5x^{\frac{1}{3}} \right) = \\ &= \frac{2 + 3\sqrt[3]{x^2} + 5\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}} \end{aligned}$$

Задание 24.

Вычислить интеграл $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{1+2\cos x}}$

Решение:

Первый способ. Полагая $1 + 2\cos x = t$, $-2\sin x dx = dt$, получим

$$\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{1+2\cos x}} = -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{2} \int t^{-\frac{1}{2}} dt = -\frac{1}{2} \cdot 2t^{\frac{1}{2}} + c = -\sqrt{t} + c = -\sqrt{1+2\cos x} + c$$

Второй способ. $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{1+2\cos x}}$

Умножая и деля на -2 и замечая, что $-2\sin x dx = d(1+2\cos x)$, получим

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin x dx}{\sqrt{1+2\cos x}} &= -\frac{1}{2} \int \frac{d(1+2\cos x)}{\sqrt{1+2\cos x}} = \frac{1}{2} \int (1+\cos x)^{-\frac{1}{2}} d(1+\cos x) = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{(1+2\cos x)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c = -(1+2\cos x)^{\frac{1}{2}} + c = -\sqrt{1+2\cos x} + c \end{aligned}$$

$$\text{Проверка: } \left(-\sqrt{1+2\cos x} + c \right)' = \frac{2\sin x}{2\sqrt{1+\cos x}} = \frac{\sin x}{\sqrt{1+2\cos x}}$$

Задание 25. Вычислить интеграл $\int \frac{x+1}{x^2+2x+3} dx$

Для вычисления интеграла от функции, содержащей квадратный трехчлен, надо выделить полный квадрат из квадратного трехчлена, заменить переменную, в результате чего получим табличные интегралы.

Выделяя полный квадрат в знаменателе, имеем:

$x+2x+3=(x+1)^2+2$. Далее, заменяя $x+1=t$, $dx=dt$, получим:

$$\begin{aligned}\int \frac{(x+1)dx}{x^2+2x+3} &= \int \frac{(x+1)dx}{(x+1)^2+2} = \int \frac{tdt}{t^2+2} = \frac{1}{2} \int \frac{d(t^2+2)}{t^2+2} = \frac{1}{2} \ln(t^2+2) + c = \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2+2x+3) + c\end{aligned}$$

Проверка: $\left[\frac{1}{2} \ln(x^2+2x+3) + c \right]' = \frac{1}{2} \frac{2x+2}{x^2+2x+3} = \frac{x+1}{x^2+2x+3}$

Задание 26. Вычислить интеграл $\int \sqrt{x} \ln x dx$.

Решение: При вычислении этого интеграла надо применить метод интегрирования по частям. Положив $\ln x = u$, $dv = \sqrt{x} dx$, найдем:

$$du = \frac{1}{x} dx; \quad v = \int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}. \text{ Подставляя в формулу}$$

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du, \text{ получим}$$

$$\int \sqrt{x} \ln x dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \ln x - \int \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{x}$$

$$\frac{2}{3} \sqrt{x^3} \ln x - \frac{2}{3} \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} \ln x - \frac{4}{9} \sqrt{x^3} + c = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} \left(\ln x - \frac{2}{3} \right) + c$$

Проверка: $\left[\frac{2}{3} \sqrt{x^3} \left(\ln x - \frac{2}{3} \right) + c \right]' = \frac{2}{3} \left[\left(\sqrt{x^3} \right)' \left(\ln x - \frac{2}{3} \right) + \sqrt{x^3} \left(\ln x - \frac{2}{3} \right)' \right] =$

$$\frac{2}{3} \left[\frac{3}{2} \sqrt{x} \left(\ln x - \frac{2}{3} \right) + \sqrt{x^3} \cdot \frac{1}{x} \right] = \sqrt{x} \ln x - \frac{2}{3} \sqrt{x} + \frac{2}{3} \sqrt{x} = \sqrt{x} \cdot \ln x$$

При интегрировании по частям важен выбор функции u и v . В качестве u выбирается та часть подынтегрального выражения, которая существенно упрощается при дифференцировании. За dv – та часть подынтегрального выражения вместе с dx , которая может быть проинтегрирована.

Задание 27.

Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{x^3 + 1}$

Решение:

Имеем $(x^3 + 1) = (x + 1)(x^2 - x + 1)$. Разложим рациональную дробь.

$\frac{1}{(x + 1)^3} = \frac{1}{(x + 1)(x^2 - x + 1)}$ на простейшие дроби, имея в виду, что

квадратный трехчлен $x^2 - x + 1$ не имеет действительных корней:

$$\frac{1}{x^3 + 1} = \frac{A}{x + 1} + \frac{Bx + C}{x^2 - x + 1}$$

Отыщем методом неопределенных коэффициентов постоянные A , B , C . Умножая на $x^3 + 1$ обе части равенства, получим:

$$1 = A(x^2 - x + 1) + (Bx + C)(x + 1) = (A + B)x^2 + (-A + B + C)x + A + C$$

Это равенство тождественно по x тогда и только тогда, когда выполнены равенства (равны коэффициенты при одинаковых степенях в правой и левой частях):

$$\text{При } x^2 \quad A + B = 0$$

$$\text{При } x^1 \quad -A + B + C = 0$$

$$\text{При } x^0 \quad A + C = 1$$

(свободный член)

Полученная система трех линейных алгебраических уравнений с тремя неизвестными имеет следующее решение:

$$A = \frac{1}{3} \quad B = -\frac{1}{3} \quad C = \frac{2}{3}$$

Итак, $\frac{1}{x^3 + 1} = \frac{\frac{1}{3}}{x + 1} - \frac{\frac{1}{3}(x - 2)}{x^2 - x + 1}$. Интегрируя, получим:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^3 + 1} &= \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x + 1} - \int \frac{(x - 2)dx}{3(x^2 - x + 1)} = \frac{1}{3} \ln|x + 1| - \frac{1}{3} \int \frac{\frac{1}{2}(2x - 4)dx}{x^2 - x + 1} = \\ &= \frac{1}{3} \ln|x + 1| - \frac{1}{6} \int \frac{2x - 4}{x^2 - x + 1} dx = \frac{1}{3} \ln|x + 1| - \frac{1}{6} \int \frac{2x - 1}{x^2 - x + 1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \\ &= \frac{1}{3} \ln|x + 1| - \frac{1}{6} \ln(x^2 - x + 1) + \frac{1}{\sqrt[2]{\frac{3}{4}}} \operatorname{arctg} \frac{x - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}} \end{aligned}$$

Проверка:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{6} \ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + c \right) = \\ \frac{1}{3(x+1)} - \frac{2x-1}{6(x^2-x+1)} + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{(2x-1)^2}{3}} = \frac{1}{x+1} - \frac{\frac{1}{3}x - \frac{1}{6}}{x^2-x+1} - \frac{2}{4+4x^2-4x} = \\ = \frac{1}{x^3+1} \end{aligned}$$

Задание 28. Вычислить интеграл $\int \frac{\sqrt{x} dx}{x - \sqrt[3]{x^2}}$

Решение: Подстановка $x = t^k$, где k – общее наименьшее кратное показателей всех радикалов, под которыми x входит в подынтегральную функцию, приводит к интегралу от рациональной дроби.

В нашем примере x входит в подынтегральную функцию под радикалами с показателями 2 и 3. Следовательно, делаем подстановку $x = t^6$, $dx = 6t^5 dt$.

Тогда:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x} dx}{x - \sqrt[3]{x^2}} &= \int \frac{t^3}{t^6 - t^4} 6t^5 dt = \int \frac{t^4}{t^2 - 1} dt = 6 \int \frac{t^4 - 1 + 1}{t^2 - 1} dt = 6 \int \frac{t^4 - 1}{t^2 - 1} dt + 6 \int \frac{dt}{t^2 - 1} = \\ &= 6 \int \frac{(t^2 - 1)(t^2 + 1)}{t^2 - 1} dt - 6 \int \frac{dt}{t^2 - 1} = 6 \int (t^2 + 1) dt + 6 \int \frac{dt}{t^2 - 1} = \\ &= 6 \frac{t^3}{3} + 6t + 6 \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + c = 2t^3 + 6t + 3 \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + c = 2\sqrt{x} + 6\sqrt[3]{x} + 3 \ln \left| \frac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[6]{x}+1} \right| + c \end{aligned}$$

Задание 29.

Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{a^2 + b^2 \cos^2 x}$

Решение: Т.к. при изменении знаков $\sin x$ и $\cos x$ подынтегральное выражение не меняет знака, применим подстановку

$$\operatorname{tg} x = t, \quad \frac{dx}{\cos^2 x} = dt, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$$

Интегрируя, получим:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{a^2 + b^2 \cos^2 x} &= \int \frac{dx}{\cos^2 x (a^2 \sec^2 x + b^2)} = \int \frac{dt}{(a^2(1+t^2) + b^2)} = \\ &= \int \frac{dt}{a^2 t^2 + (a^2 + b^2)} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dt}{t^2 + \frac{a^2 + b^2}{a^2}} = \\ &= \frac{1}{a^2} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{a \cdot t}{\sqrt{a^2 + b^2}} + C = \\ &= \frac{1}{a\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{a \cdot \operatorname{tg} x}{\sqrt{a^2 + b^2}} + C \end{aligned}$$

Проверка:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{a\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{a \cdot \operatorname{tg} x}{\sqrt{a^2+b^2}} + C \right) = \frac{1}{a\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{a^2 \operatorname{tg}^2 x}{a^2+b^2}} \cdot \frac{a}{\cos^2 x \sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a^2}{(a^2+b^2)(a^2+b^2+a^2 \operatorname{tg}^2 x) \cos^2 x} = \frac{1}{a^2+b^2 \cos^2 x}$$

Задание 30. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5}$

Решение: Поскольку подынтегральная функция рационально зависит от $\sin x$ и $\cos x$, то применим универсальную подстановку

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t; \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}; \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Интегрируя, получим:

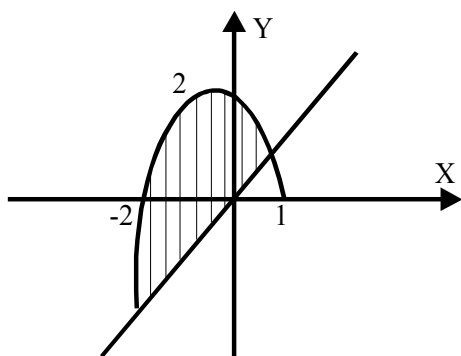
$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5} &= \int \frac{2dt}{(1+t^2) \left(4 \frac{2t}{1+t^2} + 3 \frac{1-t^2}{1+t^2} + 5 \right)} = \\ &= 2 \int \frac{dt}{2t^2 + 8t + 8} = \int \frac{dt}{(t+2)^2} = \frac{-1}{t+2} = \\ &= -\frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 2} + C. \end{aligned}$$

Проверка:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(-\frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 2} + C \right) &= \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 4 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 4} \cdot \frac{\frac{1}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}} = \\ &= \frac{1}{2 \sin^2 \frac{x}{2} + 8 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + 8 \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{4 \sin x + 3 \cos x + 5} \end{aligned}$$

Задание 31. Найти площадь фигуры, ограниченной прямой $y = x$ и параболой $y = 2 - x^2$.

Решение: Найдем абсциссы точек пересечения прямой с параболой:



$$\begin{cases} y = x \\ y = 2 - x^2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x - 2 + x^2 &= 0 \\ x_1 &= -2; \quad x_2 = 1 \end{aligned}$$

Воспользуемся формулой для вычисления площади фигуры, ограниченной двумя кривыми: $S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx$

При $a = -2$, $b = 1$, $f_2(x) = 2 - x^2$, $f_1(x) = x$

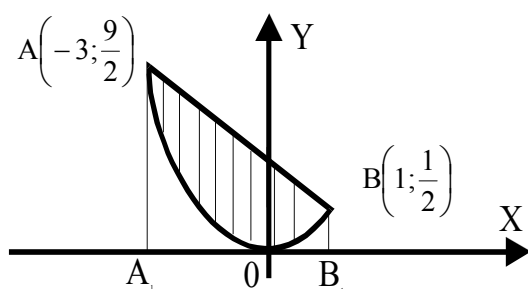
Получим:

$$S = \int_{-2}^1 (2 - x^2 - x) dx = \left(2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-2}^1 =$$

$$= \left(2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) - \left(-4 + \frac{8}{3} - 2 \right) = \frac{9}{2} = 4,5$$

Ответ: $\frac{9}{2}$ кв. ед.

Задание 32. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $2y = x^2$, $2x + 2y - 3 = 0$ вокруг оси OX .



Решение: Ограниченная линиями $y = x^2/2$ и $2x + 2y - 3 = 0$ фигура, при вращении вокруг оси OX образует тело, объем которого можно найти как разность объемов V_1 и V_2 , образованных вращением вокруг оси OX трапецией A_1ABB_1 и A_1AOBB_1 .

$$V_1 = \pi \int_{x_1}^{x_2} y^2 dx = \pi \int_{-3}^1 \left(\frac{3}{2} - x \right)^2 dx = \pi \int_{-3}^1 \left(x - \frac{3}{2} \right)^2 d\left(x - \frac{3}{2} \right) = \pi \frac{\left(x - \frac{3}{2} \right)^3}{3} \Big|_{-3}^1 = \frac{91}{3} \pi$$

$$V_2 = \pi \int_{-3}^1 y^2 dx = \frac{\pi}{4} \int_{-3}^1 x^4 dx = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{x^5}{5} \Big|_{-3}^1 = \frac{61}{5} \pi$$

$$\text{Искомый объем } V = V_1 - V_2 = \left(\frac{91}{3} - \frac{61}{5} \right) \pi = 18 \frac{2}{15} \pi$$

Задание 33. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость $\int_1^{\infty} \frac{\arctg x}{1+x^2} dx$

Решение: Определение $\int_1^{\infty} f(x)dx$ называется предел $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)dx$

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{\arctg x}{1+x^2} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{\arctg x}{1+x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \arctg x d(\arctg x) = \left(\text{т.к. } d(\arctg x) = \frac{dx}{1+x^2} \right) = \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{\arctg^2 x}{2} \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{\arctg^2 b}{2} - \frac{\arctg^2 1}{2} \right) = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{32} = \frac{3\pi^2}{32} \end{aligned}$$

Задание 34.

Найти общее решение или общий интеграл дифференциального уравнения: $(x^2 + 2xy)dx + xydy = 0$

Решение: Уравнение вида $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ называется однородным, если $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ – однородные функции одного измерения. Функция $f(x, y)$ называется однородной измерения m , если $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m f(x, y)$. Однородное уравнение может быть приведено к виду $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ подстановка $y = tx$ преобразует это уравнение в уравнение с разделяющимися переменными.

В данном уравнении $P(x, y) = x^2 + 2xy$; $Q(x, y) = xy$. Обе функции однородные 2-го измерения. Введем подстановку $y = tx$ $dy = xdt + tdx$. Тогда уравнение принимает вид:

$$\begin{aligned} (x^2 + 2x^2t)dx + tx^2(xdt + tdx) &= 0 \\ \text{или } (x^2 + 2x^2t + t^2x^2)dx + t \cdot x^3dt &= 0 \end{aligned}$$

Разделяя переменные и интегрируя, находим:

$$\frac{dx}{x} - \frac{tdt}{(t+1)^2} = 0 \quad \int \frac{dx}{x} + \int \frac{tdt}{(t+1)^2} = C$$

преобразуем второй интеграл:

$$\ln|x| + \int \frac{t+1-1}{(t+1)^2} dt = C$$

$$\text{или } \ln|x| + \ln|t+1| + \frac{1}{t+1} = C$$

Возвращаясь к прежней неизвестной функции y , находим окончательный ответ:

$$\ln|x+y| + \frac{x}{x+y} = C \quad (\text{общий интеграл})$$

Задание 35. Найти общее решение или общий интеграл дифференциального уравнения $y' \cdot \cos^2 x + y = \tg x$

Решение: Уравнение вида $y' + P(x)y = Q(x)$ называется линейным, если y и y' входят в первых степенях. Если $Q(x) \neq 0$, то уравнение называется линейным неоднородным, а при $Q(x) = 0$ – линейным однородным. Общее решение однородного уравнения получается разделением пере-

менных в уравнении $y' + P(x)y = 0$. Нам надо уравнение $y' \cdot \cos^2 x + y = \operatorname{tg} x$, разделим на $\cos^2 x$, тогда получим, что $y' + \frac{y}{\cos^2 x} = \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}$, а соответствующее одно

родное уравнение $y' + \frac{y}{\cos^2 x} = 0$. Разделяем в этом уравнении переменные

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{\cos^2 x},$$

$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{\cos^2 x}$ и интегрируем $\ln|y| = -\operatorname{tg} x + \ln|c|$, тогда $y = c \cdot e^{-\operatorname{tg} x}$. Полагаем

теперь, что C - функция от x , т.е. $C=C(x)$ и найдем эту функцию, используя правую часть уравнения

$$y = C(x) \cdot e^{-\operatorname{tg} x}$$

$$y' = C'(x) \cdot e^{-\operatorname{tg} x} + C(x) \cdot e^{-\operatorname{tg} x} \left(-\frac{1}{\cos^2 x} \right)$$

Подставляем теперь в уравнение, тогда получаем

$$C'(x)e^{-\operatorname{tg} x} - C(x)\frac{e^{-\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} + \frac{C(x)e^{-\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} = \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}$$

после приведения подобных членов получаем:

$$C'(x)e^{-\operatorname{tg} x} = \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}$$

разделяя переменные получаем:

$$\frac{dC(x)}{dx} = \frac{e^{\operatorname{tg} x} \operatorname{tg} x}{\cos^2 x}; \quad dC(x) = \frac{e^{\operatorname{tg} x} \operatorname{tg} x dx}{\cos^2 x}$$

$$dC(x) = e^{\operatorname{tg} x} \cdot \operatorname{tg} x \cdot d\operatorname{tg} x; \quad C(x) = \operatorname{tg} x \cdot e^{\operatorname{tg} x} - e^{\operatorname{tg} x} + C_1$$

(C_1 - произвольная постоянная)

подставляем теперь полученное значение для $C(x)$ в выражение для общего решения и получаем:

$y = (\operatorname{tg} x \cdot e^{\operatorname{tg} x} - e^{\operatorname{tg} x} + C_1) e^{-\operatorname{tg} x}$ или $y = \operatorname{tg} x + C e^{-\operatorname{tg} x} - 1$ это и есть общее решение данного дифференциального уравнения.

Линейные уравнения 1-го порядка можно интегрировать также методом Бернулли, который заключается в следующем. Полагая $y=UV$, где $U=U(x)$ и $V=V(x)$, преобразуем исходное уравнение $y' + P(x)y = Q(x)$ к виду:

$$U'V + UV' + P(x) \cdot U \cdot V = Q(x) \text{ или}$$

$$U[V' + P(x)V] + VU' = Q(x) \text{ выберем теперь } V \text{ таким образом, чтобы}$$

$$V' + P(x) \cdot V = 0, \text{ т.е. } V = e^{-\int P(x) dx},$$

тогда $V \cdot U' = Q(x)$ или $U' = \frac{Q(x)}{V}$

$$U' = Q(x) \cdot e^{\int P(x) dx} \text{ или } U = c + \int Q(x) \cdot e^{\int P(x) dx} dx.$$

Теперь найдем общее решение

$$y = U(x) \cdot V(x) = e^{-\int P(x) dx} \left[Q(x) e^{\int P(x) dx} dx + c \right]$$

Для нашего примера будем иметь:

$$y' + \frac{y}{\cos^2 x} = \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}$$

$$y = U \cdot V; \quad y' = U'V + V'U$$

$$U'V + V'U + \frac{1}{\cos^2 x} U \cdot V = \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}$$

$$U \left[V' + \frac{1}{\cos^2 x} V \right] + V \cdot U' = \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}$$

$$V' + \frac{1}{\cos^2 x} V = 0 \text{ тогда } V = e^{-\operatorname{tg} x}$$

подставляем это значение в уравнение и получаем:

$$e^{-\operatorname{tg} x} \cdot U' = \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} \text{ тогда } U' = e^{\operatorname{tg} x} \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}$$

$$U = \operatorname{tg} x \cdot e^{\operatorname{tg} x} - e^{\operatorname{tg} x} + c$$

и $y = U \cdot V = (\operatorname{tg} x e^{\operatorname{tg} x} - e^{\operatorname{tg} x} + c) e^{-\operatorname{tg} x} = \operatorname{tg} x - 1 + c \cdot e^{-\operatorname{tg} x}$, т.е. общее решение уравнения $y = \operatorname{tg} x - 1 + c \cdot e^{-\operatorname{tg} x}$.

Задание 36.

Найти частное решение дифференциального уравнения

$y'' + y' - 2y = \cos x - 3 \sin x$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=1$; $y'(0)=2$.

Решение. Данное уравнение является линейным неоднородным уравнением 2-го порядка с постоянными коэффициентами $y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x)$,

правая часть которого имеет вид $e^{\alpha x} [P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x]$ (или сумму функций такого типа). Здесь α и β постоянные, $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ - многочлены от x степеней n и m соответственно.

Общее решение этого уравнения будем искать как сумму общего решения соответствующего однородного уравнения, т.е.

$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$ и частного решения данного неоднородного уравнения. Составим для уравнения $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$ характеристическое уравнение $k^2 + a_1 k + a_2 = 0$, тогда возможны три случая:

- I). k_1 и k_2 - действительные и различные, тогда $y_{00} = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}$
 II). k_1 и k_2 - действительные и равные, тогда $y_{00} = c_1 e^{k_1 x} + c_2 x e^{k_1 x}$
 III). k_1 и k_2 - комплексные и сопряженные $k_{1,2} = \alpha + \beta \cdot i$, тогда

$$y_{00} = c_1 e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x + c_2 e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x$$

для нашего случая имеем:

$$k^2 + k - 2 = 0 \quad (\text{первый случай})$$

$$k_1 = -2 \quad k_2 = 1$$

т.е. $y_{00} = c_1 e^{-2x} + c_2 e^x$.

Частное решение уравнения $y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x)$ для заданного вида правой части следует искать в виде

$$y_{ч.н.} = x^r \cdot e^{\alpha x} \cdot [P_e(x) \cos bx + Q_e(x) \sin bx]$$

где r - равно показателю кратности корня $d \pm bi$ (если он совпадает с корнем характеристического уравнения) и $r=0$, если $d \pm bi$ не совпадает с $\alpha \pm \beta i$, $P_e(x)$, $Q_e(x)$ - полные многочлены степени $l = \max\{m, n\}$, с неопределенными коэффициентами. Если правая часть равна сумме нескольких различных функций рассматриваемой структуры, то для отыскания частного решения такого уравнения надо найти частные решения, соответствующие отдельным слагаемым правой части и взять их сумму. В нашем случае $m=n=0$ и, следовательно $l=0$, тогда

$y_{ч.н.} = A \cdot \cos x + B \sin x$ ($d=0$, $b=1$ т.е. $d \pm bi = \pm i$ что не совпадает с корнями характеристического многочлена).

$$y'_{ч.н.} = A \cdot \sin x + B \cos x$$

$$y''_{ч.н.} = -A \cdot \cos x - B \sin x \quad \text{подставим в исходное уравнение и получим:}$$

$$y''_{ч.н.} + y'_{ч.н.} - 2y_{ч.н.} = (B - 3A) \cos x + (-3B - A) \sin x \equiv \cos x - 3 \sin x$$

Отсюда $\begin{cases} B - 3A = 1 \\ 3B + A = 3 \end{cases}$ т.е. $A=0$, $B=1$

Следовательно, общее решение данного уравнения будет

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^x + \sin x.$$

Найдем теперь c_1 и c_2 , используя начальные условия:

$$\begin{cases} c_1 e^0 + c_2 e^0 + \sin 0 = 1 \\ -2c_1 e^0 + c_2 e^0 + \cos 0 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ -2c_1 + c_2 = 1 \end{cases}$$

Отсюда $c_1=0$, $c_2=1$ и $y = e^x + \sin x$ - будет частным решением дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям.

Этот метод применим только к линейным уравнениям с постоянными коэффициентами, когда правая часть его имеет вид :

$$f(x) = e^{\alpha x} [P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x]$$

(или является суммой функций такого вида), α и β - постоянные $Q_m(x)$ и $P_n(x)$ многочлены степеней m и n . А само уравнение:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_n y = f(x) \quad (1)$$

Общее решение уравнения (1) будем искать как сумму общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. Для определения общего решения однородного уравнения y_{00} составим характеристическое уравнение, соответствующее данному линейному однородному уравнению с постоянными коэффициентами, т.е.

$$k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \dots + a_n = 0$$

Оно является уравнением n -ой степени и имеет n корней. Среди корней могут быть вещественные и комплексные, различные и кратные.

Задание 37.

Найти область сходимости ряда:

$$2x + \frac{4x^2}{3} + \frac{8x^3}{5} + \dots + \frac{2^n x^n}{2n-1}$$

Применим признак Даламбера: $U_n = \frac{2^n \cdot x^n}{2n-1}; U_{n+1} = \frac{2^{n+1} x^{n+1}}{2n+1}$. Най-

дем $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{U_{n+1}}{U_n} \right|$, пусть этот предел равен $|l(x)|$, тогда при тех x , для которых

$|l(x)| < 1$, ряд сходится, при тех x , для которых $|l(x)| > 1$, ряд расходится, а при тех x , для которых $|l(x)| = 1$, следует провести дополнительные исследования.

$$|l(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2^{n+1} (2n-1) \cdot x^{n+1}}{2^n (2n+1) x^n} \right| = 2 \cdot |x| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{n}}{2 + \frac{1}{n}} = 2|x|$$

т.е. при $|x| < \frac{1}{2}$ ряд сходится, при $|x| > \frac{1}{2}$ ряд расходится. Исследуем сходи-

мость ряда на границах промежутка, т.е. для тех x , при которых $|x| = \frac{1}{2}$.

Если $x = \frac{1}{2}$, то получаем ряд

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \dots$$

Этот числовой ряд расходится. Его можно сравнить с гармоническим

рядом $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{2n-1}} = 2$ по теореме о сравнении числовых рядов мы получаем, что

исследуемый ряд расходится, т.к. гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, а

предел отношения n -ых членов рядов при $n \rightarrow \infty$ равен константе, отличной от 0. Т.е. при $x = \frac{1}{2}$ ряд расходится. При $x = -\frac{1}{2}$ получаем знакопере-

дующийся ряд

$$-1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{(-1)^n}{2n-1} + \dots$$

По теореме Лейбница этот ряд условно сходится. Действительно:

I). ряд знакопередающийся;

II). $|U_1| > |U_2| > \dots > |U_n| > |U_{n+1}| > \dots$ (убывающий)

III). $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 0$

Таким образом заданный ряд сходится, если $-\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2}$

Задание 38

Вычислить определенный интеграл $\int_a^b f(x) dx$ с точностью до 0,001, разложив подынтегральную функцию в степенной ряд и почленно интегрируя

этот ряд: $\int_0^{0,1} \frac{\ln(1+x)}{x} dx$

Решение. Заменяем в подынтегральном выражении $\ln(1+x)$ его разложение в степенной ряд

$$\int_0^{0,1} \frac{\ln(1+x)}{x} dx = \int_0^{0,1} \frac{x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots}{x} dx$$

Разделим почленно на x и проинтегрируем, тогда

$$\begin{aligned} \int_0^{0,1} \frac{\ln(1+x)}{x} dx &= \int_0^{0,1} \left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x^3 + \dots \right) dx = \left(x - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} - \frac{x^4}{16} + \dots \right) \Big|_0^{0,1} = \\ &= 0,1 - \frac{1}{4}0,01 + \frac{1}{9}0,001 \approx 0,098 \end{aligned}$$

2. Решение типовых задач контрольных работ	Для замечаний
<p>Докажем теперь, что выполнена требуемая точность.</p> <p>Рассмотрим первый отброшенный член $\frac{1}{9} \cdot 0,001 = \frac{1}{9000} < 0,001$</p> <p>В силу следствия из теоремы Лейбница (если числовой знакочередующийся ряд удовлетворяет условиям теоремы Лейбница, то модуль суммы остатка не превосходит модуля первого отброшенного члена).</p> <p>Модуль суммы всех отбрасываемых членов не больше $\frac{1}{9000}$, т.е. вычисления проведены с заданной точностью.</p>	

3. Задания для контрольных работ	Для замечаний
<p style="text-align: center;">3. Задания для контрольных работ</p> <p>1-10. Даны вершины $A(X_1; Y_1)$, $B(X_2; Y_2)$, $C(X_3; Y_3)$ треугольника ABC. Требуется найти:</p> <ul style="list-style-type: none"> а) уравнение стороны AC б) уравнение высоты, проведенной из вершины B в) длину высоты, проведенной из вершины A г) величина (в радианах) угла B д) уравнение биссектрисы угла B. <ol style="list-style-type: none"> 1. $A(5;3)$, $B(-11;-9)$, $C(-4;15)$. 2. $A(-7;2)$, $B(5;-3)$, $C(8;1)$. 3. $A(1;-15)$, $B(6;-3)$, $C(2;0)$. 4. $A(-8;3)$, $B(4;-2)$, $C(7;2)$. 5. $A(6;3)$, $B(-10;-9)$, $C(-3;15)$. 6. $A(-9;6)$, $B(3;1)$, $C(6;5)$. 7. $A(20;5)$, $B(-4;12)$, $C(-8;9)$. 8. $A(-3;-7)$, $B(2;5)$, $C(-2;8)$. 9. $A(10;1)$, $B(-6;13)$, $C(1;-11)$. 10. $A(0;-9)$, $B(5;3)$, $C(1;6)$. 11. Составить уравнение линии, расстояние каждой точки которой от точки $A(2;-2)$ вдвое меньше, чем от прямой $X+1=0$. 12. Составить уравнение линии, расстояние каждой точки которой от точки $A(2;-2)$ вдвое больше, чем от прямой $X+1=0$. 13. Составить уравнение линии, каждая точка которой равноудалена от точки $A(3;1)$ и от прямой $Y+5=0$. 14. Составить уравнение линии, расстояние каждой точки которой от точки $A(3;4)$ в два раза больше, чем от точки $B(6;7)$. 15. Составить уравнение геометрического места точек, являющихся центрами окружностей, проходящих через точку $A(3;2)$ и касающихся оси OX. 16. Составить уравнение геометрического места центров окружностей, проходящих через точку $A(-4;2)$ и касающихся оси OY. 17. Составит уравнение линии, сумма расстояния точек которой от точек $A(2;4)$ и $B(-4;4)$ равна 8. 18. Составить уравнение линии, сумма расстояния точек которой от точек $A(2;-2)$ и $B(2;4)$ равна 8. 19. Составить уравнение линии, каждая точка которой вдвое ближе к точке $A(-4;3)$, чем к точке $B(1;-2)$. 20. Составить уравнение линии, каждая точка которой равноудалена от прямой $X+6=0$ и от начала координат. 21. Составить уравнение эллипса, симметричного относительно осей координат, с фокусами на оси OX, если большая ось его равна 8, а расстояние между директрисами равно 16. 22. Составить уравнение эллипса, симметричного относительно осей координат, с фокусами на оси OX, если расстояние между фокусами равно 6, а эксцентриситет равен $3/5$. 	

3. Задания для контрольных работ	Для замечаний
<p>23. Составить уравнение эллипса, симметричного относительно осей координат, с фокусами на оси ОХ, если малая его ось равна 24, а расстояние между фокусами равно 10.</p> <p>24. Составить уравнение гиперболы, симметричной относительно координатных осей, с фокусами на оси ОХ, если уравнение асимптот: $y = \pm \frac{3x}{4}$, а расстояние между фокусами равно 20.</p> <p>25. Составить уравнение гиперболы, симметричной относительно координатных осей, с фокусами на оси ОХ, если действительная ее ось равна 16, а эксцентриситет равен $5/4$.</p> <p>26. Составить уравнение гиперболы, симметричной относительно координатных осей, с фокусами на оси ОХ, если расстояние между фокусами равно 6, а эксцентриситет равен $3/2$.</p> <p>27. Составить уравнение гиперболы, симметричной относительно координатных осей, с фокусами на оси ОХ, если расстояние между директрисами равно $32/5$, а мнимая ось равна 6.</p> <p>28. Составить уравнение параболы, симметричной относительно оси ОХ, с вершиной в начале координат, проходящей через точку $A(-1;3)$.</p> <p>29. Составить уравнение параболы, симметричной относительно оси ОУ, с вершиной в начале координат, проходящей через точку $A(1;1)$.</p> <p>30. Составить уравнение параболы, симметричной относительно оси ОУ, с вершиной в начале координат, проходящей через точку $A(4;8)$.</p> <p>31-40. Даны вершины $A_1(X_1; Y_1; Z_1)$, $A_2(X_2; Y_2; Z_2)$, $A_3(X_3; Y_3; Z_3)$, $A_4(X_4; Y_4; Z_4)$. Средствами векторной алгебры найти:</p> <ul style="list-style-type: none"> а) длину ребра $A_1 A_2$ б) угол между ребрами $A_1 A_2$ и $A_1 A_3$ в) площадь грани $A_1 A_2 A_3$ г) длину высоты пирамиды, проведенной из вершины A_4 д) уравнение высоты пирамиды, проведенной из вершины A_4 е) объем пирамиды $A_1 A_2 A_3 A_4$ <p>31. $A_1(7;0;3)$, $A_2(3;0;-1)$, $A_3(3;0;5)$, $A_4(4;3;-2)$.</p> <p>32. $A_1(1;-1;6)$, $A_2(2;5;-2)$, $A_3(-3;3;3)$, $A_4(4;1;5)$.</p> <p>33. $A_1(3;6;1)$, $A_2(6;1;4)$, $A_3(3;-6;10)$, $A_4(7;5;4)$.</p> <p>34. $A_1(1;1;3)$, $A_2(6;1;4)$, $A_3(6;4;1)$, $A_4(0;5;6)$.</p> <p>35. $A_1(4;4;5)$, $A_2(10;2;3)$, $A_3(-3;5;4)$, $A_4(6;-2;2)$.</p> <p>36. $A_1(-1;2;5)$, $A_2(-4;6;4)$, $A_3(2;1;5)$, $A_4(-1;-2;2)$.</p> <p>37. $A_1(2;-1;9)$, $A_2(1;1;5)$, $A_3(7;3;1)$, $A_4(2;6;-2)$.</p> <p>38. $A_1(1;-2;2)$, $A_2(-1;-3;4)$, $A_3(5;5;-1)$, $A_4(2;-4;5)$.</p> <p>39. $A_1(1;1;3)$, $A_2(7;1;1)$, $A_3(2;2;2)$, $A_4(4;1;-1)$.</p> <p>40. $A_1(3;1;2)$, $A_2(5;0;-1)$, $A_3(0;3;6)$, $A_4(3;7;10)$.</p> <p>41-50. Составить уравнение плоскости, проходящей через:</p> <p>41. Прямую $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{2}$ и точку $A(4;6;-3)$.</p> <p>42. Две параллельные прямые</p>	

3. Задания для контрольных работ	Для замечаний
<p style="text-align: center;">$\frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+5}{2}$ и $\frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{2}$.</p> <p>43. Три точки A(1;2;3), B(2;1;4), C(3;-2;1).</p> <p>44. Две пересекающиеся прямые $\frac{x-3}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+3}{-2}$ и $\frac{x-3}{4} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+3}{-2}$.</p> <p>45. Прямую и точку: $\frac{x-2}{3} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z+1}{2}$ и A(1;2;0).</p> <p>46. Прямую и точку: $\frac{x+4}{3} = \frac{y}{-2} = \frac{z-1}{2}$ и A(2;1;-1).</p> <p>47. Две параллельные прямые: $\frac{x+3}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+4}{-3}$ и $\frac{x}{2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z-1}{-3}$.</p> <p>48. Три точки : A(3;0;-1), B(4;1;0), C(2;-5;3).</p> <p>49. Две пересекающиеся прямые: $\frac{x+1}{-2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z-1}{4}$ и $\frac{x+1}{1} = \frac{y+3}{6} = \frac{z-1}{2}$.</p> <p>50. A(2;0;-3), B(2;-5;3), C(3;-1;2).</p> <p>51-60. Найти указанные пределы (не используя правило Лопиталя):</p> <p>51. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^5 - x + 2}{2x^5 + 3x^2 + 1}$ б) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{6x^2 - 16x - 6}$</p> <p>в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{\sqrt{x+3} - \sqrt{3}}$ г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{3x \sin x}$</p> <p>д) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x [\ln(2x-1) - \ln(2x-3)]$.</p> <p>52. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^6 - x - 1}{4x^6 + 4x^5 - x}$ б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x^2 - 2x - 4}{3x^2 + 4x - 7}$</p> <p>в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4-x} - \sqrt{4+x}}{3x}$ г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x + \sin x}{2x}$</p> <p>д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\ln(1+2x)}$.</p> <p>53. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 2x^2 - x + 1}{x^3 + 3x^2 + 4x - 6}$ б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{2x^2 - x - 6}$</p> <p>в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{3+x} - \sqrt{3-x}}$ г) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \operatorname{tg} x$</p> <p>д) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{3+x}{x}}$.</p> <p>54. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^5 - 3x^2 + 2x}{x^5 + x - 5}$ б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 14x + 12}{x^2 - 6x + 5}$</p>	

3. Задания для контрольных работ	Для замечаний
<p>в) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{7}}{\sqrt{x-2} - 1}$</p> <p>д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x+4} \right)^{-2x}$.</p> <p>55. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^3 - 3x^2 + 5x}{x^3 + 10}$</p> <p>в) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{3}}{\sqrt{3x-2} - 2}$</p> <p>д) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + 2\cos x)^{\frac{3}{\cos x}}$.</p> <p>56. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^4 + 5x^2 - 2}{3x^4 - 4x^2 + x}$</p> <p>в) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x+5} - 3}{\sqrt{x} - 2}$</p> <p>д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+3} \right)^{3x-2}$.</p> <p>57. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 9}{x^2 + x + 1}$</p> <p>в) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x-1} - 1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}}$</p> <p>д) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x[\ln(x+3) - \ln(x-3)]$.</p> <p>58. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 2}{2x^2 + 3x + 4}$</p> <p>в) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x-3} - 1}{\sqrt{2x+3} - \sqrt{7}}$</p> <p>д) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 4x)^{6/x+2}$.</p> <p>59. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x^4 + x^3 + 6x^2}{-x^4 + x - 3}$</p> <p>в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 9} - 3}{\sqrt{x^2 + 3} - \sqrt{3}}$</p> <p>д) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3\sin x)^{2/\sin x}$.</p> <p>60. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^7 + x^6 + 2}{-x^7 - x^2 + 3}$</p> <p>в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - \sqrt{x^2 + 9}}{x^2}$</p> <p>д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x}{1+2x} \right)^{-5x}$.</p> <p>г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$</p> <p>б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{x^2 - 3x + 2}$</p> <p>г) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin 6x \cdot \operatorname{ctg} 4x$</p> <p>б) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 - x - 14}{2x^2 + 16x + 24}$</p> <p>г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{x \cdot \sin x}$</p> <p>б) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 18}{x^2 - 6x + 9}$</p> <p>г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2}$</p> <p>б) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x^2 - 12x + 10}{2x^2 - 11x + 5}$</p> <p>г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \operatorname{tg} x}{1 - \cos 2x}$</p> <p>б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 5x + 4}{3x^2 + 4x - 7}$</p> <p>г) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin^2(x-2)}{x^2 - 4x + 4}$</p> <p>б) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + x - 1}{x^2 - 1}$</p> <p>г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos^2 2x}{x \sin 3x}$</p>	

61-70. Функция $y=f(x)$ задана различными аналитическими выражениями для различных областей изменения независимой переменной. Найти точки разрыва функции, если они существуют. Построить график функции:

$$61. \quad y = \begin{cases} -2, & x < 0 \\ -2\cos x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \pi + x, & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$62. \quad y = \begin{cases} x+2, & x \leq -2 \\ 2-x, & -2 < x < 0 \\ x^2+2, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$63. \quad y = \begin{cases} x, & x \leq -1 \\ 0.5, & -1 < x \leq \frac{\pi}{6} \\ \sin x, & x \geq \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

$$64. \quad y = \begin{cases} x^2-4, & x < -1 \\ 3x, & -1 \leq x \leq 3 \\ 5, & x > 3 \end{cases}$$

$$65. \quad y = \begin{cases} 2, & x < -1 \\ 2-2x, & -1 \leq x \leq 1 \\ \ln x, & x > 1 \end{cases}$$

$$66. \quad y = \begin{cases} \frac{4}{x}, & x < -2 \\ x, & -2 \leq x < 0 \\ 1-x, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$67. \quad y = \begin{cases} 0.5 \cdot \sqrt{4-x}, & x < 0 \\ \cos 2x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \\ -x, & x > \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$68. \quad y = \begin{cases} \cos x, & x \leq -\pi \\ -1, & -\pi < x \leq 0 \\ \sqrt{x+1}, & x > 0 \end{cases}$$

$$69. \quad y = \begin{cases} x+\pi, & x < -\pi \\ \sin x, & -\pi \leq x < 0 \\ 3-2x, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$70. \quad y = \begin{cases} x^2-4, & x < -2 \\ 3x+2, & -2 \leq x \leq 2 \\ 12-x^2, & x > 2 \end{cases}$$

71-80. Найти производные:

$$71. \quad \text{а) } y = \frac{1}{\sqrt[3]{9x+4}} + \frac{12}{\sqrt[4]{x^3+10}}$$

$$\text{б) } y = \sqrt[3]{\operatorname{ctg}^2 3x}$$

$$\text{в) } y = \ln \sqrt[6]{\frac{12}{e^{6x} - e^{-6x}}}$$

$$\text{г) } y = \frac{1}{9} \arccos\left(\frac{9}{x}\right)$$

$$\text{д) } x^2 \sin 2y - y^2 \cos 2x = 10$$

$$72. \quad \text{а) } y = \frac{x^2}{\sqrt{4-x^3}}$$

$$\text{б) } y = 5^{\frac{1}{\sin^3 2x}}$$

3. Задания для контрольных работ	Для замечаний
<p>в) $y = \ln \operatorname{tg}^3 \frac{x}{2}$</p> <p>д) $(e^y - 3x)^2 = x^2 + a^2$</p> <p>73. а) $y = \sqrt{\frac{x^2 + 2}{x^2 - 2}}$</p> <p>в) $y = \frac{1}{3} \ln \frac{x + 4}{x^2 - 3x}$</p> <p>д) $x \cdot \operatorname{tgy} - 2x^2 + 3y^2 = 4$</p> <p>74. а) $y = \frac{x - 4}{x + 4} \sqrt{x^2 - 6}$</p> <p>в) $y = \ln \sqrt[6]{1 + e^{6x} + e^{4x}}$</p> <p>д) $y^3 - x^2 = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$</p> <p>75. а) $y = \left(\frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}} \right)^3$</p> <p>в) $y = \ln \sqrt{\operatorname{tg} \frac{x^2}{2} + 4}$</p> <p>д) $y^2 = x^2 + x \cos^2 y$</p> <p>76. а) $y = \sqrt[3]{(2x - 3)(3 - x^2)}$</p> <p>в) $y = \ln(\sqrt{2x^2 + 1} + \sqrt{2x})$</p> <p>д) $y = x^2 \operatorname{arctg} x - \ln \sqrt{x^2 + 1}$</p> <p>77. а) $y = \frac{\sqrt{2x^2 - 1}}{x^2 + 1}$</p> <p>в) $y = (2 + \ln \sin 3x)^2$</p> <p>г) $y = (9x^2 + 4) \operatorname{arctg} 3x$</p> <p>д) $e^{2y^2} - e^{-3x} + \frac{y}{x^2} = 1$</p> <p>78. а) $y = \left(\frac{x}{3 - 4x^2} \right)^3$</p> <p>в) $y = \ln \sqrt{e^{3x} + e^{-3x}}$</p> <p>д) $\ln(x^2 + y^2) + \operatorname{arctg} \frac{x^2}{y} = 0$</p> <p>г) $y = 6 \operatorname{arctg} \sqrt{1 + 3x}$</p> <p>б) $y = \sin^6 10x + 2 \cos^6 10x$</p> <p>г) $y = \operatorname{arctg} \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{4}$</p> <p>б) $y = \sqrt[4]{\operatorname{tg} 8x + 1}$</p> <p>г) $y = \sqrt{4 - x^2 + \arcsin \frac{5x}{2}}$</p> <p>б) $y = e^{\sin x - 2 \cos x} (\sin x \cdot \cos 3x)$</p> <p>г) $y = 4 \arcsin \frac{\sqrt{x + 1}}{2}$</p> <p>б) $y = \frac{\sin^2 \frac{x}{4}}{4 + \cos^2 \frac{x}{4}}$</p> <p>г) $y^2 = x^2 + x \cdot \sin y$</p> <p>б) $y = e^{3x} (3 \sin 2x - 3 \cos 2x)$</p> <p>б) $y = \sqrt{1 + \sin 4x} - \sqrt{1 - \sin 4x}$</p> <p>г) $y = \sqrt{x} \cdot \arccos \frac{1}{\sqrt{x}}$</p>	

3. Задания для контрольных работ		Для замечаний
79.	а) $y = (\sqrt[3]{x} + 1) \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - 1 \right)$ б) $y = \frac{1}{14} \cdot \frac{1 + \operatorname{tg} 7x}{1 - \operatorname{tg} 7x}$ в) $y = \ln^3 \left(1 + e^{\frac{x^2}{3}} \right)$ г) $y = (a - b) \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a - x^2}{x^2 - b}}$ д) $e^{y^2} + ax^2 e^{-y} = 2bx^2$	
80.	а) $y = \frac{9}{\sqrt{x^2 - 4x - 5}}$ б) $y = \frac{1}{\sin^3 10x}$ в) $y = \ln \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x^2}{2} \right)$ г) $y = \sqrt{1 - 4x^2} \arcsin 2x^2$ д) $3^{x+y^2} - x \cdot y^3 \ln 3 = 15$	
81-90. Найти $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$ для функции, заданной параметрически:		
81.	$\begin{cases} x = \ln \cdot \cos^2 2t \\ y = \sin^2 2t \end{cases}$	82.
83.	$\begin{cases} x = \frac{1-t}{t^2} \\ y = \frac{1+t}{t^2} \end{cases}$	84.
85.	$\begin{cases} x = \frac{1}{4} t^4 + t \\ y = \ln(t^3 + 1) \end{cases}$	86.
87.	$\begin{cases} y = \ln(1 + t^3) \\ x = t - \operatorname{arctg} t \end{cases}$	88.
89.	$\begin{cases} x = 4 - e^{-3t} \\ y = \frac{3}{e^{3t} + 1} \end{cases}$	90.
91-100. Исследовать методами дифференциального исчисления и построить графики функций:		
91.	а) $y = 3 \left(\frac{x^4}{2} - x^2 \right)$ б) $y = 1 + \frac{4x+1}{x^2}$	
92.	а) $y = x^5 - \frac{5}{3} x^3$ б) $y = \frac{x}{\ln \sqrt{x}}$	

3. Задания для контрольных работ			Для замечаний
93.	a) $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 15$	б) $y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$	
94.	a) $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 5$	б) $y = \frac{x^2 + 16}{4x}$	
95.	a) $y = (x - 3)^2(x - 2)$	б) $y = (x + 1)e^{-2x}$	
96.	a) $y = x^4 - 8x^3 + 16x^2$	б) $y = \frac{3x}{1 + x^2}$	
97.	a) $y = x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{x^4}{4}$	б) $y = \ln x - \frac{1}{2}x^2$	
98.	a) $y = \frac{2x^3 - 6x^2 - 18x + 15}{10}$	б) $y = \frac{3 - x^2}{x + 2}$	
99.	a) $y = x^5 - x^3 - 2x$	б) $y = \ln(x^2 + 9)$	
100.	a) $y = 1 - x^2 + \frac{x^4}{8}$	б) $y = \frac{5x^2}{x^2 - 25}$	
101-110. Найти частные производные функции:			
101.	$z = \ln \operatorname{tg}^3\left(\frac{x^2}{3} - \frac{y}{6}\right)$	102.	$z = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{3y}{4x^3}$
103.	$z = 6\sqrt[3]{1 + 4xy + x^2 + 3y^3}$		
104.	$z = 12 \cos^2\left(\frac{x}{3} - \frac{y^2}{4}\right)$	105.	$z = \frac{5x^2 - 2y}{x + 3y}$
106.	$z = (2x + y^2)e^{-x^2y}$	107.	$z = \sqrt{3x} \cdot \sin \frac{x}{y^2}$
108.	$z = 4a^2b^2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$		
109.	$z = \sin^2(x + y^2) - \sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 2y$		
110.	$z = 2 \arcsin(x\sqrt{y^2 + 2})$		
111-120. Найти неопределенные интегралы. Результат проверить дифференцированием:			
111.	a) $\int \frac{xdx}{\sqrt{4 - x^2}}$	б) $\int \frac{2x - 1}{x^2 - x + 1} dx$	
	в) $\int \sqrt[5]{x} \ln x dx$		
112.	a) $\int \sqrt{(2 - x^2)^3} x dx$	б) $\int \frac{6x - 7}{3x^2 - 7x + 11} dx$	
	в) $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx$		
113.	a) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$	б) $\int \frac{12x + 1}{6x^2 + x - 1} dx$	

3. Задания для контрольных работ		Для замечаний
	в) $\int x \ln \frac{x}{x+1} dx$	
114.	а) $\int e^{-x^2} x dx$	б) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-7x+3x^2}}$
	в) $\int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$	
115.	а) $\int \frac{\ln^3 x}{x} dx$	б) $\int \frac{(x+3)dx}{\sqrt{4x^2+4x+3}}$
	в) $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx$	
116.	а) $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt[3]{2+3\cos x}}$	б) $\int \frac{(6x+1)dx}{3x^2+x-1}$
	в) $\int x^3 \ln(1+x^2) dx$	
117.	а) $\int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{\operatorname{tg} x - 1}}$	б) $\int \frac{dx}{3x^2-2x+2}$
	в) $\int \frac{\ln \cos x}{\sin^2 x} dx$	
118.	а) $\int 2x(x^2+1)^5 dx$	б) $\int \frac{(x-3)dx}{3+66x-11x^2}$
	в) $\int \frac{x \cdot \cos x}{\sin^2 x} dx$	
119.	а) $\int \frac{x^2 dx}{5-x^6}$	б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x(3x+5)}}$
	в) $\int x \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{x^2-1} dx$	
120.	а) $\int \frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{arctg}^2 x}$	б) $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2-x-1}}$
	в) $\int x^2 \cos \frac{x}{2} dx$	
121-130. Найти неопределенные интегралы:		
121.	а) $\int \frac{3x^2+6}{x^3+x^2-2x} dx$	б) $\int \frac{\sqrt{x^3}-\sqrt{x}}{6\sqrt{x}} dx$
	в) $\int \frac{dx}{1+\operatorname{tg} x}$	
122.	а) $\int \frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)} dx$	б) $\int \frac{\sqrt{x} dx}{1+\sqrt[4]{x}}$
	в) $\int \frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x} dx$	

3. Задания для контрольных работ		Для замечаний
123.	а) $\int \frac{4x^2 + x + 1}{x^3 - 1} dx$ б) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3} + 1} dx$ в) $\int \frac{dx}{1 - \cos x}$	
124.	а) $\int \frac{x + 1}{x^3 + 4x^2 + 5x} dx$ б) $\int \frac{\sqrt[6]{x} + 1}{\sqrt[6]{x^7} + \sqrt[4]{x^5}} dx$ в) $\int \frac{\sin x}{1 + \sin x} dx$	
125.	а) $\int \frac{x}{x^3 + x^2 - 2} dx$ б) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2} - x} dx$ в) $\int \sin x^3 \cos x dx$	
126.	а) $\int \frac{x dx}{(x - 1)^2 (x + 2)}$ б) $\int \frac{\sqrt{x} dx}{x - \sqrt[3]{x^2}}$ в) $\int \frac{dx}{\sin x \cos x}$	
127.	а) $\int \frac{x^2 dx}{(x^2 - 1)(x + 1)}$ б) $\int \frac{dx}{(1 + \sqrt[3]{x})\sqrt{x}}$ в) $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$	
128.	а) $\int \frac{x^3 + x^2}{x^2 - 3x + 2} dx$ б) $\int \frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt[6]{x^5} - \sqrt[3]{x^2}} dx$ в) $\int \cos^4 x dx$	
129.	а) $\int \frac{2x^2 + x + 1}{x^3 + x} dx$ б) $\int \frac{1 + \sqrt[4]{x}}{x \cdot \sqrt{x}} dx$ в) $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$	
130.	а) $\int \frac{x + 1}{2x^3 - 3x^2 + x} dx$ б) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x} + \sqrt[8]{x^3}}$ в) $\int \operatorname{tg}^7 x dx$	
131.	Вычислить объем тела вращения, образованного вращением во круг оси ординат фигуры, расположенной в первой четверти и ограниченной линиями: $y = 2 - x^2$; $y = x$; $x = 0$.	
132.	Вычислить площадь фигуры, расположенной в верхней полуплоскости и ограниченной линиями: $y = x^2 - 3x$; $3x + y - 4 = 0$; $y = 0$.	

3. Задания для контрольных работ	Для замечаний
<p>133. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси ординат фигуры, ограниченной линиями: $y = 3 - x^2$; $y = x^2 + 1$.</p> <p>134. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = 2/x$; $y = x+1$; $x = 3$.</p> <p>135. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси абсцисс фигуры, расположенной в первой четверти и ограниченной линиями: $x + y = 4$; $y = 3x$; $y = 0$.</p> <p>136. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $x + y = 0$; $y = 2x - x^2$.</p> <p>137. Криволинейная трапеция, ограниченная линиями: $y = e^{-x}$, $y = 0$, $x=0$, $x = 1$, вращается вокруг оси абсцисс. Вычислить объем тела, которое при этом образуется.</p> <p>138. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = \sin x$ и $y = \cos x$ и лежащей между любыми двумя точками пересечения этих кривых.</p> <p>139. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями: $y^2 = 4x$, $x = 4$.</p> <p>140. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = x^3$, $y = 2x$.</p> <p>141-150. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость:</p> <div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <div style="width: 45%;"> <p>141. $\int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx$</p> <p>143. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{(2x-1)^3}$</p> <p>145. $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$</p> <p>147. $\int_2^0 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$</p> <p>149. $\int_1^{\infty} \frac{xdx}{x^4+9}$</p> </div> <div style="width: 45%;"> <p>142. $\int_e^{\infty} \frac{dx}{x \ln^5 x}$</p> <p>144. $\int_4^{\infty} \frac{dx}{x^2-9}$</p> <p>146. $\int_0^{\infty} \frac{(x+1)dx}{2+2x+x^2}$</p> <p>148. $\int_e^{\infty} \frac{dx}{x^3 \sqrt{\ln x}}$</p> <p>150. $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9}$</p> </div> </div> <p>151-160. Найти общее решение или общий интеграл</p>	

3. Задания для контрольных работ	Для замечаний
<p>дифференциального уравнения:</p> <p>151. $x^2 y' - y^2 = x^2$</p> <p>152. $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$</p> <p>153. $(x^2 + 2x + 1)y' - (x + 1)y = x - 1$</p> <p>154. $y' = x^2 + 2x - 2y$</p> <p>155. $4x^2 - xy + y^2 + y'(x^2 - xy + 4y^2) = 0$</p> <p>156. $y' = \frac{2xy}{3x^2 - y^2}$</p> <p>157. $xy' = \sqrt{y^2 - x^2} + y$</p> <p>158. $2xy' - y = 3x^2$</p> <p>159. $y' - 2xy = 2xe^{x^2}$</p> <p>160. $y' - y \cos x = \sin 2x$</p> <p>161-170. Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' = py' + qy = f(x)$, удовлетворяющего начальным условиям $y(0) = y_0$; $y'(0) = y'_0$:</p> <p>161. $y'' - 4y' + 3y = e^{5x}$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 9$.</p> <p>162. $y'' - 6y' + 9y = x^2 - x + 3$, $y(0) = \frac{4}{3}$, $y'(0) = \frac{1}{27}$.</p> <p>163. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 8$.</p> <p>164. $y'' + y = \cos 3x$, $y(\frac{\pi}{2}) = 4$, $y'(\frac{\pi}{2}) = 1$.</p> <p>165. $y'' - 8y' + 16y = e^{4x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.</p> <p>166. $y'' + 9y' = 6e^{3x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.</p> <p>167. $y'' + y = 2\cos x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.</p> <p>168. $y'' - 4y' + 5y = 2x^2 e^x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$.</p> <p>169. $y'' + 6y' + 9y = 10\sin x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.</p> <p>170. $y'' + y' - 2y = \cos x - 3\sin x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.</p> <p>171-180. Найти область сходимости ряда степенного:</p> <p>171. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 + 2n + 1}$</p> <p>172. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n \cdot x^n}{n^3 - 1}$</p> <p>173. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n + 1}$</p> <p>174. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot x^{2n}}{n + 1}$</p> <p>175. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5^n (n + 1)}$</p> <p>176. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot x^{n-1}}{3^n \cdot n}$</p> <p>177. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(3n + 1)^2}$</p> <p>178. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot x^{2n}}{2^n \cdot 3^{n+1}}$</p> <p>179. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{3^n (n + 1)}$</p> <p>180. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n}}{6^n (n + 2)}$</p>	

3. Задания для контрольных работ	Для замечаний
<p>181-190. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001, разложив подынтегральную функцию в ряд и почленно интегрируя этот ряд:</p> <div style="display: flex; flex-wrap: wrap;"> <div style="width: 50%;"> <p>181. $\int_0^{0.1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx$</p> <p>183. $\int_0^{0.1} \frac{e^x - 1}{x} dx$</p> <p>185. $\int_0^1 \cos \sqrt{x} dx$</p> <p>187. $\int_0^1 \sqrt[3]{x} \cdot \cos x dx$</p> <p>189. $\int_0^{0.5} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$</p> </div> <div style="width: 50%;"> <p>182. $\int_0^{0.2} \frac{\sin x}{x} dx$</p> <p>184. $\int_0^1 e^{-x^2} dx$</p> <p>186. $\int_0^{\frac{1}{9}} \sqrt{x} \cdot e^x dx$</p> <p>188. $\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^2}}$</p> <p>190. $\int_0^{0.5} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx$</p> </div> </div>	

4. Выводы

Для замечаний

4. Выводы

Настоящее пособие может быть использовано для всех форм обучения: дневного, заочного, дистанционного.

Для заочного и дистанционного обучения рекомендуются следующие контрольные работы. По всем специальностям кроме юриспруденции по курсу “Высшая математика” студент должен выполнить четыре контрольные работы.

Контрольные работы выполняются в соответствии с приведенной ниже таблицей №1. Номер выполняемого варианта должен совпадать с последней цифрой учебного шифра студента.

Таблица №1.

вариант	номера задач контрольного задания										
	контрольная работа №1					контрольная работа №2					
1	1	11	21	31	41	51	61	71	81	91	101
2	2	12	22	32	42	52	62	72	82	92	102
3	3	13	23	33	43	53	63	73	83	93	103
4	4	14	24	34	44	54	64	74	84	94	104
5	5	15	25	35	45	55	65	75	85	95	105
6	6	16	26	36	46	56	66	76	86	96	106
7	7	17	27	37	47	57	67	77	87	97	107
8	8	18	28	38	48	58	68	78	88	98	108
9	9	19	29	39	49	59	69	79	89	99	109
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110
контрольная работа №3						контрольная работа №4					
1	111	121	131	141		151	161	171	181		
2	112	122	132	142		152	162	172	182		
3	113	123	133	143		153	163	173	183		
4	114	124	134	144		154	164	174	184		
5	115	125	135	145		155	165	175	185		
6	116	126	136	146		156	166	176	186		
7	117	127	137	147		157	167	177	187		
8	118	128	138	148		158	168	178	188		
9	119	129	139	149		159	169	179	189		
10	120	130	140	150		160	170	180	190		

Юристы выполняют две контрольные работы, соответствующие таблице №2.

Таблица №2.

вариант	номера задач контрольного задания										
	контрольная работа №1					контрольная работа №2					
1	1	41	51	71	81	91	111	131	161	171	181
2	2	42	52	72	82	92	112	132	162	172	182
3	3	43	53	73	83	93	113	133	163	173	183
4	4	44	54	74	84	94	114	134	164	174	184
5	5	45	55	75	85	95	115	135	165	175	185
6	6	46	56	76	86	96	116	136	166	176	186
7	7	47	57	77	87	97	117	137	167	177	187
8	8	48	58	78	88	98	118	138	168	178	188
9	9	49	59	79	89	99	119	139	169	179	189
10	10	50	60	80	90	100	120	140	170	180	10

Авторы с благодарностью примут все замечания и пожелания по данному пособию.

5. Вопросы к экзамену

Билет 1.

1. Уравнения Бернулли и в полных дифференциалах.
2. Вычислить $\iint_D (\cos 2x + \sin y) dx dy$, если область ограничена линиями $x=0, y=0, 4x+4y-\pi=0$.
3. Исследовать сходимость интеграла $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^3} dx$.

Билет 2.

1. Дифференцирование сложных функций нескольких переменных.
2. Исследовать сходимость интеграла $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3 \sqrt{x^2 + 1}}$.
3. Найти решение уравнения $y'' - 4y' + 3y = e^{5x}$, удовлетворяющее условиям: $y(0)=3, y'(0)=9$.

Билет 3.

1. Ряд Тейлора. Условие разложимости функций в ряд Тейлора. Разложение функций в ряды Тейлора и Маклорена.
2. Найти экстремумы функции $z=3x+6y-x^2-xy-y^2+1$.
3. Исследовать сходимость интеграла $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[5]{\ln(1+4x)}}$.

Билет 4.

1. Предел и непрерывность функции двух переменных.
2. Исследовать сходимость интеграла $\int_0^1 \frac{\sqrt[6]{x} dx}{\sqrt{e^{3x} - 1}}$.
3. Решить уравнение $y'' - 2y' + 2y = x^2$.

Билет 5.

1. Неоднородные линейные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами.
2. Определить плоскость, касательную к поверхности $x^2+4y^2+z^2=36$ и параллельную плоскости $x+y-z=0$.
3. Исследовать сходимость ряда: $(x+1) + \frac{(x+1)^2}{2 \cdot 4} + \frac{(x+1)^3}{3 \cdot 4^2} + \frac{(x+1)^4}{4 \cdot 4^3} + \dots$

Билет 6.

1. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.
2. Найти решение уравнения $y' \cdot \cos x = \frac{y}{\ln y}$, удовлетворяющее условию $y(0)=1$.
3. Исследовать сходимость ряда $\frac{x}{2+3} + \frac{x^2}{2^2+3^2} + \frac{x^3}{2^3+3^3} + \dots$

Билет 7.

1. Частные производные, дифференцируемость и дифференциалы первого порядка функции двух переменных.
2. Найти углы с осями координат нормали к поверхности конуса $x^2+y^2=z^2$ в точке (3;4;5).
3. Исследовать сходимость ряда $\frac{2x-3}{1} - \frac{(2x-3)}{3} + \frac{(2x-3)}{5} + \dots$

Билет 8.

1. Признак Даламбера сходимости ряда.
2. Доказать, что если $T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$, то $l \frac{\partial T}{\partial l} + g \frac{\partial T}{\partial g} = 0$.
3. Решить уравнение $y' = \frac{x+y}{x-y}$.

Билет 9.

1. Степенные ряды. Интервал и радиус сходимости.
2. Исследовать функцию на экстремум: $z=x^2-xy+y^2+9x-6y$.
3. Найти решение уравнения $y'''=x \sin x$, удовлетворяющее начальным условиям: $y(0)=0$, $y'(0)=0$, $y''(0)=2$.

Билет 10.

1. Необходимые условия экстремума. Достаточные условия экстремума функции двух переменных.
2. Решить уравнение $(x^2+2xy)dx+xydy=0$.
3. Исследовать сходимость интеграла $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{e^x} dx$.

Билет 11.

1. Интегралы с бесконечными пределами. Признаки сходимости.
2. Исследовать сходимость ряда: $\frac{1}{2} \cdot \frac{x-1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{x-1}{2}\right)^3 + \dots$
3. Найти d^2u , если $u = x \ln \frac{y}{x}$.

Билет 12.

1. Свойства определенного интеграла. Теорема о среднем.
2. Построить график функции $z = f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{при } xy > 0 \\ 0 & \text{при } xy = 0 \\ -1 & \text{при } xy < 0 \end{cases}$.
3. Решить уравнение $xy + y^2 = (2x^2 + xy) \times y^!$.

Билет 13.

1. Дифференциальные уравнения первого порядка. Общие понятия. Теорема существования.
2. Вычислить $\iint_D (x - y) dx dy$, если область D ограничена линиями: $y = 2 - x^2$, $y = 2x - 1$.
3. Найти $\frac{dy}{dx}$ из уравнения $xy + \ln y + \ln x = 0$.

Билет 14.

1. Объем цилиндрического тела. Двойной интеграл.
2. Показать, что функция $u = xe^{-y/x}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.
3. Исследовать сходимость степенного ряда $5x + \frac{5^2 x^2}{2!} + \frac{5^3 x^3}{3!} + \frac{5^4 + x^4}{4!} + \dots$

Билет 15.

1. Уравнения с разделяющимися переменными, однородные и линейные уравнения.
2. Переменить порядок интегрирования $\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x, y) dy$.
3. Найти угловой коэффициент касательной к кривой $y^2 - xu = 4$ в точках пересечения ее с прямой $x = 3$.

Билет 16.

1. Однородные линейные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

2. Переменить порядок интегрирования $\int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x, y) dy$.

3. Найти сумму ряда $1+2x+3x^2+\dots$ ($|x|<1$), продифференцировав почленно ряд $1+x+x^2+\dots$ ($|x|<1$).

Билет 17.

1. Производная по направлению. Градиент.

2. Решить уравнение $(1+e^{2x})y^2 dy = e^x dx$.

3. Исследовать сходимость степенного ряда: $x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + \dots + \frac{x^8}{4} + \dots$

Билет 18.

1. Несобственные интегралы второго рода. Признаки сходимости.

2. Найти производную функции $u = \ln(e^x + e^y)$ в направлении, параллельном биссектрисе координатного угла (1-я четверть).

3. Найти решение уравнения $y'' = xe^{-x}$, удовлетворяющее условиям: $y(0)=1$, $y'(0)=0$.

Билет 19.

1. Абсолютная и условная сходимость ряда. Признак Лейбница.

2. Написать уравнение касательной плоскости к поверхности $az = x^2 + y^2$ в точках пересечения ее с прямой $x=y=z$.

3. Решить уравнение $y' + 2xy = xe^{-x^2}$.

Билет 20.

1. Линейные уравнения второго порядка. Структура общего решения.

2. Переменить порядок интегрирования: $\int_{-6}^2 dx \int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x, y) dy$.

3. Исследовать сходимость ряда $\frac{2}{1} + \frac{2^2}{2^{10}} + \frac{2^3}{3^{10}} + \dots + \frac{2^n}{n^{10}} + \dots$

Билет 21.

1. Производная интеграла Римана по верхнему пределу. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле.

2. Исследовать сходимость ряда $\frac{x}{1 \cdot 2} + \frac{x^2}{2 \cdot 3} + \frac{x^3}{3 \cdot 4} + \dots$

3. Найти частные производные второго порядка функции $u = \frac{x}{\sqrt[3]{t}}$.

Билет 22.

1. Интегральный признак Коши сходимости ряда.
2. Написать уравнения нормали в точке (3;4;5) к поверхности конуса $x^2+y^2=z^2$.
3. Решить уравнение $xy' - y = x^2 \cos x$.

Билет 23.

1. Производные и дифференциалы высших порядков функции двух переменных.
2. Разложить $\ln x$ в ряд по степеням $(x-1)$.
3. Найти решение уравнения $y'' + y = 3 \sin x$, удовлетворяющее краевым условиям:

$$\begin{cases} y(0) + y'(0) = 0 \\ y(\pi/2) + y'(\pi/2) = 0 \end{cases}$$

Билет 24.

1. Функции двух переменных. Метод сечений. Поверхности второго порядка, исследование их формы методом сечений
2. Решить уравнение $y'' + y' - 2y = \cos x - 3 \sin x$. Начальные условия: $y(0)=1$; $y'(0)=2$.
3. Разложить в степенной ряд функцию $f(x) = \sin^2 x$.

Билет 25.

1. Применения рядов Тейлора и Маклорена.
2. Написать уравнения нормали к поверхности $x^2 + y^2 - (z-5)^2 = 0$ в точке (4;3;0)
3. Решить уравнение $y' + \frac{2y}{x} = 3x^2 y^{4/3}$.

Билет 26.

1. Дифференциальные уравнения второго порядка. Теорема существования. Понижение порядка.
2. Построить линии уровня функции $z = xy$.
3. Вычислить $\iint_D \sin(x+y) dx dy$, если область ограничена линиями: $x=0$, $y = \frac{\pi}{2}$, $y=x$.

**Максюков Николай Иванович
Малахов Александр Николаевич
Никишкин Валерий Александрович**

Высшая математика

Учебное пособие

ЛР № 020563 от
Подписано к печати
Формат издания 60х84/8
Печ.л.
Заказ №

Бум. офс. № 1
Уч.-изд.л.

Печать офсетная
Тираж экз.

Типография