

Т.В.БОРДОВИЦЫНА

**Современные
численные методы
в задачах
небесной механики**



Т.В. БОРДОВИЦЫНА

Современные численные методы в задачах небесной механики

**МОСКВА "НАУКА"
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1984**



Бордовицына Т.В. Современные численные методы в задачах небесной механики. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 136 с.

В книге рассматриваются вопросы построения алгоритмов точного численного прогнозирования движения небесных тел на основе применения численных методов высших порядков и преобразований, регуляризирующих и стабилизирующих уравнения движения. В монографии излагаются методы Рунге-Кутты высоких порядков, метод тейлоровских разложений, неявные одношаговые алгоритмы Эверхарта, экстраполяционные методы, многошаговые методы, учитывающие свойства движения, метод многооборотного интегрирования. На многочисленных примерах показана эффективность в задачах небесной механики численных методов высоких порядков в сочетании с регуляризирующими и стабилизирующими преобразованиями уравнений движения небесных тел.

Книга рассчитана на специалистов по небесной механике и астродинамике, а также на аспирантов и студентов старших курсов физико-математических факультетов университетов, специализирующихся по небесной механике и механике космического полета.

Табл. 39, ил. 17, библи. 114.

Татьяна Валентиновна Бордовицына

СОВРЕМЕННЫЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ В ЗАДАЧАХ НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКИ

Редактор Г.С. Куликов

Технический редактор В.В. Лебедева

Корректоры Т.В. Обод, Т.А. Печко

Набор осуществлен в издательстве
на наборно-печатающих автоматах

ИБ № 12434

Сдано в набор 28.09.83. Подписано к печати 27.12.83

Т-22289. Формат 60х90 1/16. Бумага тип № 3

Гарнитура Пресс-Роман. Печать офсетная

Усл.печ.л. 8,5. Усл.кр.-отт. 8,6. Уч.-изд.л. 9,83

Тираж 1500 экз. Тип.зак.13 Цена 1 р. 50 к.

Издательство "Наука"

Главная редакция физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

4-я типография издательства "Наука"

630077, Новосибирск, 77, ул. Станиславского, 25

© Издательство "Наука".
Главная редакция
физико-математической
литературы,
1984.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
Введение	7
Глава 1. Дифференциальные уравнения движения небесных тел. Возмущающие факторы.	10
1.1. Дифференциальные уравнения движения. Задача n тел	10
1.2. Возмущения от несферичности центрального тела	14
1.3. Возмущения, связанные с движением экваториальной плоскости центрального тела	18
1.4. Возмущения от приливных деформаций центрального тела	20
1.5. Возмущения от светового давления	21
1.6. Возмущения от сопротивления атмосферы	23
Глава 2. Особенности дифференциальных уравнений движения небесных тел и способы их устранения.	25
2.1. Особенности дифференциальных уравнений	25
2.2. Метод стабилизирующего множителя	26
2.3. Преобразование Кустаанхеймо – Штифеля	30
2.4. Регулярные оскулирующие элементы	32
2.5. Двойное KS -преобразование	34
2.6. Метод Накози	36
2.7. Другие методы регуляризации и стабилизации уравнений движения	37
Глава 3. Уравнения в вариациях.	38
3.1. Уравнения в вариациях прямоугольных координат	38
3.2. Уравнения в вариациях параметрических переменных	40
Глава 4. Метод тейлоровских разложений	41
4.1. Вводные замечания	41
4.2. Метод рядов Тейлора – Стефенсена для планетной задачи	43
4.3. Регуляризованный метод Тейлора – Стефенсена для задачи n тел	45
4.4. Улучшенные тейлоровские разложения G -функции	49
4.5. Метод рядов Тейлора с рациональной аппроксимацией производных	50
4.6. Метод тейлоровских разложений в задачах о движении спутников Земли	51
Глава 5. Методы Рунге – Кутты высоких порядков	55
5.1. Вводные замечания	55
5.2. Построение методов Рунге – Кутты. Способ Батчера	56
5.3. Алгоритмы Фельберга	63
5.4. Неявные алгоритмы Батчера	65
5.5. Алгоритмы Ярова-Ярового	66
5.6. Другие алгоритмы Рунге – Кутты высоких порядков	67

Глава 6. Неявные одношаговые алгоритмы Эверхарта	67
6.1. Принципы построения	67
6.2. Узлы разбиения шага интегрирования	68
6.3. Типы алгоритмов Эверхарта	70
6.4. Контроль величины шага интегрирования	70
Глава 7. Экстраполяционные методы	71
7.1. Вводные замечания	71
7.2. Экстраполяционные схемы Невилла и Штера	71
7.3. Метод Булирша и Штера	73
7.4. Выбор шага интегрирования	74
Глава 8. Многошаговые методы	75
8.1. Принципы построения	75
8.2. Алгоритмы Адамса – Мультона – Коуэлла	77
8.3. Многошаговый метод с неравноотстоящими узлами	80
8.4. Орбитально устойчивые многошаговые методы	82
8.5. Выбор шага интегрирования. Оценка погрешности алгоритма.	83
8.6. Улучшенный метод Адамса – Мультона – Коуэлла	84
Глава 9. Методы многооборотного интегрирования	88
9.1. Принципы построения	88
9.2. Многооборотный алгоритм предсказания и коррекции.	89
9.3. Модифицированные многооборотные алгоритмы	90
9.4. Особенности реализации многооборотного метода. Определение частот	92
Глава 10. Построение алгоритмов высокоточного численного прогнозирования движения небесных тел	94
10.1. Вводные замечания	94
10.2. Сравнительная характеристика эффективности преобразований, регуляризирующих и стабилизирующих уравнения движения	94
10.3. Численный метод и регуляризирующее и стабилизирующее преобразование. Особенности реализации	100
10.4. Сравнительная характеристика численных алгоритмов	101
10.5. Всесоюзный эксперимент по исследованию эффективности алгоритмов и программ численного прогнозирования движения небесных тел	107
10.6. Численный метод и модель возмущающей силы	115
10.7. Вопросы устойчивости вычислительных алгоритмов	117
10.8. Применение алгоритмов высокоточного численного прогнозирования движения небесных тел	120
Приложения	123
Литература	132

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая монография посвящена вопросам разработки алгоритмов высокоточного численного прогнозирования движения небесных тел.

Глава 1 посвящена изложению физических и математических моделей основных сил, действующих на небесные тела. Рассматриваются различные виды гравитационных возмущений: притяжение третьего тела, несферичность центрального тела, движение экваториальной плоскости центрального тела, приливные деформации в центральном теле, а также негравитационные возмущения — такие, как световое давление и сопротивление атмосферы.

В главе 2 рассматриваются особенности дифференциальных уравнений движения небесных тел, возникающие при тесных сближениях тел друг с другом, а также особенности, связанные с ляпуновской неустойчивостью решений этих уравнений. Излагаются разработанные в последнее время способы устранения этих особенностей, такие как метод стабилизирующего множителя, преобразование Кустаанхеймо—Штифеля, метод Накози.

В практических задачах небесной механики, как правило, одновременно с уравнениями движения приходится интегрировать уравнения в вариациях для получения частных производных от измеряемых параметров по оцениваемым. Поэтому следующая глава монографии посвящена выводу уравнений в вариациях. Рассматриваются уравнения в вариациях для классических уравнений движения и для уравнений в параметрических переменных Кустаанхеймо—Штифеля.

В последующих шести главах монографии излагаются численные методы высоких порядков для решения дифференциальных уравнений движения небесных тел. Вниманию читателя предлагаются метод тейлоровских разложений, методы Рунге—Кутты высоких порядков, неявные одношаговые алгоритмы Эверхарта, экстраполяционные методы, многошаговые методы, метод многооборотного интегрирования. Для каждого метода даны принципы построения, несколько различных алгоритмов метода, способы контроля локальной ошибки метода, критерии смены шага интегрирования. Большинство названных методов предназначены для решения обыкновенных дифференциальных уравнений общего вида и могут иметь широкое применение вне небесной механики во всех задачах, где встречаются подобные уравнения.

Специфические особенности уравнений движения небесных тел учтены в методе тейлоровских разложений, методе многооборотного интегрирования, в так называемых улучшенных численных методах с полиномиально тригонометрической аппроксимацией решения.

В последней главе монографии на многочисленных примерах рассматриваются практические аспекты построения алгоритмов высокоточного численного прогнозирования движения небесных тел, дается сравнительная характеристика численных методов, сопоставляется точность численных алгоритмов с точностью физических моделей возмущающих сил, показывается влияние на точность численного интегрирования регуляризирующих и стабилизирующих преобразований уравнений движения, рассматриваются вопросы устойчивости вычислительных алгоритмов, использующих регуляризирующие и стабилизирующие преобразования.

Большая часть рассматриваемых методов в отечественной литературе либо полностью не освещена, либо освещена очень мало.

Автор считает своим приятным долгом выразить благодарность коллективу Совета по небесной механике ГАИШ им. П.К.Штернберга во главе с профессором Г.Н.Дубошиным за обсуждение рукописи книги. Автор благодарен доктору физико-математических наук В.А.Брумбергу за поддержку и обсуждение отдельных разделов книги. Автор признателен также своим коллегам кандидатам физико-математических наук Л.Е.Быковой и А.М.Черницову, взявшим на себя труд по предварительному просмотру книги.

Т.В.Бордовицына

ВВЕДЕНИЕ

Задача повышения точности прогнозирования движения небесных тел является основной задачей небесной механики от момента ее возникновения и до наших дней. Современный космический эксперимент, а также новые способы получения наблюдений предъявляют особенно высокие требования к точности вычисления пространственных положений небесных тел. В настоящей книге речь пойдет о прогнозировании движения небесных тел с применением численных методов решения дифференциальных уравнений движения этих тел.

Основными источниками ошибок при таком подходе к задаче прогнозирования являются недостаточная точность аппроксимирующей формулы в численном методе, неустойчивость интегрируемой системы уравнений, неравномерность изменений функций правых частей этих уравнений, неточность физических и математических моделей действующих сил. Способы устранения указанных недостатков и будут предметом обсуждения на страницах данной книги.

Методы численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений начали применяться в небесной механике достаточно давно. Первые численные методы были разработаны А.Клеро (1713–1765) для исследования движения кометы Галлея, а затем усовершенствованы Ж.Даламбером (1717–1783), Л.Эйлером (1707–1783), К.Гауссом (1777–1855) и Коуэллом (Субботин, 1937).

В течение длительного времени многошаговые методы Адамса–Коуэлла вместе с методом Рунге–Кутты четвертого порядка были основным аппаратом численного решения дифференциальных уравнений в небесной механике.

Бурное развитие электронно-вычислительной техники в последние двадцать лет стимулировало развитие многих разделов вычислительной математики и в том числе численных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

Создание Дж.Батчером (Butcher, 1963, 1964a) абстрактной алгебраической теории методов Рунге–Кутты позволило построить алгоритмы Рунге–Кутты высоких порядков вплоть до десятого (Butcher, 1964a,b; Fehlberg, 1969, 1972; Curtis, 1975; Hairer, 1978).

Д.К.Куликовым (1960) были построены многошаговые алгоритмы Коуэлла 8–10-го порядков; Ш.Когеном и Э.Хаббардом (Oesterwinter, Cohen, 1969) алгоритмы типа Адамса – Мультона – Коуэлла были развиты до 16-го порядка. А.К.Платонов, З.П.Власова и В.А.Степанянц (1976) предложили способ построения многошаговых алгоритмов типа Адамса – Мультона для таблиц с переменным шагом.

В.Ф.Мячин, О.А.Сизова (1970) и одновременно Р.Брукке (Broucke, 1971) разработали метод тейлоровских разложений для задач n тел. Появились алгоритмы рациональной экстраполяции (Gragg, 1965; Bulirsch, Stoer, 1966; Stoer, 1974), гибридные методы (Яров-Яровой, 1974; Everhart, 1974), использующие одновременно свойства алгоритмов двух типов, алгоритмы, учитывающие свойства движения (Таратынова, 1960; Graf, 1974; Штифель, Шейфеле, 1975; La Budde, Greenspan, 1976; Borderies, 1977).

Отличительной особенностью всех разработанных в последнее время методов является высокий порядок аппроксимирующей формулы, и это не случайно. Достижение высокой точности методом малого порядка теоретически возможно, но лишь при использовании малого шага интегрирования, что практически не всегда осуществимо. Кроме того, необходимость сделать большое количество малых шагов при ограниченной разрядной сетке ЭВМ приводит к накоплению значительной ошибки за счет округления. Эта ошибка будет тем больше, чем сложнее функция правой части дифференциального уравнения.

Повышение порядка аппроксимирующей формулы уменьшает так называемую локальную ошибку метода, т.е. ошибку, допускаемую на шаге интегрирования. А это, как правило, позволяет не только уменьшить глобальную (т.е. суммарную) ошибку, но и увеличить шаг интегрирования, что в свою очередь уменьшает ошибки округления и сокращает затраты машинного времени.

Интересно также, что повышение порядка метода во многих случаях приводит к улучшению свойств устойчивости этого метода. Так, например, для алгоритмов Рунге—Кутты область абсолютной устойчивости метода увеличивается с повышением его порядка (Ште́ттер, 1978). Принято считать, что область устойчивости многшаговых методов типа Адамса—Мультон—Коуэлла уменьшается с увеличением порядка метода. Однако сравнительно недавние исследования показали, что уменьшение области устойчивости справедливо только для методов 8—12 порядков, а далее с увеличением порядка область устойчивости расширяется.

Таким образом, повышение порядка аппроксимирующей формулы в современных численных методах направлено на улучшение основных свойств этих методов.

Вторым источником ошибок при численном прогнозировании является сама система дифференциальных уравнений движения небесных тел.

Дело в том, что функция правых частей уравнений движения небесных тел не является регулярной в окрестности соударений гравитирующих масс, а решения этих уравнений не обладают свойством устойчивости в смысле Ляпунова даже для задачи двух тел.

При численном решении задачи прогнозирования движения небесных тел эти недостатки уравнений движения усиливают недостатки численных методов, что приводит к потере точности интегрирования, к нерациональному дроблению шага. В последние десять лет появился целый ряд методов, которые позволяют полностью или частично устранить указанные недостатки уравнений движения небесных тел.

В настоящей книге мы не только излагаем численные методы высоких порядков и методы регуляризации и стабилизации уравнений движения небесных тел, но стремимся показать, что соединение этих методов открыв-

вайт большие возможности повышения точности и быстродействия алгоритмов численного прогнозирования движения небесных тел.

Важную роль в повышении точности прогнозирования играет совершенствование физических и математических моделей действующих сил. Это особенно существенно для задач динамики ИСЗ, где структура сил, как правило, весьма сложна.

Мы считаем, что наиболее удобными в задачах численного прогнозирования являются рекуррентные алгоритмы вычисления возмущений. Эти алгоритмы позволяют легко менять точность задания математических моделей действующих сил при усовершенствовании физических постоянных моделей. Поэтому там, где это возможно, мы даем в настоящей книге рекуррентные алгоритмы вычисления возмущений.

Основные положения книги иллюстрируются большим количеством примеров решения практических и модельных задач небесной механики.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ. ВОЗМУЩАЮЩИЕ ФАКТОРЫ

1.1. Дифференциальные уравнения движения. Задача n тел

Вывод дифференциальных уравнений движения небесных тел и подробное описание их свойств можно найти во многих отечественных и зарубежных изданиях по небесной механике и теоретической астрономии (Дубошин, 1963; Субботин, 1968; Аксенов, 1977; Штифель, Шейфеле, 1975). Мы остановимся здесь лишь на тех формах записи дифференциальных уравнений движения и возмущающих сил, которые используются при их решении численными методами.

Рассмотрим некоторую инерциальную систему координат и совокупность n материальных точек с массами m_i и векторами положения x_i . Классические уравнения движения i -й массы в выбранной системе координат имеют вид

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = - \frac{\partial U}{\partial x_i} + P_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1.1)$$

где x_i , P_i — трехмерные векторы. Действующие силы разделяются на силы, порожденные потенциалом U , и прочие силы P_i .

Система уравнений второго порядка может быть приведена к системе уравнений первого порядка простым преобразованием $\frac{dx_i}{dt} = z_i$ или путем перехода к канонической форме записи уравнений движения. Уравнения (1.1) в обобщенной канонической форме запишутся следующим образом:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} - X_i, \quad \frac{dp_i}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial x_i} + P_i. \quad (1.2)$$

Здесь x_i (x_{i1} , x_{i2} , x_{i3}), $i = 1, 2, \dots, n$, p_i (p_{i1} , p_{i2} , p_{i3}) — сопряженные переменные,

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (p_i p_i) + U(t, x_1, \dots, x_n) \quad (1.3)$$

гамильтониан системы, P_i , X_i — канонические силы. Силы X_i введены из соображений симметрии; в задачах небесной механики $X_i = 0$. Любая сила, выводимая из потенциала, может также рассматриваться как каноническая. Обобщенные канонические системы были впервые предложены Д.Брауэром (Брауэр, Клеменс, 1964) для описания движения спутника в сопротивляющейся среде.

Форма записи потенциала U определяется действующими силами и для различных задач небесной механики различна.

Наиболее простым случаем движения является задача двух тел. Пусть $n = 2$, положение массы m_0 в выбранной системе координат определено вектором $x_0 (x_{01}, x_{02}, x_{03})$, а положение массы m_1 — вектором $x_1 (x_{11}, x_{12}, x_{13})$. Потенциал, создаваемый массой m_0 и действующий на единицу массы m_1 , определится формулой

$$U = \frac{-k^2 m_0}{r}, \quad (1.4)$$

где

$$r = |x_1 - x_0| = \sqrt{(x_{11} - x_{01})^2 + (x_{12} - x_{02})^2 + (x_{13} - x_{03})^2} -$$

взаимное расстояние между точечными массами m_0 и m_1 , k — гауссова гравитационная постоянная.

Рассмотрим систему трех гравитирующих масс. Поместим массу m_0 в начало координат и рассмотрим движение материальной точки массы m под действием центрального притяжения и притяжения, обусловленного массой m_1 , находящейся на расстоянии ρ от притягивающего центра. Потенциал такой системы масс, действующий на единицу массы m , задается формулой

$$U = -\frac{k^2 (m_0 + m)}{r} - k^2 m_1 \left[\frac{1}{\Delta} - \frac{1}{\rho^3} (x, x_1) \right], \quad (1.5)$$

где x, x_1 — векторы точек m и m_1 , $|x| = r_1$, $|x_1| = \rho$, $|x - x_1| = \Delta$. Возмущающий потенциал, определяемый действием массы m_1 , есть

$$K = -k^2 m_1 \left[\frac{1}{\Delta} - \frac{1}{\rho^3} (x, x_1) \right].$$

Этой математической моделью движения обычно пользуются при исследовании орбит далеких спутников планет, когда достаточно ограничиться учетом возмущений от Солнца. Задача трех тел может быть использована также в качестве первого приближения при рассмотрении движения комет, малых планет и метеорных роев.

Компоненты вектора положения возмущающего тела в процессе численного интегрирования могут вычисляться с помощью предварительно полученных таблиц по аналитической теории, заложенной в программу вычисления правых частей уравнений движения, или путем совместного численного интегрирования уравнений движения возмущающего и возмущаемого тел. В последнем случае мы приходим к численному решению задачи многих тел.

В задаче о движении системы n тел под действием взаимного притяжения можно выделить два случая, каждый из которых представляет самостоятельный интерес.

Наличие преобладающей массы. Этот случай является характерным при рассмотрении движений в нашей Солнечной системе, где масса центрального тела более чем в 1000 раз превосходит массу других тел системы. Будем рассматривать движение материальной точки массы m под действием центрального притяжения и притяжения $n - 2$ материальных точек с массами m_i . В этом случае потенциал U системы, действующий на еди-

нису массы m , запишется в виде

$$U = -\frac{k^2(m_0 + m)}{r} - k^2 \sum_{i=1}^{n-2} m_i \left[\frac{1}{\Delta_i} - \frac{1}{\rho_i^3} (x, x_i) \right], \quad (1.6)$$

где $R = -k^2 \sum_{i=1}^{n-2} m_i \left[\frac{1}{\Delta} - \frac{1}{\rho^3} (x, x_i) \right]$ — возмущающая часть потенциала,

Δ_i — взаимное расстояние между точечными массами m и m_i , x_i — вектор положения точки m_i , $\rho_i = |x_i|$. Такая математическая модель охватывает движение больших планет под действием взаимных возмущений, движение внешних спутников планет под действием возмущений от Солнца и больших планет, а также под действием взаимных возмущений. Эта модель применима при рассмотрении движения малых планет и комет.

Отсутствие преобладающей массы. Такой случай движения встречается в задачах звездной динамики. Потенциал системы n точек с массами m_i и векторами x_i (x_{i1} , x_{i2} , x_{i3}) относительно некоторой инерциальной системы координат записывается в виде

$$U = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}}, \quad (1.7)$$

где Δ_{ij} — расстояние между i -й и j -й массами, штрих при знаке суммы означает, что суммирование выполняется для всех $j \neq i$.

Имея в виду численное интегрирование уравнений движения небесных тел, следует остановиться еще на одной форме записи этих уравнений, вытекающей из метода вариации произвольных постоянных. Как мы уже говорили, наиболее распространенной моделью движения тел Солнечной системы является возмущенная задача двух тел, причем возмущения малы по сравнению с центральным притяжением. Решение уравнений (1.1) в случае невозмущенного движения имеет вид (Дубошин, 1963)

$$\begin{aligned} x &= r\alpha, & \dot{x} &= \sqrt{\frac{\mu}{p}} [\alpha \sin u + \alpha' (1 + e \cos u)], \\ y &= r\beta, & \dot{y} &= \sqrt{\frac{\mu}{p}} [\beta \sin u + \beta' (1 + e \cos u)], \\ z &= r\gamma, & \dot{z} &= \sqrt{\frac{\mu}{p}} [\gamma \sin u + \gamma' (1 + e \cos u)], \end{aligned} \quad (1.8)$$

где

$$\begin{aligned} r &= \frac{p}{1 + e \cos u}, & \mu &= k^2 (m_0 + m), \\ \alpha &= \cos u \cos \Omega - \sin \Omega \sin u \cos i, & \beta &= \cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i, \\ \gamma &= \sin u \sin i, & \alpha' &= \frac{d\alpha}{du}, \quad \beta' = \frac{d\beta}{du}, \quad \gamma' = \frac{d\gamma}{du}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Величины

$$\Omega, i, \omega, p, e, \tau \quad - \quad (1.10)$$

традиционно используемые элементы кеплеровой орбиты: долгота восходящего узла, наклонение орбиты к основной координатной плоскости, угловое расстояние перигенцентра от узла, параметр орбиты, ее эксцентриситет и момент прохождения через перигенцентр. Аргумент широты определяется формулой

$$u = v + \omega,$$

истинная аномалия v связана с независимой переменной соотношением

$$t - \tau = \frac{p^{3/2}}{\sqrt{\mu}} \int_0^v \frac{d\varphi}{(1 + e \cos \varphi)^2}. \quad (1.11)$$

Элементы кеплеровой орбиты $\Omega, i, \omega, p, e, \tau$ являются в формулах (1.8) произвольными постоянными и полностью определены начальными условиями системы уравнений (1.1).

Применение к уравнениям возмущенного движения (1.1) метода вариации произвольных постоянных в предположении, что решение уравнений (1.1) сохраняет форму (1.8), но величины (1.10) являются функциями времени, позволяет получить уравнения движения в оскулирующих элементах:

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{r}{p} \sin u \cos e \sec i W, & \frac{di}{dt} &= \frac{r}{p} \cos u W, \\ \frac{d\omega}{dt} &= -\frac{\cos v}{e} S + \frac{\sin v}{e} \left(1 + \frac{r}{p}\right) T - \frac{r}{p} \sin u \operatorname{ctg} i W, \\ \frac{dp}{dt} &= 2rT, & \frac{de}{dt} &= \sin u S + \left[\cos u + (\cos v + e) \cdot \frac{r}{p}\right] T, \\ \frac{d\tau}{dt} &= \frac{p^{3/2}}{e\mu} \left[eN \sin v - \cos v S + \frac{p}{r} N \cdot T \right] \frac{r^2}{p^2}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Здесь S, T, W — компоненты возмущающего ускорения в орбитальной системе координат. Связь между S, T, W и возмущающими ускорениями системы (1.1)

$$Y_1 = \frac{\partial R}{\partial x_1} + P_1, \quad Y_2 = \frac{\partial R}{\partial x_2} + P_2, \quad Y_3 = \frac{\partial R}{\partial x_3} + P_3$$

задается формулами

$$\begin{pmatrix} S \\ T \\ W \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix}. \quad (1.13)$$

Величины $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ вычисляются по формулам (1.9), величины $\alpha'', \beta'', \gamma''$ — по следующим формулам:

$$\alpha'' = \sin \Omega \sin i, \quad \beta'' = -\cos \Omega \sin i, \quad \gamma'' = \cos i.$$

В уравнениях (1.12) величина N определяется формулой

$$N = -\frac{P^2}{r} \int_0^v \frac{\cos \varphi d\varphi}{(1 + e \cos \varphi)^3}, \quad (1.14)$$

а связь между истинной аномалией v и независимой переменной t осуществляется с помощью соотношения (1.11). Уравнения (1.12) носят название уравнений Ньютона. При численном решении задачи прогнозирования движения небесных тел эта форма записи уравнений оскулирующих элементов является более удобной, чем уравнения Лагранжа, в которых S, T, W заменены производными от возмущающей функции по элементам. Это связано с тем, что при численном интегрировании моделирование возмущающих ускорений осуществляется, как правило, в прямоугольных координатах. Связь между S, T, W и Y_1, Y_2, Y_3 задается в уравнениях Ньютона простым матричным соотношением (1.13), в уравнениях Лагранжа связь возмущающих ускорений Y_1, Y_2, Y_3 с производными от возмущающей функции по элементам оказывается существенно более сложной.

При численном решении уравнения движения в оскулирующих элементах обладают тем преимуществом, что невозмущенная часть этих уравнений интегрируется любым численным методом без методических ошибок. Если орбита исследуемого тела имеет малый эксцентриситет или малое наклонение, от системы элементов (1.10) можно перейти в (1.12) к системе элементов Лагранжа (см., например, Чеботарев, 1965).

В численном интегрировании используются также уравнения движения небесных тел, записанные в векторных элементах (Урмаев, 1981).

1.2. Возмущения от несферичности центрального тела

В задачах о движении искусственных спутников Земли и близких спутников планет основным возмущающим фактором является несферичность центрального тела. Потенциал в этом случае может быть представлен в виде ряда по сферическим функциям:

$$U = k^2 M_0 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{r_0^n}{r^{n+1}} (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin nm\lambda) P_{nm}(\sin \beta). \quad (1.15)$$

Здесь M_0 — масса центрального тела, r_0 — его средний экваториальный радиус, C_{nm}, S_{nm} — численные коэффициенты, характеризующие структуру гравитационного поля планеты, r, λ, β — сферические координаты спутника во вращающейся системе координат, жестко связанной с центральным телом. P_{nm} — присоединенные функции Лежандра. Мы рассмотрим здесь два алгоритма, предназначенных для вычисления возмущений от несферичности центрального тела. Эти алгоритмы представляются нам наиболее удобными с точки зрения численного интегрирования уравнений движения спутника планеты.

Запишем потенциал в виде

$$U = \text{Real} \sum r_0 (C_{nm} - i S_{nm}) V_{nm}, \quad (1.16)$$

где V_{nm} — шаровые функции, определяемые формулой

$$V_{nm} = \frac{P_{nm}(\sin \beta) \exp im\lambda}{r^{n+1}}. \quad (1.17)$$

Функции P_{nm} в выражениях (1.17) могут иметь нормирующий множитель.

Во всех последних определениях постоянных гравитационного поля Земли, начиная со Стандартной Земли III, этот множитель выбирается так, чтобы интеграл от сферической гармоники по сфере R_0 единичного радиуса был равен 4π :

$$\int_{R_0} [\bar{P}(z)]^2 \left[\frac{\sin}{\cos} \right]^2 m \lambda \cos \beta \, d\beta \, d\lambda = 4\pi, \quad z = \sin \beta.$$

Связь между нормированной функцией \bar{P}_{nm} и ненормированной P_{nm} определяется формулой

$$\bar{P}_{nm}(z) = [\epsilon_m (2n+1)(n-m)! / (n+m)!]^{1/2} P_{nm}(z),$$

$$\epsilon_m = \begin{cases} 1, & m = 0 \\ 2, & m \neq 0. \end{cases}$$

Форма записи выражений (1.16) сохранится, если ввести вместо C_{nm} и S_{nm} нормированные коэффициенты \bar{C}_{nm} , \bar{S}_{nm} , связанные с ненормированными соотношением

$$\bar{C}_{nm} - i\bar{S}_{nm} = \left[\frac{\epsilon_m (2n+1)(n-m)!}{(n+m)!} \right]^{1/2} (C_{nm} - iS_{nm}).$$

Вычисление шаровых функций V_{nm} и их производных по прямоугольным координатам может осуществляться с помощью рекуррентного алгоритма, предложенного Каннингемом (Cunningham, 1970). Для нормированных V_{nm} этот алгоритм записывается следующим образом.

Вычисление шаровых функций производится по формулам

$$\bar{V}_{nm} = \sqrt{\frac{\epsilon_m (2n+1)}{\epsilon_{m-1} 2m}} \frac{x_1 + ix_2}{r^2} \bar{V}_{n-1, m-1} \quad (n=m),$$

$$\bar{V}_{nm} = \sqrt{\frac{4n^2 - 1}{n^2 - m^2}} \frac{x_3}{r^2} \bar{V}_{n-1, m} - \sqrt{\frac{(2n+1)[(n-1)^2 - m^2]}{(2n-3)(n^2 - m^2)}} \frac{1}{r^2} \bar{V}_{n-2, m}.$$

$$r^2 = \sum_{i=1}^3 x_i^2, \quad V_{00} = \frac{1}{r}. \quad (1.18)$$

Для вычисления производных от шаровых функций по прямоугольным координатам служат формулы

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{V}_{nm}}{\partial x_1} = & - \sqrt{\frac{(2n+1)(n+m+2)(n+m+1)}{2n+3}} \frac{\bar{V}_{n+1, m+1}}{2} + \\ & + \sqrt{\frac{2(2n+1)(n-m+2)(n-m+1)}{\epsilon_{m-1}(2n+3)}} \frac{\bar{V}_{n+1, m-1}}{2} \quad (m > 0), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial V_{nm}}{\partial x_1} = - \sqrt{\frac{(2n+1)(n+2)(n+1)}{2(2n+3)}} \text{Real } \bar{V}_{n+1, 1} \quad (m = 0),$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{V}_{nm}}{\partial x_2} &= \sqrt{\frac{(2n+1)(n+m+2)(n+m+1)}{2n+3}} i \frac{\bar{V}_{n+1, m+1}}{2} + \\
&+ \sqrt{\frac{2(2n+1)(n-m+2)(n-m+1)}{\epsilon_{m-1}(2n+3)}} i \frac{\bar{V}_{n+1, m-1}}{2} \quad (m > 0), \\
\frac{\partial V_{nm}}{\partial x_2} &= -\sqrt{\frac{2(n+1)(n+2)(n+1)}{2(2n+3)}} \text{Imag } \bar{V}_{n+1, 1} \quad (m = 0), \\
\frac{\partial \bar{V}_{nm}}{\partial x_3} &= -\sqrt{\frac{(2n+1)(n+m+1)(n-m+1)}{2n+3}} V_{n+1, m} \quad (m \geq 0). \quad (1.19)
\end{aligned}$$

Формулы (1.14), (1.19) позволяют вычислять производные от геопотенциала U , входящие в уравнения движения ИСЗ, в системе координат, жестко связанной с центральным телом. При описании движения космических аппаратов в качестве такой системы координат используется гринвичская система, определенная следующим образом.

Начало координат расположено в центре масс Земли, ось x_3 направлена к среднему северному полюсу Земли 1900–1905 гг. Ось x_1 лежит в плоскости земного экватора и направлена в точку пересечения среднего гринвичского меридиана со средним экватором той же эпохи.

В численном интегрировании использование уравнений движения ИСЗ, записанных в гринвичской системе координат, неудобно, так как в уравнениях появляются быстроменяющиеся члены, обусловленные вращением системы координат.

В инерциальной системе координат $O\tilde{x}_1\tilde{x}_2\tilde{x}_3$ дифференциальные уравнения движения будут иметь вид

$$\frac{d^2 \tilde{x}}{dt^2} = Q \frac{\partial U}{\partial x} + P, \quad (1.20)$$

где матрица $Q = SPN\Pi$ представляет собой произведение матрицы прецессии (Π), матрицы нутации (N), матрицы (P), учитывающей движение мгновенного полюса, и матрицы поворота (S) вокруг направления на северный полюс на угол, численно равный истинному звездному времени в Гринвиче:

$$S = \tilde{S} + \Delta u.$$

Здесь \tilde{S} – среднее звездное время в Гринвиче, а Δu – нутация по прямому восхождению.

В динамических расчетах часто используется квазинерциальная система координат, предложенная Г. Вейсом (Урмаев, 1981).

В этой системе координат положение ИСЗ связывается с равноденствием эпохи $T_0 = 1950,0$ и мгновенным экватором эпохи наблюдения.

Матрица Q в этом случае имеет вид

$$Q = P \begin{pmatrix} \cos S^* & \sin S^* & 0 \\ -\sin S^* & \cos S^* & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где S^* — модифицированное звездное время, которое получается, если исключить прецессию и нутацию по прямому восхождению за интервал времени $T - 1950,0$ из истинного звездного времени S .

В модельных расчетах, а также в задачах краткосрочного прогнозирования матрица P , как правило, опускается.

Легко показать, что в этом случае алгоритм вычисления $\frac{\partial V_{nm}}{\partial x_i}$ можно представить непосредственно в квазиинерциальных координатах. Преобразование алгоритма сведется к подстановке в соотношения (1.18), (1.19) координат, полученных в квазиинерциальной системе отсчета, и перевычислению коэффициентов в разложении геопотенциала по формуле

$$(\tilde{C}_{nm} - i\tilde{S}_{nm}) = (\cos S - i\sin S)(C_{nm} - iS_{nm}). \quad (1.21)$$

При численном решении задачи изложенный способ учета возмущений от несферичности центрального тела является весьма удобным, поскольку позволяет с помощью однотипного алгоритма учитывать влияние всех членов геопотенциала на движение спутника.

Другой способ вычисления возмущений от несферичности центрального тела основан на представлении потенциала U системой точечных масс:

$$U = U_0 + \sum U_n. \quad (1.22)$$

Здесь U_0 — потенциал задачи двух неподвижных центров. Для симметричной задачи двух центров U_0 определяется формулой (Аксенов, 1977)

$$U_0 = \frac{k^2 M_0}{2} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right), \quad (1.23)$$

где

$$r_1 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - ic)^2}$$

$$r_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + (x_3 + ic)^2}$$

c — вещественная постоянная. Величина U_n представляет собой потенциал точечной массы m_n ,

$$U_n = \frac{k^2 m_n}{\Delta_n}, \quad (1.24)$$

где

$$\Delta_n = \sqrt{(x_1 - x_{1n})^2 + (x_2 - x_{2n})^2 + (x_3 - x_{3n})^2}$$

— расстояние до точечной массы, x_{1n}, x_{2n}, x_{3n} — координаты точечной массы.

Системы точечных масс могут быть введены разными способами, однако определение величин m_n и их координат производится, как правило, в соответствии с каким-либо стандартным представлением потенциала планеты в виде разложения по сферическим функциям.

Вычисление входящих в уравнения движения производных от функции U_n по координатам x_1, x_2, x_3 не представляет труда.

Такой способ учета возмущений от несферичности центрального тела позволяет существенно сократить время вычисления правых частей уравнений движения, что при численном интегрировании очень важно.

1.3. Возмущения, связанные с движением экваториальной плоскости центрального тела

При разработке алгоритмов высокоточного прогнозирования движения ИСЗ возникает необходимость учета возмущений, обусловленных всей совокупностью сложных движений экваториальной плоскости Земли. Разработан целый ряд алгоритмов (James, 1969; Levie, 1971; Kozai, Kinoshita, 1973), позволяющих тем или иным способом вводить эти возмущения в дифференциальные уравнения движения ИСЗ.

Мы рассмотрим здесь алгоритм, предложенный Н.А. Шарковским (1984). Достоинство этого алгоритма состоит в том, что он дает возможность вводить в уравнения движения ИСЗ возмущения, связанные с движением экваториальной плоскости Земли, в рамках алгоритма Каннингема.

Обратимся вновь к уравнениям (1.20). Матрица Q , осуществляющая преобразование мгновенной системы координат Ox_1, x_2, x_3 , в инерциальную $O\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3$ зависит от трех углов Эйлера α, β, γ и представляет собой произведение трех матриц:

$$Q = Q_3(\alpha) Q_2(\beta) Q_1(\gamma)$$

или

$$Q = Q_3(\alpha') Q_1(\beta') Q_2(\gamma'),$$

где

$$\alpha' = \alpha + \frac{\pi}{2}, \quad \beta' = \beta, \quad \gamma' = \gamma - \frac{\pi}{2}.$$

При этом матрицы $Q(\psi)$

$$Q_1(\psi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & -\sin \psi \\ 0 & \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix},$$

$$Q_2(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & 0 & \sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \psi & 0 & \cos \psi \end{pmatrix},$$

$$Q_3(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

описывают правые вращения вокруг положительных направлений координатных осей x_1, x_2, x_3 соответственно.

Обобщая формулу (1.21), можно поставить задачу отыскания такого преобразования коэффициентов $\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm}$, чтобы форма вычисления шаровых функций \bar{V}_{nm} и их производных от $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3$ сохранилась в инерциальной системе координат.

Как показал Н.А. Шарковский (1984), этого можно достичь, если записать преобразованные коэффициенты в виде

$$\begin{aligned}\tilde{C}_{nm} = & \sum_{l=0}^n N_{ml} \{ P_{ml}^n [\bar{C}_{nl} \cos(m\gamma + l\alpha) + \bar{S}_{nl} \sin(m\gamma + l\alpha) + \\ & + (-1)^l P_{m,-l}^n [\bar{C}_{nl} \cos(m\gamma - l\alpha) - \bar{S}_{nl} \sin(m\gamma - l\alpha)] \}, \\ \tilde{S}_{nm} = & \sum_{l=0}^n N_{ml} \{ P_{ml}^n [\bar{S}_{nl} \cos(m\gamma + l\alpha) + \bar{C}_{nl} \sin(m\gamma + l\alpha) + \\ & + (-1)^l P_{m,-l}^n [\bar{S}_{nl} \cos(m\gamma + l\alpha) + \bar{C}_{nl} \sin(m\gamma + l\alpha)] \},\end{aligned}\quad (1.25)$$

где $N_{00} = \frac{1}{2}$, $N_{0l} = N_{m0} = \frac{\sqrt{2^l}}{2}$, $N_{ml} = 1$ при $l, m > 0$, $P_{ml}^n(\beta)$ — обобщенные сферические функции вида

$$\begin{aligned}P_{ml}^n(\beta) = & \sum_k \frac{(-1)^k \sqrt{(n+m)! (n-m)! (n+l)! (n-l)!}}{(n-m-k)! (n+l-k)! (k-l+m)! k!} \left(\cos \frac{\beta}{2} \right)^{2n-m+l-2k} \times \\ & \times \left(\sin \frac{\beta}{2} \right)^{m-l+2k}\end{aligned}\quad (1.26)$$

Для вычисления функций P_{ml}^n используется рекуррентный алгоритм

$$P_{nn}^n = \cos^2 \frac{\beta}{2} P_{n-1, n-1}^n, \quad P_{00}^0 = 1,$$

$$P_{n, -n}^n = \sin^2 \frac{\beta}{2} P_{n-1, -(n-1)}^n,$$

$$P_{nl}^n = -\sqrt{\frac{2n(2n-1)}{(n^2-l^2)}} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2} P_{n-1, l}^{n-1}, \quad |l| \leq n-1$$

$$\begin{aligned}P_{m-1, l}^n = & \sqrt{\frac{(n-l)(n+l-1)}{(m+n)(n-m-1)}} \cos^2 \frac{\beta}{2} P_{m, l+1}^n + \\ & + \frac{n \sin \beta}{\sqrt{(n+m)(n-m+1)}} P_{ml}^n - \sqrt{\frac{(n+l)(n-l+1)}{(n+m)(n-m-1)}} \sin^2 \frac{\beta}{2} P_{m, l-1}^n,\end{aligned}$$

$$m \leq n, \quad -m-1 \leq l \leq m-1,$$

$$P_{lm}^n = (-1)^{m-l} P_{ml}^n, \quad P_{-m, -l}^n = P_{ml}^n. \quad (1.27)$$

Таким образом, с новыми коэффициентами \tilde{C}_{nm} , \tilde{S}_{nm} все возмущения в (1.20), обусловленные влиянием геопотенциала, будут вычисляться в инерциальной системе координат с помощью алгоритма Каннингема.

1.4. Возмущения от приливных деформаций центрального тела

Заметный вклад в возмущения искусственных спутников Земли вносит влияние приливных деформаций, возникающих в теле планеты под действием притяжения внешнего тела.

В результате притяжения внешнего тела на каждый элемент массы Земли действует сила, потенциал которой на поверхности Земли определяется формулой

$$\hat{R} = f \frac{m'}{r'} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{r_0}{r'} \right)^n P_n(\cos \psi), \quad (1.28)$$

где m' и r' — масса и геоцентрический радиус-вектор внешнего тела, r_0 — средний радиус Земли, ψ — угол между направлением на внешнее тело и на рассматриваемый элемент массы Земли. Эта сила вызывает приливную деформацию в теле Земли, в результате чего притяжение Земли изменяется и возникают дополнительные силы, характеризующиеся потенциалом \tilde{R} . На поверхности Земли этот потенциал представляется формулой

$$\tilde{R} = \frac{f m'}{r'} \sum_{n=2}^{\infty} k_n \left(\frac{r_0}{r'} \right)^n P_n(\cos \psi), \quad (1.29)$$

где k_n — постоянные, называемые числами Лява и характеризующие упругие свойства Земли. Во внешнем пространстве \tilde{R} определяется формулой

$$\tilde{R} = \frac{f m'}{r'} \sum_{n=2}^{\infty} k_n \left(\frac{r_0}{r'} \right)^n \left(\frac{r_0}{r} \right)^{n+1} P_n(\cos \psi), \quad (1.30)$$

где r — радиус-вектор внешней точки.

Поскольку Земля не является идеально упругим телом, приливной горб будет иметь некоторое запаздывание на угол τ от направления на возмущающее тело, причем $\cos \psi$ может быть выражен через угол τ и сферические координаты спутника (α, δ) и возмущающего тела (α', δ') следующим образом:

$$\cos \psi = \sin \delta \sin \delta' + \cos \delta \cos \delta' \cos(\alpha' + \tau - \alpha). \quad (1.31)$$

Воспользуемся далее известной теоремой сложения полиномов Лежандра, пронормируем полученные соотношения и, разделяя члены, относящиеся к сферическим координатам спутника и возмущающего тела, введем шаровые функции

$$\overline{V}_{nm} = \frac{\overline{P}_{nm}(\sin \delta) \exp i m \alpha}{r^{n+1}}, \quad (1.32)$$

$$\overline{V}'_{nm} = \frac{\overline{P}_{nm}(\sin \delta') \exp(-i m \alpha)}{(r')^{n+1}}$$

и перепишем разложение (1.30) в виде (Шарковский, 1983)

$$\tilde{R} = \text{Real} \left[\sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{k_n r_0^{2n+1} e^{-im\tau}}{2n+1} \bar{V}_{nm} \cdot \bar{V}'_{nm} \right]. \quad (1.33)$$

Здесь \bar{P}_{nm} — нормированные присоединенные функции Лежандра. Шаровые функции \bar{V}_{nm} , \bar{V}'_{nm} и их производные по прямоугольным координатам могут вычисляться с помощью рекуррентного алгоритма Каннингема, изложенного в параграфе 1.2.

Таким образом, все возмущения в движении спутника, обусловленные гравитационным притяжением Земли, могут быть вычислены по однопериодному алгоритму.

1.5. Возмущения от светового давления

Перейдем к рассмотрению негравитационных возмущений, действующих на небесные тела. Одним из таких возмущений является световое давление.

Различной полноты описания возмущений от светового давления в движении ИСЗ можно найти в монографиях П.Е. Эльясберга (1965), Е.П. Аксенова (1977), в "Справочном руководстве по небесной механике и астродинамике" под редакцией Г.Н. Дубошина (1976), в работах С. Ферраз-Мелло (Ferraz-Mello, 1963, 1964), С. Уайятта (Wyatt, 1963), Р. Бейкера (Baker, 1966), П. Лала, Л. Сехнала (Lala, Sehnal, 1969), С.Н. Вашковьяк (1974), Л. Сехнала (1974), Э. Прайора (1975) и других. Все эти работы посвящены аналитическим и полуаналитическим способам учета возмущений от светового давления.

Основываясь на эти работы, мы дадим здесь алгоритм вычисления возмущений от давления прямой и отраженной солнечной радиации, предназначенный для численного интегрирования уравнений движения ИСЗ. Будем предполагать, что мощность потока солнечной радиации постоянна, сила светового давления всегда направлена по линии Земля — Солнце, орбита Земли круговая, спутник имеет сферическую форму. При этих предположениях сила прямого светового давления Солнца на спутник может быть задана формулой

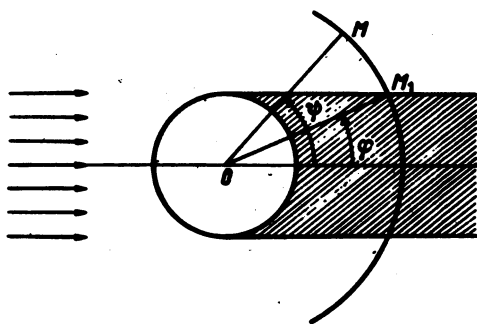
$$P = kqs' \left(\frac{a_s}{\Delta_s} \right)^2 \frac{x_s - x}{\Delta_s}, \quad (1.34)$$

где x — геоцентрический вектор положения спутника, x_s — геоцентрический вектор положения Солнца, Δ_s — взаимное расстояние между спутником и Солнцем, $g = 4,65 \cdot 10^5 \text{ дин/см}^2$ — солнечная постоянная, s' — площадь эффективного поперечного сечения спутника, a_s — большая полуось орбиты Земли, k — параметр, характеризующий отражательные свойства поверхности спутника,

$$k = \begin{cases} 1, & \text{если отражение зеркальное,} \\ 1,44, & \text{если отражение диффузное.} \end{cases}$$

Наибольшую трудность при вычислении возмущений, вызванных световым

Рис. 1. Геометрическая картина тени.



давлением, представляет учет эффекта вхождения спутника в тень Земли. С. Ферраз-Мелло (Ferraz-Mello, 1963, 1964) предложил устранить эту трудность введением в возмущающее ускорение так называемой функции тени. Она равна единице, если спутник освещен Солнцем, и нулю — в противном случае.

Обозначим через ψ угол между осью цилиндра тени и вектором положения спутника M , (рис. 1). На промежутке $[0, \pi]$

$$-1 \leq \cos \psi \leq 1.$$

Введем в рассмотрение угол φ ,

$$\varphi = \arcsin \frac{r_0}{r},$$

где r_0 — экваториальный радиус Земли, $r = |x|$. Разобьем промежутки $[0, \pi]$ на два — $[0, \pi]$ и $[\varphi, \pi]$ — и запишем функцию тени δ в виде

$$\delta = \begin{cases} 0, & -\varphi < \psi \leq \varphi, \\ 1, & -\pi < \psi < \varphi, \varphi < \psi < \pi. \end{cases} \quad (1.35)$$

Сила прямого светового давления с учетом тени переписывается следующим образом:

$$P = kgs' \left(\frac{a_{\odot}}{\Delta_{\odot}} \right) \frac{x_{\odot} - x}{\Delta_{\odot}} \delta. \quad (1.36)$$

Аналитически условие вхождения в тень можно определить группой соотношений

$$\cos^2 \psi > 1 - \frac{r_0^2}{r^2}, \quad \cos \psi > 0,$$

причем

$$\cos \psi = - \frac{(x \cdot x_{\odot})}{r \cdot r_{\odot}}, \quad r_{\odot} = |x_{\odot}|. \quad (1.37)$$

Сила, создаваемая радиацией, отраженной от Земли, может быть представлена в форме

$$P' = gs' \left(\frac{a_{\oplus}}{\Delta_{\oplus}} \right) \left(\frac{r_0}{r} \right) [k' \cos^2 \varphi + k'' \delta \sin(\beta - \psi)] \frac{x}{r}; \quad (1.38)$$

здесь через β обозначено такое значение угла ψ , при котором диффузное

отражение практически перестает оказывать влияние на спутник, k' — коэффициент инфракрасного отражения от Земли, k'' — коэффициент радиального диффузного отражения. Значения коэффициентов k' и k'' изменяются в пределах

$$0,2 \leq k' \leq 0,3, \quad 0,37 \leq k'' \leq 0,57.$$

Функция δ определена соотношением

$$\delta = \begin{cases} 1, & \cos \psi \geq \cos \beta, \\ 0, & \cos \psi < \cos \beta. \end{cases} \quad (1.39)$$

Р. Бэйкер (Baker, 1966) предлагает брать угол β равным 100° , Э. Прайор (1975) дает значение равное 90° . В.А. Ащеулов (1980) рекомендует в задачах численного прогнозирования брать завышенное значение угла β , с тем чтобы сгладить скачкообразное изменение функции $P + P'$ при пересечении спутником границы тени. Более подробно вопросы применения изложенного алгоритма в задачах численного прогнозирования движения ИСЗ мы рассмотрим в последней главе настоящей монографии.

1.6. Возмущения от сопротивления атмосферы

На искусственные спутники Земли, движущиеся в диапазоне высот 150–1500 км, заметное влияние оказывает сопротивление атмосферы.

Сила сопротивления воздуха действующая на поступательное движение спутника, направлена противоположно скорости объекта относительно воздуха, а ее абсолютная величина определена формулой

$$P = \frac{1}{2} A C_D \rho v_{\text{отн}}^2, \quad (1.40)$$

где A — площадь миделева сечения спутника, C_D — безразмерный коэффициент аэродинамичности сопротивления воздуха, ρ — плотность воздуха, $v_{\text{отн}}$ — скорость спутника относительно атмосферы.

Наибольшую сложность при определении возмущений от сопротивления атмосферы составляет вычисление плотности атмосферы ρ .

Величина плотности атмосферы является функцией относительной молекулярной массы воздуха M и его абсолютной кинетической температуры T (Эльясберг, 1965):

$$\rho(h) = \rho_1 \frac{MT}{M_1 T_1} \exp\left(-\int_{h_1}^h \frac{gM}{R_0 T} dh\right), \quad (1.41)$$

где h — высота над поверхностью Земли, ρ_1, M_1, T_1 — значения соответствующих величин на высоте $h = h_1$.

Изменение величин M и T с высотой зависит от целого ряда геофизических факторов и, прежде всего, от активности Солнца. Именно поэтому в изменении параметров атмосферы наблюдается периодичность, связанная с обращением Земли вокруг своей оси и вокруг Солнца, с обращением Солнца вокруг своей оси, с изменением солнечной активности в течение одиннадцатилетнего цикла и т.п. (Эльясберг, 1965; Аксенов, 1977).

Модели атмосферы, учитывающие зависимость ее параметров не только от высоты, но и от перечисленных выше факторов, принято называть динамическими. Поскольку построение этих моделей процесс трудоемкий, на практике вместо динамической пользуются статической моделью атмосферы, которая дает плотность как функцию высоты и не учитывает зависимость плотности от времени. Большое распространение в практике имеют также локальные модели атмосферы, пригодные лишь для заданного диапазона высот и в течение определенного интервала времени. Простейшим примером локальной модели может служить так называемая изотермическая модель

$$\rho = \rho_1 \exp\left(-\frac{h - h_1}{H}\right), \quad (1.42)$$

полученная из (1.41) в предположении, что величины M и T постоянны. Здесь

$$H = \frac{R_0 T}{qM} \quad (1.43)$$

есть высота однородной атмосферы, или шкала высот, являющаяся в свою очередь функцией высоты h , R_0 — универсальная газовая постоянная, g — ускорение силы тяжести. В (1.43) величина g считается постоянной.

В последнее десятилетие разработан целый ряд моделей атмосферы. Наиболее полными из них являются "Модель верхней атмосферы для баллистических расчетов" ГОСТ 22721-77, изданная Государственным комитетом стандартов Совета Министров СССР в 1978 г., модифицированная модель Яккиа — Робертса (Jacchia, 1977), представляющая собой дальнейшее развитие моделей Яккиа, вошедших в COSPAR International Reference Atmosphere (CIRA 1972), и модель Барлье (Barlier et al. 1978). Можно также отметить модели Хариса — Прейстера (Dowd, Tapley, 1979), принятые в Центре космических полетов НАСА (NASA Goddard Space Flight Center).

Все указанные модели можно назвать квазидинамическими, поскольку вместе с изменением атмосферной плотности с высотой они учитывают основные вариации этой плотности во времени.

Перечисленные модели учитывают суточные вариации плотности, вариации, связанные с одиннадцатилетним и двадцатисемидневным циклами солнечной активности, полугодовые вариации и вариации, обусловленные геомагнитной активностью. Модели Яккиа — Робертса и Барлье учитывают также сезонно-высотные вариации концентрации гелия в атмосфере, однако, как отмечает сам автор, модель Барлье дает несколько заниженное по сравнению с измеренным значение амплитуды зимних колебаний концентрации гелия. Достаточно тщательное сравнение нескольких моделей атмосферы: модели ГОСТ 22721-77, модифицированной и немодифицированной моделей Яккиа — Робертса, модифицированной модели Хариса — Прейстера было выполнено Д.Л. Даудом и Б.Д. Тепли (Dowd, Tapley 1979). Наиболее интересные результаты и выводы, полученные этими авторами, мы приводим ниже. В таблице 1 помещены результаты, которые дают представление об эффективности сравниваемых моделей в процессе вычисления возмущений от сопротивления атмосферы.

Т а б л и ц а 1

Время центрального процессора, необходимое для вычисления
возмущающего ускорения

Модель	Время, с	Модель	Время, с
Яккиа – Робертса	20,34	Модифицир. Хариса –	
Модифицир. Яккиа –		Прейстера	7,67
Робертса	15,97	Модель ГОСТ 22721-77	5,58

Самой быстрой с точки зрения использования ЭВМ является советская модель. Однако, как отмечают Д.Л. Дауд и Б.Д. Тепли, использование этой модели ограничено областью высот от 140 до 500 км и изменением индекса солнечной активности в пределах от 65 до $165 \cdot 10^{22}$ Вт/(м² · Гц). Кроме того, при некоторых условиях модель может давать отрицательные значения плотности атмосферы.

В модифицированной модели Хариса – Прейстера скорость вычисления достигается путем многих упрощений, что снижает достоинства модели. Наиболее полной моделью является в настоящее время модель Яккиа, предназначенная для вычисления атмосферной плотности в широком диапазоне высот от 90 до 2500 км. Модифицированная модель на 20% быстрее в вычислительном отношении, чем немодифицированная. Максимальное расхождение значений плотности, полученное по двум моделям, не превосходит 0,08%.

Поскольку предметом настоящей книги являются численные алгоритмы небесной механики, следует отметить, что построение и реализация таких алгоритмов не налагает на модель атмосферы каких-либо ограничений. С численными методами в зависимости от условий задачи могут использоваться модели всех упомянутых выше типов: динамические, статические, локальные. Более того, применение в практике прогнозирования движения ИСЗ существующих достаточно полных моделей атмосферы возможно пока только в сочетании с численными методами, вследствие сложной структуры этих моделей.

Г Л А В А 2

ОСОБЕННОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ И СПОСОБЫ ИХ УСТРАНЕНИЯ

2.1. Особенности дифференциальных уравнений

Приведенные в предыдущем разделе типичные для задач небесной механики формы представления потенциала U говорят о том, что классические уравнения движения небесных тел имеют особенности в окрестности соударений гравитирующих масс. В практических задачах небесной механики прямые соударения тел, как правило, не рассматриваются. Од-

нако в рамках этих задач наличие особенностей в уравнениях движения оказывает заметное влияние на процесс их численного решения.

Наиболее характерной математической моделью движения тел Солнечной системы является возмущенная задача двух тел. Уравнения этой задачи, записанные в системе координат, связанной с центральным телом, сингулярны в начале координат и при тесных сближениях с возмущающими телами. Для орбит, имеющих большие эксцентриситеты, когда скорость изменения центрального радиуса растет при приближении к перигею и убывает при удалении от него, наличие особенности в начале координат приводит к неравномерному изменению функций правых частей уравнений движения. При численном решении задачи такая неравномерность требует постоянного изменения шага интегрирования. Все это снижает точность численного интегрирования и приводит к непроизводительным затратам машинного времени.

В случае тесных сближений с возмущающими телами также появляется неравномерность в изменении функции правых частей уравнений движения, приводящая к потере точности интегрирования. Наиболее сложный случай представляет собой движение долгопериодических комет и особых малых планет. Эти тела движутся по высокоэксцентрическим орбитам и имеют тесные сближения с большими планетами.

Процедуру, позволяющую устранить особенности дифференциальных уравнений движения, следуя Т. Леви-Чивита (Levi-Civita, 1920), называют регуляризацией.

Второй особенностью, существенно снижающей точность численного решения уравнений движения небесных тел, является неустойчивость их решений в смысле Ляпунова. Преобразование этих уравнений, в результате которого их решения становятся устойчивыми в смысле Ляпунова, следуя Дж. Баумгарту и Е. Штифелю (Baumgart, Stiefel, 1974), будем называть стабилизацией.

Впервые преобразование, осуществляющее регуляризацию уравнений движения и их решений при двойных соударениях и одновременно стабилизирующее невозмущенную часть решений, было введено Т. Леви-Чивита (Levi-Civita, 1904) для случая плоского движения. К. Сундманом (Sundman, 1913) была рассмотрена проблема регуляризации двойных соударений в задаче трех тел. В частности, было введено регуляризующее преобразование независимой переменной $dt = rds$, которое нашло применение во многих методах регуляризации двойных соударений, предложенных после К. Сундмана.

В настоящей главе мы сосредоточим свое внимание на тех алгоритмах, которые вместе с регуляризацией уравнений движения осуществляют стабилизацию невозмущенной части их решений.

2.2. Метод стабилизирующего множителя

Остановимся прежде всего на основных принципах стабилизации, сформулированных Дж. Баумгартом (Baumgart, 1976).

1. В кеплеровом движении период обращения T , а следовательно, и частота $\omega = \frac{2\pi}{T}$ зависят от начальных условий. Стабилизация должна состо-

ять в такой модификации дифференциальных уравнений движения, при которой период T и, соответственно, частота ω останутся независимыми от начальных условий.

2. Указанное преобразование уравнений может быть получено введением в них элемента p_0 , который представляет собой полную отрицательную энергию системы. Элемент p_0 является константой в невозмущенном движении или в случае консервативных возмущений. В неконсервативном случае система дифференциальных уравнений дополняется еще одним дифференциальным уравнением для этого элемента.

3. В результате преобразований строгая ляпуновская устойчивость может быть достигнута в случае чисто эллиптического кеплерова движения. Поскольку в задачах небесной механики возмущения, как правило, малы, можно считать, что остающаяся после преобразования уравнений неустойчивость имеет порядок малого возмущающего параметра ϵ .

Известно, что частоты любого многомерного гармонического осциллятора являются константами и, следовательно, не зависят от начальных условий. Таким образом, для того чтобы получить стабилизированные уравнения движения небесных тел, достаточно преобразовать гамильтониан H этих уравнений к гамильтониану гармонического осциллятора H^* .

Рассмотрим способ нахождения гамильтониана H^* с помощью преобразования к переменным действие—угол (α_k, β_k) . Связь проблемы устойчивости с преобразованием к переменным действие—угол была найдена Н. Сигристом (Sigrist, 1974). Для того чтобы не загромождать формулы лишними индексами, опустим в уравнениях (1.2) индекс, связанный с номером рассматриваемого тела, и перепишем эти уравнения в виде

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} + P_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.1)$$

где $x = \{x_1, x_2, x_3\}$ есть вектор положения точки с массой m в системе координат, связанной с массой m_0 . Каноническое преобразование к переменным действия α_k и угловым переменным β_k

$$x_i = x_i(\alpha_k, \beta_k), \quad p_i = p_i(\alpha_k, \beta_k), \quad i = 1, 2, 3$$

обладает следующими свойствами: функции x_i являются 2π -периодическими относительно β_k , преобразованный гамильтониан зависит только от переменных действия, $H = H(\alpha_k)$ и соответствующие уравнения движения имеют вид

$$\frac{d\alpha_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \beta_k} = 0, \quad \frac{d\beta_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \alpha_k} = \omega_k(\alpha_r), \quad (2.2)$$

где $\omega = \{\omega_k(\alpha_r)\}$ — вектор частот системы.

В случае невозмущенного кеплерова движения гамильтониан зависит только от одной переменной действия, которую будем называть α , $H = H(\alpha)$, и, следовательно

$$\omega = \frac{\partial H}{\partial \alpha}, \quad \omega = \omega(\alpha) = \omega[\alpha(H)] = \omega(H).$$

Связь между частотой ω и энергией H в невозмущенном эллиптическом движении определяется третьим законом Кеплера:

$$\omega(p_0) = \frac{2(p_0)^{3/2}}{k^2(m_0+m)}, \quad \omega(H) = \frac{(-2H)^{3/2}}{k^2(m_0+m)}.$$

Для невозмущенного случая запишем гамильтониан H^* в виде

$$H^* = - \frac{1}{\frac{df(p_0)}{dp_0}} f(-H). \quad (2.3)$$

Функцию f определим позже. Система уравнений движения, определенная гамильтонианом H^* , примет вид

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= \frac{\partial H^*}{\partial p_i} = \lambda \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = - \frac{\partial H^*}{\partial x_i} = - \lambda \frac{\partial H}{\partial x_i}, \\ \lambda &= \frac{\frac{df(-H)}{dH}}{\frac{df(p_0)}{dp_0}}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

В точном аналитическом решении множитель λ равен единице, следовательно, система уравнений (2.4) эквивалентна относительно точного аналитического решения начальным уравнениям движения (2.1) с гамильтонианом $H(x_i, p_i)$. Однако свойства устойчивости систем (2.1) и (2.4) могут быть различны благодаря специальному выбору функции f и в процессе машинного решения системы могут давать совершенно разное накопление ошибки интегрирования.

Выберем функцию f таким образом, чтобы гамильтониан H^* был гамильтонианом гармонического осциллятора, а частота ω была величиной постоянной. Это предполагает, что H^* должен быть линейной функцией переменной действия α :

$$H^* = \Omega \alpha, \quad (2.5)$$

где

$$\Omega = \frac{1}{\frac{df(p_0)}{dp_0}} = \omega(p_0) = \frac{2(p_0)^{3/2}}{k^2(m_0+m)}.$$

Тогда

$$\frac{df(p_0)}{dp_0} = -k^2(m_0+m)(2p_0)^{-3/2}. \quad (2.6)$$

Стабилизированный гамильтониан будет иметь вид

$$H^* = \frac{2(p_0)^{3/2}}{\sqrt{-H}} \quad (2.7)$$

и стабилизированные уравнения движения перепишутся в форме

$$\frac{dx_l}{dt} = \lambda \frac{\partial H}{\partial p_l} = \lambda p_l, \quad \frac{dp_l}{dt} = -\lambda \frac{\partial H}{\partial x_l} = -\lambda \frac{k^2 (m_0 + m)}{r^3} x_l, \\ \lambda = \left(\frac{p_0}{H} \right)^{3/2}. \quad (2.8)$$

Для возмущенного кеплерова движения с консервативным потенциалом $\epsilon R(x_1, x_2, x_3)$, где ϵ — малый параметр, авторы метода предлагают использовать стабилизированный гамильтониан H^* в той же форме (2.7), считая, что полная энергия системы p_0 включает потенциальную энергию ϵR . Стабилизированные уравнения сохраняются с той лишь разницей, что

$$\frac{\partial H}{\partial x_l} = -\frac{k^2 (m_0 + m)}{r^3} x_l - \epsilon \frac{\partial R}{\partial x_l}. \quad (2.9)$$

В случае неконсервативных возмущений, определенных каноническими силами $\epsilon P(x, p, t)$, используется стабилизирующий множитель λ в той же форме, что и в предыдущих случаях. Величина H определяется формулами

$$H = H_0 + \epsilon R, \quad H_0 = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^3 p_l^2 - \frac{k^2 (m_0 + m)}{r}. \quad (2.10)$$

Величина p_0 уже не является более постоянной, а определяется дифференциальным уравнением

$$\frac{dp_0}{dt} = \epsilon \sum_{l=1}^3 p_l \frac{\partial H}{\partial p_l}. \quad (2.11)$$

Стабилизированные уравнения движения имеют вид

$$\frac{dx_l}{dt} = \lambda \frac{\partial H}{\partial p_l}, \quad \frac{dp_l}{dt} = -\lambda \frac{\partial H}{\partial x_l} + \epsilon P_l, \\ \lambda = \left(\frac{p_0}{-H} \right)^{3/2}, \quad \frac{dp_0}{dt} = -\epsilon \sum P_l \frac{\partial H}{\partial p_l}. \quad (2.12)$$

При интегрировании орбит с большими эксцентриситетами и в случае тесных сближений с третьим телом вместо независимой переменной t может быть использована переменная s , связанная с t соотношением

$$dt = \mu(x, t) ds. \quad (2.13)$$

Функцию $\mu(x, t)$ принято называть масштабирующим множителем, соотношение (2.13) — временным преобразованием, а независимую переменную s — фиктивным временем.

Специальным подбором масштабирующего множителя можно добиться так называемой аналитической смены шага интегрирования, когда шаг, оставаясь переменным по t , будет постоянным по s . Масштабирующие

множители могут быть самыми разнообразными функциями x и t (Baumgart, Stiefel, 1974 а) в зависимости от состава возмущающих факторов и типа орбит. Наиболее часто применяется на практике масштабирующий множитель

$$\mu(x, t) = cr^n. \quad (2.14)$$

Перейдем в уравнениях (2.12) к новой независимой переменной s , определяемой соотношением

$$\frac{dt}{ds} = \tilde{\mu}(x_l, p_l, t, p_0) > 0. \quad (2.15)$$

Система уравнений (2.8) после введения новой независимой переменной примет вид

$$\begin{aligned} \frac{dx_l}{ds} &= \tilde{\mu} \lambda \frac{\partial H}{\partial p_l}, \quad \frac{dp_l}{ds} = -\tilde{\mu} \lambda \frac{\partial H}{\partial x_l}, \\ \frac{dt}{ds} &= \tilde{\mu}, \quad \lambda = \left(\frac{p_0}{H} \right)^{3/2} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Удобно выбрать $\tilde{\mu} = \mu \frac{1}{\lambda}$, где $\mu = cr^n$. Тогда система уравнений (2.16) переписывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{dx_l}{ds} &= \mu \frac{\partial H}{\partial p_l}, \quad \frac{dp_l}{ds} = -\mu \frac{\partial H}{\partial x_l}, \\ \frac{dt}{ds} &= \frac{1}{\lambda} \mu, \quad \frac{1}{\lambda} = \left(\frac{-H}{p_0} \right)^{3/2}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

В случае возмущенного движения вместо системы уравнений (2.12) будем иметь систему

$$\begin{aligned} \frac{dx_l}{ds} &= \frac{\partial H}{\partial p_l} \mu, \quad \frac{dp_l}{ds} = \left\{ -\frac{\partial H}{\partial x_l} + \epsilon P_l \right\} \mu, \\ \frac{dp_0}{ds} &= -\left\{ \frac{\partial H}{\partial t} + \epsilon \sum p_l \frac{\partial H}{\partial p_l} \right\} \mu, \quad \frac{dt}{ds} = \left(\frac{-H}{p_0} \right)^{3/2} \mu. \end{aligned} \quad (2.18)$$

2.3. Преобразование Кустаанхеймо—Штифеля

Преобразование Кустаанхеймо—Штифеля (Штифель, Шейфеле, 1975) вместе с временным преобразованием $dt = rds$ устраняет одновременно две особенности дифференциальных уравнений движения небесных тел: сингулярность уравнений в начале координат и неустойчивость их решений в смысле Ляпунова, осуществляя, таким образом, и регуляризацию, и стабилизацию уравнений.

Преобразование координат, представляющее отображение физического пространства в четырехмерное параметрическое, осуществляется с по-

мощью KS -матрицы $L(u)$:

$$L(u) = \begin{pmatrix} u_1 & -u_2 & -u_3 & u_4 \\ u_2 & u_1 & -u_4 & -u_3 \\ u_3 & u_4 & u_1 & u_2 \\ u_4 & -u_3 & u_2 & -u_1 \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

Запишем связь между старыми и новыми переменными в виде

$$x_0 = u_0 = t, \quad p_0 = w_0,$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \Lambda(u) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2|u|^2} \Lambda(u) \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix}, \quad (2.20)$$

$$|u|^2 = \sum_{i=1}^4 u_i^2, \quad |w|^2 = \sum_{i=1}^4 w_i^2.$$

Матрица $\Lambda(u)$ получается отбрасыванием последней строки матрицы $L(u)$.

В новых переменных исходная система уравнений (2.1) переходит в систему

$$\frac{du_k}{ds} = \frac{\partial H}{\partial w_k}, \quad \frac{dw_k}{ds} = -\frac{\partial H}{\partial u_k} + w_k, \quad (2.21)$$

$$k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Гамильтониан системы преобразуется к виду

$$H = \frac{1}{8} |w|^2 + w_0 |u|^2 R(u_0) - k^2 m_0. \quad (2.22)$$

Канонические силы W_i новой системы определяются соотношениями

$$W_0 = rP_0 = -r \sum_{i=1}^3 p_i P_i, \quad \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ W_4 \end{pmatrix} = 2r \Lambda^T(u) \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix}. \quad (2.23)$$

При $k=0$ первое уравнение в (2.21) представляет собой преобразование времени, второе уравнение $\frac{dw_0}{ds} = -\frac{\partial H}{\partial u_0} = -|u|^2 \frac{\partial R}{\partial u_0}$ является законом изменения энергии. Первая группа канонических уравнений

$$\frac{du_k}{ds} = \frac{\partial H}{\partial w_k} = \frac{1}{4} w_k$$

при $k = 1, 2, 3, 4$ показывает, что четыре переменных w_k отличаются от параметрических скоростей u'_k на постоянный множитель $\frac{1}{4}$. Вводя дополни-

тельное преобразование $\bar{u}_k = u_k$, $\bar{w}_k = \frac{1}{4} w_k$, получим

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{u}_k}{ds} &= \frac{\partial H}{\partial \bar{w}_k} = \bar{w}_k, & \frac{d\bar{w}_k}{ds} &= -\frac{h}{2} \bar{u}_k - \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial u_k} (\bar{u}^2 R) + \frac{\bar{u}^2}{2} L^T P, \\ \frac{dh}{ds} &= -|\bar{u}|^2 \frac{\partial R}{\partial t} - 2(\bar{u}' L^T P), & \frac{dt}{ds} &= |\bar{u}|^2. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Уравнения (2.24) полностью свободны от особенностей в начале координат и могут быть использованы при соответствующем выборе системы координат как при интегрировании сильно вытянутых орбит, так и при исследовании сближений с третьим телом. При $R=0$ уравнения (2.24) представляют собой уравнения гармонического осциллятора и их решение обладает свойством устойчивости в смысле Ляпунова. Следует заметить, что уравнения движения небесных тел могут быть приведены к виду возмущенного гармонического осциллятора и иным способом. В качестве примера можно указать уравнения Шперлинга—Бодэ (Silver, 1975) (см. раздел 2.7).

Перечисленные свойства новой системы уравнений (2.21) оказываются исключительно полезными при численном решении этих уравнений, поскольку скорость изменения функции правых частей уравнений движения становится постоянной во все время движения, если возмущения малы, а решения уравнений нечувствительны к малым ошибкам, вносимым на каждом шаге интегрирования аппроксимирующими формулами. Для параметрических переменных u_k, w_k справедливо так называемое билинейное соотношение

$$u_4 w_1 - u_3 w_2 + u_2 w_3 - u_1 w_4 = 0, \quad (2.25)$$

являющееся первым интегралом системы уравнений (2.24). Это соотношение может быть использовано в процессе численного интегрирования для контроля точности полученных результатов.

2.4. Регулярные оскулирующие элементы

Скорость изменения функций правых частей уравнений движения (2.21) можно понизить, если записать эту систему уравнений в регулярных оскулирующих элементах (Штифель, Шейфеле, 1975). Введем прежде всего понятие временного элемента. Решение уравнения (2.24) при $R=0$ имеет вид

$$u = \alpha \cos \omega s + \beta \sin \omega s, \quad \omega = \sqrt{\frac{h}{2}}, \quad (2.26)$$

где α и β — постоянные векторы.

Записывая расстояние r в виде

$$r = |u|^2 = c_1 + c_2 \cos 2\omega s + c_3 \sin 2\omega s,$$

где

$$c_1 = \frac{|\alpha|^2 + |\beta|^2}{2}, \quad c_2 = \frac{|\alpha|^2 - |\beta|^2}{2}, \quad c_3 = (\alpha, \beta),$$

и подставляя это выражение в уравнение временного преобразования, получим

$$t = \int r ds = (c_0 + c_1 s) + \frac{c_2}{2\omega} \sin 2\omega s - \frac{c_3}{2\omega} \cos 2\omega s,$$

c_0 — постоянная интегрирования.

Член

$$\tau_0 = c_0 + c_1 s$$

носит название временного элемента.

Учитывая, что r' имеет вид

$$r' = 2(uu') = -2\omega c_2 \sin 2\omega s + 2\omega c_3 \cos 2\omega s,$$

можно выразить временной элемент через параметрические координаты:

$$\tau = t + \frac{1}{h} (uu'). \quad (2.27)$$

Распространяя, далее, это определение временного элемента на возмущенное эллиптическое движение, можно вывести дифференциальное уравнение, описывающее изменение τ под действием возмущающих сил:

$$\tau' = \frac{1}{2h} (k^2 m_0 - 2rR) - \frac{r}{4h} \left(u \frac{\partial R}{\partial u} - 2L^{TP} \right) - \frac{h'}{h^2} (uu'). \quad (2.28)$$

После интегрирования (2.28) физическое время t вычисляется из соотношения

$$t = \tau - \frac{1}{h} (uu'). \quad (2.29)$$

Далее, следуя Е. Штифелю и Г. Шейфеле, введем понятие обобщенной эксцентрической аномалии. Эксцентрическая аномалия невозмущенного эллиптического движения определяется соотношением $E = 2\omega s$; где $\omega = \sqrt{\frac{h}{2}}$ — частота системы. Отсюда следует, что $E' = 2\omega$.

Последнее соотношение можно использовать для введения новой независимой переменной E в возмущенном движении. Эту переменную будем называть обобщенной эксцентрической аномалией. Используя уравнение временного элемента и вводя новую независимую переменную E , перепишем уравнения (2.24) в виде

$$\begin{aligned} \frac{du_k}{dE} &= w_k, \quad \frac{dw_k}{dE} + \frac{1}{4} u = -\frac{1}{4\omega^2} \left[\frac{R}{2} u + \frac{r}{4} \left(\frac{\partial R}{\partial u} - 2L^{TP} \right) \right] - \frac{1}{\omega} \frac{d\omega}{dE} \frac{du}{dE}, \\ \frac{d\tau}{dE} &= \frac{1}{8\omega^3} (k^2 m_0 - 2rR) - \frac{r}{16\omega^3} \left(u \frac{\partial R}{\partial u} - 2L^{TP} \right) - \frac{2}{\omega^2} \frac{d\omega}{dE} \left(u \cdot \frac{du}{dE} \right), \\ \frac{d\omega}{dE} &= -\frac{r}{\omega^2} \frac{\partial R}{\partial t} - \frac{1}{2\omega} \left(\frac{du}{dE} L^{TP} \right). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Применим к уравнениям (2.30) метод вариации произвольных постоянных, считая, что решение этих уравнений имеет вид

$$u = \alpha(t) \cos \frac{E}{2} + \beta(t) \sin \frac{E}{2},$$

где четырехмерные векторы α и β являются функциями обобщенной эксцентрической аномалии.

Уравнения в элементах будут иметь вид

$$\frac{d\omega}{dE} = -\frac{r}{8\omega^2} \frac{\partial R}{\partial t} - \frac{2}{\omega} \left(\frac{du}{dE}, L^T P \right),$$

$$\begin{aligned} \frac{d\tau}{dE} = & \frac{1}{8\omega^3} (k^2 m_0 - 2rR) - \frac{r}{16\omega^3} \left(u \frac{\partial R}{\partial u} - 2L^T P \right) - \\ & - \frac{2}{\omega^2} \frac{d\omega}{dE} \left(u, \frac{du}{dE} \right), \end{aligned}$$

$$\frac{d\alpha}{dE} = \left\{ \frac{1}{2\omega^2} \left[\frac{R}{2} u + \frac{r}{4} \left(\frac{\partial R}{\partial u} - 2L^T P \right) \right] + \frac{2}{\omega} \frac{d\omega}{dE} \frac{du}{dE} \right\} \sin \frac{E}{2},$$

$$\frac{d\beta}{dE} = - \left\{ \frac{1}{2\omega^2} \left[\frac{R}{2} u + \frac{r}{4} \left(\frac{\partial R}{\partial u} - 2L^T P \right) \right] + \frac{2}{\omega} \frac{d\omega}{dE} \frac{du}{dE} \right\} \cos \frac{E}{2}.$$

Система уравнений (2.31) обладает всеми преимуществами системы (2.24), и, кроме того, любой численный метод при отсутствии возмущений интегрирует систему (2.31) без методических ошибок. В зависимости от степени n преобразования $dt = cr^n ds$ в качестве независимой переменной могут использоваться различные угловые элементы. П. Насоци (Nacozy, 1981) рассмотрел временные преобразования с $n = 1, 2, 3/2$ и получил уравнения временного элемента, использующие в качестве независимых переменных соответственно эксцентрическую, истинную и промежуточную аномалии (Nacozy, 1977).

2.5. Двойное KS-преобразование

В тех случаях, когда уравнения движения содержат одновременно особенности, обусловленные большими эксцентриситетами и тесными сближениями с возмущающими телами, могут быть использованы более общие регуляризирующие алгоритмы, полученные С. Арсетом и К. Заре (Aarseth, Zare, 1974; Zare, 1974) и Д. Хегги (Heggie, 1974).

Как уже отмечалось ранее, такая совокупность особенностей встречается в уравнениях движения долгопериодических комет и особых малых планет. Движение этих малых тел Солнечной системы в окрестности соударений с большими телами с высокой степенью точности может аппроксимироваться возмущенной ограниченной задачей трех тел. Для этой задачи алгоритмы Арсета, Заре и Хегги совпадают.

Представим гамильтониан H в (1.2) в виде

$$H = \frac{1}{2} (p_1 p) - \frac{k^2 m_0}{|x - x_0|} - \frac{k^2 m_1}{|x - x_1|} + R. \quad (2.32)$$

Здесь x, x_0, x_1 — векторы положения тела бесконечно малой массы и тел с массами m_0 и m_1 относительно некоторой инерциальной системы координат. Следуя С. Арсету, К. Заре и Д. Хегги определим преобразование

$$\tilde{x}_i = x - x_i, \quad i = 0, 1, \quad |\tilde{x}_0| = r, \quad |\tilde{x}_1| = \Delta. \quad (2.33)$$

Связь между величинами p и \tilde{p} определяется формулой

$$p = \tilde{p}_0 + \tilde{p}_1, \quad (2.34)$$

и новый гамильтониан системы имеет вид

$$H = \frac{1}{2} (\tilde{p}_0^2 + \tilde{p}_1^2) + \tilde{p}_2 \tilde{p}_1^T - \frac{k^2 m_0}{r} - \frac{k^2 m_1}{\Delta} - \dot{x}_0^T p_0 - \dot{x}_1^T p_1 + R. \quad (2.35)$$

В результате такого преобразования движение тела бесконечно малой массы будет представлено в виде суммы двух движений относительно тел m_0 и m_1 , а размерность системы увеличится вдвое.

Применяя теперь к каждой паре координат и импульсов $(\tilde{x}_0, \tilde{p}_0), (\tilde{x}_1, \tilde{p}_1)$ преобразование Кустанхеймо—Штифеля и переходя к новой независимой переменной с помощью преобразования

$$dt = r \Delta ds, \quad (2.36)$$

получим систему уравнений

$$\frac{du_{ik}}{d\tau} = \frac{\partial \Gamma}{\partial w_{ik}}, \quad \frac{dw_{ik}}{d\tau} = - \frac{\partial \Gamma}{\partial u_{ik}}, \quad (2.37)$$

$$i = 0, 1, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4$$

с гамильтонианом

$$\begin{aligned} \Gamma = & w_0 r \Delta + \frac{1}{8} (\Delta w_0^2 + r w_1^2) + \frac{1}{16} w_0^T \Lambda_0 \Lambda_1 w_1 - \\ & - k^2 m_0 \Delta - k^2 m_1 r - \frac{1}{4} \frac{\dot{x}^{*T}}{(m_0 + m_1)} (m_0 r \Delta \Lambda_0^T w_i - \\ & - m_1 \Delta \Lambda_1^T w_1) + \Delta r R. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Здесь $x^* = x_1 - x_0$ — вектор положения тела m_1 относительно m_0 , $u_{00} = u_{10} = u_0$, $w_{00} = w_{10} = w_0$. Уравнения для u_0 и w_0 определяют временное преобразование (2.36) и закон изменения энергии системы. Порядок системы уравнений (2.37) равен восемнадцати. Приведенные в этом раз-

деле временные преобразования не исчерпывают всего многообразия видов временных преобразований (Baumgart, Stiefel, 1974 b), которые могут использоваться в задачах небесной механики. При применении численных методов решения уравнений движения небесных тел целесообразность введения того или иного преобразования следует связывать не только с действующими силами, но и с устойчивостью используемого численного метода (Velez, 1974).

2.6. Метод Накози

Идея использования интегралов движения для повышения точности численного интегрирования уравнений движения впервые была высказана Р. Накози (Nacozy, 1971). Им был предложен метод, в котором первые интегралы движения используются для исправления координат и компонент скорости на каждом шаге интегрирования.

В задачах с неконсервативным потенциалом интеграла энергии не существует, так как гамильтониан системы зависит от времени явно. Однако, как мы покажем ниже, методика Накози может быть обобщена и на этот случай (Bond, 1978; Бордовицына, Сухоплюева, 1980).

Рассмотрим вместо (2.1) расширенную каноническую систему уравнений, в которой время принимается за четвертую координату x_0 движущегося тела, а в качестве сопряженной с ней переменной вводится полная энергия системы $p_0 = -H(t)$,

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} + P_i, \quad i=0, 1, 2, 3. \quad (2.39)$$

Здесь

$$H_h = H(x_0, x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3) + p_0,$$

$$p_0 = -\sum \frac{\partial H}{\partial p_i} P_i. \quad (2.40)$$

Гамильтониан H_h является первым интегралом системы, так как для любого момента времени t

$$H_h(t) = 0. \quad (2.41)$$

Возмущения от неконсервативной части потенциала включим в канонические силы. Уравнение полной энергии в (2.39) запишется следующим образом:

$$\frac{dp_0}{dt} = -\sum \frac{\partial H}{\partial p_i} P_i. \quad (2.42)$$

Гамильтониан H включает теперь лишь консервативную часть возмущающего потенциала, т.е.

$$H = H(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3), \quad (2.43)$$

а следовательно,

$$H_h = H(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3) + p_0.$$

В результате потери точности при интегрировании уравнений (2.39) $H_h(t)$ будет отличаться от нуля:

$$H_h(t) = \epsilon. \quad (2.44)$$

Это соотношение можно рассматривать как нелинейное уравнение относительно некоторых малых поправок к координатам и скоростям за счет величины отклонения гамильтониана H_h от нуля. Из условия минимума суммы квадратов этих малых поправок к координатам и скоростям могут быть найдены следующие формулы для их вычисления:

$$\Delta x_i = \frac{-\epsilon \frac{\partial H}{\partial x_i}}{\sum_{i=1}^3 \left[\left(-\frac{\partial H_h}{\partial x_i} + P_i \right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \right)^2 \right]},$$

$$\Delta p_i = \frac{-\epsilon \frac{\partial H}{\partial p_i}}{\sum_{i=1}^3 \left[\left(-\frac{\partial H_h}{\partial x_i} + P_i \right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \right)^2 \right]}. \quad (2.45)$$

Полученные таким образом в процессе интегрирования поправки удерживают решение системы на некоторой интегральной поверхности $H_h(t) = 0$ в расширенном фазовом пространстве.

2.7. Другие методы регуляризации и стабилизации уравнений движения

Можно указать еще несколько методов регуляризации и стабилизации уравнений возмущенной задачи двух тел. Например, метод, основанный на введении в уравнения движения интеграла энергии и интегралов Лапласа (Яров-Яровой, 1967; Burdet, 1968, Silver, 1975).

Уравнения возмущенного кеплерова движения в прямоугольной системе координат, связанной с центральным телом, имеют вид

$$\ddot{x} + \frac{k^2 x}{r^3} = X, \quad (2.46)$$

где $x = \{x_i\}$ ($i = 1, 2, 3$) – вектор положения движущегося тела, $k^2 = k^2 (m_0 + m)$, $r = |x|$, $X = \frac{\partial R}{\partial x}$ – возмущающая сила.

Для невозмущенного движения справедливы интеграл энергии

$$\omega^2 = \frac{2k^2}{r} - v^2, \quad (2.47)$$

где $\omega = \sqrt{\frac{h}{2}}$, и интеграл Лапласа

$$A = X \left(\frac{k^2}{r} - \omega^2 \right) - r \dot{x}. \quad (2.48)$$

В возмущенном движении величины ω^2 и A определяются уравнениями

$$\frac{d\omega^2}{dt} = -2X\dot{x}, \quad \frac{dA}{dt} = 2xX\dot{x} - \dot{x}Xx - r\dot{r}X. \quad (2.49)$$

Вводя временное преобразование, заданное уравнением

$$\frac{dt}{dS} = \frac{r}{\omega} \quad (2.50)$$

и используя величины ω и A , определенные соотношениями (2.49), можно получить новую систему уравнений:

$$x'' + x + \frac{A}{\omega^2} = \frac{1}{\omega^2} (rX + Xxx'), \quad r'' + r - \frac{k^2}{\omega} = \frac{1}{\omega^2} (rPx + r'P \cdot x'),$$

$$\omega' = -\frac{1}{\omega} X \cdot x', \quad A' = 2xXx' - x'Xx - rr'X, \quad (2.51)$$

которая регулярна в окрестности соударений с центральным телом. Решение системы уравнений (2.51) при отсутствии возмущений обладает свойством устойчивости в смысле Ляпунова.

Способ регуляризации попарных соударений в задаче n тел, основанный на введении дополнительных зависимых переменных, можно найти у Г.Н. Дубошина (1964) и В.Ф. Мячина (1974, 1975) (см. гл. 4).

Следует отметить также метод так называемой неконсервативной стабилизации, предложенный Дж. Баумгартом (Baumgart, 1976).

ГЛАВА 3

УРАВНЕНИЯ В ВАРИАЦИЯХ

3.1. Уравнения в вариациях прямоугольных координат

При построении теорий движения небесных тел решаются, как правило, две задачи. Первая состоит в интегрировании уравнений движения небесных тел при заданных начальных условиях и сравнении вычисленных положений с наблюдениями, вторая — в определении поправок к начальным параметрам на основе отклонений вычисленных положений от наблюдаемых.

Большинство применяемых на практике методов решения второй задачи требует знания частных производных от прямоугольных координат по исправляемым параметрам. Наиболее простым способом получения таких производных является использование формул невозмущенного движения. Однако в случае больших возмущений точность производных, определенных по формулам невозмущенного движения, оказывается очень низкой и это существенно влияет (Черницов, 1975) на сходимости процесса определения поправок к начальным параметрам движения и на точность самих поправок. Поэтому в практических задачах очень часто возникает необходимость вычислять частные производные от прямоугольных координат по начальным параметрам с учетом всех или основных возмущений. При по-

строении численных теорий движения небесных тел наиболее удобным методом определения производных от прямоугольных координат по начальным параметрам является совместное численное интегрирование уравнений движения и уравнений в вариациях.

Обозначим через $q_{0l} = \{x_{0l}, p_{0l}\}$, $l = 1, 2, \dots, 6$ совокупность начальных параметров уравнений движения

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}. \quad (3.1)$$

Проварьируем уравнения движения по параметрам q_{0l} . Поскольку нас интересует только изохронная вариация, мы можем воспользоваться перестановочным соотношением

$$\delta \left(\frac{d}{dt} x \right) = \frac{d}{dt} (\delta x), \quad (3.2)$$

и записать

$$\frac{d}{dt} (\delta x_i) = \delta \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{d}{dt} (\delta p_i) = -\delta \frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad (3.3)$$

или

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\sum_{l=1}^6 \frac{\partial x_i}{\partial q_{0l}} \delta q_{0l} \right) &= \sum_{l=1}^6 \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_{0l}} \delta q_{0l}, \\ \frac{d}{dt} \left(\sum_{l=1}^6 \frac{\partial p_i}{\partial q_{0l}} \delta q_{0l} \right) &= - \sum_{l=1}^6 \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial q_{0l}}. \end{aligned} \quad (3.3')$$

Разрешая соотношения (3.3') относительно величин $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_{0l}} \right)$ и $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial p_i}{\partial q_{0l}} \right)$, получим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_{0l}} \right) &= \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_{0l}}, & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial p_i}{\partial q_{0l}} \right) &= -\frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial q_{0l}}, \\ l &= 1, 2, \dots, 6 \end{aligned} \quad (3.4)$$

для определения производных от прямоугольных координат по начальным параметрам. Порядок системы равен 36.

Запишем начальные условия системы (3.4). Для простоты обозначим через $q_h = \{x_i, p_i\}$ совокупность обобщенных координат и импульсов системы. Тогда будем иметь

$$\left(\frac{\partial q_h}{\partial q_{0l}} \right)_{t=t_0} = \begin{cases} 0, & h \neq l \\ 1, & h = l \end{cases}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial H}{\partial q_{0l}} \right)_{t=t_0} = \begin{cases} 0, & h \neq l \\ 1, & h = l, \end{cases} \quad (3.5)$$

$h = 1, 2, \dots, 6$.

Очевидно, что система уравнений (3.4) содержит все те же особенности,

что и исходные уравнения движения. Для задачи n тел в системе координат, связанной с центральным телом, функции правых частей уравнений (3.4) определяются формулами

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_{0l}} &= \frac{\partial p_i}{\partial q_{0l}}, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial q_{0l}} = \sum_{m=1}^3 \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial q_{0l}}, \\ \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_m} &= k^2 \frac{M}{r} \left[3 \frac{x_i x_m}{r^2} - \epsilon_{im} \right] + \\ &+ \sum_{j=1}^{n-2} \frac{m_j}{\Delta_j^3} \left[3 \frac{(x_{ij} - x_i)(x_{ij} - x_m)}{\Delta_j^2} - \epsilon_{im} \right], \quad \epsilon_{im} = \begin{cases} 0, & i \neq m \\ 1, & i = m \end{cases} \end{aligned} \quad (3.6)$$

В спутниковых задачах величины $\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_{0l}}$, $\frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial q_{0l}}$ могут вычисляться с помощью алгоритма Каннингема (Cunningham, 1970), аналогичного изложенному в гл. 1. Соотношения (3.6) содержат расстояния r и Δ в пятой степени, поэтому при одних и тех же изменениях величин r и Δ скорость изменения функций правых частей для уравнений в вариациях будет существенно больше, чем для уравнений движения. При совместном численном решении уравнений движения и уравнений в вариациях шаг интегрирования будет определяться изменением правых частей уравнений в вариациях, что практически очень неудобно.

3.2. Уравнения в вариациях параметрических переменных

Системы уравнений в вариациях, не содержащие особенностей, могут быть получены на основании регуляризованных систем уравнений движения небесных тел.

Так, например, система уравнений (2.21), регулярная в начале координат, даст следующую систему уравнений в вариациях:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial u_k}{\partial q_{0l}} \right) &= \frac{\partial^2 H}{\partial w_k \partial q_{0l}}, \quad k = 1, 2, \dots, 4, \\ \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial w_k}{\partial q_{0l}} \right) &= \frac{\partial^2 H}{\partial u_k \partial q_{0l}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, 4, \quad l = 1, 2, \dots, 6. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Порядок системы равен 54.

Функции правых частей уравнений (3.7)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 H}{\partial w_k \partial q_{0l}} &= \frac{1}{4} \frac{\partial w_k}{\partial q_{0l}}, \\ \frac{\partial^2 H}{\partial u_k \partial q_{0l}} &= 2h_k \frac{\partial u_k}{\partial q_{0l}} + \frac{\partial}{\partial q_{0l}} \left(u^2 \frac{\partial R}{\partial u} \right) \frac{\partial u_k}{\partial q_{0l}} \end{aligned}$$

не содержат особенностей в начале координат. Полученную в результате

интегрирования системы (3.7) совокупность производных $\left\{ \frac{\partial u_k}{\partial q_{0l}} \right\}$ необходимо преобразовать в совокупность производных $\frac{\partial x_i}{\partial q_{0l}}$. Это можно сделать с помощью следующего матричного соотношения:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial q_{01}} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial q_{06}} & \frac{\partial x_2}{\partial q_{01}} & \dots & \frac{\partial x_2}{\partial q_{06}} & \frac{\partial x_3}{\partial q_{01}} & \dots & \frac{\partial x_3}{\partial q_{06}} \end{pmatrix} =$$

$$= 2(u_1 u_2 u_3 u_4) \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ -A_2 & A_1 & A_4 \\ -A_3 & -A_4 & A_1 \\ A_4 & -A_3 & A_2 \end{pmatrix}.$$

Каждый элемент матрицы

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ -A_2 & A_1 & A_4 \\ -A_3 & -A_4 & A_1 \\ A_4 & -A_3 & A_2 \end{pmatrix}$$

представляет собой вектор-строку, составленную из производных:

$$A_i = \left(\frac{\partial u_i}{\partial q_{01}} \dots \frac{\partial u_i}{\partial q_{06}} \right).$$

Таким образом, вместе с регуляризированной системой дифференциальных уравнений может интегрироваться регуляризированная система уравнений в вариациях.

ГЛАВА 4

МЕТОД ТЕЙЛОРОВСКИХ РАЗЛОЖЕНИЙ

4.1. Вводные замечания

Задача о движении небесных тел является задачей Коши

$$y' = f(t, y), \quad t \in [t_0, T], \quad y(t_0) = y_0, \quad (4.1)$$

где $y = \{y_1(t), y_2(t), \dots, y_s(t)\}$, а y_0 задано, и для ее решения могут быть применены любые численные методы, разработанные для решения задачи Коши.

Основное требование к (3.1) состоит в том, что функция $f(t, y)$ должна удовлетворять условию Липшица

$$\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq L \|y_1 - y_2\| \quad (4.2)$$

для всех $t \in [t_0, T]$ и для всех s компонент векторов y_1 и y_2 . В этом слу-

чае можно доказать единственность решения задачи (4.1), если оно существует.

Все рассматриваемые в последующих главах численные методы построены для так называемой корректно поставленной задачи Коши, когда условие (4.2) выполняется. Среди этих методов есть традиционно используемые в задачах небесной механики методы, такие как метод Рунге—Кутты четвертого порядка, методы типа Адамса и т.п. Однако основное внимание в дальнейшем будет уделено новым численным алгоритмам высоких порядков, применение которых в задачах небесной механики открывает большие возможности в повышении точности и скорости прогнозирования движения небесных тел.

Наиболее простым способом построения решения системы уравнений (4.1) в точке t_{n+1} , если оно известно в точке t_n , является способ, основанный на разложении решения в ряд Тейлора

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + h \Delta(t_n, y_n, h), \quad (4.3)$$

где

$$\Delta(t, y, h) = y'(t) + \frac{h}{2!} y''(t) + \frac{h^2}{3!} y'''(t) + \dots$$

Решение предполагается дифференцируемым необходимое число раз.

Если теперь ограничить ряд p членами и заменить $y(t_n)$ приближенным значением y_n , получим следующую приближенную формулу для определения y_{n+1} :

$$y_{n+1} \approx y_n + h \varphi(t_n, y_n, h), \quad (4.4)$$

где

$$\varphi(t, y, h) = f(t, y) + \frac{h}{2} f'(t, y) + \dots + \frac{h^{p+1}}{p!} f^{p+1}(t, y).$$

Для $p = 1$, например, имеем хорошо известную формулу метода Эйлера

$$y_{n+1} = y_n + hf(t, y_n).$$

Формулы типа (4.4) не требуют дополнительного вычисления начальных условий, позволяют легко менять шаг интегрирования и порядок аппроксимирующей формулы. Практическое применение такого типа формул тем не менее ограничено задачами, для которых легко вычисляются производные высших порядков f^p . В небесной механике такой задачей является, прежде всего, задача n тел.

Для этой задачи К. Стеффенсен (Steffensen, 1957) получил рекуррентные соотношения, позволяющие последовательно вычислять производные любого порядка от функции $f(t, y)$.

Метод тейлоровских разложений для задачи n тел получил развитие в работах В.Ф. Мячина, О.А. Сизовой (1970), В.Ф. Мячина (1974, 1975) и О.А. Сизовой (1976) и Р. Брукке (Broucke, 1971).

Группой авторов (Barton, Willers, Zahar, 1971) предложен способ построения тейлоровских разложений, основанный на аппроксимации производных от функции $f(t, y)$ рациональными функциями.

В настоящей главе мы рассмотрим метод тейлоровских разложений для задачи n тел и два способа построения регуляризованных тейлоровских разложений, а также способ построения тейлоровских разложений, использующий рациональную аппроксимацию производных. В последнем разделе данной главы мы остановимся кратко на возможности использования тейлоровских разложений в спутниковых задачах.

4.2. Метод рядов Тейлора—Стеффенсена для планетной задачи

Рассмотрим движение системы n материальных точек с массами m_i ($i = 0, 1, \dots, n-1$) под действием сил ньютоновского притяжения.

Пусть x_{i1}, x_{i2}, x_{i3} — координаты точечной массы m_i в неподвижной системе координат, связанной с точечной массой m_0 . Дифференциальные уравнения движения i -й массы имеют вид

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = -k^2(m_0 + m_i) \frac{x_i}{r_{0i}^3} + k^2 m_j \left(\frac{x_j - x_i}{r_{ij}^3} - \frac{x_j}{r_{0j}^3} \right), \quad (4.5)$$

где $x_i = \{x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}\}$ — трехмерный вектор положения i -й массы. Здесь k^2 — гравитационная постоянная, r_{ij} — расстояние между i -й и j -й точками. Наличие отрицательных степеней r_{ij} в правой части (4.5) осложняет получение рекуррентных соотношений для вычисления коэффициентов тейлоровских разложений.

Для преодоления такого рода трудностей К. Стеффенсен (Steffensen, 1957) предложил методику введения вспомогательных функций. Положим

$$\Delta_{ij} = r_{ij}^2 = (x_{j1} - x_{i1})^2 + (x_{j2} - x_{i2})^2 + (x_{j3} - x_{i3})^2, \quad \sigma_{ij} = r_{ij}.$$

Функции Δ_{ij} и σ_{ij} связаны между собой очевидным соотношением

$$\Delta_{ij}^3 \sigma_{ij}^2 = 1.$$

Введение функций Δ_{ij}, σ_{ij} позволяет заменить систему уравнений (4.5) эквивалентной ей системой

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = k^2 \left\{ -(m_0 + m_i) x_i \sigma_{0i} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-1} m_j [(x_j - x_i) \sigma_{ij} - x_j \sigma_{0j}] \right\},$$

$$3\sigma_{ij} \dot{\Delta}_{ij} + 2\Delta_{ij} \dot{\sigma}_{ij} = 0, \quad \Delta_{ij} = r_{ij}^2,$$

не содержащей отрицательных степеней r_{ij} .

Разложение в ряд Тейлора искомых функций $x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}, \Delta_{ij}, \sigma_{ij}$ на k -м шаге интегрирования удобно представить в виде

$$x_{i,k+1,0} = \sum_{l=0}^{\infty} x_{i,k,l}, \quad \Delta_{ij,k+1,0} = \sum_{l=0}^{\infty} \Delta_{ij,k,l}, \quad \sigma_{ij,k+1,0} = \sum_{l=0}^{\infty} \sigma_{ij,k,l}.$$

Величины $x_{i,k,l}, \Delta_{ij,k,l}, \sigma_{ij,k,l}$ являются членами ряда порядка l и представляют собой произведение l -й производной от соответствующей функции на величину шага h в степени l .

Вычисление этих величин осуществляется с помощью следующих рекуррентных соотношений:

$$\begin{aligned}
 x_{i,k,l+2} &= -\frac{k^2 h^2}{(l+1)(l+2)} \sum_{l'=0}^l \{ -(m_0 + m_i) x_{i,k,l'} \sigma_{0i,k,l-l'} + \\
 &+ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n m_j [(x_{j,k,l'} - x_{i,k,l'}) \sigma_{ij,k,l-l'} - x_{j,k,l} \sigma_{0j,k,l-l'}] \}, \\
 \Delta_{0j,k,l} &= \sum_{l'=0}^l (x_{j1,k,l'} x_{j1,k,l-l'} + x_{j2,k,l'} x_{j2,k,l-l'} + x_{j3,k,l'} x_{j3,k,l-l'}), \\
 \Delta_{ij,k,l} &= \Delta_{0i,k,l} + \Delta_{0j,k,l} - 2 \sum_{l'=0}^l (x_{j1,k,l'} x_{j1,k,l-l'} + \\
 &+ x_{j2,k,l'} x_{j2,k,l-l'} + x_{j3,k,l'} x_{j3,k,l-l'}), \\
 \sigma_{ij,k,l} &= \frac{1}{2l \Delta_{ij,k,0}} \sum_{l'=0}^l (2l + l') \Delta_{ij,k,l'} \sigma_{ij,k,l-l'}, \\
 l &= 0, 1, \dots, \quad i = 1, 2, \dots, n-1.
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Формулы (4.6) позволяют вычислить последовательно все члены разложений искомых величин на k -м шаге интегрирования вплоть до заданного порядка p , если определены начальные значения

$$x_{i1,k,0}, \quad x_{i2,k,0}, \quad x_{i3,k,0}, \quad x_{i1,k,1}, \quad x_{i2,k,1}, \quad x_{i3,k,1}.$$

Переход к $(k+1)$ -му шагу осуществляется по формулам

$$x_{i,k+1,0} = \sum_{l=0}^p x_{i,k,l}, \quad x_{i,k+1,1} = \sum_{l=0}^p l x_{i,k,l},$$

где p — фиксированное целое число, большее или равное двум.

Описанный метод численного решения задачи n тел применим в исследовании движения больших планет и таких малых планет, которые движутся по почти круговым орбитам и не имеют тесных сближений с возмущающими телами. В тех случаях, когда исследуемое небесное тело движется по орбите с большим эксцентриситетом или имеет тесные сближения с гравитирующими массами на определенных участках траектории, а именно при приближении к перигею и в окрестности тесных сближений, сходимость рядов Тейлора—Стеффенсена будет резко ухудшаться в связи с тем, что функции правых частей уравнений движения и решения этих уравнений не будут регулярны по независимой переменной t . Для поддержания заданной точности вычислений можно использовать уменьшение шага интегрирования или увеличение числа производных в формуле на каждом шаге. Однако на практике это не всегда дает желаемый результат из-за ограниченности разрядной сетки ЭВМ и, кроме того, требует дополнительных затрат машинного времени.

Устранить указанные трудности можно с помощью регуляризации уравнений движения, содержащих особенности. Мы рассмотрим ниже регуля-

ризованный метод Тейлора—Стефенсена в координатах Сундмана (Мячин, 1974, 1975) и метод так называемых улучшенных тейлоровских разложений в параметрических переменных Кустанхаймо—Штифеля, предложенный Штифелем и Шейфеле (1975). Использование тех и других переменных позволяет не только регуляризировать уравнения движения, но и стабилизировать невозмущенную часть их решений.

4.3. Регуляризованный метод Тейлора—Стефенсена для задачи n тел

Запишем уравнения движения системы n материальных точек в барицентрической системе координат:

$$\frac{d^2 \xi_i}{dt^2} = k^2 \sum_{j=0}^{n-1} m_j (\xi_j - \xi_i) r_{ij}^{-3}, \quad i \neq j. \quad (4.7)$$

Здесь $\xi_i = \{\xi_{i1}, \xi_{i2}, \xi_{i3}\}$ — вектор положения i -й массы в барицентрической системе координат, $r_{ij}^2 = (\xi_j - \xi_i)^2$. Введем, как ранее, вспомогательные величины

$$\Delta_{ij} = r_{ij}^2, \quad \sigma_{ij} = r_{ij}^{-3}, \quad \Delta_{ij}^3 \sigma_{ij}^2 = 1 \quad (4.8)$$

и перепишем систему уравнений в виде

$$\ddot{\xi}_i = k^2 \sum_{j=0}^{n-1} m_j (\xi_j - \xi_i) \sigma_{ij}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1;$$

$$3\sigma_{ij} \dot{\Delta}_{ij} + 2\Delta_{ij} \dot{\sigma}_{ij} = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n-1, \quad j = 0, 1, \dots, n-1, \quad i \neq j. \quad (4.9)$$

Предположим, далее, что имеет место тесное сближение или соударение двух материальных точек m_0 и m_1 .

Введем обозначения

$$x = \xi_1 - \xi_0, \quad r^2 = \sum_{k=1}^3 x_k^2, \quad x = \{x_1, x_2, x_3\} \quad (4.10)$$

и в качестве искоемых величин в системе (4.9) примем

$$x = \{x_1, x_2, x_3\}, \quad \xi_i = \{\xi_{i1}, \xi_{i2}, \xi_{i3}\}. \quad (4.11)$$

Положим, далее,

$$\mu_i = \frac{m_i}{m_0 + m_i}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1,$$

$$\varphi_1 = \sum_{i=2}^{n-1} \mu_i \xi_{i1}, \quad \varphi_2 = \sum_{i=2}^{n-1} \mu_i \xi_{i2}, \quad \varphi_3 = \sum_{i=2}^{n-1} \mu_i \xi_{i3}. \quad (4.12)$$

и, используя интегралы движения центра масс, получим

$$\xi_0 = -\mu_1 x - \varphi, \quad \xi_1 = \mu_0 x - \varphi, \quad (4.13)$$

где $\varphi = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$.

В новых обозначениях уравнения движения примут вид

$$\ddot{x} + \kappa x r^{-3} = X, \quad \ddot{\xi}_i = L_i, \quad (4.14)$$

причем

$$\kappa = k^2(m_0 + m_1), \quad X = k^2 \sum_{j=2}^{n-1} m_j [(\xi_j - \xi_i) \sigma_{ij} - (\xi_j - \xi_0) \sigma_{0j}],$$

$$L_i = k^2 \sum_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^{n-1} m_j (\xi_j - \xi_i) \sigma_{ij}, \quad i = 2, 3, \dots, n-1.$$

Введем теперь вместо независимой переменной t новую переменную s , связанную с t преобразованием Сундмана,

$$dt = r ds. \quad (4.15)$$

Обозначая штрихом производную по s , последовательно найдем

$$\dot{x} = x' r^{-1}, \quad \ddot{x} = x'' r^{-2} - x' r' r^{-3}, \quad u_i = \xi'_i r^{-1}, \quad (4.16)$$

$$u_i = u'_i r^{-1}, \quad i = 2, 3, \dots, n-1$$

и перепишем уравнения движения следующим образом:

$$x'' = x' r' r^{-1} - \kappa x r^{-1} + X r^2, \quad (4.17)$$

$$\xi_i = r u_i, \quad u'_i = r L_i, \quad i = 2, 3, \dots, n-1.$$

Введение временного преобразования, как показывают соотношения (4.16) и (4.17), позволяет регуляризовать решение, в то время как сами уравнения остаются сингулярными. Для того чтобы исключить отрицательные степени r из первой группы уравнений (4.1), положим

$$\alpha = x' r' r^{-1} - \kappa x r^{-1}, \quad \chi = r^2 (x' \cdot x') - 2 \kappa r^{-1}. \quad (4.18)$$

Для определения компонент вектора α может быть получена совокупность дифференциальных уравнений, не содержащих отрицательных степеней r . В векторной записи эта совокупность уравнений имеет вид

$$\alpha' = \frac{1}{2} X \Delta' + Q x' + \chi x', \quad r'' = Q r + \chi r + x, \quad \chi' = 2(X \cdot x), \quad (4.19)$$

где $\Delta = r^2$, $Q = (X \cdot x')$.

Преобразованная система уравнений (4.17),

$$x'' = \alpha + X \Delta, \quad \alpha' = \frac{1}{2} X \Delta' + Q x' + \chi x',$$

$$r'' = Q r + \chi r + \kappa, \quad \chi' = 2(X \cdot x'),$$

$$\xi'_i = r u_i, \quad u'_i = r L_i, \quad t' = r, \quad i = 2, 3, \dots, n-1, \quad (4.20)$$

не содержит особенностей в окрестности соударений точечных масс m_0 и m_1 .

Зафиксируем шаг интегрирования \bar{h} по переменной s , запишем тейлоровские разложения по степеням \bar{h} входящих в (4.20) величин в окрест-

НОСТИ ТОЧКИ $s = s_k = s_0 + k\bar{h}$:

$$x_{k+1,0} = \sum_{l=0}^{\infty} x_{kl}, \quad \alpha_{k+1,0} = \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_{kl}, \quad r_{k+1,0} = \sum_{l=0}^{\infty} r_{kl},$$

$$\chi_{k+1,0} = \sum_{l=0}^{\infty} \chi_{kl}, \quad u_{i,k+1,0} = \sum_{l=0}^{\infty} u_{i,k,l}, \quad i = 2, 3, \dots, n-1,$$

$$t_{k+1,0} = \sum_{l=0}^{\infty} t_{kl}, \quad \Delta_{k+1,0} = \sum_{l=0}^{\infty} \Delta_{kl}, \quad \xi_{i,k+1,0} = \sum_{l=0}^{\infty} \xi_{i,k,l},$$

$$\Delta_{ij,k+1,0} = \sum_{l=0}^{\infty} \Delta_{ij,k,l}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \quad (ij) \neq (ji),$$

$$\sigma_{ij,k+1,0} = \sum_{l=0}^{\infty} \sigma_{ik,l}, \quad j = 0, 1, \dots, n-1 \quad (ij) \neq (ji),$$

$$X_{k+1,0} = \sum_{l=0}^{\infty} X_{kl}, \quad Q_{k+1,0} = \sum_{l=0}^{\infty} Q_{kl},$$

$$L_{i,k+1,0} = \sum_{l=0}^{\infty} L_{i,k,l}. \quad (4.21)$$

Рекуррентные соотношения для вычисления входящих в эти разложения величин имеют вид

$$x_{k,l+2} = \frac{\bar{h}^2}{(l+1)(l+2)} \left[\alpha_{kl} + \sum_{l'=0}^l X_{kl'} \Delta_{k,l-l'} \right],$$

$$\alpha_{k,l+1} = \frac{1}{l+1} \sum_{l'=0}^l (l+1-l') \left[\frac{1}{2} X_{kl'} \Delta_{k,l+1-l'} + \right. \\ \left. + (Q_{k,l'} + \chi_{k,l'}) x_{k,l+1-l'} \right],$$

$$r_{k,l+2} = \frac{\bar{h}^2}{(l+1)(l+2)} \sum_{l'=0}^l (Q_{kl'} + \chi_{kl'}) r_{k,l-l'} + \kappa_l,$$

$$(\kappa_0 = \kappa, \quad \kappa_l = 0, \quad l \geq 1),$$

$$\chi_{k,l+1} = \frac{2}{l+1} \sum_{l'=0}^l (l+1-l') X_{kl'} x_{k,l+1-l'}, \quad t_{k,l+1} = \frac{\bar{h}}{l+1} r_{k,l},$$

$$\xi_{ik,l+1} = \frac{\bar{h}}{l+1} \sum_{l'=0}^l r_{kl'} u_{ik,l-l'}, \quad i = 2, 3, \dots, n-1,$$

$$u_{ik,l+1} = \frac{\bar{h}}{l+1} \sum_{l'=0}^l r_{kl'} L_{ik,l-l'}, \quad i = 2, 3, \dots, n-1,$$

$$\xi_{0,k,l+1} = -\mu_1 x_{k,l+1} - \sum_{j=2}^{n-1} \mu_j \xi_{jk,l+1},$$

$$\xi_{1,k,l+1} = \mu_0 x_{k,l+1} - \sum_{j=2}^{n-1} \mu_j \xi_{j,k,l+1},$$

$$\Delta_{k,l+1} = \sum_{l'=0}^{l+1} r_{kl'} r_{k,l+1-l'},$$

$$\Delta_{ij,k,l+1} = \sum_{l'=0}^{l+1} (\xi_{j,k,l'} - \xi_{i,k,l'}) (\xi_{j,k,l+1-l'} - \xi_{i,k,l+1-l'}),$$

$$\sigma_{ij,k,l+1} = \frac{-1}{2(l+1) \Delta_{ij,k,0}} \sum_{l'=1}^{l+1} (2l+l'+2) \Delta_{ij,k,l'} \sigma_{ij,k,l+1-l'},$$

$$i = 0, 1, \dots, n-1; \quad j = 0, 1, \dots, n-1; \quad ij \neq 0, 1;$$

$$X_{k,l} = k^2 \sum_{j=2}^{n-1} m_j \sum_{l'=0}^l [(\xi_{j,k,l'} - \xi_{1,k,l'}) \sigma_{ij,k,l-l'} -$$

$$- (\xi_{i,k,l'} - \xi_{0,k,l'}) \sigma_{0j,k,l-l'}],$$

$$L_{i,k,l} = k^2 \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{m-1} m_j \sum_{l'=0}^l (\xi_{j,k,l'} - \xi_{i,k,l'}) \sigma_{ij,k,l-l'},$$

$$i = 2, 3, \dots, n-1,$$

$$Q_{k,l} = \sum_{l'=0}^l (X_{k,l'} \cdot x_{k,l-l'}). \quad (4.22)$$

Интегрирование регуляризованной системы уравнений (4.20) осуществляется по фиктивному времени s . Связь между физическим временем t и фиктивным временем s задается уравнением временного преобразования. В результате численного интегрирования этого уравнения мы получаем функции $t(s)$, $x(s)$, $\xi(s)$, заданные таблично, причем таблицы функции имеют неравноотстоящие узлы.

Для практических целей нам необходимо иметь координаты x , ξ на некоторые моменты времени t_k , которые, как правило, не совпадают с табличными значениями. Таким образом, при численном интегрировании регуляризованных систем возникает проблема точного выхода из программы на заданные моменты физического времени. Эта проблема является общей для интегрирования всех регуляризованных систем любыми численными методами. Она возникает также при интегрировании нерегуляризованных систем многоступенчатыми методами высоких порядков, при интегрировании нерегуляризованных уравнений движения, записанных в элементах и имеющих независимую переменную, отличную от физического времени. Учитывая практическое значение этой проблемы, мы рассмотрим ее отдельно в главе 10.

4.4. Улучшенные тейлоровские разложения G-функции

Понятие улучшенных численных методов введено Штифелем и Шейфеле (1975) для задач теории возмущений, которые могут быть описаны уравнениями вида

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_k) + \epsilon q_i(t, x_k), \quad (4.23)$$

где возмущающие члены уравнения $\epsilon q_i(t, x_k)$ содержат малый параметр и малы по сравнению с главными членами f_i . При ϵ , равном нулю, система (4.23) сводится к невозмущенной системе

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_k). \quad (4.24)$$

Улучшенными численными методами будут называться методы, обладающие следующим свойством: если в некоторый момент независимой переменной t возмущающие члены отбрасываются, соответствующие невозмущенные уравнения (4.24) интегрируются с помощью данного метода без методических ошибок.

Применение преобразования Кустанхеймо—Штифеля позволяет записать уравнения движения небесных тел в виде

$$\ddot{x} + \alpha x = \epsilon f(x, \dot{x}, t), \quad (4.25)$$

где невозмущенное уравнение является линейным с постоянным коэффициентом. Это уравнение легко интегрируется, если функция f зависит только от t . Рассмотрим случай, когда f представляет собой полином $Q(t)$ степени m ,

$$\ddot{x} + \alpha x = \epsilon \sum_{n=0}^m c_n \frac{t^n}{n!}, \quad (4.26)$$

и заданы начальные условия $x(0)$, $\dot{x}(0)$. Решение этого уравнения складывается из решения однородного уравнения с заданными начальными условиями $x(0)$, $\dot{x}(0)$ и решения неоднородного уравнения, которое обращается в нуль вместе со своей производной при $t = 0$. Решение неоднородного уравнения (4.26) ищется в виде линейной комбинации с коэффициентами

$$\epsilon c_n \text{ решений однотипных задач } \ddot{x}_n + \alpha x_n = \frac{t^n}{n!} \text{ с начальными условиями } x_n(0) = \dot{x}_n(0) = 0.$$

Обозначим

$$x_n(t) = G_{n+2}(t), \quad n = 0, 1, \dots, m. \quad (4.27)$$

G-функции удовлетворяют целому ряду очевидных соотношений:

$$\begin{aligned} \ddot{G}_n + \alpha G_n &= \frac{t^{n-2}}{n-2}, \quad G_n(0) = \dot{G}_n(0) = 0, \quad \dot{G}_n = G_{n-1}(t), \\ G_{n+1}(t) &= \int_0^t G_n(\tau) d\tau, \quad n = 2, 3, \dots, \end{aligned} \quad (4.28)$$

из которых можно получить рекуррентную формулу

$$G_n(t) + \alpha G_{n+2}(t) = \frac{t^n}{n!}, \quad (4.29)$$

причем G_0 и G_1 являются частными решениями однородного дифференциального уравнения

$$\ddot{x} + \alpha x = 0 \quad (4.30)$$

с начальными условиями

$$G_1(0) = 0, \quad \dot{G}_1(0) = 1, \quad G_0(0) = 1, \quad \dot{G}_0(0) = 0. \quad (4.31)$$

G -функции могут быть представлены степенными рядами

$$G_0(t) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k \frac{t^k}{k!}, \quad G_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k \frac{t^{k+1}}{(k+1)!}, \quad (4.32)$$

причем коэффициенты g_k удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$g_k = \alpha g_{k-2}, \quad k = 2, 3, \dots, \quad g_0 = 1, \quad g_1 = 0. \quad (4.33)$$

Решение однородного уравнения (4.30) имеет вид

$$x(0)G_0(t) + \dot{x}(0)G_1(t), \quad (4.34)$$

а решение уравнения (4.25) записывается в форме

$$x(t) = x(0)G_0(t) + \dot{x}(0)G_1(t) + \epsilon \sum_{n=0}^m C_n G_{n+2}(t). \quad (4.35)$$

Вопросы применения улучшенных тейлоровских разложений в задачах небесной механики рассмотрены Е. Штифелем и Г. Шейфеле (1975).

4.5. Метод рядов Тейлора с рациональной аппроксимацией производных

Интересный способ построения тейлоровских разложений предложен Д.Бартоном и др. (Barton, Willers, Zahar, 1971). Способ применим к системам уравнений, у которых правые части могут быть представлены в виде рациональных функций. Этого почти всегда можно достичь, вводя в уравнения преобразования; если их правые части содержат дробные или отрицательные степени, синусы, косинусы, логарифмы и т.п.

Например, если правая часть одного из уравнений

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(t, y_1, \dots, y_n), \quad y_i(t_0) = y_i^0 \quad (4.36)$$

содержит y^q , обозначаем

$$z = y^q$$

и вводим в систему (4.36) дополнительное уравнение

$$z' = qzy'/y$$

с соответствующими начальными условиями.

Система уравнений в рациональной форме может быть приведена к так называемому каноническому виду следующим образом.

Для каждой функции f_i введем дополнительную переменную T_s , которая выражается через рациональные функции с помощью одного из соотношений

$$T_s = T_l * T_m, \quad l, m < s,$$

или

$$T_s = \odot T_m, \quad m < s.$$

Здесь значком "*" обозначена любая из операций сложения, вычитания, умножения, деления, а значком "o" — операция типа интегрирования, присвоения знака и т.п.

Предположим, далее, что для каждой зависимой переменной y_i и каждой дополнительной переменной T_s могут быть получены разложения в ряд Тейлора в окрестности некоторой точки $t = t_k$

$$y_i(t) = \sum_{j=0}^{\infty} y_{i,j}(t - t_k)^j, \quad T_s(t) = \sum_{j=0}^{\infty} T_{s,j}(t - t_k)^j, \quad (4.37)$$

где через $y_{i,j}$ и $T_{s,j}$ обозначены производные j -го порядка от функций y_i и T_s .

Подставляя соотношения (4.37) в уравнения (4.36), можно получить выражения, связывающие производные $y_{i,j}$ и $T_{s,j}$, и свести, таким образом, определение $y_{i,j}$ к вычислению величин $T_{s,j}$, которые могут быть найдены из рекуррентных соотношений.

Вид рекуррентных соотношений определяется структурой функций T_s . Например, если

$$T_s = T_l / T_m,$$

то имеет место рекуррентное соотношение

$$T_{s,j} = \frac{1}{T_{m,0}} [T_{l,j} - \sum_{k=1}^j T_{m,r} T_{s,j-k}].$$

Это соотношение можно использовать для получения $T_{s,j}$, если $T_{l,r}$ и $T_{m,r}$ известны для $r = 0, 1, \dots, j$, а $T_{s,r}$ для $r = 0, 1, \dots, j-1$.

4.6. Метод тейлоровских разложений в задачах о движении спутников Земли

В данном разделе мы рассмотрим вопрос о возможности использования тейлоровских разложений в спутниковых задачах.

Следует отметить, что в настоящее время нет законченных алгоритмов тейлоровского типа, которые могли бы быть использованы для решения практических задач прогнозирования движения ИСЗ. Это связано, по-видимому, с исключительной громоздкостью такого типа алгоритмов для спутниковых задач.

Мы рассмотрим здесь два возможных подхода к построению алгоритмов тейлоровского типа для задач исследования движения ИСЗ. Принципиаль-

ное отличие этих двух подходов состоит в использовании различных представлений потенциала Земли. В первом случае используется разложение геопотенциала по сферическим функциям, во втором потенциал представляется в виде системы точечных масс.

При использовании разложений потенциала по сферическим функциям можно применить к построению алгоритмов тейлоровского типа рекуррентные формулы Каннингема (см. раздел 1.2) для вычисления частных производных высоких порядков от шаровых функций \bar{V}_{nm} .

Рекуррентный алгоритм Каннингема предназначен для вычисления шаровых функций \bar{V}_{nm} и их частных производных первого порядка по прямоугольным координатам (Cunningham, 1970; Брумберг, 1980). Легко показать, что этот алгоритм может быть обобщен и на случай вычисления частных производных более высоких порядков. При этом могут быть получены рекуррентные формулы двух видов, связывающие производные высоких порядков с шаровыми функциями \bar{V}_{nm} и с производными более низких порядков от функций \bar{V}_{nm} . Для примера приведем две такие формулы для $m > 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^p \bar{V}_{nm}}{\partial x_1^p} &= (-1)^k \left[\frac{(2n+1+p)(n+m+2p+2)(n+m+2p+1)}{2n+2p+3} \right]^{p/2} \times \\ &\times \frac{\bar{V}_{n+p, m+p}}{2p} \left[\frac{(n-m+2)(n-m+1)}{2\epsilon_{m-1}(2n+3)} \right]^{p/2} \bar{V}_{n+k, m-p}, \\ \frac{\partial^p \bar{V}_{nm}}{\partial x_1^p} &= -\frac{1}{2} \left[\frac{2(n+1)(n+m+2)(n+m+1)}{2n+3} \right]^{1/2} \frac{\partial^{p-1}}{\partial x_1^{p-1}} \bar{V}_{n+1, m+1} + \\ &+ \left[\frac{(n-m+2)(n-m+1)}{2\epsilon_{m-1}(2n+3)} \right]^{1/2} \frac{\partial^{p-1}}{\partial x_1^{p-1}} \bar{V}_{n+1, m-1}. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Начальными значениями в первой формуле будут шаровые функции $\bar{V}_{n+1, m+1}$, $\bar{V}_{n+1, m-1}$, а во второй формуле их производные

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{V}_{n+1, m+1}}{\partial x_1} &= - \left[\frac{(2n+3)(n+m+4)(n+m+3)}{2n+5} \right]^{1/2} \frac{\bar{V}_{n+2, m+2}}{2} + \\ &+ \left[\frac{(n-m+2)(n-m+1)}{2\epsilon_{m-1}(2n+5)} \right]^{1/2} \frac{\bar{V}_{n+2, m}}{2}, \\ \frac{\partial \bar{V}_{n+1, m-1}}{\partial x_1} &= - \left[\frac{(2n+3)(n+m+2)(n+m+1)}{2n+5} \right]^{1/2} \frac{\bar{V}_{n+2, m}}{2} + \\ &+ \left[\frac{2(n-m+4)(n-m+3)}{2n+5} \right]^{1/2} \frac{\bar{V}_{n+2, m-2}}{2}. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Аналогичным образом запишутся частные производные высоких порядков по координатам x_2 и x_3 и смешанные производные.

Формулы, связывающие непосредственно производные высоких порядков с шаровыми функциями \bar{V}_{nm} , требуют при использовании существен-

ного расширения матрицы шаровых функций, что практически не всегда возможно. Поэтому второй вид формул, связывающих производные высоких порядков с производными более низких порядков, более удобен.

Рассмотрим теперь вопрос о том, как эти формулы могут быть использованы при построении тейлоровских разложений. Запишем уравнения движения в форме

$$\ddot{x}_i = f_i(t, x_i), \quad (4.40)$$

$$\text{где } f_i = \frac{\partial U}{\partial x_i}.$$

Для простоты рассмотрим алгоритм четвертого порядка. Разложения x_i и f_i в ряд Тейлора на k -м шаге интегрирования имеют вид

$$x_{i,k+1,0} = \sum_{n=0}^{\infty} x_{i,k,n} h^n, \quad f_{i,k+1,0} = \sum_{n=0}^{\infty} f_{i,k,n} h^n$$

и, очевидно,

$$x_{i,k,n+2} = f_{i,k,n}.$$

Для алгоритмов четвертого порядка $n = 1, 2$

$$f_{i,k,1} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f_{ik}}{\partial x_{ik}} x_{ik,1},$$

$$f_{i,k,2} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 f}{\partial x_{ik} \partial x_{jk}} x_{ik,1} x_{j,k,1} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f_{ik}}{\partial x_{ik}} x_{i,k,2}. \quad (4.41)$$

Производные $\frac{\partial f_{ik}}{\partial x_{ik}}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_{ik} \partial x_{jk}}$ будут вычисляться по формулам (4.38).

При переходе к неподвижной системе координат вид формул (4.41) сохранится только при отсутствии тессеральной части геопотенциала, т.е. когда $m = 0$. При наличии тессеральной части геопотенциала в формулах (4.41)

появятся частные производные по времени $\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$, что существенно усложнит алгоритм.

При построении алгоритмов тейлоровского типа для спутниковых задач можно использовать преобразования Стефенсена.

Запишем уравнения движения в квазиинерциальной прямоугольной системе координат $Ox_1x_2x_3$, связанной с центром масс Земли, такой, что ось Ox_1 направлена в точку весеннего равноденствия, а ось Ox_3 — в северный полюс. Вид уравнений движения (4.40) при этом не изменится, а потенциал U переписывается в виде

$$U = k^2 M_0 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{r_0^n}{r^{n+1}} (C_{nm} \cos m\omega + S_{nm} \sin m\omega) P_{nm}(\sin \beta), \quad (4.42)$$

причем $\omega = \lambda + S$, где S — гринвичское звездное время. Величину S можно представить формулой

$$S = n_{\odot}(t - t_0) + S_0. \quad (4.43)$$

Здесь n_0 — угловая скорость вращения Земли, S_0 есть значение S в начальный момент времени $t = t_0$.

Преобразования типа Стефенсена, позволяющие за счет использования вспомогательных функций устранить из уравнений движения степенные и тригонометрические члены, могут быть введены различным способом. Для каждой фиксированной пары значений n и m можно ввести, например, функции

$$\begin{aligned} F_{nm} &= C_{nm} \cos m\omega + S_{nm} \sin m\omega, \\ R_n r^{n+3} &= 1, \quad Q_{n-m} q^{n-m} = 1, \end{aligned} \quad (4.44)$$

$$\text{где } q = \sin \beta - 1 = \frac{x_3}{r} - 1.$$

Система уравнений движения перепишется в виде

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -x_1 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} F_{nm} R_n Q_{n-m}, \quad \ddot{F}_{nm} + n_0^2 F_{nm} = 0, \\ \dot{R}_r + (n+3) R_n \dot{r} &= 0, \quad \dot{Q}_{n+m} q + (m-n) Q_{n-m} \dot{q} = 0. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Полученная таким образом система уравнений позволяет выписать рекуррентные соотношения для определения коэффициентов тейлоровских разложений всех входящих в систему неизвестных величин.

Рассмотрим другой способ построения тейлоровских разложений для спутниковых задач, основанный на представлении геопотенциала системой точечных масс. Используя описанную выше квазиинерциальную систему координат Ox_1, x_2, x_3 , связанную с центром Земли, и представление потенциала Земли системой точечных масс (см. раздел 1.2), запишем уравнения движения спутника в виде

$$\ddot{x} = -k^2 M_0 x \left(\frac{1}{r_1^3} + \frac{1}{r_2^3} \right) + k^2 \sum m_n \frac{x - x_n}{r_n}. \quad (4.46)$$

Здесь x_n есть вектор положения n -й точки массы в квазиинерциальной системе координат. Компоненты этого вектора определяются формулами

$$\begin{aligned} x_{1n} &= \cos S \bar{x}_{1n} - \sin S \bar{x}_{2n}, \\ x_{2n} &= \sin S \bar{x}_{1n} + \cos S \bar{x}_{2n}, \quad x_{3n} = \bar{x}_{3n}, \end{aligned}$$

где $\bar{x}_{1n}, \bar{x}_{2n}, \bar{x}_{3n}$ — компоненты вектора положения n -й точечной массы во вращающейся системе координат, жестко связанной с Землей. Звездное время S определяется формулой (4.43), где n_0, S_0 — постоянные величины.

Введем преобразование Стефенсена

$$\Delta_n = r_n^2, \quad \sigma_n = r_n^3, \quad \Delta_n^3 \cdot \sigma_n^2 = 1, \quad \cos S = c(t)$$

и перепишем систему уравнений (4.46) следующим образом:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{k^2 M_0 x}{2} (\sigma_1 + \sigma_2) + k^2 \sum_n m_n (x - x_n) \sigma_n, \\ 3\sigma_n \dot{\Delta}_n + 2\Delta_n \dot{\sigma}_n &= 0, \quad n_0 \dot{x}_{1n} = n_0 \bar{x}_{1n} c + \dot{c} \bar{x}_{2n}, \\ n_0 \dot{x}_{2n} &= -\bar{x}_{1n} \dot{c} - n_0 c \bar{x}_{2n}, \quad \dot{c} + n_0 c = 0. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Новая система уравнений дает возможность выписать необходимые рекуррентные соотношения для определения коэффициентов тейлоровских разложений.

При построении рекуррентных соотношений может быть использована как традиционная методика, изложенная в разделе 4.2, так и методика, основанная на рациональной аппроксимации производных высоких порядков.

Заключая главу о методах тейлоровских разложений, отметим, что эти методы особенно удобны в задачах эфемеридного обеспечения, поскольку позволяют без дополнительных усилий строить полином, необходимый для интерполяции решения на заданные моменты времени.

ГЛАВА 5

МЕТОДЫ РУНГЕ – КУТТЫ ВЫСОКИХ ПОРЯДКОВ

5.1. Вводные замечания

Существующие численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений принято делить на одношаговые и многошаговые.

Рассмотрим множество всевозможных методов интегрирования уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \quad (5.1)$$

где последовательно получаются приближения y_j к значениям $y(x_j)$, $x_0 < x_1 < \dots < x_k = x_0 + x$. Пусть в процессе численного интегрирования k фиксировано и при $j \geq k$ значение y_j определяется как значение некоторого функционала

$$y_j = F(f, x_j, \dots, x_{j-k}, h, y_{j-1}, \dots, y_{j-k}). \quad (5.2)$$

Такой способ численного интегрирования можно назвать k -шаговым. Если $k = 1$, приближенное значение решения в следующей точке определяется только в зависимости от значения решения в предыдущей точке. Такие методы принято называть одношаговыми. В этом случае шаг $h = X$. Методы, для которых $k \neq 1$, называют многошаговыми. Схема построения численного метода, определенная формулой (5.2), является явной, поскольку неизвестная величина y_j входит только в левую часть формулы. Возможны также неявные схемы построения численных методов

$$y_j = F(f, x_j, \dots, x_{j-k}, h, y_{j-1}, \dots, y_{j-k}, y_j), \quad (5.3)$$

когда неизвестная величина входит в обе части равенства.

В практике численного решения уравнений движения небесных тел находят применение и одношаговые, и многошаговые методы, как явные, так и неявные. Примером одношагового метода может служить метод тейлоровских разложений, изложенный в предыдущем разделе. В задачах прогнозирования движения искусственных небесных тел наибольшее распространение получил явный одношаговый метод Рунге – Кутты четвертого поряд-

ка. Это объясняется, прежде всего, исключительной простотой его алгоритма. Однако в задачах долгосрочного прогнозирования использование метода четвертого порядка весьма ограничено, поскольку метод либо не дает необходимой точности вычислений, либо приводит к непроизводительным затратам машинного времени.

В последнее десятилетие усилиями Батчера достигнут значительный прогресс в развитии теории методов типа Рунге — Кутты. Разработанная Батчером абстрактная алгебраическая теория процессов Рунге — Кутты открывает большие возможности для теоретического исследования свойств методов и для практической разработки новых высокоэффективных алгоритмов. Ряд таких алгоритмов получен в работах Дж. Батчера (Butcher, 1963, 1964), Дж. Шенкса (Shanks, 1966), Е. Фельберга (Fehlberg, 1969, 1972), Е. Хейпера (Hairer, 1978), А. Кертиса (Curtis, 1975), Е. Эверхарта (Everhart, 1974) и других авторов.

В настоящем разделе монографии мы рассмотрим наиболее интересные из этих алгоритмов. Изложение теории методов Рунге — Кутты можно найти в монографии Х. Штеттера (1978), в работах Дж. Батчера (Butcher, 1963, 1964 а), а также в двух написанных Батчером главах (5 и 10) книги "Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений", вышедшей под редакцией Дж. Холла и Дж. Уатта (1979). Мы же обратимся к теории метода Рунге — Кутты исключительно с практической целью изложить достаточно общий способ построения методов Рунге — Кутты и рассмотрим возможности его реализации на ЭВМ.

5.2. Построение методов Рунге — Кутты.

Способ Батчера

Рассмотрим систему n обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{dy}{dx} = f(y), \quad (5.4)$$

для которой корректно поставлена задача Коши на отрезке $[OX]$. Здесь y и f — n -мерные векторы. Будем предполагать, что функции $f(y)$ не зависят от x , в противном случае может быть введена еще одна зависимая переменная $y_{n+1} = x$ и система (5.1) дополнена уравнением

$$\frac{dy_{n+1}}{dx} = 1.$$

Алгоритм Рунге — Кутты отыскания приближенного решения системы (5.4) в точке $x = x_0 + h$ задается группой формул

$$g_i = f(y_0 + h \sum_{j=1}^s a_{ij} g_j), \quad \hat{y} = y_0 + h \sum b_i g_i, \quad (5.5)$$

где g_i ($i = 1, 2, \dots, s$) есть ряд n -мерных векторов, а набор параметров a_{ij}, b_i полностью определяет тип алгоритма. Общие процессы Рунге — Кутты типа (5.5) следует отнести к неявным; методы, в которых $a_{ij} = 0$ для $i < j$, принято называть полуявными; если, кроме того, $a_{ij} = 0$, когда $i = j$,

методы называются явными. Величину s называют количеством этапов метода Рунге — Кутты. Рассмотрим способ построения условных уравнений для определения коэффициентов a_{ij}, b_i , принадлежащий Дж. Батчеру. Коэффициенты a_{ij}, b_i определяются в методах Рунге — Кутты из условия совпадения тейлоровских разложений точного y и приближенного \hat{y} решений до заданного порядка. Поэтому, для того чтобы получить уравнения для отыскания a_{ij}, b_i , необходимо построить разложения в ряд Тейлора для функций y и \hat{y} .

Батчером введен целый ряд математических понятий и определений, позволяющих нормализовать процесс построения тейлоровских разложений точного и приближенного решений и свести их к набору достаточно простых и единообразных операций, доступных для выполнения на ЭВМ.

Тейлоровское разложение для y . Введем понятие элементарного дифференциала. Пусть $f = f(y)$ есть элементарный дифференциал порядка 1. Если $F_j, j = 1, \dots, m$ — элементарные дифференциалы функции F_j порядков r_j , то

$$f^m F_1 F_2 \dots F_m = \{F_1 \dots F_m\} = F \quad (5.6)$$

есть элементарный дифференциал функции f порядка $r = 1 + \sum_{j=1}^m r_j$, причем

$$F = \sum_{j_1=1}^n \sum_{j_2=2}^n \dots \sum_{j_k=1}^n \frac{\partial^m f}{\partial y_{j_1} \partial y_{j_2} \dots \partial y_{j_k}} F_{1j_1} F_{2j_2} \dots F_{kj_k}. \quad (5.7)$$

Здесь F_{kj_k} есть j_k -я компонента вектора F , а y_{j_k} есть j_k -я компонента вектора y .

Рассмотрим свойства элементарных дифференциалов. F_1, \dots, F_m не обязательно все различны в F . Предположим, что только $F_1, F_2, \dots, F_\sigma$ различны, а каждый из оставшихся $F_{\sigma+1}, \dots, F_m$ совпадает с одним из первых σ членов, при этом F_i встречается μ_i раз среди F_1, F_2, \dots, F_m . В этом случае

$$r = 1 + \mu_1 r_1 + \mu_2 r_2 + \dots + \mu_\sigma r_\sigma, \quad m = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_\sigma,$$

и можно F переписать в виде

$$F = \{F_1^{\mu_1}, F_2^{\mu_2}, \dots, F_\sigma^{\mu_\sigma}\}. \quad (5.8)$$

Введем сокращенные обозначения, именуемые скобками Батчера,

$$\underbrace{f \cdot f \cdot f \dots}_k = f^k, \quad \underbrace{\{\underbrace{\dots}_{k_1} = \{ \dots \}_{k_1}, \dots \}_{k_2}}_k = \{ \dots \}_k.$$

Тогда $\{F\}$ для F , заданного в виде (5.8), представится в виде

$$\{F\} = \{ {}_2 F_1^{\mu_1}, F_2^{\mu_2}, \dots, F_\sigma^{\mu_\sigma} \}_2$$

и вообще

$$\{ {}_{a-1} F \}_{a-1} = \{ {}_a F_1^{\mu_1}, F_2^{\mu_2}, \dots, F_\sigma^{\mu_\sigma} \}_a.$$

Если F_1, \dots, F_m в (5.6) есть линейные комбинации элементарных дифференциалов, тогда и F есть линейная комбинация элементарных дифферен-

циалов:

$$\{_a (bF'_1 + cF''_1), F_2, \dots, F_m\}_a = b\{_a F'_1, F_2, \dots, F_m\} + c\{F''_1, F_2, \dots, F_m\}_a.$$

Для примера приведем все элементарные дифференциалы функции f до четвертого порядка:

$$\{f\} = \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial f}{\partial y_{jk}} f_{jk}$$

— элементарный дифференциал функции f второго порядка, его jk -я компонента имеет вид

$$\{f\}_{j_1}(y) = \sum_{i_1=1}^n \frac{\partial f_{j_1}(y)}{\partial y_{i_1}} f_{j_1}(y).$$

Существует два различных элементарных дифференциала третьего порядка:

$$\{_2 f\}_2 = \sum_{j_1} \frac{\partial f}{\partial y_{j_1}} \sum_{j_2} \frac{\partial f}{\partial y_{j_2}} f_{j_2},$$

$$\{f^2\} = \sum_{j_1} \sum_{j_2} \frac{\partial^2 f}{\partial y_{j_1} \partial y_{j_2}} f_{j_1} f_{j_2}$$

и четыре элементарных дифференциала четвертого порядка:

$$\{_3 f\}_3 = \sum_{j_1} \frac{\partial f}{\partial y_{j_1}} \sum_{j_2} \frac{\partial f_{j_1}}{\partial y_{j_2}} \sum_{j_3} \frac{\partial f_{j_2}}{\partial y_{j_3}} f_{j_3},$$

$$\{f^2\} = \sum_{j_1} \frac{\partial f}{\partial y_{j_1}} \sum_{j_2} \sum_{j_3} \frac{\partial^2 f_{j_1}}{\partial y_{j_2} \partial y_{j_3}} f_{j_2} f_{j_3},$$

$$\{(f)f\} = \sum_{j_1} \sum_{j_2} \frac{\partial^2 f}{\partial y_{j_1} \partial y_{j_2}} \left(\sum_{j_3} \frac{\partial f_{j_1}}{\partial y_{j_3}} f_{j_3} \right) f_{j_2},$$

$$\{f^3\} = \sum_{j_1} \sum_{j_2} \sum_{j_3} \frac{\partial^3 f}{\partial y_{j_1} \partial y_{j_2} \partial y_{j_3}} f_{j_1} f_{j_2} f_{j_3}.$$

Введем дифференциальный оператор D , заменяющий элементарный дифференциал, на который он действует, его производной. Тогда для F , записанного в форме (5.6), будем иметь

$$DF = \{fF_1, F_2, \dots, F_m\} + \{(DF_1), F_2, \dots, F_m\} + \{F_1, F_2, \dots, (DF_m)\}. \quad (5.9)$$

Применяя эту формулу к f , найдем

$$Df = \{f\}, \quad D^2 f = \{f\}_2 + \{f^2\}, \quad D^3 f = \{_3 f\}_3 + 3\{f\{f\}\} + \{_2 f^3\}_2 + \{f^3\}. \quad (5.10)$$

Приведенные соотношения показывают, что любая производная от функций F или f представляет собой линейную комбинацию элементарных диффе-

ренциалов с неотрицательными коэффициентами. Поэтому разложение точного решения системы уравнений (5.4) в ряд Тейлора в окрестности $y = y_0$ можно записать в виде

$$y = y_0 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{h^r}{r!} D^{r-1} f = y_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{h^{r_i}}{r_i!} \alpha_i F_i, \quad (5.11)$$

где $F_1 (= f)$, F_2, F_3, F_4, \dots — полный набор элементарных дифференциалов порядков $r_1 (= 1), r_2, \dots$ в неубывающей последовательности, α_i — коэффициенты, с которыми F_i входят в $D^{r_i-1} f$. С точностью до членов четвертого порядка имеем, например,

$$\begin{aligned} y = y_0 + hf + \frac{h^2}{2!} \{f\} + \frac{h^3}{3!} (\{ {}_2 F \}_2 + \{f^2\}) + \\ + \frac{h^4}{4!} (\{ {}_3 f \} + 3\{f\{f\}\} + \{ {}_2 f^2 \}_2 + \{f^3\}) + \dots \end{aligned} \quad (5.12)$$

При вычислении коэффициентов α_i можно использовать следующее свойство этих коэффициентов. Если в выражении (5.11) $(h^r/r!) \alpha$ есть коэффициент F , где F определено формулой (5.8), и $F_1, F_2, \dots, F_\sigma$ все различны, тогда

$$\alpha = (r-1) \prod_{i=1}^{\sigma} \frac{1}{\mu_i} \left(\frac{\alpha_i}{r_i!} \right)^{\mu_i}, \quad (5.13)$$

где $(h^{r_i}/r_i!) \alpha_i$ ($i = 1, 2, \dots$) есть коэффициент F_i в (5.11).

Тейлоровское разложение для \hat{y} . Производные от приближенного решения \hat{y} по независимой переменной x будут зависеть от коэффициентов b_i, a_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, s$). Удобно ввести соответствующие элементарным дифференциалам вектор-функции, которые зависели бы от этих коэффициентов и функции $f(y)$. Определим

$$g = \sum_{i=1}^s b_i g_i, \quad (5.14)$$

где g_i заданы формулами (5.5) как взвешенный дифференциал порядка 1.

Пусть, далее

$$G = \langle G_1, G_2, \dots, G_m \rangle \quad (5.15)$$

есть взвешенный дифференциал, соответствующий F , заданному формулой (5.7). Если G_i соответствует F_i ($i = 1, 2, \dots, \sigma$), то G имеет тот же порядок, что и F .

Взвешенный дифференциал, соответствующий (5.8), есть

$$G = \langle G_1^{\mu_1}, G_2^{\mu_2}, \dots, G_\sigma^{\mu_\sigma} \rangle. \quad (5.16)$$

Правая часть в (5.15) определяется следующим образом. Пусть G_k имеет компоненты $(G_{k1}, G_{k2}, \dots, G_{kn})$, где

$$G_{kj} = \sum_i G_{ij}^i b_i.$$

Тогда

$$\langle G_1, G_2, \dots, G_m \rangle = \sum_{i=1}^s \sum_{l_1=1}^s \dots \sum_{l_s=1}^s b_i a_{il_1} \dots a_{il_s} \times \\ \times \frac{\partial^m g_i}{\partial y_{j_1} \partial y_{j_2} \dots \partial y_{j_m}} G_{1,j_1}^{(l_1)} G_{2,j_2}^{(l_2)} \dots G_{m,j_m}^{(l_m)}. \quad (5.17)$$

В этой формуле частные производные от g_i получаются дифференцированием функции $f(y)$ по соответствующему элементу и последующей подстановкой

$$\hat{y} = y_0 + h \cdot \sum_{j=1}^s a_{ij} g^{(j)}.$$

Удобно ввести, далее, функции, зависящие только от коэффициентов a_{ij} , b_i . Эти функции будем называть элементарными весами. Порядок элементарного веса идентичен порядку соответствующего элементарного дифференциала. Элементарный вес, соответствующий f , есть

$$\Phi = \sum_{i=1}^s b_i, \quad (5.18)$$

а элементарный вес, соответствующий $\{F_1, F_2, \dots, F_m\}$, есть

$$\Phi = [\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_m], \quad (5.19)$$

где $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_m$ соответствуют F_1, F_2, \dots, F_m .

Как и раньше,

$$\Phi = [\Phi_1^{\mu_1}, \Phi_2^{\mu_2}, \dots, \Phi_\sigma^{\mu_\sigma}] \quad (5.20)$$

соответствует (5.8). Правая часть в (5.19) определена формулой

$$[\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_m] = \sum_{k=1}^s \sum_{l_1=1}^s \dots \sum_{l_m=1}^s b_k a_{kl_1} a_{kl_2} \dots a_{kl_m} \times \\ \times \Phi_1^{(l_1)} \Phi_2^{(l_2)} \dots \Phi_m^{(l_m)},$$

где

$$\Phi_i = \sum_{k=1}^s b_k \Phi_i^{(k)} \quad (5.21)$$

и $\Phi_i^{(k)}$ не зависят от b_1, b_2, \dots, b_s .

При $h = 0$ справедлива следующая формула:

$$G = \Phi F. \quad (5.22)$$

Применение дифференциального оператора D к взвешенному дифференциалу дает

$$DG = \langle g, G_1, G_2, \dots, G_s \rangle + h \langle \langle g \rangle, G_1, G_2, \dots, G_s \rangle + \\ + h^2 \langle \langle_2 g \rangle_2, G_1, G_2, \dots, G_s \rangle + \langle (DG_1), G_1, \dots, G_s \rangle + \\ + \langle G_1, (DG_2), G_3, \dots, G_s \rangle + \dots + \langle G_1, G_2, \dots, D(G_3) \rangle. \quad (5.23)$$

Отсюда следует, что любая производная от взвешенного дифференциала или функции g представляет собой линейную комбинацию взвешенных дифференциалов с неотрицательными коэффициентами, и поэтому

$$\hat{y} = y_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{h^{r_i}}{(r_i - 1)!} \beta_i \Phi_i F_i. \quad (5.24)$$

Если $(h^{r_i}/(r_i - 1)!) \beta_i \Phi_i$ — коэффициент при F_i в формуле (5.24), F_i определено формулой (5.8) и все $F_1, F_2, \dots, F_\sigma$ различны, то справедливо соотношение

$$\beta_i = (r_i - 1)! \prod_{i=1}^{\sigma} \frac{1}{\mu_i!} (\beta^i / (r_i - 1)!)^{\mu_i}, \quad (5.25)$$

где $(h^{r_i}/(r_i - 1)!) \beta_i \Phi_i$ — коэффициент при F_i в (5.24).

Для примера запишем разложение в ряд Тейлора приближенного решения \hat{y} с точностью до h^4 :

$$\begin{aligned} \hat{y} = & y_0 + h \Phi f + h^2 [\Phi] \{f\} + h^3 ([{}_2 \Phi]_2 \{{}_2 f\}_2 + \\ & + \frac{1}{2} [\Phi^2] \{f^2\}) + h^4 ([{}_3 \Phi]_3 \{{}_3 f\}_3 + [\Phi[\Phi]] \{f\{f\}\} + \\ & + \frac{1}{2} [{}_2 \Phi^2]_2 \{{}_2 f^2\}_2 + \frac{1}{6} [\Phi^3] \{f^3\}) + \dots \end{aligned}$$

Система условных уравнений для определения коэффициентов a_{ij}, b_i . Если метод Рунге — Кутты имеет точность h^r , соотношения (5.10) и (5.24) должны совпадать с той же точностью и можно записать следующее соотношение:

$$\Phi_i = \frac{1}{r_i} \frac{\alpha_i}{\beta_i} = \frac{1}{\gamma_i} \quad (5.26)$$

для всех i таких, что $r^i \leq r$.

Соотношения (5.26) представляют собой систему нелинейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов. Для явного метода Рунге — Кутты четвертого порядка эта система запишется в форме

$$\Phi = 1, \quad [\Phi] = \frac{1}{2}, \quad [{}_2 \Phi]_2 = \frac{1}{6}, \quad [\Phi^2] = \frac{1}{3},$$

$$[{}_3 \Phi]_3 = \frac{1}{24}, \quad [\Phi[\Phi]] = \frac{1}{8}, \quad [{}_2 \Phi^2]_2 = \frac{1}{12}, \quad [\Phi^3] = \frac{1}{4}$$

или в развернутом виде

$$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 1, \quad b_3 a_{32} c_2 + b_4 (a_{42} c_2 + a_{43} c_3) = \frac{1}{6},$$

$$b_4 a_{43} a_{32} c_2 = \frac{1}{24}, \quad b_3 a_{32} c_2^2 + b_4 (a_{42} c_2^2 + a_{43} c_3^2) = \frac{1}{12},$$

$$b_2 c_2 + b_3 c_3 + b_4 c_4 = \frac{1}{3}, \quad b_3 c_3 a_{32} c_2 + b_4 c_4 (a_{42} c_2 + a_{43} c_3) = \frac{1}{8},$$

где

$$c_2 = a_{21}, \quad c_3 = a_{31} + a_{32}.$$

Соотношения (5.24) можно рассматривать также как условия, при выполнении которых метод имеет заданный порядок r .

При решении системы уравнений (5.26) полезно помнить, что коэффициенты методов Рунге — Кутты удовлетворяют целому ряду соотношений (Lapidus, Seinfeld, 1971):

1. $c_j = \sum_{i=1}^s a_{ij}$, $i = 1, 2, \dots, s$; для явных методов $i \leq j$; для полуявных $a_{ij} = 0$, $i < j$; для неявных $a_{ij} \neq 0$.

2. Коэффициенты a_{ij} удовлетворяют уравнениям

$$\sum a_{ij} c_j^{k-1} = (1/k) c_i^k, \quad i, k = 1, 2, \dots, s.$$

3. Коэффициенты b_i удовлетворяют уравнениям

$$\sum b_i c_j^{k-1} = 1/k, \quad k = 1, 2, \dots, s.$$

4. При каждом $j = 1, 2, \dots, s$ для j -го столбца матрицы a_{ij} выполняются соотношения

$$\sum_i b_i c_i^{k-1} a_{ij} = (1/k) b_j (1 - c_j^k), \quad k = 1, 2, \dots, s.$$

5. Для каждой пары значений $k, l = 1, 2, \dots, s$ выполняется равенство

$$\sum b_i c_i^{k-1} a_{ij} c_j^{l-1} = 1/[l(k+l)].$$

6. Для каждого $k = 1, 2, \dots, s$ выполняется равенство

$$\sum b_i c_j^{k-1} = 1/k.$$

7. Коэффициенты c_j являются нулями полинома Лежандра s -й степени $P_s(2c - 1)$.

8. Кроме того, для неявных алгоритмов Рунге — Кутты справедливо следующее утверждение: для всех i , удовлетворяющих неравенству $r_i \leq 2s$, выполняется условие $\Phi_i = 1/\gamma_i$, обеспечивающее заданный порядок. И наоборот, для явных методов справедливо утверждение, что заданный порядок r может быть достигнут при $s = r$ только для $r = 1, 2, 3, 4$. Для $r \geq 5$ $s > r$, причем минимально возможное значение $s - r$ растет. Для определения верхней и нижней границы s_{\min} при заданном r могут служить формулы (Hairer, 1978) $s_{\min}(r) \leq \frac{r^2 - 7r + 14}{2}$. Пусть последовательность

$\{u_n\}$ задана формулами

$$u_0 = 5, \quad u_{n+1} = \frac{4u_n + 2n + 3}{3},$$

тогда для $r \geq u_n$

$$s_{\min}(r) \geq r + n + 1.$$

Суммируя все изложенное, можно сформулировать кратко алгоритм построения метода Рунге — Кутты порядка r :

1. Получение всех элементарных дифференциалов до порядка r включительно.

2. Запись разложений в ряд Тейлора точного и приближенного решения системы.

3. Вывод системы условных уравнений.

4. Анализ полученной системы и ее решение.

Для больших r первые три этапа алгоритма содержат значительное количество рутинных вычислений, однако достаточно просты и легко поддаются машинной реализации. Дж. Батчером (Butcher, 1963) были получены все элементарные дифференциалы до восьмого порядка включительно. Автором настоящей монографии и Ю.А.Федяевым (Бордовицына, Федяев, 1980) осуществлена постановка трех разделов алгоритма на ЭВМ и получены (Федяев, 1982) все элементарные дифференциалы до 10-го порядка включительно, а также системы условных уравнений для явных методов Рунге — Кутты 5-го, 6-го, 7-го, 8-го, 9-го и 10-го порядка, имеющих, соответственно, 6, 7, 9, 10, 11 и 17 этапов.

При построении явных методов Рунге — Кутты наибольшую сложность представляет четвертый раздел. Это связано, прежде всего, с отсутствием методов решения системы нелинейных алгебраических уравнений общего вида. Кроме того, не все уравнения в (5.26) линейно независимы. Это приводит к тому, что система уравнений (5.26) оказывается относительно искомым параметров недоопределенной. Введение дополнительных условий на свободные параметры определяет подход к решению задачи и дает большое разнообразие явных алгоритмов Рунге — Кутты. Наиболее интересные из этих алгоритмов мы рассмотрим в следующих разделах.

Для неявных методов, особенно при использовании гауссовых квадратурных формул, алгоритм построения метода, как мы увидим далее, весьма прост и может быть сведен к решению системы линейных алгебраических уравнений.

5.3. Алгоритмы Фельберга

Явные алгоритмы Рунге — Кутты, предложенные Э.Фельбергом (Fehlberg, 1969, 1972), построены по типу вложенных алгоритмов. Определение главного члена погрешности метода интегрирования на одном шаге осуществляется в этих алгоритмах по двум формулам Рунге — Кутты смежных порядков. Полученное значение главного члена ошибки метода на шаге используется затем для выбора шага интегрирования, который основывается на требовании одинаковой локальной точности вычислений на каждом шаге. Аналогичный же подход к выбору шага можно найти в работе А.К. Платонова, З.П. Власовой и В.А. Степанянца (1976).

Для решения дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

с начальным условием $y(x_0) = y_0$ запишем две формулы Рунге — Кутты смежных порядков:

$$y = y_0 + h \sum_{k=0}^s b_k g_k + O(h^{r+1}), \quad \bar{y} = y_0 + h \sum_{k=0}^{s+1} \bar{b}_k g_k + O(h^{r+2}), \quad (5.27)$$

где

$$g_0 = f(x_0, y_0), \quad g_k = f(x_0 + c_k h, y_0 + h \sum_{i=0}^{k-1} a_{ki} g_i),$$

$$k = 1, 2, \dots, s+l. \quad (5.28)$$

Для решения дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f(x, y)$$

с начальными условиями $y(x_0) = y_0$, $\dot{y}(x_0) = \dot{y}_0$ будем использовать три формулы:

$$y = y_0 + h \dot{y}_0 + h^2 \sum_{k=0}^s b_k g_k + O(h^{r+1}),$$

$$\dot{y} = \dot{y}_0 + h \sum_{k=0}^s \tilde{b}_k g_k + O(h^{r+1}),$$

$$\bar{y} = y_0 + h y_0 + h^2 \sum_{k=0}^{s+l} \bar{b}_k g_k + O(h^{r+2}), \quad (5.29)$$

причем

$$g_0 = f(x_0, y_0), \quad g_k = f(x_0 + c_k h, y_0 + \dot{y}_0 c_k h + h^2 \sum_{i=0}^{k-1} a_{ki} g_i),$$

$$k = 1, 2, \dots, s+l. \quad (5.30)$$

Здесь $y, \dot{y}_0, \bar{y}, g_0, g_k$, — n -мерные векторы.

Алгоритмы Фельберга построены таким образом, что первые s значений функции f в формулах для y и \bar{y} совпадают. Свободные параметры среди c_k выбираются из условия минимума главной ошибки метода на шаге. Разность $TE = \bar{y} - y$ определяет величину главного члена погрешности метода, имеющего порядок r , на одном шаге интегрирования. Контроль величины шага интегрирования с помощью TE может быть осуществлен следующим образом. Для всех интегрируемых уравнений на каждом шаге вычисляются величины

$$A_i = \frac{TE y_i}{TOL} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (5.31)$$

где $TOL = \epsilon_{ps} y_i$ — абсолютная точность вычислений, ϵ_{ps} — относительная точность, n — число интегрируемых уравнений. Затем проверяется условие

$$\frac{1}{2^{r+1}} \leq A_{\max} \leq 1,$$

где r — порядок метода.

Если $A_{\max} > 1$, новый шаг интегрирования уменьшается вдвое, $H = \frac{h}{2}$, а если $A_{\max} < \frac{1}{2^{r+1}}$, то $H = 2h$. Этот критерий смены шага предложен

Э.Фельбергом. Для определения шага интегрирования может быть использована также формула Холла (Bettis, 1973)

$$H = 0,9h \left(\frac{TOL}{TE_{\max}} \right)^{1/r}, \quad (5.32)$$

позволяющая непрерывно менять шаг интегрирования. TE_{\max} есть максимальная величина из всех TE_{y_i} ; 0,9 – константа, подобранная эмпирически, r – порядок метода.

Э. Фельберг опубликовал алгоритмы 5 (6)-го и 7 (8)-го порядков для решения уравнений первого порядка, получившие название алгоритмов Рунге – Кутты – Фельберга и полный набор алгоритмов от 4 (5)-го и до 8 (9)-го порядков для решения уравнений второго порядка без сведения их к уравнениям первого порядка. Эти алгоритмы названы Фельбергом алгоритмами Рунге – Кутты – Нистрема, так как первые алгоритмы, предназначенные для непосредственного интегрирования уравнений второго порядка, были даны А.Нистремом в 1925 г. Коэффициенты c_i, b_i, a_{ij} даны Э.Фельбергом в виде рациональных дробей. В Приложении 1 приведены коэффициенты метода Рунге – Кутты – Фельберга 7 (8)-го порядков, а в Приложении 2 – коэффициенты метода Рунге – Кутты – Нистрема 8 (9)-го порядков в виде десятичных дробей с шестнадцатью значащими цифрами.

Возможность производить оценку точности вычислений на каждом шаге с помощью главного члена ошибки метода является большим достоинством алгоритмов Фельберга. Однако, как отмечает Дж. Батчер (1979), само вычисление главного члена ошибки метода в алгоритмах Фельберга не для всех задач выполняется одинаково точно, поскольку практически та и другая составные части метода основаны на одной и той же квадратурной формуле.

Однако в ряде задач небесной механики алгоритмы Фельберга оказываются достаточно гибкими и дают хорошие результаты.

5.4. Неявные алгоритмы Батчера

Свойства процессоров Рунге – Кутты, изложенные в разделе 5.1, могут быть использованы для построения неявных методов Рунге – Кутты.

Алгоритм построения таких методов предложен Дж. Батчером (Butcher, 1964) и сводится к следующим трем стадиям.

Для построения s -этапного метода порядка

1. Находим корни полинома $P_s(2c-1)$, где $P_s(t)$ – полином Лежандра степени s .

2. Для каждого $i, i=1,2,\dots,s$, получаем $a_{ij} (j=1,2,\dots,s)$, решая систему линейных уравнений

$$\sum a_{ij} c_j^{k-1} = \frac{1}{k} c_i^k, \quad k=1,2,\dots,s. \quad (5.33)$$

3. Определяем $b_j (j=1,2,\dots,s)$ как решение следующей системы линейных уравнений:

$$\sum b_j c_j^{k-1} = 1/k. \quad (5.34)$$

В результате все коэффициенты, определяющие однозначно процесс Рунге –

Кутты, будут найдены, а функции g_i можно получить с помощью итерационной процедуры

$$g_i^n = f(y_0 + h \sum_{j=1}^{i-1} g_j^n + \sum_{j=1}^S a_{ij} g_j^{n-1}). \quad (5.35)$$

В качестве c_j могут быть использованы узлы квадратурной формулы Гаусса:

для формулы Гаусса – Радо

$c_1 = 0, c_2, c_3, \dots, c_s$ – корни полинома Лежандра;

для формулы Гаусса – Лобатто

$c_s = 1, c_1, c_2, \dots, c_{s-1}$ – корни полинома Лежандра;

для формулы Гаусса – Лежандра

$c_1 = 0, c_s = 1, c_2, c_3, \dots, c_{s-1}$ – корни полинома Лежандра.

В Приложении 3 приведены коэффициенты неявного метода Рунге – Кутты – Лобатто шестого порядка, а в Приложении 4 – коэффициенты неявного метода Рунге – Кутты – Радо седьмого порядка.

5.5. Алгоритмы Ярова-Ярового

Алгоритмы, разработанные М.С. Яровым-Яровым (1974), представляют собой своеобразное объединение метода тейлоровских разложений с алгоритмами Рунге – Кутты.

При аппроксимации решения алгоритмами Рунге – Кутты используется функция правой части уравнения, которая является первой производной от решения уравнения.

М.С. Яров-Яровой вводит в аппроксимирующую функцию метода Рунге – Кутты производные от решения более высоких порядков.

Алгоритм, использующий первые, вторые, третьи и четвертые производные от решения, имеет следующий вид:

$$k_1 = hf(y_0), \quad k_2 = \frac{h^2}{2} \dot{f}(y_0), \quad k_3 = \frac{h^3}{6} \ddot{f}(y_0),$$

$$l_1 = \frac{h^4}{24} g(y_0), \quad g = \ddot{f},$$

$$l_2 = \frac{h^4}{24} g(y_0 + \alpha_2 k_1 + \beta_2 k_2 + \gamma_2 k_3 + \delta_{21} l_1),$$

$$l_3 = \frac{h^4}{24} g(y_0 + \alpha_3 k_1 + \beta_3 k_2 + \gamma_3 k_3 + \delta_{31} l_1 + \delta_{32} l_2),$$

$$l_4 = \frac{h^4}{24} g(y_0 + \alpha_4 k_1 + \beta_4 k_2 + \gamma_4 k_3 + \delta_{41} l_1 + \delta_{42} l_2 + \delta_{43} l_3),$$

$$y = y_0 + k_1 + k_2 + k_3 + \sum_{i=1}^4 q_i l_i. \quad (5.36)$$

Коэффициенты $\alpha, \beta, \gamma, \delta, q$ даны в Приложении 5.

Формулы для вычисления функций $f, \dot{f}, \ddot{f}, \ddot{\dot{f}}$ должны быть заданы аналитически.

Исследование метода при решении задачи Хилла (Яров-Яровой, 1974) и в задаче численного интегрирования уравнений движения больших планет Солнечной системы (Долгачев, Доможилова, Рыбаков, 1979) показало, что метод обладает высокой точностью.

5.6. Другие алгоритмы Рунге — Кутты высоких порядков

Помимо алгоритмов Фельберга можно указать еще целый ряд алгоритмов Рунге — Кутты, полученных на основе теории Дж. Батчера. Семизэтапные алгоритмы шестого порядка были получены самим автором теории (Butcher, 1964 a), девятиэтапный метод седьмого порядка и двенадцатиэтапный метод восьмого порядка были построены Дж. Шенксом. Кроме работ самих авторов коэффициенты этих алгоритмов можно найти в обзоре Г.Бальмино (Balmينو, 1975). Е.Хейером (Hairer, 1978) и А.Кертисом (Curtis, 1975) были построены методы Рунге — Кутты десятого порядка. Коэффициенты семнадцатизэтапного метода Хейера приведены в Приложении 6.

Г Л А В А 6

НЕЯВНЫЕ ОДНОШАГОВЫЕ АЛГОРИТМЫ ЭВЕРХАРТА

6.1. Принципы построения

Совершенно иной способ построения неявных одношаговых алгоритмов типа Рунге — Кутты был предложен Э. Эверхартом (Everhart, 1974), который использовал для этой цели ряд по степеням независимой переменной, не являющийся рядом Тейлора.

Рассмотрим основные принципы построения алгоритмов Эверхарта на примере решения уравнений вида

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = f(t, y, \dot{y}). \quad (6.1)$$

Примем начальный момент t_1 шага интегрирования h равным нулю, $h = [0, T]$, начальное положение y_1 , скорость \dot{y}_1 и значение функции $f_1(t_1, y_1, \dot{y}_1)$ — известные величины.

Разложение функции f в ряд по степеням t в окрестности $t_1 = 0$ можно представить в виде

$$y = f = f_1 + A_1 t + A_2 t^2 + \dots + A_N t^N. \quad (6.2)$$

Интегрируя уравнения (6.2) по независимой переменной, получим

$$y = y_1 + f_1 t + A_1 t^2/2 + \dots + A_N t^{N+1}/(N+1), \quad (6.3)$$

$$y = y_1 + y_1 t + f_1 t^2/2 + A_1 t^3/2 \cdot 3 + \dots + A_N t^{N+2}/(N+1)(N+2). \quad (6.4)$$

Полином N -й степени, стоящий в правой части (6.2), не является отрезком

ряда Тейлора, поскольку коэффициенты A_i вычисляются не по известным формулам коэффициентов ряда Тейлора, а определяются из условий наилучшего приближения y, \dot{y} в момент времени T конечными разложениями (6.3) и (6.4). Эти условия будут введены позже.

Выразим коэффициенты A_i через разделенные разности. Для этого представим функцию f в виде

$$f = f_1 + \alpha_1 t + \alpha_2 t(t - t_2) + \alpha_3 t(t - t_2)(t - t_3) + \dots \quad (6.5)$$

В каждый момент времени t_i имеем

$$f_2 = f_1 + \alpha_1 t_2,$$

$$f_3 = f_1 + \alpha_1 t_3 + \alpha_2 t_3(t_3 - t_2),$$

$$\dots\dots\dots,$$

отсюда получим разделенные разности

$$\alpha_1 = (f_2 - f_1)/t_2,$$

$$\alpha_2 = ((f_3 - f_1)/t_3 - \alpha_1)/t_{32},$$

$$\alpha_3 = (((f_4 - f_1)/t_4 - \alpha_1)/t_{42} - \alpha_2)/t_{43},$$

$$\dots\dots\dots,$$

(6.6)

причем $t_{ij} = t_i - t_j$. Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях t , выразим коэффициенты A_i через α_j :

$$A_1 = \alpha_1 + (-t_2) \alpha_2 + (t_2 t_3) \alpha_3 + \dots = c_{11} \alpha_1 + c_{21} \alpha_2 + \dots,$$

$$A_2 = \alpha_2 + (-t_2 - t_3) \alpha_3 + \dots = c_{22} \alpha_2 + c_{32} \alpha_3 + \dots,$$

$$A_3 = \alpha_3 + \dots = c_{33} \alpha_3 + \dots,$$

$$\dots\dots\dots,$$

(6.7)

Для коэффициентов c_{ij} справедливы следующие рекуррентные соотношения:

$$c_{ij} = 1, \quad i = j,$$

$$c_{ij} = -t_i c_{i-1,1}, \quad i > 1,$$

$$c_{ij} = c_{i-1,j-1} - t_i c_{i-1,j}, \quad 1 < j < i.$$

(6.8)

Таким образом, нахождение решения уравнения (5.1) сводится, прежде всего, к нахождению узлов разбиения t_i шага h .

6.2. Узлы разбиения шага интегрирования

Проиллюстрируем процедуру нахождения узлов разбиения шага $h = [0, T]$ на примере алгоритма интегрирования пятого порядка ($N = 5$).

В начальный момент времени $t_1 = 0$, известны y_1, \dot{y}_1, f_1 . Значения y в моменты времени t_2, t_3, t_4 определяются формулами

$$y_2 = y_1 + \dot{y}_1 t_2 + f_1 t_2^2/2 + [A_1 t_2^3/2 \cdot 3 + A_2 t_2^4/3 \cdot 4 + A_3 t_2^5/4 \cdot 5],$$

$$y_3 = y_1 + \dot{y}_1 t_3 + f_1 t_3^2/2 + A_1 t_3^3/2 \cdot 3 + [A_2 t_3^4/3 \cdot 4 + A_3 t_3^5/4 \cdot 5],$$

$$y_4 = y_1 + \dot{y}_1 t_4 + f_1 t_4^2/2 + A_1 t_4^3/2 \cdot 3 + A_2 t_4^4/3 \cdot 4 + [A_3 t_4^5/4 \cdot 5]. \quad (6.9)$$

Эти три предсказующих уравнения служат для определения коэффициентов A_i ($i = 1, 2, 3, \dots$), а два исправляющих уравнения дают значения решения на конце шага h :

$$y(T) = y_1 + y_1 T + f_1 T^2/2 + A_1 T^3/2 \cdot 3 + A_2 T_4/3 \cdot 4 + A_3 T^5/4 \cdot 5,$$

$$\dot{y}(T) = \dot{y}_1 + f_1 T + A_1 T^2/2 + A_2 T^3/3 + A_3 T^4/4. \quad (6.10)$$

Эта схема является неявной, так как коэффициенты, стоящие в квадратных скобках (6.9), заранее неизвестны, поскольку являются функциями координат y_2, y_3, y_4 , стоящих слева.

Значения t_2, t_3, t_4 определяются из следующих условий. Будем искать такие значения t_2, t_3, t_4 , которые позволили бы, не добавляя членов в разложение (6.2), получать решения y и \dot{y} с точностью до седьмого порядка. Если такие значения t_2, t_3, t_4 будут найдены, то разности $\Delta y, \Delta \dot{y}$ решений пятого и седьмого порядков обратятся в нуль:

$$\Delta y = 0, \quad \Delta \dot{y} = 0. \quad (6.11)$$

Вводя безразмерные величины $h_i = \frac{t_i}{T}$, можно получить для определения соответствующих им коэффициентов c'_{ij} из условия (6.11) систему алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} c'_{41}/2 + c'_{42}/3 + c'_{43}/4 + 1/5 &= 0, \\ c'_{41}/3 + c'_{42}/4 + c'_{43}/5 + 1/6 &= 0, \\ c'_{41}/4 + c'_{42}/5 + c'_{43}/6 + 1/7 &= 0. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Решение этой системы

$$\begin{aligned} c'_{41} &= -4/35 = -h_2 h_3 h_4, \quad c'_{42} = 6/7 = h_2 h_3 + h_3 h_4 + h_2 h_4, \\ c'_{43} &= -12/7 = -h_2 - h_3 - h_4 \end{aligned} \quad (6.13)$$

показывает, что искомые значения величин h_2, h_3, h_4 являются корнями следующего полинома третьей степени:

$$h^3 + (-12/7)h^2 + (6/7)h - 4/35 = 0. \quad (6.14)$$

Полученные таким образом узлы разбиения шага h совпадают с узлами квадратурной формулы Гаусса — Радо, а величины h_2, h_3, h_4 совпадают с корнями полинома Лежандра $P_3(2h - 1) = 0$.

Отсюда следует, что при построении алгоритма можно пользоваться для отыскания h_i как уравнениями (6.12), (6.14), так и соответствующими таблицами математических функций, при этом могут быть использованы не только узлы квадратурных формул Гаусса — Радо, но и узлы квадратурных формул Гаусса — Лобато и Гаусса — Лежандра. Для безразмерных величин h_i удобно ввести вместо A_i величины $B_i = A_i T^i$ ($B_1 = A_1 T, B_2 = A_2 T^2, \dots$).

6.3. Типы алгоритмов Эверхарта

Эверхарт разработал алгоритмы для решения четырех типов дифференциальных уравнений:

- Тип I $\dot{y} = f(t, y),$
 Тип II (специальный) $\ddot{y} = f(t, y),$
 Тип III (общий) $\ddot{y} = f(t, y, \dot{y}),$
 Тип IV $\ddot{y} = f(t, y, \dot{y}, \ddot{y}, \ddot{\ddot{y}}).$

Алгоритм для решения уравнения общего вида $\ddot{y} = f(t, y, \dot{y})$ мы подробно рассмотрели в разделах 6.1, 6.2. Алгоритмы для решения уравнений вида $\ddot{y} = f(t, y)$ и $\dot{y} = f(t, y)$ являются простым следствием рассмотренного алгоритма, и мы на них останавливаться не будем.

При решении уравнений вида $\ddot{y} = f(t, y, \dot{y}, \ddot{y}, \ddot{\ddot{y}})$ для отыскания коэффициентов B_i служит совокупность предсказующих уравнений, записываемых для каждого подшага h_i в виде

$$y_i = y_1 + \dot{y}_1 h_i T + \ddot{y}_1 h_i^2 T^2 / 2 + \ddot{\ddot{y}}_1 h_i^3 T^3 / 6 + h_i^4 T^4 (f_1 / 4! + h_i (1! B_1 / 5! + h_i (2! B_2 / 6! + h_i (3! B_3 / 7! + h_i 4! B_4 / 3!)))),$$

$$\dot{y}_i = \dot{y}_1 + \ddot{y}_1 h_i T + \ddot{\ddot{y}}_1 h_i^2 T^2 / 2 + h_i^3 T^3 (f_1 / 3! + h_i (1! B_1 / 4! + h_i (2! B_2 / 5! + h_i (3! B_3 / 6! + h_i 4! B_4 / 7!)))),$$

$$\ddot{y}_i = \ddot{y}_1 + \ddot{\ddot{y}}_1 h_i T + h_i^2 T^2 (f_1 / 2 + h_i (B_1 / 6 + h_i (B_2 / 12 + h_i (B_3 / 20 + h_i B_4 / 30)))),$$

$$\ddot{\ddot{y}}_i = y_1 + h_i T (f_1 + h_i (B_1 / 2 + h_i (B_2 / 3 + h_i (B_3 / 4 + h_i B_4 / 5)))).$$

Решение y в точке T находится по формулам

$$y(T) = y_1 + \dot{y}_1 T + \ddot{y}_1 T^2 / 2 + \ddot{\ddot{y}}_1 T^3 / 6 + T^4 (f_1 / 4! + 1! B_1 / 5! + 2! B_2 / 6! + 3! B_3 / 7! + 4! B_4 / 8!),$$

$$\dot{y}(T) = \dot{y}_1 + \ddot{y}_1 T + \ddot{\ddot{y}}_1 T^2 / 2 + T^3 (f_1 / 3! + 1! B_1 / 4! + 2! B_2 / 5! + 3! B_3 / 6! + 4! B_4 / 7!),$$

$$\ddot{y}(T) = \ddot{y}_1 + \ddot{\ddot{y}}_1 T + T^2 (f_1 / 2 + B_1 / 6 + B_2 / 12 + B_3 / 20 + B_4 / 30),$$

$$\ddot{\ddot{y}}(T) = \ddot{\ddot{y}}_1 + T (f_1 + B_1 / 2 + B_2 / 3 + B_3 / 4 + B_4 / 5).$$

6.4. Контроль величины шага интегрирования

В алгоритмах Эверхарта контроль шага интегрирования осуществляется по величине последнего члена в разложении решения по степеням независимой переменной. Пусть для уравнений типа I последний член в разложении для y есть $A_4 T^6 / 30$ или $B_4 T^2 / 30$ и пусть L есть контрольный параметр, такой, что 10^{-L} есть требуемая точность вычислений. Введем величину H , определяемую соотношением

$$H = (\sum_{i=1}^n B_{4i})^{1/2} / 30 T^4,$$

где n — размерность вектора y . Новый шаг интегрирования $\bar{h} = [0, T]$ определяется формулой

$$\bar{h} = (10^{-L}/H)^{1/6}.$$

Для систем уравнений типа II и III величина последнего члена разложения для y соотносится предварительно с величиной функции f_1 , для чего H делится на сумму $(\sum_{i=1}^n f_{1i}^2)^{1/2}$. Величину L Э. Эверхарт рекомендует выбирать

в пределах от $1/3$ до $3/4$ порядка метода N . Так, например, если $N = 23$, величина L лежит в пределах между 8 и 18. Если же L слишком мало, шаг может оказаться очень большим и это ухудшит сходимость метода. Если же, наоборот, L слишком велико, интегрирование будет выполняться точно, но метод будет неэффективен по затратам машинного времени. Системы типа IV автор метода рекомендует интегрировать с постоянным шагом.

Разработанные алгоритмы до 31 порядка реализованы Э. Эверхартом на языке ФОРТРАН (Everhart, 1974). Программа Эверхарта адаптирована на ЭВМ БЭСМ-6 С.В. Тарасевичем в Институте теоретической астрономии АН СССР.

ГЛАВА 7

ЭКСТРАПОЛЯЦИОННЫЕ МЕТОДЫ

7.1. Вводные замечания

В последнее время в задачах небесной механики получают распространение экстраполяционные методы, преимущественно метод рациональной экстраполяции, разработанный К. Булиршем и Дж. Штером. Достоинство экстраполяционных методов интегрирования состоит, прежде всего, в том, что для достижения высокой точности не требуется многократного переычисления правых частей уравнений движения. Это особенно удобно, когда правые части уравнений сложны, как, например, при интегрировании уравнений движения ИСЗ.

Изложение экстраполяционных методов можно найти в обширной монографии Х. Штеттера (1978), в упоминавшейся уже книге "Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений" под редакцией Дж. Холла и Дж. Уатта (1979), а также в статьях Л. Ричардсона (Richardson, 1910) и Л. Ричардсона и Дж. Гаунта (Richardson, Gaunt, 1927), В. Грера (Gragg, 1965), Р. Булирша и Дж. Штера (Bulirsch, Stoer, 1964, 1966; Stoer, 1974). Поэтому мы ограничимся здесь лишь кратким изложением экстраполяционных алгоритмов.

7.2. Экстраполяционные схемы Невилла и Штера

Пусть $D(h)$ есть дискретная аппроксимация решения $D(0)$, определенная для шага $h \in H = [0, T]$, причем h достаточно мало. В том случае, если $D(h)$ имеет асимптотическое разложение

$$D(h) = l_0 + l_1 h^2 + l_2 h^4 + \dots, \quad (7.1)$$

Л. Ричардсон предложил получать улучшенную аппроксимацию из двух или более значений $D(h)$, определенных в $h_0 > h_1 > \dots > h_n$, требуя, чтобы линейная комбинация $D(h_m)$

$$P_0^n = \sum_{m=0}^n C_m^{(n)} D(h_m) \quad (7.2)$$

удовлетворяла условию

$$P_0^n = D(0) + O(T^{2n+2}), \quad (7.3)$$

в то время как $h_0 \rightarrow 0$.

Такую процедуру построения улучшенной аппроксимации принято называть локальной экстраполяцией, поскольку она используется на каждом шаге интегрирования. Существенно, что константы $C_m^{(n)}$ вычислять не нужно. При экстраполяции полиномами P_0^n может быть найдено непосредственно по рекуррентному алгоритму Невилла, а при экстраполяции рациональными функциями для этой цели может быть использован алгоритм Штера.

Пусть $P_n^m(h^2)$ есть полином степени m относительно h^2 , который интерполирует $D(h)$ в точках $h = h_k, k = n, \dots, n+m$. Тогда P_n^m может быть найдено с помощью следующей линейной рекуррентной схемы:

$$P_n^0 = D(h_0), \quad P_n^m = P_{n+1}^{m-1} + \frac{P_{n+1}^{m-1} - P_n^{m-1}}{(h_n/h_{n+m})^2 - 1} \quad (7.4)$$

с диаграммой

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & P_0^0 \\ & & & & & & P_0^1 \\ P_1^0 & & & & & & P_0^2 \\ & & & & & & P_1^1 \\ & & & & & & P_0^3 \\ P_2^0 & & & & & & P_1^2 \\ & & & & & & P_2^1 \\ & & & & & & \dots \\ P_3^0 & & & & & & \dots \end{array} \quad (7.5)$$

Как показано Ф. Бауэром, Х. Рутishaузером и Е. Штифелем (Bauer, Rutishauser, Stiefel, 1963), эта последовательность преобразований сходится в P_0^n . Основную вычислительную трудность составляет определение первого столбца диаграммы P_n^0 .

Пусть, далее, $r_n^m = r_n^{(\mu\nu)}(h^2)$ есть рациональная функция, числитель которой есть полином степени μ , а знаменатель — полином степени ν , $m = \mu + \nu$. Функция r_n^m интерполирует $D(h)$ в точках $h = h_k, k = n, n+1, \dots, n+m$. Алгоритм Штера для последовательности $(\mu\nu) = (0,0), (0,1), (1,1), (1,2), \dots$ дает следующую рекурсивную схему построения функций r_n^m :

$$r_n^{-1} = 0, \quad r_n^0 = D(h_n),$$

$$r_n^m = r_{n+1}^{m-1} + \frac{r_{n+1}^{m-1} - r_n^{m-1}}{\left(\frac{h_n}{h_{n+m}}\right)^2 \left[1 - \frac{r_{n+1}^{m-1} - r_n^{m-2}}{r_{n+1}^{m-1} - r_{n+1}^{m-2}}\right] - 1} \quad (7.6)$$

с диаграммой

$$\begin{array}{ccc}
 & r_n^{m-2} & \\
 & \swarrow & \\
 r_{n+1}^{m-2} & \longrightarrow & r_n^m \\
 & \searrow & \\
 & r_{n+1}^{m-1} & \\
 r_{n+2}^{m-2} & &
 \end{array}
 \quad (7.7)$$

Исследование сходимости последовательности функций r_n^m выполнено В. Греггом (Gragg, 1965).

7.3. Метод Булирша и Штера

Для того чтобы применить локальную экстраполяцию к решению дифференциального уравнения

$$\dot{y} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0.$$

необходимо выбрать в качестве основы интегрирования численный метод, для которого существует асимптотическое разложение вида (7.1). В методе рациональной экстраполяции Булирша и Штера для этой цели используется модифицированный метод прямоугольников:

$$\eta_0 = y_0, \quad \eta_1 = \eta_0 + \frac{h_k}{2} f(t_0, \eta_0).$$

Для $i = 1, 2, \dots, 2n-1$

$$\eta_{i+1} = \eta_{i-1} + h_k f(t, \eta_i),$$

$$\eta(h, t) = \frac{1}{2} [\eta(t_{2n} h_k) + \eta(t_{2n-1} h_k) + h f(t, \eta_{2n})], \quad (7.8)$$

где $h_k = \frac{H}{n_k}$, а $H = t - t_0$ — основной шаг интегрирования, n_k — натуральное

число, $t_i = t_0 + i \frac{h_k}{2}$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Тогда дискретная аппроксимация решения $D(h_k, t)$ определится следующим образом:

$$D(h_k, t) = \eta\left(\frac{h_k}{2}, t\right). \quad (7.9)$$

Авторы метода рекомендуют выбирать в качестве h_k следующую последовательность чисел:

$$F = \left\{ H, \frac{H}{2}, \frac{H}{3}, \frac{H}{4}, \frac{H}{6}, \frac{H}{8}, \frac{H}{12}, \dots \right\}. \quad (7.10)$$

7.4. Выбор шага интегрирования

Экстраполяционные методы позволяют варьировать одновременно порядок метода, длину основного шага интегрирования и количество этапов вычислений на каждом шаге. Одинаковой точности вычислений можно добиться лишь увеличивая порядок метода, либо увеличивая число этапов вычислений на шаге, либо уменьшая длину шага интегрирования. Однако при практическом использовании метода следует учитывать, что влияние ошибки округления растет с увеличением порядка экстраполяции. Поэтому во всех реализованных на ЭВМ версиях алгоритма, начиная с первой программы Булирша и Штера (1966), порядок метода не превосходит шести. Авторами алгоритма предложено два способа выбора шага интегрирования (Bulirsch, Stoer; 1966, Stoer, 1974).

Первый способ, довольно грубый, но весьма простой и удобный для практической реализации, состоит в следующем.

Пусть необходимая точность вычислений достигается при порядке экстраполяции $m < 6$, т.е. при $m < 6$ и $1 \leq k \leq m$, выполняется неравенство

$$(1/s) |r_k^{m-k} - r_k^{m-k-1}| < \epsilon, \quad (7.11)$$

где ϵ — заданная точность вычислений, $s = \max_{t \in [0, T]} |y(t)|$, тогда длина основ-

ного шага интегрирования H увеличивается и новый шаг \tilde{H} вычисляется по формуле

$$\tilde{H} = 1,5 H. \quad (7.12)$$

Если, напротив, требуемая точность не достигается после девяти этапов, т.е.

$$(1/s) |r_4^6 - r_3^6| > \epsilon, \quad (7.13)$$

то шаг уменьшается и длина его определяется по формуле

$$\tilde{H} = 0,9 (0,6)^{m-6} H. \quad (7.14)$$

Во втором способе выбора шага максимальный порядок экстраполяции не задается, а вычисляется по формуле

$$l = l(\epsilon) \approx [(m + 2,5)/2], \quad (7.15)$$

если $\epsilon = 10^{-m}$, где символ $[\quad]$ — означает целую часть числа, m — требуемое число значащих цифр. Новый шаг \tilde{H} определяется формулой

$$H = \frac{\tilde{H}}{u}. \quad (7.16)$$

Корректирующий множитель u задается группой соотношений

$$u \approx \begin{cases} \frac{1}{\alpha} \frac{2^{j+1}}{\sqrt{\left| \frac{r_j^{j-1} - r_{j-1}^{j-1}}{s} \right|}} \varphi_{j-1, j-1}, & \text{если } j \leq l, \\ \frac{1}{\alpha} \frac{2^{l+3}}{\sqrt{\left| \frac{r_j^l - r_{j-1}^l}{s} \right|}} \varphi_{j-l, l} & \text{если } j > l, \end{cases} \quad (7.17)$$

где

$$\varphi_{jl} = (n_j n_{j-1} \dots n_{j-l})^2, \quad \alpha = \sqrt[2l+3]{\epsilon \varphi_{ll}},$$

$$\varphi_{ll} = n_0^2 \cdot n_1^2 \dots n_l^2, \quad n_j = H/h_j.$$

Далее, проверяется условие, является ли последний член r_j^m , $m = \min(jl)$, достаточно точным, т.е. имеет ли место соотношение

$$\left| \frac{r_j^l - r_{j-1}^{l-1}}{s} \right| \cdot 1/(n_j^2 - 2) \leq \epsilon, \quad \text{если } j \leq l,$$

$$\text{или} \quad \left| \frac{r_{j-1}^l - r_{j-1-1}^{l-1}}{s} \right| \frac{n_{j-1-1}^2}{n_j^2} \leq \epsilon, \quad \text{если } j > l. \quad (7.18)$$

Если элемент r_j^m достаточно точен, решение полагается равным r_j^m , $y = r_j^m$ и новый шаг интегрирования выбирается равным $\tilde{H} = \frac{H}{u}$. Если же элемент r_j^m не является достаточно точным и в то же время $u \leq 1$, то индекс полагается равным $j+1$ и происходит расширение таблицы r_j^m . Если $u > 0$, вычисляется новый индекс $i_0(u)$, которым следует ограничить вычисление начального столбца таблицы r_j^m :

$$i_0(u) = \begin{cases} l+1, & \text{если } 1 \leq u \leq 1,063 \\ l+2 + [3,14 \cdot \ln u - 1,19], & \text{если } u \geq 1,063. \end{cases} \quad (7.19)$$

Если при этом количество перевычислений функций f удовлетворяет соотношению

$$A_j + u A_l < A_{i_0(u)}, \quad (7.20)$$

то шаг уменьшается: $\tilde{H} = \frac{H}{u}$. В противном случае индекс j полагается равным $j+1$ и происходит простое расширение таблицы r_j^m .

ГЛАВА 8

МНОГОШАГОВЫЕ МЕТОДЫ

8.1. Принципы построения

Линейные многошаговые методы являются традиционным математическим аппаратом численного решения уравнений движения небесных тел. Достаточно сказать, что первые методы такого типа были разработаны Адамсом и Коуэллом для задач небесной механики. Изложения многошаговых методов можно найти практически во всех учебниках, касающихся численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений (см., например, Бахвалов 1973), а также в некоторых учебниках и статьях по небесной механике (Субботин, 1937; Чеботарев, 1965; Куликов, 1960;

Oesterwinter, Cohen, 1969). Поэтому мы остановимся здесь лишь на основных принципах построения разностных формул, приведем те из них, которые нашли наибольшее распространение, и перейдем к изложению новых способов построения разностных алгоритмов, появившихся в последнее время и связанных с использованием преобразований регуляризирующих и стабилизирующих уравнений движения.

В предыдущих главах мы рассматривали одношаговые методы, в которых для получения значения y в $(n+1)$ -й точке требуется знать значение y в n -й точке. Все же остальные значения для вычисления y_{n+1} не используются. В многошаговых методах, наоборот, для вычисления y_{n+1} используются некоторые предварительно определенные значения $y_n, y_{n-1}, y_{n-2}, \dots$.

Проинтегрируем уравнение

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad (8.1)$$

в пределах от t до $t+h$ и получим тождество

$$y(t+h) - y(t) = \int_t^{t+h} f(\tau, y(\tau)) d\tau. \quad (8.2)$$

Заменим теперь $f(\tau, y(\tau))$ каким-либо интерполяционным полиномом $P(\tau)$, принимающим значения $f(t_n, y_n)$ на множестве точек t_n , для которых y_n уже известны. Выбор в качестве полинома $P(\tau)$ интерполяционной формулы Ньютона с разностями назад определит группу методов Адамса.

При $t = t_n$ мы получаем формулу метода Адамса—Башфорта в виде

$$y_{n+1} - y_n = h \sum_{r=0}^k \gamma_r \Delta^r f_n \quad (8.3)$$

или в форме Лагранжа

$$y_{n+1} - y_n = h \sum_{r=0}^k a_r f_{n-r}, \quad (8.4)$$

а, полагая $t = t_{n-1}$, будем иметь формулу метода Адамса—Мультона в виде

$$y_n - y_{n-1} = h \sum_{r=0}^k \gamma_r^* \Delta^r f_n \quad (8.5)$$

или в форме Лагранжа

$$y_n - y_{n-1} = h \sum_{r=0}^k a_r^* f_{n-r}. \quad (8.6)$$

Общую формулу многошаговых методов можно принять следующей:

$$\sum_{j=0}^k \beta_j y_{n+j} = h \sum_{j=0}^k \alpha_j f_{n+j}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (8.7)$$

где α_j и β_j — постоянные,

$$|\alpha_0| + |\beta_0| \neq 0.$$

Если $\alpha_k = 0$, многошаговый метод называется явным. Если же $\alpha_k \neq 0$, правая часть формулы (8.7) содержит $f(t_{n+k}, y_{n+k})$ и формула представляет собой нелинейное уравнение относительно y_{n+k} . В этом случае метод называется неявным многошаговым. Для одних и тех же k неявный метод является более точным, чем явный, поскольку обладает более высокой устойчивостью к малым возмущениям y_n . Поэтому на практике, в том числе и в задачах небесной механики, используются, как правило, неявные разностные формулы. Нелинейное уравнение (8.7), которое в этом случае удобно переписать в виде

$$y_{n+k} = \frac{h\alpha_k}{\beta_k} f(t_{n+k}, y_{n+k}) + g_n, \quad \alpha_k \neq 0, \quad (8.8)$$

решается с помощью процесса последовательных приближений

$$y_{n+k}^{m+1} = \frac{h\alpha_k}{\beta_k} f(t_{n+k}, y_{n+k}^m) + g_n, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (8.9)$$

Здесь g_n содержит известные величины $y_{n+j}, f_{n+j}, j = 0, 1, \dots, k-1$. Существование и единственность решения y_{n+k} уравнения (8.8) для известных многошаговых методов доказана П. Хенричи (Henrici, 1962). Начальное приближение y_{n+k}^0 определяется обычно с помощью явной многошаговой формулы. В этом случае явный метод называется предсказующим, неявный метод — исправляющим, а весь процесс отыскания решения y_{n+k} называется методом предсказания и коррекции. Возможны два способа организации предсказующе-исправляющего метода. В первом способе итерации проводятся до тех пор, пока сходимость не будет достигнута. При этом можно либо фиксировать шаг, оставляя число итераций произвольным, либо фиксировать число итераций, оставляя произвольной величину шага. Такой метод принято называть исправляемым до сходимости.

Во втором способе число применений исправляющей формулы фиксировано. Различные схемы вычислений, которые в этом случае могут быть использованы, удобно записать в обозначениях Холла и Кримера.

Пусть P означает применение предсказующей формулы, C — однократное применение исправляющей формулы, E — вычисление функции f , тогда возможные схемы построения метода предсказания и коррекции при фиксированном числе итераций будут иметь вид

$$PECE, PEC, P(EC)'E, P(EC)'E,$$

где t — число исправлений.

Коэффициенты основных разностных формул до 12-го порядка можно найти в книге Е. Штифеля и Г. Шейфеля (1975). Мы же перейдем к описанию многошаговых алгоритмов, получивших наибольшее распространение в задачах небесной механики.

8.2. Алгоритмы Адамса—Мультона—Коуэлла

Наиболее часто употребляемыми в задачах прогнозирования движения небесных тел являются алгоритмы Адамса—Мультона—Коуэлла. Метод Адамса—Мультона, определенный формулой (8.6), предназначен для решения уравнений первого порядка. Его коэффициенты a_i определяются из

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i = -\frac{t}{\lg(1-t)}, \quad t \leq 1. \quad (8.10)$$

Метод Коуэлла используется для решения уравнений второго порядка без сведения их к уравнениям первого порядка и определен формулой

$$y_{n+1} = 2y_n - y_{n-1} + h^2 \sum_{j=0}^n c_j f_j; \quad (8.11)$$

коэффициент c_j находится из соотношения

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i t^i = \frac{t^2}{[\lg(1-t)]^2}, \quad t \leq 1. \quad (8.12)$$

Коэффициенты методов Адамса—Мультона и Коуэлла до 16-го порядка включительно были определены Ш. Когеном и Е. Хаббардом и изложены К. Естервинтером и Ш. Когеном (Oesterwinter, Cohen, 1969). Мы дали их в Приложении 7.

Для применения формул (8.6), (8.11) на каждом k -м шаге интегрирования необходимо иметь так называемую таблицу интегрирования, которая для метода Адамса—Мультона состоит из величин

$$y_{n-1}, f_n, f_{n-1}, f_{n-2}, \dots, f_{n-k}, \quad (8.13)$$

а для метода Коуэлла имеет вид

$$y_{n-1}, y_{n-2}, f_n, f_{n-1}, f_{n-2}, \dots, f_{n-k}, \quad (8.14)$$

где k — порядок аппроксимирующей формулы.

Вычисление таблиц функций (8.13) и (8.14) в начале интегрирования производится, как правило, с помощью какого-либо одношагового метода, однако существуют и самостартующие многошаговые алгоритмы. Формулы самостартующего метода Коуэлла были впервые развиты Д.К. Куликовым (1960). Мы рассмотрим здесь самостартующий метод Адамса—Мультона—Коуэлла, предложенный Ш. Коген и Е. Хаббардом (Oesterwinter, Cohen, 1969) и нашедший широкое применение в исследовании движения планет и спутниковой геодезии.

Перейдем к описанию алгоритма на первом его этапе. Используя коэффициенты методов Адамса и Коуэлла (Приложение 7), вычисляют группу вспомогательных коэффициентов по формулам

$$\gamma_j' = \sum_{i=0}^{\inf\{j+1, b\}} (-1)^i \binom{b}{i} (a_{j+1-i} - c_{j+1-i}), \quad j = 0, 1, 2, \dots, a+b,$$

$$\gamma_j = (-1)^j \sum_{i=j}^{a+b} \binom{a+b}{i} \gamma_i', \quad i = 0, 1, 2, \dots, a+b,$$

$$b_j = (-1)^j \binom{a+b+1}{j+1}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, a+b,$$

$$a_j^* = (-1)^j \sum_{i=j}^c \binom{c}{i} c_i, \quad j = 0, 1, 2, \dots, c,$$

$$b_j^* = (-1)^j \sum_{i=j}^c \binom{i}{j} a_i, \quad j = 0, 1, 2, \dots, c,$$

$$c_i' = \sum_{j=0}^i c_j, \quad i = 0, 1, 2, \dots, m,$$

$$\alpha_j' = (-1)^j \sum_{i=j}^m \binom{i}{j} c_i', \quad j = 0, 1, 2, \dots, m,$$

$$a_i' = \sum_{j=0}^i a_j, \quad i = 0, 1, 2, \dots, m,$$

$$\beta_j' = (-1)^j \sum_{i=j}^m \binom{i}{j} a_i', \quad j = 0, 1, 2, \dots, m,$$

$$\alpha_j = (-1)^j \sum_{i=j}^m \binom{i}{j} c_i, \quad j = 0, 1, 2, \dots, m,$$

$$\beta_j = (-1)^j \sum_{i=j}^m \binom{i}{j} a_i, \quad j = 0, 1, 2, \dots, m.$$

Здесь $\binom{i}{j}$ — биномиальные коэффициенты, c и m — порядки начальной и основной аппроксимирующей формул, параметры a и b связаны с аппроксимирующей формулой, предназначенной для вычисления,

$$y_{-1} = y_0 - h\dot{y}_0 + h^2 \sum_{i=0}^{b+a} \gamma_i f_{b-i} \quad (8.18)$$

Неизвестные ускорения, входящие в формулу (8.18) полагаются равными его начальному значению в интервале от a до b . Числа a и b не могут превосходить c . Вне интервала (a, b) неизвестные ускорения вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} f_{-n} &= \sum_{j=0}^{a+b} b_j f_{-n+1+j}, \quad n = a+1, a+2, \dots, c, \\ f_n &= \sum_{j=0}^{a+b} b_j f_{n-1-j}, \quad n = b+1, b+2, \dots, c. \end{aligned} \quad (8.19)$$

Положения и скорости в интервале от a до b вычисляются по формулам

$$y_n = 2y_{n-1} - y_{n-2} + h^2 \sum_{j=0}^c \alpha_j^* f_{n-j}, \quad n = 1, 2, \dots, b, \quad (8.20)$$

$$y_{n-1} = 2y_{n+1} - y_{n+2} + h^2 \sum_{j=0}^c \alpha_j^* f_{-n+j}, \quad n = 1, 2, \dots, a,$$

$$\dot{y}_n = \dot{y}_{n-1} + h \sum_{j=0}^c \beta_j^* f_{n-j}, \quad n = 1, 2, \dots, b,$$

$$\dot{y}_{n-1} = \dot{y}_{n+1} - h \sum_{j=0}^c \beta_j^* f_{n+j}, \quad n = 1, 2, \dots, a. \quad (8.21)$$

Совокупность формул (8.18) и (8.20), (8.21) позволяет вычислить начальную таблицу интегрирования. Обычно это делается путем последовательных приближений. Авторы метода считают, что, как правило, достаточно четырех итераций.

Далее, для вычисления y_n и \dot{y}_n используются формулы предсказания

$$y_n = 2y_{n-1} - y_{n-2} + h^2 \sum_{j=0}^m \alpha'_j f_{n-1+j},$$

$$\dot{y}_n = \dot{y}_{n-1} + h \sum_{j=0}^m \beta'_j f_{n-1+j} \quad (8.22)$$

и коррекции

$$y_n = 2y_{n-1} - y_{n-2} + h^2 \sum_{j=0}^m \alpha_j f_{n-j},$$

$$\dot{y}_n = \dot{y}_{n-1} + h \sum_{j=0}^m \beta_j f_{n-j}. \quad (8.23)$$

Порядки m и s могут выбираться различными. Так, например, для планетной задачи авторы метода выбрали после ряда испытаний следующие значения порядков аппроксимирующих формул:

$$c = 14, \quad a = b = 7, \quad m = 12.$$

8.3. Многошаговый метод с неравноотстоящими узлами

Приведенные в предыдущем параграфе разностные формулы получены для таблиц функций с равноотстоящими узлами. Использование этих формул затрудняет организацию процесса интегрирования при работе с переменным шагом, при необходимости выхода на заданные значения независимой переменной и т.п., поэтому в последнее время все большее распространение начали получать методы, построенные по таблицам с неравноотстоящими узлами.

Примером многошагового метода с неравноотстоящими узлами может служить метод четвертого порядка, полученный А.К. Платоновым, З.П. Власовой, В.А. Степанянцем (1976). Предположим, что в четырех точках

$$t_0, t_1, t_2, t_3 \text{ известны значения функции } y_i \text{ и ее производной } \frac{dy_i}{dt} = f(t_i, y_i).$$

необходимо определить значение функции y в точке t , остоящей от t_3 на величину $h, t = t_3 + h$. Аппроксимируя значение функции f в точке t полиномом Лагранжа

$$\sum_{i=0}^3 f(t_i) \prod_{j \neq i} \frac{t - t_j}{t_i - t_j}$$

и вводя обозначения

$$x_0 = t_0 - t_3, \quad x_2 = t_2 - t_3, \quad x_1 = t_1 - t_3, \quad x_3 = 0, \quad (8.24)$$

получим следующую формулу для предсказания y в точке t :

$$y(h) = y(0) + \Delta y,$$

$$\Delta y = a_0 f(t_0) + a_1 f(t_1) + a_2 f(t_2) + a_3 f(t_3), \quad (8.25)$$

причем коэффициенты a_i определяются соотношениями

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{h^2}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)x_0} \left(\frac{x_1 x_2}{2} - \frac{x_1 + x_2}{3} h + \frac{h^2}{4} \right), \\ a_1 &= \frac{h^2}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)x_1} \left(\frac{x_0 x_2}{2} - \frac{x_0 + x_2}{3} h + \frac{h^2}{4} \right), \\ a_2 &= \frac{h^2}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)x_2} \left(\frac{x_0 x_1}{2} - \frac{x_0 + x_1}{3} h + \frac{h^2}{4} \right), \\ a_3 &= h - \frac{h^2}{x_0 x_1 x_2} \left[\frac{x_0 x_1 + (x_0 + x_1)x_2}{2} - \frac{x_0 + x_1 + x_2}{3} h + \frac{h^2}{4} \right]. \end{aligned} \quad (8.26)$$

Формулу для исправления y в точке t можно записать в виде

$$y(h) = y_0 + \Delta \tilde{y},$$

$$\Delta \tilde{y} = \tilde{a}_0 f(t_1) + \tilde{a}_1 f(t_2) + \tilde{a}_2 f(t_3) + \tilde{a}_3 f(t_4),$$

причем формулы для вычисления \tilde{a}_i получаются из (8.26) заменой x_i на \tilde{x}_i , где \tilde{x}_i определяются соотношениями

$$\tilde{x}_0 = t_0 - t, \quad \tilde{x}_2 = t_3 - t,$$

$$\tilde{x}_1 = t_2 - t, \quad \tilde{x}_3 = 0,$$

и изменением знака при четных степенях h на обратный.

Очевидно, что изложенный принцип построения метода можно распространить и на методы более высоких порядков. Например, вводя симметрические многочлены от t_1, \dots, t_n ,

$$S_1 = t_1 + t_2 + \dots + t_n,$$

$$S_2 = t_1 t_2 + t_1 t_3 + \dots,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$S_n = t_1 t_2 \dots t_n,$$

$$(8.27)$$

можно записать интерполяционный полином Лагранжа в виде

$$\begin{aligned} L_n(t) &= \sum_{i=1}^n f(t_i) \prod_{j \neq i} \frac{t - t_j}{t_i - t_j} = \\ &= f(t_1) \frac{(t - t_2)(t - t_3) \dots (t - t_n)}{(t_1 - t_2)(t_1 - t_3) \dots (t_1 - t_n)} + \\ &+ \dots \dots \dots + \\ &+ f(t_n) \frac{(t - t_1)(t - t_2) \dots (t - t_{n-1})}{(t_n - t_1)(t_n - t_2) \dots (t_n - t_{n-1})} = \end{aligned}$$

$$= f(t_1) \frac{t^{n-1} - S_1^{(1)} t^{n-2} + S_2^1 t^{n-3} + \dots + (-1)^{n-1} S_{n-1}^{(n)}}{(t_1 - t_2)(t_1 - t_3) \dots (t_1 - t_n)} +$$

$$+ \dots +$$

$$+ f(t_n) \frac{t^n - S_1^{(n)} t^{n-2} + S_2^{(n)} t^{n-3} + \dots + (-1)^{n-1} S_{n-1}^{(n)}}{(t_n - t_1)(t_n - t_2) \dots (t_n - t_{n-1})}.$$

Тогда коэффициенты a_i предсказующей формулы Адамса с неравноотстоящими узлами будут иметь вид

$$a_i = \frac{1}{S_{ti}} \left(\frac{h^n}{n} - \frac{S_i^1}{n-1} h^{n-1} + \dots + (-1)^{n-1} S_{n-1}^i h \right), \quad (8.29)$$

где

$$S_{ti} = \prod_{j \neq i} (t_i - t_j).$$

Аналогичным образом могут быть получены коэффициенты исправляющей формулы Адамса. Существенно, что в алгоритмах типа $P^k EC^k E$ вычисление коэффициентов a_i и \tilde{a}_i производится один раз, и не загромождает алгоритма.

8.4. Орбитально устойчивые многошаговые методы

Вернемся к формуле (8.7)

$$\sum_{j=0}^k \beta_j y_{n+j} = h \sum_{j=0}^k \alpha_j f_{n+j}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Дж. Ламберт и И. Ватсон (Lambert, Watson, 1976) для многошаговых методов решения уравнений второго порядка, а затем П. Мор (Moore, 1978) для методов решения уравнений первого порядка показали, что свойства устойчивости методов зависят от свойств симметрии коэффициентов в формуле (8.7).

Оказалось, что методы, для которых

$$\beta_s = -\beta_{k-s}, \quad \alpha_s = \beta_{k-s}, \quad s = 0, 1, \dots, k,$$

обладают так называемой орбитальной устойчивостью. Понятие орбитальной устойчивости было введено П. Мором (Moore, 1978) и состоит в следующем.

Метод называется орбитально устойчивым, если ошибка не выводит решение из орбитальной плоскости. Примером такого метода является метод Хенричи (Henrici, 1962) шестого порядка, для которого

$$\beta_4 = -\beta_0 = 1, \quad \beta_3 = -\beta_1 = -2 \cos \Phi, \quad \beta_2 = 0,$$

$$\alpha_4 = \alpha_0 = \frac{1}{45}(15 - 2\lambda), \quad \alpha_3 = \beta_1 = \frac{1}{45}(30 + 68\lambda), \quad \alpha_2 = \frac{1}{15}(76\lambda - 30),$$

причем

$$\lambda = \sin^2(\Phi/2).$$

Значение $\cos(\Phi/2)$ можно варьировать.

Сравнение этого метода с методом Адамса—Мультонa шестого порядка было выполнено П. Мором на примере интегрирования уравнений движения точки в сопротивляющейся среде. Сравнение показало, что метод Хенричи действительно значительно медленнее накапливает ошибку в радиусе-векторе точки, нежели метод Адамса—Мультонa.

8.5. Выбор шага интегрирования. Оценка погрешности алгоритма

Выбор шага интегрирования, как мы уже говорили ранее (см. формулу (5.3)), тесно связан с получением оценки погрешности алгоритма на шаге. Для многошаговых методов существуют различные способы получения таких оценок. Например, для методов с равноотстоящими узлами известна формула Милна (см. книгу "Современные численные методы...") оценки погрешности алгоритмов $P^k EC^k E$. Величина погрешности определяется разностью двух исправляющих формул в алгоритмах $P^k EC^{k+1} E$, $P^k EC^k E$

$$F = h\gamma_k \nabla^k f(t_{n+1}). \quad (8.30)$$

Для изложенного в разделе 8.3 метода с неравноотстоящими узлами авторы метода дают формулу оценки главного члена погрешности метода на шаге

$$F = \frac{\Delta y - \Delta \tilde{y}}{A - B} A. \quad (8.31)$$

Коэффициенты A и B связаны с узлами разбиения интервала интегрирования и для метода четвертого порядка равны

$$A = -\frac{1}{20} + \frac{x_1 + x_2}{12h} - \frac{x_1 x_2}{6h^2},$$

$$B = \frac{1}{5} - \frac{x_0 + x_1 + x_2}{4h} + \frac{(x_0 + x_1)x_2 + x_0 x_4}{3h^2} - \frac{x_0 x_1 x_2}{2h^3}.$$

После того как вычислено F , можно применить уже описанную в разделе 8.4 процедуру выбора шага h , требуя, чтобы локальная точность вычислений была постоянной. Это требование приведет нас к контрольному соотношению

$$\kappa^{p+1} < \left| \frac{F}{\epsilon} \right| < 1,$$

где p — порядок метода, ϵ — требуемая абсолютная точность вычислений на шаге, а величина κ подбирается эмпирически и зависит от рассматриваемого класса задач.

Для алгоритмов с равноотстоящими узлами изменение шага интегрирования приводит к необходимости перевычисления начальной таблицы интегрирования. Обычно это делается с помощью интерполяционного полинома $P_{kn}(x)$, построенного по точкам $f_n, f_{n-1}, \dots, f_{n-k+1}$. Новые значения начальной таблицы интегрирования $F_n, F_{n-1}, \dots, F_{n-k+1}$ в точках

$$t_n, t_n - \tilde{h}, t_n - 2\tilde{h}, \dots, t_n - (k+1)\tilde{h} \text{ вычисляются по формуле} \\ F_{n-i} = P_{kn}(t_n - i\tilde{h}). \quad (8.32)$$

Для метода Коуэлла 8–10-го порядков такие формулы даны Д.Е. Куликовым (1960), для методов Адамса полином P_{kn} , записанный через разделенные разности $f_n, n-1, \dots, n-i$, имеет вид ("Современные численные методы...")

$$P_{kn}(t) = f_n + (t - t_n)f_{n,n-1} + \dots + \\ + (t - t_n) \dots (t - t_{n-k+2})f_{n,n-1, \dots, n-k+1}, \quad (8.33)$$

где $f_{n,n-1, \dots, n-i} = \frac{f_{n,n-1, \dots, n-i+1} - f_{n-1, n-2, \dots, n-i}}{t_n - t_{n-i}} - i$ -я разделенная разность.

Возможны и другие схемы построения многошаговых алгоритмов с переменным шагом.

8.6. Улучшенный метод Адамса — Мультон — Коуэлла

В этом разделе мы рассмотрим многошаговый метод, связанный с использованием свойств интегрируемых систем уравнений.

Применение преобразования Кустаанхеймо — Штифеля позволяет привести уравнения движения к виду возмущенного гармонического осциллятора (см. раздел 2.3)

$$u'' + \frac{\bar{h}}{2} u = Q$$

с частотой $\omega = \sqrt{\bar{h}/2}$, $\bar{h} = p_0 = w_0$, $Q = -\frac{1}{4\partial u} [(uu)R] + W$. Решение невозмущенного уравнения

$$u'' + \frac{\bar{h}}{2} u = 0 \quad (8.35)$$

имеет вид

$$a \cos \omega t + b \sin \omega t. \quad (8.36)$$

Для того чтобы получить так называемый улучшенный численный метод, который интегрирует без методических ошибок уравнения невозмущенного движения (8.35), естественно ввести (Stiefel, Bettis, 1969) в аппроксимирующую функцию $P_n(t)$ выражение вида (8.36), преобразуя ее следующим образом:

$$P_{n-2} + a \cos \omega t + b \sin \omega t, \quad (8.37)$$

Улучшенные алгоритмы Адамса — Башфорта, Адамса — Мультон, Штермера и Коуэлла приведены в книге Е.Штифеля, Г. Шейфеле (1975). Алгоритмы построены так, что внешний вид формул сохраняется, первые $n-2$ коэффициента имеют классические значения, а два старших коэффициента содержат функции $\cos \omega t$, $\sin \omega t$.

Мы рассмотрим здесь улучшенный метод Адамса — Мультона — Коуэлла (Borderies, 1977), используя формулы метода, приведенные в разделе 8.2. Техника введения тригонометрических членов в аппроксимирующую функцию, используемая Н.Бордери, отличается от техники Д.Беттиса и Е.Штифеля тем, что в аппроксимирующей функции полностью сохраняется полиномиальная часть, которая дополняется регуляризирующими членами. При этом внешний вид формул метода меняется. Например, формула предсказания в алгоритме Адамса — Мультона — Коуэлла имеет вид

$$y_n = 2y_{n-1} - y_{n-2} + h^2 \sum_{j=0}^m \alpha_j f_{n-j-1},$$

а модифицированная формула строится следующим образом:

$$y_n = 2y_{n-1} - y_{n-2} + h^2 \sum_{j=0}^m \alpha_j f_{n-j-1} + A_n h y_{n-1} + B_n h^2 f_{n-1},$$

причем коэффициенты A_n, B_n содержат функции $\cos \omega t, \sin \omega t$.

Остановимся более подробно на описании модифицированного алгоритма Адамса — Мультона — Коуэлла.

На первом этапе алгоритма, задаваясь параметрами a, b, c, m , используя фундаментальные коэффициенты a_j, c_i (см. Приложение 7), вычисляют группу вспомогательных коэффициентов по формулам (8.15), (8.16), (8.17) и группу регуляризирующих коэффициентов по формулам

$$B' = \omega h \left[\sin(\omega h) + \sum_{j=0}^{a+b} b_j \sin(j\omega h) \right],$$

$$B'' = \cos(\omega h) - \sum_{j=0}^{a+b} b_j \cos(j\omega h),$$

$$\Gamma' = \frac{\sin(\omega h)}{\omega h} + \omega h \sum_{i=0}^{a+b} \gamma_i \sin((b-i)\omega h),$$

$$\Gamma'' = \frac{1 - \cos \omega h}{(\omega h)^2} - \sum_{i=0}^{a+b} \gamma_i \cos((b-i)\omega h), \quad (8.38)$$

$$B^* = \cos(\omega h) + \omega h \sum_{j=0}^c \beta_j^* \sin(j\omega h),$$

$$B^{**} = \frac{\sin(\omega h)}{\omega h} - \sum_{j=0}^c \beta_j^* \cos(j\omega h),$$

$$A^{*'} = \frac{2\sin(\omega h)(1 - \cos(\omega h))}{\omega h} - \omega h \sum_{j=0}^c \alpha_j^* \sin(j\omega h),$$

$$A^{**} = \frac{2\cos(\omega h)(1 - \cos(\omega h))}{(\omega h)^2} - \sum_{j=0}^c \alpha_j^* \cos(j\omega h), \quad (8.39)$$

h — шаг интегрирования.

Начальные скорости и ускорения в интервале $a \leq j \leq b$ полагаются равными

$$\ddot{y}_0 = f(y_0, \dot{y}_0, t_0), \quad \dot{y}_j = \frac{\ddot{y}_0}{h} \sin(j\omega h) + \dot{y}_0 \cos(j\omega h),$$

$$\ddot{y}_j = \ddot{y}_0 \cos(j\omega h) - \omega \dot{y}_0 \sin(j\omega h). \quad (8.40)$$

Скорости и ускорения в пределах от $-a$ до b задаются формулами

$$\ddot{y}_{-n} = \sum_{j=0}^{a+b} b_j \ddot{y}_{-n+1+j} + B'' \ddot{y}_{-n+1} + \frac{B'}{h} \dot{y}_{-n+1}, \quad n = a+1, \dots, c,$$

$$\dot{y}_n = \sum_{j=0}^{a+b} b_j \dot{y}_{-n+1+j} + B'' \dot{y}_{-n+1} - \frac{B'}{\omega^2 h} \ddot{y}_{-n+1}, \quad n = a+1, \dots, c, \quad (8.41)$$

$$\ddot{y}_n = \sum_{j=0}^{a+b} b_j \ddot{y}_{n-1-j} + B'' \ddot{y}_{n-1} - \frac{B'}{h} \dot{y}_{n-1}, \quad n = b+1, \dots, c,$$

$$\dot{y}_n = \sum_{j=0}^{a+b} b_j \dot{y}_{n-1-j} + B'' \dot{y}_{n-1} + \frac{B'}{\omega^2 h} \ddot{y}_{n-1}, \quad n = b+1, \dots, c. \quad (8.42)$$

Полученные скорости и ускорения используются для вычисления

$$y_{-1} = y_0 + h^2 \sum_{i=0}^{a+b} \gamma_i \ddot{y}_{b-i} + h \Gamma' \dot{y}_0 + h^2 \Gamma'' \ddot{y}_0. \quad (8.43)$$

Положения и скорости в интервале от $-a$ до b определяются по формулам

$$\dot{y}_n = \frac{1}{B^*}, \quad [\dot{y}_{n-1} + h \sum_{j=0}^c \beta_j^* \ddot{y}_{n-1} + h B^{*''} \ddot{y}_n], \quad n = 1, \dots, b,$$

$$\dot{y}_{-n} = \frac{1}{B^*}, \quad [\dot{y}_{-n+1} - h \sum_{j=0}^c \beta_j^* \ddot{y}_{-n+1} - h B^{*''} \ddot{y}_{-n}], \quad n = 1, \dots, a, \quad (8.44)$$

$$y_n = 2y_{n-1} - y_{n-2} + h^2 \sum_{j=0}^c \alpha_j^* \ddot{y}_{n-j} + h^2 A^{*''} \ddot{y}_n + h A^{*'} \dot{y}_n, \quad n = 1, \dots, b$$

$$y_{-n} = 2y_{-n+1} - y_{-n+2} + h^2 \sum_{j=0}^c \alpha_j^* \ddot{y}_{-n+1} + h^2 A^{*''} \ddot{y}_{-n} - h A^{*''} \dot{y}_{-n},$$

$$n = 2, \dots, a. \quad (8.45)$$

Ускорения в пределах от $-a$ до b вычисляют, используя полученные координаты и скорости.

Совокупность формул (8.40) — (8.45) позволяет вычислять начальную таблицу интегрирования; как в немодифицированном методе, это делается путем последовательных приближений.

После получения начальной таблицы интегрирования определяется новая совокупность регуляризирующих коэффициентов:

$$\begin{aligned}\hat{A}' &= -\omega h \sum_{j=0}^m \alpha_j' \sin(\omega h), \\ \hat{A}'' &= \frac{2(1 - \cos \omega h)}{(\omega h)^2} - \sum_{j=0}^m \alpha_j' \cos(j\omega h), \\ \hat{B}' &= \cos \omega h - \omega h \sum_{j=0}^m \beta_j' \sin(j\omega h), \\ \hat{B}'' &= \frac{\sin(\omega h)}{\omega h} - \sum_{j=0}^m \beta_j' \cos(\omega h),\end{aligned}\tag{8.46}$$

$$\begin{aligned}\bar{A}' &= -\omega h \sum_{j=0}^m \alpha_j \sin((j-1)\omega h), \\ \bar{A}'' &= \frac{2(1 - \cos(\omega h))}{(\omega h)^2} - \sum_{j=0}^m \alpha_j \cos((j-1)\omega h), \\ \bar{B}' &= \cos(\omega h) - \omega h \sum_{j=0}^m \beta_j \sin((j-1)\omega h), \\ \bar{B}'' &= \frac{\sin(\omega h)}{\omega h} - \sum_{j=0}^m \beta_j \cos((j-1)\omega h).\end{aligned}\tag{8.47}$$

Вычисления y_n и \dot{y}_n осуществляются по формулам предсказания

$$\begin{aligned}y_n &= 2y_{n-1} - y_{n-2} + h^2 \sum_{j=0}^m \alpha_j' \ddot{y}_{n-1-j} + h^2 \hat{A}'' \ddot{y}_{n-1} + h \hat{A}' \dot{y}_{n-1}, \\ \dot{y}_n &= h \sum_{j=0}^m \beta_j' \ddot{y}_{n-1-j} + \hat{B}' \dot{y}_{n-1} + h \hat{B}'' \ddot{y}_{n-1}, \\ \ddot{y}_n &= f(y_n, \dot{y}_n, t)\end{aligned}\tag{8.48}$$

и коррекции

$$\begin{aligned}y_n &= 2y_{n-1} - y_{n-2} + h^2 \sum \alpha_j \ddot{y}_{n-j} + h^2 \bar{A}'' \ddot{y}_{n-1} + h \bar{A}' \dot{y}_{n-1}, \\ \dot{y}_n &= h \sum_{j=0}^m \beta_j \ddot{y}_{n-j} + \bar{B}' \dot{y}_{n-1} + h \bar{B}'' \ddot{y}_{n-1}, \\ \ddot{y}_n &= f(y_n, \dot{y}_n, t_n).\end{aligned}\tag{8.49}$$

Метод строится по способу исправления до сходимости. Введение тригонометрических членов в аппроксимирующую функцию позволяет увеличить шаг интегрирования по сравнению с классическими методами.

МЕТОДЫ МНОГООБОРОТНОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

9.1. Принципы построения

Практически во всех задачах небесной механики рассматриваемое движение является почти периодическим. Это свойство движения небесных тел положено в основу методов так называемого многооборотного интегрирования. В этих методах изменение элементов орбиты за один оборот, обусловленное вековыми и долгопериодическими возмущениями, используется для предсказания элементов орбиты на несколько оборотов вперед. Затем производится точное интегрирование на один оборот и осуществляется коррекция вычисленных элементов. Таким образом, многооборотный метод представляет собой двухстадийный алгоритм внешней экстраполяции и внутреннего интегрирования. Принципы построения и первые многооборотные разностные формулы были предложены одновременно рядом авторов (Таратынова, 1960; Mase, Thomas, 1960; Cohen, Hubbard, 1960), а затем развиты в работах О.Грефа и Д.Беттиса (Graf, 1974; Bettis, 1975).

Основным достоинством метода является его высокая оперативность по сравнению с другими численными алгоритмами. Однако применение этого метода в задачах небесной механики долгое время было, весьма ограниченным по целому ряду причин, на которых следует остановиться.

Первые алгоритмы, предложенные Г.П. Таратыновой (1960), Д. Мейсом, Л. Томасом (Mase, Thomas, 1960), Ш. Коген, Э. Хаббардом (Cohen, Hubbard, 1960), были применимы к тем задачам, в которых функция f , описывающая изменение элементов орбиты от оборота к обороту, может быть аппроксимирована полиномом конечной степени по независимой переменной. Иными словами, применение ограничивалось кругом задач с вековыми возмущениями и долгопериодическими возмущениями с периодом, много большим оборота.

О.Грефом (Graf, 1974), а также совместно О.Грефом и Д.Беттисом (Graf, Bettis, 1975) был предложен ряд модификаций многооборотного метода, позволяющих применить его к задачам с более сложной функцией изменения элементов орбиты от оборота к обороту. Модификации состояли во введении в аппроксимирующую функцию, помимо полиномиальных, периодических и смешанных членов. При этом предполагалось, что физические частоты, входящие в периодические и смешанные члены, известны a priori. Применение и этих модифицированных методов не пошло дальше задач с одной частотой изменения функции f , поскольку само определение частот функции f вызывает некоторые трудности.

Следующим шагом к практическому использованию многооборотных алгоритмов явилась работа Ю.А. Федяева (1984), применившего методы гармонического анализа для нахождения физических частот функции f . Использование двух и более частот при аппроксимации разностной функции позволяет повысить точность многооборотного интегрирования, что существенно расширяет возможности модифицированных алгоритмов. Перейдем к описанию метода.

9.2. Многооборотный алгоритм предсказания и коррекции

Как мы уже отмечали движение небесных тел близко к периодическому. Воспользуемся этим свойством и рассмотрим вместе с уравнениями движения

$$x = g(t, x), \quad x_0 = x(t_0) \quad (9.1)$$

разностные уравнения вида

$$x_{\rho+1} - x_{\rho} = f(\rho, x_{\rho}) = \int_{t_{\rho}}^{t_{\rho+1}} g(t, x(t)) dt, \quad \rho = 0, 1, 2, \dots, \quad (9.2)$$

представляющие собой изменения функции x за один оборот. Здесь ρ — номер оборота. Выберем шаг по независимой переменной t , равный одному обороту рассматриваемого объекта и определим две равномерные сетки по переменной t : малую сетку, узлы которой отстоят друг от друга на один оборот, и большую сетку с узлами, отстоящими друг от друга на целое число оборотов M ($M > 3$). Очевидно, что $\rho = nM$, где ρ — число шагов на малой сетке, а n — число шагов величины M на большой сетке. Уравнение (9.2) можно переписать в виде

$$x_{nM+1} - y_{nM} = f(y_{nM}, nM). \quad (9.3)$$

Для решения разностного уравнения (9.3) применим многшаговую формулу

$$\gamma_1 y_{(n+1)M} + \gamma_2 y_{nM} + \gamma_3 y_{(n-1)M} = M \sum_{j=0}^N \alpha_j \nabla^j f_{nM}, \quad (9.4)$$

где $f_{nM} = f(x_{nM}, nM)$ вычислены на большой сетке и

$$\begin{aligned} \nabla f_{nM} &= f_{nM} - f_{(n-1)M}, \quad \nabla^2 f_{nM} = \nabla f_{nM} - \nabla f_{(n-1)M}, \\ \nabla^3 f_{nM} &= \nabla^2 f_{nM} - \nabla^2 f_{(n-1)M}. \end{aligned} \quad (9.5)$$

Формула предсказания получается из соотношения (9.4) при $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = -1, \gamma_3 = 0, \alpha_0 = 1$ и имеет вид

$$x_{n+1} - x_n = M [f_n + \alpha_1 \nabla f_n + \dots + \alpha_N \nabla^N f_n], \quad (9.6)$$

а коэффициенты α_k определяются следующим рекуррентным соотношением:

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \alpha_{k-1} (1 - 1/M)/2! + \alpha_{k+2} (1 - 1/M)(1 + 1/M)/3! + \dots \\ &\dots + (1 - 1/M)(1 + 1/M) \dots (k - 1 + 1/M)/(k + 1)! \end{aligned} \quad (9.7)$$

или в лагранжевой форме

$$x_{N+n+1} - x_{N+n} = M [\beta_N f_{N+n} + \beta_{N-1} f_{N+n-1} + \dots + \beta_0 f_n], \quad (9.8)$$

где

$$\beta_{N-j} = (-1)^j \left[\binom{j}{j} \alpha_j + \binom{j+1}{j} \alpha_{j+1} + \dots + \binom{N}{j} \alpha_N \right]. \quad (9.9)$$

Исправляющая формула может быть получена из соотношения (9.4) при $\gamma_1 = 0, \gamma_2 = 1, \gamma_3 = -1, \alpha_0 = 1$:

$$x_n - x_{n-1} = M [f_n + \bar{\alpha}_1 \nabla f_n + \bar{\alpha}_2 \nabla^2 f_n + \dots + \bar{\alpha}_N \nabla^N f_n], \quad (9.10)$$

причем коэффициенты α_k вычисляются с помощью рекуррентного соотношения

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_k = & -\bar{\alpha}_{k-1} \left(\frac{1}{M} + 1 \right) / 2! - \bar{\alpha}_{k-2} \left(\frac{1}{M} + 1 \right) \left(\frac{1}{M} + 2 \right) / 3! - \\ & \dots - \left(\frac{1}{M} + 1 \right) \left(\frac{1}{M} + 2 \right) \dots \left(\frac{1}{M} + k \right) / (k+1)! \end{aligned} \quad (9.11)$$

В лагранжевой форме соотношение (9.10) будет иметь вид

$$x_{N+n} - x_{N+n-1} = M(\bar{\beta}_N f_{N+n} + \bar{\beta}_{N-1} f_{N+n-1} + \dots + \bar{\beta}_0 f_n), \quad (9.12)$$

причем

$$\begin{aligned} \bar{\beta}_{N-j} = & (-1)^j [(C_j^j) \bar{\alpha}_j + (C_j^{j+1}) \bar{\alpha}_{j+1} + \dots + (C_j^N) \bar{\alpha}_N], \quad j = 0, 1, \dots, N, \\ \bar{\alpha}_0 = & 1. \end{aligned} \quad (9.13)$$

Разложения коэффициентов α и $\bar{\alpha}$ до десятого порядка относительно N получены Грефом (Graf, 1974). Мы приводим эти разложения в Приложениях 8, 9.

9.3. Модифицированные многооборотные алгоритмы

Рассмотрим ряд модификаций (Graf, 1974, Graf, Bettis, 1975) основного многооборотного алгоритма, изложенного в предыдущем разделе.

Предположим, что функция $f(t, \rho)$, описывающая изменение элементов орбиты от оборота к обороту, является периодической относительно номера оборота ρ с частотой ω .

Пусть, далее, коэффициенты $\alpha_1, \dots, \alpha_{N-2}$ сохраняют свои стандартные значения, определенные формулами (9.7) или (9.11). Необходимо задать коэффициенты α_{N-1}, α_N таким образом, чтобы метод интегрировал точно уравнение (8.2), если функция f_ρ представлена в виде

$$f_\rho = \sum_{i=0}^{N-2} a_i \rho^i + b \sin \omega \rho + c \cos \omega \rho. \quad (9.14)$$

Как показал О.Греф (Graf, 1974), этого можно достичь, если определить коэффициенты α_{N-1}, α_N формулами

$$\alpha_{N-1} = \sum_{k=0}^{N-2} \alpha_k S_{k-N} - \frac{\lambda V}{2(\sin \sigma)^{N-1} \cos \sigma}, \quad (9.15)$$

где

$$V(\sigma) = \begin{cases} (-1)^{\frac{N}{2}} \sin \left[\sigma \left(N + 2p - 1 - \frac{1}{M} \right) \right], & \text{если } N - \text{четное,} \\ (-1)^{\frac{N-1}{2}} \cos \left[\sigma \left(N + 2p - 1 - \frac{1}{M} \right) \right], & \text{если } N - \text{нечетное,} \end{cases}$$

$$\alpha_N = \frac{1}{u} \left\{ - \sum_{k=0}^{N-2} \alpha_k S_{k-N+1} + \frac{\lambda V}{(2 \sin \sigma)^{N-2} \cos \sigma} \right\}, \quad (9.16)$$

где

$$V(\sigma) = \begin{cases} (-1)^{\frac{N}{2}} \cos \left[\sigma \left(N + 2p - 1 - \frac{1}{M} \right) \right], & \text{если } N - \text{четное,} \\ (-1)^{\frac{N+1}{2}} \sin \left[\sigma \left(N + 2p - 2 - \frac{1}{M} \right) \right], & \text{если } N - \text{нечетное,} \end{cases}$$

причем $p = 1$ дает коэффициенты предсказующей формулы, $p = 0$ — исправляющей,

$$u = 4 \sin^2 \sigma, \quad \sigma = \frac{\omega M}{2}, \quad \lambda(\sigma) = \frac{\sin \sigma}{M \sin(\sigma/M)}, \quad (9.17)$$

а рациональные функции $S_m(u)$, $R_m(u)$ определены рекуррентными соотношениями вида

$$\begin{aligned} S_{m+1} &= \frac{u}{2} (R_m + S_m), \quad S_0 = 0, \\ R_{m+1} &= S_{m+1} - 2S_m, \quad R_0 = 2, \end{aligned} \quad (9.18)$$

При $\omega \rightarrow 0$ коэффициенты α_{N-1} , α_N совпадают со стандартными коэффициентами.

На практике, как правило, частота ω функции f_ρ известна с некоторой ошибкой ϵ и функция f_ρ определена соотношением

$$f_\rho = \sum_{i=0}^{N-2} a_i \rho^i + c \cos(\omega + \epsilon) \rho + b \sin(\omega + \epsilon) \rho. \quad (9.19)$$

С точностью до членов второго порядка относительно ϵ можно записать

$$f_\rho = \sum_{i=0}^{N-4} a_i \rho^i + (c + b\rho) \cos \omega \rho + (b + c\rho) \sin \omega \rho.$$

При такой аппроксимации функции f_ρ первые $N-4$ коэффициента α_i будут задаваться стандартными формулами, а коэффициенты α_{N-3} , α_{N-2} , α_{N-1} , α_N определяются из уравнений

$$\begin{aligned} L_R - \sum_{i=0}^{N-4} \alpha_i R_i^* &= \sum_{i=N-3}^N \alpha_i R_i^*, \quad L_S - \sum_{i=0}^{N-4} \alpha_i S_i^* = \sum_{i=N-3}^N \alpha_i S_i^*, \\ L_R^* - \sum_{i=0}^{N-4} \alpha_i [i R_{i-1}^* - (i-1) R_i^*] &= \sum_{i=N-3}^N \alpha_i [i R_{i-1}^* - (i-1) R_i^*], \\ L_S^* - \sum_{i=0}^{N-4} \alpha_i [i S_{i-1}^* - (i-1) S_i^*] &= \sum_{i=N-3}^N \alpha_i [i S_{i-1}^* - (i-1) S_i^*], \end{aligned} \quad (9.20)$$

где

$$L_R = \lambda \cos \left[\sigma \left(2p - 1 - \frac{1}{M} \right) \right], \quad L_S = \lambda \sin \left[\sigma \left(2p - 1 - \frac{1}{M} \right) \right], \quad (9.21)$$

$$\begin{aligned}
L_K^* &= \frac{\lambda}{4 \sin 2\sigma} \left\{ M(p+1) \cos \left[2\sigma \left(p - \frac{1}{M} \right) \right] + \right. \\
&+ (Mp - 1) \cos [2\sigma(p-1)] - Mp \cos \left[2\sigma \left(p - 1 - \frac{1}{M} \right) \right] - \\
&\left. - (Mp + M - 1) \cos(2\sigma p) \right\}, \\
L_S^* &= \frac{\lambda^2}{4 \sin^2 \sigma} \left\{ M(p+1) \sin \left[2\sigma \left(p - \frac{1}{M} \right) \right] + (Mp - 1) \sin [2\sigma(p-1)] \right. \\
&\left. - Mp \sin \left[2\sigma \left(p - 1 - \frac{1}{M} \right) \right] - (Mp + M - 1) \sin (2\sigma p) \right\} \quad (9.22)
\end{aligned}$$

где $R_m^* = \frac{1}{2} R_m$, $S_m^* = \frac{\sin 2\sigma}{u} S_m$, а функции $R_m, S_m, u, \sigma, \lambda(\sigma)$ определены, как и ранее, формулами (9.17), (9.18). Если функция f_p имеет многомерный вектор частот, необходимо получить вычислительный алгоритм, интегрирующий точно уравнение (9.2) с функцией f_p в виде

$$\begin{aligned}
f_p &= \sum_{i=0}^{N-2(r+q)} a_i \rho_i + \sum_{i=1}^r (B_i \cos \omega_i \rho + c_i \sin \omega_i \rho) + \\
&+ \rho \sum_{i=1}^r (D_i \cos \omega_{i+q} \rho + E_i \sin \omega_{i+q} \rho), \quad (9.23)
\end{aligned}$$

где $r+q$ — размерность вектора частот.

В этом случае $N-2(r+q)$ коэффициента a_i будут стандартными, а оставшиеся коэффициенты определятся $(r+q)/2$ системами вида (9.20).

9.4. Особенности реализации многооборотного метода.

Определение частот

Остановимся кратко на тех трудностях, которые возникают при практическом использовании многооборотного метода и его модификаций.

Наибольшую сложность при интегрировании уравнений возмущенного движения многооборотным методом представляют вычисление начальной таблицы интегрирования и определение момента времени $t_{(n+1)M}$ — начала следующего шага интегрирования. При достаточно больших M , более 20 оборотов определение начальной таблицы интегрирования любым численным методом, во-первых, потребует больших затрат машинного времени и, во-вторых, приведет к потере точности в вычислении последних членов таблицы. Поэтому при интегрировании с большим шагом для вычисления начальной таблицы интегрирования следует использовать сам многооборотный метод, начиная интегрирование с малых M .

При вычислении $t_{(n+1)M}$ — начала следующего шага интегрирования сложность возникает в связи с тем, что период обращения в возмущенном движении не является величиной постоянной. Существуют различные способы устранения этой трудности. Удобно, например, использовать уравнения движения в эйлеровой форме, а в качестве независимой переменной выбирать угловой элемент, скажем, истинную, эксцентрическую или среднюю аномалию. При использовании уравнений движения в прямоугольных координатах представляется удобным дополнить систему уравнений движения уравнением

$$\dot{v} = \varphi(t, x),$$

где v — истинная аномалия, и использовать это уравнение для определения возмущенного периода P .

Тогда приращение возмущенного периода на малой сетке определится как

$$\Delta P_{nM} = t_{nM+1} - t_{nM} - \tilde{P},$$

где \tilde{P} — средний период. Затем, используя предикторную формулу многооборотного метода, можно получить $\Delta P_{(n+1)M}$, а $t_{(n+1)M}$ на большой сетке определить по формуле

$$t_{(n+1)M} = t_{nM} + P_{(n+1)M} - P_{nM} + M\tilde{P}.$$

При использовании модифицированных многооборотных алгоритмов дополнительные трудности, как мы уже отмечали, возникают в связи с определением физических частот функции f_p изменения элементов орбиты от оборота к обороту. Достаточно простой, но трудоемкий способ определения частот состоит в следующем (Федяев, 1984).

Воспользуемся тем хорошо известным фактом, что в большинстве задач небесной механики суммарная возмущающая сила, действующая на объект, является аддитивной функцией своих составляющих с точностью до эффектов взаимного влияния возмущающих факторов, которые практически всегда малы. Будем предполагать, что и соответствующая разностная функция f_p в первом приближении является аддитивной. С помощью подходящего метода численного интегрирования можно получить функции, заданные таблично, которые характеризуют влияние того или иного возмущающего фактора на изменение функции f_p . Выделяя линейную часть этих функций и проведя затем гармонический анализ, определяют частоты функции f_p . Ошибки, возникающие при определении частот таким способом, как правило, малы. Кроме того, можно использовать те модификации многооборотного метода (см. раздел 9.3), которые устойчивы к ошибкам, вносимым в частоты.

ПОСТРОЕНИЕ АЛГОРИТМОВ ВЫСОКОТОЧНОГО ЧИСЛЕННОГО ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ДВИЖЕНИЯ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ

10.1. Вводные замечания

В данной главе мы рассмотрим вопросы практического применения методов, изложенных в предшествующих главах.

Основная задача настоящей книги, как уже отмечалось во введении, состояла в том, чтобы дать в руки читателя математический аппарат для построения эффективных алгоритмов численного прогнозирования движения небесных тел. Понятие эффективности численного алгоритма складывается из его точности и быстродействия. Мы говорим, что данный алгоритм эффективен, если при заданной точности он обладает наибольшим быстродействием по сравнению с другими алгоритмами. Точность и быстродействие алгоритма зависят от очень многих факторов.

Точность численного прогнозирования движения небесных тел определяется полнотой физической и математической модели действующих сил, порядком аппроксимирующей формулы, используемой в численном методе, устойчивостью системы дифференциальных уравнений движения и численного метода, длиной разрядной сетки ЭВМ и т.п. Быстродействие алгоритма также зависит от перечисленных факторов. Однако эта зависимость не всегда однозначна и практически полностью определяется особенностями машинной реализации, которые связаны не только с возможностями данной ЭВМ и ее математического обеспечения, но и с квалификацией программиста, осуществлявшего реализацию. И все-таки, несмотря на указанные трудности, можно найти общую для всех алгоритмов меру быстродействия численных методов. Такой мерой является количество перевычислений функций правых частей уравнений движения на интервале интегрирования. Для задач небесной механики такой подход тем более правомерен, что функции правых частей уравнения движения небесных тел, как правило, очень громоздки и требуют большого количества вычислительных операций. В дальнейшем при сравнении методов по быстродействию мы будем пользоваться преимущественно этой мерой.

10.2. Сравнительная характеристика эффективности преобразований, регуляризирующих и стабилизирующих уравнения движения

Дадим на ряде примеров сравнительную характеристику эффективности в численном прогнозировании преобразований, регуляризирующих и стабилизирующих уравнения движения.

Рассмотрим три модели (Бордовицына, Сухоплюева, 1980) возмущенного движения ИСЗ с различными наборами основных параметров движения:

Модель 1	Модель 2	Модель 3
$e = 0,05$	$e = 0,05$	$e = 0,85$
$a = 7 \cdot 10^3$ км	$a = 30 \cdot 10^3$ км	$a = 37 \cdot 10^3$ км
$T = 2^h$	$T = 20^h$	$T = 20^h$

Начальные координаты и скорости приведены в табл. 2.

Для выбранных моделей проведем сравнение эффективности трех методик стабилизации и регуляризации уравнений движения: метода стабилизирующего множителя, Накози и KS -преобразования. Необходимые данные (Бордовицына, Сухошлюева, 1980) приведены в табл. 3.

Численное интегрирование уравнений движения ИСЗ выполнялось стандартным методом Рунге–Кутты четвертого порядка и методом Адамса–Мультона восьмого порядка. В процессе интегрирования учитывались возмущения от гармоник геопотенциала до V_{22} включительно, а также возмущения от Луны и Солнца. Возмущения от гармоник геопотенциала вычислялись по рекуррентному алгоритму Канингема. При вычислении возмущений от Луны и Солнца геоцентрические координаты Луны определялись с учетом эквации, вариации и эллиптических членов теории Брауна, а геоцентрические координаты Солнца — с учетом вековых членов первого порядка по теории Ньюкома. Интегрирование выполнялось на

Т а б л и ц а 2

Начальные координаты и скорости моделей 1–3

Параметры	Модель 1	Модель 2	Модель 3
x_1	3382,7124 км	23399,7278 км	5554,1424 км
x_2	-979,2095	23962,4166	18683,7521
x_3	-7548,1134	-18801,5524	-60945,1871
\dot{x}_1	1,9600106 км/с	-1,43476751 км/с	-0,79603073 км/с
\dot{x}_2	6,5046135	-0,56426402	-0,33098997
\dot{x}_3	0,3130020	-2,77892505	-1,09936043

Т а б л и ц а 3

Сравнение трех методик стабилизации и регуляризации уравнений движения

Модель		$e = 0,05 \quad T = 2^h$			$e = 0,05 \quad T = 20^h$			$e = 0,85 \quad T = 20^h$		
Численный метод	Вид уравн.	$\Delta r, м$	$t, мин$	$h, с$	$\Delta r, м$	$t, мин$	$h, с$	$\Delta r, м$	$t, мин$	$h, с$
Рунге–Кутты четвертого порядка	Классические	10^3	8,5	30	$4 \cdot 10^3$	3,5	360	$5 \cdot 10^5$	17,6	60
	λ -стабилизация	1	8,7	30	$2 \cdot 10$	3,4	360	$2 \cdot 10^4$	17,9	60
	Метод Накози	$1 \cdot 10^{-1}$	11,3	30	5	4,7	360	$5 \cdot 10^3$	23,6	60
	KS -преобразование	5	7,3	30*	$4 \cdot 10^{-1}$	5,7	40*	6	3,3	60*
Адамса–Мультона восьмого порядка	Классические	$5 \cdot 10$	3,1	100	7	2,5	500	$1 \cdot 10^6$	9,2	100
	KS -преобразование	5	2,7	100*	1	3,9	60*	$1 \cdot 10^{-1}$	3,5	60*

* Шаг задается в фиктивном времени.

Т а б л и ц а 4

Параметры движения моделей 4,5

Параметры	Модель 4	Модель 5
e	0,95	0,174
T	$5^d,73593218$	$4^d,30899150$
x_1	0,0000 км	0,0000 км
x_2	-5888,9727	-5888,9727
x_3	-3400,0000	-3400,0000
\dot{x}_1	10,691338 км/с	8,30000 км/с
\dot{x}_2	0,000000	0,000000
\dot{x}_3	0,000000	0,000000

интервале времени в 50 оборотов спутника. Точность численного решения задачи определялась модулем разности $|\Delta r|$ двух векторов в момент t_0 : начального вектора положения и вектора положения, полученного в результате прямого и обратного интегрирования уравнений движения, h означает шаг интегрирования, t — время, затрачиваемое на интегрирование 50 оборотов спутника на ЭВМ БЭСМ-6.

Рассмотрим две модели возмущенного движения ИСЗ, взятые из книги Штифеля и Шейфеле (1975). Основные параметры орбит и начальные данные для этих моделей приведены в табл. 4.

Выберем в качестве опорных орбит, полученные Шейфеле и Штифелем с учетом возмущений от сжатия Земли и притяжения Луны, и проведем сопоставление тех же трех методов стабилизации и регуляризации уравнений движения, используя для определения точности метода отклонение полученных результатов от опорного движения (табл. 5). Данные для такого сопоставления взяты как и ранее из нашей работы (Бордовицына, Сухоплюева, 1980).

Приведем еще один пример (Шефер, Кардаш, 1984) сопоставления методов стабилизации и регуляризации уравнений движения небесных тел. Рассматриваются четыре формы записи уравнений движения: классические уравнения в прямоугольных координатах, уравнения в координатах Сундмана (Дубошин, 1964; Мячин, 1974), приведенные нами в главе 4, уравнения Шперлинга—Бодде (Silver, 1975), которые мы лишь кратко рассматривали в главе 2, и уравнения в параметрических переменных Кустанхаймо—Штиффеля, которые занимают в главе 2 центральное место.

Решается модельная задача (Stiefel et al., 1967) численного прогнозирования орбиты частицы нулевой массы, движущейся в поле притяжения центральной массы m_0 с учетом возмущений от третьей частицы с массой m_1 . Постоянные тяготения равны

$$k^2 m_0 = 2980008,3, \quad k^2 m_1 = 36656,343.$$

Начальное положение и скорость частицы имеют следующие компоненты:

$$x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0, \quad x_3(0) = 10,$$

$$x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 750, \quad x_3(0) = 0.$$

Эксцентриситет орбиты частицы равен 0,89.

Т а б л и ц а 5

Сопоставление методов на моделях 4–5. Возмущения: геопотенциал, Луна

Модель		$e = 0,95 \quad T = 5^d,73593218$			$e = 0,174 \quad T = 4^d,30899150$		
Числен. метод	Вид уравнен.	h, c	$\Delta r, m$	$t, \text{мин}$	h, c	$\Delta r, m$	$t, \text{мин}$
Рунге–Кутты четвертого порядка	классические	120	$1 \cdot 10^6$	1,4	30	$5 \cdot 10^3$	4,0
		90	$4 \cdot 10^5$	1,8			
		40	$1 \cdot 10^4$	4,0			
	λ -стабилизация	120	$7 \cdot 10^4$	1,4	30	$3 \cdot 10^3$	4,0
		90	$1 \cdot 10^3$	1,8			
		40	$3 \cdot 10$	4,0			
	метод Накози	120	$2 \cdot 10$	1,7	30	10	5,8
		90	3	2,4			
		40*	3	0,2	30*	7	3,4
Адамса–Мультон восьмого порядка	KS-преобразование						
	классические	60	$5 \cdot 10^3$	3,7	90	$1 \cdot 10^3$	1,9
	KS-преобразование	40	$3 \cdot 10^2$	5,4			
		60*	2	0,1	60*	$1 \cdot 10^1$	1,7

* Шаг задается в фиктивном времени.

Точка m_1 движется в плоскости $x_1 x_2$ по круговой орбите радиуса 384,4. Начальное положение $x_1 > 0$.

Интервал интегрирования — два оборота частицы m .

Результаты сопоставления приведены в табл. 6.

Здесь $|\Delta r|$, $|\Delta \dot{r}|$ — модули разностей векторов положения и скорости в начальный момент времени, полученные в результате прямого и обратного интегрирования, f_c — количество перевычислений функций правых частей на интервале интегрирования, t — время интегрирования на ЭВМ БЭСМ-6. В качестве метода интегрирования использовался алгоритм Эверхарта одиннадцатого порядка. Численные результаты, приведенные в таблицах 3–6, позволяют сделать ряд выводов.

Применение стабилизирующих преобразований при интегрировании методом Рунге–Кутты почти круговых орбит повышает точность вычисления пространственных положений ИСЗ на два–четыре порядка, а при использовании метода Адамса–Мультон — на порядок. Наиболее эф-

Т а б л и ц а 6

Сопоставление методов на модели Штифеля и др.

Тип уравнений	$ \Delta r $	$ \Delta \dot{r} $	f_c	t
Классические	$6 \cdot 10^{-6}$	$3 \cdot 10^{-4}$	5876	56
В координатах Сундмана	$5 \cdot 10^{-8}$	$4 \cdot 10^{-6}$	3770	52
Уравнения Шперлинг–Бодэ	$9 \cdot 10^{-9}$	$7 \cdot 10^{-7}$	2108	32
KS-переменные	$2 \cdot 10^{-9}$	$1 \cdot 10^{-9}$	992	14

фактивными здесь оказываются метод Накози и KS -преобразование. Интересно отметить, что при применении стабилизирующих преобразований результаты, полученные методом Рунге—Кутты четвертого порядка становятся сравнимыми по точности с результатами, полученными методом Адамса—Мултона восьмого порядка. Для орбит с большими эксцентриситетами (модели 3, 4 и модель Штифеля и др.) интегрирование классических уравнений в прямоугольных координатах дает наиболее слабые результаты при использовании любого из трех рассмотренных численных методов. Наилучшие результаты, увеличение точности интегрирования на 3–5 порядков показывает метод KS -преобразования, осуществляющий вместе с временным преобразованием $dt = rds$ регуляризацию и стабилизацию уравнений движения. Примечателен и тот факт, что для вытянутых орбит введение этих преобразований дает существенное уменьшение затрат машинного времени, несмотря на увеличение порядка интегрируемой системы уравнений. Это происходит за счет автоматического регулирования шага интегрирования, которое достигается введением временного преобразования.

И наконец, приведем последний пример (Бордовицына, Харин, Шефер, 1981) применения регуляризирующих преобразований в реальной астрономической задаче улучшения орбиты особой малой планеты Икар.

Задача исследования движения особых малых планет является достаточно сложной, так как уравнения движения этих объектов содержат одновременно особенности, обусловленные большими эксцентриситетами орбит и тесными сближениями с планетами внутренней группы. В группе особых малых планет Икар имеет наиболее вытянутую орбиту, ее эксцентриситет равен 0,826. За период наблюдения, охватывающий 17,5 оборота планеты, Икар имеет четыре тесных сближения, по два с Венерой и Землей. Наиболее тесное сближение Икара с Землей составляет 0,042 а.е. В качестве начальной системы параметров Икара были взяты элементы, полученные Дж. Шапиро и др. (Shapiro et al., 1971). Для численного эксперимента были выбраны 496 наблюдений, применявшихся в получении исходной системы элементов. Радиусы зон сближения определялись на основе изменения кеплеровской энергии и были приняты для Земли $R_1 = 0,25$ а.е., для Венеры $R_2 = 0,17$ а.е. В процессе интегрирования учитывались возмущения от девяти больших планет, возмущения от сжатия Солнца и релятивистский эффект в движении Икара. Для вычисления координат и скоростей больших планет использовались параметры движения и массы планет, данные К. Остервинтером и Ш. Когеном (Oesterwinter, Cohen, 1969). Интегрирование выполнялось методом Эверхарта. Интегрировались одновременно уравнения движения и уравнения в вариациях. Вычисление пространственных положений и улучшение орбиты Икара с использованием трех различных форм записи уравнений движения показало (табл. 7), что точность, задаваемую наблюдениями, можно достичь любым из трех способов. При этом на решение регуляризированной системы уравнений затрачивается в пять раз меньше машинного времени, хотя порядок системы в 1,5 раза больше. Раздельное и совместное интегрирование систем уравнений движения и уравнений в вариациях с переменным шагом показывает, что наибольшее количество машинного времени тратится на решение уравнений в вариациях.

Таблица 7

Сопоставление трех методик вычисления пространственных положений небесных тел на примере улучшения орбиты Икара

Вид уравнения	Порядок системы	Число шагов	Время решения на ЭВМ БЭСМ-6	Ср. кв. ош. единицы веса до улучшения	Ср. кв. ош. единицы веса после улучшения
$h = \text{const}$					
Классические	42	7160	4 ^h 58 ^m	1",60	1",32
KS-преобраз.	64	2190	1 06	1, 51	1, 31
Двойное KS-преобраз.	72	1914	59	1, 49	1, 31
$h \neq \text{const}$					
Классические	42		7 00		
	6		0 18	1, 60	1, 32
KS-преобразования	64		1 06	1, 51	1, 31
	10		0 15		

Это объясняется не только высоким порядком системы уравнений в вариациях, но и наличием в этих уравнениях особенностей, приводящих к постоянному изменению шага интегрирования. Регуляризация уравнений в вариациях дает понижение затрат машинного времени почти в семь раз.

Использование двойной регуляризации не дает в этом эксперименте заметных преимуществ по сравнению с центральной регуляризацией. Это объясняется тем, что эффективность двойной регуляризации проявляется при значительно меньших радиусах сближения с возмущающим телом.

В табл. 8 приведены результаты моделирования тесных сближений Икара с Землей, позволяющие выявить влияние двойной регуляризации уравнений движения на точность их численного решения. Как показывают результаты, двойная регуляризация дает заметный эффект только при очень тесных сближениях, когда малое тело проходит через сферу действия возмущающей планеты.

Приведенные в настоящем разделе примеры применения регуляризирующих и стабилизирующих преобразований в задачах численного определения

Таблица 8

Эффективность двойной регуляризации в окрестности соударений

Сближение с Землей, а.е.	KS-преобраз.		двойное KS-преобраз.	
	число шагов	$ \Delta r $, а.е.	число шагов	$ \Delta r $, а.е.
0,042	233	$6 \cdot 10^{-10}$	279	$9 \cdot 10^{-9}$
0,0083	248	$2 \cdot 10^{-9}$	289	$2 \cdot 10^{-9}$
0,0008	264	$2 \cdot 10^{-7}$	324	$9 \cdot 10^{-8}$
0,000005	410	$6 \cdot 10^{-3}$	487	$5 \cdot 10^{-5}$

Радиус сферы действия Земли $R = 0,006$ а.е.

пространственных положений небесных тел позволяют сделать вывод, что использование преобразованных уравнений существенно расширяет возможности численных методов. Наилучшие результаты для любых типов орбит дает преобразование Кустаанхеймо—Штифеля. Поэтому в дальнейшем при выяснении эффективности того или иного численного метода в задачах небесной механики мы будем везде, где это возможно, приводить примеры его применения к уравнениям в параметрических переменных.

10.3. Численный метод и регуляризирующее и стабилизирующее преобразование. Особенности реализации

Как показывают примеры, приведенные в предыдущем параграфе, регуляризирующие и стабилизирующие преобразования являются эффективным средством повышения точности и быстродействия численных алгоритмов. Остановимся на некоторых особенностях численного интегрирования регуляризованных и стабилизированных уравнений движения небесных тел.

Как правило, вычисление составляющих возмущающей силы в процессе интегрирования выполняется в физическом пространстве. Это требует на каждом шаге интегрирования осуществлять переход из параметрического пространства в физическое и обратно.

Основная трудность при практической реализации вычислительного процесса состоит в том, что интегрирование ведется по фиктивной переменной, а результаты, как правило, необходимо иметь для реальных моментов физического времени. Связь между фиктивным временем и физическим временем задается уравнением временного преобразования $dt = rds$, которое интегрируется численно вместе с уравнениями движения. В результате численного интегрирования после перехода в физическое пространство мы получаем таблицу функций

$$x_1(s), x_2(s), x_3(s), \dot{x}_1(s), \dot{x}_2(s), \dot{x}_3(s), t(s), \quad (10.1)$$

распределенных по s .

Самым простым способом получения $x(t)$, $\dot{x}(t)$ в заданные моменты времени t может быть интерполирование времени s на заданный момент t и функций $x(s)$, $\dot{x}(s)$ на полученный момент времени s . Однако при использовании одношаговых численных методов высоких порядков, когда шаг интегрирования велик, интерполяция приведет к потере точности результата. В этих случаях для выхода на заданный момент времени t лучше всего использовать саму программу-интегратор. Сделать это можно различными способами. Мы рассмотрим два из них. В.Ф. Мячин (1975) предлагает использовать для этой цели метод Ньютона.

Пусть значению фиктивного времени $s = s_k$ соответствует значение физического времени $t = t_k$; необходимо найти величину шага $h = h^*$ по переменной s так, что значению $s = s_k + h^*$ соответствовало заданное значение $t^* > t_k$, т.е.

$$t = t^*, \quad s = s_k + h^*. \quad (10.2)$$

Отыскание h^* складывается из двух этапов: выбора начального приближе-

ния $h^* = h_0$ и уточнения его итеративным путем до сходимости с заданной точностью. Исходя из уравнения временного преобразования, в качестве начального приближения можно выбрать значение

$$h_0^* = \frac{t^* - t_k}{r_k(s)}, \quad (10.3)$$

а для его уточнения применить метод Ньютона

$$h_{p+1}^* = h_p^* - \frac{t(s_k + h_p^*) - t^*}{r(s_k + h_p^*)}; \quad (10.4)$$

$t(s_k + h_p^*)$, $r(s_k + h_p^*)$ определяются численным интегрированием. Практическое применение этого способа выхода на заданный момент времени показало, что он дает хорошие результаты, но при многократном использовании требует больших затрат машинного времени.

Второй способ выхода на заданный момент физического времени основан на том обстоятельстве, что программа интегрирования уравнений движения в параметрическом пространстве по фиктивному времени всегда явно или неявно содержит в себе классические уравнения движения в физическом пространстве. Поэтому программу всегда можно организовать таким образом, чтобы последний шаг интегрирования, необходимый для выхода на заданный момент времени t , осуществлялся в физическом пространстве.

10.4. Сравнительная характеристика численных алгоритмов

В данном и последующем параграфах мы дадим сравнительную характеристику эффективности в задачах небесной механики численных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений, изложенных в настоящей книге.

Наиболее простым способом исследования точности численных методов является сопоставление численного решения с точным аналитическим решением задачи двух тел.

Рассмотрим невозмущенное движение трехчасового спутника по орбите, эксцентриситет которой равен 0,8, а большая полуось составляет $9,8 \cdot 10^3$ км. На примере такой модели движения дадим сравнительную характеристику алгоритмов Рунге — Кутты — Нистрема 4(5)-го — 8(9)-го порядков, изложенных в главе 5. Необходимые данные приведены в табл. 9 (Бордовицына, Шарковский, Федяев 1980). Интегрирование выполняется на интервале времени в 50 оборотов спутника, используются уравнения в параметрических (u) координатах Шейфеле и Штифеля и в прямоугольной (x) системе координат. Величина $\Delta r = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \Delta x_3^2}$ характеризует ошибку в векторе положения в метрах по сравнению с аналитическим решением: TOL — абсолютная точность вычислений, определяющая размеры шага интегрирования, t — время, затрачиваемое на интегрирование 50 оборотов спутника на ЕС-1022, пере-вычисления функций правых частей f_c даны в расчете на один оборот. Интегрирование выполняется с шестнадцатью десятичными знаками. Как показывают результаты, приведенные в табл. 9, при интегрировании ре-

Таблица 9

Характеристика методов Рунге–Кутты–Нистрема ($N = 50$, $\epsilon = 0,8$, $T = 3^h$)

Метод	и-координаты				х-координаты			
	Δr , м	TOL	t , мин	f_c за оборот	Δr , м	TOL	t , мин	f за оборот
RKN 4(5)	$1 \cdot 10^{-5}$	10^{-9}	21,5	2936	20	10^{-7}	40	6256
RKN 5(6)	$1 \cdot 10^{-5}$	10^{-10}	15	1866	10	10^{-11}	29	4032
RKN 6(7)	$1 \cdot 10^{-5}$	10^{-10}	9,5	1155	$1 \cdot 10^{-1}$	10^{-11}	27	3570
RKN 7(8)	$1 \cdot 10^{-6}$	10^{-11}	6	702	$1 \cdot 10^{-2}$	10^{-11}	18	2205
RKN 8(9)	$1 \cdot 10^{-6}$	10^{-11}	4,5	495	$1 \cdot 10^{-2}$	10^{-11}	14	1705

гулярных и устойчивых в смысле Ляпунова уравнений движения в и-координатах высокая точность может быть достигнута всеми методами Рунге–Кутты–Нистрема от 4(5)-го до 8(9)-го порядков, а затраты машинного времени будут различны. Картина существенно меняется при работе в х-координатах. Здесь не только общая точность падает на четыре–шесть порядков, но и порядок метода начинает играть заметную роль. Так, при интегрировании методом 4(5)-го порядка уже при абсолютной точности 10^{-7} шаг уменьшается до 0,65 секунды времени и дальнейшее повышение точности за счет уменьшения шага интегрирования становится практически невозможным. Наилучшие результаты при использовании прямоугольных координат дают методы 7(8)-го и 8(9)-го порядков. Применение регуляризованных и стабилизированных уравнений движения дает с методами малого порядка увеличение точности на 6 порядков, быстроедействие при этом увеличивается вдвое. Использование тех же уравнений с методами высоких порядков повышает точность на четыре порядка, а быстроедействие возрастает втрое. Э. Эверхарт (Everhart, 1974) на примере задачи двух тел выполнил сравнение по точности и быстроедействию (рис. 2) четырех методов: метода разработанного самим Эверхартом, программа RADAU (гл. 7); метода Рунге–Кутты–Нистрема RKN8(9) и метода Адамса–Мултона, программа DVDQ (метод изложен в гл. 8).

Таблица 10

Характеристика эффективности многооборотного метода

Метод	Число оборотов	Δr , м	Δv , м/с	Время счета EC-1022
RKF 7(8)	288	7,5	$3 \cdot 10^{-2}$	6 ч
M42	288	7,5	$3 \cdot 10^{-2}$	50 мин
M24	288	7,5	$3 \cdot 10^{-2}$	18 мин
RKF 7(8)	504	24	$1 \cdot 10^{-2}$	10 ч
M12	504	23	$1 \cdot 10^{-2}$	1,5 ч
M24	504	23	$1 \cdot 10^{-2}$	33 мин
M36	504	23	$1 \cdot 10^{-2}$	11 мин
M36	1368	200	$2 \cdot 10^{-1}$	1 ч

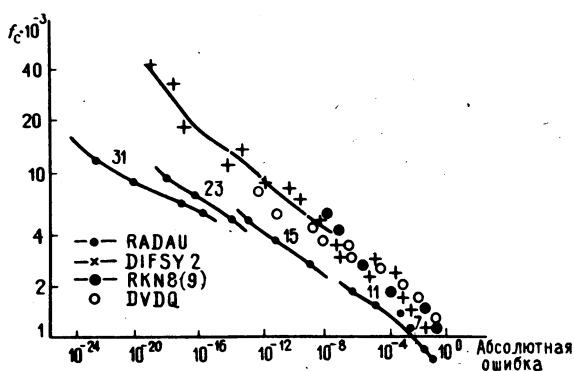


Рис. 2. Сопоставление методов. Задача двух тел, $e = 0,06$, $\Delta t = 8$ оборотов.

На графике (рис. 2) по оси абсцисс откладывается абсолютная ошибка численного решения по сравнению с аналитическим, а по оси ординат количество перевычислений функции правых частей на интервале интегрирования, который равен восьми оборотам объекта. Уравнения записаны в параметрических переменных Кустаанхеймо—Штифеля. Наилучшие результаты как по точности, так и по быстродействию дает программа RADAU. Для областей средней и низкой точности программы RADAU, DIFSY2, RKN8(9) имеют одинаковую точность и быстродействие и по точности сравнимы с алгоритмами Эверхарта 7-го, 11-го и 15-го порядков, но отстают от него по быстродействию. В области высокой точности только программа DIFSY2 дает результаты, сравнимые по точности с результатами программы RADAU, однако быстродействие последней в 4 раза выше.

Представление о быстродействии и точности метода многооборотного интегрирования по сравнению с алгоритмом Рунге—Кутты—Фельберга 7(8)-го порядка дают результаты, приведенные в табл. 10 (Бордовицна, Шарковский, Федяев, 1980).

Рассматривается невозмущенное движение трехчасового спутника с эксцентриситетом орбиты, равным 0,8. В колонке "Метод" цифра рядом с буквой М (М12, М24 . . .) означает размер шага в оборотах, используемый в многооборотной формуле. Для вычисления правой части разностного уравнения используется метод Рунге—Кутты—Фельберга 7(8).

Приведенные результаты показывают, что при одной и той же точности вычислений многооборотный метод значительно оперативнее метода Рунге—Кутты—Фельберга 7(8). Однако практическое применение стандартной процедуры многооборотного метода, как мы уже говорили в разделе 9.3, ограничено задачами с одномерным вектором частот.

Обратимся теперь к возмущенному движению небесных тел. В этом случае мы не имеем возможности сравнивать численное решение с аналитическим, поэтому оценку точности интегрирования будем производить либо по разности прямого и обратного интегрирования уравнений возмущенного движения, либо с помощью опорного движения, вычисляемого методом высокого порядка и с использованием большого числа десятичных знаков.

Продолжим рассмотрение результатов Э. Эверхарта (Everhart, 1974) по сопоставлению точности и быстродействия различных методов.

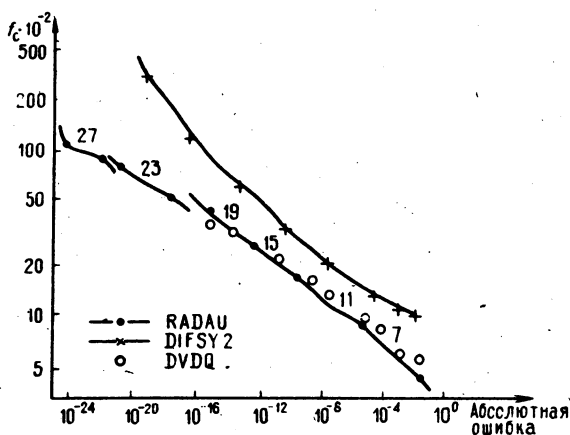


Рис. 3. Сопоставление методов. Ограниченная задача четырех тел, $\Delta t = .68,23$ года.

Ограниченная задача четырех тел (рис. 3). Рассматривается движение астероида по круговой орбите, внешней по отношению к орбите Юпитера под действием притяжения Солнца и возмущений от Юпитера и Сатурна. Радиус орбиты равен 6,05 а.е., наклонение к координатной плоскости составляет $6^\circ,9$. Юпитер и Сатурн движутся по невозмущенным эллиптическим орбитам, определяемым аналитически. Уравнения астероида записаны в переменных Кустайнхеймо—Штифеля. Сравнение производится на опорном решении, полученном методом Эверхарта 31-го порядка с малым шагом и имеющем по оценке Эверхарта 25 верных десятичных знаков. Интервал интегрирования составляет 68,23 года. За этот период астероид имеет два сближения с Юпитером до 1,0 а.е. и одно с Сатурном до 3,0 а.е.

Задача шести тел (рис. 4). Интегрируются совместно уравнения движения пяти внешних планет под действием притяжения Солнца и взаимных возмущений. В качестве начальных параметров движения взяты

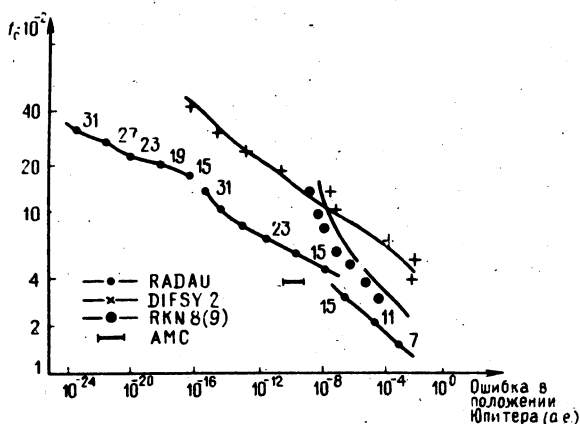


Рис. 4. Сопоставление методов. Задача шести тел, $\Delta t = 16 \cdot 10^3$ суток.

параметры, данные Ш. Когеном, Е. Хаббардом, К. Остервинтером (Cohen, Habbard, Oesterwinter, 1972) на юлианскую дату 2418800,5 и относенные к экваториальной плоскости 1950,0. Используются уравнения в прямоугольных координатах. Опорное решение рассчитывалось так же, как и в предыдущей задаче. На графике рис. 4 по оси абсцисс откладывается ошибка в положении Юпитера (другие планеты имели меньшую ошибку), по оси ординат — количество перевычислений функции правых частей уравнений движения на интервале интегрирования, который составляет 16 000 суток. В конце интервала прогнозирования точность $2 \cdot 10^{24}$ достигается методом 31-го порядка при 3200 перевычислениях функции правых частей и шаге интегрирования в 160 суток. Точность $2 \cdot 10^{11}$ достигается методом 15-го порядка при 630 перевычислениях функций и шаге 400 суток.

В той и другой задачах сравнимые по точности с методом Эверхарта результаты дает метод Булирша и Штера, однако последний уступает первому в быстродействии.

В области средней и низкой точности (7-й—11-й порядки) метод Рунге—Кутты—Нистрема и многошаговые методы также сравнимы по точности с методом Эверхарта, но уступают ему в быстродействии. Этот вывод подтверждает также график, приведенный на рис. 5. Теми же четырьмя методами интегрируется галактическая орбита Солнца на интервале времени $5 \cdot 10^8$ лет (Papp, Innanen, Patrick, 1980).

Приведем несколько примеров сопоставления методов в задачах динамики ИСЗ. Обратимся вновь к трем моделям (1—3) возмущенного движения ИСЗ, рассмотренным нами в предыдущем разделе.

В табл. 11 даны результаты (Бордовицына, Шарковский, Федяев, 1980; Бордовицына, 1981) сопоставления метода Рунге—Кутты четвертого порядка с методом Рунге—Кутты—Фельберга 7(8)-го порядка и Рунге—Кутты—Нистрема 8(9)-го порядка на примере интегрирования уравнений возмущенного движения ИСЗ (модели 1—3). Интервал интегрирования равен 50 оборотам спутника. используются уравнения движения в прямоугольных координатах и параметрических переменных. Вычисления выполня-

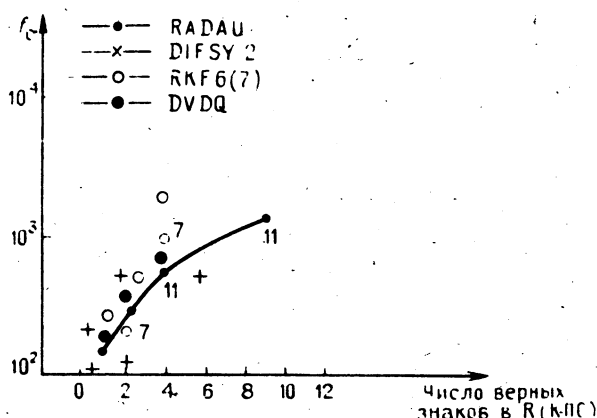


Рис. 5. Сопоставление методов. Галактическая орбита Солнца, $\Delta t = 5 \cdot 10^8$ лет.

Таблица 11

Сопоставление методов Рунге-Кутты.

Возмущения: геопотенциал Луна, Солнце, $N = 50$

Модель	$e = 0,05$		$e = 0,05$		$l = 0,85$	
	$a = 7,5 \cdot 10^3$ км	перевыч. f за 1 оборот	$a = 30 \cdot 10^3$ км	перевыч. f за 1 оборот	$a = 37 \cdot 10^3$ км	перевыч. f за 1 оборот
Метод	Δr , м		Δr , м		Δr , м	
RK 4 x	10^3	960	$4 \cdot 10^3$	800	$5 \cdot 10^5$	4800
u	10	810	$4 \cdot 10^{-1}$	1200	10	900
RKF7(8) x	$2 \cdot 10$	530	1	850	10	1370
u	$1 \cdot 10^{-1}$	500	$2 \cdot 10^{-1}$	480	$1 \cdot 10^{-1}$	790
RKF8(9) x	3	350	$5 \cdot 10^{-1}$	390	$5 \cdot 10$	910

Таблица 12

Исследование алгоритма Эверхарта.

Возмущения: геопотенциал, Луна, Солнце, $N = 50$

Модель	$e = 0,05 \quad T = 2^h$				$e = 0,05 \quad T = 20^h$			$e = 0,85 \quad T = 20^h$		
Порядок метода	L	$\Delta r, \text{ м}$	$\Delta t, \text{ с}$	f за обор.	$\Delta r, \text{ м}$	$\Delta t, \text{ с}$	f за обор.	$\Delta r, \text{ м}$	$\Delta t, \text{ с}$	f за обор.
$7x_u$	5	10		310	10		409	730		654
	1	$1 \cdot 10^{-2}$	$7 \cdot 10^{-5}$	390	$2 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-5}$	636	$2 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-4}$	1574
$11x_u$	6	$1 \cdot 10^{-1}$		380	$5 \cdot 10^{-2}$		500	$1 \cdot 10^{-1}$		819
	2	$1 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-3}$	395	$4 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-8}$	538	$2 \cdot 10^{-2}$	$6 \cdot 10^{-4}$	912
$15x_u$	8	$4 \cdot 10^{-4}$		547	$1 \cdot 10^{-3}$		667	$2 \cdot 10^{-3}$		1207
	5	$8 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-9}$	584	$3 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-7}$	554	$4 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-7}$	1004
$19x$	9	$3 \cdot 10^{-4}$		655	$1 \cdot 10^{-3}$		738	$2 \cdot 10^{-3}$		1396

Таблица 13

Сопоставление методов. Модель: $a = 118363$ км, $e = 0,94$.Возмущения: геопотенциал, u -координаты

Метод	Порядок метода	Интервал интегрир. (сутки)	Δr , м	Δt , с	Перевычисление f за оборот
RADAU	11	60	$3 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-7}$	2172
RKF	7(8)	60	$1 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-5}$	2715
DIFSY2		60	$8 \cdot 10^{-1}$	$2 \cdot 10^{-3}$	

ются с шестнадцатью десятичными знаками, Δr есть модуль разности векторов положений, полученных прямым и обратным интегрированием. Учитываются возмущающее влияние гeопотенциала и притяжение Луны и Солнца.

В табл. 12 (Бордовицына, Шарковский, 1981) приведены данные исследования метода Эверхарта в процессе численного интегрирования уравнений возмущенного движения моделей 1–3 в прямоугольных и параметрических переменных, L — параметр, связанный с длиной аппроксимирующей формулы, Δr определяется так же, как и при построении табл. 11. Δr — ошибка интегрирования уравнения временного преобразования. Интервал интегрирования равен 50 оборотам спутника. Учитываются те же возмущения, что и при построении табл. 11.

Результаты, приведенные в табл. 11, 12 подтверждают тот факт, что эффект стабилизации тем заметнее, чем ниже порядок метода. Сравнение результатов, данных в табл. 11, 12, сопоставление трех методов (табл. 13) Эверхарта, Рунге–Кутты–Фельберга 7(8)-го порядков и Булирша–Штера (Бордовицына, Шарковский, 1981) на модели возмущенного движения высоколетящего ИСЗ с параметрами $e = 0,94$, $a = 118 \cdot 10^3$ км, $T = 110^h$ (Макарова, 1979), а также результаты других авторов (Сурнин, Кужелев, 1980; Кужелев, 1980) позволяют сделать вывод, что и в задачах динамики ИСЗ метод Эверхарта является в настоящее время самым эффективным по точности и быстродействию численным методом.

10.5. Всесоюзный эксперимент по исследованию эффективности алгоритмов и программ численного прогнозирования движения небесных тел

Численный эксперимент проводился по решению III Всесоюзного совещания "Алгоритмы небесной механики" (Рига, 1980) с целью определения сравнительных характеристик, имеющихся в распоряжении предприятий и организаций методов и программ численного интегрирования уравнений движения небесных тел. С задачами и первыми итогами эксперимента, которые были подведены на IV совещании "Алгоритмы небесной механики" (Томск, 1982), мы хотим познакомить читателя в настоящем разделе книги.

Институтом прикладной математики им. М.В. Келдыша АН СССР и НИИ прикладной математики и механики (НИИПММ) при Томском университете были разработаны и предложены участникам эксперимента следующие задачи:

1. Планетная задача десяти тел.
2. Задача одиннадцати тел: движение кометы Галлея под действием притяжения Солнца и девяти больших планет.
3. Задача о движении спутника Земли типа "Навстар".
4. Задача о движении спутника Земли типа "Прогноз".
5. Задача о движении низколетящего ИСЗ.

Начальные координаты и скорости больших планет даны в Приложении 10. Здесь же даны согласованные с этой системой параметров обратные значения масс больших планет. Система начальных параметров больших планет получена на основании системы, выведенной К. Остервинтером и Ш. Ко-

геном (Oesterwinter, Cohen, 1969). В качестве начальной эпохи выбрана эпоха оскуляции кометы Галлея с тем, чтобы дать участникам эксперимента возможность решать задачи 1 и 2 совместно.

Начальные параметры движения для задач 2–5 приведены в Приложении 11. Кроме того, в этой же таблице даны постоянные движения для спутниковых задач.

В задачах 3–5 даны три различные модели спутниковых орбит. Модель типа "Навстар" представляет движение по почти круговой орбите ($e = 0,01$) с периодом 12^h и наклоном $63,4^\circ$. Для таких орбит основными возмущающими факторами, помимо гармоник V_{20} , являются резонансные гармоники тессеральной части геопотенциала, а также Луна и Солнце.

Модель типа "Прогноз" представляет собой движение по орбите с большим эксцентриситетом с периодом, близким к 4 суткам. Основные возмущения обусловлены влиянием геопотенциала, а также притяжением Луны и Солнца. В качестве низколетящего ИСЗ был выбран 1,5-часовой спутник с почти круговой орбитой. Основными возмущениями для него являются действие гармоник геопотенциала, а также сопротивление атмосферы. Интервал интегрирования в первых двух задачах выбран равным 80 годам, т.е. несколько превышает период обращения кометы Галлея. В задачах 3–5 интервалы интегрирования были выбраны достаточно произвольно.

В спутниковых задачах участникам эксперимента было предложено выполнить по три варианта расчетов: с учетом влияния зональной части геопотенциала ($n = 16, m = 0$), с учетом всего геопотенциала до гармоник восьмого порядка ($n, m = 8$), а также с учетом совместного влияния геопотенциала и Луны для спутников типа "Навстар" и "Прогноз" и геопотенциала и сопротивления атмосферы для низколетящего ИСЗ.

В качестве модели геопотенциала была рекомендована Стандартная Земля IV (GM-IV) (Garpochkin, 1977), в качестве модели атмосферы – ГОСТ 22721-77. Расчет эталонного движения, а также анализ результатов эксперимента был поручен НИИПММ при Томском университете и выполнялся группой сотрудников этого института вместе с автором настоящей книги.

Остановимся на оценке точности эталонных орбит, используемых в эксперименте.

Эталонное движение больших планет и кометы Галлея было вычислено с двойной точностью (двадцать четыре десятичных знака) на ЭВМ БЭСМ-6 по программам, разработанным В.А. Шефером (1982). Программы позволяют интегрировать совместно задачу одиннадцати тел методом Эверхарта в прямоугольных координатах.

Предварительно было выполнено небольшое исследование для определения наиболее эффективного в данной задаче алгоритма Эверхарта. Оптимальным оказался алгоритм 15-го порядка, который и был использован при построении эталонных орбит больших планет и кометы Галлея.

Накапливание ошибки интегрирования в положении каждой из девяти больших планет в конце интервала прогнозирования иллюстрируют данные, приведенные в табл. 14.

В качестве Δr во всех оценках эталонных орбит используется модуль разности двух векторов положения объекта, полученных прямым и обратным интегрированием уравнений движения.

Таблица 14

Оценка точности эталонных орбит больших планет. Δr (а.е.) в конечной точке

Планета	Δr	Планета	Δr
Меркурий	$2 \cdot 10^{-9}$	Сатурн	$3 \cdot 10^{-13}$
Венера	$4 \cdot 10^{-13}$	Уран	$8 \cdot 10^{-14}$
Земля + Луна	$3 \cdot 10^{-12}$	Нептун	$8 \cdot 10^{-14}$
Марс	$4 \cdot 10^{-12}$	Плутон	$6 \cdot 10^{-14}$
Юпитер	$2 \cdot 10^{-13}$		

Как и следовало ожидать, наименее точно интегрируются уравнения движения Меркурия, однако ошибка не превосходит $2 \cdot 10^{-9}$ а.е.

На всем интервале прогнозирования движения больших планет вычислялись интегралы площадей, момента количества движения и энергии. Максимальное относительное изменение дает интеграл энергии и оно составляет к концу интервала

$$(H - H_0)/H = 2 \cdot 10^{-12}$$

На рис. 6 показано накопление ошибки при интегрировании уравнений движения кометы Галлея. На интервале прогнозирования ошибка не превосходит $1 \cdot 10^{-11}$ а.е.

Расчет эталонных орбит ИСЗ осуществляется с помощью так называемой численной модели движения ИСЗ, разработанной Т.В. Бордовицыной и Н.А. Шарковским (Бордовицына, Быкова, Тамаров, Шарковский, 1982). Вычисления выполнялись на ЕС ЭВМ с шестнадцатью десятичными знаками. В качестве системы уравнений спутника были выбраны уравнения в регулярных оскулирующих элементах.

Для обоснования такого выбора на рис. 7 вместе с графиком, иллюстрирующим накопление ошибки интегрирования при использовании регулярных элементов (α), при вычислении орбиты ИСЗ типа "Навстар" даны аналогичные графики для уравнений в параметрических переменных (u) и обычно применяемых прямоугольных координатах (x). Как мы видим, ошибка эталонной орбиты не превосходит 0,1 см на всем интервале прогнозирования. Аналогичная оценка для ИСЗ типа "Прогноз" составляет 10 см, низколетящего ИСЗ — 5 см. Билинейное соотношение, которое является интегралом движения в параметрическом пространстве, сохраняется достаточно хорошо. Максимальное отклонение от начального нулевого значения составляет:

"Навстар"	"Прогноз"	Низколетящий ИСЗ
$1 \cdot 10^{-9}$ см	$4 \cdot 10^{-15}$ см	$1 \cdot 10^{-7}$ см

На рис. 8 приведены графики, иллюстрирующие выбор оптимального порядка метода Эверхарта на примере вычисления эталонной орбиты низколетящего ИСЗ. Аналогичные оценки были сделаны для ИСЗ типа "Навстар" и "Прогноз". Оптимальным для ИСЗ типа "Навстар" оказался 11-й порядок, для ИСЗ типа "Прогноз" — 19-й, низколетящего ИСЗ — 15-й. Опорные точки на эталонных орбитах для спутниковых задач даны в Приложении 13.

Перейдем к описанию результатов эксперимента. На первом его этапе в эксперименте приняли участие представители пяти организаций. Фамилии

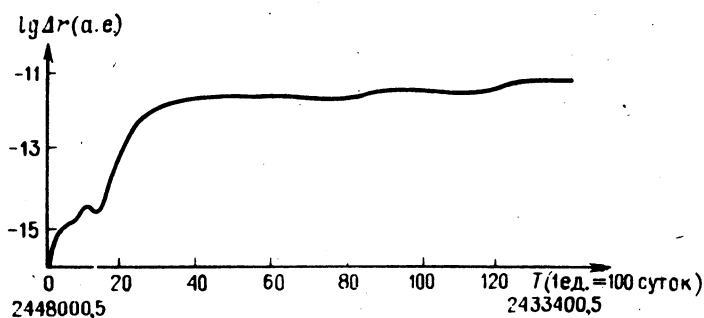


Рис. 6. Оценка точности эталонной орбиты кометы Галлея.

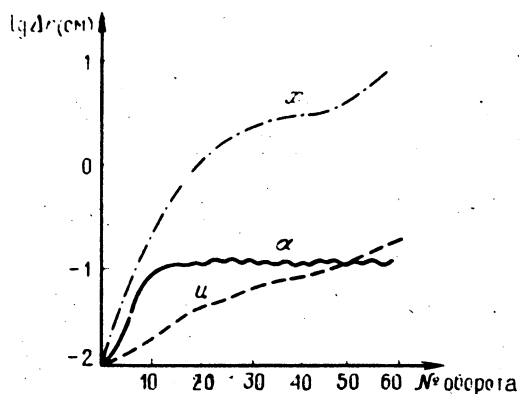


Рис. 7. Оценка точности эталонной орбиты ИСЗ типа "Навстар".

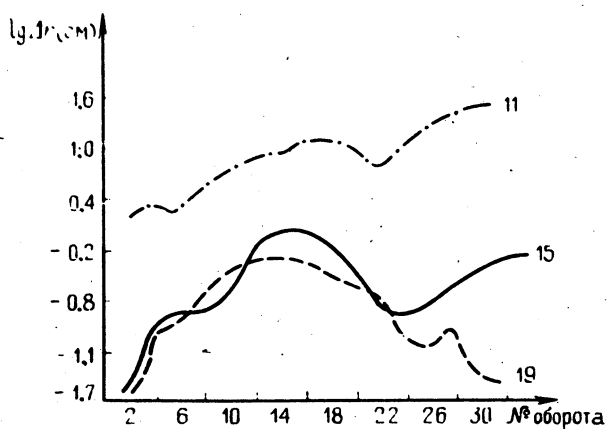


Рис. 8. Оценка точности эталонной орбиты низколетящего ИСЗ.

Таблица 15

Сведения об алгоритмах и программах

Автор	Метод интегрирования	Тип переменных	ЭВМ	Язык программирования	Число десятичных разрядов
В.В. Савченко	метод Эверхарта в модификации В.В. Савченко (1982)	прямоугольные координаты	БЭСМ-6	автокод БЭМШ	12
В.Ф. Колюка, Т.И. Шульгина	метод Тейлора - Стефансена	"	БЭСМ-6	автокод БЭМШ	24
В.А. Шефер	метод Эверхарта	параметрические переменные Кустаанхеймо - Штифеля	БЭСМ-6	ФОРТ-РАН	12
Н.А. Сорокин	"	прямоугольные координаты	ЕС-1033	ФОРТ-РАН	16
Ю.В. Сурнин С.В. Кужелев	"	регулярные переменные типа лагранжевых	ЕС-1022	ФОРТ-РАН	16

авторов, представивших нам свои материалы, приводятся в табл. 16-19. Краткие сведения об использованных алгоритмах и программах приведены в табл. 15.

В табл. 16 даны результаты эксперимента для задачи десяти тел. В этой и последующих таблицах Δr представляет собой модуль разности векторов положений на оцениваемой и эталонной орбитах. В таблице даются максимальные значения Δr на интервале прогнозирования для каждой из девяти планет.

В табл. 17 помещены результаты эксперимента для кометы Галлея. Уклонения Δr от эталонной орбиты даны в трех точках, взятых в окрестнос-

Таблица 16

Результаты эксперимента. Задача десяти тел.
 Δr (а.е.) в конце интервала

Планета	Авторы		Планета	Авторы	
	Савченко	Колюка, Шульгина		Савченко	Колюка, Шульгина
Меркурий	$5,3 \cdot 10^{-7}$	$3,8 \cdot 10^{-9}$	Юпитер	$7,2 \cdot 10^{-8}$	$1,9 \cdot 10^{-9}$
Венера	$3,1 \cdot 10^{-7}$	$3,4 \cdot 10^{-9}$	Сатурн	$6,9 \cdot 10^{-7}$	$4,8 \cdot 10^{-10}$
Земля + Луна	$2,1 \cdot 10^{-7}$	$1,4 \cdot 10^{-9}$	Уран	$3,6 \cdot 10^{-7}$	$5,7 \cdot 10^{-9}$
Марс	$2,1 \cdot 10^{-7}$	$5,2 \cdot 10^{-9}$	Нептун	$6,8 \cdot 10^{-8}$	$4,6 \cdot 10^{-9}$
			Плутон	$3,6 \cdot 10^{-8}$	$2,2 \cdot 10^{-9}$

Таблица 17

Результаты эксперимента. Комета Галлея Δr (а.е.)

Савченко (одиночн. точн.)	Шефер (одиночн. точн.)	Колюка, Шульгина (двойная точн.)
$2,8 \cdot 10^{-8}$	$5,5 \cdot 10^{-8}$	$1,4 \cdot 10^{-9}$
$8,8 \cdot 10^{-7}$	$2,1 \cdot 10^{-7}$	$4,0 \cdot 10^{-8}$
$2,1 \cdot 10^{-7}$	$1,3 \cdot 10^{-7}$	$9,8 \cdot 10^{-9}$

ти апоцентра (J.D. 2 433 400,5), перицентра (J.D. 2 446 500,5) и в конце интервала прогнозирования (J.D. 2 448 000,5).

Данные эксперимента, приведенные в табл. 16, 17, показывают, что наиболее точные результаты дает программа, разработанная Ю.Ф. Колюкой, Т.И. Шульгиной и использующая метод Тейлора—Стефенсена (см. гл. 4). Следует отметить, что, несмотря на применение удвоенной разрядной сетки, эта программа обладает и большим быстродействием.

Для спутниковых задач участниками эксперимента были выполнены только те варианты расчета, где учитывались возмущения от геопотенциала. Поскольку мы не можем привести здесь всех результатов, в табл. 18 и 19 для задач 3—5 приведены выборочные данные по небольшому количеству точек, равномерно распределенных на интервале прогнозирования. Представленные результаты хорошо передают тенденцию накопления ошибки для всех вариантов расчетов. Наилучшее совпадение с эталонной моделью имеют орбиты, рассчитанные Н.А. Сорокиным.

Приведем результаты еще нескольких исследований эффективности алгоритмов численного прогнозирования движения небесных тел, выполненных на задачах численного эксперимента. В.А. Шефер на эталонной орбите кометы Галлея сделал оценку трех методов и программ численного интегрирования: алгоритма Эверхарта, алгоритма Булирша и Штера и метода Рунге—Кутты—Фельберга 7(8). Вычисления выполнялись с двенад-

Таблица 18

Результаты эксперимента. ИСЗ типа "Навстар". Δr (см)

№ п/п	Сорокин		Сурнин,	Кужелев
	$n, m = 16,0$	$n, m = 8,8$	$n, m = 16,0$	$n, m = 8,8$
1	0,00	0,00	0,00	0,00
2	0,00	0,00	0,01	0,01
3	0,00	0,00	0,30	0,30
4	0,00	0,00	0,90	0,90
5	0,00	0,00	2,00	2,00
6	0,00	0,01	3,00	3,00

Таблица 19

Результаты эксперимента. Задачи 4–5. Δr (см)

№ п/п	ИСЗ типа "Прогноз" Δr (см), $n, m = 16,0$		№ п/п	Низколетящий ИСЗ Δr (см), $n, m = 8,8$	
	Сорокин	Сурнин, Кужелев		Сорокин	Сурнин, Кужелев
1	0,0	0,1	1	0,000	0,3
2	3,0	0,6	2	0,000	0,6
3	2,0	0,7	3	0,000	0,9
4	3,0	2,3	4	0,000	1,1
5	1,0	5,0	5	0,000	1,4
6	5,0	35,0	6	0,001	1,8
7	3,0	20,0	7	0,002	2,1
8	2,0	15,0	8	0,001	2,4

Таблица 20

Сопоставление методов на примере интегрирования уравнений движения кометы Галлея в прямоугольных координатах

Метод	RADA11	DIFSY1	RKF 7(8)
fc	15 558	31 914	74 125
Δr (а.е.)	$2,1 \cdot 10^{-6}$	$5,2 \cdot 10^{-6}$	$5,4 \cdot 10^{-3}$
Δr (а.е./сутки)	$6,6 \cdot 10^{-10}$	$1,7 \cdot 10^{-9}$	$1,3 \cdot 10^{-6}$
t (с)	405	542	222

Таблица 21

Сопоставление методов на примере интегрирования уравнений движения кометы Галлея в n -переменных

Метод	RADA11	DIFSY1	RKF 7(8)
fc	13 347	34 052	74 626
Δr (а.е.)	$1,3 \cdot 10^{-7}$	$1,2 \cdot 10^{-6}$	$9,8 \cdot 10^{-7}$
Δr (а.е./сутки)	$2,7 \cdot 10^{-11}$	$4,2 \cdot 10^{-10}$	$3,2 \cdot 10^{-10}$
t (с)	384	615	1478

цатью десятичными рядами. Результаты сравнения приведены в табл. 20, 21.

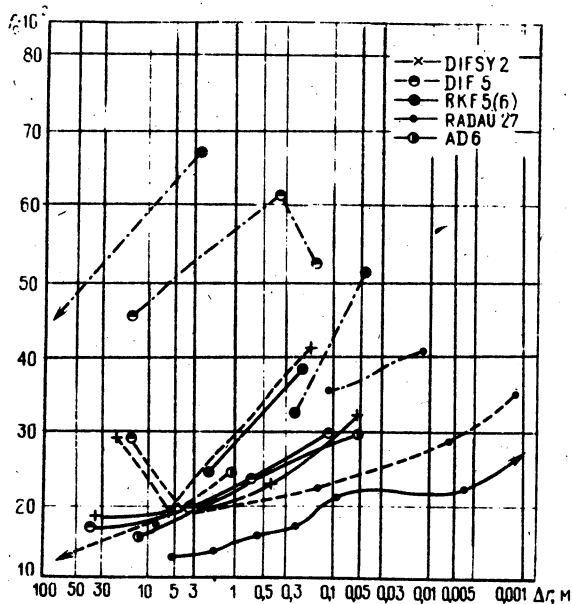
Ю.В. Сурнин и С.В. Кужелев (1984) на примере спутниковых задач численного эксперимента выполнили оценку большого числа алгоритмов, в том числе рассмотрели метод Эверхарта (RADAU), метод Булирша и Штера с первой (DIFSY 2) и второй (DIF 5) версиями коррекции шага интегрирования (см. раздел 7.4); метод Рунге–Кутты–Фельберга 4(5)-го порядка, метод предсказания и коррекции типа Адамса шестого порядка (AD 6).

Таблица 22

Сопоставление метода RKF 7(8) с многооборотными методами

Возмущения и параметр	Интервал интегрирования			
	50 суток		100 суток	
	классич.	модиф.	классич.	модиф.
Геопотенциал Δt , с	0		0,4	
Δr , км	0,021		0,065	
T , мин	7,05		8,8	
Геопотенциал, Δt , с	0,1		1,0	
Солнце Δr , км	0		0	
T , мин	17,7		22	
Геопотенциал, Δt , с	0,1	0,1	18,6	0,9
Луна Δr , км	0,171	0,014	5,363	0,127
T , мин	22,8	22,8	26,6	28,5
Геопотенциал, Δt , с	0,16	0,1	19,2	1,1
Луна, Солнце Δr , км	0,068	0,014	5,550	0,136
T , мин	42,2	42,2	50,3	50,3

Интегрируемые уравнения были записаны в регулярных элементах типа Лагранжевых (Сурнин, Кужелев, Ащеулов, Дементьев, 1977). Вычисления выполнялись с шестнадцатью десятичными разрядами. На рис. 9 представлены результаты оценки указанных алгоритмов. Обозначения методов даны на графике. Сплошная линия соответствует результатам, полученным для ИСЗ

Рис. 9. Сопоставление методов ИСЗ типа "Навстар", $\Delta t = 30$ суткам.

Интервал интегрирования			
150 суток		150 суток	
классич.	модиф.	метод RKF 7(8)	
1,5			
0,066			
9,7		32,4	
1,9			
0			
25,3		81,0	
7,0	18,0		
7,500	1,349		
28,5	30,4	114,0	
71,8	22,7		
7,503	2,372		
54,8	54,8	216,0	

типа "Навстар", штриховая линия – низколетящему ИЗС, штрихпунктирная – ИЗС типа "Прогноз". Построить орбиту ИЗС типа "Прогноз" методом Адамса шестого порядка авторам не удалось. Ю.А. Федяев (1984) на примере интегрирования уравнений ИЗС типа "Навстар" выполнил сравнение стандартного и модифицированного многооборотных методов (см. гл. 9) с методом Рунге–Кутты–Фельберга 7(8)-го порядка.

При вычислении лунно-солнечных возмущений в модифицированном методе учитывались три частоты для возмущений от Луны и одна

для возмущений от Солнца. Построение начальной таблицы и внутреннее интегрирование в многооборотных алгоритмах выполнялось методом RKF 7(8). Результаты сравнения приведены в табл. 22. Здесь Δt – ошибка в определении времени, Δr – ошибка в векторе положения спутника, T – время счета на ЭВМ ЕС-1022 в минутах. Вычисления ведутся с шестнадцатью десятичными разрядами.

Результаты сопоставления методов в задачах численного эксперимента показали, что при соответствующем выборе системы уравнений, порядка метода, шага интегрирования и длины разрядной сетки ЭВМ высокой точности вычисления орбит можно достичь любым из изложенных в настоящей книге численных методов. Однако большинство участников эксперимента отдает предпочтение методу Эверхарта как самому эффективному по точности и быстродействию. Перспективным способом повышения быстродействия является применение многооборотного интегрирования.

10.6. Численный метод и модель возмущающей силы

Применение методов высоких порядков открывает новые возможности для использования и совершенствования математических и физических моделей действующих сил.

Приведем небольшой пример. Сопоставим величину ошибки интегрирования, даваемую разными алгоритмами Рунге–Кутты–Нистрема с влиянием различных гармоник геопотенциала на движение спутника за один оборот. Рассмотрим модель 1.

На рис. 10 графически изображена зависимость накопления ошибки интегрирования методами RKN 4(5)–8(9) от задаваемой абсолютной точности интегрирования. Соответствующие задаваемой точности количество перевычислений функций правых частей уравнений движения и шаг инте-

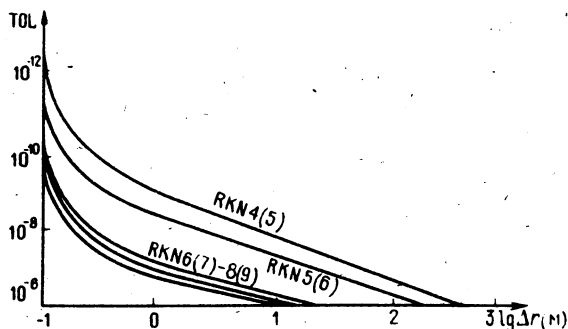


Рис. 10. Накапливание ошибки интегрирования методами Рунге–Кутты–Нистрема.

рирования для каждого метода даны в табл. 23. Влияние различных гармоник $V_{n,m}$ геопотенциала на движение спутника за один оборот показано в табл. 24. Используется, как и ранее, Стандартная Земля IV. Сопоставляя величины, приведенные в табл. 24, с величиной ошибки метода (рис. 10), видим, что уже при значении $TOL = 10^{-10}$ метод 4(5)-го порядка не позволяет учитывать влияние гармоник геопотенциала, начиная с $V_{17,17}$, а метод 5(6)-го порядка дает ошибку, сопоставимую с влиянием этих же членов геопотенциала. В то же время методы 6(7)-го – 8(9)-го порядков позволяют учитывать влияние всех членов геопотенциала до $\bar{V}_{36,0}$. При значении $TOL = 10^{-8}$ все члены геопотенциала, начиная с $\bar{V}_{8,8}$, оказываются за пределами возможностей метода 4(5)-го порядка. При этом методы RKN 6(7)–8(9) по-прежнему позволяют учитывать влияние членов геопотенциала до $V_{17,17}$. Еще один пример. При учете возмущений от светового давления в движении ИСЗ по алгоритму, изложенному в разделе 1.5, точность прогнозирования полностью зависит от порядка метода. Это связано со скачкообразным изменением функции тени при пересечении спутником терминатора. Так, для ИСЗ типа "Навстар" возмущение от светового давления в конце 30-суточного интервала составляет 2 км, а ошибка при интегрировании методом Эверхарта 11-го, 15-го и 19-го порядков достигает соответственно 50, 25 и 5 сантиметров.

Таблица 23.

Характеристика методов Рунге–Кутты–Нистрема.

Возмущения: геопотенциал, $N_p = 1$, $e = 0,05$, $a = 7,5 \cdot 10^3$ км

Метод	10^{-12}		10^{-10}		10^{-8}		10^{-6}	
	Перевыч. f за обо- рот	h, с	Перевыч. f за обо- рот	h, с	Перевыч. f за обо- рот	h, с	Перевыч. f за обо- рот	h, с
4(5)	3361	8	1253	32	541	64	245	133
5(6)	1411	34	673	70	325	150	169	330
6(7)	862	65	456	120	232	230	120	450
7(8)	523	130	298	220	153	450	109	650
8(9)	364	256	298	360	177	500	122	720

Т а б л и ц а 24

Влияние геопотенциала на движение спутника за 1 оборот.

Модель: $\epsilon = 0,05$, $a = 7,5 \cdot 10^3$ км

Гармоники	Δr , м	Гармоники	Δr , м	Гармоники	Δr , м
0,0		9,9	9,6	18,18	0,4
2,2	$79 \cdot 10^3$	10,10	14,8	19,19	0,6
3,3	123,2	11,11	17,2	20,20	0,2
4,4	186,5	12,12	4,3	21,21	0,5
5,5	73,5	13,13	0,9	22,22	0,4
6,6	34,5	14,14	8,6	23,23	0,4
7,7	30,8	15,15	5,4	24,24	0,1
8,8	7,4	16,16	0,4	36,0	0,2
		17,17	0,4		

Таким образом, повышение порядка численных методов дает возможность расширить спектр учитываемых возмущений, позволяет оценить достаточно слабые влияния. В свою очередь совершенствование моделей сил дает возможность увеличить точность и быстродействие алгоритмов прогнозирования. Так, например, применение в качестве модели геопотенциала системы точечных масс вместо разложения по сферическим функциям позволяет повысить быстродействие численных алгоритмов вдвое.

10.7. Вопросы устойчивости вычислительных алгоритмов

Применение для решения дифференциальных уравнений первого и второго порядка методов высоких порядков остро ставит проблему численной устойчивости таких алгоритмов. Дело в том, что аппроксимирующая формула высокого порядка имеет помимо решения, соответствующего данной задаче Коши, так называемые посторонние решения, которые, в случае их распространения, будут нарушать точность аппроксимации.

Пусть

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0 \quad (10.5)$$

— система n дифференциальных уравнений и

$$\sum_i \beta_i v_n = \sum_i \alpha_i f_n \quad (10.6)$$

— линейный многшаговый метод, применяемый для ее решения.

Рассмотрение вопроса устойчивости метода (10.6) сводится к отысканию корней характеристического уравнения

$$\det G(\theta) = 0, \quad (10.7)$$

где матрица G определяется следующим образом:

$$G(\theta) = p(\theta) I_p + h o(\theta) \frac{\partial f}{\partial x} \quad (10.8)$$

Здесь I_p — единичная матрица размерности $n \times n$, $\frac{\partial f}{\partial x}$ — матрица Якоби, $p(\theta) = \sum \beta_i \theta^i$, $o(\theta) = \sum \alpha_i \theta^i$ — первый и второй характеристические полиномы.

Метод является неустойчивым, если хотя бы один корень уравнения (10.7) по модулю больше единицы.

Наличие матрицы Якоби в матрице $G(\theta)$ говорит о том, что устойчивость того или иного метода находится в тесной связи с задачей Коши и преобразование уравнений (10.5) может существенным образом менять устойчивость численного алгоритма.

Понятие абсолютной устойчивости и исследование областей абсолютной устойчивости численных методов обычно связывают с задачей Коши частного вида

$$\dot{y} = \lambda x,$$

где λ — комплексное число. Обоснование такого подхода можно найти в уже упоминавшейся книге "Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений" под редакцией Дж. Холла и Дж. Уатта. Характеристическое уравнение преобразуется в этом случае к виду

$$\sum_{i=0}^k [\beta_i - h\lambda\gamma_i(h\lambda)] \theta^i = 0,$$

причем для линейных многошаговых методов

$$\gamma_i(h\lambda) = \alpha_i, \quad i = 0, 1, \dots, k,$$

для алгоритмов РЕСЕ

$$\gamma_i(h\lambda) = \alpha_i - \frac{\alpha_k}{\beta_k^*} (\beta_i^* - \alpha_i^* h\lambda),$$

где звездочкой отмечены коэффициенты исправляющей формулы.

Метод называется абсолютно устойчивым для данного $h\lambda$, если при этом $h\lambda$ все корни полинома устойчивости лежат внутри единичного круга. Область R_e комплексной плоскости $h\lambda$ называется областью абсолютной устойчивости метода (10.6), если метод (10.6) абсолютно устойчив при всех $h\lambda \in R_e$. На практике обычно говорят об интервале абсолютной устойчивости, представляющем собой пересечение R_e с действительной осью.

В табл. 25 и 26 приведены пределы устойчивости различных многошаговых алгоритмов (Borderies, 1977; Velez, 1974), которые показывают, что

Т а б л и ц а 25

Пределы устойчивости алгоритмов Адамса—Мультон—Коуэлла

Порядок	Предиктор $R_e(h\lambda)$	Корректор $R_e(h\lambda)$	Порядок	Предиктор $R_e(h\lambda)$	Корректор $R_e(h\lambda)$
4	$2,2 \cdot 10^{-1}$	1,5	11	$1,9 \cdot 10^{-3}$	$8,3 \cdot 10^{-2}$
5	$1,1 \cdot 10^{-1}$	1,5	12	$9,8 \cdot 10^{-4}$	$4,7 \cdot 10^{-2}$
6	$5,8 \cdot 10^{-2}$	1,1	13	$5,0 \cdot 10^{-4}$	$1,6 \cdot 10^{-1}$
7	$3,0 \cdot 10^{-2}$	$7,0 \cdot 10^{-1}$	14	$2,6 \cdot 10^{-2}$	$1,6 \cdot 10^{-1}$
8	$1,5 \cdot 10^{-2}$	$4,3 \cdot 10^{-1}$	15	$2,6 \cdot 10^{-2}$	$1,6 \cdot 10^{-1}$
9	$7,6 \cdot 10^{-3}$	$2,5 \cdot 10^{-1}$	16	$5,2 \cdot 10^{-2}$	$1,6 \cdot 10^{-1}$
10	$3,8 \cdot 10^{-3}$	$1,5 \cdot 10^{-1}$			

Таблица 26

Пределы устойчивости для различных многошаговых алгоритмов

Метод	Порядок	$R_c(h\lambda)$	Метод	Порядок	$R_c(h\lambda)$
РЕ	8	$0,50 \cdot 10^{-1}$	РЕСЕ	11	$1,2 \cdot 10^{-1}$
	9	$0,24 \cdot 10^{-1}$		12	$0,7 \cdot 10^{-1}$
	10	$0,11 \cdot 10^{-1}$			
	11	$0,5 \cdot 10^{-2}$	Р (ЕС) ²	8	$3,0 \cdot 10^{-1}$
	12	$0,2 \cdot 10^{-2}$		9	$2 \cdot 10^{-1}$
РЕС	8	$0,28 \cdot 10^{-1}$		10	$1,3 \cdot 10^{-1}$
	9	$0,12 \cdot 10^{-1}$	Р (ЕС) ³	11	$0,9 \cdot 10^{-1}$
	10	$0,5 \cdot 10^{-2}$		12	$0,6 \cdot 10^{-1}$
	11	$0,2 \cdot 10^{-2}$		8	$8 \cdot 10^{-1}$
РЕСЕ	8	$4,8 \cdot 10^{-1}$		9	$5 \cdot 10^{-1}$
	9	$3,0 \cdot 10^{-1}$		10	$3 \cdot 10^{-1}$
	10	$1,9 \cdot 10^{-1}$		11	$2 \cdot 10^{-1}$

устойчивость алгоритма существенным образом зависит от его структуры, пределы устойчивости исправляющей формулы больше, чем предсказующей. Для алгоритмов Адамса—Мульттона—Коуэлла понижение предела устойчивости имеет место вплоть до метода 12-го порядка, затем начинается увеличение предела устойчивости.

Связь устойчивости численного алгоритма с введением стабилизирующих и регуляризирующих преобразований была исследована К. Велезом (Velez, 1974). Наличие матрицы Якоби в (10.8) говорит о том, что введение в уравнения движения различных преобразований может менять устойчивость численного процесса, в том числе и в сторону ее уменьшения, несмотря на то, что динамическая (ляпуновская) устойчивость системы уравнений будет улучшаться. Поэтому введение одного и того же преобразования в уравнение движения может давать различные результаты с различными методами.

Например, временное преобразование $dt = r^n ds$, как показывают графики, приведенные на рис. 11 и 12, ведет себя совершенно по-разному с многошаговыми алгоритмами восьмого и двенадцатого порядков. В том и дру-

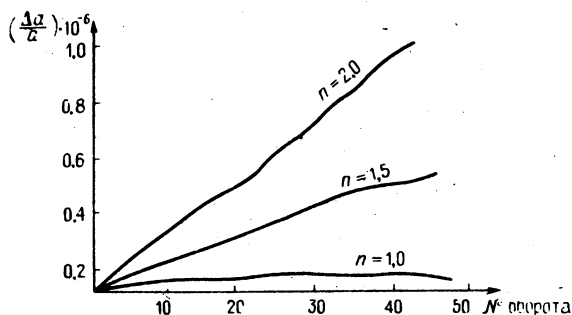


Рис. 11. Накопление ошибки многошаговым методом 8-го порядка при различных n . Задача двух тел, $e = 0,07$, $\Delta t = 50$ оборотам.

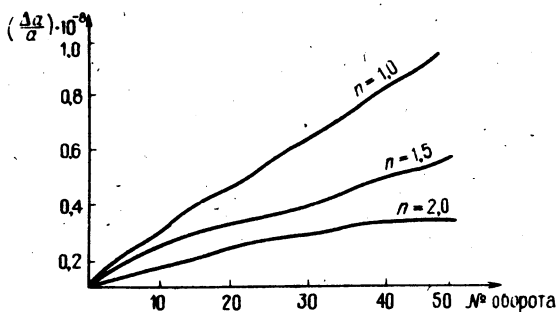


Рис. 12. Накопление ошибки многошаговым методом 12-го порядка при различных n . Задача двух тел, $e = 0,07$, $\Delta t = 50$ оборотов.

гом случаях интегрируется задача двух тел ($e = 0,07$), интервал интегрирования равен 50 оборотам. Наиболее точные результаты с различными методами дает преобразование Кустаанхеймо—Штифеля, которое, как показал, К. Велез, не меняет пределов устойчивости численного метода, но, как мы видели раньше, существенно повышает динамическую устойчивость системы.

10.8. Применение алгоритмов высокоточного численного прогнозирования движения небесных тел

В заключение коснемся некоторых интересных аспектов применения алгоритмов высокоточного численного прогнозирования движения небесных тел.

В этой главе мы уже рассмотрели целый ряд практических задач, в которых с успехом применяются методы высокоточного численного прогнозирования. Это исследование движения больших планет, комет и малых планет. Следует отметить также, что численные методы успешно применяются для исследования движения естественных спутников планет (Herget, 1968; Бордовицына, Быкова, 1978). Однако наиболее широкие возможности применения алгоритмов высокоточного прогнозирования дают задачи динамики ИСЗ.

Создание численных моделей движения ИСЗ позволяет решать широкий круг задач, включающий высокоточное представление наблюдений на больших интервалах времени, анализ структуры возмущений, исследование особенностей движения и эволюция орбит, оценку аналитических алгоритмов и алгоритмов приближенного прогнозирования и т.п.

Используя численную модель движения ИСЗ типа "Навстар", описанную в разделе 10.5, приведем несколько примеров применения таких моделей. На графиках, изображенных на рис. 13, 14, 15, 16, показано исследование структуры возмущений ИСЗ типа "Навстар" на интервале времени в один месяц, охватывающем 60 оборотов спутника. Дано исследование резонанса по периоду обращения спутника (рис. 13), которое показывает, что область резонанса очень мала. Показана зависимость величины возмущений от начального положения орбиты спутника (рис. 14, 15) для резонансной

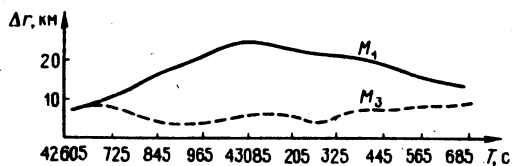


Рис. 13. Исследование области резонанса по периоду обращения спутника.

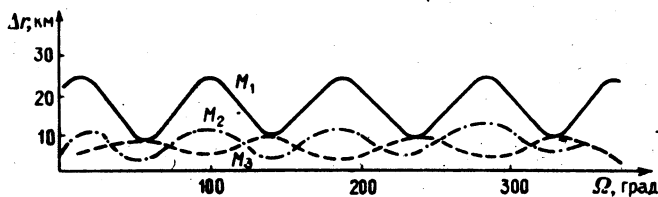


Рис. 14. Возмущения от гармоник $V_{2,2}$ как функция долготы восходящего узла.

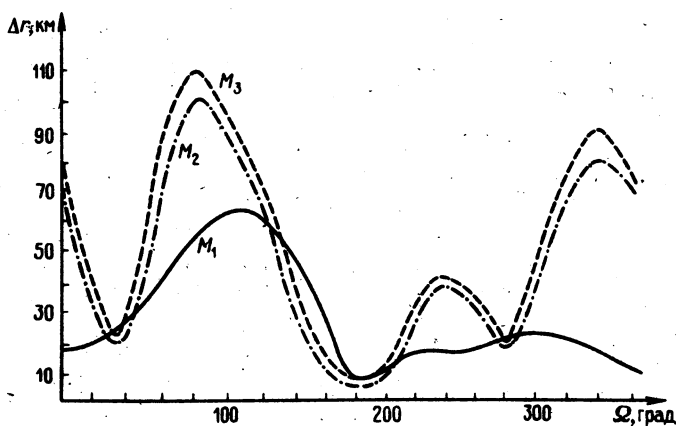


Рис. 15. Лунно-солнечные возмущения как функция долготы восходящего узла.

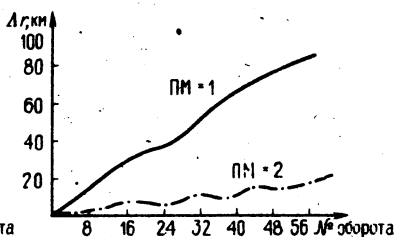
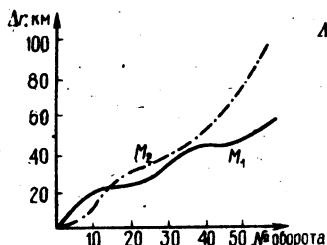


Рис. 16. Лунно-солнечные возмущения как функция времени.

Рис. 17. Оценка алгоритмов приближенного прогнозирования.

(M_1) и нерезонансных (M_2, M_3) моделей движения ИСЗ типа "Навстар". Модели M_2 и M_3 отличаются друг от друга начальным значением долготы перицентра от узла. Прослежено накопление величины лунно-солнечных возмущений во времени (рис. 16). На рис. 17 показана графическая оценка точности полуаналитических алгоритмов прогнозирования навигационных ИСЗ типа "Навстар". Алгоритм ПМ-1 представляет собой симметричную задачу двух неподвижных центров, в алгоритме ПМ-2 учитывается, кроме того, хилловский член в возмущениях от Луны. Следует отметить, что численное интегрирование уравнений задачи двух центров дает на этом интервале времени решение, совпадающее с аналитическим с точностью 2 см.

Таким образом, область применения численных алгоритмов в задачах небесной механики весьма обширна и нужно надеяться, что повышение точности и быстродействия алгоритмов приведет к еще более широкому их использованию.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Коэффициенты метода Рунге–Кутты–Фельберга 7 (8)-го порядка

Обозначения	Численные значения	Обозначения	Численные значения
c_k			
1	0,0000000000000000	2,11	0,0000000000000000
2	0,0740740740740740	2,12	0,0000000000000000
3	0,1111111111111111	2,13	0,0000000000000000
4	0,1666666666666667	3,4	0,1250000000000000
5	0,4166666666666667	3,5	-1,5625000000000000
6	0,5000000000000000	3,6	0,0000000000000000
7	0,8333333333333333	3,7	0,0000000000000000
8	0,1666666666666667	3,8	0,0000000000000000
9	0,6666666666666667	3,9	0,0000000000000000
10	0,3333333333333333	3,10	0,0000000000000000
11	1,0000000000000000	3,11	0,0000000000000000
12	0,0000000000000000	3,12	0,0000000000000000
13	1,0000000000000000	3,13	0,0000000000000000
b_k		4,5	1,5625000000000000
1	0,0488095238095238	4,6	0,2500000000000000
2	0,0000000000000000	4,7	1,1574074074074074
3	0,0000000000000000	4,8	0,0000000000000000
4	0,0000000000000000	4,9	-8,8333333333333333
5	0,0000000000000000	4,10	0,2129629629629629
6	0,3238095238095238	4,11	-2,079268292682927
7	0,2571428571428571	4,12	0,0000000000000000
8	0,2571428571428571	4,13	-2,079268292682927
9	0,0321428571428571	5,6	0,2000000000000000
10	0,0321428571428571	5,7	-2,4074074074074074
11	0,0488095238095238	5,8	0,2711111111111111
$a_{k,i}$		5,9	15,6444444444444444
1,2	0,0740740740740740	5,10	-7,2296296296296296
1,3	0,0277777777777778	5,11	4,3863414634146341
1,4	0,0416666666666667	5,12	0,0000000000000000
1,5	0,4166666666666667	5,13	4,3863414634146341
1,6	0,0500000000000000	6,7	2,3148148148148148
1,7	-0,2314814814814815	6,8	-2,2222222222222222
1,8	0,1033333333333333	6,9	-11,888888888888889
1,9	2,0000000000000000	6,10	5,7592592592592593
1,10	-0,8425925925925926	6,11	-3,6707317073170731
1,11	0,5812195121951219	6,12	-0,1463414634146341
1,12	0,0146341463414634	6,13	-3,5243902439024390
1,13	-0,4334146341463414	7,8	0,0144444444444444
2,3	0,0833333333333333	7,9	0,7444444444444444
2,4	0,0000000000000000	7,10	-0,3166666666666667
2,5	0,0000000000000000	7,11	0,5202439024390244
2,6	0,0000000000000000	7,12	-0,0146341463414634
2,7	0,0000000000000000	7,13	0,5348780487804878
2,8	0,0000000000000000	8,9	3,0000000000000000
2,9	0,0000000000000000	8,10	2,8333333333333333
2,10	0,0000000000000000	8,11	0,5487804878048780

Приложение 1 (окончание)

Обозначения	Численные значения	Обозначения	Численные значения
8,12	-0,0731707317073171	10,11	0,4390243902439024
8,13	0,6219512195121951	10,12	0,1463414634146341
9,10	-0,0833333333333333	10,13	0,2926829268292682
9,11	0,2743902439024390	11,12	0,0000000000000000
9,12	0,0731707317073171	11,13	0,0000000000000000
9,13	0,2012195121951219	12,13	1,0000000000000000

$$TE = 0,048809520900 (f_0 + f_{11} - f_{12} - f_{13})h$$

Приложение 2

Коэффициенты метода Рунге-Кутты-Нистрема 8(9)-го порядка

Обозначение	Численное значение	Обозначение	Численное значение
c_k		b_k	
1	0,0000000000000000	7	0,0321428571428571
2	0,0875000000000000	8	0,0321428571428571
3	0,1750000000000000	9	0,2571428571428571
4	0,4166666666666667	10	0,0000000000000000
5	0,5000000000000000	11	0,0488095238095238
6	0,1666666666666667	a_{ki}	
7	0,3333333333333333	1,2	0,0038281250000000
8	0,6666666666666667	1,3	0,0051041666666667
9	0,8333333333333333	1,4	0,0441573234231964
10	0,0833333333333333	1,5	0,0273809523809524
11	1,0000000000000000	1,6	0,0078336272780717
12	1,0000000000000000	1,7	-0,0525455614344503
b_k		1,8	0,0685432098765432
1	0,0288095238095238	1,9	0,0436964699074074
2	0,0000000000000000	1,10	0,0699954506875766
3	0,0000000000000000	1,11	-0,1854598688912713
4	0,0000000000000000	2,3	0,0102083333333333
5	0,0819047619047619	2,4	-0,0524901318552112
6	0,0942857142857143	2,5	0,0000000000000000
7	0,1214285714285714	2,6	0,0000000000000000
8	0,0535714285714286	2,7	0,0000000000000000
9	0,0295238095238095	2,8	0,0000000000000000
10	0,0886580086580087	2,9	0,0000000000000000
11	0,0018181818181818	2,10	0,0000000000000000
\tilde{b}_k		2,11	0,0000000000000000
1	0,0488095238095238	3,4	0,0951383639875703
2	0,0000000000000000	3,5	0,0821018062397373
3	0,0000000000000000	3,6	0,0078749120894715
4	0,0000000000000000	3,7	-3,7175822616435640
5	0,3238095238095238	3,8	0,0000000000000000
6	0,2571428571428571	3,9	0,0000000000000000

Приложение 2 (окончание)

Обозначения	Численное значение	Обозначения	Численное значение
a_{ki}		a_{ki}	
3,10	5,0074853847528060	6,7	3,7185185185185185
3,11	1,8620011891668740	6,8	-0,0513580246913580
4,5	0,0155172413793103	6,9	0,1531462191358025
4,6	-0,0036398467432950	6,10	-4,8219407277048370
4,7	0,1990293742017880	6,11	-2,5015099280800500
4,8	-0,5436049382716049	7,8	0,5392592592592593
4,9	0,0000000000000000	7,9	0,0596325231481481
4,10	0,0454114658165709	7,10	-0,3595716377540871
4,11	0,1431477432015700	7,11	0,2163911038148843
5,6	0,0018210962646407	8,9	0,0340514081790123
5,7	-0,0918645140867363	8,10	-0,0249868458877375
5,8	0,2093827160493827	8,11	0,0156211192263022
5,9	0,0566956018518518	9,10	0,0044921875000000
5,10	0,0825869448119306	9,11	0,0485262924744632
5,11	0,0000000000000000	10,11	0,9012823490872271

$$TE = 0,001818181818(f_s - f_e)h^2.$$

Приложение 3

Коэффициенты метода Рунге–Кутты–Лобатто 6-го порядка

c_i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}
0	0	0	0	0
$(5 - \sqrt{5})/10$	$(11 - \sqrt{5})/120$	$(25 - \sqrt{5})/120$	$(25 - 13\sqrt{5})/120$	$(-1 + \sqrt{5})/120$
$(5 + \sqrt{5})/10$	$(11 + \sqrt{5})/120$	$(25 + \sqrt{5})/120$	$(25 + 13\sqrt{5})/120$	$(-1 - \sqrt{5})/120$
1	1/12	5/12	5/12	1/12
b_i	1/12	5/12	5/12	1/12

Приложение 4

Коэффициенты неявного метода Рунге–Кутты–Радо 7-го порядка

Обозначения	Численные значения	Обозначения	Численные значения
c_i		3	0,388193468843172
1	0,0000000000000000	4	0,220462211176768
2	0,212340538239153	a_{ij}	
3	0,590533135559265	1,1	0,0000000000000000
4	0,911412040487196	1,2	0,0000000000000000
b_i		1,3	0,0000000000000000
1	0,0625000000000000	1,4	0,0000000000000000
2	0,328844319980060	2,1	0,086682104399833

Приложение 4 (окончание)

Обозначения	Численные значения	Обозначения	Численные значения
2,2	0,139807801810003	3,4	-0,013921784570632
2,3	-0,017929795024201	4,1	0,072404676507266
2,4	0,003780426553518	4,2	0,303041942559723
3,1	0,046452577193484	4,3	0,428502689566694
3,2	0,376701448028600	4,4	0,107462731853612
3,3	0,181300894907813		

Приложение 5

Коэффициенты алгоритма Ярова-Ярового

$\alpha_2 = 0,12589097904375702571$	$\beta_2 = 0,01584853860459567061$
$\alpha_3 = 0,38327485163857449791$	$\beta_3 = 0,14689961189857129248$
$\alpha_4 = 0,69083416931766847639$	$\beta_4 = 0,47725184949683303691$
$\gamma_2 = 0,00199518804134532778$	$\delta_{2,1} = 0,00025117617590135929$
$\gamma_3 = 0,05630292695618908515$	$\delta_{3,1} = 0,00826089845231152425$
$\gamma_4 = 0,32970188500246558707$	$\delta_{4,1} = 0,01331859752363934420$
	$\delta_{4,1} = 0,04684750531479920128$
	$\delta_{4,2} = 0,14745720515983975205$
	$\delta_{4,3} = 0,03346461737350881893$
$q_1 = 0,14285714285714285714$	$q_3 = 0,27959326427949551194$
$q_2 = 0,54191654202071062919$	$q_4 = 0,03563305084265100173$

Приложение 6

Коэффициенты явного метода Рунге-Кутты десятого порядка

Обозначения	Численные значения	Обозначения	Численные значения
c_k			
1	0,0000000000000000	16	0,5000000000000000
2	0,5000000000000000	17	1,0000000000000000
3	0,5265091001416122	b_k	
4	0,7897636502124182	1	0,0333333333333333
5	0,3939235701256716	2	-0,0333333333333333
6	0,7666539862535488	3	-0,1200000000000000
7	0,2897636502124182	4	0,0000000000000000
8	0,1084776802195662	5	0,0000000000000000
9	0,3573842417596775	6	-0,1300000000000000
10	0,8825276619647323	7	-0,1800000000000000
11	0,6426157582403225	8	0,0000000000000000
12	0,1174723380352676	9	0,2774291885177432
13	0,7666539862535488	10	0,1892374781489234
14	0,2897636502124182	11	0,2774291885177432
15	0,5265091001416122	12	0,1892374781499234

Приложение 6 (окончание)

Обозначение	Численные значения	Обозначение	Численные значения
13	0,1300000000000000	10,7	-0,4163121675705613
14	0,0000000000000000	10,8	0,2646463339497430
15	0,1200000000000000	10,9	0,7388498091462691
16	0,0333333333333333	11,1	0,0234065736913354
17	0,0333333333333333	11,2	0,0000000000000000
<i>a</i> _{ki}		11,3	0,0000000000000000
2,1	0,5000000000000000	11,4	0,0000000000000000
3,1	0,2492972676096890	11,5	0,0000000000000000
3,2	0,2772118325319301	11,6	0,0944931301894962
4,1	0,1974409125531046	11,7	-0,2728720559019564
4,2	0,0000000000000000	11,8	0,2240220461155922
4,3	0,5923227376593137	11,9	0,6043814410751351
5,1	0,1973205486287021	11,10	-0,0308153769292800
5,2	0,0000000000000000	12,1	0,0454437753101764
5,3	0,2950833340926718	12,2	0,0000000000000000
5,4	-0,0984803125957024	12,3	0,0000000000000000
6,1	0,1313134173444615	12,4	0,0000000000000000
6,2	0,0000000000000000	12,5	0,0000000000000000
6,3	0,0000000000000000	12,6	-1,0011879966718644
6,4	0,1101544395386385	12,7	0,0120356549909281
6,5	0,5251861293704488	12,8	0,0751269029876479
7,1	0,1342003418463224	12,9	0,0182209240988846
7,2	0,0000000000000000	12,10	-0,0002571528540841
7,3	0,0000000000000000	12,11	0,0045320783713483
7,4	0,6960887032880769	13,1	0,1784010864004364
7,5	0,2504977215703393	13,2	0,0000000000000000
7,6	-0,7910231164923204	13,3	0,0000000000000000
8,1	0,0722182741896621	13,4	0,1101544395386385
8,2	0,0000000000000000	13,5	0,5251861293704488
8,3	0,0000000000000000	13,6	-0,4891485918200436
8,4	0,0000000000000000	13,7	0,9324436126351357
8,5	-0,0583363229364550	13,8	-0,7744750534398395
8,6	0,0030475576685745	13,9	-1,0549021781393582
8,7	0,0915481802977846	13,10	0,1310467120341571
9,1	0,0312550081351656	13,11	0,5870497775994874
9,2	0,0000000000000000	13,12	0,6208980520748788
9,3	0,0000000000000000	14,1	0,1302208066004978
9,4	0,0000000000000000	14,2	0,0000000000000000
9,5	0,0000000000000000	14,3	0,0000000000000000
9,6	0,0001091238215424	14,4	0,6960887032880769
9,7	0,1567257586309950	14,5	0,2504977215703394
9,8	0,1692943511719744	14,6	-0,7589489871296073
10,1	0,0119066044146750	14,7	-0,1715172084634884
10,2	0,0000000000000000	14,8	-0,3702176736789067
10,3	0,0000000000000000	14,9	0,1249810085747473
10,4	0,0000000000000000	14,10	0,0033531092483727
10,5	0,0000000000000000	14,11	0,0066325461367625
10,6	0,2834370820246065	14,12	0,4291165731216179

Приложение 6 (окончание)

Обозначения	Численные значения	Обозначения	Численные значения
14,13	-0,0371778567824698	16,9	0,0000000000000000
15,1	0,2492972676096820	16,10	0,0000000000000000
15,2	0,2772118325319302	16,11	0,0000000000000000
15,3	0,0000000000000000	16,12	0,0000000000000000
15,4	0,0000000000000000	16,13	0,0000000000000000
15,5	0,0000000000000000	16,14	0,0000000000000000
15,6	-0,1459405959360852	16,15	0,8070970760953411
15,7	-0,7990158935110294	17,1	0,0573207954320575
15,8	0,0000000000000000	17,2	-0,5000000000000000
15,9	0,0000000000000000	17,3	-0,8974701633948552
15,10	0,0000000000000000	17,4	0,0000000000000000
15,11	0,0000000000000000	17,5	0,0000000000000000
15,12	0,0000000000000000	17,6	-1,0399100492669534
15,13	0,1459405959360852	17,7	-0,4073570142883858
15,14	0,7990158935110294	17,8	-1,1828302366407418
16,1	0,5000000000000000	17,9	-0,3336592706492250
16,2	0,0000000000000000	17,10	0,3956485423760579
16,3	0,8070970760953411	17,11	0,6950570494599823
16,4	0,0000000000000000	17,12	0,2714873764573832
16,5	0,0000000000000000	17,13	0,5854237348665898
16,6	0,0000000000000000	17,14	0,9588190722132354
16,7	0,0000000000000000	17,15	0,8974701633948552
16,8	0,0000000000000000	17,16	0,5000000000000000

Приложение 7

Коэффициенты методов Адамса и Коуэлла

i	a_i	c_j
0	+ 32011868528640000	+ 32011868528640000
1	- 16005934264320000	- 32011868528640000
2	- 2667655710720000	+ 2667655710720000
3	- 1333827855360000	0
4	- 844757641728000	- 133382785536000
5	- 600222534912000	- 133382785536000
6	- 456783110784000	- 116974585728000
7	- 363891528000000	- 100566385920000
8	- 299520219398400	- 86707632211200
9	- 252655401398400	- 75398324601600
10	- 217227737563200	- 66193573118400
11	- 189640115028000	- 58648487788800
12	- 167636336098320	- 52401453198480
13	- 149735464049160	- 47174128491600
14	- 134928496929540	- 42755108505900
15	- 122506205369730	- 38983584907800
16	- 111956703448001	- 35736323456205

$D = 32011868528640000$

D – общий делитель, на который нужно разделить все коэффициенты.

Приложение 8

Коэффициенты многооборотной формулы предсказания

$$\alpha_0 = 1,$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{1}{M},$$

$$\alpha_2 = \frac{5}{12} - \frac{1}{2} \frac{1}{M} + \frac{1}{12} \frac{1}{M^2},$$

$$\alpha_3 = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \frac{1}{M} + \frac{1}{8} \frac{1}{M^2},$$

$$\alpha_4 = \frac{251}{720} - \frac{1}{2} \frac{1}{M} + \frac{11}{72} \frac{1}{M^2} - \frac{1}{720} \frac{1}{M^3},$$

$$\alpha_5 = \frac{95}{288} - \frac{1}{2} \frac{1}{M} + \frac{25}{144} \frac{1}{M^2} - \frac{1}{288} \frac{1}{M^3},$$

$$\alpha_6 = \frac{19087}{60480} - \frac{1}{2} \frac{1}{M} + \frac{137}{720} \frac{1}{M^2} - \frac{17}{2880} \frac{1}{M^3} + \frac{1}{30240} \frac{1}{M^4},$$

$$\alpha_7 = \frac{5257}{17280} - \frac{1}{2} \frac{1}{M} + \frac{49}{240} \frac{1}{M^2} - \frac{49}{5760} \frac{1}{M^3} + \frac{1}{8640} \frac{1}{M^4},$$

$$\alpha_8 = \frac{1070017}{3628800} - \frac{1}{2} \frac{1}{M} + \frac{121}{560} \frac{1}{M^2} - \frac{967}{86400} \frac{1}{M^3} + \frac{23}{9072} \frac{1}{M^4} - \frac{1}{1209600} \frac{1}{M^5},$$

$$\alpha_9 = \frac{25713}{89600} - \frac{1}{2} \frac{1}{M} + \frac{761}{3360} \frac{1}{M^2} - \frac{89}{6400} \frac{1}{M^3} + \frac{1}{2240} \frac{1}{M^4} - \frac{1}{268800} \frac{1}{M^5},$$

$$\alpha_{10} = \frac{26842253}{95800320} - \frac{1}{2} \frac{1}{M} + \frac{7129}{30240} \frac{1}{M^2} - \frac{4523}{272160} \frac{1}{M^3} + \frac{3013}{4354560} \frac{1}{M^4} -$$

$$- \frac{29}{2903040} \frac{1}{M^5} + \frac{1}{47900160} \frac{1}{M^{10}}.$$

Приложение 9

Коэффициенты исправляющей многооборотной формулы

$$\bar{\alpha}_0 = 1,$$

$$\bar{\alpha}_1 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{1}{M},$$

$$\bar{\alpha}_2 = -\frac{1}{12} + \frac{1}{12} \frac{1}{M^2},$$

$$\bar{\alpha}_3 = -\frac{1}{24} + \frac{1}{24} \frac{1}{M^2},$$

$$\bar{\alpha}_4 = -\frac{19}{720} + \frac{1}{36} \frac{1}{M^2} - \frac{1}{720} \frac{1}{M^4},$$

$$\bar{\alpha}_5 = -\frac{3}{160} + \frac{1}{48} \frac{1}{M^2} - \frac{1}{480} \frac{1}{M^4},$$

$$\bar{\alpha}_6 = -\frac{863}{60480} + \frac{1}{60} \frac{1}{M^2} - \frac{7}{2880} \frac{1}{M^4} + \frac{1}{30240} \frac{1}{M^6},$$

Приложение 9 (окончание)

$$\begin{aligned}\bar{\alpha}_7 &= -\frac{275}{24192} + \frac{1}{72} \frac{1}{M^2} - \frac{1}{384} \frac{1}{M^4} + \frac{1}{12096} \frac{1}{M^6}, \\ \bar{\alpha}_8 &= -\frac{33953}{3628800} + \frac{1}{84} \frac{1}{M^2} - \frac{29}{10800} \frac{1}{M^4} + \frac{5}{36288} \frac{1}{M^6} - \frac{1}{1209600} \frac{1}{M^8}, \\ \bar{\alpha}_9 &= -\frac{8183}{1036800} + \frac{1}{96} \frac{1}{M^2} - \frac{469}{172800} \frac{1}{M^4} + \frac{1}{5184} \frac{1}{M^6} - \frac{1}{345600} \frac{1}{M^8}, \\ \bar{\alpha}_{10} &= -\frac{3250433}{47901600} + \frac{1}{108} \frac{1}{M^2} - \frac{29531}{10886400} \frac{1}{M^4} + \frac{1069}{4354560} \frac{1}{M^6} - \\ &\quad - \frac{13}{20730600} \frac{1}{M^8} + \frac{1}{4790160} \frac{1}{M^{10}}.\end{aligned}$$

Приложение 10

Начальные параметры движения для задачи 1.

Эпоха 2418800,5. Экватор и равноденствие 1950,0

Планета	x	y	z
Меркурий	-0,396336155140	-0,093630703152	-0,009349724225
Венера	0,134692633237	-0,648717030115	-0,300715306849
Земля+Луна	-0,674937627720	-0,688897486835	-0,298843854311
Марс	-0,862114324863	1,257272901510	0,600344637388
Юпитер	-5,309383866750	-1,186562691660	-0,379168642589
Сатурн	8,225193467600	4,101844188820	1,340445093480
Уран	7,688225019830	-16,52707722630	-7,350573442500
Нептун	-9,866963045630	26,08953658170	10,93557181560
Плутон	2,490973615110	43,40553517400	12,95333508090

Планета	\dot{x}	\dot{y}	\dot{z}
Меркурий	0,000383341708	-0,023111790228	-0,012414328807
Венера	0,019738174334	0,003804976274	0,000466329737
Земля+Луна	0,012514079962	-0,010605759535	-0,004600603710
Марс	-0,011344447464	-0,005735115079	-0,002326325814
Юпитер	0,001633519687	-0,006420344554	-0,002794643283
Сатурн	-0,002886663427	0,004510440852	0,001988938943
Уран	0,003588425745	0,001256396978	0,000499788827
Нептун	-0,002981119093	-0,000970196253	-0,000322491453
Плутон	-0,002240108042	-0,000526626016	0,000512288114

Обратные значения масс больших планет

Меркурий	5 983 000	Марс	3 098 700	Уран	22 930
Венера	408 522	Юпитер	1047,3908	Нептун	19 260
Земля+Луна	328 900,1	Сатурн	3499,2	Плутон	1 812 000

Гауссова постоянная $k = 0,01720209895$; а.е. = 149 597 900 км

Приложение 11

Начальные параметры движения для задач 2-5

Комета Галлея, Эпоха 2 418 800,5

Экватор и равноденствие 1950,0

$$\begin{array}{ll} x = -0,185687856613 \text{ а.е.} & \dot{x} = -0,027163741970 \text{ а.е./сут.} \\ y = -0,656967049822 \text{ а.е.} & \dot{y} = -0,002683755798 \text{ а.е./сут.} \\ z = -0,212035102581 \text{ а.е.} & \dot{z} = -0,008143743456 \text{ а.е./сут.} \end{array}$$

ИСЗ типа "Навстар". Эпоха 1981 1 января 0 моск. времени.

Экватор и равноденствие 1950,0

$$\begin{array}{ll} x = -14079,479 \text{ км} & \dot{x} = -0,335786347 \text{ км/с} \\ y = -8868,016 \text{ км} & \dot{y} = -3,483723312 \text{ км/с} \\ z = 20363,622 \text{ км} & \dot{z} = -1,749266864 \text{ км/с} \end{array}$$

ИСЗ типа "Прогноз". Эпоха 1981 13 июня 0 моск. времени.

Экватор и равноденствие 1950,0

$$\begin{array}{ll} x = 137751,497 \text{ км} & \dot{x} = -0,206854192 \text{ км/с} \\ y = -28205,0259 \text{ км} & \dot{y} = 0,334337135 \text{ км/с} \\ z = 102255,678 \text{ км} & \dot{z} = -0,819624609 \text{ км/с} \end{array}$$

Низколетящий ИСЗ. Эпоха 1979 22 февраля 19^h39^m31^s моск. времени.

Экватор и равноденствие 1950,0

$$\begin{array}{ll} x = 6597,277 \text{ км} & \dot{x} = -0,79305442 \text{ км/с} \\ y = 1087,287 \text{ км} & \dot{y} = 4,72661621 \text{ км/с} \\ z = 0,944280 \text{ км} & \dot{z} = 6,058869909 \text{ км/с} \end{array}$$

Постоянные движения

$$\begin{array}{ll} R = 6378,140 \text{ км} & f_{m\epsilon} = 4902,851 \text{ км}^3/\text{с}^2 \\ f_{m\theta} = 398600,5 \text{ км}^3/\text{с}^2 & f_{m\phi} = 132718 \cdot 10^6 \text{ км}^3/\text{с}^2 \end{array}$$

Звездное время $S = \theta_0 + \theta_1 d$

$$\begin{array}{ll} d = \text{J.D.} - 2\,433\,282,5 & \theta_0 = 100^\circ,075542 \\ \theta_1 = 360^\circ,985612288 & \end{array}$$

ЛИТЕРАТУРА

Аксенов Е.П. Теория движения искусственных спутников Земли. — М.: Наука, 1977. 360 с.

Ащеулов В.А. Исследование особенностей прохождения границы "свет-тень" при численном интегрировании уравнений движения ИСЗ по методу Булирша и Штера. — В кн.: Определение и моделирование движения ИСЗ и гравитационного поля. — Новосибирск: НИИГАиК, 1980, с. 17–22.

Бахвалов Н.С. Численные методы. — М.: Наука, 1973, 631 с.

Батчер Дж. Методы Рунге–Кутты. — В кн.: Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений /Под ред. Дж. Холла, Дж. Уатта. — М.: Мир, 1979, с. 76–85.

Бордовицына Т.В. Метод Рунге–Кутты высоких порядков и стабилизирующие преобразования в задачах прогнозирования движения ИСЗ. — Космич. исследования, 1981, т. 19, № 6, с. 941–943.

Бордовицына Т.В., Быкова Л.Е. Теории движения и эфемериды VI и VII спутников Юпитера на 1979–2000 годы. — Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1978. 120 с.

Бордовицына Т.В., Сухоплюева Л.Е. Исследование эффективности численных алгоритмов, использующих стабилизирующие преобразования. — Бюлл. ИТА, 1980, т. 14, № 10, с. 591–596.

Бордовицына Т.В., Федяев Ю.А. Построение методов Рунге–Кутты высоких порядков на ЭВМ. — В кн.: Алгоритмы небесной механики. — Рига: Изд-во Латв. ун-та, 1980, с. 36–38.

Бордовицына Т.В., Шарковский Н.А. Численные алгоритмы высокоточного прогнозирования движения ИСЗ. — В кн.: Труды V-объединенных научных чтений по космонавтике. Сек. "Прикладная небесная механика и управление движением." — М.: 1981, с. 15–23.

Бордовицына Т.В., Харин Б.Т., Шефер В.А. Исследования движения особых малых планет. — В кн.: Определение координат небесных тел. — Рига: Изд-во Латв. ун-та, 1981, с. 77–86.

Бордовицына Т.В., Шарковский Н.А., Федяев Ю.А. Современные численные методы в задачах прогнозирования движения ИСЗ и гравитационного поля. — Новосибирск: НИИКАиК, 1980, с. 24–44.

Бордовицына Т.В., Быкова Л.Е., Тамаров В.А., Шарковский Н.А. Численная модель движения ИСЗ типа Навстар и возможности ее использования. — В кн.: Труды VI объединенных научных чтений по космонавтике. Сек. "Прикладная небесная механика и управление движением." — М., 1982, с. 180–189.

Брауэр Д., Клеменс Дж. Методы небесной механики. — М.: Мир, 1964, 514 с.

Брумберг В.А. Аналитические алгоритмы небесной механики. — М.: Наука, 1980. 208 с.

Вашковьяк С.Н. Функция тени в задачах о влиянии свтового давления на движение ИСЗ. — Вестн. Москов. ун-та. Сер. "Физ. и астр.", 1974, 5, с. 584–590.

Долгачев В.П., Доможилова Л.М., Рыбаков А.И. Численное исследование движения больших планет. — Астр. ж., 1979, 56, с. 126–131.

Дубошин Г.Н. Небесная механика: Основные задачи и методы. — М.: Физматгиз, 1963, 588 с.

Дубошин Г.Н. Небесная механика: Аналитические и качественные методы. — М.: Наука, 1964, 560 с.

Кужелев С.В. Экспериментальное исследование эффективности некоторых современных методов численного интегрирования дифференциальных уравнений движения

ИСЗ. — В кн.: Определение и моделирование движения ИСЗ и гравитационного поля. — Новосибирск: НИИГАиК, 1980, с. 57—63.

Куликов Д.К. Интегрирование уравнений движения небесной механики на электронных вычислительных машинах по квадратурному методу Коуэлла с автоматическим выбором шага. — Бюлл. ИТА, 1960, т. 7, № 10, с. 770—797.

Макарова Е.Н. О численном интегрировании уравнений движения ИСЗ в случае орбит с большими эксцентриситетами. — Бюлл. ИТА, 1979, т. 14, № 9, с. 486—489.

ГОСТ 22721-77. Модель верхней атмосферы для баллистических расчетов. — М.: Изд-во стандартов. 1978, 64 с.

Мячин В.Ф. Регуляризация двойных соударений в задаче n тел и ее применение к численному интегрированию уравнений небесной механики. I. — Бюлл. ИТА, 1974, т. 13, № 8, с. 482—500.

Мячин В.Ф. Регуляризация двойных соударений в задаче n тел и ее применение к численному интегрированию уравнений небесной механики. II. — Бюлл. ИТА, 1975, т. 13, с. 636—651.

Мячин В.Ф., Сизова О.А. Совместное интегрирование уравнений небесной механики численным методом Тейлора—Стеффенсена. — Бюлл. ИТА, 1970, т. 12, № 5, с. 389—400.

Перцев Б.П., Иванова М.В. Расчет нагрузочных чисел Лява для земной модели 508 Гильберта и Дзивонского. — В кн.: Изучение земных приливов. М.: Наука, 1980, с. 42—47.

Платонов А.К., Власова З.П., Степанянц В.А. Многоточечный метод интегрирования с переменным шагом для обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: 1976, 18 с. (Препринт/ИПМ: 72).

Прайор Э. Наблюдаемое влияние отраженной от Земли радиации и водородного торможения на орбитальное ускорение баллонных ИСЗ. — В кн.: Использование искусственных спутников для геодезии. — М.: Мир, 1975, с. 281—294.

Савченко В.В. Численное интегрирование движения комет и планет методом Эверхарта. — М.: 1982, 19 с. (Препринт/ИПМ: 161).

Сехнал Л. Влияние негравитационных сил на движение искусственных спутников Земли. — В кн.: Наблюдения ИСЗ. — М., 1974, № 13, с. 91—109.

Сизова О.А. Применение метода рядов Тейлора—Стеффенсена к планетным задачам. — Бюлл. ИТА, 1976, т. 14, № 4, с. 238—241.

Смарт У.М. Небесная механика. — М.: 1965, 502 с.

Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений/Под ред. Дж. Холла и Дж. Уатта. — М.: Мир, 1979, 312 с.

Справочное руководство по небесной механике и астродинамике/Под ред. Г.Н. Дубошина. — М.: Наука, 1976, 862 с.

— Субботин М.Ф. Курс небесной механики. — Л.; М., 1937, т. 2, 404 с.

Субботин М.Ф. Введение в теоретическую астрономию. — М.: Наука, 1968, 800 с.

Сурнин Ю.В., Кужелев С.В. Применение экстраполяционного метода Булирша и Штера для интегрирования дифференциальных уравнений движения ИСЗ в регулярных элементах. — В кн.: Алгоритмы небесной механики. — Рига: Изд-во Латв. ун-та, 1980, с. 35—36.

Сурнин Ю.В., Кужелев С.В. Оценка сравнительной эффективности численных алгоритмов построения спутниковых траекторий. — Астрономия и геодезия. — Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1984, вып. 12, с. 27—35.

Сурнин Ю.В., Кужелев С.В., Ащеулов В.А., Дементьев Ю.В. Программа прогнозирования движения геодезических искусственных спутников Земли. — В кн.: Наблюдения ИСЗ. — София, 1977, № 16, с. 157—174.

Таратынова Г.П. Методы численного интегрирования для решения уравнений в конечных разностях и их применение к расчетам орбит искусственных спутников Земли. — В кн.: Искусственные спутники Земли. — М.: 1960, вып. 4, с. 56—81.

Урмаев М.С. Орбитальные методы космической геодезии. — М.: Недра, 1981, 256 с.

Федяев Ю.А. Построение алгоритмов Рунге—Кутты высоких порядков на ЭВМ. — Астрономия и геодезия. — Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1983, вып. 10 (в печати).

Федяев Ю.А. Модифицированные методы многооборотного интегрирования. Реализация и применение. — Астрономия и геодезия. — Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1984, вып. 12, с. 42—52.

Холл Дж. Реализация линейных многошаговых методов. — В кн.: Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений/Под ред. Дж. Холла, Дж. Уатта. — М.: Мир 1979, с. 86—101.

Чеботарев Г.А. Аналитические и численные методы небесной механики. — М.; Л.: Наука, 1965, 367 с.

Черницын А.М. Анализ некоторых упрощенных схем определения параметров движения небесных тел. — *Астрономия и геодезия*. — Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1975, вып. 5, с. 6—19.

Черницын А.М. Об использовании упрощенных вычислительных схем при оценивании параметров движения космических объектов. — *Космич. исследов.*, 1975, т. 13, вып. 6, с. 932—935.

Шарковский Н.А. Алгоритм вычисления возмущений от лунно-солнечных приливов в численном интегрировании уравнений движения ИСЗ. — *Астрономия и геодезия*. — Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1983, вып. 11 (в печати).

Шарковский Н.А. Рекуррентный алгоритм преобразования сферических гармоник при координатных вращениях. — *Астрономия и геодезия*. — Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1984, вып. 12, с. 58—66.

Шефер В.А. Программа численного интегрирования уравнений движения и уравнений в вариациях взмущенной задачи двух тел в регуляризованной форме. — В кн.: *Алгоритмы небесной механики*. — Л.: ИТА, 1982, вып. 37, 25 с.

Шефер В.А., Кардаш А.В. Численное исследование эффективности некоторых регуляризирующих преобразований при вычислении орбит с большими эксцентриситетами. — *Астрономия и геодезия*. — Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1984, вып. 12, с. 92—94.

Штеггер Х. Анализ методов дискретизации для обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1978, 461 с.

Штифель Е., Шейфеле Г. Линейная и регулярная небесная механика. — М.: Наука, 1975, 304 с.

Эльясберг П.Е. Введение в теорию полета искусственных спутников Земли. — М.: Наука, 1965, 540 с.

Яров-Яровой М.С. Аналитическая теория движения космического корабля к Луне. — В кн.: *Труды ГАИШ*. — М., 1967, т. 36, с. 28—231.

Яров-Яровой М.С. О применении уточненных методов численного интегрирования в небесной механике. — В кн.: *Труды ГАИШ*. — М., 1974, т. 45, с. 179—200.

Aarseth S.J., Zare K.A. Regularization of Three-Body Problem. — *Celest. Mech.*, 1974, v. 10, p. 185—206.

Baker R. Radiation on a Satellite in the Presence Partly Diffuse and Partly Specular Reflecting Body. — In: *Trajectory of artificial celestial bodies*. — Springer-Verlag, 1966, p. 85.

Balmino Z.G. Numerical Methods of Orbital Dynamics. — In: *Satellite dynamics*. — Berlin; New York: Springer-Verlag, 1975, p. 50—97.

Barlier F., Berger C., Falin J., Kockarts, Thuillier G. A thermospheric model based on satellite dragdata. — *Ann. Geophys.*, 1978, v. 34, 1, p. 9—24.

Barton D., Willers J., Zahar R.V.M. Taylor Series Methods for ordinary Differential Equations — an Evaluation. — In: *Mathematical Software*. — New-York; London: Academic Press, 1971, p. 369—390.

Bauer F. I., Rutishauser H., Stiefel E. New Aspects in Numerical Quadrature. — *Proceed. of Symp.* — In: *Appl. Math.*, Americ. Math. Soc., 1963, p. 199—218.

Baumgart J. Stabilization, Manipulation and Analytic Step adaption — In: *Longtime Predictions in Dynamics*/Eds. by V. Szebehely and B.D. Tapley. — Dordrecht — Holland, 1976, p. 153—163.

Baumgart J., Stiefel E. Stabilization by Manipulation of the Hamiltonian. — *Celest. Mech.* 1974a, v. 10, p. 71—85.

Baumgart J., Stiefel E. Examples of Transformations Improving the numerical accuracy of the integration of differential equations. — *Lect. Not. in Math.*, 1974b, v. 362, p. 207—236.

Bettis D.G. A Runge-Kutta-Nustrom Algorithm. — *Celest. Mech.*, 1973, v. 8, p. 229—233.

Bond V.R. Numerical integration of nearly — Hamiltonian system. — In: *Dynamics Planets and satellites and Theory of motion*. — Dordrecht; Boston, 1978.

Borderies N. Time Regularization of an Adams-Moulton-Cowell Algorithm. - *Celest. Mech.*, 1977, v. 16, p. 291-308.

Broucke R. Solution of the N-body Problem with Recurrent Power Series. - *Celest. Mech.*, 1971, v. 44, 1, p. 110-115.

Bullirsch R., Stoer J. Fehlerabschätzung und Extrapolation mit rationalen Funktionen bei Verfahren vom Richardson-Typus. - *Num. Math.*, 1964, v. 6, p. 413-427.

Bullirsch R., Stoer J. Numerical Treatment of Ordinary Differential Equations by Extrapolation Methods. - *Num. Math.*, 1966, 8, p. 1-13.

Burdet C.A. Theory of Kepler Motion: The General Perturbed Two Body Problem. L. - *Angew. Math. Phys.*, 1968, v. 19, p. 345-368.

Butcher J.C. Coefficients for the Study of Runge-Kutta Integration Processes. - *J. Austral. Math. Soc.*, 1963, v. 3, p. 185-201.

Butcher J.C. On Runge-Kutta Processes of High Order. - *J. Austral. Math. Soc.*, 1964a, v. 4, p. 179-195.

Butcher J.C. Implicit Runge-Kutta Processes. - *Math. Comp.*, 1964, v. 18, p. 50-64.

Cohen C.J., Hubbard E.C. An Algorithm Applicable to Numerical Integration of Orbits in Multirevolution steps. - *Astron. J.*, 1960, v. 65, p. 454-456.

Cohen C.J., Hubbard E.V., Oesterwinter C. Elements of the Outer Planets for one Million Years. - *Astron. Am. Ephemer. and Naut. Alman.*, 1972, v. 22, p. 1-9.

Cunningham L.E. On the Computation of the Special Harmonic Terms Needed During the Numerical Integration of Artificial Satellite. - *Celest. Mech.*, 1970, v. 2, p. 207-216.

Curtis A.R. Algorithm of Tenth Order. - *Inst. Math. Appl.*, 1975, v. 16, p. 35-55.

Dowd L.D., Tapley B.D. Density Models for the Upper Atmosphere. - *Celest. Mech.*, 1979, v. 20, p. 261-295.

Everhart E. Implicit Single Sequence Methods for Integrating Orbits. - *Celest. Mech.*, 1974, v. 10, p. 35-55.

Everhart E. An Efficient Integrator of Very High Order and Accuracy with Appendix. Listing of RADAU. - Denver: Univ. of Denver, 1974, p. 20.

Fehlberg E. Klassische Runge-Kutta Formeln fünfter und siebenter Ordnung mit Schrittweiser Kontroll. - *Computing*, 1969, v. 4, p. 93-106.

Fehlberg E. Klassische Runge-Kutta-Niström Formeln mit Schrittweisen Kontroll für Differentialgleichungen $x = f(t, x)$. - *Computing*, 1972, v. 10, p. 305-315.

Ferraz-Mello S. Action de la pression de radiation sur le mouvement d'un satellite artificiel de la terre. - XIV Congress IAF, Paris, 1963, p. 41-50.

Ferraz-Mello S. Sur le problème de pression de radiations dans la théorie des satellites artificiels. - *C.R. Acad. Sci. Paris*, 1964, v. 258, p. 463-466.

Gaposchkin E.M. Gravity-Field Determination from Laser Observations. - *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, 1977, v. 284, 1326, p. 525-527.

Graf O.F. Multirevolution Methods for Orbit Intergration. - *Lech. Not. in Math.*, 1974, v. 362, p. 471-490.

Graf O.F., Bettis D.G. Modified Multirevolution Methods for Satellite Orbit Computation. - *Celestia Mech.*, 1975, v. 11, p. 433-448.

Gragg W.B. On Extrapolation Algorithms of Ordinary Initial Value Problems. - *J. SJAM. Numer. Anal.*, 1965, v. 2, p. 384-403.

Hairer E. A Runge-Kutta Method of Order 10. - *J. of Inst. of Math.*, 1978, v. 21, p. 48259.

Heggie D. C. A Global Regularization of Gravitational N-body Problem. - *Celest. Mech.*, 1974, v. 10, p. 217-242.

Henrici P. Discrete Variable Methods in Ordinary Differential Equations. - New York; London; Sydney, 1962, 407 p.

Herget P. Outer Satellites of Jupiter. - *Astron. J.*, 1968, v. 73, p. 737-742.

Jacchia L.G. Thermospheric Temperature Density, and Composition: New Models. - *Smithsonian Astrophys. Obs. Spec. rep.*, 1977, v. 375, 103 p.

James R.W. Transformation of Spherical Harmonics under Change of Reference Frame. - *Geophys. J.R. Astr. Soc.*, 1969, № 17, p. 305-316.

Kozai J., Kinoshita H. Effects of motion of the equatorial plane on the orbital elements of an Earth satellite. - *Celest. Mech.*, 1973, v. 7, № 3, p. 365.

La Budde R.A., Greenspan D. Energy and Momentum Conserving Methods of Arbitrary Order for Numerical Integration of Equations of Motion. Part I. - *Num. Math.*, 1976, v. 25, p. 323-346.

La Budde R.A., Greenspan D. Energy and Momentum Conserving Methods of Arbitrary Order for Numerical Integration of Equations of Motion. Part. II. – Num. Math., 1976, v. 26, p. 1–15.

Lala P., Sehnal L. The Earth's Shadowing Effects in the Shortperiodic Perturbations of Satellite orbits. – Bulletin on the astron. institutes of Czechoslovakia, 1969, v. 20, № 6, p. 327–330.

Lambert J.D., Watson J.A. Symmetric Multistep Methods for Periodic Initial Value Problems. – J. Inst. of Math. and its Appl., 1976, v. 18, № 2, p. 189–202.

Lapidus L., Seinfeld J.H. Numerical Solution of Ordinary Differential Equations. – New York; London: Acad. Press, 1971, 299 p.

Levi-Civita T. Traettorie singolari ed urbi nel problema ristretto dei tre corpi. – Ann. di mat. pura ed appl., 1904, v. 9, p. 1–32.

Levi-Civita T. Sur la regularisation du problème des trois corps. – Acta math., 1920, v. 42, p. 99–144.

Levie S.L. Transformation of a Potential Function unde coordinat Rotations. – J. of the astron. Scie., 1971, v. 18, № 4, p. 217–235.

Mace D., Thomas L.H. An Extrapolation Formula for Stepping the Calculation of the Orbit of an Artificial Satellite Several Revolution Ahead at a Time. – Astron. J., 1960, v. 65, p. 300–303.

Moore P. Orbitally Stable Multistep Methods. – Celest. Mech., 1978, v. 17, p. 281–297.

Nacozy P.E. The Use of Integrals in Numerical Integration of N-body Problem. – Astrophys. Space Sci., 1971, v. 14, p. 40–41.

Nacozy O. The Intermediate Anomaly. – Celest. Mech., 1977, v. 16, p. 309–313.

Nacozy P. Time Elements in Keplerian Orbital Elements. – Celest. Mech., 1981, v. 23, p. 173–198.

Oestervinter C., Cohen C. New Orbital Elements for Moon and Planets. – Celest. Mech., 1969, v. 5, p. 317–395.

Papp K.A., Innanen K.A., Patrick A.T. A Comparison of Five Algorithms for Numerical Orbit Computation in Galaxy. Models. – Celest. Mech., 1980, v. 21, p. 327–349.

Richardson L. F. The Approximate Arithmetical Solution by Finite Differences of Physical Problems Involving Differential Equations with an Application to the Stresses in a Masonry Dam. – Philos. Trans. Roy. Soc. ser. A. – London, 1910, v. 210, p. 307–357.

Richardson L. F., Gaunt J. The Deferred Approach to the Limit. – Philos. Trans. Roy. Soc. ser. A. – London, 1927, v. 226, p. 299–361.

Shanks J. Solutions of Differential Equations of Functions. – J. Austral. Math. Soc., 1966, v. 20, p. 21–38.

Shapiro J., Smith M., Ash M., Herrick S. General Relativity and the Orbit of Icarus. – Astron. J., 1971, v. 76, p. 588–606.

Sigrist N. Restricted Liapunov Stability and Stabilization of Ordinary Differential Equations. – J. of Appl. Math. and Phys., 1974, v. 25, p. 37–46.

Silver M. A short Derivation of the Sperling Burdet Equations. – Celest. Mech., 1975, v. 11, p. 39–341.

Steffensen K.F. On the problem of Three Bodies in the Plane. – Kong. Danske Videnskab. Selskab., Mat. Fys. Medd. 1957, v. 13, № 3, 18 p.

Stiefel E., Rössler M., Waldvogel J., Burdet C.A. Methods of regularization for computer orbits in celestial mechanics. – Washington, 1967, 124 p.

Stiefel E., Bettis D.G. Stabilisation of Cowell's Method. – Num. Math., 1969, v. 13, p. 154–175.

Stoer J. Extrapolation Methods for the Solution of Initial Value Problem and Their Practical Realization. – Lect. Not. in Math., 1974, v. 362, p. 1–21.

Sundman K.F. Memoire sur le problème des trois corps. – Acta Math., 1913, v. 36, p. 105–179.

Velez C.E. Notions of Analitic VS Numerical Stability as Applied to the Numerical Calculations of Orbits. – Celest. Mech., 1974, v. 10, p. 405–422.

Wyatt S. The Effect of terrestrial Radiation Pressure on Satellite Orbits. – In: Dynamics of Satellites. – Springer-Verlag, 1963.

Zare K. A Regularization of Multiple Encounters in Gravitational N-body Problems. – Celest. Mech., 1974, v. 10, p. 207–216.