# *Глава 15* СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

## § 1. Принцип относительности

Свыше двухсот лет считалось, что урав­нения движения, провозглашенные Ньютоном, правильно описывают природу. Потом в них была обнаружена ошибка. Обнаружена и тут же исправлена. И заметил ошибку, и исправил ее в 1905 г. один и тот же человек — Эйн­штейн.

Второй закон Ньютона, выражаемый урав­нением

C:\1\pic\gray.jpg

безмолвно предполагал, что *m —* величина постоянная. Но теперь мы знаем, что это не так, что масса тела возрастает со скоростью. В формуле, исправленной Эйнштейном, mпоявилась в таком виде:

C:\1\pic\gray.jpg

Здесь «масса покоя» — это масса неподвиж­ного тела, а *c —* скорость света (примерно *км/сек).*

Для кого теория нужна лишь для реше­ния задач, тому этой формулы будет вполне достаточно. Больше ничего от теории относи­тельности ему не понадобится; он просто вве­дет в законы Ньютона поправку на изменяе­мость массы. Из самой формулы очевидно, что рост массы в обычных условиях незначителен.

Даже если *v* — скорость спутника (около 8 *км/сек),* то и при этих условиях ; под­становка этой величины в формулу показывает, что поправка к массе составит не более одной двухмиллиардной части самой массы, что, пожалуй, заметить невозможно. На самом деле, правильность формулы подтверждена наблюдением движения разнообразных частиц, скорость которых практически вплотную подходила к скорости света. В обычных условиях рост массы незаметен; тем заме­чательней, что он сперва был обнаружен теоретически, а уж после открыт на опыте. Хотя для достаточно больших скоростей рост может быть как угодно велик, открыт он был не таким путем. Закон этот в момент своего открытия означал лишь едва заметное изменение в некоторых цифрах. Тем интереснее разоб­раться, как сочетание физического размышления и физиче­ского эксперимента вызвало его к жизни. Вклад в это дело внесло немалое число людей, но конечным итогом их деятель­ности явилось открытие Эйнштейна.

У Эйнштейна, собственно говоря, есть две теории относи­тельности. Мы будем здесь говорить только о *специальной теории относительности,* ведущей свое начало с 1905 г. В 1915 г. Эйнштейн выдвинул еще одну теорию, называемую *общей теорией относительности.* Она обобщает специальную теорию на случай тяготения; мы не будем ее здесь обсуждать.

Принцип относительности впервые высказал Ньютон в одном из следствий из Законов Движения: «Относительные движения друг по отношению к другу тел, заключенных в каком-либо пространстве, одинаковы, покоится ли это про­странство или движется равномерно и прямолинейно без вра­щения». Это означает, к примеру, что при свободном полете межпланетного корабля с постоянной скоростью все опыты, поставленные на этом корабле, все явления, наблюдаемые на нем, будут таковы, как будто он покоится (конечно, при ус­ловии, что наружу из корабля выходить не будут). В этом смысл принципа относительности. Мысль эта — довольно про­ста; вопрос только в том, *верно ли,* что во всех опытах, произ­водимых внутри движущейся системы, законы физики выглядят такими же, какими они были бы, если бы система стояла на одном месте. Давайте же сначала посмотрим, так ли выглядят законы Ньютона в движущейся системе. Для этого нам снова понадобится помощь наших молодых людей — Мика и Джо.

Пускай Мик отправился вдоль по оси *х* с постоянной ско­ростью *u* и измеряет свое положение в какой-то точке, показан­ной на фиг. 15.1. Он обозначает «x-расстояние» точки в своей системе координат как *х'.* Джо стоит на месте и измеряет по­ложение той же точки, обозначая ее x-координату в своей системе через *х.* Связь между координатами в двух системах ясна из рисунка. За время *t* начало системы Мика сдвинулось на *ut,* и если обе системы вначале совпадали, то

*x'=x-ut, у'=у,*

*z'=z, t' =t.* (15.2)

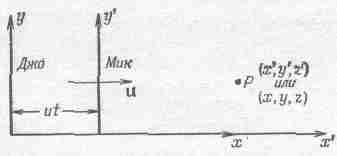
Если подставить эти преобразования координат в законы Нью­тона, то законы эти превращаются в такие же законы, но в штрихованной системе; это значит, что законы Ньютона имеют одинаковый вид в движущейся и в неподвижной системах; потому-то, проделав любые опыты по механике, и нельзя ска­зать, движется система или нет.

Принцип относительности применялся в механике уже издавна. Многие, в частности Гюйгенс, пользовались им для вывода законов столкновения биллиардных шаров почти так же, как мы в гл. 10 доказывали сохранение импульса.

В прошлом столетии в результате исследования явлений электричества, магнетизма и света интерес к принципу отно­сительности возрос. Максвелл подытожил в своих уравнениях электромагнитного поля многие тщательные исследования этих явлений. Его уравнения сводят воедино электричество, магнетизм, свет. Однако уравнения Максвелла, по-видимому, *не подчиняются* принципу относительности: если преобразо­вать их подстановкой (15.2), то *их вид не останется прежним.* Значит, в движущемся межпланетном корабле оптические и электрические явления не такие, как в неподвижном; их можно использовать для определения его скорости, в частности опре­делить и абсолютную скорость корабля, сделав подходящие электрические или оптические измерения. Одно из следствий уравнений Максвелла заключается в том, что если возмущение поля порождает свет, то эти электромагнитные волны распро­страняются во все стороны одинаково и с одинаковой ско­ростью с=300 000 *км/сек.* Другое следствие уравнений: если источник возмущения движется, то испускаемый свет все равно мчится сквозь пространство со скоростью *с.* Так же бывает и со звуком: скорость звуковых волн тоже не зависит от движения источника.

Эта независимость от движения источника света ставит интересный вопрос. Положим, что мы едем в автомашине со скоростью *и,* а свет от задних фар распространяется со ско­ростью *с.* Дифференцируя первую строчку в (15.2), получаем

C:\1\pic\gray.jpg



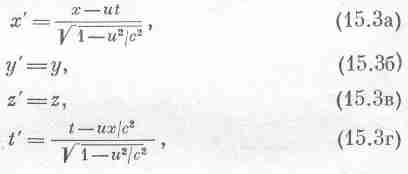
*Фиг. 15.1. Две системы коорди­нат, находящиеся в равномерном относительном движении вдоль оси х.*

Это означает, что, в согласии с преобразованиями Галилея, видимая скорость света по измерениям, проведенным из авто­машины, будет не с, а с — *и.* Например, скорость автомашины 100 000 *км/сек,* а скорость света 300 000 *км/сек,* тогда свет от фар будет удаляться с быстротой 200 000 *км/сек.* Во всяком случае, измерив скорость света, испускаемого фарами (если только справедливы преобразования Галилея для света), можно узнать скорость автомашины. На этой идее основыва­лось множество опытов по определению скорости Земли, но ни один из них не удался: *никакой скорости* обнаружено не было. Вы скоро познакомитесь очень подробно с одним из таких опытов. Вы разберетесь, что в нем случилось и в чем было дело. Что-то неладное творилось в ту пору с уравнениями физики. Но что именно?

## § 2. Преобразование Лоренца

Когда стало ясно, что с уравнениями физики не все ладится, первым долгом подозрение пало на уравнения электродинамики Максвелла. Они только-только были написаны, им было всего 20 лет от роду; казалось почти естественным, что они неверны. Их принялись переписывать, видоизменять и подгонять к тому, чтобы оказался выполненным принцип относительности в галилеевой форме (15.2). При этом в уравнениях электро­динамики появились новые члены; они предсказывали новые электрические явления, но эксперимент никаких таких явлений не обнаружил, и пришлось отказаться от попыток изменить уравнения Максвелла. Постепенно всем становилось ясно, что максвелловы законы электродинамики абсолютно правильны, а загвоздка в чем-то другом.

Между тем Лоренц заметил одно замечательно любопыт­ное явление: когда он делал в уравнениях Максвелла под­становку

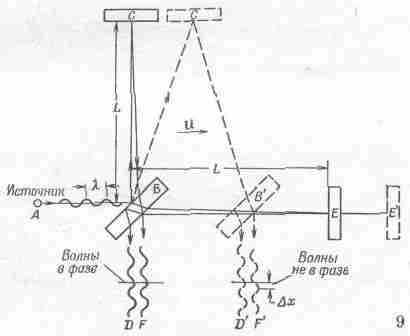


то форма уравнений после подстановки не менялась! Урав­нения (15.3) теперь называют *преобразованием Лоренца.* А Эйн­штейн, следуя мысли, впервые высказанной Пуанкаре, пред­положил, что *все физические законы не должны меняться от преобразований Лоренца.* Иными словами, надо менять не законы электродинамики, а законы механики. Но как же изменять законы Ньютона, чтобы *они* при преобразованиях Лоренца не менялись? Когда такая цель поставлена, то остается только переписать уравнения Ньютона так, чтобы выполнялись поставленные условия. Как оказалось, единственное, что нужно от них потребовать,— это, чтоб масса *m* в уравнениях Ньютона приобрела вид (15.1). Стоит внести это изменение, и наступает полная гармония между уравнениями Ньютона и Максвелла. Если вы теперь, желая согласовать измерения, проведенные Миком и Джо, используете преобразования Лоренца, то вы ни за что не узнаете, кто из них движется, ибо форма всех урав­нений в обеих системах координат будет одной и той же!

Интересно понять, что означает эта замена старых преобра­зований координат и времени на новые. Старые (галилеевы) кажутся очевидными, новые (лоренцевы) выглядят необычно. Как же это может быть, с логической и с экспериментальной точек зрения, что справедливы не старые преобразования, а новые? Чтобы разобраться в этом, мало изучить законы меха­ники, надо (как это и сделал Эйнштейн) проанализировать и наши представления о *пространстве* и *времени,* иначе этих преобразований не поймешь. В течение некоторого времени мы будем изучать эти представления и следствия из них. По­камест же стоит отметить, что такой анализ оказывается вполне оправданным — его результаты согласуются с данными опыта.

## § 3. Опыт Майкелъсона— Морли

Мы уже говорили, что в свое время были сделаны попытки определить абсолютную скорость движения Земли сквозь воображаемый «эфир», который, как думали тогда, пропиты­вает собой все пространство. Самый известный из таких опытов проделали в 1887 г. Майкельсон и Морли. Но только через 18 лет отрицательные результаты их опыта объяснил Эйнштейн.



*Фиг. 15.2. Схема опыта Майкельсона — Морли.*

Для опыта Майкельсона — Морли использовался прибор, схема которого показана на фиг. 15.2. Главные части при­бора: источник света *А,* посеребренная полупрозрачная стек­лянная пластинка *В,* два зеркала *С* и *Е.* Все это жестко укреп­ляется на тяжелой плите. Зеркала *С* и *Е* размещены были на одинаковом расстоянии *L* от пластинки *В.* Пластинка *В* рас­щепляет падающий пучок света на два, перпендикулярных один к другому; они направляются на зеркала и отражаются обратно на пластинку *В.* Пройдя снова сквозь пластинку *В,* оба пучка накладываются друг на друга *(D* и *F).* Если время прохождения света от *В* до *Е* и обратно равно времени про­хождения от *В* до *С* и обратно, то возникающие пучки *D* и *F* окажутся в фазе и усилятся взаимно; если же эти времена хоть немного отличаются, то в пучках возникает сдвиг по фазе и, как следствие,— интерференция. Если прибор в эфире «покоится», то времена в точности равны, а если он движется направо со скоростью *и,* то появится разница во времени. Давайте по­смотрим, почему.

Сначала подсчитаем время прохождения света *от В к Е* и обратно. Пусть время «туда» равно t1? а время «обратно» равно *.* Но пока свет движется от *В* до зеркала, сам прибор уйдет на расстояние ut1,так что свету придется пройти путь со скоростью *с.* Этот путь можно поэтому обозначить и как *ct1;* следовательно,

C:\1\pic\gray.jpg

(этот результат становится очевидным, если учесть, что ско­рость света по отношению к прибору есть *с — и;* тогда как раз время равно длине *L,* деленной на с — *и).* Точно так же можно рассчитать и *.* За это время пластинка *В* приблизится на расстояние *,* так что свету на обратном пути придется пройти только *.* Тогда

C:\1\pic\gray.jpg

Общее же время равно

C:\1\pic\gray.jpg

удобнее это записать в виде

C:\1\pic\gray.jpg

А теперь подсчитаем, сколько времени *t3* свет будет идти от пластинки *В* до зеркала *С.* Как и прежде, за время *t3* зеркало *С* сдвинется направо на расстояние *ut3* (до положения *С'),* а свет пройдет по гипотенузе *ВС'* расстояние *ct3.* Из

C:\1\pic\gray.jpgпрямоугольного треугольника следует

C:\1\pic\gray.jpgили

откуда

C:\1\pic\gray.jpg

C:\1\pic\gray.jpgПри обратной прогулке от точки *С'* свету приходится пройти то же расстояние; это видно из симметрии рисунка. Значит, и время возвращения то же *(t3),* а общее время равно *2t3.* Мы запишем его в виде

Теперь мы можем сравнить оба времени. Числители в (15.4) и (15.5) одинаковы — это время распространения света в по­коящемся приборе. В знаменателях член *u2/с2* мал, если только *и* много меньше *c.* Знаменатели эти показывают, насколько изме­няется время из-за движения прибора. Заметьте, что эти из­менения *неодинаковы —* время прохождения света до С и обратно чуть меньше времени прохождения до *Е* и обратно. Они не совпадают, даже если расстояния от зеркал до *В* оди­наковы. Остается только точно измерить эту разницу.

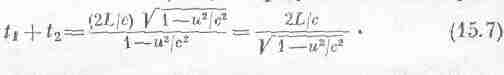
Здесь возникает одна техническая тонкость: а что если длины *L* не точно равны между собой? Ведь точного равенства все равно никогда не добьешься. В этом случае надо просто повернуть прибор на 90°, расположив *ВС по* движению, a *BE — поперек.* Различие в длинах тогда перестает играть роль, и остается только наблюдать за *сдвигом* интерференционных полос при повороте прибора.

Во время опыта Майкельсон и Морли расположили прибор так, что отрезок *BE* оказался параллельным движению Земли по орбите (в определенный час дня и ночи). Орбитальная ско­рость равна примерно 30 *км/сек,* и «снос эфира» в определенные часы дня или ночи и в определенное время года должен до­стигать этой величины. Прибор был достаточно чувствителен, чтобы заметить такое явление. Но никакого различия во вре­менах обнаружено не было — скорость движения Земли сквозь эфир оказалось невозможно обнаружить. Результат опыта был нулевой.

Это было загадочно. Это настораживало. Первую плодо­творную идею, как выйти из тупика, выдвинул Лоренц. Он допустил, что все материальные тела при движении сжимаются, но только в направлении движения. Таким образом, если длина покоящегося тела есть *L0,* то длина тела, движущегося

со скоростью *и* (назовем ее L*\\,* где значок *\\* показывает, что движение происходит вдоль длины тела), дается формулой

Lll=L0√(1-u2/c2). (15.6)

Если эту формулу применить к интерферометру Майкельсона — Морли, то расстояние от В до С останется прежним, а расстояние от В до E укоротится до L√(1-u2/с2). Таким об­разом, уравнение (15.5) не изменится, но *L* в уравнении (15.4) изменится в соответствии с (15.6). В результате мы получим

Сравнивая это с (15.5), мы видим, что теперь *t1+t2=2t3.* Стало быть, если прибор действительно сокращается так, как мы предположили, то становится понятным, почему опыт Майкельсона — Морли никакого эффекта не дал.

Хотя гипотеза сокращения успешно объясняла отрица­тельный итог опыта, она сама оказалась беззащитной перед обвинением, что ее единственная цель — избавиться от труд­ностей в объяснении опыта. Она была чересчур искусственной. Однако сходные трудности возникали и в других опытах по обнаружению эфирного ветра. В конце концов стало казаться, что природа вступила в «заговор» против человека, что она прибегла к конспирации и то и дело вводит какие-то новые явления, чтобы свести к нулю каждое явление, с помощью которого человек пытается измерить *и.*

И наконец, было признано (на это указал Пуанкаре), что *полная конспирация — это и есть закон* природы! Пуанкаре предположил, что в природе *есть закон,* заключающийся в том, что нельзя обнаружить эфирный ветер *никаким* способом, т. е. абсолютную скорость обнаружить невозможно.

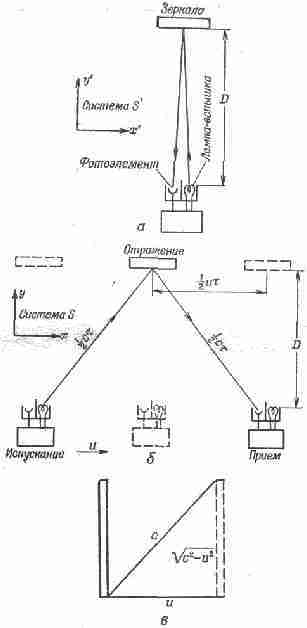
**§ 4. Преобразование времени**

При проверке, согласуется ли идея о сокращении расстоя­ний с фактами, обнаруженными в других опытах, оказывается, что все действительно согласуется, если только считать, что *время тоже преобразуется* и притом так, как это высказано в уравнении (15.3). По этой-то причине время t3, которое затратит свет на путешествие *от В к С* и обратно, оказывается неодина­ковым, если его вычисляет человек, делающий этот опыт в движущемся межпланетном корабле, или же неподвижный наблюдатель, который следит со стороны за этим кораблем. Для первого время *t3* равно просто 2L/c, а для второго оно равно 2L/c√(1-u2/с2) [уравнение (15.5)]. Иными словами, если вы со стороны наблюдаете, как космонавт закуривает папиросу, вам кажется, что он делает это медленнее, нежели обычно, хотя сам он считает, что все происходит в нормальном темпе. Стало быть, не только длины должны сокращаться, но и приборы для измерения времени («часы») должны замедлить свой ход. Иначе говоря, когда часы на космическом корабле отсчи­тывают, по мнению космонавта, 1 *сек,* то, по мнению стороннего

! наблюдателя, пройдет 1/√(1-u2/с2) *сек.*

Замедление хода часов в движущейся системе — явление весьма своеобразное, и его стоит пояснить. Чтобы понять его, давайте проследим, что бывает с часовым механизмом, когда часы движутся. Так как это довольно сложно, то лучше часы выбрать попроще. Пусть это будет стержень (метровой длины) с зеркалами на обоих концах. Если пустить световой сигнал между зеркалами, то он будет без конца бегать туда-сюда, а часы будут тикать каждый раз, как только свет достигнет нижнего конца. Конструкция довольно глупая, но в принципе такие часы возможны. И вот мы изготовим двое таких часов со стержнями равной длины и синхронизуем их ход, пустив их одновременно; ясно, что они всегда будут идти одинаково: ведь длина стержней одна и та же, а скорость света *с —* тоже. Дадим одни часы космонавту; пусть он возьмет их с собой на межпланетный корабль и поставит их поперек направления движения, тогда длина стержня не изменится. Да, но откуда ' мы знаем, что поперечная длина не меняется? Наблюдатель может договориться с космонавтом, что на высоте *у* в тот мо­мент, когда стержни поравняются, каждый сделает другому на его стержне метку. Из симметрии следует, что отметки придутся на те же самые координаты *у* и y', в противном случае одна метка окажется ниже или выше другой и, сравнив их,

можно будет сказать, кто из них двигался на самом деле. Так что же происходит в движущихся часах? Входя на борт корабля, космонавт убедился, что это вполне приличные стан­дартные часы и ничего особенного в их поведении на корабле он не заметил. Если бы он что-то заметил, то сразу понял бы, что он движется; если хоть что-то меняется в результате движения, то ясно, что он движется. Принцип же относи­тельности утверждает, что в равномерно движущейся системе это невозможно; стало быть, в часах никаких изменений не произошло. С другой стороны, когда внешний наблюда­тель взглянет на пролетающие мимо часы, он увидит, что свет, перебегая от зеркала к зеркалу, на самом деле движется зигзагами, потому что стержень все время перемещается боком. Мы уже анализировали такое зигзагообразное дви­жение в связи с опытом Майкельсона — Морли. Когда за заданное время стержень сдвинется на расстояние, пропорциональное u(фиг. 15.3), то расстояние, пройденное за то же время светом, будет пропорционально с, и поэтому расстоя­ние по вертикали пропорционально √(*с2*-*и2).*



*Фиг. 15.3. Опыт со «световыми часами».*

*а, — «световые часы» покоятся в си­стеме S* '; *б*—*те же часы движутся через систему S; в — диагональ, по которой движется пучок света в движущихся «световых часах».*

Значит, свету понадобится *больше времени,* чтобы пройти движущийся стержень из конца в конец,— больше, чем когда стержень неподвижен. Поэтому кажущийся промежуток вре­мени между тиканьями движущихся часов удлинится в той же пропорции, во сколько гипотенуза треугольника длиннее катета (из-за этого в формуле и появляется корень). Из рисунка также видно, что чем *и* больше, тем сильнее видимое замедление хода часов. И не только такие часы начнут отставать, но (если только теория относительности правильна!) любые часы, ос­нованные на любом принципе, также должны отстать, причем в том же отношении. За это можно поручиться, не проделывая дальнейшего анализа. Почему?

Чтобы ответить и на этот вопрос, положим, что у нас есть еще двое часов, целиком сходных между собой, скажем, с зубчатками и камнями, или основанных на радиоактивном распаде, или еще каких-нибудь. Опять согласуем их ход с нашими первыми часами. Пусть, пока свет прогуляется до конца и обратно, известив о своем прибытии тиканьем, за это время новая модель завершит свой цикл и тоже воз­вестит об этом какой-нибудь вспышкой, звонком или любым иным сигналом. Захватим с собой на космический корабль новую модель часов. Может быть, эти часы уже не отстанут, а будут идти так же, как их неподвижный двойник. Ах, нет! Если они разойдутся с первой моделью (которая тоже нахо­дится на корабле), то человек сможет использовать этот раз­нобой между показаниями обоих часов, чтобы определить скорость корабля. А ведь считается, что скорость узнать не­мыслимо. Смотрите, как ловко! *Нам не нужно ничего знать о механизме работы* новых часов, не нужно знать, что именно *в них* замедляется, мы просто знаем, что, какова бы ни была причина, ход часов будет выглядеть замедленным, и притом в любых часах одинаково.

Что же выходит? Если *все* движущиеся часы замедляют свой ход, если любой способ измерения времени приводит к замедленному темпу течения времени, нам остается только сказать, что *само время,* в определенном смысле, кажется на движущемся корабле замедленным. На корабле все: и пульс космонавта, и быстрота его соображения, и время, потребное для зажигания папиросы, и период возмужания и постарения — все это должно замедлиться в одинаковой степени, ибо иначе можно будет узнать, что корабль движется. Биологи и медики иногда говорят, что у них нет уверенности в том, что раковая опухоль будет в космическом корабле развиваться дольше.

Однако с точки зрения современного физика это случится почти наверняка; в противном случае можно было бы по бы­строте развития опухоли судить о скорости корабля!

Очень интересным примером замедления времени при дви­жении снабжают нас мю-мезоны (мюоны) — частицы, которые в среднем через 2,2•10-6 *сек* самопроизвольно распадаются. Они приходят на Землю с космическими лучами, но могут быть созданы и искусственно в лаборатории. Часть космических мюонов распадается еще на большой высоте, а остальные — только после того, как остановятся в веществе. Ясно, что при таком кратком времени жизни мюон не может пройти больше 600 *м,* даже если он будет двигаться со скоростью света. Но хотя мюоны возникают на верхних границах атмосферы, при­мерно на высоте 10 *км* и выше, их все-таки обнаруживают в земных лабораториях среди космических лучей. Как это может быть? Ответ состоит в том, что разные мюоны летят с различными скоростями, иногда довольно близкими к скорости света. С их собственной точки зрения они живут всего лишь око­ло 2 *мксек,* с нашей же — их жизненный путь несравненно более долог, достаточно долог, чтобы достигнуть поверхности Земли. Их жизнь удлиняется в 1/√(1-*u2/c2*)раз. Среднее время жизни мюонов разных скоростей было точно измерено, причем полу­ченное значение хорошо согласуется с формулой.

Мы не знаем, почему мезон распадается и каков его внут­ренний механизм, но зато мы знаем, что его поведение удов­летворяет принципу относительности. Тем и полезен этот принцип — он позволяет делать предсказания даже о тех вещах, о которых другим путем мы мало чего узнаем. К при­меру, еще не имея никакого представления о причинах распада мезона, мы все же можем предсказать, что если его скорость со­ставит 9/10 скорости света, то кажущаяся продолжительность отведенного ему срока жизни будет равна 2,2 • 10-6/√(1-92/102) *сек.* И это предсказание оправдывается. Правда, неплохо?

**§ 5. Лоренцево сокращение**

Теперь мы вернемся к преобразованию Лоренца (15.3) и попытаемся лучше понять связь между системами координат *(х, у,* z, *t)* и *(х'*, *у', z', t').* Будем называть их системами *S* и *S',* или соответственно системами Джо и Мика. Мы уже отметили, что первое уравнение основывается на предположении Лоренца о том, что по направлению *х* все тела сжимаются. Как же можно доказать, что такое сокращение действительно бывает? Мы уже понимаем, что в опыте Майкельсона — Морли по принципу относительности *поперечное* плечо *ВС* не может сократиться; в то же время нулевой результат опыта требует,

чтобы *времена* были равны. Чтобы получился такой результат, приходится допустить, что продольное плечо *BE* кажется сжатым в отношении √(1-*и2/с2). Что* означает это сокращение на языке Джо и Мика? Положим, что Мик, двигаясь с системой *S'* в направлении *х',* измеряет метровой линейкой координату *х'* в некоторой точке. Он прикладывает линейку *х'* раз и ду­мает, что расстояние равно *х'* метрам. С точки же зрения Джо, (в системе *S)* линейка у Мика в руках укорочена, а «на самом деле» отмеренное им расстояние равно x'√(1-*u2/с2)* метров. Поэтому если система *S'* удалилась от системы *S* на расстояние *ut,* то наблюдатель в системе *S* должен сказать, что эта точка (в его координатах) удалена от начала на *x=x'√(1-u2/c2)+ut,* или

C:\1\pic\gray.jpg

Это и есть первое уравнение из преобразований Лоренца.

**§ 6. Одновременность**

C:\1\pic\gray.jpgПодобным же образом из-за различия в масштабах времени появляется и знаменатель в уравнении (15.Зг) в преобразо­ваниях Лоренца. Самое интересное в этом уравнении — это новый и неожиданный член в числителе, член *ux/с2.* В чем его смысл? Внимательно вдумавшись в положение вещей, можно понять, что события, происходящие, по мнению Мика (на­блюдателя в системе S'), в разных местах одновременно, с точки зрения Джо (в системе *S),* вовсе *не* одновременны. Когда одно событие случилось в точке x*1* в момент *t0,* а другое — в точке *х2* в тот же момент *t0,* то соответствующие моменты t1 и t2 отличаются на

Это явление можно назвать «нарушением одновременности удаленных событий». Чтобы пояснить его, рассмотрим сле­дующий опыт.

Пусть человек, движущийся в космическом корабле (система *S'),* установил в двух концах корабля часы. Он хочет знать, одинаково ли они идут. Как синхронизовать ход часов? Это можно сделать по-разному. Вот один из способов, он почти не требует вычислений. Расположимся как раз где-то посредине между часами. Из этой точки пошлем в обе стороны световые сигналы. Они будут двигаться в обоих направлениях с оди­наковой скоростью и достигнут обоих часов в одно и то же время. Вот этот-то одновременный приход сигналов и можно применить для согласования хода. Положим, что человек в *S'* таким способом согласует ход часов. Посмотрим, согласится ли наблюдатель в системе *S,* что эти часы идут одинаково. Космонавт в системе *S'* имеет право верить, что их ход оди­наков; ведь он не знает, что он движется. Но наблюдатель в системе *S* сразу рассудит, что раз корабль движется, то часы на носу корабля удалились от светового сигнала и свету при­шлось пройти больше половины длины корабля, прежде чем он достиг часов; часы на корме, наоборот, двигались к све­товому сигналу — значит, его путь сократился. Поэтому сигнал сперва дошел до часов на корме, хотя космонавту в системе *S'* показалось, что сигналы достигли обоих часов одновременно. Итак, выходит, что когда космонавт считает, что события в двух местах корабля произошли одновременно (при одном и том же значении t'в его системе координат), то в другой системе координат *одинаковым t'* отвечают *разные* значения *t!*

**§ 7. Четырехвекторы**

Что еще можно обнаружить в преобразованиях Лоренца? Любопытно, что в них преобразование *х* и *t* по форме похоже на преобразование *хну,* изученное нами в гл. 11, когда мы говорили о вращении координат. Тогда мы получили



C:\1\pic\gray.jpgт. е. новое *х'* перемешивает старые *х* и y, а *у'* тоже их переме­шивает. Подобным же образом в преобразовании Лоренца новое *х'* есть смесь старых *х* и *t,* а новое t' *—* смесь *t* и *х.* Зна­чит, преобразование Лоренца похоже на вращение, но «вра­щение» в *пространстве и времени.* Это весьма странное поня­тие. Проверить аналогию с вращением можно, вычислив ве­личину

В этом уравнении три первых члена в каждой стороне пред­ставляют собой в трехмерной геометрии квадрат расстояния между точкой и началом координат (сферу). Он не меняется (остается инвариантным), несмотря на вращение осей коор­динат. Аналогично, уравнение (15.9) свидетельствует о том, что существует определенная комбинация координат и вре­мени, которая остается инвариантной при преобразовании Лоренца, Значит, имеется полная аналогия с вращением; аналогия эта такого рода, что векторы, т. е. величины, составленные из «компонент», преобразуемых так же, как и коорди­наты, оказываются полезными и в теории относительности.

Итак, мы расширим понятие вектора. Пока он у нас мог иметь только пространственные компоненты. Теперь включим в это понятие и временную компоненту, т. е. мы ожидаем, что существуют векторы с четырьмя компонентами: три из них похожи на компоненты обычного вектора, а к ним привязана четвертая — аналог времени.

В следующих главах мы проанализируем это понятие. Мы увидим, что если идеи этого параграфа приложить к импульсу, то преобразование даст три пространственные составляющие, подобные обычным компонентам импульса, и четвертую ком­поненту — временную часть (которая есть не что иное, как *энергия).*

**§ 8. Релятивистская динамика**

Теперь мы готовы к тому, чтобы с более общей точки зрения исследовать, как преобразования Лоренца изменяют законы механики. [До сих пор мы только объясняли, как изменяются длины и времена, но не объяснили, как получить измененную формулу для *т,* уравнение (15.1). Это будет сделано в следу­ющей главе.] Изучение следствий формулы Эйнштейна для массы *m* в механике Ньютона мы начнем с закона силы. Сила есть быстрота изменения импульса, т. е.

F=*d(mv)/dt*

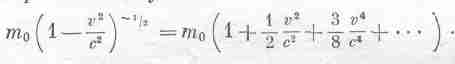
Импульс по-прежнему равен *mv,* но теперь

Это законы Ньютона в записи Эйнштейна. При этом видоиз­менении, если действие и противодействие по-прежнему равны (может, не в каждый момент, но по крайней мере после усред­нения по времени), то, как и раньше, импульс должен со­храняться, но сохраняющейся величиной является не старое *mv* при постоянном *m*, а выражение (15.10) с переменной мас­сой. С таким изменением в формуле для импульса сохранение импульса по-прежнему будет существовать.

Посмотрим теперь, как импульс зависит от скорости. В нью­тоновой механике он ей пропорционален. В релятивистской механике в большом интервале скоростей (много меньших *с)* они также примерно пропорциональны [см. (15.10)], потому что корень мало отличается от единицы. Но когда *v* почти равно *с,* то корень почти равен нулю и импульс поэтому бес­предельно растет.

Что бывает, когда на тело долгое время воздействует по­стоянная сила? В механике Ньютона скорость тела беспрерывно будет возрастать и может превысить даже скорость света. В релятивистской же механике это невозможно. В теории относительности беспрерывно растет не скорость тела, а его импульс, и рост этот сказывается не на скорости, а на массе тела. Со временем ускорение, т. е. изменения в скорости, прак­тически исчезает, но импульс продолжает расти. Поскольку сила приводит к очень малым изменениям в скорости тела, мы, естественно, считаем, что у тела громадная инерция. Но как раз это самое и утверждает релятивистская формула (15.10) для массы тела; она говорит, что инерция крайне велика, когда *v* почти равно *с.* Разберем пример. Чтобы откло­нить быстрые электроны в синхротроне Калифорнийского Технологического института, необходимо магнитное поле, в 2000 раз более сильное, чем следует из законов Ньютона. Иными словами, масса электронов в синхротроне в 2000 раз больше их нормальной массы, достигая массы протона! Если *m* в 2000 раз больше m0, то 1-v2/с2 равно 1/4 000 000, или *v* от­личается от с на 1/8 000 000, т.е. скорость электронов вплотную подходит к скорости света. Если электроны и свет одновре­менно отправятся в соседнюю лабораторию (находящуюся, скажем, в 200 *м),* то кто явится первым? Ясное дело, свет: он всегда [движется быстрее](#прим2). Но насколько быстрее? Трудно сказать, насколько раньше во времени, но зато можно ска­зать, на какое расстояние отстанут электроны: на 1/30 *мм, т.* е. на 1/3 толщины этого листка бумаги! Масса электронов в этих состязаниях чудовищна, а скорость не выше скорости света.

На чем еще скажется релятивистский рост массы? Рас­смотрим движение молекул газа в баллоне. Если газ нагреть, скорость молекул возрастет, а вместе с нею и их масса. Газ станет тяжелее. Насколько?

Разлагая *т0/√(1-v2/c2)=m0(1-v2*/с2)-1/2 в ряд по формуле бинома Ньютона, можно найти приближенно рост массы при малых скоростях. Получается

C:\1\pic\gray.jpgИз формулы ясно, что при малых *v* ряд быстро сходится и первых двух-трех членов здесь вполне достаточно. Значит, можно написать

где второй член и выражает рост массы за счет повышения скорости. Когда растет температура, v2 растет в равной мере, значит, увеличение массы пропорционально повышению тем­пературы. Но 1/2*т0v2* — это кинетическая энергия в старомод­ном, ньютоновом смысле этого слова. Значит, можно сказать, что прирост массы газа равен приросту кинетической энергии, деленной на с2, т. е. Δm=Δ(к.э.)/с2.

**§ 9. Связь массы и энергии**

Это наблюдение навело Эйнштейна на мысль, что массу тела можно выразить проще, чем по формуле (15.1), если сказать, что масса равна полному содержанию энергии в теле, деленному на с2. Если (15.11) помножить на с2, получается

mc2=m0с2+1/2*m0v2+... .* (15.12)

Здесь левая часть дает полную энергию тела, а в последнем члене справа мы узнаем обычную кинетическую энергию. Эйнштейн осмыслил первый член справа (очень большое по­стоянное число *т0с2)* как часть полной энергии тела, а именно как его внутреннюю энергию, или «энергию покоя».

К каким следствиям мы придем, если вслед за Эйнштейном предположим, что *энергия тела всегда равна тс2?* Тогда мы сможем вывести формулу (15.1) зависимости массы от скорости, ту самую, которую до сих пор мы принимали на веру. Пусть тело сперва покоится, обладая энергией *т0с2.* Затем мы при­кладываем к телу силу, которая сдвигает его с места и постав­ляет ему кинетическую энергию; раз энергия примется воз­растать, то начнет расти и масса (это все заложено в первона­чальном предположении). Пока сила действует, энергия и масса продолжают расти. Мы уже видели (см. гл. 13), что быстрота роста энергии со временем равна произведению силы на скорость

de/dt=**f**•**v**. (15.13)

C:\1\pic\gray.jpgКроме того, ***F****=d(m****v****)/dt* [см. гл. 9, уравнение (9.1)]. Связав все это с определением *Е* и подставив в (15.13), получим

C:\1\pic\gray.jpgМы хотим решить это уравнение относительно m*.* Для этого помножим обе части на *2*m*.* Уравнение обратится в

C:\1\pic\gray.jpgТеперь нам нужно избавиться от производных, т. е. проин­тегрировать обе части равенства. В величине (2m) *dm/dt* можно узнать производную по времени от m*2,* а в (2m**v**)•*d*(m**v**)/*dt—* производную по времени от (mv)2. Значит, (15.15) совпадает с

Когда производные двух величин равны, то сами величины могут отличаться не больше чем на константу *С.* Это позво­ляет написать

m2с2=m2v2+C. (15.17)

Определим теперь константу *С* явно. Так как уравнение (15.17) должно выполняться при любых скоростях, то можно взять v=0 и обозначить в этом случае массу через m*0.* Подстановка этих чисел в (15.17) дает

m20c2=0+С.

Это значение *С* теперь можно подставить в уравнение (15.17). Оно принимает вид

m2c2=m2v2+m20c2. (15.18)

Разделим на с2 и перенесем члены с *m* в левую часть

m2(1-v2/c2)=m20,

откуда

C:\1\pic\gray.jpg

А это и есть формула (15.1), т. е. как раз то, что необходимо, чтобы в уравнении (15.12) было соответствие между массой и энергией.

В обычных условиях изменения в энергии приводят к очень малым изменениям в массе: почти никогда не удается из дан­ного количества вещества извлечь много энергии; но в атомной бомбе с энергией взрыва, эквивалентной 20 000 тонн трини­тротолуола, весь пепел, осевший после взрыва, на 1 г легче первоначального количества расщепляющегося материала. Это потому, что выделилась энергия, которая имела массу 1 *г,* в согласии с формулой ΔE=Δ(mc2). Вывод об эквивалент­ности массы и энергии прекрасно подтвердился в опытах по аннигиляции материи — превращению вещества в энергию. Электрон с позитроном могут взаимодействовать в покое, имея каждый массу покоя m*0.* При сближении они исчезают, а вместо них излучаются два γ-луча, каждый опять с энергией *т0с2.* Этот опыт прямо сообщает нам о величине энергии, свя­занной с существованием массы покоя у частицы.

***\* Правда, видимый свет проиграет гонку из-за преломления в воз­духе. А γ-излучение ее, несомненно, выиграет.***

***\* Выпуск 1***

***Глава 16***

**РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ЭНЕРГИЯ И РЕЛЯТИВИСТСКИЙ ИМПУЛЬС**

[**§ 1. Относитель­ность и «фило­со****фы»**](#a1)

[**§ 2. Парадокс близн****ецов**](#a2)

[**§ 3. Преобразование** **скоростей**](#a3)

[**§ 4. Релятивис****тская масса**](#a4)

[**§ 5. Релятивистская** **энергия**](#a5)

**§ 1. Относительность и «философы»**

В этой главе мы продолжим обсуждение принципа относительности Эйнштейна — Пуан­каре, его влияния на наши физические воз­зрения и на весь характер человеческого мыш­ления.

Пуанкаре следующим образом сформулиро­вал принцип относительности: «Согласно прин­ципу относительности, законы физических явле­ний обязаны быть одинаковыми для непод­вижного наблюдателя и для наблюдателя, ко­торый относительно него переносится равно­мерным движением, так что у нас нет и не может быть никаких способов отличить, уно­сит ли нас такое движение или не уносит».

Когда эта мысль обрушилась на человечест­во, среди философов началась суматоха. Осо­бенно среди «философов за чашкой чая», кото­рые говорят: «О, это очень просто: теория Эйн­штейна утверждает, что все относительно!» Поразительное множество таких «философов»— и не только рассуждающих за чашкой чая (впрочем, не желая их обижать, я буду говорить только о «философах за чашкой чая»)—твердят: «Из открытий Эйнштейна следует, что все отно­сительно; это оказало глубокое влияние на нашу мысль». И еще потом добавляют: «В физике было доказано, что явления зависят от системы отсчета». Можно услышать немало подобных ве­щей, но трудно понять их смысл. По-видимому, системы отсчета, о которых идет речь, — это те системы координат, которыми мы пользовались в анализе теории относительности. Итак, тот факт, что «все зависит от системы отсчета», оказывает могучее влияние на современную мысль. Остается только удивляться, почему? Ведь прежде всего сама идея: «все зависит от точки зрения» — настолько проста, что, несомненно, не было нужды обременять себя анализом трудностей физической теории относительности, чтобы открыть ее. Всякий, кто идет по тротуару, знает, что все, что он видит, зависит от его системы отсчета. Сперва он видит лица прохожих, а уж потом — их затылки. И почти во всех философских заключениях, о которых говорят, что они проистекли из теории относительности, нет ничего более глу­бокого, чем утверждения типа: «Пешеход выглядит спереди иначе, нежели сзади». Известный рассказ о нескольких слепых, споривших, на что похож слон, тоже весьма напоминает теорию относительности с точки зрения таких философов.

Но в теории относительности, пожалуй, есть кое-что и поглубже, чем наблюдение, что человек спереди выглядит иначе, чем сзади. Принцип относительности куда глубже этого, ведь *с его помощью мы можем делать определенные пред­сказания.* Но было бы более чем странно, если бы только это наблюдение позволило нам предсказывать поведение природы.

Есть и другая школа «философов». Эти чувствуют себя очень неуютно из-за теории относительности, которая заявляет, что нельзя определить свою абсолютную скорость, не глядя ни на что снаружи корабля. Они восклицают: «Вполне понятно, что никто не может измерить своей скорости, не выглядывая наружу. Само собой очевидно, что *бессмысленно* говорить о чьей-то скорости, если не глядеть по сторонам. Глупцы были те физики, которые думали иначе. Их вдруг осенило, вот они и рады; но если бы мы, философы, представляли, какие пробле­мы стояли перед физиками, мы их давно решили бы чисто моз­говым усилием и сразу же поняли бы, что невозможно опре­делить скорость, не выглянув наружу. И мы сделали бы гро­мадный вклад в эту их физику». Эти философы всегда топчутся около нас, они мельтешат на обочинах науки, то и дело поры­ваясь сообщить нам что-то. Но никогда на самом деле они не понимали всей тонкости и глубины наших проблем.

Наша неспособность засечь абсолютное движение — это результат *опытов,* а не итог плоского философствования. Это легко пояснить. Начать с того, что еще Ньютон считал, что дей­ствительно невозможно узнать свою скорость, если движешься прямолинейно и равномерно. Ведь первым-то провозгласил принцип относительности именно Ньютон (мы цитировали его слова в предыдущей главе). Почему же в те, ньютоновы времена философы не поднимали такого шума о том, что «все относительно» и так далее и тому подобное? А потому, что пока Максвелл не развил свою электродинамику, существо­вали физические законы, позволявшие утверждать, что *можно* измерить свою скорость, даже и не выглянув наружу; но вскоре после Максвелла *экспериментально* было установлено, что это *невозможно.*

А теперь скажите, *действительно* ли так уж абсолютно и определенно необходимо с философской точки зрения, чтобы невозможно было знать свою скорость, не посмотрев по сто­ронам? Одним из следствий теории относительности явилось развитие философии, которая утверждала: «Определять можно только то, что поддается измерению! Так как ясно, что нельзя измерить скорость, не видя, по отношению к чему она изме­ряется, то естественно, что понятие абсолютной скорости *смысла не имеет.* Физики обязаны понять, что можно говорить только о том, что поддается измерению». Но *в этом-то и весь вопрос:* сказать, *можем ли мы определить* абсолютную скорость,— это все равно, что решить, можно или нельзя *выяснить из эксперимента,* движется ли корабль, не выглядывая в иллю­минатор. Иными словами, нельзя *априори* утверждать, что что-то измеримо, а что-то нет; это решает не рассуждение, а эксперимент. Немного найдется философов, которые хладно­кровно объявят очевидным, что если скорость света внутри автомобиля равна 300 000 *км/сек,* а скорость самого автомо­биля достигает 100 000 *км/сек,* то свет проносится мимо наблю­дателя на дороге тоже со скоростью 300 000 *км/сек.* Для них это потрясающий факт; даже те из них, для кого относительность разумеется сама собой, обнаруживают, когда вы предъявляете им конкретный факт, что это совсем не так уж очевидно.

И наконец, есть даже «философы», утверждающие, что вообще мы не в состоянии обнаруживать никакого движения, не вы­глядывая наружу. А уж это просто неверно. Действительно, нельзя заметить *равномерного* движения по *прямой* линии, но если бы вся комната *вертелась,* мы бы определенно об этом знали, потому что все в ней разлеталось бы к стенкам — на­блюдались бы всяческого рода «центробежные» эффекты. Тот факт, что Земля наша вращается вокруг своей оси, можно обнаружить, не глядя на звезды, скажем, с помощью так называемого маятника Фуко. Стало быть, неверно, что «все относительно»; нельзя обнаружить только *равномерное движе­ние,* не выглядывая наружу. Равномерное *вращение* вокруг фиксированной оси обнаружить *можно.* А когда вы это скажете философу, он очень огорчится, что прежде этого не понимал; ему, видите ли, казалось, что просто невозможно установить вращение вокруг оси, не наблюдая внешний мир. Правда, если он достаточно сообразителен, то через некоторое время он может вернуться и заявить: «Понял! На самом деле никакого абсолютного вращения не существует. Видите ли,— скажет он,— на самом деле мы вращаемся *относительно звезд.* И вслед­ствие какого-то невыясненного влияния, оказываемого на тела звездами, возникает центробежная сила».

Ну что ж! Судя по всему, это верно; в настоящее время у нас нет способа узнать, существовала бы центробежная сила, если бы не было звезд и туманностей. Не в наших силах сделать такой эксперимент — убрать все туманности, а затем измерить наше вращение; значит, тут мы ничего сказать не можем. Мы должны допустить, что философ может оказаться прав. Он тогда расцветает от удовольствия и изрекает: «И вооб­ще совершенно необходимо, чтобы все в мире в конечном счете подчинялось тому же принципу: *абсолютное* вращение — это бессмысленно, можно говорить только о вращении *по отно­шению* к туманностям». И тут-то мы ему ответим: «А тогда скажи, друг мой, само собой или не само собой разумеется, что равномерное движение по прямой линии *относительно туманностей* не должно никак чувствоваться внутри авто­мобиля?» И теперь, когда движение уже больше не абсолютное, когда оно стало движением *относительно туманностей,* вопрос оказывается темным и на него можно ответить, лишь поставив эксперимент.

Но в *чем* же в таком случае выразились философские влияния теории относительности? *Какие новые идеи и предложения* внушил физикам принцип относительности? Если ограничиться только этого рода влияниями, то их можно описать следующим образом. Первое открытие, по существу, состояло в том, что даже те идеи, которые уже очень долго держатся и очень точно проверены, могут быть ошибочными. Каким это было большим потрясением — открыть, что законы Ньютона неверны, и это после того, как все годы они казались точными! Теперь, ко­нечно, ясно, что не опыты были неправильными, а просто все они проделывались в слишком ограниченном интервале ско­ростей — таком узком, что релятивистские эффекты невозможно было заметить. И все же теперь мы взираем на наши законы физики куда более смиренно — ведь любой из них *может* оказаться ошибочным!

Во-вторых, если возникают некие «странные» идеи, вроде того, что когда идешь, то время тянется медленнее и т. д., то неуместен вопрос: *нравится* ли это нам? Единственно уместен здесь другой вопрос: согласуются ли эти идеи с тем, что по­казал опыт? Иначе говоря, «странные идеи» должны быть согласны только с *экспериментом.* Единственный резон, почему мы должны обсуждать поведение часов и т. п., состоит в следу­ющем: мы должны доказать, что, хотя определение растяжения времени и очень странно, с нашим способом измерять время оно *вполне согласуется.*

И наконец, теория относительности подсказала нам еще кое-что; может быть, это был чисто технический совет, но он оказался чрезвычайно полезным при изучении других физи­ческих законов. Совет состоял в том, что надо *обращать внимание на симметрию законов,* или, более определенно, искать способы, с помощью которых законы можно преобразовать, сохраняя при этом их форму. Когда мы обсуждали теорию векторов, мы отмечали, что основные законы движения не меняются, когда мы особым образом изменяем пространственные и временные переменные (пользуемся преобразованием Ло­ренца). Идея изучать операции, при которых основные законы не меняются, оказалась и впрямь очень полезной.

**§ 2. Парадокс близнецов**

Чтобы продолжить наше изучение преобразований Лоренца и релятивистских эффектов, рассмотрим известный «пара­докс» — парадокс близнецов, скажем, Петера и Пауля. Подросши, Пауль улетает на космическом корабле с очень высокой скоростью. Петер остается на Земле. Он видит, что Пауль уносится с огромной скоростью, и ему кажется, что часы Пауля замедляют свой ход, сердце Пауля бьется реже, мысли текут ленивее. С точки зрения Петера, все замирает. Сам же Пауль, конечно, ничего этого не замечает. Но когда после долгих странствий он возвратится на Землю, он окажется моложе Петера! Верно ли это? Да, это одно из тех следствий теории относительности, которые легко продемонстрировать. Мю-мезоны живут дольше, если они движутся; так и Пауль про­живет дольше, если будет двигаться. «Парадоксом» это явление называют лишь те, кто считает, что принцип относительности утверждает относительность *всякого движения.* Они восклицают: «Хе-хе-хе! А не можем ли мы сказать, что с точки зрения Пауля двигался *Петер* и что именно Петер должен был медленнее стареть? Из симметрии тогда следует единственный возможный вывод: при встрече возраст обоих братьев должен оказаться одинаковым».

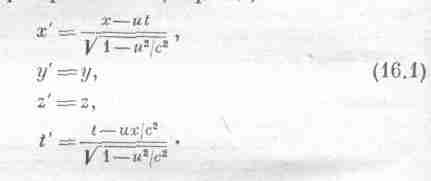
Но ведь чтобы встретиться и помериться годами, Пауль должен либо остановиться в конце путешествия и сравнить часы, либо, еще проще, вернуться. А возвратиться может только тот, кто двигался. И он знает о том, что двигался, потому что ему пришлось повернуть, а при повороте на корабле произошло много необычных вещей: заработали ракеты, пред­меты скатились к одной стенке и т. д. А Петер ничего этого не испытал.

Поэтому можно высказать такое правило: тот, *кто почув­ствовал ускорение,* кто увидел, как вещи скатывались к стенке, и т. д.,— тот и окажется моложе. Разница между братьями имеет «абсолютный» смысл, и все это вполне правильно. Когда мы обсуждали долгую жизнь движущегося мю-мезона, в ка­честве примера мы пользовались его прямолинейным движением сквозь атмосферу. Но можно породить мю-мезоны и в лаборатории и заставить с помощью магнита их двигаться по кругу. И даже при таком ускоренном движении они проживут дольше, причем столько же, сколько и при прямолинейном движении с этой скоростью. Можно было бы попытаться разрешить парадокс опытным путем: сравнить покоящийся мю-мезон с закрученным по кругу. Несомненно, окажется, что закру­ченный мю-мезон проживет дольше. Такого опыта еще никто не ставил, но он и не нужен, потому что и так все прекрасно согласуется. Конечно, те, кто настаивает на том, что каждый отдельный факт должен быть непосредственно проверен, этим не удовлетворятся. А мы все же уверенно беремся предсказать результат опыта, в котором Пауль кружится по замкнутому кругу.

**§ 3. Преобразование скоростей**

Главное отличие принципа относительности Эйнштейна от принципа относительности Ньютона заключается в том, что законы преобразований, связывающих координаты и времена в системах, движущихся относительно друг друга, различны.

Правильный закон преобразований (Лоренца) таков:

Эти уравнения отвечают сравнительно простому случаю, когда наблюдатели движутся относительно друг друга вдоль общей оси *х.* Конечно, мыслимы и другие направления движения, но самое общее преобразование Лоренца выглядит довольно сложно: в нем перемешаны все четыре числа. Мы и впредь будем пользоваться этой простой формулой, так как она содержит в себе все существенные черты теории относительности.

Рассмотрим теперь дальнейшие следствия этого преобра­зования. Прежде всего интересно разрешить эти уравнения относительно *х, у, z, t.* Это система четырех линейных урав­нений для четырех неизвестных, и их можно решить — вы­разить *х, у, z, t* через *х', у', z', t'.* Результат этот потому ин­тересен, что он говорит нам, как «покоящаяся» система коор­динат выглядит с точки зрения «движущейся». Ясно, что из-за относительности движения и постоянства скорости тот, кто «движется», может, если пожелает, счесть себя неподвижным, другого — движущимся. А поскольку он движется в обратную сторону, то получит то же преобразование, но с противоположным знаком у скорости. Это в точности то, что дает и прямое решение системы, так что все сходится. Вот если бы не сошлось, было бы от чего встревожиться!

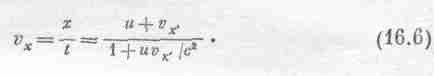
Теперь займемся интересным вопросом о сложении скоростей в теории относительности. Напомним, что первоначально загадка состояла в том, что свет проходит 300 000 *км/сек* во всех системах, даже если они движутся друг относительно друга. Это — частный случай более общей задачи. Приведем пример. Пусть предмет внутри космического корабля движется вперед со скоростью 200 000 *км/сек;* скорость самого корабля тоже 200 000 *км/сек. С* какой скоростью перемещается предмет с точки зрения внешнего наблюдателя? Хочется сказать: 400 000 *км/сек,* но эта цифра уж больно подозрительна: полу­чается скорость большая, чем скорость света! Разве можно себе это представить?

Общая постановка задачи такова. Пусть скорость тела внутри корабля равна *v* (с точки зрения наблюдателя на корабле), а сам корабль имеет скорость *и* по отношению к Земле. Мы желаем знать, с какой скоростью *vx* это тело движется с точки зрения земного наблюдателя. Впрочем, это тоже не самый общий случай, потому что движение происходит в направ­лении *х.* Могут быть формулы для преобразования скоростей в направлении *у* или в любом другом; если они будут нужны, их всегда можно вывести. Внутри корабля скорость тела равна *vx' .* Это значит, что перемещение *х'* равно скорости, умноженной на время:

*x'=vx*•*'t'.*  (16.3)

C:\1\pic\gray.jpgОстается только подсчитать, какие у тела значения *х* и *t* с точки зрения внешнего наблюдателя, если *х'* и *t'* связаны соотношением (16.3). Подставим (16.3) в (16.2) и получим

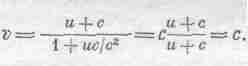
Но здесь *х* выражено через *t'.* А скорость с точки зрения внеш­него наблюдателя — это «его» *расстояние,* деленное на «его» *время,* а *не на время другого наблюдателя!* Значит, надо и *время* подсчитать с его позиций

А теперь разделим *х* на *t.* Квадратные корни сократятся, останется же

Это и есть искомый закон: суммарная скорость не равна сумме скоростей (это привело бы ко всяким несообразностям), но «подправлена» знаменателем 1+uv/c2.

Что же теперь будет получаться? Пусть ваша скорость внут­ри корабля равна половине скорости света, а скорость корабля тоже равна половине скорости света. Значит, и *u* равно 1/2*с,* и *v* равно 1/2*c,* но в знаменателе *uv* равно 1/4, так что

C:\1\pic\gray.jpgВыходит по теории относительности, что *1/2* и 1/2 дают не 1*,* a 4*/5.* Небольшие скорости, конечно, можно складывать, как обычно, потому что, пока скорости по сравнению со скоростью света малы, о знаменателе (1 +*uv/с2)* можно забыть, но на больших скоростях положение меняется.

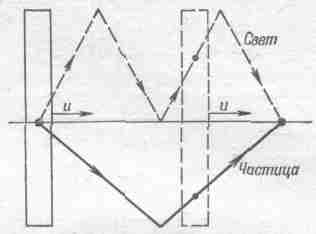
Возьмем предельный случай. Положим, что человек на борту корабля наблюдает, как распространяется *свет.* Тогда *v=c.* Что обнаружит земной наблюдатель? Ответ будет такой:

Значит, если что-то движется со скоростью света внутри ко­рабля, то, с точки зрения стороннего наблюдателя, скорость не изменится, она по-прежнему будет равна скорости света! Это именно то, ради чего в первую очередь предназначал Эйн­штейн свою теорию относительности.

Конечно, бывает, что движение тела не совпадает по на­правлению с равномерным движением корабля. Например, тело движется «вверх» со скоростью vy' по отношению к ко­раблю, а корабль движется «горизонтально». Проделывая такие же манипуляции (только *х* надо заменить на *у),* получаем

*y=y'=vy't',* так что при vx'=0

Итак, боковая скорость тела уже не *vy' , a vy'√(1-u2/с2).* Этот результат мы получили, пользуясь формулами преобра­зований. Но он вытекает и прямо из принципа относительности по следующей причине (всегда бывает полезно докопаться до первоначальной причины). Мы уже раньше рассуждали (см. фиг. 15.3) о том, как могут работать движущиеся часы; свет ка­жется распространяющимся наискось со скоростью *с* в непо­движной системе, в то время как в движущейся системе он просто движется вертикально с той же скоростью. Мы нашли, что *верти­кальная, компонента* скорости в неподвижной системе меньше скорости света на множитель √(1-u2/с2) [см. уравнение (15.3)]. Пусть теперь материальная частица движется в тех же «часах» взад-вперед со скоростью, равной 1/n скорости света (фиг. 16.1).

*Фиг.**16.1.**Траектории светового луча и частицы внутри движущихся часов.*

Пока частица пройдет туда и обратно, свет пройдет этот путь ровно nраз *(n —* целое число). Значит, каждое тиканье «часов с частицей» совпадет с *n*-м тиканьем «световых часов». *Этот факт должен остаться верным и тогда, когда тело движется,* потому что физическое явление совпадения остается совпа­дением в любой системе. Ну а поскольку скорость *су* меньше скорости света, то скорость *vy* частицы должна быть меньше соответствующей скорости в том же отношении (с квадратным корнем)! Вот почему в любой вертикальной скорости появ­ляется корень.

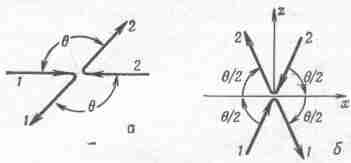
**§ 4. Релятивистская масса**

Из предыдущей главы мы усвоили, что масса тела растет с увеличением его скорости. Но никаких доказательств этого, похожих на те рассуждения с часами, которыми мы обосновали замедление времени, мы не привели. Сейчас, однако, мы можем доказать, что (как следствие принципа относительности и прочих разумных соображений) масса должна изменяться именно таким образом. (Мы должны говорить о «прочих сооб­ражениях» по той причине, что нельзя ничего доказать, нельзя надеяться на осмысленные выводы, не опираясь на какие-то законы, которые предполагаются верными.) Чтобы не изучать

законы преобразования силы, обратимся к *столкновениям* частиц. Здесь нам не понадобится закон действия силы, а хватит только предположения о сохранении энергии и импульса. Кроме того, мы предположим, что импульс движущейся ча­стицы — это вектор, всегда направленный по ее движению. Но мы не будем считать импульс *пропорциональным* скорости, как это делал Ньютон. Для нас он будет просто некоторой *функцией* скорости. Мы будем писать вектор импульса в виде вектора скорости, умноженного на некоторый коэффициент

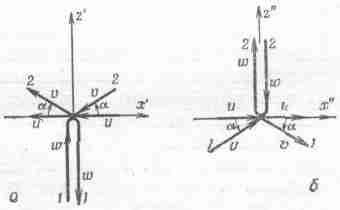
*p=m0****v****.* (16.8)

Индекс *v* у коэффициента будет напоминать нам, что это функция скорости *v.* Будем называть этот коэффициент «мас­сой». Ясно, что при небольших скоростях это как раз та самая масса, которую мы привыкли измерять. Теперь, исходя из того принципа, что законы физики во всех системах координат одинаковы, попробуем показать, что формула для *mv* должна иметь вид m0/√(1-*v2/c2).*

Пусть у нас есть две частицы (к примеру, два протона), которые между собой совершенно одинаковы и движутся на­встречу друг другу с одинаковыми скоростями. Их общий импульс равен нулю. Что с ними случится? После столкновения их направления движения должны все равно остаться противо­положными, потому что если это не так, то их суммарный вектор импульса будет отличен от нуля, т. е. не сохранится. Раз частицы одинаковы, то и скорости их должны быть оди­наковы; более того, они просто должны остаться прежними, иначе энергия при столкновении изменится. Значит, схема такого упругого обратимого столкновения будет выглядеть, как на фиг. 16.2,а: все стрелки одинаковы, все скорости равны. Предположим, что такие столкновения всегда можно подго­товить, что в них допустимы любые углы 0 и что начальные скорости частиц могут быть любыми.

*Фиг. 16.2. Упругое столкновение одинаковых тел, движущихся с равными скоростями в противоположных направлениях, при раз­личном выборе систем координат.*

Далее, напомним, что одно и то же столкновение выглядит по-разному, смотря по тому, как повернуты оси. Для удобства мы так повернем оси, чтобы горизонталь делила пополам угол между направлениями частиц до и после столкновения (фиг. 16.2,б). Это то же столкновение, что и на фиг. 16.2,а, но с повернутыми осями.

Теперь начинается самое главное: взглянем на это столкно­вение с позиций наблюдателя, движущегося на автомашине со скоростью, совпадающей с горизонтальной компонентой ско­рости одной из частиц. Как оно будет выглядеть? Наблюдателю покажется, что частица *1* поднимается прямо вверх (горизон­тальная компонента у нее пропала), а после столкновения падает прямо вниз по той же причине (фиг. 16.3, *а).*

*Фиг. 16.3. Еще две картины того же столкновения (видимые из дви­жущихся автомашин).*

Зато частица *2* движется совсем иначе, она проносится мимо с колоссальной скоростью и под малым углом (но этот угол и до и после столк­новения *одинаков).* Обозначим горизонтальную компоненту скорости частицы *2* через *и,* а вертикальную скорость части­цы *1 —* через *w.*

Чему же равна вертикальная скорость utgα частицы 2? Зная это, можно получить правильное выражение для импульса, пользуясь сохранением импульса в вертикальном направлении. (Сохранение горизонтальной компоненты импульса и так обеспечено: у обеих частиц до и после столкновения эта ком­понента одинакова, а у частицы *1* она вообще равна нулю. Так что следует требовать только сохранения вертикальной скорости *utga.)* Но вертикальную скорость *можно* получить, просто взглянув на это столкновение с другой точки зрения! Посмотрите на столкновение, изображенное на фиг. 16.3, *а* из автомашины, которая движется теперь налево со скоростью *и.* Вы увидите то же столкновение, но перевернутое «вверх ногами» (фиг. 16.3, б). Теперь уже частица *2* упадет и подскочит со скоростью *w,* а горизонтальную скорость *и* приобретет частица *1.* Вы уже, конечно, догадываетесь, чему равна горизонтальная скорость *utg*α*;* она равна *w√(1-*u2/c2) [см. уравнение (16.7)]. Кроме того, нам известно, что изменение вертикального им­пульса вертикально движущейся частицы равно

Δ*p=2mww*

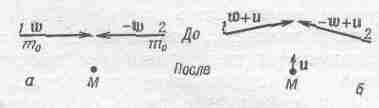
(двойка здесь потому, что движение вверх перешло в движение вниз). У частицы, движущейся косо, скорость равна *v,* ее компоненты равны uи *w√(1-u2/c2),* а масса ее *mv.* Изменение *вертикального* импульса этой частицы Δ*р'=2тvw√(*1—u2/с2), так как в соответствии с нашим предположением (16.8) любая компонента импульса равна произведению одноименной ком­поненты скорости на массу, отвечающую этой скорости. Но суммарный импульс равен нулю. Значит, и вертикальные импульсы должны взаимно сократиться, отношение же массы, движущейся со скоростью *w,* к массе, движущейся со скоростью *v,* должно оказаться равным

mw/mv=√(1-u2/c2). (16.9).

Перейдем к предельному случаю, когда *w* стремится к нулю. При очень малых *w* величины *v* и *u* практически совпадут, *mw→m0,* a *mv→mu.* Окончательный результат таков:

C:\1\pic\gray.jpgПроделайте теперь такое интересное упражнение: проверьте, будет ли выполнено условие (16.9) при произвольных w*,* когда масса подчиняется формуле (16.10). При этом скорость *v,* стоящую в уравнении (16.9), можно найти из прямоугольного треугольника

C:\1\pic\gray.jpgВы увидите, что (16.9) выполняется тождественно, хотя выше нам понадобился только предел этого равенства при *w—>0.* Теперь перейдем к дальнейшим следствиям, считая уже, что, согласно (16.10), масса зависит от скорости. Рассмотрим так называемое *неупругое столкновение.* Для простоты пред­положим, что из двух одинаковых тел, сталкивающихся с равными скоростями *w,* образуется новое тело, которое больше не распадается (фиг. 16.4,а).

*Фиг. 16.4. Две картины неупругого соударения тел равной массы.*

Массы тел до столкновения равны, как мы знаем, *m0/√(1- w2/c2).* Предположив сохраня­емость импульса и приняв принцип относительности, можно продемонстрировать интересное свойство массы вновь образо­ванного тела. Представим себе бесконечно малую скорость *и,* поперечную к скоростям *w* (можно было бы работать и с ко­нечной скоростью *и,* но с бесконечно малым значением *и* легче во всем разобраться), и посмотрим на это столкновение, дви­гаясь в лифте со скоростью -*u.* Перед нами окажется картина, изображенная на фиг. 16.4, а. Составное тело обладает неиз­вестной массой *М.* У тела *1,* как и у тела *2,* есть компонента скорости *и,* направленная вверх, и горизонтальная компонента, практически равная *w.* После столкновения остается масса *М,* движущаяся вверх со скоростью *u,* много меньшей и скорости света и скорости *w.* Импульс должен остаться прежним; по­смотрим поэтому, каким он был до столкновения и каким стал потом. До столкновения он был равен *p~=2mwu, а* потом стал *р'=Muu.* Но M*u* из-за малости u*,* по существу, совпадает с М0. Благодаря сохранению импульса

М0=2mw. (16.11)

Итак, *масса тела, образуемого при столкновении двух одина­ковых тел, равна их удвоенной массе.* Вы, правда, можете сказать: «Ну и что ж, это просто сохранение массы». Но не торопитесь восклицать: «Ну и что ж!», потому что *сами-то массы тел были больше, чем когда тела неподвижны.* Они вносят в суммарную массу *М* не массу покоя, а *больше.* Не правда ли, поразительно! Оказывается, сохранение импульса в столк­новении двух тел требует, чтобы образуемая ими масса была больше их масс покоя, хотя после столкновения эти тела сами придут в состояние покоя!

**§ 5. Релятивистская энергия**

Немного выше мы показали, что зависимость массы от скорости и законы Ньютона приводят к тому, что изменения в кинетической энергии тела, появляющиеся в результате работы приложенных к нему сил, оказываются всегда равными

C:\1\pic\gray.jpgПотом мы продвинулись дальше и обнаружили, что полная энергия тела равна полной его массе, умноженной на с2. Про­должим эти рассуждения.

Предположим, что наши два тела с равными массами (те, которые столкнулись) можно «видеть» даже тогда, когда они оказываются внутри тела *М.* Скажем, протон с нейтроном столкнулись, но все еще продолжают двигаться внутри *М.* Масса тела *М,* как мы обнаружили, равна не *2m0 ,* a *2mw.* Этой массой *2mw* снабдили тело его составные части, чья масса покоя была 2m0; значит, *избыток* массы составного тела равен привнесенной кинетической энергии. Это означает, конечно, что *у энергии есть инерция.* Ранее мы говорили о нагреве газа и показали, что поскольку молекулы газа движутся, а движущиеся тела становятся массивнее, то при нагревании газа и усилении движения молекул газ становится тяжелее. Но на самом деле такое рассуждение является совершенно общим; наше обсуждение свойств неупругого соударения тоже показывает, что добавочная масса появляется всегда, даже тогда, когда она не является *кинетической* энергией. Иными словами, если две частицы сближаются и при этом образуется потенциальная или другая форма энергии, если части состав­ного тела замедляются потенциальным барьером, производя работу против внутренних сил, и т. д.,— во всех этих случаях масса тела по-прежнему равна полной привнесенной энергии. Итак, вы видите, что выведенное выше сохранение массы рав­нозначно сохранению энергии, поэтому в теории относитель­ности нельзя говорить о неупругих соударениях, как это было в механике Ньютона. Согласно механике Ньютона, ничего страшного не произошло бы, если бы два тела, столкнувшись, образовали тело с массой *2m0,* не отличающееся от того, какое получилось бы, если их медленно приложить друг к другу. Конечно, из закона сохранения энергии мы знаем, что внутри тела имеется добавочная кинетическая энергия, но по закону Ньютона на массу это никак не влияет. А теперь выясняется, что это невозможно: поскольку до столкновения у тел была кинетическая энергия, то составное тело окажется *тяжелее;* значит, это будет уже *другое* тело. Если осторожно приложить два тела друг к другу, то возникает тело с массой *2т0;* когда же вы их с силой столкнете, то появится тело с большей массой. А если масса отличается, то мы можем это *заметить.* Итак, сохранение импульса в теории относительности с необходи­мостью сопровождается сохранением энергии.

Отсюда вытекают интересные следствия. Пусть имеется тело с измеренной массой *М,* и предположим, что что-то стряс­лось и оно распалось на две равные части, имеющие скорости *w* и массы *mw.* Предположим теперь, что эти части, двигаясь через вещество, постепенно замедлились и остановились. Теперь их масса m*0.* Сколько энергии они отдали веществу? По теореме, доказанной раньше, каждый кусок отдаст энергию *(mw-m0*)с2. Она перейдет в разные формы, например в теплоту, в потенциальную энергию и т. д. Так как *2mw=M,* то высво­бодившаяся энергия *Е = (М-*2m0)с2. Это уравнение было ис­пользовано для оценки количества энергии, которое могло бы выделиться при ядерном расщеплении в атомной бомбе (хотя части бомбы не точно равны, но примерно они равны). Масса атома урана была известна (ее измерили заранее), была известна и масса атомов, на которые она расщеплялась,— иода, ксенона и т. д. (имеются в виду не массы движущихся атомов, а массы *покоя).* Иными словами, и *М* и m*0* были известны. Вычтя одно значение массы из другого, можно прикинуть, сколько энергии высвободится, если *М* распадется «пополам». По этой причине все газеты считали Эйнштейна «отцом» атомной бомбы. На самом же деле под этим подразумевалось только, что он мог бы заранее подсчитать выделившуюся энергию, если бы ему ука­зали, какой процесс произойдет. Энергию, которая должна высвободиться, когда атом урана подвергнется распаду, под­считали лишь за полгода до первого прямого испытания. И как только энергия действительно выделилась, ее непосред­ственно измерили (не будь формулы Эйнштейна, энергию из­мерили бы другим способом), а с момента, когда ее измерили, формула уже была не нужна. Это отнюдь не принижение заслуг Эйнштейна, а скорее критика газетных высказываний и по­пулярных описаний развития физики и техники. Пробле­ма, как добиться того, чтобы процесс выделения энергии прошел эффективно и быстро, ничего общего с формулой не имеет.

Формула имеет значение и в химии. Скажем, если бы мы взвесили молекулу двуокиси углерода и сравнили ее массу с массой углерода и кислорода, мы бы могли определить, сколько энергии высвобождается, когда углерод и кислород образуют углекислоту. Плохо только то, что эта разница масс так мала, что технически опыт очень трудно проделать.

Теперь обратимся к такому вопросу: нужно ли отныне добавлять к кинетической энергии *m0c2* и говорить с этих пор, что полная энергия объекта равна mc2? Во-первых, если бы нам были *видны* составные части с массой покоя *m0* внутри объекта M*,* то можно было бы говорить, что часть массы M есть механическая масса покоя составных частей, а другая часть — их кинетическая энергия, третья — потенциальная. Хотя в природе и на самом деле открыты различные частицы, с которыми происходят как раз такие реакции (реакции слияния в одну), однако никакими способами *невозможно* при этом *разглядеть внутри M* какие-то *составные части.* Например, распад K-мезона на два пиона происходит по закону (16.11), но бессмысленно считать, что он состоит из 2π, потому что он распадается порой и на Зπ!

А поэтому возникает *новая идея:* нет нужды знать, как тела устроены изнутри; нельзя и не нужно разбираться в том, какую часть энергии внутри частицы можно считать энергией покоя тех частей, на которые она распадется. Неудобно, а порой и невозможно разбивать полную энергию *mc2* тела на энергию покоя внутренних частей, их кинетическую и потенциальную энергии; вместо этого мы просто говорим о *полной энергии* частицы. Мы «сдвигаем начало отсчета» энергий, добавляя ко всему константу *m0c2,* и говорим, что полная энергия частицы равна ее массе движения, умноженной на с2, а когда тело ос­тановится, его энергия есть его масса в покое, умноженная на с2.

И наконец, легко обнаружить, что скорость *v,* импульс *Р* и полная энергия *Е* довольно просто связаны между собой. Как это ни странно, формула m=m0/√(l-*v2/c2)* очень редко употребляется на практике. Вместо этого незаменимыми ока­зываются два соотношения, которые легко доказать:

*Е2-*P2c2=M02c4 (16.13)

и

Рс=Ev/c (16.14)

# Глава 17

**ПРОСТРАНСТВО - ВРЕМЯ**

[**§ 1. Геометрия прост****ра****нства-времени**](#a1)

[**§ 2. Пространственно-в****ременные интервалы**](#a2)

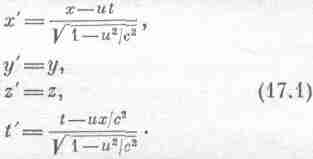
[**§ 3. Прошедшее, настоящ****ее, будущее**](#a3)

[**§ 4. Еще о чет****ырехвек****торах**](#a4)

[**§ 5. Алгебра четы****рехв****екторов**](#a5)

**§ 1. Геометрия пространства-времени**

Теория относительности показывает, что связь между местоположением события и моментом, в какой оно происходит, при измере­ниях в двух разных системах отсчета совсем не такая, как можно было ожидать на основе наших интуитивных представлений. Очень важ­но ясно представить себе связь пространства и времени, возникающую из преобразований Лоренца. Поэтому мы глубже рассмотрим этот вопрос.

Координаты и время *(х, y, z, t),* измеренные «покоящимся» наблюдателем, преобразуются в координаты и время *(х'*, y', z', *t'),* измерен­ные внутри «движущегося» со скоростью *u* космического корабля:

Давайте сравним эти уравнения с уравнением (11.5), которое тоже связывает измерения в двух системах, только одна из них теперь *вращается* относительно другой

*х'=х*cosθ+*y*sinθ,

*у'* = *y*cosθ-*x*sinθ, (17.2)

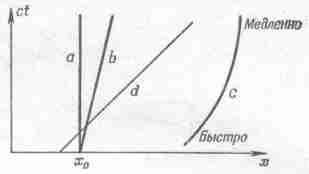
*z'=z.*

В этом частном случае у Мика и Джо оси *х' и x* повернуты на угол 0. Но и в том и в другом случае мы замечаем, что «штрихованные» вели­чины — это «перемешанные» между собой «нештрихованные»: новое *х'* есть смесь *х* и *у,* а новое *у' —* другая смесь x и y.

Проведем следующую аналогию: когда мы глядим на пред­мет, мы различаем его «видимую ширину» и «видимую толщину». Но эти два понятия — «ширина» и «толщина» — отнюдь не *основные* свойства предмета. Отойдите в сторону, взгляните на предмет под другим углом — видимая ширина и видимая толщина предмета станут другими. Можно написать формулы, позволяющие узнать новые ширину и толщину по известным старым и по углу поворота. Уравнения (17.2) — как раз эти формулы. Можно сказать, что данная толщина есть своего рода «смесь» всех ширин и всех толщин. Если б мы не могли сдвинуться с места, если б мы на данный предмет всегда гля­дели из одного и того же положения, то нам все эти рассуж­дения показались бы неуместными; мы ведь и так всегда видели бы пред собой «настоящую» ширину и «настоящую» толщину и знали бы, что это совершенно разные качества предмета: один связан с углом, под каким виден предмет, другой требует фокусирования глаза и даже интуиции. Они казались бы аб­солютно различными, их незачем было бы смешивать. Только потому, что мы *в состоянии* обойти вокруг предмета, мы по­нимаем, что ширина и толщина — это разные стороны одного и того же предмета.

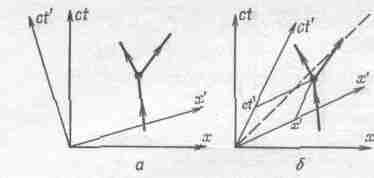
*Нельзя ли взглянуть на преобразование Лоренца таким же способом?* Ведь и здесь перед нами смесь — смесь местополо­жения и момента времени. Из значений координаты и времени получается новая координата. Иначе говоря, в измерениях пространства, сделанных одним человеком, есть с точки зрения другого малая примесь времени. Наша аналогия позволяет высказать следующую мысль: «реальность» предмета, на кото­рый мы смотрим, включает нечто большее (говоря грубо и образно), чем его «ширину» и его «толщину», потому что обе они *зависят* от того, *как* мы смотрим на предмет. Оказавшись на новом месте, наш мозг немедленно пересчитывает и ширину, и толщину. Но когда мы будем двигаться с большой скоро­стью, наш мозг не сможет немедленно пересчитать координаты и время: у нас нет опыта движений со скоростями, близкими к световой, мы не ощущаем время и пространство как явле­ния одной природы. Все равно как если бы нас усадили на какое-то место, заставили бы разглядывать ширину какого-то предмета и при этом не разрешали бы даже поворачивать голову. Мы теперь понимаем, что, будь у нас такая возмож­ность, мы могли бы увидеть немножко от времени другого человека, как бы «заглянуть» сзади него.

Итак, мы должны попытаться представить себе предметы в мире нового типа, в котором время с пространством смешано в том же смысле, в каком предметы нашего привычного пространственного мира можно разглядывать с разных направ­лений. Мы должны считать, что предметы, занимающие неко­торое место и существующие некоторый период времени, занимают некую «дольку» мира нового типа и что мы смотрим на эту «дольку» с разных точек зрения, когда движемся с разной скоростью. Этот новый мир, эта геометрическая реальность, в которой имеются «дольки», занимающие некоторое про­странство и существующие некоторое время, называется *пространством-временем.* Данная точка *(х, у, z, t)* в простран­стве-времени носит название *события.* Представьте, напри­мер, что ось *х* мы поместили горизонтально, оси *у* и z — в двух других направлениях, взаимно перпендикулярных и перпендикулярных к странице (!), а ось *t* направили верти­кально. Как на такой диаграмме изобразится, скажем, движу­щаяся частица? Когда частица неподвижна, у нее есть какая-то координата *х;* время течет, а *х* остается все тем же, и тем же, и тем же. Значит, ее «путь» — это прямая, параллельная оси (а на фиг. 17.1).

*Фиг.**17.1.**Пути трех частиц в пространстве-времени. a* — *частица покоится в точке х=х0; b* — *частица отправилась из точки х=* *х0 с постоянной скоростью; с* — *частица начала было двигаться, но затормозила; d* — *распространение света.*

С другой стороны, если она равномерно удаля­ется, то с течением времени растет и *х (b* на фиг. 17.1). Таким образом, частица, которая сперва двигалась, а потом стала замедлять свой ход, изобразится чем-то похожим на кривую с на фиг. 17.1. Другими словами, всякая устойчивая, нераспа­дающаяся частица изображается линией в пространстве-времени. А распадающаяся частица изобразится вилкой, потому что она превращается в две частицы, выходящие из одной точки.

А как обстоит дело со светом? Скорость света всегда одна и та же, значит, свет можно изображать прямыми линиями одинакового наклона *(d* на фиг. 17.1).

Итак, согласно высказанной нами идее, если происходит некое событие, например частица внезапно распадается в ка­кой-то пространственно-временной точке *(х, t)* на две, то, если это для чего-нибудь нужно, поворотом осей можно полу­чить значения *х* и *t* в новой системе (фиг. 17.2, *а).* Но это не так: ведь уравнение (17.1) *не совпадает* с преобразованием (17.2), в них по-разному расставлены знаки, в одном встре­чаются sin9 и cos0, а в другом — некоторые алгебраические

*Фиг. 17.2. Два изображения распада частицы. а — неверное; 6* — *верное.*

величины. (Вообще-то иногда алгебраические величины вы­ражаются через косинус и синус, но в данном случае это невозможно.) А все-таки эти выражения *очень похожи.* Как мы с вами увидим, нельзя представлять себе пространство-время в виде реальной обычной геометрии, и все из-за этой разницы в знаках. На самом деле, хотя мы этого пока не под­черкивали, оказывается, что движущийся наблюдатель должен пользоваться осями, равнонаклоненными к линии светового луча, и проектировать точку на эти оси при помощи отрезков, им параллельных. Это показано на фиг. 17.2, *б.* Мы не будем заниматься этой геометрией, она не особенно помогает; легче работать прямо с уравнениями.

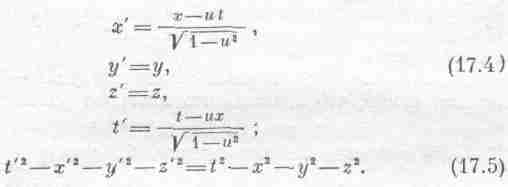
**§ 2. Пространственно-временные интервалы**

Хотя геометрия пространства-времени не обычная (не евклидова), тем не менее эта геометрия очень похожа на евклидову, но в некоторых отношениях весьма своеоб­разная. Если это представление о геометрии правильно, то должны существовать такие функции координат и времени, которые не зависят от системы координат. К примеру, при обычных вращениях, если взять две точки, одну для простоты в начале координат обеих систем, а другую в любом другом месте, то в обеих системах координат расстояние между точ­ками будет одинаково. Это первое свойство точек, которое не зависит от частного способа измерения: квадрат расстояния, или *x2+y2+z2,* не меняется при поворотах. А как с простран­ством-временем? Не трудно показать, что и здесь есть нечто, не зависящее от способа измерения, а именно комбинация *c2t2-х2-у2-z2* одинакова до и после преобразования

с2t'2-х'2-у'2-z'2=c2t2-х2-y2-z2. (17.3)

Поэтому эта величина, подобно расстоянию, «реальна» в том смысле, который был придан этому слову выше; ее называют *интервалом* между двумя пространственно-временными точ­ками, одна из которых в этом случае совпадает с началом коор­динат. (Точнее говоря, это не интервал, а квадрат интервала, точно так же как и *х2+у2*+z2 — квадрат расстояния.) Это название подчеркивает различие в геометриях; обратите вни­мание, что в формуле присутствует с, а некоторые знаки об­ращены.

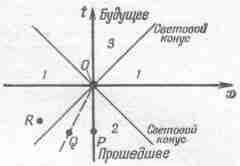
Давайте избавимся от с, оно нам не нужно, если мы хотим иметь удобное пространство, в котором *х* и *t* можно перестав­лять. Представьте, к какой путанице приведет измерение ширины по углу, под которым виден предмет, а толщины — по сокращению мышц при фиксировании глаза на предмет и выражение толщины в *метрах,* а ширины в *радианах.* При преобразованиях уравнений типа (17.2) тогда получится страшная неразбериха и ни за что не удастся разглядеть всю простоту и ясность предмета по той технической причине, что одно и то же будет измеряться двумя различными едини­цами. С помощью уравнений (17.1) и (17.3) природа говорит нам, что время равнозначно пространству; время становится пространством; *их надо измерять в одинаковых единицах.* Какое расстояние измеряет секунда? Из уравнения (17.3) это легко понять: секунда — это 3•108 *м, расстояние, которое свет проходит за* 1 *сек.* Иначе говоря, если бы расстояния и время мы измеряли в одинаковых единицах (секундах), то единицей длины было бы 3•108 *м* и уравнения упростились бы. А другой способ уравнять единицы — это измерять время в метрах. Чему равен метр времени? Метр времени — это время, за какое свет проходит расстояние в 1 .м, т. е. (l/3) •10-8 *сек,* или 3,3 миллиардных доли секунды! Иными словами, нам нужно записать все уравнения в системе единиц, где с=1. Когда время и пространство станут измеряться в одинаковых единицах, уравнения, естественно, упростятся;

Может быть, вы сомневаетесь в законности этого или вас «пу­гает», что, положив с=1, вы не сможете вернуться к правиль­ным уравнениям? Напротив, без с их гораздо легче запомнить, а с легко поставить на нужные места, если присмотреться к размерностям. Скажем, в √(1—u2) мы видим, что из неимено­ванного числа 1 приходится вычитать именованное (квадрат скорости u2); естественно, этот квадрат нужно разделить на с2, чтобы сделать вычитаемое безразмерным. Таким путем можно расставить *с,* где полагается.

Очень интересно различие между пространством-временем и обыкновенным пространством, различие между интервалом и расстоянием. Посмотрите на формулу (17.5). Если два события произошли в какой-то системе координат в одно и то же время, по в разных точках пространства, то, поместив начало коорди­нат в точку, изображающую одно из событий, мы получим, что t=0, а, например, х≠0*.* Значит, квадрат интервала получится отрицательным, а сам интервал — мнимым (корень квадратный из отрицательного числа). Интервалы в этой теории бывают и действительные, и мнимые, потому что их квадраты могут быть и положительными, и отрицательными (в отличие от расстояния, квадрат которого бывает только положительным). Когда интервал мнимый, говорят, что *интервал* между двумя событиями (точками) *пространственно-подобный* (а не мнимый), потому что такой интервал получался бы всегда, если бы весь мир застыл на одном времени. С другой стороны, если два предмета в данной системе координат попадают в одно и то же место в разные моменты времени, тогда *t*≠*0,* a x=y=z=0 и квадрат интервала положителен; это называется *времени-подобным интервалом.* Далее, если провести на диаграмме пространства-времени две прямые под углом 45° (в четырех измерениях они обратятся в «конус», называемый световым), то точки на этих прямых будут отделены от начала координат нулевым интервалом. Куда бы из начала координат ни рас­пространялся свет, все равно x2+y2+z2=c2t2, т. е. интервал между событием прихода света в любую точку и началом всегда равен нулю [как легко видеть из (17.5)]. Кстати, мы сейчас доказали, что скорость света в любых системах координат одинакова: ведь если интервал в обеих системах одинаков, то, будучи равен нулю в одной из них, он равен нулю и в дру­гой, и квадрат скорости света — отношение *x'2+y'2+z'2* к *t'2—* опять равен с2.

Сказать, что скорость распространения света — инвариант,— это все равно, что сказать, что интервал равен нулю.

**§ 3. Прошедшее, настоящее, будущее**

Пространственно-временную область, окружающую данную точку пространства-времени, можно разделить на три об­ласти, как показано на фиг. 17.3.

*Фиг. 17.3. Область простран­ства-времени, окружающая начало координат.*

В одной из них интервалы пространственно-подобны, в остальных двух — времени-подобны. Эти три области, на которые распадается окружающее точку пространство-время, в физическом отношении связаны с самой точкой очень интересно.

Из области *2* физический объект или сигнал, двигаясь со скоростью, меньшей скорости света, может прийти в точ­ку *О.* Поэтому события в этой области могут воздействовать на событие в точке (9, могут влиять на него из прошло­го (t<0). Действительно, предмет в точке *Р* на оси отрица­тельных *t* оказывается точно в «прошлом» по отношению к точке *О; Р —* это та же пространственно-временная точ­ка *О,* но в более ранний момент времени. Что в ней когда-то случилось, теперь сказывается на точке *О.* (К сожалению, именно такова наша жизнь.) Другой предмет из *Q* попадет в *О,* двигаясь с определенной скоростью, меньшей, чем с; значит, если бы этот предмет двигался в космическом кораб­ле, он мог бы тоже оказаться прошлым той же точки *О* пространства-времени. Это означает, что в какой-то другой системе координат ось времени могла бы пройти через *О* и *Q.* Таким образом, все точки области *2* оказываются по отношению *к О в* «прошлом»; все, что в этой области происходит, *может* сказаться на *О.* Поэтому область *2* можно назвать *воздей­ствующим прошлым;* это геометрическое место всех событий, которые хоть каким-то образом могут повлиять на событие в точке *О.*

А зато область *3 —* это та область, *на которую* в свою очередь могут повлиять события в О; в тела, расположенные внутри области *3,* можно «попасть пулей», скорость которой меньше скорости света. Это тот мир, чье будущее в наших руках (если мы сами находимся в точке *О);* область *3* можно назвать *воздействуемым будущим.* Остальное пространство-время (область *1)* интересно тем, что на события в нем из *точки О* влиять нельзя и, обратно, ничто, происходящее в этой области, никак не может повлиять на положение *в точке О,* потому что ничто не может обогнать свет. Конечно, если что-то про­изойдет в точке R, это *может* сказаться *позднее;* если, напри­мер, Солнце «сию минуту» взорвется, то мы узнаем об этом лишь через 8 минут, и раньше этого времени взрыв никак отразиться на нас не может.

То, что происходит «сейчас», «сию минуту» — это на самом деле нечто таинственное; оно не поддается определению, не под­дается и воздействию, однако несколько позже оно может воздей­ствовать на нас (или мы на него, если какое-то время тому назад мы позаботились об этом). Когда мы смотрим на звезду Альфа Центавра, мы видим ее такой, какой она была 4 года тому назад; нам может захотеться узнать, на что она похожа «сейчас». «Сей­час» — это значит в этот же момент в нашей системе координат. Альфу Центавра мы можем видеть только при помощи световых лучей, явившихся к нам из нашего прошлого, прошлого че­тырехлетней давности, но что на ней происходит «сейчас», мы не знаем. Происходящее на ней «сейчас» сможет воздей­ствовать на нас только через четыре года. «Альфа Центавра сейчас» — это идея, или понятие, существующее в нашем мозге; никакого физического определения для такого понятия в этот момент нет, потому что надо подождать, прежде чем «сейчас» удастся увидеть; для Альфы Центавра даже правильное по­нятие «сейчас» не поддается определению сию минуту. Ведь «сейчас» зависит от системы координат. Если бы, к примеру, Альфа Центавра двигалась, то наблюдатель на ней не согла­сился бы с нашим пониманием его «сейчас», потому что его оси координат были бы повернуты на какой-то угол, а его «сейчас» было бы совсем *другим* временем. Мы уже говорили, что од­новременность не определяется однозначно.

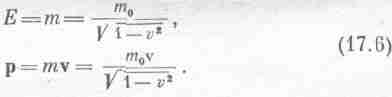
Встречаются порой предсказатели судьбы, гадалки, люди, утверждающие, что они могут узнавать будущее; немало чудес­ных историй рассказывается и о людях, которые внезапно видят перед собой свое воздействуемое будущее. От этого воз­никает множество парадоксов: ведь если мы знаем, что что-то случится, то наверняка сможем избежать этого, если захотим. На самом же деле ни один провидец будущего не способен узнать даже настоящее! Нам никто не скажет, что сию минуту происходит достаточно далеко от нас, потому что это нена­блюдаемо.

Напоследок я задам вопрос, ответить на который предо­ставляю вам самим. Если бы внезапно появилась возможность знать, что происходит в области *1* пространства-времени,— возник бы от этого парадокс или нет?

**§ 4. Еще о четырехвекторах**

Вернемся опять к аналогии между преобразованием Ло­ренца и вращением пространственных осей. Мы уже убедились, что полезно собирать воедино отличные от координат величины, которые преобразуются так же, как и координаты; эти соеди­ненные величины называют *векторами,* или направленными отрезками. При обычных вращениях немало величин преобра­зуется в точности так же, как *х, y*, z (например, скорость с тремя компонентами *х, у, z);* при переходе из одной системы координат в другую ни одна из компонент не остается прежней, все они приобретают новые значения. Но «сама» скорость, во всяком случае, более реальна, чем любая из ее компонент, и изображаем мы ее направленным отрезком.

Теперь мы спросим: существуют ли величины, которые пре­образуются при переходе от неподвижной системы к движу­щейся так же, как и *х, у, z, t?* Наш опыт обращения с векторами подсказывает, что три из этих величин, подобно *х, у, z,* могли бы представлять собой три компоненты обычного простран­ственного вектора, а четвертая могла бы оказаться похожей на обычный скаляр относительно пространственных вращений: она бы не изменялась, пока мы не перейдем в движущуюся систему координат. Возможно ли, однако, связать с одним из известных «тривекторов» некоторый четвертый объект (ко­торый можно назвать «временной компонентой») таким образом, чтобы вся четверка «вращалась» точно так же, как изменяются пространство и время в пространстве-времени? Мы сейчас покажем, что действительно существует по крайней мере одна такая четверка (на самом деле далеко не одна): *три ком­поненты импульса и энергия в качестве временной компоненты преобразуются вместе* и образуют так называемый «четырехвектор». Доказывая это, мы избавимся от *с* тем же приемом, какой употреблялся в уравнении (17.4). Например, энергия и масса отличаются только множителем *с2* и при надлежащем выборе единиц измерения энергия совпадет с массой. Вместо того чтобы писать *Е=тс2,* мы положим *Е=т.* Если понадо­бится, в окончательных уравнениях можно опять расставить с в нужных степенях.

Итак, уравнения для энергии и импульса имеют вид

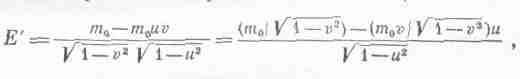
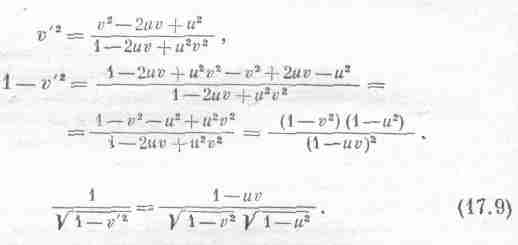
C:\1\pic\gray.jpgЗначит, при таком выборе единиц получится

Скажем, если энергия выражена в электронвольтах (эв), то чему равна масса в 1 эв? Она равна массе с энергией покоя 1 *эв,* т. е. m0c2=1 *эв.* У электрона, например, масса покоя равна 0,511•106 *эв.*

Как же будут выглядеть импульс и энергия в новой системе координат? Чтобы узнать это, надо преобразовать уравнения (17.6). Это преобразование легко получить, зная, как пре­образуется скорость. Пусть некоторое тело имело скорость *v,* а мы наблюдаем за ним из космического корабля, который сам имеет скорость *u,* и обозначаем соответствующие величины штрихами. Для простоты сперва мы рассмотрим случай, когда скорость *v* направлена по скорости *и.* (Более общий случай мы рассмотрим позже.) Чему равна скорость тела *v'* по измерениям из космического корабля? Эта скорость равна «раз­ности» между *v* и *u.* По прежде полученному нами закону

v’=(v-u)/(1-uv’) (17-8)

Теперь подсчитаем, какой окажется энергия *Е'* по измерениям космонавта. Он, конечно, воспользуется той же массой покоя, но зато скорость станет *v'.* Он возведет *v'* в квадрат, вычтет из единицы, извлечет квадратный корень и найдет обратную величину

Энергия *Е'* просто равна массе m0, умноженной на это выражение. Но нам хочется выразить энергию через нештри­хованные энергию и импульс. Мы замечаем, что

или

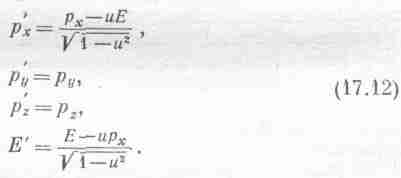


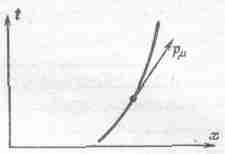
C:\1\pic\gray.jpgМы узнаем в этом выражении знакомое нам преобразование

Теперь мы должны найти новый импульс *рх.* Он равен энергии *Е',* умноженной на *v',* и так же просто выражается через *Е* и *р:*

и мы опять распознаем в этой формуле знакомое нам

C:\1\pic\gray.jpgИтак, преобразование старых энергии и импульса в новые энергию и импульс в точности совпало с преобразованием *t* и *х* в *t'* и *х* и *t* в *х':* если мы в уравнениях (17.4) будем писать *Е* каждый раз, когда увидим *t,* а вместо x: всякий раз будем под­ставлять *рх,* то уравнения (17.4) превратятся в уравнения (17.10) и (17.11). Если все верно, то это правило предполагает добавочные равенства *р'у=-рy* и *р'z=рz.* Чтобы их доказать, надо посмотреть, как преобразуется движение вверх или вниз. Но как раз в предыдущей главе мы рассмотрели такое движение. Мы анализировали сложное столкновение и заметили, что по­перечный импульс действительно не меняется при переходе в движущуюся систему координат. Стало быть, мы уже убе­дились, что *р'у=ру* и *pz=pz.* Итак, полное преобразование равно

Таким образом, эти преобразования выявили четыре ве­личины, которые преобразуются подобно *х, у, z*, *t.* Назовем их *четырехвектор импульса.* Так как импульс — это четырехвектор, его можно изобразить на диаграмме пространства-времени движущейся частицы в виде «стрелки», касательной к пути (фиг. 17.4).

*Фиг. 17.4. Четырехвектор импульса частицы.*

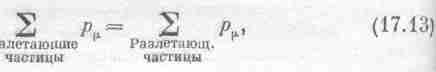
У этой стрелки временная компонента дает энергию, а пространственные — тривектор импульса; сама стрелка «реальнее», чем один только импульс или одна лишь энергия: ведь и импульс, и энергия зависят от нашей точки зрения.

**§ 5. Алгебра четырехвекторов**

Четырехвекторы обозначаются иначе, чем тривекторы. На­пример, тривектор импульса обозначают р. Если хотят дать более детальную запись, то говорят о трех компонентах *рх ,pу, рz;* можно писать и короче *рi ,* оговаривая, что iпринимает три значения *х, у* и z. Для четырехвекторов мы будем при­менять похожее обозначение: будем писать *р*μ *,* а μ. пусть заменяет собой *четыре* направления *t, x, у, z*.

Конечно, можно пользоваться любыми обозначениями. Не улыбайтесь, что мы так много говорим об обозначениях; учи­тесь изобретать их: в них вся сила. Ведь и сама математика в значительной степени состоит в изобретении лучших обозна­чений. Идея четырехвектора — это тоже усовершенствование обозначений с таким расчетом, чтобы преобразования было легче запомнить.

Итак, *А*μ *—* это общий четырехвектор, *р*μ *—* четырехимпульс, *pt —* энергия, *рх*— импульс в направлении *х, рy—* в направ­лении *у, pz— в* направлении z. Складывая четырехвекторы, складывают их соответствующие компоненты.

Если четырехвекторы связаны каким-то уравнением, то это значит, что уравнение выполняется для *любой компоненты.* Например, если закон сохранения тривектора импульса со­блюдается в столкновении частиц, т. е. сумма импульсов множе­ства взаимодействующих или сталкивающихся частиц по­стоянна, то это означает, что сумма всех компонент импульсов постоянна и в направлении *х,* и в направлении *у,* и в направ­лении 2. Сам по себе такой закон в теории относительности невозможен: *он неполон;* это все равно, что говорить только о двух компонентах тривектора. Неполон он потому, что при повороте осей разные компоненты смешиваются, значит, в закон сохранения должны войти все три компоненты. Таким образом, в теории относительности нужно дополнить закон сохранения импульса, включив в него сохранение временной компоненты. *Абсолютно необходимо,* чтобы сохранение первых трех компонент сопровождалось сохранением четвертой, иначе не получится релятивистской инвариантности. Четвертое урав­нение — это как раз *сохранение энергии;* оно должно сопровож­дать сохранение импульса для того, чтобы четырехвекторные соотношения в геометрии пространства-времени были спра­ведливы. Итак, закон сохранения энергии и импульса в че­тырехмерном обозначении таков:

C:\1\pic\gray.jpgили в чуть измененных обозначениях:

где i=l, *2, ...* относится к сталкивающимся частицам, j=1, 2,... — к частицам, возникающим при столкновении, а μ=x, *у, z* или *t.* Вы спросите: «А что по осям координат?» Это неважно. Закон верен для любых компонент, при *любых* осях.

В векторном анализе нам встретилось одно понятие — ска­лярное произведение двух векторов. Что соответствует ему в пространстве-времени? При обычных вращениях неизменной остается величина *x2+y2+z2.* В четырехмерном мире таким свойством при преобразованиях обладает величина *t2*-*х2-у2-*z2 [уравнение (17.3)]. Как можно это записать? Можно было бы, например, пользоваться значком наподобие *,* но обычно пишут

C:\1\pic\gray.jpg

Штрих при Σ напоминает, что первый, «временной» член по­ложителен, а остальные три отрицательны. Эта величина одна и та же в любой системе координат, и можно назвать ее квадратом длины четырехвектора. Чему равен, например, квадрат длины четырехвектора импульса отдельной частицы?

*Ответ: р2t-*р2x-*Р2у-p2z,* или, иначе, Е2-р2, потому что *pt* это и есть *Е.* Чему равно Е2 *-*р2? Должно по условию получиться что-то, что одинаково в любой системе координат, в частности и в системе координат, которая движется вместе с частицей, так что частица в этой системе покоится. Но если частица неподвижна, значит, у нее нет импульса. Значит, у нее остается только энергия, совпадающая в этом случае с ее массой. Итак, Е2*-*р2=m20, т. е. квадрат длины четырехвектора импульса равен m20.

C:\1\pic\gray.jpgПользуясь выражением для квадрата вектора, легко изоб­рести скалярное произведение двух четырехвекторов: если один из них аμ , а другой bμ, то скалярное произведение опре­деляется так:

Это выражение не меняется при преобразовании системы коор­динат.

Следует еще упомянуть о частицах с нулевой массой покоя, например о фотоне — частице света. Фотон похож на частицу тем, что он переносит энергию и импульс. Энергия фотона равна произведению некоторой постоянной (постоянная Планка) на частоту света: *E,=hv.* Такой фотон несет с собой и импульс, который (как у всякой частицы) равен постоянной *h,* деленной на длину волны света: *p=h/λ.* Но у фотона связь между ча­стотой и длиной волны вполне определенна: *v—c/λ.* (Количество волн, проходящих за 1 *сек,* помноженное на их длину, даст расстояние, проходимое светом в 1 *сек,* т. е. с.) Мы сходу получаем, что энергия фотона равна его импульсу, умноженному на с, и, далее, полагая с = 1, что *энергия равна импульсу.* Но это и значит, что масса покоя равна нулю. Давайте вдумаемся в это любопытное обстоятельство. Если фотон — частица с нулевой массой покоя, то что с ним бывает, когда он останав­ливается? *Но он никогда не останавливается!* Он всегда движется со скоростью *с.* Обычная формула для энергии — это *m0/√(1-v2).* Можно ли утверждать, что при m0=0 и v=1 энергия фотона равна нулю? Нет, нельзя; на самом деле фотон может обладать (и обладает) энергией, хоть и не имеет массы покоя, за счет того, что всегда движется со скоростью света!

Мы знаем также, что импульс любой частицы равен про­изведению полной энергии на скорость: *p=vE* при с=1, или, в обычных единицах, *p=vE/c2.* Для любой частицы, движущейся со скоростью света, *р=Е,* если с=1. Формулы для энергии фотона в движущейся системе даются по-прежнему уравнением (17.12), но вместо импульса туда нужно подставить энергию, умноженную на с (на 1). Изменение энергии при преобразо­вании означает изменение частоты света. Это явление назы­вается эффектом Допплера; формулу для него легко получить из уравнения (17.12), положив *Е=р* и *E=hv.*

Как сказал Минковский: «Пространство само по себе и время само по себе погрузятся в реку забвенья, а останется жить лишь своеобразный их союз».

***Глава 18***

**ДВУМЕРНЫЕ ВРАЩЕНИЯ**

**[§ 1. Це](#a1)****[нт](#a1)****[р масс](#a1)**

[**§ 2. Вращен****и****е твердого тела**](#a2)

[**§ 3. Момент кол****ич****ества движения**](#a3)

[**§ 4. Закон сох****р****анения момента количества движения**](#a4)

**§ 1. Центр масс**

В предыдущих главах мы изучали механику точек, или маленьких частиц, внутренняя структура которых нас совершенно не инте­ресовала. В последующих нескольких главах мы изучим применение законов Ньютона к более сложным вещам. Но ведь чем сложнее объект, тем он интереснее, и вы сами увидите, что явления, связанные с такими более сложны­ми объектами, поистине поразительны. Разу­меется все эти явления не содержат ничего большего, чем комбинации законов Ньютона, однако временами просто трудно поверить, что все это произошло из **F**=**ma**!

Что это за более сложные объекты, с кото­рыми мы будем иметь дело в дальнейшем? Это может быть течение воды, вращение галактик и т. д. Но сначала давайте разберемся с наи­более простым из сложных объектов—*твердым телом.* Этим термином мы будем называть мо­нолитный объект, который одновременно с из­менением положения может еще и вращаться как целое. Впрочем, даже такой простой объ­ект может двигаться достаточно сложно, поэто­му давайте сначала рассмотрим наиболее прос­той случай движения, когда тело крутится во­круг *неподвижной оси,* причем каждая точка этого тела движется в плоскости, перпендику­лярной к этой оси. Такое вращение тела во­круг неподвижной оси называется *плоским,* или *двумерным.* Позднее, когда мы обобщим наш результат на случай трех измерений, вы увидите, что вращение гораздо более хитрая штука, чем механика частицы, и без доста­точного опыта в двух измерениях понять трех­мерные вращения очень трудно.

К первой интересной теореме о движении сложного тела можно прийти следующим образом: попробуйте бросить какой-нибудь предмет, состоящий из множества скрепленных между собой кубиков и стержней. Вы знаете, конечно, что он полетит по параболе; это мы обнаружили еще, когда изучали движение точки. Однако теперь наш объект *не* точка. Он поворачивается, покачивается и все же летит по параболе; вы можете в этом убедиться. *Какая, же точка* тела описывает параболу? Ну разумеется, не угол кубика, потому что он поворачивается, не конец стержня, не его середина и не центр кубика. Но все-таки *что-то* движется по параболе, существует некий эффек­тивный «центр», который движется по параболе. Таким образом, первая теорема о сложных объектах говорит, что *сущест­вует* какая-то «средняя» точка, вполне определенная математи­чески, которая движется по параболе. Точка эта не обяза­тельно находится в самом теле, она может лежать и где-то вне его.

Это так называемая теорема о центре масс, и доказывается она следующим образом.

C:\1\pic\gray.jpgЛюбой объект можно рассматривать как множество малень­ких частичек, атомов, связанных различными силами. Пусть *i* обозначает номер одной из таких частиц (их страшно много, по­этому i может быть равно, например, 1023). Сила, действующая на i-ю частицу, равна массе, умноженной на ускорение этой частицы:

В последующих главах наши движущиеся объекты и все их части будут двигаться со скоростями, много меньшими, чем скорость света, и поэтому для всех величин мы будем рас­сматривать только нерелятивистское приближение. Масса при этих условиях будет постоянна, так что

C:\1\pic\gray.jpg

Если теперь сложить все силы, действующие на частицы, т. е. сложить все **F**i- со всеми значениями индекса, то в результате мы должны получить полную силу F. Складывая же правые части уравнения (18.2) для всех частиц и вспоминая, что про­изводная от суммы равна сумме производных, получаем

Поэтому полная сила равна второй производной от суммы произведений масс частиц на их положение.

Но полная сила, действующая на все частицы,— это то же самое, что и внешняя сила. Почему? Да потому что, какие бы силы ни действовали между частицами, пусть это будет притя­жение или отталкивание, или атомные силы, все равно, когда мы складываем их вместе и применяем Третий закон Ньютона, по которому силы действия и противодействия между любыми двумя частицами равны друг другу, то эти взаимные силы сокращаются друг с другом и в результате останутся только силы, действующие со стороны атомов, находящихся вне тела. Так что, если уравнение (18.3) представляет собой сумму по некоторому числу частиц, образующих наш объект, то *внешняя* сила, действующая на него, равна просто сумме всех сил, действующих на *все* частицы, образующие этот объект. Урав­нение (18.3) неплохо было бы записать в виде полной массы тела, умноженной на какое-то ускорение. Сделать это можно. Пусть *М* будет суммой масс всех частиц, т. е. полной массой тела. Если теперь *определить* вектор **R** как

то, поскольку ***М***постоянна, уравнение (18.3) перейдет в



C:\1\pic\gray.jpg

Таким образом, внешняя сила равна полной массе, умно­женной на ускорение некоторой точки **R**; эта точка и называ­ется *центром масс* тела. Она расположена где-то в «середине» тела — некое среднее **r**, в котором различные **r**i учитываются в зависимости от их важности, т. е. в зависимости от того, какую долю вносят они в полную массу.

Мы подробно обсудим эту важную теорему несколько позд­нее, а сейчас остановимся на двух примерах. Пусть на тело не действуют никакие внешние силы, скажем, оно плавает где-то в пустом пространстве. Оно может делать все, что ему угодно: крутиться, покачиваться, изгибаться, но при этом его *центр масс,* эта искусственно выделенная нами математическая точка, *должен двигаться, с постоянной скоростью.* В частности, если вначале этот центр покоился, то он так и будет покоиться все время. Поэтому если мы возьмем какой-то космический корабль со всеми его пассажирами, вычислим его центр масс и обна­ружим, что он стоит на месте, то можно быть уверенным, что центр масс так и останется на месте, если только на корабль не будут воздействовать какие-то внешние силы. Сам корабль, конечно, может немного перемещаться, но это потому, что пассажиры внутри корабля ходят взад и вперед. Так, если все пассажиры одновременно перейдут в носовую часть, то корабль немного подастся назад, чтобы среднее положение всех масс осталось в точности на том же самом месте.

Означает ли это, что в результате неподвижности центра масс ракета не может двигаться вперед? Конечно, нет, но, чтобы продвинуть вперед интересующую нас часть ракеты, мы что-то должны выбросить назад. Иными словами, если вна­чале ракета покоилась, а затем выбросила из сопла некоторое количество газа, то газ этот полетит назад, а сама ракета по­летит при этом вперед, однако центр масс останется точно на том же месте, где он был и раньше. Так что в ракете интере­сующая нас часть продвинется вперед за счет другой, которая улетит назад.

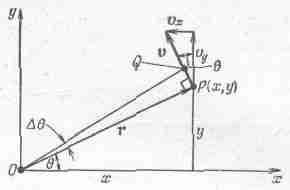
Второе замечание относительно движения центра масс. Его можно рассматривать отдельно от всех «внутренних» дви­жений тела и, следовательно, его можно не учитывать при изучении вращения. Собственно поэтому мы начали изучать вращения с центра масс.

**§ 2. Вращение твердого тела**

Поговорим теперь о вращении. Как известно, обычные предметы не вращаются просто так: они колеблются, вибри­руют, изгибаются. Поэтому, чтобы упростить рассуждения, рассмотрим движение несуществующего идеального объекта, который мы назвали *твердым телом.* В таком объекте связи между атомами столь сильны, что те небольшие силы, которые необходимы, чтоб привести его в движение, не могут деформи­ровать тело. Форма его все время остается одной и той же. Если мы хотим изучить движение такого тела и условимся не принимать во внимание движение его центра масс, то ему остается лишь *вращаться.* Вот это вращение мы и должны описать. Каким образом? Предположим, что в теле существует какая-то воображаемая неподвижная линия (она может про­ходить через центр масс, а может и не проходить); вокруг этой линии, как вокруг оси, вращается наше тело. Но как все-таки определить, что такое вращение? Сделать это совсем просто. Отметив какую-то точку на теле, где угодно, только не на оси, и зная, куда она перешла через некоторый промежуток времени, мы точно можем сказать, в каком положении находится тело. Единственное, что нужно знать для описания положения точки, - это *угол.* Таким образом, изучение вращения заключается в изучении изменения угла со временем.

Чтобы описать вращение, измерим угол, на который пово­рачивается тело. Разумеется, речь идет не об угле между двумя точками *внутри* самого тела или *на* теле, а об *угловом изме­нении положения* всего тела как целого от одного момента вре­мени до другого.

Сначала давайте разберемся с кинематикой вращения. Изменение угла со временем очень похоже на изменение по­ложения при одномерном движении; для плоского вращения мы можем говорить об угловом положении и угловой скорости. Между этими двумя движениями — плоским вращением и одномерным перемещением — существует очень интересная связь: почти каждая величина в одном случае имеет свой аналог в другом. Прежде всего угол θ, указывающий, насколько *повернулось* тело, соответствует пройденному точкой расстоя­нию *s.* Угловая скорость ω*=d*θ*/dt,* которая показывает, с какой быстротой изменяется угол, соответствует обычной скорости *v=ds/dt,* описывающей быстроту изменения положения. Если угол измеряется в радианах, то угловая скорость ω равна какому-то числу радиан в секунду. Чем больше угловая ско­рость, тем быстрее вращается объект и тем быстрее изменяется угол. Если продифференцировать угловую скорость по вре­мени, то получим величину *a=d*ω*/dt,* которую мы будем на­зывать угловым ускорением. Оно может служить аналогом обычного ускорения.

Теперь нам следует связать динамику вращения с дина­микой частиц, из которых сделано тело, т. е. выяснить, как движется каждая данная частица, если угловая скорость со­ставляет столько-то радиан в секунду. Для этого давайте возьмем какую-то частицу, расположенную на расстоянии r от оси, и будем, как обычно, говорить, что в данный момент времени она находится в определенном положении *Р(х, у)* (фиг. 18.1).

*Фиг. 18.1. Кинематика двумер­ного вращения.*

Через промежуток времени Δt тело целиком по­вернется на угол Δθ, а вместе с ним повернется и наша частица. Хотя расстояние от нее до оси вращения *О* остается тем же самым, она уже переместится в другую точку, *Q.* Первое, что хотелось бы знать, это насколько изменятся расстояния *х* и y. Если обозначить через rдлину *ОР,* то длина *PQ* будет равна rΔθ (просто по определению угла). Тогда изменение расстояния *х* будет равно проекции rΔθ на ось *х*

Δz=-PQsinθ =-гΔθy/r=-y/Δθ. (18.6)

Аналогично,

Δy=xΔθ. (18.7)

Если тело вращается с угловой скоростью ω, то, деля обе части равенства (18.6) и (18.7) на Δt, найдем компоненты скорости частицы

*vx*=-ωx и *vy*=ωy.(18.8)

C:\1\pic\gray.jpgЕсли же нам требуется абсолютная величина скорости, то мы просто пишем

Не удивительно, что абсолютная величина скорости получи­лась равной ωr; это же очевидно; ведь полное пройденное рас­стояние равно rΔθ, а поэтому расстояние, пройденное за 1 *сек,* будет rΔθ/Δt, или rω.

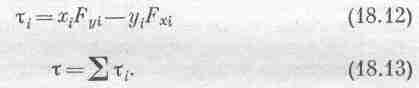
Перейдем теперь к рассмотрению *динамики* вращения. Здесь следует ввести новое понятие — *силу.* Давайте посмотрим, нельзя ли изобрести нечто, играющее ту же роль, что и сила в линейном движении. Это нечто мы будем называть *моментом силы,* или просто *моментом.* Обычно под силой мы понимаем нечто, заставляющее покоящееся тело двигаться, а то, что заставляет тело вращаться, есть «вращающая», или «крутящая», сила; ее мы называем *моментом.* Таким образом, качественно момент силы — это кручение; но что такое момент силы коли­чественно? Количественную теорию момента можно получить, изучая *работу,* затраченную на поворот тела. Этот подход очень хорош и для определения силы: если мы знаем, какая требуется работа, чтобы совершить данное перемещение, то знаем и силу. Чтобы продолжить соответствие между угловыми и линейными величинами, мы должны приравнять работу, которая производится при повороте тела на какой-то угол, к произведению *момента* на этот *угол.* Другими словами, при таком определении момента теорема о работе имеет абсолютный аналог: работа есть сила на перемещение, или момент на угол. Это сразу говорит нам, что такое момент количественно. Рас­смотрим, например, твердое тело, вращающееся вокруг оси, на которое действуют различные силы. Сконцентрируем сначала наше внимание на одной силе, приложенной к некоторой точке *(х, у).* Какую работу мы затрачиваем, поворачивая тело на некоторый малый угол Δθ? Нетрудно понять, что она равна

ΔW=FxΔx+FyΔy. (18.10)

Теперь нужно только подставить выражения (18.6) и (18.7) для Δx; и Δy и получить

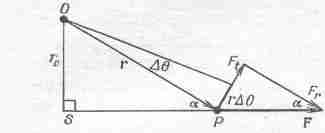
ΔW=(xFy-yFx) Δθ, (18.11)

т. е. работа, которую мы проделали, равна углу, на который было повернуто тело, умноженному на какую-то странную комбинацию сил и расстояний. Эта «странная комбинация» и есть момент. Таким образом, определяя изменение работы как момент, умноженный на угол поворота, мы получаем формулу, выражающую момент через силы. (Это понятно. По­скольку момент не является полностью новым понятием, не зависящим от механики Ньютона, то он должен определенным образом выражаться через силу.)

Пусть теперь на тело действует несколько сил. Тогда ра­бота, производимая этими силами, равна сумме работ от каж­дой силы, так что ΔW будет иметь вид суммы множества членов: по одному для каждой из сил, однако *каждый из них пропор­ционален* Δθ. Эту величину Δθ можно вынести за скобку и получить, что работа равна сумме моментов от всех действу­ющих сил, умноженной на Δθ. Эту сумму можно назвать пол­ным моментом сил и обозначить τ. Как видите, моменты скла­дываются по обычным законам алгебры, однако, как вы узнаете после, это происходит из-за того, что мы ограничиваемся только плоскими вращениями. Эта ситуация напоминает одномерное движение, в котором силы просто складываются алгебраически; ведь все они в этом случае действуют вдоль одной и той же прямой. В трехмерном пространстве все более сложно. Таким образом, для двумерного вращения

Нужно только помнить, что это справедливо лишь для вра­щения вокруг одной оси. Если брать различные оси, то все *хi* и yiизменятся, соответственно изменяются (обычно) и величины моментов.

Отвлечемся теперь на минуту и заметим, что предыдущий способ введения момента дает очень важный результат для тела, находящегося в равновесии: если сбалансированы все силы, действующие на объект, и перемещающие и вращающие, то нужно, чтобы не только *полная сила* была равна нулю, но и *полный момент,* так как при *малом перемещении объекта, находящегося в равновесии, никакой работы не производится.* Следовательно, из того, что ΔW=τΔθ=0, можно заключить, что сумма всех моментов должна быть равна нулю. Таким образом, для равновесия необходимо выполнение двух условий: а) сумма всех сил равна нулю и б) сумма всех моментов тоже равна нулю. Попробуйте доказать сами, что в двумерном случае достаточно равенства нулю суммы моментов сил отно­сительно какой-либо *одной* оси.

Вернемся теперь к случаю одной силы, действующей на тело, и попытаемся выяснить, что же геометрически означает странное выражение *xFy-yFx.* На фиг. 18.2 вы видите силу **F**, приложенную в точке *Р.*

*Фиг. 18.2. Вращающий момент, создаваемый силой.*

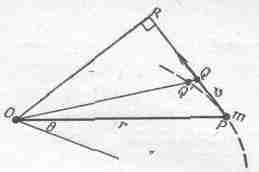
Когда тело поворачивается на малый угол Δθ, то естественно, что произведенная при этом работа равна составляющей в направлении перемещения, умноженной на величину перемещения. Иначе говоря, работает только тангенциальная составляющая силы, которая умножается на расстояние rΔθ. Поэтому момент равен тангенциальной со­ставляющей силы (перпендикулярной к радиусу), умноженной на радиус. Это хорошо согласуется с нашим первоначальным понятием момента, потому что полностью радиальная сила не может крутить тело. Крутящее действие силы, очевидно, происходит только от той ее части, которая не тянет тело от центра. Она и называется тангенциальной составляющей, Ясно, кроме того, что данная сила закручивает тело тем сильнее, чем дальше от центра она приложена. Попробуйте раскрутить тело давлением прямо *на* его ось! Таким образом, тот факт, что момент силы пропорционален как радиальному расстоянию, так и тангенциальной составляющей силы, имеет свой смысл,

Существует еще третье, очень интересное выражение для момента силы. Как вы только что узнали, момент силы равен силе, умноженной на радиус и на синус угла *а* (см. фиг. 18.2), Если теперь продолжить линию действия силы и провести прямую, перпендикулярную к ней, то нетрудно видеть, что длина *OS* (она часто называется *плечом силы)* во столько раз короче радиуса, во сколько тангенциальная составляющая силы меньше полной ее величины. Поэтому можно записать, что момент равен произведению величины силы на длину ее плеча.

Мы не знаем точно, откуда произошел термин «момент силы» — по-видимому, от латинского *movimentum,* что означает способность силы двигать объект (используя какой-либо рычаг), тем более заметную, чем длинней плечо силы. Кстати, в математике слово «момент» означает усреднение с весом, в ка­честве которого взято расстояние до оси.

**§ 3. Момент количества движения**

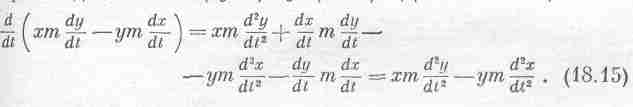
Хотя до сих пор мы рассматривали только специальный слу­чай твердого тела, свойства момента и его математическое выра­жение интересны даже тогда, когда тело не твердое. Можно доказать очень интересную теорему: подобно тому как внешняя сила равна скорости изменения величины *р,* которая называется пол­ным импульсом системы частиц, так и момент силы равен ско­рости изменения некоторой величины *L,* называемой *моментом количества движения,* или *угловым моментом* группы частиц. Чтобы доказать это, рассмотрим систему частиц, на которую действуют силы, и посмотрим, что произойдет с системой в результате действия вращающих моментов, созданных этими силами. Для начала давайте возьмем только *одну* частицу. Такая частица с массой mи осью *О* изображена на фиг. 18.3.

**

*Фиг. 18.3. Движение частиц относительно оси вращения С*

Она не обязательно должна вращаться по окружности вокруг оси *О,* а может двигаться и по эллипсу, подобно планете вокруг Солнца, или по какой-нибудь другой кривой. Главное то, что она движется, что на нее действует сила, которая ускоряет ее в соответствии с обычными законами: x-компонента силы равна массе, умноженной на x-компоненту ускорения, и т. д. Но по­смотрим теперь, как действует *момент силы.* Он, как вы знаете, равен *xFy-yFx,* а *х-* и у-компоненты силы в свою очередь рав­ны массе, умноженной соответственно на *х-* и y-компоненту ускорения, так что

C:\1\pic\gray.jpg

Хотя сразу и не видно, что это выражение является производ­ной от какой-то простой величины, но на самом деле оно равно производной от *xm(dy/dt)-ym(dx/dt).* Действительно,

Оказывается, таким образом, что момент силы равен скорости изменения со временем некоторой величины! Давайте обратим внимание на эту величину и прежде всего дадим ей имя. Она будет называться моментом количества движения, или угловым моментом, и обозначаться буквой *L*

C:\1\pic\gray.jpg

Хотя во всех наших рассмотрениях мы не принимали в рас­чет теорию относительности, тем не менее второе выражение для *L* верно и при учете ее. Итак, мы нашли, что у обычного импульса также существует вращательный аналог — угловой момент, который связан с компонентами импульса точно так же, как и момент силы связан с компонентами силы! Так что если мы хотим вычислить момент количества движения отно­сительно какой-то оси, то должны взять тангенциальную сос­тавляющую импульса и умножить ее на радиус. Другими сло­вами, угловой момент показывает, насколько быстро движется частица *вокруг* какого-то центра, ведь он учитывает только тангенциальную часть импульса. Более того, чем дальше от центра удалена линия, по которой направлен импульс, тем больше будет угловой момент. Точно так же, поскольку гео­метрия в этом случае та же, что и в случае момента силы, су­ществует плечо импульса (оно, разумеется, *не совпадает* с плечом силы, действующей на частицу), которое равно расстоя­нию линии импульса от оси. Таким образом, угловой момент равен просто величине импульса, умноженного на его плечо. Точно так же, как и для момента силы, для углового момента мы можем написать следующие три формулы:

*L=хрy-урх=rpтанг=р*•Плечо импульса. (18.17)

Момент количества движения, как и момент силы, зависит от положения оси, относительно которой он вычисляется.

Прежде чем перейти к рассмотрению более чем одной части­цы, применим полученные выше результаты к движению пла­неты вокруг Солнца. В каком направлении действует сила? Конечно, по направлению к Солнцу. А какой при этом будет момент силы? Разумеется, все зависит от того, в каком месте мы выберем ось, однако результат получится совсем простым, если в качестве точки вращения выбрать само Солнце. Посколь­ку момент силы равен силе, умноженной на ее плечо, или ком­поненте силы, перпендикулярной к радиусу r*,* умноженной на r*,* то в этом случае нет никакой тангенциальной составляющей силы, а поэтому момент силы относительно оси, проходящей через Солнце, равен нулю. Следовательно, момент количества движения должен оставаться постоянным. Давайте-ка посмот­рим, что это означает. Произведение тангенциальной компонен­ты скорости на массу и радиус, будучи моментом количества движения, должно оставаться постоянным, потому что скорость его изменения есть момент силы, который в нашем случае равен нулю. Это означает, что остается постоянным произведение тангенциальной компоненты скорости на радиус, поскольку масса-то уж, конечно, не изменяется. Но такая величина, ха­рактеризующая движение планеты, уже вычислялась нами раньше. Предположим, что мы взяли маленький промежуток времени Δt. Какое расстояние пройдет планета при своем дви­жении из точки *Р* в точку *Q* (фиг. 18.3)? Как велика *площадь* той области, которую «заметает» прямая, соединяющая пла­нету с Солнцем? Пренебрегая площадью *QQ'P,* которая очень мала по сравнению с *OPQ,* находим, что площадь этой области равна половине основания *PQ,* умноженного на высоту *OR.* Другими словами, «заметенная» площадь равна половине про­изведения скорости на ее плечо. Так что скорость изменения этой площади пропорциональна моменту количества движения, который остается постоянным. Итак, мы получим, что закон Кеплера о равных площадях за равные промежутки времени является просто словесным описанием закона сохранения мо­мента количества движения, когда моменты внешних сил от­сутствуют.

**§ 4. Закон сохранения момента количества движения**

Посмотрим теперь, что получается в случае большого коли­чества частиц, т. е. когда тело состоит из множества частичек со множеством сил, действующих между ними и извне. Разуме­ется, мы уже знаем, что момент силы, действующий на любую i-ю частицу (т. е. произведение силы, действующей на *i-ю* час­тицу, на ее плечо), равен скорости изменения момента количе­ства движения этой частицы, а момент количества движения i-й частицы в свою очередь равен произведению импульса час­тицы на его плечо. Допустим теперь, что мы сложили моменты сил τi- всех частиц и назвали это полным моментом сил τ. Эта величина должна быть равна скорости изменения суммы момен­тов количества движения всех частиц *Li.* Эту сумму можно принять за определение новой величины, которую мы назовем полным моментом количества движения *L.* Точно так же, как импульс тела равен сумме импульсов составляющих его частиц, момент количества движения тела тоже равен сумме моментов составляющих его частиц. Таким образом, скорость изменения полного момента количества движения *L* равна полному мо­менту сил

C:\1\pic\gray.jpg

С непривычки может показаться, что полный момент сил — ужас­но сложная штука. Ведь нужно учитывать все внутренние и внешние силы. Однако если мы вспомним, что по закону Ньютона силы действия и противодействия не только равны, но и (что особенно важно!) *действуют по одной и той же прямой в противоположных направлениях* (неважно, говорил ли об этом сам Ньютон или нет, неявно он подразумевал это), то два *мо­мента* внутренних сил между двумя взаимодействующими час­тицами должны быть равны друг другу и направлены противо­положно, поскольку для любой оси плечи их будут одинаковы. Поэтому все внутренние моменты сил взаимно сокращаются и получается замечательная теорема: *скорость изменения момента количества движения относительно любой оси равна моменту внешних сил относительно этой же оси!*

C:\1\pic\gray.jpg

Итак, мы получили в руки мощную теорему о движении боль­шого коллектива частиц, которая позволяет нам изучать общие свойства движения, не зная деталей его внутреннего механизма, Эта теорема верна для любого набора частиц, независимо от того, образуют ли они твердое тело или нет.

Особенно важным частным случаем этой теоремы является *закон сохранения, момента количества движения,* который гла­сит: если на систему частиц не действуют никакие внешние моменты сил, то ее момент количества движения остается пос­тоянным.

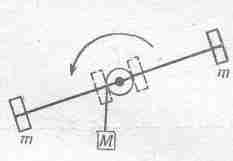
Рассмотрим один очень важный частный случай набора частиц, когда они образуют твердое тело, т. е. объект, который всегда имеет определенную форму и геометрический размер и может только крутиться вокруг какой-то оси. Любая часть такого объекта в любой момент времени расположена одинако­вым образом относительно других его частей. Попытаемся те­перь найти полный момент количества движения твердого тела. Если масса i-й частицы его равна mi, а положение ее *(xi yi*,), то задача сводится к определению момента количества движения этой частицы, поскольку полный момент количества движения равен сумме моментов количества движения всех таких частиц, образующих тело. Для движущейся по окружности точки мо­мент количества движения равен, конечно, произведению ее мас­сы на скорость и на расстояние до оси вращения, а скорость в свою очередь равна угловой скорости, умноженной на рас­стояние до оси:

Li=miviri=mir2iω. (18.20)

Суммируя *li* для всех частиц, получаем

L=Iω, (18.21)

C:\1\pic\gray.jpgгде

Это выражение очень похоже на формулу для импульса, который равен произведению массы на скорость. Скорость при этом заменяется на угловую скорость, а масса, как видите, заменяется на некоторую новую величину, называемую *мо­ментом инерции I.* Вот что играет роль массы при вращении! Уравнения (18.21) и (18.22) говорят нам, что инерция вращения тела зависит не только от масс составляющих его частичек, но и от того, *насколько далеко расположены они от оси.* Так что если мы имеем два тела равной массы, но в одном из них массы расположены дальше от оси, то его инерция вращения будет больше. Это легко продемонстрировать на устройстве, изобра­женном на фиг. 18.4.

*Фиг. 18.4. Зависимость «инерции вращения» от плеча масс.*

Масса Mв этом устройстве не может па­дать слишком быстро, потому что она должна крутить тяжелый стержень. Расположим сначала массы mоколо оси вращения, причем грузик Mбудет как-то ускоряться. Однако после того, как мы изменим момент инерции, расположив массы mгораздо дальше от оси, мы увидим, что грузик Mускоряется гораздо медленнее, чем прежде. Происходит это вследствие возрастания инертности вращения, которая составляет физический смысл момента инерции — суммы произведений всех масс на квадраты их расстояний от оси вращения.

Между массой и моментом инерции имеется существенная разница, которая проявляется удивительным образом. Дело в том, что масса объекта обычно не изменяется, тогда как момент инерции *легко* изменить. Представьте себе, что вы встали на стол, который может вращаться без трения, и держите в вытянутых руках гантели, а сами медленно вращаетесь. Можно легко из­менить момент инерции, согнув руки; при этом наша масса останется той же самой. Когда мы проделаем все это, то закон сохранения момента количества движения будет творить чуде­са, произойдет нечто удивительное. Если моменты внешних сил равны нулю, то момент количества движения равен моменту инерции I1, умноженному на угловую скорость ш1, т. е. ваш момент количества движения равен I1ω1*.* Согнув затем руки, вы тем самым уменьшили момент инерции до величины I2. Но поскольку из-за закона сохранения момента количества движения произведение Iω должно остаться тем же самым, то I1ω1 должно быть равно *I2*ω*2.* Так что если вы *уменьшили* момент инерции, то ваша угловая скорость в результате этого должна *возрасти.*

***Глава 19***

**ЦЕНТР МАСС; МОМЕНТ ИНЕРЦИИ**

[**§ 1. Свойства ц****е****нтра масс**](#a1)

[**§ 2. Положение це****нт****ра масс**](#a2)

[**§ 3. Вычисление** **мо****мент****а ине****рции**](#a3)

[**§ 4. Кинетичес****кая** **эн****ергия вра****щения**](#a4)

**§ 1. Свойства центра масс**

В предыдущей главе мы установили факт существования некоторой замечательной точки, называемой *центром масс.* Она замечательна тем, что если на частицы, образующие тело (неважно, будет ли оно твердым или жидким, звездным скоплением или чем-то другим), дей­ствует великое множество сил (конечно, имеют­ся в виду только внешние силы, поскольку все внутренние силы компенсируют друг друга), то результирующая сила приводит к такому уско­рению этой точки, как будто в ней сосредо­точена вся масса тела *М.* Давайте теперь обсу­дим свойство центра масс несколько подробнее.

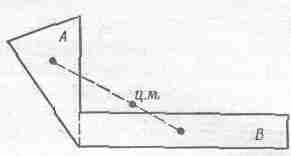
Положение центра масс (сокращенно ц. м.) определяется уравнением

Это, разумеется, векторное уравнение, т. е. фактически три уравнения — по одному для каждого из трех направлений. Но мы будем рассматривать только x-направление; если вы поймете, что происходит в x-направлении, то поймете и два остальных. Что означает равен­ство Хц.м.=Σmixi/Σmi? Предположим на ми­нуту, что тело разделено на маленькие кусочки с одинаковой массой m*,* причем полная масса будет равна числу таких кусочков *N,* умножен­ному на массу одного кусочка, скажем 1 *г,* или какую-то другую единицу. Тогда наше уравне­ние просто означает, что нужно взять коорди­наты *х* всех кусочков, сложить их и резуль­тат разделить на число кусочков, т. е. *Xц.м.=mΣxi/mN=Σxi/N.* Иными словами, если массы кусочков равны, то *Хц. м.*- будет просто средним арифметическим x-коорди­нат всех кусочков. Но предположим, что один из кусочков вдвое тяжелее, чем каждый из остальных. Тогда в нашу формулу его координата будет входить с коэффициентом 2, т. е. в суммах ее нужно учитывать дважды. Нетрудно понять, почему это про­исходит. Ведь тяжелый кусочек можно представить себе как бы состоящим из двух легких, таких же, как и все остальные, так что, когда мы вычисляем среднее, его координату *х* нужно учитывать дважды: ведь кусочков-то в этом месте два. Таким образом, Хц.м.равно просто среднему арифметическому х-координат всех масс, причем каждая координата считается некоторое число раз, пропорциональное массе, как будто она разделена на маленькие кусочки единичной массы. Исходя из этого, легко доказать, что Хц.м. должна находиться где-то между самой близ­кой и самой далекой частичкой. Вообще центр масс должен лежать где-то внутри многогранника, проведенного через край­ние точки тела. Однако вовсе не обязательно, чтобы центр масс находился в самом теле; ведь могут быть тела, подобные окруж­ности, например обруч, центр масс которого находится в гео­метрическом центре, а не на самом обруче.

Конечно, если объект симметричен, например прямоугольник, обладающий линией симметрии, то его центр масс должен лежать где-то на этой линии. Кстати, прямоугольник имеет еще одну линию симметрии и это однозначно определяет поло­жение его центра масс. Для просто симметричного объекта центр масс должен лежать где-то на оси симметрии: ведь отри­цательных *х* в этом случае ровно столько же, сколько и поло­жительных.

Существует еще один очень забавный способ нахождения центра масс. Вообразите

себе тело, состоящее из двух кусков *А* и *В* (фиг, 19.1).



*Фиг. 19.1. Центр масс сложного тела лежит на линии, соеди­няющей центры масс двух составляющих его частей.*

Центр масс в этом случае можно найти сле­дующим образом. Находим сначала отдельно центры масс сос­тавных частей *А* и *В* и их полные массы *МА* и *МB .* После этого находим центр масс двух точечных тел, одно из которых имеет массу *МА* и расположено в центре масс части *А,* а другое — массу *МB* и расположено в центре масс части *В,* Полученная точка и будет центром масс всего тела. Другими словами, если нам известны центры масс всех частей сложного тела, то, чтобы найти его центр масс, не нужно повторять все сначала, а дос­таточно просто найти центр масс системы точечных тел с мас­сами, равными массам каждой из частей и расположенными в их центрах масс. Посмотрим, как это получается. Пусть мы хотим определить центр масс сложного тела, одни из частиц которого принадлежат части *А,* а другие — части *В.* При этом мы можем разбить полную сумму Σmixi на сумму по части *А,* т. е. ΣAmixi и сумму по части *В,* т. е. ΣBmixi. Если бы мы находили центр масс только части *А,* то нам потребовалась бы первая из этих сумм, которая, как вы знаете, равна *МАХА,* т. е. полной массе части *А* на x-координату ее центра масс: это просто следствие теоремы о центре масс, применен­ной к части A. То же самое можно сказать и о части *В.* Сумма Σ*Bmixi* должна быть равна *МВХВ.* Сложив эти два результата, мы, конечно, должны получить *MX,* т. е.

*МХц.м.*=Σmixi+Σmixi=*МАХА+МВХВ.* (19.2)

Полная же масса *М,* очевидно, равна *МА+МB,* так что выражение (19.2) представляет собой не что иное, как определение центра масс двух точек, одна из которых имеет массу *МА* и координату *ХА,* а другая — массу *МB* и координату *ХB.*

Теорема о движении центра масс интересна не только сама по себе, она еще играет очень важную роль в развитии нашего понимания физики. Если мы предположим, что законы Ньютона верны только для маленьких частей, составляющих большое те­ло, то эта теорема показывает, что они верны также и для боль­шого тела. Мы можем не знать его детального строения и нам известны лишь общая масса и полная сила, действующая на него. Другими словами, законы Ньютона имеют ту особенность, что если они справедливы в малом масштабе, то справедливы и в большом. Нет никакой нужды рассматривать футбольный мяч как ужасно сложную вещь, состоящую из мириада взаимодей­ствующих частиц, а достаточно изучить только движение его центра масс под действием внешней силы **F**, чтобы получить **F**=m**a**, где **а** — ускорение центра масс, а m — полная масса мяча. Итак, закон **F**=m**a** воспроизводит сам себя в большом масштабе. (Наверное, должно быть какое-нибудь хорошее гре­ческое слово, которым можно было бы назвать подобные вос­производящие себя в большом масштабе законы.)

Нетрудно, конечно, догадаться, что первый открытый чело­веком закон должен быть именно таким законом, воспроизво­дящим самого себя в большом масштабе. Почему? Да просто потому, что истинный размер фундаментальных «винтиков и колесиков» Вселенной есть атомный размер, который настолько меньше размеров окружающих нас вещей, что только сейчас начинает входить в обычную жизнь. Итак, первая открытая человеком закономерность не могла иметь отношения к разме­рам атомного масштаба. Если бы законы для малых частиц не воспроизводили себя в большом масштабе, то открыть их было бы не так-то легко. А что можно сказать об обратной проблеме? Должны ли законы микромира быть теми же самыми, что и для больших тел? Никакой необходимости в этом, конечно, нет.

Давайте, однако, предположим, что истинное движение атомов описывается неким странным уравнением, которое *не воспроиз­водит* себя при переходе к большему масштабу. Вместо этого оно обладает тем свойством, что при таком переходе его можно *приближенно заменить каким-то выражением,* которое при все большем и большем увеличении масштаба воспроизводит само себя. Это вполне может случиться, и в действительности так оно и происходит. Законы Ньютона являются как бы «кончиком хвоста» атомных законов, продолженных до очень больших размеров. Истинные законы движения частиц очень малых раз­меров весьма специфичны, но если мы возьмем большое число частиц и скомбинируем законы их движения, то приближенно, *и только приближенно,* получим законы Ньютона. После этого законы Ньютона позволяют нам двигаться ко все большим раз­мерам, оставаясь при этом теми же самыми законами. В сущ­ности, при переходе ко все большим и большим размерам они все точнее и точнее описывают природу. Так что факт самовос­производимости законов Ньютона — отнюдь не фундаменталь­ное свойство природы, а важная историческая особенность.

Основываясь на своих первых наблюдениях, мы никоим обра­зом не смогли бы открыть фундаментальные атомные законы, поскольку наблюдения эти были слишком грубыми. Действи­тельно, фундаментальные атомные законы, которые мы назы­ваем квантовой механикой, так сильно отличаются от законов Ньютона, что понять их не просто. Ведь у нас есть только опыт обращения с телами больших размеров, а крохотные атомы ведут себя совершенно невиданным для таких тел образом. Мы не можем сказать: «Электроны в атомах напоминают планеты, крутящиеся вокруг Солнца», или что-то в этом роде. Они не похожи *ни на что* известное нам, ибо мы не видим *ничего похо­жего на них.* Если мы применяем квантовую механику ко все большим и большим объектам, то законы поведения такого кол­лектива атомов *не воспроизводят* поведения одного атома, а дают *новый закон —* закон Ньютона, который уже воспроизводит сам себя, начиная с объектов весом в 1 миллионную микрограмма, содержащих еще миллиарды и миллиарды атомов, и вплоть до тел величиной с Землю и даже еще больших.

Вернемся, однако, к центру масс. Часто его называют *центром тяжести,* так как во многих случаях для силы тяго­тения можно провести точно такие же рассуждения, как и для масс. Если размеры достаточно малы, то силу тяжести можно считать не только пропорциональной массе, но и направленной всюду параллельно некоторой фиксированной линии.

Возьмем тело, в котором сила тяжести действует на каждую из составляющих его частей, a *mi —* масса одной из этих частей. Действующая на нее сила тяжести будет тогда равна произведе­нию m*i* на *g.* Возникает вопрос: в какой точке нужно приложить одну-единственную силу, чтобы сбалансировать притяже­ние всего тела так, чтобы оно (если это твердое тело) не вра­щалось? *Ответ:* сила должна проходить через центр масс. До­казывается это следующим образом. Чтобы тело не вращалось, сумма моментов всех сил должна быть равна нулю, ибо если нет момента сил, то нет и изменения момента количества дви­жения, а поэтому нет и вращения. Таким образом, мы должны подсчитать сумму всех моментов, действующих на все частицы, и посмотреть, какой получится полный момент относительно любой данной оси: он должен быть равен нулю, если ось про­ходит через центр масс. Направив ось *х* горизонтально, а ось *у* вертикально, мы найдем, что моменты сил равны силам, на­правленным вниз, умноженным на плечо *х* (т. е. сила на плечо относительно той оси, для которой измеряется момент силы). Полный же момент равен сумме

τ*=Σmigxi=gΣmixi.* (19.3)

Чтобы полный момент отсутствовал, сумма Σm*ixi* должна быть равна нулю. Но эта сумма равна *MX* — полной массе, умно­женной на расстояние от оси *х* до центра масс. Итак, это рас­стояние должно быть равно нулю.

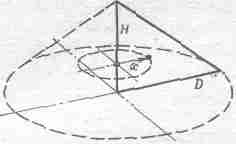
Разумеется, мы провели проверку только для x-направле­ния, однако если мы действительно взяли центр масс, то тело должно быть уравновешено в любом положении, поэтому, по­вернув его на 90°, мы вместо оси *х* получим ось *у.* Другими сло­вами, если держать тело за центр масс, то параллельное грави­тационное поле не дает никакого момента сил. Если же объект настолько велик, что становится существенной непараллель­ность сил притяжения, то точку, в которой должна быть при­ложена уравновешивающая сила, описать не просто: она несколько отклоняется от центра масс. Вот почему нужно пом­нить, что центр масс и центр тяжести — разные вещи. Тот факт, что тело, поддерживаемое точно за центр масс, уравновешено в любом положении, имеет еще одно интересное следствие. Если вместо гравитационных сил взять инерционные псевдосилы, возникающие вследствие ускорения, то, чтобы найти точку, уцепившись за которую мы уравновесим все моменты этих сил, можно использовать ту же самую математическую процедуру. Предположим, что мы заключили тело внутрь ящика, который ускоряется вместе со всем его содержимым. Тогда, с точки зре­ния наблюдателя, сидящего в этом ящике, на тело вследствие инерции будет действовать некая эффективная сила. Иначе го­воря, чтобы заставить тело двигаться вместе с ящиком, нужно подталкивать и ускорять его. Эта сила «уравновешивается силой инерции», которая равна массе тела, умноженной на ускорение ящика. Наблюдателю в ящике будет казаться, будто тело на­ходится в однородном гравитационном поле, величина *g* кото­рого равна ускорению ящика *а.* Таким образом, инерционные силы, возникающие вследствие ускорения тела, не имеют мо­мента относительно центра масс.

Этот факт имеет очень интересное следствие. В инерционной системе, движущейся без ускорения, момент сил всегда равен скорости изменения момента количества движения. Однако равенство момента силы и скорости изменения момента коли­чества движения *остается справедливым* даже для ускоряю­щегося тела, если взять ось, проходящую через центр масс. Таким образом, теорема о равенстве момента сил скорости изменения момента количества движения верна в двух случаях: 1) ось фиксирована — в инерциальной системе; 2) ось проходит через центр масс — даже когда тело ускоряется.

**§ 2. Положение центра масс**

Математическая техника вычисления центра масс относится к области курсов математики; там подобные задачи служат хорошими примерами по интегральному исчислению. Но, даже умея интегрировать, полезно знать некоторые трюки для вычис­ления положения центра масс. Один из таких трюков основан на использовании так называемой теоремы Паппа, которая ра­ботает следующим образом. Если мы возьмем какую-то замк­нутую фигуру и образуем твердое тело, вращая эту фигуру в пространстве так, чтобы каждая точка двигалась перпендику­лярно к плоскости фигуры, то объем образующегося при этом тела равен произведению площади фигуры на расстояние, прой­денное ее центром тяжести! Разумеется, эта теорема верна и в том случае, когда плоская фигура движется по прямой линии, перпендикулярной к ее площади, однако если мы движем ее по окружности или какой-то другой кривой, то при этом получа­ется гораздо более интересное тело. При движении по кривому пути внутренняя часть фигуры продвигается меньше, чем внеш­няя, и эти эффекты компенсируют друг друга. Так что если мы хотим определить центр масс плоской фигуры с однородной плотностью, то нужно помнить, что объем, образуемый враще­нием его относительно оси, равен расстоянию, которое проходит

Например, если нам нужно найти центр масс прямоуголь­ного треугольника с основанием *D* и высотой *H* (фиг. 19.2), то это делается следующим образом.

*Фиг. 19.2. Прямоугольный тре­угольник и прямой круговой конус, образованный вращением этого треугольника.*

Вообразите себе ось, про­ходящую вдоль *H,* и поверните треугольник на 360° вокруг этой оси. Это дает нам конус. Расстояние, которое проходит x-координата центра масс, равно *2*π*х, а* площадь области, кото­рая двигалась, т. е. площадь треугольника, равна *1/2HD.* Произведение расстояния, пройденного центром масс, на пло­щадь треугольника равно объему конуса, т. е. *1/3*π*D2H.* Таким образом, *(2*π*х)(1/2HD)=1/3*π*D2H,* или x=D/3. Совершенно аналогично вращением вокруг второго катета или просто по соображениям симметрии находим, что *у=Н/3.* Вообще центр масс любого однородного треугольника находится в точке пере­сечения трех его медиан (линий, соединяющих вершину тре­угольника с серединой противоположной стороны), которая от­стоит от основания на расстоянии, равном 1/3 длины каждой медианы.

Как это увидеть? Рассеките треугольник линиями, парал­лельными основанию, на множество полосок. Заметьте теперь, что медиана делит каждую полоску пополам, следовательно, центр масс должен лежать на медиане.

Возьмем теперь более сложную фигуру. Предположим, что требуется найти положение центра масс однородного полукруга, т. е. круга, разрезанного пополам. Где будет находиться центр масс в этом случае? Для полного круга центр масс расположен в геометрическом центре, но для полукруга найти его положе­ние труднее. Пусть r *—* радиус круга, а x — расстояние центра масс от прямолинейной границы полукруга. Вращая его вокруг этого края как вокруг оси, мы получаем шар. При этом центр масс проходит расстояние *2*π*х,* а площадь полукруга равна 1/2πr2 (половине площади круга). Так как объем шара равен, конечно, 4πr3/3, то отсюда находим

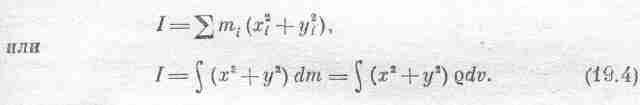
C:\1\pic\gray.jpgC:\1\pic\gray.jpg

или

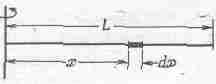
Существует еще другая теорема Паппа, которая фактически является частным случаем сформулированной выше теоремы, а потому тоже справедлива. Предположим, что вместо твердого полукруга мы взяли полуокружность, например кусок прово­локи в виде полуокружности с однородной плотностью, и хотим найти ее центр масс. Оказывается, что *площадь,* которая «заме­тается» плоской кривой при ее движении, аналогичном выше­описанному, равна расстоянию, пройденному центром масс, умноженному на *длину* этой кривой. (Кривую можно рассмат­ривать как очень узкую полоску и применять к ней предыдущую теорему.)

**§ 3. Вычисление момента инерции**

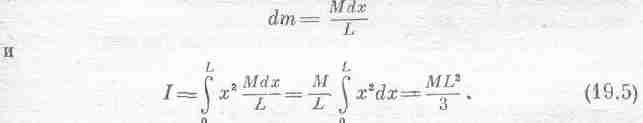
Рассмотрим теперь проблему определения *момента инерции* различных тел. Общая формула для нахождения момента инер­ции объекта относительно оси z имеет вид



Иными словами, нужно сложить все массы, умножив каждую из них на квадрат ее расстояния до оси (z2i+y2i). Заметьте, что это верно даже для трехмерного тела, несмотря на то, что рас­стояние имеет такой «двумерный вид». Впрочем, в большинстве случаев мы будем ограничиваться двумерными телами.

В качестве простого примера рассмотрим стержень, вра­щающийся относительно оси, проходящей через его конец и перпендикулярной к нему (фиг. 19.3).

*Фиг. 19.3. Прямой стержень, вращающийся вокруг оси, прохо­дящей через один из его концов.*

Нам нужно просуммиро­вать теперь все массы, умноженные на квадраты расстояния *х* (в этом случав все *у —* нулевые). Под суммой, разумеется, я имею в виду интеграл от *x2,* умноженный на «элементики» мас­сы. Если мы разделим стержень на кусочки длиной *dx,* то соот­ветствующий элемент массы будет пропорционален *dx,* а если бы *dx* составляло длину всего стержня, то его масса была бы равна *М.* Поэтому

Размерность момента инерции всегда равна массе, умноженной на квадрат длины, так что единственная существенная величина, которую мы вычислили, это множитель 1/3.

А чему будет равен момент инерции I, если ось вращения проходит через середину стержня? Чтобы найти его, нам снова нужно взять интеграл, но уже в пределах от -1/2L до +1/2*L.* Заметим, однако, одну особенность этого случая. Такой стер­жень с проходящей через центр осью можно представлять себе как два стержня с осью, проходящей через конец, причем масса каждого из них равна *М/2,* а длина равна *L/2.* Моменты инер­ции двух таких стержней равны друг другу и вычисляются по формуле (19.5). Поэтому момент инерции всего стержня равен

C:\1\pic\gray.jpgТаким образом, стержень гораздо легче крутить за середину, чем за конец.

Можно, конечно, продолжить вычисление моментов инер­ции других интересующих нас тел. Но поскольку такие расчеты требуют большого опыта в вычислении интегралов (что очень важно само по себе), они как таковые не представляют для нас большого интереса. Впрочем, здесь имеются некоторые очень интересные и полезные теоремы. Пусть имеется какое-то тело и мы хотим узнать его момент инерции относительно какой-то оси. Это означает, что мы хотим найти его инертность при вра­щении вокруг этой оси. Если мы будем двигать тело за стер­жень, подпирающий его центр масс так, чтобы оно не повора­чивалось при вращении вокруг оси (в этом случае на него не действуют никакие моменты сил инерции, поэтому тело не будет поворачиваться, когда мы начнем двигать его), то для того, чтобы повернуть его, понадобится точно такая же сила, как если бы вся масса была сосредоточена в центре масс и

момент инерции был бы просто равен *I1=MR2ц.м.,* где Rц.м.— расстояние от центра масс до оси вращения. Однако формула эта, разумеется, неверна. Она не дает правильного момента инер­ции тела. Ведь в действительности при повороте тело вращается. Крутится не только центр масс (что давало бы величину I1), само тело тоже должно поворачиваться относительно центра масс. Таким образом, к моменту инерции I1 нужно добавить Iц — момент инерции относительно центра масс. Правильный ответ состоит в том, что момент инерции относительно любой оси равен

*I=Iц+МR2ц.м.* (19-7)

Эта теорема называется *теоремой о параллельном переносе оси.* Доказывается она очень легко. Момент инерции относительно любой оси равен сумме масс, умноженных на сумму квад­ратов *х* и *у,* т. е. I=Σmi(x2i+*y2i).* Мы сейчас сосредоточим наше внимание на *х,* однако все в точности можно повторить и для *у.* Пусть координата *х* есть расстояние данной частной точки от начала координат; посмотрим, однако, как все изменится, если мы будем измерять расстояние *х'* от центра масс вместо *х* от начала координат. Чтобы это выяснить, мы должны написать

*xi=x'i+Xц.м..*

Возводя это выражение в квадрат, находим

x2i=x'2i+2Xц.мх'i+Х2ц. м..

Что получится, если умножить его на *mi* и просуммировать по всем i? Вынося постоянные величины за знак суммирования, находим

Ix=Σ*mixi+*2Xц. м. Σmixi+X2ц. м. Σmi *.*

Третью сумму подсчитать легко; это просто МХ2ц..м.. Второй член состоит из двух сомножителей, один из которых Σmixi*;* он равен x'-координате центра масс. Но это должно быть равно нулю, ведь *х' отсчитывается* от центра масс, а в этой системе координат среднее положение всех частиц, взвешенное их мас­сами, равно нулю. Первый же член, очевидно, представляет собой часть *х* от Iц. Таким образом, мы и приходим к фор­муле (19.7).

Давайте проверим формулу (19.7) на одном примере. Прос­то проверим, будет ли она применима для стержня. Мы уже нашли, что момент инерции стержня относительно его конца должен быть равен *ML2/3.* А центр масс стержня, разумеется, находится на расстоянии *L/2.* Таким образом, мы должны полу­чить, что *МL2/3=МL2/12+М(L/2)2.* Так как одна четвертая + одна двенадцатая = одной третьей, то мы не сделали ника­кой грубой ошибки.

Кстати, чтобы найти момент инерции (19.5), вовсе не обя­зательно вычислять интеграл. Можно просто предположить, что он равен величине *ML2,* умноженной на некоторый неизвестный коэффициент γ. После этого можно использовать рассуждения о двух половинках и для момента инерции (19.6) получить коэф­фициент 1/4γ. Используя теперь теорему о параллельном переносе оси, докажем, что γ=1/4γ+1/4, откуда γ=1/3. Всегда можно найти какой-нибудь окольный путь!

При применении теоремы о параллельных осях важно пом­нить, что ось I*ц должна быть параллельна* оси, относительно которой мы хотим вычислять момент инерции.

C:\1\pic\gray.jpgСтоит, пожалуй, упомянуть еще об одном свойстве, которое часто бывает очень полезно при нахождении момента инерции некоторых типов тел. Оно состоит в следующем: если у нас есть *плоская фигура* и тройка координатных осей с началом коор­динат, расположенным в этой плоскости, и осью r, направлен­ной перпендикулярно к ней, то момент инерции этой фигуры относительно оси z равен сумме моментов инерции относительно осей *х* и *у.* Доказывается это совсем просто. Заметим, что

C:\1\pic\gray.jpg (поскольку все zi=0). Аналогично,

C:\1\pic\gray.jpgМомент инерции однородной прямоугольной пластинки, на­пример с массой *М,* шириной *w* и длиной *L* относительно оси, перпендикулярной к ней и проходящей через ее центр, равен просто

поскольку момент инерции относительно оси, лежащей в плос­кости пластинки и параллельной ее длине, равен Mw2/12, т. е. точно такой же, как и для стержня длиной *w,* а момент инерции относительно другой оси в той же плоскости равен ML2/12, такой же, как и для стержня длиной *L.*

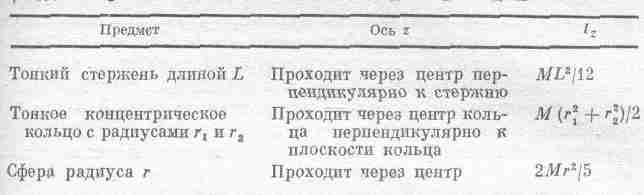
Итак, перечислим свойства момента инерции относительно данной оси, которую мы назовем осью z:

C:\1\pic\gray.jpg1. Момент инерции равен

*2.* Если предмет состоит из нескольких частей, причем момент инерции каждой из них известен, то полный момент инерции равен сумме моментов инерции этих частей.

3. Момент инерции относительно любой данной оси равен моменту инерции относительно параллельной оси, про­ходящей через центр масс, плюс произведение полной массы на квадрат расстояния данной оси от центра масс.

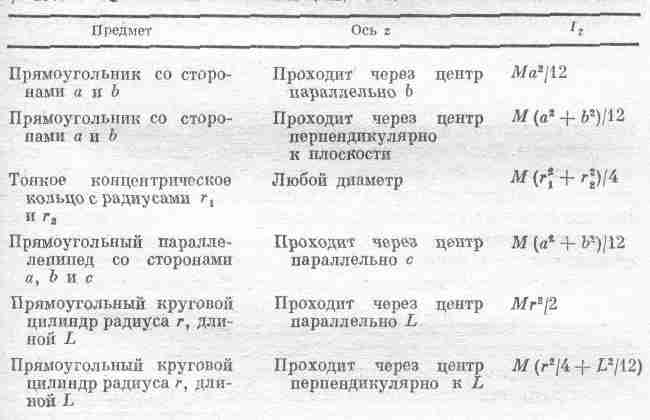
4. Момент инерции плоской фигуры относительно оси, пер­пендикулярной к ее плоскости, равен сумме моментов инерции относительно любых двух других взаимно пер­пендикулярных осей, лежащих в плоскости фигуры и пе­ресекающихся с перпендикулярной осью.

*Таблица 19,1* • простые примеры моментов инерции

В табл. 19.1 приведены моменты инерции некоторых элементарных фигур, имеющих однородную плотность масс, а

табл. 19.2 — моменты инерции некоторых фигур, которые могут быть получены из табл. 19.1 с использованием пере

численных выше свойств.

*Таблица 19.2* • моменты инерции, полученные из табл. 19.1

**§ 4. Кинетическая энергия вращения**

C:\1\pic\gray.jpgПродолжим изучение динамики вращения. При обсуждении аналогии между линейным и угловым движением в гл. 18 мы использовали теорему о работе, но ничего не говорили о кинети­ческой энергии. Какова будет кинетическая энергия твердого тела, вращающегося вокруг некоторой оси с угловой скоростью ω? Используя нашу аналогию, можно немедленно угадать правильный ответ. Момент инерции соответствует массе, угло­вая скорость соответствует обычной скорости, так что кине­тическая энергия должна быть равна 1/2 Iω2. Так оно и есть на самом деле, и сейчас мы покажем это. Предположим, что тело вращается вокруг некоторой оси, так что каждая точка движет­ся со скоростью ωr,-, где *ri —* расстояние от данной точки до оси. Если масса этой точки равна *mi,* то полная кинетическая энергия всего тела равна просто сумме кинетических энергий всех частиц

C:\1\pic\gray.jpgа поскольку ω — постоянная, одна и та же для всех точек, то

В конце гл. 18 мы отмечали, что существуют очень интерес­ные явления, связанные с вращением не абсолютно твердого тела, способного изменять свой момент инерции. Именно, в примере с вращающимся столом у нас был момент инерции I1 и угловая скорость ω1 при вытянутых руках. Согнув руки, мы изменили момент инерции до I2, а угловую скорость — до ω2. Так как у нас нет никаких моментов сил относительно оси вра­щения стола, то момент количества движения должен остаться постоянным. Это означает, что I1ω1=I2ω2. А что можно ска­зать об энергии? Это очень интересный вопрос. Согнув руки, мы начинаем вращаться быстрее, но момент инерции при этом умень­шается и может показаться, что кинетическая энергия должна остаться той же самой. Это, однако, неверно, потому что в дей­ствительности *сохраняется* Iω, а не Iω2. Сравним теперь кине­тические энергии в начале и в конце. В начале кинетическая энергия равна 1/2/Iω21=1/2Lω1, где L=I1ω1=I2ω2— момент количества движения. Точно таким же образом кинетическая энергия в конце равна Т=1/2Lω2,а поскольку ω2>ω1, то кинетическая энергия в конце оказывается большей, чем в на­чале. Итак, вначале, когда руки были вытянуты, мы вращались с какой-то кинетической энергией, затем, согнув руки, мы стали вращаться быстрее и наша кинетическая энергия возросла. А как быть с законом сохранения энергии? Ведь должен же кто-то произвести работу, чтобы увеличить энергию? Это сделали мы сами! Но когда, в какой момент? Когда мы держим гантели гори­зонтально, то никакой работы не производим. Выпрямляя руки в стороны и сгибая их, мы тоже не можем произвести никакой работы. Это, однако, верно только, пока нет никакого вращения! При *вращении* же на гантели действует центробежная сила. Они стремятся вырваться из наших рук, так что, сгибая во время вращения руки, мы преодолеваем противодействие центробеж­ной силы. Работа, которая на это затрачивается, и составляет разницу в кинетических энергиях вращения. Вот откуда бе­рется этот добавок.

Существует еще одно очень интересное явление, которое мы рассмотрим только описательно, чтобы просто иметь о нем представление. Хотя изучение этого явления требует несколько большего опыта, но упомянуть о нем стоит, ибо оно очень любо­пытно и дает много интересных эффектов.

Возьмем снова эксперимент с вращающимся столиком. Рас­смотрим отдельно тело и руки, с точки зрения человека, вра­щающегося на столике. Согнув руки с гантелями, мы стали вращаться быстрее, но заметьте, что тело при этом *не изменило своего момента инерции;* тем не менее оно стало вращаться быстрее, чем прежде. Если бы мы провели вокруг тела окруж­ность и рассмотрели только предметы внутри этой окружности, то *их* момент количества движения *изменился* бы; они закрути­лись бы быстрее. Следовательно, когда мы сгибаем руки, на тело должен действовать момент силы. Однако центробежная сала не может дать никакого момента, так как она направлена по радиусу. Это говорит о том, что среди сил, возникающих во вращающейся системе, центробежная сила не одинока: *есть еще и другая сила.* Эта другая сила носит название *кориолисовой силы,* или *силы Кориолиса.* Она обладает очень странным свой­ством: оказывается, что если мы во вращающейся системе дви­гаем какой-то предмет, то она толкает его вбок. Как и центро­бежная сила, эта сила кажущаяся. Но если мы живем во вра­щающейся системе и хотим что-то двигать по радиусу, то для этого мы должны тянуть его несколько вбок. Именно эта «бо­ковая» сила создает момент, который раскручивает наше тело.

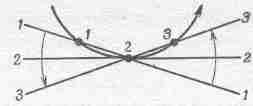
Перейдем теперь к формулам и покажем, как кориолисова сила работает на практике. Пусть Мик сидит на карусели, ко­торая кажется ему неподвижной. С точки зрения Джо, который стоит на земле и знает истинные законы механики, карусель крутится. Предположим, что мы провели радиальную прямую на карусели и пусть Мик двигает прямо по этой линии какую-то массу. Я хочу показать, что для того, чтобы все было так, как мы описали, необходима боковая сила. Это можно увидеть, обратив внимание на момент количества движения вращающейся массы. Она крутится все время с одной и той же угловой ско­ростью ω, поэтому ее момент количества движения равен

L=mvтавгr=mωr•г=mωг2.

C:\1\pic\gray.jpgЕсли масса расположена близко к центру, то он сравнительно мал, но если мы передвигаем ее в новое положение и если мы увеличиваем r*,* то масса mприобретает больший момент количества движения, т. е. во время движения по радиусу на нее *должен действовать некоторый момент силы.* (Чтобы на кару­сели двигаться по радиусу, нужно наклониться и толкаться вбок. Попробуйте как-нибудь сами проделать это.) Поскольку момент силы равен скорости изменения *L* во время движения массы mпо радиусу, то

где через **f**k обозначена сила Кориолиса. В действительности мы хотели узнать, какую боковую силу должен прилагать Мик, чтобы двигать массу mсо скоростью *vr=dr/dt.* Как видите, она равна FK*=*т/r=2mωvr.

Теперь, имея формулу для кориолисовой силы, давайте рас­смотрим несколько более подробно всю картину в целом. Как можно понять причину возникновения этой силы из элементар­ных соображений? Заметьте, что кориолисова сила не зависит от расстояния до оси и поэтому действует даже на оси! Оказывает­ся, что легче всего понять именно силу, действующую на оси вращения. Для этого нужно просто посмотреть на все происхо­дящее из инерциальной системы Джо, который стоит на земле. На фиг. 19.4 показаны три последовательных положения массы m, которая при *t=0* проходит через ось.



*Фиг. 19.4. Три последовательных положения движущейся по радиусу точки вращающегося столика.*

Из-за вращения карусели масса, как мы видим, движется не по прямой линии, а по некоторому *кривому пути,* касающемуся диаметра в точке r=0. Но для того чтобы она двигалась по кривому пути, долж­на действовать ускоряющая сила. Это и есть кориолисова сила.

Однако с кориолисовой силой мы встречаемся не только в подобных ситуациях. Можно показать, что если предмет дви­жется с постоянной скоростью по краю диска, то на него тоже действует кориолисова сила. Почему? Мик видит предмет дви­жущимся со скоростью vм, а Джо видит его движущимся по окружности со скоростью vд=vм+ωr, поскольку предмет вдо­бавок переносится каруселью. Как мы уже знаем, действующая в этом случае сила будет, в сущности, полностью центробежной силой скорости vд, равной *тv2Д/r.* Но, с точки зрения Мика, она должна состоять из трех частей. Все это можно записать в сле­дующем виде:

C:\1\pic\gray.jpgИтак, *Fr —* это сила, которую измеряет Мик. Попытаемся по­нять, откуда что берется. Может ли Мик признать первый член? «Конечно,— сказал бы он,— даже если бы я не вращался, то та­кая центробежная сила должна возникнуть, если побежать по кругу со скоростью vм». Итак, это просто центробежная сила, появления которой Мик ожидает и которая не имеет ничего общего с вращением карусели. Вдобавок Мик думает, что долж­на быть еще одна центробежная сила, действующая даже на неподвижные предметы на его карусели. Это дает третий член. Однако в дополнение к ним существует еще один член — второй, который опять равен 2 mωvм. Раньше, при радиальной ско­рости, кориолисова сила fk была тангенциальна. Теперь же, при тангенциальной скорости, она радиальна. В самом деле, одно выражение отличается от другого только знаком. Сила всег­да имеет одно и то же направление по отношению к скорости независимо от того, куда направлена скорость. Она действует под прямым углом к скорости и равна по величине 2mωv*.*

# Глава 20

**ВРАЩЕНИЕ В ПРОСТРАНСТВЕ**

[**§ 1. Момент****ы сил в трехмерном пространств****е**](#а1)

[**§ 2. Уравнения** **вращения в векторном виде**](#а2)

[**§ 3. Ги****роскоп**](#а3)

[**§ 4. Момент кол****ичества движения твердого тел**](#а4)

**§ 1. Моменты сил в трехмерном пространстве**

В этой главе мы рассмотрим одно из наи­более замечательных и забавных следствий за­конов механики *—* поведение крутящегося колеса. Для этого нам прежде всего нужно расширить математическое описание вращения, понятие момента количества движения, момента силы и т. д. на трехмерное пространство. Од­нако мы не будем *использовать* эти уравнения во всей их общности и изучать все следствия, ибо это займет многие годы, а нас ждут другие разделы, к которым мы вскоре должны перейти. В вводном курсе можно остановиться только на основных законах и их приложениях к весьма ограниченному числу особенно интересных слу­чаев.

Прежде всего хочу отметить, что для враще­ния в трех измерениях твердого тела или како­го-то иного объекта остается верным все, что мы получили для двух измерений. Иначе говоря, *xFy-yFx* так и остается моментом силы «в пло­скости *ху»,* или моментом силы «относительно оси z». Остается справедливым также, что этот момент силы равен скорости изменения вели­чины *хрy-урх;* если вы вспомните вывод урав­нения (18.15) из законов Ньютона, то увидите, что фактически мы не использовали того обсто­ятельства, что движение плоское, и просто диф­ференцировали величину *хру-урх* и получали *xFy-yFx,* так что эта теорема остается верной. Величину *хру-урх* мы называли моментом ко­личества движения в плоскости *ху,* или момен­том количества движения относительно оси z. Кроме плоскости *ху,* можно использовать дру­гие пары осей и получить другие уравнения. Возьмем, например, плоскость *yz.* Уже из симметрии ясно, что если мы просто подставим *у* вместо *х,* a *z* вместо *у,* то для момента силы получим выражение *yFz-zFy* и *ypz-zpy* будет угловым моментом в этой плоскости. Разумеется, можно еще взять и плоскость *zx* и получить для нее

*zFx-xFz*=d/dt*(zpx-xpz).*

Совершенно ясно, что для движения одной частицы мы получаем и три уравнения для трех плоскостей. Более того, если мы складывали такие величины, как *хру—урх,* для многих частиц и называли это полным угловым моментом, то теперь у нас есть три сорта подобных выражений для трех плос­костей: *ху, yz* и *zx,* а сделав то же самое с моментами сил, мы можем также говорить и о полных моментах сил в этих плос­костях. Таким образом, появляются законы о том, что внешний момент сил в некоторой плоскости равен скорости изменения углового момента в той же плоскости. Это просто обобщение того, что писалось для двух измерений.

Однако теперь можно сказать: «Но ведь есть еще и другие плоскости. Разве нельзя в конце концов взять плоскость под каким-то углом и вычислять действующие в ней моменты сил. Для каждого такого случая нужно писать другие системы уравнений, так что в результате их наберется масса!» Здесь следует отметить очень интересное обстоятельство. Оказыва­ется, что если мы в комбинации *x'Fy'-y'Fx'* для «косой» плос­кости выразим величины x', *Fy'* и т. д. через их компоненты, то результат можно записать в виде некоторой *комбинации* трех моментов в плоскостях *ху, yz* и *zx.* В этом нет ничего но­вого. Другими словами, если нам известны три момента сил в плоскостях *ху, yz* и zx*,* то момент сил в любой другой плоскости, как и угловой момент, может быть записан в виде их комби­нации: скажем, 6% одного, 92% другого и т. д. Этим свойством мы сейчас и займемся.

Пусть Джо для своих координатных осей *х, у,* z определял все моменты сил и все угловые моменты во всех плоскостях. Однако Мик направил свои оси *х', у', z'* по-другому. Чтобы немного облегчить задачу, предположим, что повернуты только оси x и y. Мик выбрал другие оси *х'* и *у',* а его ось *z* осталась той же самой. Это означает, что плоскости *yz* и *zx* у него новые, а поэтому моменты сил и угловые моменты у него тоже окажутся новыми. Например, его момент сил в плоскости *х'у'* окажется равным

*x'Fy'-y'Fx'* и т. д. Следующая задача — найти связь между новыми и старыми моментами сил. Ее вполне можно ре­шить, установив связь одного набора осей с другим. «Да это же напоминает то, что мы делали с векторами»,— скажете вы. Действительно, я собираюсь делать в точности то же самое. «А не вектор ли он, этот момент сил?» *—* спросите вы. *Действительно,* он — вектор, однако этого нельзя сказать просто так, без всякого математического анализа. Так что следующим этапом должен быть анализ. Однако мы не будем подробно обсуждать каждый шаг, а только покажем, как это все работает. Моменты сил, вычисленные Джо, равны

В этом месте мы сделаем отступление и заметим, что в подоб­ных случаях, если оси координат выбраны неправильно, для некоторых величин получается неверный знак. Почему бы не написать τ*yz=zFy-yFz?* Этот вопрос связан с тем обстоятель­ством, что система координат может быть либо «левая», либо «правая». Однако выбрав (произвольно) знак, скажем, у τ*xy ,* можно всегда определить правильное выражение для остальных двух величин путем замены по какой-либо из двух схем:

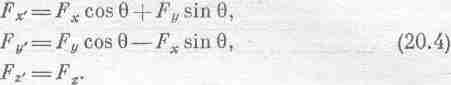
Теперь Мик подсчитывает моменты сил в своей системе.

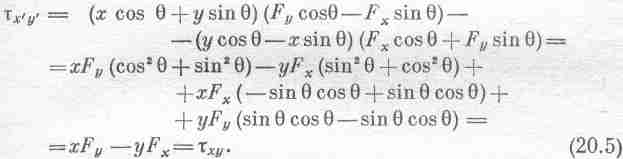
Пусть одна система координат повернута на угол θ по отноше­нию к другой, так что ось z осталась той же самой. (Угол θ ничего не имеет общего с вращением объекта или с чем-то про­исходящим внутри системы координат. Это просто связь меж­ду осями, используемыми одним человеком, и осями, исполь­зуемыми другим. Мы предполагаем, что он остается постоян­ным.) При этом координаты в двух системах связаны так:

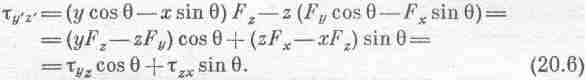
*x'=x*cosθ+ysinθ,

*y'=у*cosθ-*х*sinθ, (20.3)

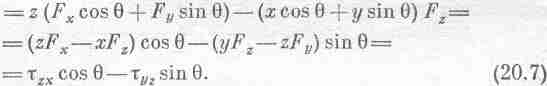
*z'=z.*

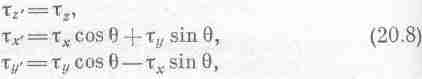
Точно таким же образом, поскольку сила является вектором, она преобразуется в новой системе координат так же, как *х, у* и z. Просто, по определению, объект называется вектором тогда и только тогда, когда различные его компоненты преобра­зуются как *х, у* и z

Теперь можно определить, как преобразуется момент силы. Для этого в уравнение (20.2) нужно просто подставить вместо *х', у'* и *z'* выражение (20.3), а для *Fx' , Fy',* и *Fz'-—* выражение (20.4). В результате для τx'y' получается длинный ряд членов, но оказывается (и на первый взгляд это удивительно), что все сводится просто к выражению *xFy-yFx,* которое, как известно, является моментом силы в плоскости *ху:*

Результат совершенно ясен: ведь мы только повернули оси, лежащие *в плоскости ху,* при этом момент относительно оси z в этой плоскости не отличается от прежнего: ведь плоскость-то осталась той же самой! Более интересно выражение для τ*V'Z' .* Здесь уже мы имеем дело с новой плоскостью. Если теперь повторить то же самое с плоскостью *y'z',* то получим

И наконец, для плоскости *z'x'*



Мы хотели найти правило для определения момента сил в новой системе через момент сил в старой и нашли его. Как можно за­помнить это правило? Если внимательно посмотреть на урав­нения (20.5)—(20.7), то нетрудно увидеть, что между ними и уравнениями для *х, у* и z существует тесная связь. Если каким-то образом мы бы могли назвать τ*ху* z-компонентой чего-то, скажем z-компонентой вектора τ, то все было бы в порядке: уравнение (20.5) мы бы понимали как преобразование вектора τ, ибо z-компонента его, как это и должно быть, оставалась бы неизменной. Аналогично, если связать плоскость *yz* с x*-ком*понентой новоиспеченного вектора, а плоскость *zx* с *у-компо*нентой, то закон преобразования будет выглядеть так:

что в точности соответствует закону преобразования векторов.

Мы, следовательно, доказали, что комбинацию *xFy-yFx* можно отождествить с тем, что обычно называется z-компонентой некоторого искусственно введенного вектора. Хотя момент сил является своего рода «кручением» в плоскости и, казалось бы, не имеет векторного характера, математически он все-таки ведет себя как вектор. Этот вектор направлен под прямым углом к плоскости кручения, а его длина пропорциональна силе круче­ния. Три компоненты такой величины будут преобразовываться при вращении как самый настоящий вектор.

Итак, мы представляем момент силы в виде вектора. Соглас­но правилу, с каждой плоскостью, в которой он действует, мы связываем прямую, перпендикулярную к этой плоскости. Од­нако перпендикулярность к плоскости оставляет неопределен­ный знак вектора. Чтобы определить его, необходимо еще одно дополнительное правило, которое говорило бы нам, что если момент силы действует определенным образом в плоскости *ху,* то соответствующий ему вектор направлен «вверх» по оси z. Это означает, что предварительно кто-то должен сказать нам, где «право», а где «лево». Предположим, что система координат *xyz* правосторонняя; тогда правило должно быть таким: если представить себе кручение как ввертывание болта с правовинтовой резьбой, то направление вектора, связанного с этим кру­чением, определяется поступательным движением болта.

Почему же момент можно отождествить с вектором? А это счастливая случайность: с каждой плоскостью можно связать только одну ось и, следовательно, с моментом можно связать только один вектор. Это свойство — особенность трехмерного пространства. В двумерном пространстве, например, момент — самый обычный скаляр, не нуждающийся в направлении. В трех­мерном пространстве он — вектор. Если бы у нас было четыре измерения, то возникло бы большое затруднение, ибо (если, например, в качестве четвертого измерения взять время) допол­нительно к трем плоскостям *xy, yz* и *zx* появятся также плоскости *tx, ty* и *tz.* Всего, следовательно, получается *шесть* плоскостей, а представить шесть величин в виде одного четырехмерного век­тора невозможно.

Однако нам еще долго предстоит оставаться в трехмерном пространстве, поэтому стоит отметить, что в предыдущих мате­матических рассмотрениях совершенно не существенно то, что *х* — координата, a *F —* сила, а существен только закон преобразования векторов. Поэтому не будет никакой разницы, если мы вместо координаты *х* подставим x-компоненту любого другого вектора. Иначе говоря, если мы хотим вычислить величину *axby-aybx,* где **а** и **b** — векторы, и назвать ее z-компонентой некоторой новой величины *cz,* то эта величина будет вектором с. Было бы хорошо для такой связи трех компонент нового вектора **с** с векторами **а** и **b** придумать какое-то матема­тическое обозначение. Для такой связи пользуются обозначе­нием: **c**=**a**X**b**. Таким образом, в дополнение к обычному ска­лярному произведению в векторном анализе мы получили про­изведение нового сорта, так называемое *векторное произведение.* Итак, запись **c**=**a**X**b** это то же самое, что

*cx=aybz*-*агbу,*

*cy=azbx-axbz,* (20,9)

*сг=ахbу -ауbх.*

Если переменить порядок векторов **а** и **b**, т. е. вместо **a**X**b** взять **b**X**a**, то знак вектора **с** при этом изменится, ибо *cz* равно *bхау-bуах.* Векторное произведение поэтому не похоже на обыч­ное умножение, для которого *аb=bа.* Для векторного произ­ведения **b**X**a**=-**a**X**b**. Отсюда немедленно следует, что если **а**=**b**, то векторное произведение равно нулю, т. е. **а**X**а**=0.

Векторное произведение очень хорошо передает свойство вращения, поэтому важно понимать геометрическую связь векторов **а**, **b** и **с**. Связь между компонентами определяется уравнениями (20.9), исходя из которых можно получить сле­дующие геометрические соотношения. Во-первых, вектор **с** пер­пендикулярен как к вектору **а**, так и к вектору **b**. (Попробуйте вычислить **с**X**а** и вы увидите, что в результате получится нуль.) Во-вторых, величина вектора с оказывается равной произведе­нию абсолютных величин векторов **b** и **а**, умноженному на синус угла между ними. А куда направлен вектор с? Вообразите, что мы доворачиваем вектор **а** до вектора **b** в направлении угла, меньшего 180°; если крутить в ту же сторону болт с право-винтовой резьбой, то он должен двигаться в направлении век­тора с. То, что мы берем *право*винтовой болт, а не *лево*винтовой,— простая договоренность, которая постоянно напоминает нам, что в отличие от настоящих, «честных» векторов **а** и **b** вектор нового типа **а**X**b** по своему характеру слегка отличается от них, ибо строится он искусственно, по особому рецепту. У обычных векторов **а** и **b**, кроме того, есть специальное название: мы называем их *полярными векторами.* Примерами таких векторов служат координата **r**, сила **F**, импульс **р**, скорость **v**, электрическое поле **Е** и т. д. Все это обычные полярные век­торы. Векторы же, содержащие одно векторное произведение обычных векторов, называются *аксиальными векторами,* или *псевдовекторами.* Примерами псевдовекторов, несомненно, мо­гут служить момент силы **τ** и момент импульса **L**. Кроме того, оказывается, что угловая скорость ω, как и магнитное поле В, тоже псевдовектор.

Чтобы расширить наши сведения о математических свой­ствах векторов, нужно знать все правила их умножения, как векторного, так и скалярного. В настоящий момент нам нужны лишь очень немногие из них, однако в целях полноты мы выпи­шем все правила с участием векторного произведения. Впослед­ствии мы будем ими пользоваться. Эти правила таковы:

а) **a**X (**b**+**c**)=**a**X**b**+**a**X**c**,

б) (α**a**)X**b**=α (**a**X**b**),

в) **a**• (**b**X**c**)=(**a**X**b**)•**c**, (20.10)

г) **a**X (**b**X**c**)=**b**(**a**•**c**)—**c**(**a**•**b**),

д) **а**X**а**=0,

е) **а**•(**a**X**b**)=0.

**§ 2. Уравнения вращения в векторном виде**

Возникает вопрос: можно ли с помощью векторного произ­ведения записать какое-нибудь уравнение физики? Да, конеч­но, с его помощью записываются очень многие уравнения. Сра­зу же видно, например, что момент силы равен векторному произведению радиус-вектора на силу

**τ**=**r**X**F**. (20.11)

Это просто краткая запись трех уравнений: т*x=yFz-zFy* и т. д. С помощью того же символа можно представить момент количества движения одной частицы в виде векторного произ­ведения вектора расстояния от начала координат (радиус-вектора) на вектор импульса

**L=r**X**p.** (20.12)

Векторная форма динамического закона вращения в трехмер­ном пространстве напоминает уравнение Ньютона F=*dp/dt;* именно вектор момента силы равен скорости изменения со вре­менем вектора момента количества движения

**τ**=d**L**/dt. (20.13)

C:\1\pic\gray.jpgЕсли мы сложим (20.13) для многих частиц, то получим, что внешний момент сил, действующий на систему, равен скорости изменения полного момента количества движения

Еще одна теорема: если полный момент внешних сил равен нулю, то вектор полного момента количества движения системы остается постоянным. Эта теорема называется *законом сохране­ния момента количества движения.* Если на данную систему не действуют никакие моменты сил, то ее момент количества дви­жения не изменяется.

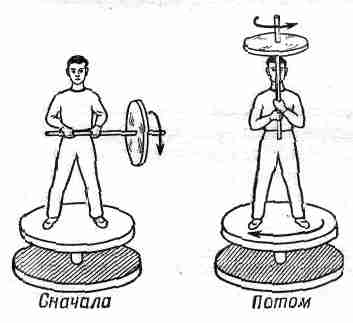
А что можно сказать об угловой скорости? Вектор ли она? Мы уже рассматривали вращение твердого тела вокруг неко­торой фиксированной оси, а теперь давайте на минуту предпо­ложим, что оно одновременно вращается вокруг *двух* осей. Тело может находиться, например, в коробке и вращаться там вокруг некоторой оси, а сама коробка в свою очередь вращается вокруг какой-то другой оси. Результатом же такого сложного движения будет вращение тела вокруг некоторой новой оси. Самое удивительное здесь то, что эта новая ось может быть най­дена следующим образом. Если вращение в плоскости *ху* пред­ставить как вектор, направленный вдоль оси z, длина которого равна скорости вращения, а в виде другого вектора, направ­ленного вдоль оси y, изобразить скорость вращения в плоско­сти, то, сложив их по правилу параллелограмма, получим ре­зультат, величина которого говорит о скорости вращения тела, а направление определяет плоскость вращения. Попросту го­воря, угловая скорость *в самом деле* есть вектор, для которого скорость вращения в трех плоскостях представляет прямоуголь­ные проекции на [эти плоскости](#прим1).

В качестве простого примера с использованием вектора угло­вой скорости подсчитаем мощность, затрачиваемую моментом сил, действующим на твердое тело. Так как мощность — это скорость изменения работы со временем, то в трехмерном пространстве она оказывается равной **Р**=**τ**•**ω**.

Все формулы, которые мы писали для плоского вращения, могут быть обобщены на три измерения. Если взять, например, твердое тело, вращающееся вокруг некоторой оси с угловой скоростью **ω**, то можно спросить: «Чему равна скорость точки с радиус-вектором **r**?» В качестве упражнения попытайтесь доказать, что скорость частицы твердого тела задается выражением **v**=**ω**X**r**, где **ω** — угловая скорость, а **r** — положение частицы. Другим примером векторного произведения служит формула для кориолисовой силы, которую можно записать как **F**K=2m**v**X**ω**. Иначе говоря, если в системе координат, вращаю­щейся со скоростью **ω**, частица движется со скоростью v и ми все хотим описать через величины этой вращающейся системы, то необходимо добавлять еще псевдосилу **f**k.

**§ 3. Гироск****оп**

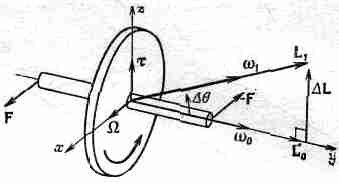
Вернемся теперь снова к закону сохранения момента коли­чества движения. Его можно продемонстрировать с помощью бы­стро вращающегося колеса, или гироскопа (фиг. 20.1).



*Фиг. 20.1. Быстро вращающийся гироскоп.*

*а —* ось *направлена горизонтально, момент количества движения* относитель­но *вертикальной оси равен пулю; б — ось направлена вертикально*, *момент количества движения* относительно *вер­тикальной оси должен остаться равным нулю; человек и стул крутятся в направлении, противоположном вращению колеса.*

Если стать на крутящийся стул и держать вращающееся колесо в го­ризонтальном положении, то его момент количества движения будет направлен горизонтально. Момент количества движения относительно *вертикальной* оси нельзя изменить из-за фикси­рованного направления оси стула (трением пренебрегаем). Если теперь повернуть ось с колесом вертикально, то колесо приобретет момент количества движения относительно верти­кальной оси. Однако *система* в целом (колесо, вы сами и стул) *не может иметь* вертикальной компоненты, поэтому вы вместе со стулом должны крутиться в направлении, обратном враще­нию колеса, чтобы скомпенсировать его.

Прежде всего давайте более подробно проанализируем явле­ние, которое мы только что описали. Самое удивительное, в чем нам следует разобраться, это откуда берутся силы, раскручива­ющие нас вместе со стулом, когда мы поворачиваем ось гиро­скопа вертикально. На фиг. 20.2 показано колесо, быстро вра­щающееся вокруг оси *у,* т. е. его угловая скорость направлена по этой оси.

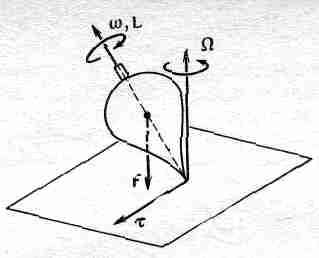
*Фиг. 20.2. Гироскоп.*

В ту же сторону направлен и момент количества движения. Предположим теперь, что мы хотим вращать колесо относительно оси *х* с малой угловой скоростью Ω; какая сила для этого требуется? Через малый промежуток времени Δ*t* ось займет новое положение, отклонившись от горизонтального положения на угол Δθ. Поскольку основная часть момента ко­личества движения происходит от вращения колеса (медленное вращение вокруг оси *х* дает очень малый вклад), мы видим, что вектор момента количества движения изменяется. Каково же изменение этого вектора? Он остается тем же самым *по величине,* однако *направление* его меняется на угол Δθ. Величина вектора ΔL поэтому равна ΔL=L0Δθ; в результате возникает момент силы, равный скорости изменения момента количества движе­ния τ=ΔL/Δt=L0(Δθ/Δt)=L0Ω. Учитывая направление раз­личных величин, мы видим, что

**τ**=**Ω**X**L**0. (20.15)

Таким образом, если **Ω** и **l0** направлены горизонтально, как это показано на фигуре, то **τ** направлен *вертикально.* Чтобы уравновесить такой момент, к концам оси в горизонтальном направлении должны быть приложены силы **F** и -**F**. Откуда берутся эти силы, кто их прикладывает? Да мы сами, собст­венными руками, когда стараемся повернуть ось колеса в вер­тикальное положение. Но Третий закон Ньютона требует, что­бы равные и противоположно направленные силы (и равный, но противоположно направленный *момент)* действовали на нас. Они и заставляют нас крутиться вокруг вертикальной оси z в противоположном направлении.

Этот результат можно обобщить на быстро вращающийся волчок. В обычном вращающемся волчке сила тяжести, дейст­вующая на его центр масс (ц.м.), создает момент относительно точки соприкосновения волчка с полом (фиг. 20.3).

*Фиг. 20.3. Быстро вращающийся волчок.*

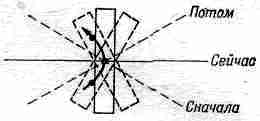
*Заметьте, что направление вектора момента силы совпадает с направле­нием прецессии.*

Этот момент действует в горизонтальном направлении и заставляет волчок прецессировать, т. е. ось его будет описывать круговой конус вокруг вертикальной оси. Если **Ω** — угловая скорость прецес­сии (направленная вертикально), то мы снова находим

C:\1\pic\gray.jpgТаким образом, если к быстро вращающемуся волчку прило­жить момент сил, то возникнет прецессия в направлении этого момента, т. е. под прямым углом к силам, создающим момент.

Итак, теперь мы можем утверждать, что поняли прецессию гироскопа, и математически мы действительно поняли ее. Однако вся эта математика может показаться нам в каком-то смысле «колдовством». Между прочим, по мере углубления во все более сложную физику многие простые вещи легче вывести математически, чем действительно понять их фундаментальный или простой смысл. По мере того как вы будете переходить ко все более и более современным работам по физике, то обнару­жите одно странное обстоятельство: математика дает резуль­таты, которые *никто* не может понять непосредственно. В ка­честве примера можно взять уравнение Дирака, которое полу­чается очень просто и красиво, но понять его следствия труд­новато. В нашем частном случае прецессия волчка кажется чудом, каким-то тайнодействием с прямыми углами, окруж­ностями, крутящимися силами и правовинтовыми болта­ми. Но давайте все-таки попытаемся понять ее физическую сущность.

Как можно объяснить этот момент сил с помощью реально действующих сил и ускорений? Заметьте, что, когда колесо прецессирует, частицы колеса в действительности не движутся уже в одной плоскости (фиг. 20.4).



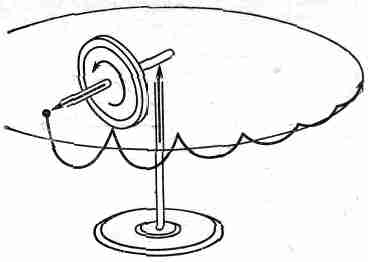
*Фиг.* *20.4. Движение частицы вращающегося колеса, показанного на фиг. 20.2,*

*При повороте оси эти частицы движутся* *по кривой линии.*

Мы показали ранее (см. фиг. 19.4), что частица, которая пересекает ось прецес­сии, движется по *кривому пути.* Но для этого требуется какая-то боковая сила, которая возникает благодаря производимому нами давлению на ось колеса. Это давление по спицам переда­ется частицам обода. «Постойте,— скажете вы,— а как относи­тельно частиц на другой стороне колеса, которые движутся в об­ратном направлении?» Нетрудно догадаться, что действующие на них силы должны быть *направлены в противоположную сто­рону,* поэтому полная сила должна быть равна нулю. Таким образом, силы уравновешиваются, но одна из них приложена на одной стороне колеса, а другая — на другой. Эти силы мож­но было бы приложить непосредственно к колесу, однако из-за того, что колесо твердое, их можно приложить к оси, а через спицы они передаются на колесо.

До сих пор мы доказали, что, если колесо прецессирует, оно может скомпенсировать моменты сил, вызванные силой притя­жения или какой-то другой причиной. Однако мы только пока­зали, что прецессия есть одно из возможных решений уравне­ния. Другими словами, только при том условии, что действует момент и *колесо запущено правильно,* мы получим чистую пре­цессию. Но мы не доказали (и это вообще неверно), что чистая прецессия — *наиболее общее* движение вращающегося тела под действием момента сил. Общее движение включает, кроме того, какие-то колебания и отклонения от главной прецессии. Эти колебания называются *нутацией.*

Кое-кто любит говорить, что когда на гироскоп действует момент, то он поворачивается и прецессирует, что момент сил *приводит* к прецессии. Кажется очень странным, что, будучи запущенным, гироскоп *не падает* под действием силы тяжести, а движется вбок! Как это может случиться, что направленная *вниз* сила тяжести, которую мы хорошо знаем и чувствуем, заставляет его двигаться *вбок?* Ни одна из формул в мире, по­добная (20.15), не скажет нам этого, потому что формула (20.15)— это особый случай, верный только тогда, когда прецессия гиро­скопа уже установилась. Если же говорить о деталях, то в действительности происходит следующее. Когда мы держим ги­роскоп за ось, так что он никак не может прецессировать (но сохраняет свое вращение), то на него не действуют никакие мо­менты сил, даже момент силы тяжести, поскольку своими паль­цами мы компенсируем его. Но стоит только освободить ось, как в тот же момент на нее подействует момент силы тяжести. По простоте душевной каждый решит, что конец оси должен при этом падать, и он действительно начинает падать. Это мож­но просто видеть, если гироскоп вращается не слишком быстро.

Итак, как и ожидается, конец оси гироскопа действительно начинает падать. Но поскольку он падает, то, стало быть, он вращается и тем самым создает момент сил. Это сообщает оси гироскопа движение вокруг вертикальной оси такое же, как и при постоянной прецессии. Однако вскоре скорость начинает превышать скорость при постоянной прецессии, поэтому ось начинает подниматься вверх до прежнего уровня. В результате конец оси описывает циклоиду (кривую, которую описывает камень, застрявший в шине автомобиля). Обычно это очень быстрое, незаметное для глаз движение, к тому же оно скоро затухает благодаря трению в подшипниках, а выживает только «чистая» прецессия (фиг. 20.5).

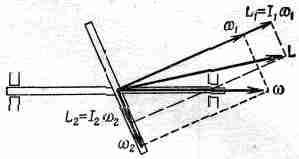
*Фиг.**20.5. Истинное движение конца оси гироскопа под дейст­вием силы тяжести тотчас же после его освобождения.*

Однако чем медленнее крутится колесо, тем нутация более заметна.

После того как движение устанавливается, ось гироскопа оказывается несколько ниже, чем она была вначале. Почему? (Это более сложная деталь, и мы упоминаем о ней только для того, чтобы не оставлять у читателя впечатления, что гиро­скоп — это чудо. Он действительно удивительная штука, но все же не чудо.) Если мы держали ось абсолютно горизонтально, а затем внезапно отпустили ее, то с помощью уравнения прецес­сии мы можем установить, что ось начинает прецессировать, т. е. двигаться по кругу в горизонтальной плоскости. Но это невозможно! Хотя мы и не обращали на это внимания раньше, колесо обладает *каким-то* моментом инерции относительно прецессирующей оси, и если оно даже медленно вращается вокруг этой оси, то оно имеет слабый момент количества движения. Отчего это происходит? Ведь если опора идеальная (т. е. если нет никакого трения), то относительно вертикальной оси никакого момента сил не может возникнуть. Тогда каким же об­разом прецессия все же возникает, если нет никаких моментов? *Ответ:* движение по циклоиде конца оси стремится к среднему стационарному движению, которое эквивалентно движению центра катящегося колеса, т. е. он устанавливается несколько ниже горизонтали. По этой причине собственный угловой мо­мент гироскопа имеет небольшую вертикальную компоненту, которая в точности компенсирует момент количества движе­ния прецессии. Как видите, ось должна немного опуститься, немного поддаться силе тяжести, чтобы иметь возможность крутиться вокруг вертикальной оси. Так работает гироскоп,

**§ 4. Момент количества движения твердого тела**

Прежде чем расстаться с вопросом о вращении в трехмерном пространстве, обсудим еще, хотя бы качественно, некоторые не­очевидные явления, возникающие при трехмерных вращениях,

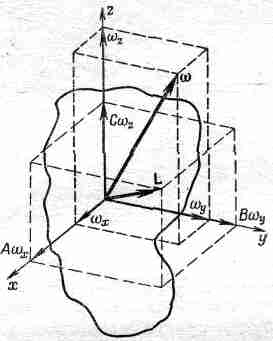
Главное из них: момент количества движения твердого тела *не обязательно* направлен в ту же сторону, что и уг­ловая скорость. Рассмотрим колесо, прикрепленное наклонно к оси, однако ось по-прежнему проходит через его центр тяжести (фиг. 20.6).

Фиг. 20.6. Момент количества движения вращающегося тела не обязательно параллелен угловой скорости.

Если вращать колесо вокруг оси, то всем известно, что из-за наклонной посадки оно будет трясти подшипники. Качественно мы знаем, что при вращении на колесо должна действовать центробежная сила, которая старается оттянуть его массу подальше от оси. Она старается выпрямить плоскость колеса так, чтобы оно было перпендикулярно к оси. Чтобы уравновесить это стремление, в подшипниках должен возник­нуть момент сил. Но если в подшипниках возникает момент сил, то должна быть какая-то скорость изменения момента количе­ства движения. Как может изменяться момент количества дви­жения, если колесо просто вращается вокруг оси? Предполо­жим, что мы разбили угловую скорость **ω** на компоненты ω1 и ω2 — перпендикулярную и параллельную плоскости колеса. Чему при этом будет равен момент количества движения? Так как моменты инерции относительно этих двух осей различны, то отношение компонент момента количества движения, кото­рые (при таком частном выборе осей) равны произведениям моментов инерции на соответствующие компоненты угловых скоростей, отличается от отношения компонент угловой ско­рости. Поэтому вектор момента количества движения не направ­лен вдоль оси. Поворачивая вал, мы должны поворачивать и вектор момента количества движения, что приводит к возник­новению момента силы, действующего на ось.

Момент инерции имеет еще одно очень важное и интересное свойство (я не буду доказывать его здесь, так как это очень сложно), которое легко описать и использовать. Наше предыду­щее рассмотрение основано именно на этом свойстве. Оно со­стоит в следующем: любое твердое тело, даже неправильной формы, как, например, картошка, имеет такие три взаимно перпендикулярные проходящие через центр масс оси, что мо­мент инерции относительно одной из них имеет наибольшую возможную величину из всех осей, проходящих через центр масс, а момент инерции относительно другой оси имеет наимень­шую величину. Момент инерции относительно третьей имеет какую-то промежуточную величину между двумя первыми или равную одной из них. Эти оси, называемые *главными осями* тела, обладают тем важным свойством, что, если тело вращается вокруг одной из них, его момент количества движения имеет то же направление, что и угловая скорость. Если тело имеет оси симметрии, то направление главных осей совпадает с осями симметрии.

Если в качестве осей *х, у* и z выбрать главные оси тела и назвать соответствующие моменты инерции через *А, В* и С, то нетрудно подсчитать момент количества движения и кинети­ческую энергию вращения тела при любой угловой скорости **ω** (фиг. 20.7).

*Фиг. 20.7. Угловая скорость и мо­мент количества движения твер­дого тела (А>В>С),*

C:\1\pic\gray.jpgРазлагая **ω** на компоненты ωx, ωy, и ω*г* по осям *х, у* и z и используя направленные вдоль этих осей единичные векторы i, j, k, можно записать момент количества движения в виде

C:\1\pic\gray.jpgпричем кинетическая энергия будет равна

***\* Что это действительно так, доказывается с помощью рассмотрения перемещения частиц твердого тела за бесконечно малый промежуток вре­мени Δt. Это не самоочевидно, и я предоставляю тем, кто интересуется, доказать это.***

***Глава 21***

**ГАРМОНИЧЕСКИЙ ОСЦИЛЛЯТОР**

[**§ 1. Линейные дифференциаль­****ные уравнения**](#a1)

[**§ 2. Гармонический осци****ллятор**](#a2)

[**§ 3. Гармоническое дв****ижение и движение по окружности**](#a3)

[**§ 4. Начальн****ые условия**](#a4)

[**§ 5. Колебания под дейст****вием внешней силы**](#a5)

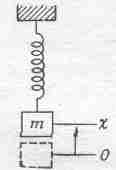
**§ 1. Линейные дифференциальные уравнения**

Обычно физику как науку делят на не­сколько разделов: механику, электричество и г. п., и мы «проходим» эти разделы один за дру­гим. Сейчас, например, мы «проходим» в основ­ном механику. Но то и дело происходят стран­ные вещи: переходя к новым разделам физики и даже к другим наукам, мы сталкиваемся с уравнениями, почти не отличающимися от уже изученных нами ранее. Таким образом, многие явления имеют аналогию в совсем других об­ластях науки. Простейший пример: распро­странение звуковых волн во многом похоже на распространение световых волн. Если мы достаточно подробно изучим акустику, то обна­ружим потом, что «прошли» довольно большую часть оптики. Таким образом, изучение явле­ний в одной области физики может оказаться полезным при изучении других ее разделов. Хорошо с самого начала предвидеть такое воз­можное «расширение рамок раздела», иначе мо­гут возникнуть недоумения, почему мы тратим столько времени и сил на изучение небольшой задачи механики.

C:\1\pic\gray.jpgГармонический осциллятор, к изучению ко­торого мы сейчас переходим, будет встречаться нам почти всюду; хотя мы начнем с чисто меха­нических примеров грузика на пружинке, ма­лых отклонений маятника или каких-то других механических устройств, на самом деле мы бу­дем изучать некое *дифференциальное уравне­ние.* Это уравнение непрестанно встречается в физике и в других науках и фактически описы­вает столь многие явления, что, право же, стоит того, чтобы изучить его получше. Такое уравне­ние описывает колебания грузика на пружинке, колебания заряда, текущего взад и вперед по электрической цепи, колебания камертона, порождающие звуковые волны, аналогичные колебания электронов в атоме, порождающие световые волны. Добавьте сюда уравнения, описывающие дей­ствия регуляторов, например поддерживающих заданную температуру термостата, сложные взаимодействия в химиче­ских реакциях и (уже совсем неожиданно) уравнения, от­носящиеся к росту колонии бактерий, которых одновременно и кормят и травят ядом, или к размножению лис, питаю­щихся кроликами, которые в свою очередь едят траву, и т. д. Мы привели очень неполный список явлений, которые описы­ваются почти теми же уравнениями, что и механический осцил­лятор. Эти уравнения называются *линейными дифференциаль­ными уравнениями с постоянными коэффициентами.* Это урав­нения, состоящие из суммы нескольких членов, каждый из которых представляет собой производную зависимой величины по независимой, умноженную на постоянный коэффициент. Таким образом,

называется линейным дифференциальным уравнением n-го порядка с постоянными коэффициентами (все *аn —* посто­янные).

**§ 2. Гармонический осциллятор**

Пожалуй, простейшей механической системой, движение которой описывается линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами, является масса на пружинке. После того как к пружинке подвесят грузик, она немного рас­тянется, чтобы уравновесить силу тяжести. Проследим теперь за вертикальными отклонениями массы от положения равнове­сия (фиг. 21.1).

*Фиг. 21.1. Грузик, подвешенный на пружинке.*

*Простой пример гармонического ос­циллятора.*

Отклонения вверх от положения равновесия мы обозначим через *х* и предположим, что имеем дело с абсо­лютно упругой пружиной. В этом случае противодействующие растяжению силы прямо пропорциональны растяжению. Это означает, что сила равна -*kx* (знак минус напоминает нам, что сила противодействует смещениям). Таким образом, умно­женное на массу ускорение должно быть равно -*kx*

m(d2x/dt2)*=-kx.* (21.2)

Для простоты предположим, что вышло так (или мы нужным образом изменили систему единиц), что *k/m =* 1*.* Нам предстоит решить уравнение

d2x/dt2=-x. (21.3)

После этого мы вернемся к уравнению (21.2), в котором *k* и *m* содержатся явно.

Мы уже сталкивались с уравнением (21.3), когда только начи­нали изучать механику. Мы решили его численно [см. вып. 1, уравнение (9.12)], чтобы найти движение. Численным интегри­рованием мы нашли кривую (см. фиг. 9.4, вып. 1), которая пока­зывает, что если частица mв начальный момент выведена из рав­новесия, но покоится, то она возвращается к положению рав­новесия. Мы не следили за частицей после того, как она достиг­ла положения равновесия, но ясно, что она на этом не остано­вится, а будет *колебаться (осциллировать).* При численном ин­тегрировании мы нашли время возврата в точку равновесия: *t=*1,570. Продолжительность полного цикла в четыре раза боль­ше: *t0=6,28 «сек».* Все это мы нашли численным интегрирова­нием, потому что лучше решать не умели. Но математики дали в наше распоряжение некую функцию, которая, если ее про­дифференцировать дважды, переходит в себя, умножившись на -1. (Можно, конечно, заняться прямым вычислением таких функций, но это много труднее, чем просто узнать ответ.)

Эта функция есть: *x=cost.* Продифференцируем ее: *dx/dt=-sint,* a *d2x/dt2 =-ωt=-x.* В начальный момент t=0, x=1, а начальная скорость равна нулю; это как раз те пред­положения, которые мы делали при численном интегрирова­нии. Теперь, зная, что *x=cost,* найдем *точное* значение вре­мени, при котором z=0. *Ответ: t=π/2,* или 1,57108. Мы ошиб­лись раньше в последнем знаке, потому что численное интег­рирование было приближенным, но ошибка очень мала!

Чтобы продвинуться дальше, вернемся к системе единиц, где время измеряется в настоящих секундах. Что будет реше­нием в этом случае? Может быть, мы учтем постоянные *k* и *т,* умножив на соответствующий множитель cost? Попробуем. Пусть *x=Acost,* тогда *dx/dt=-Asint* и *d2t/dt2=-Acost=-x.* К нашему огорчению, мы не преуспели в решении уравнения (21.2), а снова вернулись к (21.3). Зато мы открыли важнейшее свойство линейных дифференциальных уравнений: *если умно­жить решение уравнения на постоянную, то мы снова получим решение.* Математически ясно — почему. Если *х* есть решение уравнения, то после умножения обеих частей уравнения на *А* производные тоже умножатся на *A* и поэтому *Ах* так же хорошо удовлетворит уравнению, как и *х.* Послушаем, что скажет по этому поводу физик. Если грузик растянет пружинку вдвое больше прежнего, то вдвое возрастет сила, вдвое возрастет ус­корение, в два раза больше прежней будет приобретенная ско­рость и за то же самое время грузик пройдет вдвое большее рас­стояние. Но это вдвое большее расстояние — как раз то самое расстояние, которое *надо* пройти грузику до положения равно­весия. Таким образом, чтобы достичь равновесия, требуется *столько же времени* и оно не зависит от начального смещения. Иначе говоря, если движение описывается линейным уравне­нием, то независимо от «силы» оно будет развиваться во вре­мени одинаковым образом.

Ошибка пошла нам на пользу — мы узнали, что, умножив решение на постоянную, мы получим решение прежнего уравне­ния. После нескольких проб и ошибок можно прийти к мысли, что вместо манипуляций с *х* надо изменить шкалу *времени.* Иначе говоря, уравнение (21.2) должно иметь решение вида

x=cos*ω*0t. (21.4)

(Здесь *ω*0 — вовсе не угловая скорость вращающегося тела, но нам не хватит всех алфавитов, если каждую величину обозна­чать особой буквой.) Мы снабдили здесь *ω* индексом 0, потому что нам предстоит встретить еще много всяких омег: запомним, что *ω*0 соответствует естественному движению осциллятора. Попытка использовать (21.4) в качестве решения более успешна, потому что *dx/dt=-*(*ω*0sin*ω*0t и *d2x/dt2=-ω20ω*s*ω*0*t=-ω*20x. На­конец-то мы решили то уравнение, которое и хотели решить. Это уравнение совпадает с (21.2), если *ω*20*=k/m.*

C:\1\pic\gray.jpgТеперь нужно понять физический смысл *ω*0. Мы знаем, что косинус «повторяется» после того, как угол изменится на 2я. Поэтому *x=cosω0t* будет периодическим движением; полный цикл этого движения соответствует изменению «угла» на 2π. Величину *ω0t* часто называют *фазой* движения. Чтобы изменить *ω*0t на 2π*,* нужно изменить *t* на *t0 (период* полного колебания); конечно, *t0* находится из уравнения *ω0t0=*2π. Это значит, что *ω*0t0 нужно вычислять для одного цикла, и все будет повто­ряться, если увеличить *t* на *t0;* в этом случае мы увеличим фазу на 2π. Таким образом,

Значит, чем тяжелее грузик, тем медленнее пружинка будет ко­лебаться взад и вперед. Инерция в этом случае будет больше, и если сила не изменится, то ей понадобится большее время для разгона и торможения груза. Если же взять пружинку пожест­че, то движение должно происходить быстрее; и в самом деле, период уменьшается с увеличением жесткости пружины.

Заметим теперь, что период колебаний массы на пружинке не зависит от того, *как* колебания начинаются. Для пружинки как будто безразлично, насколько мы ее растянем. Уравнение движения (21.2) определяет *период* колебаний, но ничего не го­ворит об амплитуде колебания. Амплитуду колебания, конеч­но, определить можно, и мы сейчас займемся этим, но для этого надо задать *начальные условия.*

Дело в том, что мы еще не нашли самого общего решения уравнения (21.2). Имеется несколько видов решений. Реше­ние *x=acosω0t* соответствует случаю, когда в начальный мо­мент пружинка растянута, а скорость ее равна нулю. Можно иначе заставить пружинку двигаться, например улучить момент, когда уравновешенная пружинка покоится *(х=0),* и резко ударить по грузику; это будет означать, что в момент t=0 пружинке сообщена какая-то скорость. Такому движению будет соответствовать другое решение (21.2) — косинус нужно заменить на синус. Бросим в косинус еще один камень: если x=cos*ω*0t—решение, то, войдя в комнату, где качается пружин­ка, в тот момент (назовем его «t=0»), когда грузик проходит через положение равновесия (x=0), мы будем вынуждены заме­нить это решение другим. Следовательно, *x=cosω0t* не может быть общим решением; общее решение должно допускать, так сказать, перемещение начала отсчета времени. Таким свойст­вом обладает, например, решение *x=acosω0(t-t1*), где t1 — какая-то постоянная. Далее, можно разложить

cos(ω0*t+Δ*)=cos*ω*0*t*cos*Δ*-sin*ω*0*t*sin*Δ* и записать

*x=A*cos*ω*0*t*+*В*sin*ω*0*t*,

где A=acos*Δ* и *В=-*asin*Δ*. Каждую из этих форм можно ис­пользовать для записи общего решения (21.2): любое из су­ществующих в мире решений дифференциального уравнения

*d2x/dt2 =-ω20x* можно записать в виде

*x=acosω0(t-t1*), (21.6а)

или

*x=acos*(*ω*0*t+Δ*), (21.6б)

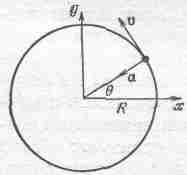
или

*х=A*cos*ω*0*t+B* sin*ω*0*t.* (21.6в)

Некоторые из встречающихся в (21.6) величин имеют наз­вания: *ω*0 называют *угловой частотой;* это число радианов, на которое фаза изменяется за 1 *сек.* Она определяется дифферен­циальным уравнением. Другие величины уравнением не опре­деляются, а зависят от начальных условий. Постоянная *а* слу­жит мерой максимального отклонения груза и называется *ам­плитудой* колебания. Постоянную *Δ* иногда называют *фазой* колебания, но здесь возможны недоразумения, потому что другие называют фазой ω0t+Δ и говорят, что фаза зависит от времени. Можно сказать, что Δ — это *сдвиг фазы* по сравнению с некоторой, принимаемой за нуль. Не будем спорить о словах. Разным Δ соответствуют движения с разными фазами. Вот это верно, а называть ли Δ фазой или нет — уже другой вопрос.

**§ 3. Гармоническое движение и движение по окружности**

Косинус в решении уравнения (21.2) наводит на мысль, что гармоническое движение имеет какое-то отношение к движению по окружности. Это сравнение, конечно, искусственное, потому что в линейном движении неоткуда взяться окружности: грузик движется строго вверх и вниз. Можно оправдаться тем, что мы уже решили уравнение гармонического движения, когда изуча­ли механику движения по окружности. Если частица движется по окружности с постоянной скоростью *v,* то радиус-вектор из центра окружности к частице поворачивается на угол, величина которого пропорциональна времени. Обозначим этот угол θ*=vt/R* (фиг. 21.2).



*Фиг. 21.2. Частица, движу­щаяся по кругу с постоянной скоростью.*

Тогда *d*θ*/dt=*ω*0=v/R.* Известно, что ускоре­ние а=v2/R=ω20R и направлено к центру. Координаты движу­щейся точки в заданный момент равны

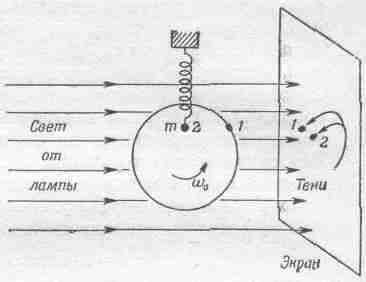
*х*=*R*cosθ, y=Rsinθ.

Что можно сказать об ускорении? Чему равна x-составляющая ускорения, *d2x/dt2. Н*айти эту величину можно чисто гео­метрически: она равна величине ускорения, умноженной на ко­синус угла проекции; перед полученным выражением надо пос­тавить знак минус, потому что ускорение направлено к центру:

*ах=-*acosθ=-ωRcosθ=-ω20*х.* (21.7)

Иными словами, когда частица движется по окружности, гори­зонтальная составляющая движения имеет ускорение, пропор­циональное горизонтальному смещению от центра. Конечно, мы знаем решения для случая движения по окружности: *x=Rcos*ω*0t.* Уравнение (21.7) не содержит радиуса окружности; оно оди­наково при движении по любой окружности при одинаковой ω0.

Таким образом, имеется несколько причин, по которым следует ожидать, что отклонение грузика на пружинке окажется пропор­циональным cosω0t и движение будет выглядеть так, как если бы мы следили за x-координатой частицы, движущейся по окружно­сти с угловой скоростью ω0 . Проверить это можно, поставив опыт, чтобы показать, что движение грузика вверх-вниз на пружинке в точности соответствует движению точки по окружности. На фиг. 21.3 свет дуговой лампы проектирует на экран тени дви­жущихся рядом воткнутой во вращающийся диск иголки и вер­тикально колеблющегося груза.



*Фиг. 21.3. Демонстрация экви­валентности простого гармони­ческого движения и равномерного движения по окружности.*

Если вовремя и с нужного места заставить грузик колебаться, а потом осторожно подобрать скорость движения диска так, чтобы частоты их движений сов­пали, тени на экране будут точно следовать одна за другой. Вот еще способ убедиться в том, что, находя численное реше­ние, мы почти вплотную подошли к косинусу.

Здесь можно подчеркнуть, что поскольку математика равно­мерного движения по окружности очень сходна с математикой колебательного движения вверх-вниз, то анализ колебатель­ных движений очень упростится, если представить это движе­ние как проекцию движения по окружности. Иначе говоря, мы можем дополнить уравнение (21.2), казалось бы, совершенно лишним уравнением для *у* и рассматривать оба уравнения совместно. Проделав это, мы сведем одномерные колебания к движению *по окружности,* что избавит нас от решения дифферен­циального уравнения. Можно сделать еще один трюк — ввести комплексные числа, но об этом в следующей главе.

**§ 4. Начальные условия**

Давайте выясним, какой смысл имеют *А и В* или а и Δ. Конечно, они показывают, как началось движение. Если движе­ние начнется с малого отклонения, мы получим один тип коле­баний; если слегка растянуть пружинку, а потом ударить по грузику — другой. Постоянные *А* и *В* или а и Δ, или какие-нибудь две другие постоянные определяются обстоятельствами, при которых началось движение, или, как обычно говорят, *начальными условиями.* Нужно научиться определять постоян­ные, исходя из начальных условий. Хотя для этого можно использовать любое из соотношений (21.6), лучше всего иметь дело с (21.6в). Пусть в начальный момент t=0 грузик смещен от положения равновесия на величину *х0* и имеет скорость *v0.* Это самая общая ситуация, какую только можно придумать. (Нельзя задать начального *ускорения,* потому что оно зависит от свойств пружины; мы можем распорядиться только величи­ной *х0.)* Вычислим теперь *А* и *В.* Начнем с уравнения для

*х=Acosω*o*t+B*sin*ω*0t;

поскольку нам понадобится и скорость, продифференцируем *х* и получим

v=-*ω*0Asin*ω*0t+*ω*0Bcos*ω*0t.

Эти выражения справедливы для всех *t,* но у нас есть допол­нительные сведения о величинах *х* и *v* при t=0. Таким образом, если положить t=0, мы должны получить слева *х0* и *v0,* ибо это то, во что превращаются *х* и *v* при t=0. Кроме того, мы знаем, что косинус нуля равен единице, а синус нуля равен нулю. Следовательно,

*х0=А*•*1+В*•*0=А*

и

*vu=-ω*0A•0+*ω*0B•1=*ω*0B.

Таким образом, в этом частном случае

*А=х0, В=v0/ω0.*

Зная *А* и *В,* мы можем, если пожелаем, найти а и Δ.

Итак, задача о движении осциллятора решена, но есть одна интересная вещь, которую надо проверить. Надо выяснить, сохраняется ли энергия. Если нет сил трения, то энергия долж­на сохраняться. Сейчас нам удобно использовать формулы

*х=a*cos(*ω*ot+Δ) и *v=-ω*0asin(*ω*0t+Δ).

Давайте найдем кинетическую энергию *Т* и потенциальную энергию *U*. Потенциальная энергия в произвольный момент времени равна 1/2*kx2,* где *х —* смещение, a *k —* постоянная упругости пружинки. Подставляя вместо *х* написанное выше выражение, найдем

*U=1/2kx2=1/2ka2*cos2 (*ω*0t+Δ).

Разумеется, потенциальная энергия зависит от времени; она всегда положительна, это тоже понятно: ведь потенциальная энергия — это энергия пружины, а она изменяется вместе с *х.* Кинетическая энергия равна *1/2mv2;* используя выражение для *v,* получаем

*Т = 1/2mv2=1/2mω20a2sin2(ω0t+Δ*).

Кинетическая энергия равна нулю при максимальном *х, ибо* в этом случае грузик останавливается; когда же грузик прохо­дит положение равновесия (x=0), то кинетическая энергия до­стигает максимума, потому что именно тогда грузик движется быстрее всего. Изменение кинетической энергии, таким обра­зом, противоположно изменению потенциальной энергии. Пол­ная энергия должна быть постоянной. Действительно, если вспомнить, что *k=mω20,* то

T+U=1/2m*ω*20а2 [cos2 (*ω*0t+Δ)+sin2 (*ω*0t+Δ)] =1/2rn*ω*20a2.

Энергия зависит от квадрата амплитуды: если увеличить амп­литуду колебания вдвое, то энергия возрастет вчетверо. *Средняя* потенциальная энергия равна половине максимальной и, сле­довательно, половине полной; средняя кинетическая энергия также равна половине полной энергии.

**§ 5. Колебания под действием внешней силы**

Нам остается рассмотреть *колебания гармонического осцил­лятора* под действием внешней силы. Движение в этом случае описывается уравнением

*md2x/dt2=-kx+F(t).* (21.8)

Давайте подумаем, как будет вести себя грузик при этих об­стоятельствах. Внешняя движущая сила может зависеть от времени каким угодно образом. Начнем с простейшей зависимо­сти. Предположим, что сила осциллирует

*F(t)=F0cosωt.* (21.9)

Обратите внимание, что *ω* — это не обязательно *ω*0: будем считать, что можно изменять *ω*, заставляя силу действовать с разной частотой. Итак, надо решить уравнение (21.8) в случае специально подобранной силы (21.9). Каким будет решение (21.8)? Одно из частных решений (общим решением мы еще зай­мемся) выглядит так:

z=Ccosωt, (21.10)

где постоянную *С* еще надо определить. Иначе говоря, пытаясь найти решение в таком виде, мы предполагаем, что, если тянуть грузик взад и вперед, он в конце концов начнет качаться взад и вперед с частотой действующей силы. Проверим, может ли это быть. Подставив (21.10) в (21.9), получим

—mω*2С*cosωt=-mω20Сcosωt+F0cosωt. (21.11)

C:\1\pic\gray.jpgМы уже заменили *k* на mω20, потому что удобнее сравнивать две частоты. Уравнение (21.11) можно поделить на содержащийся в каждом члене косинус и убедиться, что при правильно подоб­ранном значении *С* выражение (21.10) будет решением. Эта ве­личина *С* должна быть такой:

Таким образом, грузик *т* колеблется с частотой действующей на него силы, но амплитуда колебания зависит от соотношения между частотой силы и частотой свободного движения осцил­лятора. Если со очень мала по сравнению с ω0, то грузик дви­жется вслед за силой. Если же чересчур быстро менять направ­ление толчков, то грузик начинает двигаться в противополож­ном по отношению к силе направлении. Это следует из равенства (21.12), которое говорит нам, что величина *С* отрицательна, если ω больше *собственной* частоты гармонического осцилля­тора ω0. (Мы будем называть ω0 собственной частотой гармо­нического осциллятора, а ω — приложенной частотой.) При очень высокой частоте знаменатель становится очень большим и грузик практически не движется.

Найденное нами решение справедливо только в том случае, когда уже установилось равновесие между осциллятором и дей­ствующей силой; это происходит после того, как вымрут дру­гие движения. Эти вымирающие движения называют *переход­ным* откликом на силу *F(t),* а движение, описываемое (21.10) и (21.12),— *равновесным* откликом.

Приглядевшись к формуле (21.12), мы заметим любопытную вещь: если частота со почти равна ω0, то *С* приближается к бес­конечности. Таким образом, если настроить силу «в лад» с соб­ственной частотой, отклонения грузика достигнут гигантских размеров. Об этом знает всякий, кому когда-либо приходилось раскачивать ребенка на качелях. Это довольно трудно сделать, если закрыть глаза и беспорядочно толкать качели. Но если найти правильный ритм, то раскачать качели легко, однако, как только мы опять собьемся с ритма, толчки начнут тормо­зить качели и от такой работы будет мало проку.

Если частота со будет в точности равна ω0, то амплитуда должна стать *бесконечной,* что, разумеется, невозможно. Мы ошиблись, потому что решали не совсем верное уравнение. Составляя уравнение (21.8), мы забыли о силе трения и о мно­гих других силах. Поэтому амплитуда никогда не достигнет бесконечности; пожалуй, пружинка порвется гораздо раньше!

***Глава 22***

## АЛГЕБРА

[**§ 1. Сложение и умно****жение**](#a1)

[**§ 2. Обратные** **операции**](#a2)

[**§ 3. Шаг в ст****орону и обобщение**](#a3)

[**§ 4. Приближенное в****ычисление иррациональ­ных чисел**](#a4)

[**§ 5. Комплекс****ные числа**](#a5)

[**§ 6. Мнимы****е э****кспоненты**](#a6)

**§ 1. Сложение и умножение**

Изучая осциллятор, нам придется восполь­зоваться одной из наиболее замечательных, по­жалуй самой поразительной из формул, какие можно найти в математике. Физик обычно рас­правляется с этой формулой примерно за две минуты, даже не обратив на нее внимания. Но наука ведь не только приносит практическую пользу, а служит источником удовольствия, поэтому давайте не будем торопиться проходить мимо этой драгоценности, а посмотрим, как она выглядит в великолепном окружении, ко­торое обычно называют элементарной алгеброй.

Вы можете спросить: «Зачем нужна матема­тика в книге по физике?» Вот несколько ува­жительных причин: прежде всего математика— очень важный рабочий инструмент, но этим мож­но оправдать затрату всего лишь двух минут на вывод этой формулы. Однако при изучении теоретической физики мы обнаруживаем, что все физические законы можно записать в виде математических формул, именно это придает законам простоту и красоту. Таким образом, глубокое понимание математических соотноше­ний в конце концов необходимо для понимания природы. Но главная причина — это красота темы: ведь хотя люди разрезали природу на много кусков и продолжают кромсать ее, изучая очень много предметов на различных факульте­тах, такое разделение искусственно, и мы всегда будем получать наслаждение, собирая вместе отдельные куски.

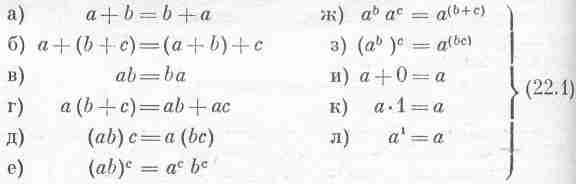
Еще одна причина, по которой следует за­няться поглубже алгеброй: хотя многие из вас уже знакомились с алгеброй в средней школе, но это было только первым знакомством и многие формулы еще непривычны, поэтому стоит еще раз вспомнить алгебру, чтобы не тратить на формулы столько же сил, сколько их уйдет на изучение самой физики.

То, чем мы займемся, с точки зрения математики, не будет настоящей алгеброй. Математик главным образом интересуется тем, как изложить то или иное математическое утверждение и какие предположения обязательны при выводе теоремы, а какие нет. Для нас важнее результат доказательства. Например, тео­рема Пифагора интересна для нас потому, что в ней сообщается, что сумма квадратов катетов прямоугольного треугольника равна квадрату гипотенузы; это очень интересный факт, и мы будем использовать его, не заботясь о том, действительно ли это доказанная Пифагором теорема или просто аксиома. В том же самом духе мы изложим элементарную алгебру, по возмож­ности чисто качественно. Мы говорим *элементарная* алгебра потому, что существует ветвь математики, называемая *высшей* алгеброй, где может оказаться неверным, что *ab=ba,* но таких вещей мы касаться не будем.

Изучение алгебры начнем с середины. Предположим, что нам уже известно, что существуют целые числа, что есть нуль и что значит увеличить число на единицу. Не говорите, пожалуй­ста: «Вот так середина!», потому что для математика это сере­дина, ведь он знает теорию множеств и может *вывести* все эти свойства целых чисел. Но мы не будем вторгаться в область философии математики и математической логики, а ограни­чимся предположением, что нам известны целые числа и мы умеем считать. Если взять целое число *а* и прибавить к нему *b* раз по единице, мы получим число а+b; этим определяется *сложение* целых чисел.

Определив сложение, проделаем вот что: начнем с нуля и прибавим к нему bраз число *а;* таким образом мы определим *умножение* целых чисел и будем называть результат *произве­дением а на b.*

Теперь можно проделать ряд *последовательных умножений:* если умножить единицу bраз на число а, то мы *возведем а в сте­пень b* и запишем результат в виде *аb.*

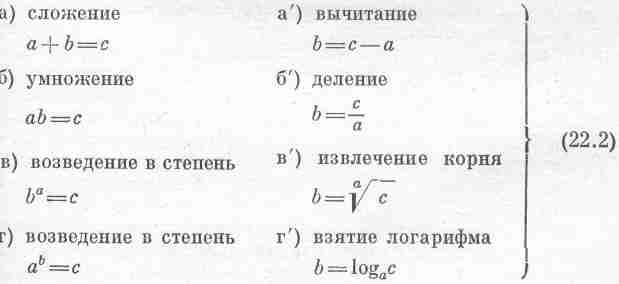
Исходя из этих определений, легко доказать такие соотношения

Эти результаты хорошо известны, мы не хотим долго на них останавливаться, а выписаны они больше для порядка. Конечно, 1 и 0 обладают особыми свойствами, например *а+0=а, а*•*1=а и а в* первой степени равно *а.*

Составляя табличку формул (22.1), мы пользовались такими свойствами, как непрерывность и соотношение порядка; дать им определение очень трудно: для этого создана целая наука. Кроме того, мы выписали, конечно, слишком много «правил»; некоторые из этих правил можно вывести из других, но не будем на этом останавливаться.

**§ 2. Обратные операции**

Кроме прямых операций сложения, умножения и возведе­ния в степень, существуют *обратные* операции. Их можно определить так. Предположим, что нам заданы а и с; как найти b*,* удовлетворяющее уравнениям *а+b=с, ab=c, ba*=с? Если а+b=с, то bопределяется при помощи *вычитания: b=с-а.* Столь же проста операция *деления:* если *ab=c,* то b*=с/а;* это решение уравнения *ab=c* «задом наперед». Если вам встретится степень: ba*=с,* то надо запомнить, что bназывается корнем а-й степени из *с.* Например, на вопрос: «Какое число, будучи возведенным в куб, дает 8?» — следует отвечать: *«Кубический ко­рень* из 8, т. е. 2». Обратите внимание, что, когда дело доходит до степени, появляются *две* обратные операции. Действительно, ведь раз *аb* и b*а—* различные числа, то можно задать и такой вопрос: «В какую степень надо возвести 2, чтобы получить 8?» В этом случае приходится брать *логарифм.* Если *аb=с,* то b=logac. He надо пугаться громоздкой записи числа bв этом слу­чае; находить его так же просто, как и результаты других обрат­ных операций. Хотя логарифм «проходят» гораздо позже корня, это такая же простая вещь: просто-напросто это разного сорта решения алгебраических уравнений. Выпишем вместе прямые и обратные операции:



В чем же идея? Выписанные соотношения верны для целых чисел, потому что они выводятся из определений сложения, ум­ножения и возведения в степень. Подумаем, *нельзя ли расши­рить класс объектов, которые по-прежнему будут обозначаться буквами а, b и с и для которых по-прежнему будут верны все сформулированные нами правила,* хотя сложение уже нельзя будет понимать как последовательное увеличение числа на единицу, а возведение в степень — как последовательное пе­ремножение целых чисел.

**§ 3. Шаг в сторону и обобщение**

Если кто-нибудь, усвоив наши определения, приступит к решению алгебраических уравнений, он быстро натолкнется на неразрешимые задачи. Решите, например, уравнение b=3-5. Вам придется в соответствии с определением вычитания найти число, которое дает 3, если к нему добавить 5. Перебрав все целые положительные числа (а ведь в правилах говорится только о таких числах), вы скажете, что задача не решается. Однако можно сделать то, что потом станет системой, великой идеей: наткнувшись на неразрешимую задачу, надо сначала *отойти в сторону, а затем обобщить.* Пока алгебра состоит для нас из правил и целых чисел. Забудем о первоначальных определениях сложения и умножения, но сохраним правила (22.1) и (22.2) и предположим, что они верны *вообще* не только для целых положительных чисел (для них эти правила были выведены), а для более широкого класса чисел. Раньше мы за­писывали целые положительные числа в виде символов, чтобы вывести правила; теперь правила будут определять символы, а символы будут представителями каких-то более общих чисел. Манипулируя правилами, можно показать, что 3-5=0-2. Давайте определим новые числа: 0-1, 0-2, 0-3, 0-4 и т. д. и назовем их *целыми отрицательными числами.* После этого мы сможем решить *все* задачи на вычитание. Теперь вспомним и о других правилах, например *a(b+c)=ab+ac;* это даст нам правило умножения отрицательных чисел. Перебрав все пра­вила, мы увидим, что они верны как для положительных, так и для отрицательных чисел.

Мы значительно расширили область действия наших пра­вил, но достигли этого ценой изменения смысла символов.

Уже нельзя, например, сказать, что умножить 5 на -2 - значит сложить 5 минус два раза. Эта фраза бессмысленна. Тем не менее, пользуясь правилами, вы всегда получите вер­ный результат.

Возведение в степень приносит новые хлопоты. Кто-нибудь обязательно захочет узнать, что означает символ а(3-5). Мы зна­ем, что 3-5 это решение уравнения (3-5)+5=3. Следовательно, мы знаем, что а(3-5)а5=а3. Теперь можно разделить на а5, тогда а(3-5)=а3/а5. Еще одно усилие, и вот окончательный ре­зультат: а(3-5) =1/а2. Таким образом, мы установили, что воз­ведение числа в отрицательную степень сводится к делению единицы на число, возведенное в положительную степень. Все было бы хорошо, если бы 1/*а2* не было бессмысленным символом. Ведь *а —* это целое положительное или отрицательное число, значит, а2 больше единицы, а мы не умеем делить единицу на числа, большие чем единица!

Система так система. Натолкнувшись на неразрешимую за­дачу, надо расширить царство чисел. На этот раз нам трудно делить: нельзя найти целого числа ни положительного, ни от­рицательного, которое появилось бы в результате деления 3 на 5. Так назовем это и другие подобные ему числа рациональ­ными дробями и предположим, что дроби подчиняются тем же правилам, что и целые числа. Тогда мы сможем оперировать дробями так же хорошо, как и целыми числами.

Еще один пример на степень: что такое а3/5? Мы знаем толь­ко, что (3/5) 5=3, ибо это определение числа 3/5, и еще, что (а3/5)5 =a(3/5)5, ибо это одно из правил. Вспомнив определение

корня, мы получим *а(3/5)=* *.* Определяя таким образом дро­би, мы не вводим никакого произвола. Сами правила следят за тем, чтобы подстановка дробей вместо написанных нами сим­волов не была бессмысленной процедурой. Замечательно, что эти правила справляются с дробями так же хорошо, как и с целыми числами (положительными и отрицательными)!

Пойдем дальше по пути обобщения. Существуют ли еще урав­нения, которых мы не научились решать? Конечно. Например, нам не под силу уравнение b=21/2=√2. Невозможно найти *рациональную* дробь, квадрат которой равен 2. В наше время это выяснить довольно просто. Мы знаем десятичную систему и не пугаемся бесконечной десятичной дроби, которую можно использовать для приближения корня из двух. Хотя идея та­кого приближения появилась еще у древних греков, однако усваивалась она с большим трудом. Чтобы точно сформули­ровать суть такого приближения, надо постичь такие высокие материи, как непрерывность и соотношения порядка, а это очень трудный шаг. Это сделал Дедекинд очень точно и очень формально. Однако, если не заботиться о математической стро­гости, легко понять, что числа типа √2 можно представить в виде целой последовательности десятичных дробей (потому что если остановиться на какой-нибудь десятичной дроби, то получится рациональное число), которая все ближе и ближе подходит к желанному результату. Этих знаний нам вполне до­статочно; они позволят свободно обращаться с иррациональ­ными числами и вычислять числа типа √2 с нужной точностью.

**§ 4. Приближенное вычисление иррациональных чисел**

Теперь такой вопрос: как возвести число в иррациональную степень? Например, нам хочется узнать, что такое 10√2 . Ответ в принципе очень прост. Возьмем вместо *√2* его прибли­жение в виде конечной десятичной дроби — это рациональное число. Возводить в рациональную степень мы умеем; дело сво­дится к возведению в целую степень и извлечению корня. Мы получим *приближенное значение* числа 10√2 . Можно взять десятичную дробь подлиннее (это снова рациональное число). Тогда придется извлечь корень большей степени; ведь знамена­тель рациональной дроби увеличится, но зато мы получим бо­лее точное приближение. Конечно, если взять приближенное значение √2 в виде очень длинной дроби, то возведение в сте­пень будет делом очень трудным. Как справиться с этой задачей?

Вычисление квадратных корней, кубичных корней и других корней невысокой степени — вполне доступный нам арифмети­ческий процесс; вычисляя, мы последовательно, один за дру­гим, пишем знаки десятичной дроби. Но для того, чтобы воз­вести в иррациональную степень или взять логарифм (решить обратную задачу), нужен такой труд, что применить прежнюю процедуру уже не просто. На помощь приходят таблицы. Их называют таблицами логарифмов или таблицами степеней, смотря по тому, для чего они предназначены. Они экономят время: чтобы возвести число в иррациональную степень, мы не вычисляем, а только перелистываем страницы.

Хотя вычисление собранных в таблицы значений — проце­дура чисто техническая, а все же дело это интересное и имеет большую историю. Поэтому посмотрим, как это делается. Мы

вычислим не только x=10 V2 , но решим и другую задачу: 10x=2, или x=log102. При решении этих задач мы не откроем новых чисел; это просто вычислительные задачи. Решением будут иррациональные числа, бесконечные десятичные дроби, а их как-то неудобно объявлять новым видом чисел.

Подумаем, как решить наши уравнения. Общая идея очень проста. Если вычислить 101 и 101/10, и 101/100, и 101/1000, и т. д., а затем перемножить результаты, то мы получим 101,414..., или 10 √2 . Поступая так, мы решим любую задачу такого рода. Од­нако вместо 101/10 и т. д. мы будем вычислять 101/2, 101/4 и т. д. Прежде чем начинать вычисления, объясним еще, почему мы об­ращаемся к числу 10 чаще, чем к другим числам. Мы знаем, что значение таблиц логарифмов выходит далеко за рамки математи­ческой задачи вычисления корней, потому что

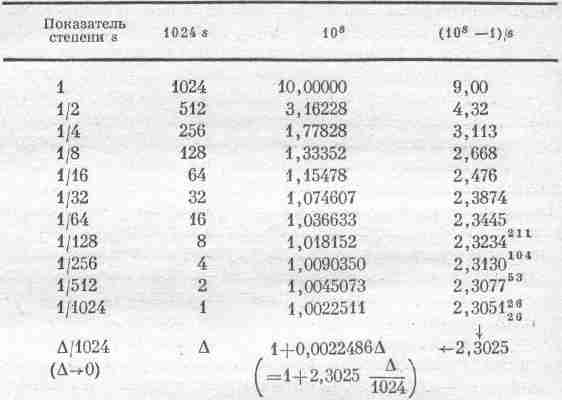
logb(ac)= logba+logbc. (22.3)

Это хорошо известно всем, кто пользовался таблицей логариф­мов, чтобы перемножить числа. По какому же основанию b брать логарифмы? Это безразлично; ведь в основу таких вычис­лений положен только принцип, общее свойство логарифмиче­ской функции. Вычислив логарифмы один раз по какому-ни­будь произвольному основанию, можно перейти к логарифмам по другому основанию при помощи умножения. Если умножить уравнение (22.3) на 61, то оно останется верным, поэтому если перемножить все числа в таблице логарифмов по основанию b на 61, то можно будет пользоваться и такой таблицей. Предпо­ложим, что нам известны логарифмы всех чисел по основанию b*.* Иначе говоря, можно решить уравнение b*а=с* для любого с; для этого существует таблица. Задача состоит в том, как найти логарифм этого же числа *с* по другому основанию, например *х.* Нам нужно решить уравнение *ха'=с.* Это легко сделать, пото­му что *х* всегда можно представить так: *x=bt.* Найти *t,* зная *х* и b*,* просто: *t=logbx.* Подставим теперь *х=bt* в уравнение x*a' =с;* оно перейдет в такое уравнение: (bt)а'=bta'=с. Иными словами, произведение *ta'* есть логарифм *с* по основанию b*.* Значит, *a'=a/t.* Таким образом, логарифмы по основанию *х* равны произведениям логарифмов по основанию bна по­стоянное число 1*/t.* Следовательно, все таблицы логарифмов эквивалентны с точностью до умножения на число 1*/logbx.* Это позволяет нам выбрать для составления таблиц любое осно­вание, но мы решили, что удобнее всего взять за основание число 10. (Может возникнуть вопрос: не существует ли все-таки какого-нибудь естественного основания, при котором все выглядит как-то проще? Мы попытаемся ответить на этот вопрос позднее. Пока все логарифмы будут вычисляться по ос­нованию 10.)

Теперь посмотрим, как составляют таблицу логарифмов. Работа начинается с последовательных извлечений квадрат­ного корня из 10. Результат можно увидеть в табл. 22.1. Показатели степеней записаны в ее первом столбце, а числа 10S— в третьем. Ясно, что 101=10. Возвести 10 в половинную степень легко — это квадратный корень из 10, а как извлекать квадратный корень из любого числа, [знает каждый](#прим1). Итак, мы нашли первый квадратный корень; он равен 3,16228. Что это дает? Кое-что дает.

*Таблица 22.1 •* последовательные извлечения

КВАДРАТНОГО КОРНЯ ИЗ 10



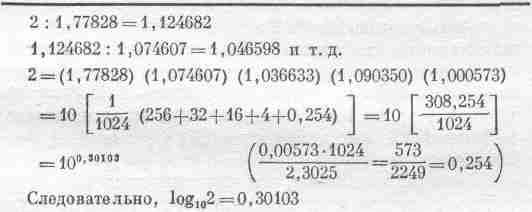
Мы уже можем сказать, чему равно 100,5, и знаем по крайней мере *один* логарифм. Логарифм числа 3,16228 очень близок к 0,50000. Однако нужно еще приложить неболь­шие усилия: нам нужна более подробная таблица. Извлечем еще один квадратный корень и найдем 101/4,что равно 1,77828. Теперь мы знаем еще один логарифм: 1,250— это логарифм числа 17,78; кроме того, мы можем сказать, чему равно 100,75: ведь это 10(0,5+0,25), т. е. произведение второго и третьего чисел из третьего столбца табл. 22.1. Если сделать первый столбец таблицы достаточно длинным, то таблица будет содержать поч­ти все числа; перемножая числа из третьего столбца, мы полу­чаем 10 почти в любой степени. Такова основная идея таблиц. В нашей таблице содержится десять последовательных корней из 10; основной труд по составлению таблицы вложен в вычис­ления этих корней.

Почему же мы не продолжаем повышать точность таблиц дальше? Потому что мы кое-что уже подметили. Возведя 10 в очень малую степень, мы получаем единицу с малой добавкой. Это, конечно, происходит потому, что если возвести, например, 101/1000 в 1000-ю степень, то мы снова получим 10; ясно, что `01/1000 не может быть большим числом: оно очень близко к еди­нице. Более того, малые добавки к единице ведут себя так, буд­то их каждый раз делят на 2; поглядите-ка на таблицу повни­мательнее: 1815 переходит в 903, потом в 450, 225 и т. д. Таким образом, если вычислить еще один, одиннадцатый, квадратный корень, он с большой точностью будет равен 1,00112, и этот результат мы *угадали* еще до вычисления. Можно ли сказать, какова будет добавка к единице, если возвести 10 в степень Δ/1024, когда Δ стремится к нулю? Можно. Добавка будет приблизительно равна 0,0022511Δ. Конечно, не в точности 0,0022511 Δ; чтобы вычислить эту добавку поточнее, делают та­кой трюк: вычитают из 10*S* единицу и делят разность на показа­тель степени *s.* Отклонения полученного таким образом част­ного от его точного значения одинаковы для любой степени s. Видно, что эти отношения (см. четвертый столбец табл. 22.1) примерно равны. Сначала они все-таки сильно отличаются друг от друга, но потом все ближе подходят друг к другу, явно стремясь к какому-то числу. Что это за число? Проследим, как меняются числа четвертого столбца, если опускаться вниз по столбцу. Сначала разность двух соседних чисел равна 0,0211, потом 0,0104, потом 0,0053 и, наконец, 0,0026. Разность каждый раз убывает наполовину. Сделав еще один шаг, мы доведем ее до 0,0013, потом до 0,0007, 0,0003, 0,0002 и, наконец, примерно до 0,0001; надо последовательно делить 26 на 2. Таким обра­зом, мы спустимся еще на 26 единиц и найдем для предела

2.3025. (Позднее мы увидим, что правильнее было бы взять

2.3026. но давайте возьмем то, что у нас получилось.) Пользуясь этой таблицей, можно возвести 10 в любую степень, если ее показатель каким угодно способом выражается через 1/1024. Теперь легко составить таблицу логарифмов, потому что все необходимое для этого мы уже припасли. Процедура этого изо­бражена в табл. 22.2, а нужные числа берутся из второго и третьего столбцов табл. 22.1.

*Таблица 22.2* • ВЫЧИСЛЕНИЯ log102



Предположим, что мы хотим знать логарифм 2. Это значит, что мы хотим знать, в какую степень надо возвести 10, чтобы получить 2. Может быть, возвести 10 в степень 1/2? Нет, полу­чится слишком большое число. Глядя на табл. 22.1, можно ска­зать, что нужное нам число лежит между 1/4 и 1/2*.* Поиск его начнем с 1/4;разделим 2 на 1,788..., получится 1,124...; при де­лении мы отняли от логарифма двух 0,250000, и теперь нас интересует логарифм 1,124.... Отыскав его, мы прибавим к результату 1/4=256/1024. Найдем в табл. 22.1 число, которое бы при движении по третьему столбцу сверху вниз стояло сразу за 1,124... . Это 1,074607. Отношение 1,124... к 1,074607 равно 1,046598. В конце концов мы представим 2 в виде произведения чисел из табл. 22.1:

2=(1,77828)•(1,074607)•(1,036633) • (1,0090350)•(1,000573).

Для последнего множителя (1,000573) в нашей таблице места не нашлось; чтобы найти его логарифм, надо представить это число в виде 10Δ/1024≈1+2,3025Δ/1024. Отсюда легко найти, что Δ=0,254. Таким образом, наше произведение мож­но представить в виде десятки, возведенной в степень 1/1024 (256+32+16+4+0,254). Складывая и деля, мы полу­чаем нужный логарифм: log102=0,30103; этот результат верен до пятого десятичного знака!

Мы вычисляли логарифмы точно так же, как это делал мистер Бриггс из Галифакса в 1620 г. Закончив работу, он сказал: «Я вычислил последовательно 54 квадратных корня из 10». На самом деле он вычислил только 27 первых корней, а потом сделал фокус с Δ. Вычислить 27 раз квадратный корень из 10, вообще-то говоря, немного сложнее, чем 10 раз, как это сделали мы. Однако мистер Бриггс сделал гораздо большее: он вычислял корни с точностью до шестнадцатого десятичного знака, а когда опубликовал свои таблицы, то оставил в них лишь 14 десятичных знаков, чтобы округлить ошибки. Соста­вить таблицы логарифмов с точностью до четырнадцатого деся­тичного знака таким методом — дело очень трудное. Зато це­лых 300 лет спустя составители таблиц логарифмов занимались тем, что уменьшали таблицы мистера Бриггса, выкидывая из них каждый раз разное число десятичных знаков. Только в последнее время при помощи электронных вычислительных ма­шин оказалось возможным составить таблицы логарифмов не­зависимо от мистера Бриггса. При этом использовался более эффективный метод вычислений, основанный на разложении логарифма в ряд.

Составляя таблицы, мы натолкнулись на интересный факт: если показатель степени ε очень мал, то очень легко вычислить 10ε; это просто 1+2,3025е. Это значит, что 10n/2,3025 =1+n для очень малых n*.* Кроме того, мы говорили с самого начала, что вычисляем логарифмы по основанию 10 только потому, что у нас на руках 10 пальцев и по десяткам нам считать удобнее. Логарифмы по любому другому основанию получаются из ло­гарифмов по основанию 10 простым умножением. Теперь на­стало время выяснить, не существует ли математически выде­ленного основания логарифмов, выделенного по причинам, не имеющим ничего общего с числом пальцев на руке. В этой есте­ственной *шкале* формулы с логарифмами должны выглядеть проще. Составим новую таблицу логарифмов, умножив все логарифмы по основанию 10 на 2,3025.... Это соответствует пере­ходу к новому основанию — *натуральному,* или основанию *е.* Заметим, что logε (l+n)≈n или еn≈1+n, когда n→0.

Легко найти само число *е;* оно равно 101/2,3025 или 100,434294... Это 10 в иррациональной степени. Для вычисления *е* можно воспользоваться таблицей корней из 10. Представим 0,434294... сначала в виде 444,73/1024, а числитель этой дроби в виде суммы 444,73=256+128+32+16+2+0,73. Число *е* поэтому равно произведению чисел

(1,77828)•(1,33352)•(1,074607)•(1,036633)•(1,018152)X(1,009035)(1,001643) =2,7184.

(Числа 0,73 нет в нашей таблице, но соответствующий ему ре­зультат можно представить в виде 1+2,3025Δ и вычислить, чему равна Δ.) Перемножив все 7 сомножителей, мы получим 2,7184 (на самом деле должно быть 2,7183, но и этот результат хорош). Используя такие таблицы, можно возводить число в иррациональную степень и вычислять логарифмы иррацио­нальных чисел. Вот как надо обращаться с иррациональностями.

**§ 5. Комплексные числа**

Хотя мы хорошо поработали, все-таки *есть еще* уравнения, которые нам не под силу! Например, чему равен квадратный ко­рень из -1? Предположим, что это *х,* тогда *х2=-*1. Нет ни ра­ционального, ни иррационального числа, квадрат которого был бы равен -1. Придется снова пополнить запас чисел. Предполо­жим, что уравнение *х2=-*1 все же имеет решение, и обозначим это решение буквой i; число *i* имеет пока только одно свойство: будучи возведенным в квадрат, оно дает -1. Вот пока и все, что можно о нем сказать. Однако уравнение *х2*=-1 имеет два корня. Буквой *i* мы обозначили один из корней, но кто-нибудь может сказать: «А я предпочитаю иметь дело с корнем -i; моя буква i просто минус ваша i». Возразить ему нечего, пото­му что число *i* определяется соотношением i2=-1; это соотно­шение останется верным, если изменить знак *i.* Значит, любое уравнение, содержащее какое-то количество *i,* останется вер­ным, если сменить знаки у всех *i.* Такая операция называется *комплексным сопряжением.* Далее, ничто не мешает нам полу­чать новые числа вот так: сложить *i* несколько раз, умножить *i* на какое-нибудь наше старое число, прибавить результат умно­жения к старому числу и т. д. Все это можно сделать, не на­рушая ранее установленных правил. Таким образом мы при­ходим к числам, которые можно записать в виде p+iq*,* где pи *q —* числа, с которыми мы имели дело ранее, их называют *действительными* числами. Число i называют *мнимой единицей,* а произведение действительного числа на мнимую единицу — *чисто мнимым* числом. Самое общее число *а* имеет вид *a=p+iq,* и его называют *комплексным числом.* Обращаться с комплекс­ными числами несложно; например, нам надо вычислить произ­ведение *(r+is)(p+q).* Вспомнив о правилах, мы получим

*(r+is)(p+iq)=rp+r(iq)+(is)p+(is)(iq)=rp+i(rq)+i(sp)+(ii)(sq)*=*(rp-sq)+i(rq+sp),* (22.4)

потому что ii=i2=-1. Теперь мы получили общее выражение для чисел, удовлетворяющих правилам (22.1).

Умудренные опытом, полученным в предыдущих разделах, вы скажете: «Рано говорить об общем выражении, надо еще оп­ределить, например, возведение в мнимую степень, а потом мож­но придумать много алгебраических уравнений, ну хотя бы x6+3x2=-2, для решения которых потребуются новые числа». В том-то и дело, что, кроме действительных чисел, *достаточно изобрести только одно число* — квадратный корень из -1, после этого *можно решить любое алгебраическое уравнение! Эту* удивительную вещь должны доказывать уже математики. Дока­зательство очень красиво, очень интересно, но далеко не само­очевидно. Действительно, казалось бы, естественнее всего ожи­дать, что по мере продвижения в дебри алгебраических уравнений придется изобретать снова, снова и снова. Но самое чудесное, что больше ничего не надо изобретать. Это последнее изобре­тение. Изобретя комплексные числа, мы установим правила, по которым с этими числами надо обращаться, и больше ничего изобретать не будем. Мы научимся возводить комплексные числа в комплексную степень и выражать решение любого алгебраи­ческого уравнения в виде конечной комбинации уже известных нам символов. К новым числам это не приведет. Например, квадратный корень из i*,* или ii— опять те же комплексные числа. Сейчас мы рассмотрим это подробнее.

Мы уже знаем, как надо складывать и умножать комплекс­ные числа; сумма двух комплексных чисел *(р+iq)+(r+is) —* это число (p+r)+i(q+s). Но вот *возведение комплексных чисел в комплексную степень —* уже задача потруднее. Однако она оказывается не труднее задачи о возведении в комплексную сте­пень действительных чисел. Посмотрим поэтому, как возводит­ся в комплексную степень число 10, не в иррациональную, а комплексную; нам надо знать число 10(r+is). Правила (22.1) и (22.2) несколько упрощают задачу

10(r+is)=10r10is (22,5)

Мы знаем, как вычислить 10r, перемножить числа мы тоже умеем, не умеем только вычислить 10is. Предположим, что это комплексное число *x+iy.* Задача: дано *s,* найти *х* и *у.* Если

*10is=x+ iy,*

то должно быть верным и комплексно сопряженное уравнение

*l0-is=x-iy,*

(Некоторые вещи можно получить и без вычислений, надо про­сто использовать правила.) Перемножая эти равенства, можно получить еще один интересный результат

10is10-is=100=1=(x+iy)(x-iy*)=x2+y2* (22.6)

Если мы каким-то образом найдем *х,* то определить *у* будет очень легко.

Однако *как* все-таки возвести 10 в мнимую степень? Где искать помощи? Правила нам уже не помогут, но утешает вот что: если удастся возвести 10 в какую-нибудь одну мнимую степень, то ничего не стоит возвести 10 уже в любую степень. Если из­вестно 10is для одного значения *s,* то вычисление в случае вдвое большего s сводится к возведению в квадрат и т. д. Но как же возвести 10 в хотя бы одну мнимую степень? Для этого сделаем дополнительное предположение; его, конечно, нельзя ставить в один ряд с правилами (22.1) и (22.2), но оно приведет к разумным результатам и позволит нам шагнуть далеко впе­ред. Предположим, что «закон» 10ε=1+2,3025ε (когда ε очень мало) верен не только для действительных, *но и для комплекс­ных* ε. Если это так, то 10is*=l* +2,3025•is при s→0. Предполагая, что s очень мало (скажем, равно 1/1024), мы получаем хорошее приближение числа 10is*.*

Теперь можно составить таблицу, которая позволит вычис­лить *все* мнимые степени 10, т. е. найти числа x и y. Надо посту­пить так. Начнем с показателя 1/1024, который мы считаем равным примерно 1+2,3025 i/1024. Тогда

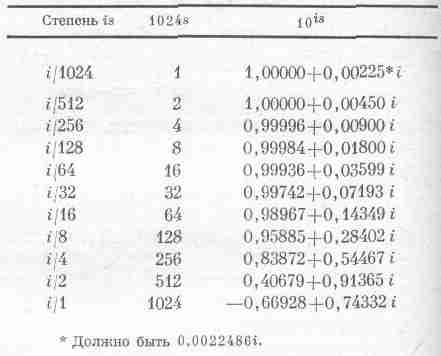
10i/1024=1,00000+0,0022486i. (22.7)

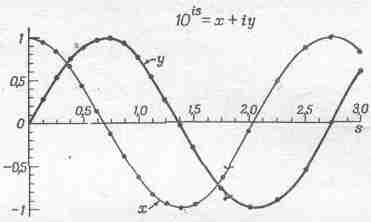
Умножая это число само на себя много раз, мы дойдем до сте­пеней более высоких. Мы просто-напросто перевернули про­цедуру составления таблицы логарифмов и, вычислив квадрат, 4-ю степень, 8-ю степень и т. д. числа (22.7), составили табл. 22.3. Интересно, что сначала все числа *х* были положительными, а потом вдруг появилось отрицательное число. Это значит, что существует число s, для которого действительная часть 10is равна *нулю.* Значение *у* в этом случае равно *i,* т. е. 10is=i, или is=log10i. В качестве примера (см. табл. 22..3) вычислим с ее помощью Iog10i. Процедура поиска Iog10i в точности повторяет то, что мы делали, вычисляя log102.

Произведение каких чисел из табл. 22.3 равно чисто мнимому числу? После нескольких проб и ошибок мы найдем, что лучше всего умножить «512» на «128». Их произведение равно 0,13056+0,99144i. Приглядевшись к правилу умножения ком­плексных чисел, можно понять, что надежду на успех сулит ум­ножение этого числа на число, мнимая часть которого прибли­зительно равна действительной части нашего числа. Мнимая часть «64» равна 0,14349, что довольно близко к 0,13056. Произведение этих чисел равно -0,01350+0,99993i. Мы пе­рескочили через нуль, поэтому результат нужно *разделить* на 0,99996+0,00900 i. Как это сделать? Изменим знак *i* и умно­жим на 0,99996-0,00900 *i* (ведь x2+y2=1). В конце концов обнаружим, что если возвести 10 в степень i(1/1024) (512+128 + +64-4-2+0,20) или 698,20i/1024, то получится мнимая единица. Таким образом, Iog10i=0,068226*i.*

*Таблица 22.3* • последовательное: вычисление квадратов

10i/1024 =1+0,0022486i



**§ 6. Мнимые экспоненты**

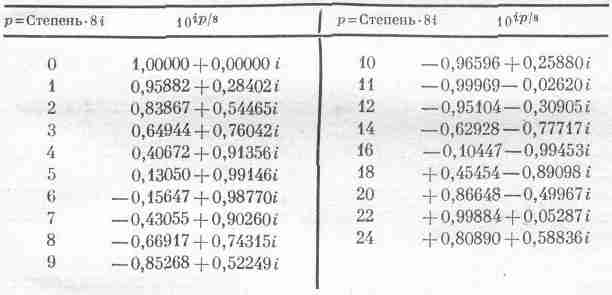
*Фиг. 22.1. Вещественная и мнимая части функции 10is.*

Чтобы лучше понять, что такое число в мнимой степени, вычислим *последовательные степени* десяти. Мы не будем каж­дый раз удваивать степень, чтобы не повторять табл. 22.3, и по­смотрим, что случится с действительной частью после того, как она станет отрицательной. Результат можно увидеть в табл. 22.4.

В этой таблице собраны последовательные произведения чис­ла 10i/8. Видно, что x уменьшается, проходит через нуль, дости­гает почти -1 (в промежутке между р=10 и р=11 величина точно равна -1) и возвращается назад. Точно так же величина *у* ходит взад-вперед.

Точки на фиг. 22.1 соответствуют числам, приведенным в табл. 22.4, а соединяющие их линии помогают следить за из­менением *х* и *у.* Видно, что числа *х* и *у* осциллируют; *10is повторяет себя.* Легко объяснить, почему так происходит.

*Таблица 22.4* • ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ЧИСЛА 10i/8



Ведь *i* в четвертой степени — это i2 *в квадрате.* Это число равно единице; следовательно, если 100,68i равно i, то, возведя это число в четвертую степень, т. е. вычислив 102,72i, мы получим +1. Если нужно получить, например, 103,00i, то нужно умно­жить 102,72i на 100,28i. Иначе говоря, функция 10is повторяется, имеет период. Мы уже знаем, как выглядят такие кривые! Они похожи на график синуса или косинуса, и мы назовем их на время алгебраическим синусом и алгебраическим косинусом. Теперь перейдем от основания 10 к натуральному основанию. Это только изменит масштаб горизонтальной оси; мы обозначим 2,3025s через *t* и напишем 10*is=eit,* где *t —* действительное число. Известно, что *eit=x+iy,* и мы запишем это число в виде

*eit=cost+isint.*  (22.8)

Каковы свойства алгебраического косинуса *cost* и алгебраи­ческого синуса sin*t?* Прежде всего *x2+y2=1;* это мы уже до­казали, и это верно для любого основания, будь то 10 или *е.* Следовательно, cos2t+sin2t=l. Мы знаем, что *eit=1+it* для малых *t;* значит, если *t —* близкое к нулю число, то cos*t* близок к единице, a sin*t* близок к *t.* Продолжая дальше, мы придем к выводу, что *все свойства этих замечательных функций,* получаю­щихся в результате возведения в мнимую степень, *в точности совпадают со свойствами тригонометрического синуса и триго­нометрического косинуса.*

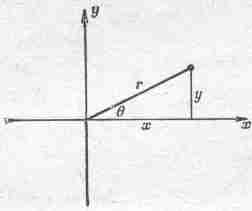
А как обстоит дело с периодом? Давайте найдем его. В ка­кую степень надо возвести *е,* чтобы получить i? Иными словами, чему равен логарифм *i* по основанию е? Мы вычислили уже ло­гарифм *i* по основанию 10; он равен 0,68226i; чтобы перейти к основанию *е,* мы умножим это число на 2,3025 и получим 1,5709. Это число можно назвать «алгебраическим π/2». Но по­глядите-ка, оно отличается от настоящего π/2 всего лишь послед­ним десятичным знаком, и это просто-напросто следствие на­ших приближений при вычислениях! Таким образом, чисто ал­гебраически возникли две новые функции — синус и косинус; они принадлежат алгебре и только алгебре. Мы пошли по их сле­дам и обнаружили, что это те же самые функции, которые так естественно возникают в геометрии. Мы отыскали мост между алгеброй и геометрией.

Подводя итог нашим поискам, мы напишем одну из самых замечательных формул математики

eiθ=cosθ+isinθ. (22.9)

Вот она, наша жемчужина.

Связь между алгеброй и геометрией можно использовать для изображения комплексных чисел на плоскости; точка на плос­кости определяется координатами *х* и *у* (фиг. 22.2).



*Фиг. 22.2. Комплексное число как точка на плоскости.*

Представим каждое комплексное число в виде x+*iy.* Если расстояние точки от начала координат обозначить через r, а угол радиуса-вектора точки с осью x *—* через θ, то выражение *x+iy* можно представить в виде re*i9.* Это следует из геометрических соотношений между *х, у, r* и θ. Таким образом, мы объединили алгебру и геометрию. Начиная эту главу, мы знали только целые числа и умели их считать. Зато у нас была небольшая идея о могуществе шага в сторону и обобщения. Используя алгебраические «законы», или свойства чисел, сведенные в уравнения (22.1), и определения обратных операций (22.2), мы смогли создать не только новые числа, но и такие полезные вещи, как таблицы логарифмов, степеней и тригонометрические функции (они возникли при возведении действительных чисел в мнимые степени), и все это удалось сделать, извлекая много раз квадратный корень из десяти!

***\* Квадратный корень лучше всего извлекать не тем способом, кото­рому обычно учат в школе, а немного иначе. Чтобы извлечь квадратный корень из числа N, выберем достаточно близкое к ответу число а, вы­числим N/a и среднее а'=1/2[а+(N/а)]; это среднее будет новым числом а, новым приближением корня из N. Этот процесс очень быстро приводит к цели: число значащих цифр удваивается после каждого шага.***

***Глава 23***

**РЕЗОНАНС**

[**§ 1. Компл****ексные числа и гар****моническое движение**](#a1)

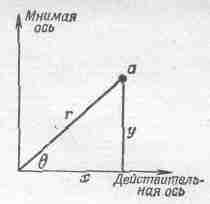
[**§ 2. Вын****ужденные колебани****я с торможением**](#a2)

[**§ 3. Электричес****к****ий резонанс**](#a3)

[**§ 4. Резона****нс в пр****ироде**](#a4)

**§ 1. Комплексные числа и гармоническое движение**

Мы снова будем говорить в этой главе о гармоническом осцилляторе, особенно об ос­цилляторе, на который действует внешняя си­ла. Для анализа этих задач нужно развить новую технику. В предыдущей главе мы ввели понятие комплексного числа, которое состоит из действительной и мнимой частей и которое можно изобразить на графике. Действительная часть числа будет изображаться абсциссой, а мнимая — ординатой. Комплексное число *а* можно записать в виде *a=ar+iai;* при такой записи индекс r отмечает действительную часть а, а индекс *i —* мнимую. Взглянув на фиг. 23.1, легко сообразить, что комплексное число *a=x+iy* можно записать и так: *x+iy=rexp(i*θ*),* где *r2=x2+y2=(x+iy)(x-iy)=aa* \* (а\* — это комплексно сопряженное к *а* число; оно полу­чается из *а* изменением знака *i).*



*Фиг. 23,1. Комплексное число, изображенное точкой на «комплек­сной плоскости».*

Итак, комп­лексное число можно представить двумя спо­собами: явно выделить его действительную и мнимую части или задать его модулем rи фазо­вым углом θ. Если заданы r и θ, то *х* и *у* равны rcosθ и rsinθ, и, наоборот, исходя из числа *x+iy,* можно найти *r=√(x2+y2)*и угол θ; tgθ равен *у/х* (т. е. отношению мнимой и действи­тельной частей).

Чтобы применить комплексные числа к ре­шению физических задач, проделаем такой трюк. Когда мы изучали осциллятор, то имели дело с внешней силой, пропорциональной cosωt. Такую силу *F=F0cos*ω*t* можно рас­сматривать как действительную часть комп­лексного числа *F* = F0exp(iωt), потому что exp(iωt)=cosωt+isinωt. Такой переход удобен: ведь иметь дело с экспонентой легче, чем с косинусом. Итак, трюк состоит в том, что все относящиеся к осциллятору функции рассматриваются как действительные части каких-то комплексных функций. Найденное нами ком­плексное число *F,* разумеется, не настоящая сила, ибо физика не знает комплексных сил: все силы имеют только действитель­ную часть, а мнимой части взяться просто неоткуда. Тем не менее мы будем говорить «сила» *F0exp(iωt),* хотя надо помнить, что речь идет лишь о *действительной ее части.*

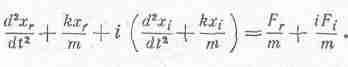
Рассмотрим еще один пример. Как представить косинусоидальную волну, фаза которой сдвинулась на Δ? Конечно, как действительную часть *F0exp[i((ωt-Δ*2)]; экспоненту в этом слу­чае можно записать в виде exp[i(*ω*t-*Δ*)]=ехр(i*ω*t)exp(-i*Δ*). Алгебра экспонент гораздо легче алгебры синусов и косинусов; вот почему удобно использовать комплексные числа. Часто мы будем писать так:

C:\1\pic\gray.jpg

C:\1\pic\gray.jpgШляпка над буквой будет указывать, что мы имеем дело с комп­лексным числом, т. е.

C:\1\pic\gray.jpgОднако пора начать решать уравнения, используя комплексные числа, тогда мы увидим, как надо применять комплексные чи­сла в реальных обстоятельствах. Для начала попытаемся решить уравнение

C:\1\pic\gray.jpgгде *F —* действующая на осциллятор сила, а *х —* его смещение. Хотя это и абсурдно, предположим, что *х* и *F —* комплексные числа. Тогда *х* состоит из действительной части и умноженной на *i* мнимой части; то же самое касается и *F.* Уравнение (23.2) в этом случае означает

или

Комплексные числа равны, когда равны их действительные и мнимые части; следовательно, *действительная, часть х удовлет­воряет уравнению, в правой части которого стоит действительная часть силы.* Оговорим с самого начала, что такое разделение действительных и мнимых частей возможно *не всегда,* а только в случае *линейных* уравнений, т. е. уравнений, содержащих *х* лишь в нулевой и первой степенях. Например, если бы уравне­ние содержало член λ*х2,* то, сделав подстановку *xr+ixt,* мы полу­чили бы λ*(xr+ixi)2,* и выделение действительной и мнимой час­тей привело бы нас к λ*(х2r-x*2i) и 2iλxrxi. Итак, мы видим, что действительная часть уравнения содержит в этом случае член -λ*x2i.* Мы получили совсем не то уравнение, какое собирались решать.

Попытаемся применить наш метод к уже решенной задаче о вынужденных колебаниях осциллятора, т. е. об осцилля­торе, на который действует внешняя сила. Как и раньше, мы хотим решить уравнение (23.2), но давайте начнем с уравнения

C:\1\pic\gray.jpg

где — комплексное число. Конечно, *х —* тоже комп­лексное число, но запомним правило: чтобы найти интересую­щие нас величины, надо взять действительную часть *х.* Найдем решение (23.3), описывающее вынужденные колебания. О дру­гих решениях поговорим потом. Это решение имеет ту же час­тоту, что и внешняя (приложенная) сила. Колебание, кроме того, характеризуется амплитудой и фазой, поэтому если пред­ставить смещение числом *,* то модуль его скажет нам о размахе колебаний, а фаза комплексного числа — о временной задержке колебания. Воспользуемся теперь замечательным свойством экс­поненты: 

C:\1\pic\gray.jpgДифференцируя экспо­ненциальную функцию, мы опускаем вниз экспоненту, делая ее простым множителем. Дифференцируя еще раз, мы снова при­писываем такой же множитель, поэтому очень просто написать уравнение для *:* каждое дифференцирование по времени надо заменить умножением на i*ω*. (Дифференцирование становится теперь столь же простым, как и умножение! Идея использовать экспоненциальные функции в линейных дифференциальных уравнениях почти столь же грандиозна, как изобретение лога­рифмов, которые заменили умножение сложением. Здесь дифференцирование заменяется умножением.) Таким образом, мы получаем уравнение

C:\1\pic\gray.jpg[Мы опустили общий множитель *eiωt.*]Смотрите, как все просто! Дифференциальное уравнение немедленно сводится к чисто алгебраическому; сразу же можно написать его решение

поскольку (iω)2=-ω2. Решение можно несколько упростить, подставив k/m=ω20, тогда

Это, конечно, то же самое решение, которое уже было нами по­лучено ранее. Поскольку m(ω20-ω2) — действительное число, то фазовые углы *F* и *х* совпадают (или отличаются на 180°, если (ω2>ω20). Об этом тоже уже говорилось. Модуль *х,* который определяет размах колебаний, связан с модулем *F* множителем 1/m(ω20-ω2); этот множитель становится очень большим, если ω приближается к ω0. Таким образом, можно достичь очень сильного отклика, если приложить к осциллографу нужную ча­стоту ω (если с нужной частотой толкать подвешенный на ве­ревочке маятник, то он поднимается очень высоко).

**§ 2. Вынужденные колебания с торможением**

Итак, мы можем решить задачу о колебательном движении, пользуясь изящной математикой. Однако изящество немногого стоит, когда задача и так решается просто; математику на­до использовать тогда, когда решаются более сложные зада­чи. Перейдем поэтому к одной из таких задач, которая, кроме того, ближе к действительности, чем предыдущая. Из уравне­ния (23.5) следует, что, если ω в точности равна ω0, амплитуда колебания становится бесконечной. Этого, конечно, не может быть, потому что многие вещи, например трение, ограничи­вают амплитуду, а мы их не учитывали. Изменим теперь (23.2) так, чтобы учесть трение.

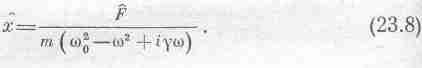
Сделать это обычно довольно трудно, потому что силы тре­ния очень сложны. Однако во многих случаях можно считать, что сила трения *пропорциональна скорости* движения объекта. Именно такое трение препятствует медленному движению тела в масле или другой вязкой жидкости. Когда предмет стоит на месте, на него не действуют никакие силы, но чем скорее он движется и чем быстрее масло должно обтекать этот предмет, тем больше сопротивление. Таким образом, мы предположим, что в (23.2), кроме уже написанных членов, су­ществует еще один — сила сопротивления, пропорциональная скорости: *Ff=-c(dx/dt).* Удобно записать с как произведение m на другую постоянную γ, это немного упростит уравнение.

C:\1\pic\gray.jpgМы уже проделывали такой фокус, когда заменяли *k* на mω20*,* чтобы упростить вычисления. Итак, наше уравнение имеет вид

C:\1\pic\gray.jpgили, если положить с=mγ и *k*=mω20 и поделить обе части на m,

C:\1\pic\gray.jpgЭто самая удобная форма уравнения. Если γ очень мало, то мало и трение, и, наоборот, большие значения γ соответствуют громадному трению. Как решать это новое линейное уравнение? Предположим, что внешняя сила равна F0cos(ωt+Δ); можно было бы подставить это выражение в (23.6а) и попытаться ре­шить полученное уравнение, но мы применим наш новый метод. Представим *F* как действительную часть , a *x —* как действительную часть  и подставим эти комплексные числа в (23.6а). Собственно говоря, и подставлять-то нечего; внимательно посмотрев на (23.6а), вы тут же скажете, что оно превратится в

[Если бы мы попытались решить (23.6а) старым прямолиней­ным способом, то оценили бы по достоинству магический «комп­лексный» метод.] Поделив обе части уравнения на exp(iωt), найдем отклик осциллятора на силу 



C:\1\pic\gray.jpgИтак, отклик x равен силе *F,* умноженной на некоторый множи­тель. Этот множитель не имеет ни названия, ни какой-то своей собственной буквы, и мы будем обозначать его буквой *R:*

*C:\1\pic\gray.jpg*тогда

Этот множитель можно записать либо как *p+iq,* либо как рехр(iθ). Запишем его в виде рехр(iθ) и посмотрим, к чему это приведет. Внешняя сила — это действительная часть числа F0ехр(iΔ)ехр(iωt), она равна *F0cos(*ω*t*+Δ). Уравне­ние (23.9) говорит нам, что отклик равен *;* мы условились

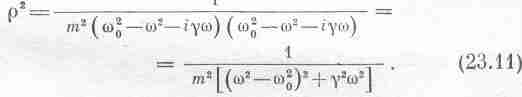
*C:\1\pic\gray.jpg*писать *R* в виде R=ρехр(iθ); следовательно,

Вспомним (об этом уже говорилось), что физическое значение *х,* равное действительной части комплексного числа *х,* равно дей­ствительной части ρF0exp[i(θ+Δ)]exp(iωt). Но ρ и *F0 —* действительны, а действительная часть ехр[i(θ+Δ+ωt)] — это просто cos(ωt+Δ+θ). Таким образом,

x=ρF0cos(ωt+Δ+θ). (23.10)

Это значит, что амплитуда отклика равна амплитуде силы *F,* умноженной на коэффициент усиления ρ; мы нашли «размах» колебаний. Но это еще не все: видно, что *х* колеблется не в такт с силой; фаза силы равна Δ, а у x; она сдвинута на дополни­тельную величину θ. Следовательно, ρ и θ — это величина и фазовый сдвиг отклика.

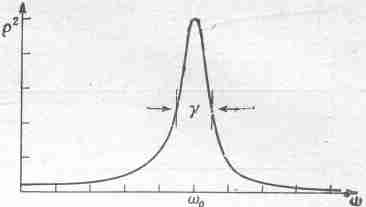
Найдем теперь значение ρ. Квадрат модуля любого комп­лексного числа равен произведению этого числа на комплексно сопряженное, т. е.

**

*C:\1\pic\gray.jpg*Можно найти и фазовый угол θ

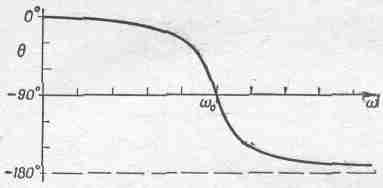
*C:\1\pic\gray.jpg*значит,

Знак минус возник оттого, что tg(-θ) =-tgθ. Угол θ отрицате­лен при всех значениях ω, т. е. смещение *х* отстает по фазе от силы F.

**На фиг. 23.2 показано, как изменяется ρ2 при изменении час­тоты (ρ2 для физика интереснее, чем ρ, потому что ρ2 пропорцио­нально квадрату амплитуды, а значит, и той *энергии,* которую передает осциллятору внешняя сила).

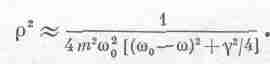
*Фиг.**23.2. График зависимости ρ*2 *от ω*.

Очевидно, что если γмало, то основной член в (23.11) — это 1/(ω20-ω2)2, и отклик стремится к бесконечности, если ω приближается к ω0. Но эта «бесконеч­ность» — не настоящая бесконечность, потому что даже если ω=ω0, то все еще остается слагаемое 1/γ2ω2. Зависимость сдвига фазы от частоты изображена на фиг. 23.3.

**

*Фиг. 23.3. График зависимости* θ *от ω*.

*C:\1\pic\gray.jpg*Иногда приходится иметь дело с формулой, немного отли­чающейся от (23.8); она тоже называется «резонансной» и, не­смотря на некоторое отличие от (23.8), описывает те же самые явления. Дело в том, что если значение γ очень мало, то наи­более интересная область резонансной кривой лежит около частоты ω=ω0, а здесь при малых γ формулу (23.8) с большой степенью точности можно заменить приближенной формулой. Поскольку ω20-ω2=(ω0-ω)(ω0+ω), то для ω, очень близких к ω0, разность квадратов почти равна 2ω0(ω0-ω), a γω можно заменить на γω0. Значит, ω20-ω2+γω≈2ω0(ω0-ω+iγ/2) и

**Легко найти и ρ2:

А теперь решите сами такую задачу: с увеличением частоты зна­чение ρ2 сначала растет, достигает при ω0 максимума, а потом снова убывает. На каком расстоянии от ω0 расположены часто­ты, которым соответствуют значения ρ2, вдвое меньшие мак­симального? Покажите, что при очень малом *γ* эти точки от­стоят друг от друга на расстояние Δω=γ. Это значит, что ре­зонанс делается более острым по мере того, как влияние тре­ния становится все слабее и слабее.

Другой мерой ширины резонанса может служить «доброт­ность» q=ωo/γ (чем уже резонанс, тем больше *Q);* если Q=1000, то по шкале частот ширина резонансной кривой равна всего 0,001. Резонансной кривой на фиг. 23.2 соответствует *Q=5.*

Явление резонанса важно потому, что оно проявляется доволь­но часто; описанию некоторых видов этих проявлений мы посвя­тим остаток главы.

**§ 3. Электрический резонанс**

Простейшие и самые широкие технические применения резо­нанс нашел в электричестве. Имеется довольно много устройств, из которых собираются электрические цепи. Их часто называют *пассивными элементами цепи,* и бывают они трех типов, хотя в каждый элемент одного типа всегда примешано чуточку эле­ментов других типов. Прежде чем подробно описать эти элементы, заметим, что наше представление о механическом осцилляторе как о массе, подвешенной к концу пружины, всего лишь приближение. В «массе» сосредоточена вовсе не вся масса системы: пружина тоже обладает какой-то массой, пружина тоже инерционна. Точно так же «пружина» не состоит из одной пружины, масса тоже немного упруга, а не *абсолютно* тверда, как это может показаться. Подпрыгивая вверх и вниз, она слегка изгибается под толчками пружины. Так же обстоит дело и в электричестве. Расположить все предметы по «элемен­там цепи» с чистыми, идеальными характеристиками можно только приближенно. Так как у нас нет времени обсуждать пре­делы таких приближений, мы просто предположим, что они до­пустимы.

Итак, о трех элементах цепи. Первый называется *емкостью* (фиг. 23.4); в качестве примера емкости могут служить две ме­таллические пластинки, разделенные тонким слоем диэлект­рика.

**

*Фиг. 23.4. Три пассивных элемента цепи.*

Если пластинки зарядить, то между ними возникает раз­ность потенциалов. Та же самая разность потенциалов будет между точками *А и В,* потому что при любой дополнительной разности потенциалов вдоль соединительных проводов заряды стекут по проводам. Таким образом, заданной разности потен­циалов *V* между пластинками соответствуют определенные заряды *+q* и -*q* на каждой пластинке. Между пластинками существует некое электрическое поле; мы даже вывели соответствующую формулу для него (см. гл. 13 и 14)

V=σd/ε0=qd/ε0A , (23.14)

где *d —* расстояние между пластинками, *А —* площадь пласти­нок. Заметим, что разность потенциалов линейно зависит от за­ряда. Если построить емкость не из параллельных пластин, а придать отдельным электродам какую-нибудь другую форму, разность потенциалов будет по-прежнему пропорциональна заряду, но постоянную пропорциональности не так-то легко будет рассчитать. Однако надо знать только одно: разность по­тенциалов между концами емкости *пропорциональна заряду V=q/C;* множитель пропорциональности равен 1/*С (С* и есть *емкость* объекта).

Второй элемент цепи называется *сопротивлением;* этот эле­мент оказывает сопротивление текущему через него электриче­скому току. Оказывается, что все металлические провода, а так­же многие другие материалы сопротивляются току одинаково; если к концам куска такого материала приложить разность по­тенциалов, то электрический ток в куске *I=dq/dt* будет пропор­ционален приложенной разности потенциалов

V=RI=R(dq/dt). (23.15)

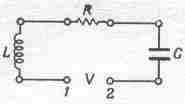
Коэффициент пропорциональности называют *сопротивлением R.* Соотношение между током и разностью потенциалов вам, на­верное, уже известно. Это закон Ома.

Если представлять себе заряд, сосредоточенный в емкости, как нечто аналогичное смещению механической системы *х,* то электрический ток *dq/dt* аналогичен скорости, сопротивление *R* аналогично коэффициенту сопротивления γ, а 1/С аналогично постоянной упругости пружины *k.* Самое интересное во всем этом, что существует элемент цепи, аналогичный *массе!* Это спираль, порождающая внутри себя магнитное поле, когда через нее проходит ток. *Изменение* магнитного поля порождает на концах спирали разность потенциалов, пропорциональную *dI/dt.* (Это свойство спирали используется в трансформаторах.) Магнитное поле пропорционально току, а наведенная разность потенциалов (так ее называют) пропорциональна скорости из­менения тока

V=L(dI/dt)=L(d2q/dt2). (23.16)

Коэффициент *L —* это коэффициент *самоиндукции;* он является электрическим аналогом массы.

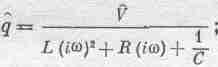
Предположим, мы собираем цепь из трех последовательно соединенных элементов (фиг. 23.5); приложенная между точ­ками *1* и *2* разность потенциалов заставит заряды двигаться по цепи, тогда на концах каждого элемента цепи тоже возникает

**разность потенциалов: на концах индуктивности *VL=L(d2q/dt2),* на сопротивлении *VR=R(dq/dt),* а на емкости *Vc=q/C.*

*Фиг. 23.5. Электрический ко­лебательный контур, состоящий из сопротивления, индуктивности и емкости.*

*C:\1\pic\gray.jpg*Сумма этих напряжений дает нам полное напряжение

*C:\1\pic\gray.jpg*Мы видим, что это уравнение в точности совпадает с механиче­ским уравнением (23.6); будем решать его точно таким же спо­собом. Предположим, что *V(t)* осциллирует; для этого надо со­единить цепь с генератором синусоидальных колебаний. Тогда можно представить *V(t)* как комплексное число *V,* помня, что для определения настоящего напряжения *V(t)* это число надо еще умножить на *exp(iωt)* и взять действительную часть. Анало­гично можно подойти и к заряду *q,* а поэтому напишем уравнение, в точности повторяющее (23.8): вторая производная q— это (iω)2q, а первая — это *(iω)q.* Уравнение (23.17) перейдет в

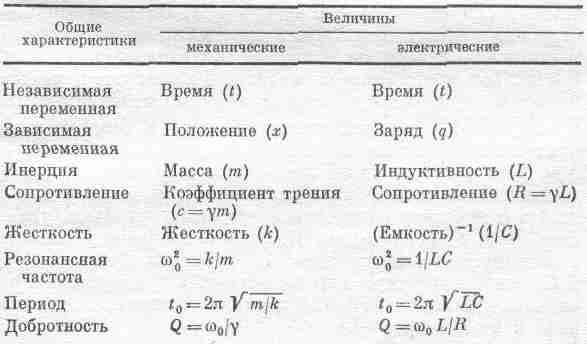
**или

последнее равенство запишем в виде

*C:\1\pic\gray.jpg*

где *ω20=1/LC,* a γ*=R/L.* Мы получили тот же знаменатель, что и в механической задаче, со всеми его резонансными свойст­вами! В табл. 23.1 приведен перечень аналогий между элект­рическими и механическими величинами.

*Таблица 23.1* • МЕХАНИЧЕСКИЕ И ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ

**

*C:\1\pic\gray.jpg*Еще одно чисто техническое замечание. В книгах по электри­честву используют другие обозначения. (Очень часто в книгах на одну и ту же тему, написанных людьми разных специаль­ностей, используются различные обозначения.) Во-первых, для обозначения √-1 используют букву j, а не *i* (через i должен обозначаться ток!). Во-вторых, инженеры предпочитают соотношение между *V* и I, а не между *V* и q*.* Они так больше привыкли. Поскольку I*=dq/dt=iωq,* то вместо *q* можно под­ставить I/iω, и тогда

Можно слегка изменить исходное дифференциальное уравнение (23.17), чтобы оно выглядело более привычно. В книгах часто попадается такое соотношение:

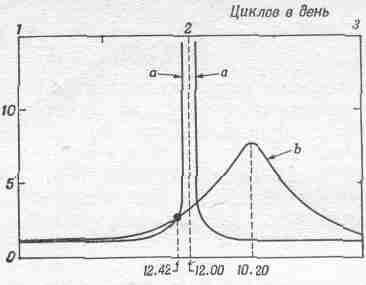


Во всяком случае, мы находим, что соотношение (23.19) между напряжением *V* и током I то же самое, что и (23.18), и от­личается только тем, что последнее делится на iω. Комп­лексное число *R +i*ω*L+1/i*ω*C* инженеры-электрики часто называют особым именем: *комплексный импеданс Z.* Введение новой буквы позволяет просто записать соотношение между током и сопротивлением в виде *V=ZI.* Объясняется это при­страстие инженеров тем, что в юности они изучали только цепи постоянного тока и знали только сопротивления и закон Ома: *V=RI.* Теперь они более образованы и имеют уже цепи перемен­ного тока, но хотят, чтобы уравнения были те же самые. Вот они и пишут *V=ZI,* и единственная разница в том, что теперь со­противление заменено более сложной вещью: комплексным чис­лом. Они настаивают на том, что они не могут использовать принятого во всем мире обозначения для мнимой единицы и пишут j; поистине удивительно, что они не требуют, чтобы вме­сто буквы Z писали букву *R!* (Много волнений доставляют им разговоры о плотности тока; ее они тоже обозначают буквой j. Сложности науки во многом связаны с трудностями в обозна­чениях, единицах и прочих выдумках человека, о чем сама при­рода и не подозревает.)

**§ 4. Резонанс в природе**

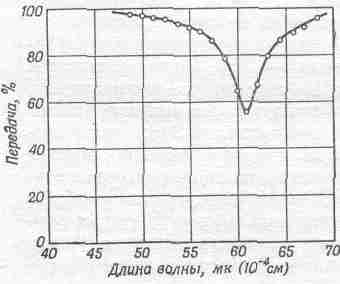
Хотя мы детально разобрали вопрос о резонансе в электри­ческих цепях, можно приводить пример за примером из любых наук и отыскивать в них резонансные кривые. В природе очень часто что-нибудь «колеблется» и так же часто наступает резо­нанс. Об этом уже говорилось в одной из предыдущих глав; приведем теперь некоторые примеры. Зайдите в библиотеку, возьмите с полки несколько книг, полистайте их; вы обнаружите кривые, похожие на кривые фиг. 23.2, и уравнения, по­хожие на уравнения, приведенные в этой главе. Много ли най­дется таких книг? Для убедительности возьмем всего пять-шесть книг, и они обеспечат вас полным набором примеров резонансов.

Первые два относятся к механике. Самый первый грандио­зен — речь идет о колебаниях атмосферы. Если бы атмосфера, ко­торая, по нашим представлениям, шарообразна и обволакивает нашу Землю равномерно со всех сторон, под влиянием Луны вы­тянулась бы в одну сторону, то атмосфера приняла бы форму вы­тянутой дыни. Если предоставить атмосферу, имеющую форму дыни, самой себе, то возникнут колебания. Так получается осцил­лятор. Этими колебаниями *управляет* Луна, которая вращается вокруг Земли. Чтобы понять, как это происходит, представим се­бе, что Луна стоит неподвижно на каком-то расстоянии от Земли, а Земля вращается вокруг своей оси. Поэтому проекция силы, скажем, на ось *х* имеет периодическую составляющую. Отклик атмосферы на приливно-отливные толчки Луны будет обычным откликом осциллятора на периодическую силу. Кривая bна фиг. 23.6 изображает ожидаемый отклик атмосферы (кривая *а* приведена на заимствованном нами рисунке из книги Мунка и Мак-Дональда по другому поводу и нас не касается). Может показаться странным, что удалось начертить эту кривую: ведь Земля вращается с постоянной скоростью, и поэтому мож­но получить только одну точку на кривой — точку, приблизи­тельно соответствующую периоду 12 — 12,7 *час* (приливы бывают дважды в сутки) плюс еще немного, потому что надо учесть движение Луны. Но, измеряя *величину* атмосфер­ных приливов и время их задержки — *фазу,* можно найти обе характеристики отклика ρ и θ. По ним можно вычислить ω0 и γ а затем начертить уже всю кривую! Вот пример чистой науки. Из двух чисел получают два числа, по этим двум числам чертят очень красивую кривую, которая, конечно, прохо­дит через ту же точку, по которой построена кривая! Кривая эта, конечно, бесполезна, *пока нельзя измерить еще чего-нибудь,* а в геофизике сделать это зачастую очень трудно. В нашем слу­чае тем, что нужно было бы еще измерить, могут служить колебания атмосферы с собственной частотой ω0; необходимо какое-то возмущение, которое бы заставило атмосферу коле­баться с частотой ω0. Такой случай однажды представился. В 1883 г. произошло извержение вулкана Кракатау, в резуль­тате которого в атмосферу взлетело пол-острова. Взрыв был такой, что удалось измерить период колебаний атмосферы. Он оказался равным 101/2 *час.* Собственная частота ω0, получен­ная из кривой фиг. 23.6, была равна 10 *час* 20 *мин;* таким об­разом было получено по крайней мере хоть одно подтверждение правильности наших представлений об атмосферных приливах.

**

*Фиг. 23.6. Влияние внешнего возбуждения на атмосферу.*

Во втором примере речь пойдет о совсем малых колебаниях. Мы рассмотрим кристалл хлористого натрия, который со­стоит из расположенных друг возле друга ионов натрия и хлора (мы об этом говорили ранее). Ионы эти несут электрический заряд: первый — положительный, второй — отрицательный. Посмотрим, какие интересные колебания могут возникнуть в кристалле. Если отодвинуть все положительные заряды впра­во, а отрицательные — влево и предоставить их самим себе, то они начнут колебаться взад и вперед: решетка ионов натрия против решетки ионов хлора. Но как растащить эти заряды? Очень просто: если внести кристалл в электрическое поле, оно отодвинет положительные за­ряды в одну сторону, а отри­цательные — в другую! Зна­чит, имея внешнее электриче­ское поле, можно, пожалуй, вызвать колебания кристалла. Но для этого частота электриче­ского поля должна быть столь большой, что она соответствует *инфракрасному излучению!* Таким образом попытаемся построить резонансную кривую, измеряя поглощение инфракрасного света хлористым натрием. Такая кривая изображена на фиг. 23.7.

**

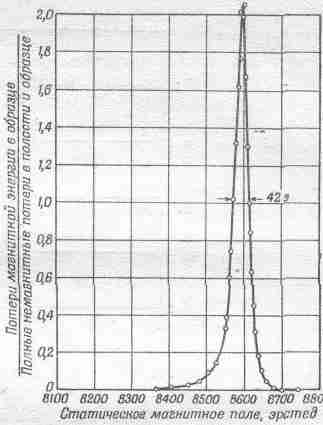
*Фиг. 23.7. Прохождение инфра­красного излучения через тонкую (0,17 мк) пленку поваренной соли.*

По абсциссе отложена не частота, а длина волны, но это техни­ческая деталь; между частотой и длиной волны существует стро­го определенное соотношение, так что мы все-таки имеем дело со шкалой частот, и одна из этих частот— резонансная ча­стота.

Ну, а что можно сказать о ширине резонансной кривой? Чем эта ширина определяется? Очень часто кривая выглядит гораздо шире, чем ей предписывается теоретическим значением γ (эта ширина называется естественной шириной). Есть две причины уширения резонансной кривой. Мы наблюдаем колеба­ния многих осцилляторов сразу, а их частоты могут немного от­личаться. К этому приводят, например, натяжения в отдельных частях кристалла. Поэтому мы видим сразу много резонансных кривых, проходящих рядом. Они сливаются в одну кривую с большей шириной. Вторая причина очень проста — не всегда можно точно измерить частоту. Сколько со спектрометром ни возись, он всегда зарегистрирует не одну частоту, а целый спектр частот Δω. Поэтому может оказаться, что разрешающая сила спектрометра недостаточна для определения точной формы кри­вой. Так или иначе, но, глядя на фиг. 23.7, трудно сказать, что там за ширина — естественная или та, что соответствует неоднородностям кристалла или разрешающей силе спектрометра.

Еще один пример —более хитрый. Посмотрим, как качает­ся магнит. Если поместить магнит в постоянное магнитное поле, то северный полюс захочет повернуться в одну сторону, а юж­ный — в другую, и если магнит может поворачиваться вокруг оси, он будет колебаться около положения равновесия, как это делает стрелка компаса. Однако магниты, о которых пойдет речь,— это *атомы.* Они обладают моментом количества движе­ния, и вращение порождает не простое движение в направле­нии поля, а *прецессию.* Посмотрим со стороны на какую-нибудь составляющую «шатаний», а потом возмутим колебания или по­пробуем управлять ими, чтобы затем измерить поглощение.

На фиг. 23.8 изображена кривая поглощения — типично резонансная кривая.

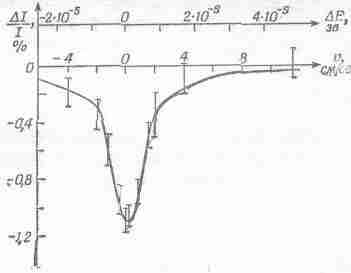
**

*Фиг. 23.8. Зависимость потери, магнитной энергии в парамаг­нитном органическом соединении от напряженности приложенного поля.*

Только получена она немного не так, как предыдущая. Частота горизонтального поля, управляющего ко­лебаниями, все время остается постоянной, хотя, казалось бы, экспериментатор, чтобы получить кривую, должен менять ча­стоту. Можно поступить и так, но технически легче оставить и неизменной, а менять напряженность постоянного поля, что соответствует изменению ω0 в нашей формуле. Таким образом мы имеем дело с резонансной кривой для ω0. Тем не менее мы получаем резонанс с определенными ω0 и γ*.*

Пойдем дальше. Следующий наш пример связан с атомным ядром. Движение протонов и нейтронов в ядре — в некотором смысле колебательное движение. Убедиться в этом можно при помощи такого эксперимента: давайте обстреливать ядра лития протонами. Мы обнаружим, что в ядрах при этом будут происхо­дить какие-то реакции, в результате которых возникает γ-излучение. Кривая, изображающая количество испущенного из­лучения, имеет очень острый, типично резонансный максимум. Это изображено на фиг. 23.9. Однако приглядитесь к рисунку повнимательнее: на горизонтальной шкале отложена не частота, как обычно, а э*нергия!* Дело в том, что та величина, которую в классической физике мы привыкли считать энергией, в кван­товой механике оказывается определенным образом связанной с частотой некоторой волны. Если в привычной нам крупномас­штабной физике при анализе какого-нибудь явления приходится иметь дело с частотой, то в квантовомеханических явлениях, связанных с атомным веществом, аналогичные кривые будут зависеть от энергии. Кривая на фиг. 23.9 иллюстрирует эту связь. Размышляя над этой кривой, можно прийти к мысли, что частота и энергия имеют глубокую взаимосвязь; так оно и есть на самом деле.

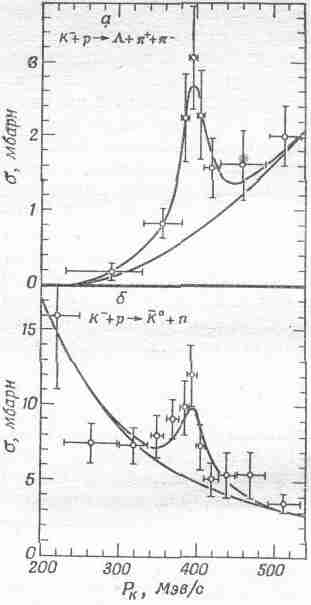
Вот еще одна резонансная кривая, полученная в результате опытов с атомными ядрами; она очень узкая, уже всех предыду­щих. На фиг. 23.10 величина ω0 соответствует энергии 10 000 *эв,* а ширина γ равна приблизительно 10-5 эв; иначе говоря, Q=1010!

**

*Фиг. 23.10. Кривая поглощения γ-излучения, полученная Р. Мёссбауэром.*

Построив такую кривую, экспериментатор измерил *Q* самого добротного из ныне известных осцилляторов. Это проделал Р. Мёссбауэр, получивший за свои работы Нобелевскую пре­мию. На горизонтальной шкале отложена скорость, потому что для сдвига частоты использовался эффект Допплера, получаю­щийся в результате относительного движения источника и по­глотителя. Цифры дают некоторое представление о тонкости эксперимента — пришлось измерять скорости в несколько сан­тиметров в секунду! Если продолжить горизонтальную шкалу влево, то нулевую частоту мы найдем на расстоянии 1010 *см!* Страницы для этого, пожалуй, не хватит!

Наконец, возьмем какой-нибудь выпуск журнала Physical Review, скажем, за 1 января 1962 г. Найдется ли в нем резонансная кривая? Резонансные кривые имеются непременно в каждом выпуске этого жур­нала, и на фиг. 23.11 изоб­ражена одна из таких кри­вых.

**

*C:\1\pic\gray.jpgФиг. 23.11. Зависимость эф­фективных сечений реакций от величины момента количества дви­жения.*

*Нижняя кривая описывает нерезонанс­ный фон; верхняя кривая показывает, что на зтот фон наложено резонансное сечение.*

Это очень интересная кривая. Она соответствует ре­зонансу в реакциях со стран­ными частицами (K--мезоны и протоны). Резонанс был об­наружен при измерении ко­личества частиц разных сор­тов, получающихся в резуль­тате реакции. Разным про­дуктам реакции соответствуют разные кривые, но в каждой из них при одной и той же энергии есть пики примерно одинаковых очертаний. Зна­чит, при определенной энергии K--мезона существует резо­нанс. При столкновении *К-*-мезонов и протонов, наверное, создаются благоприятные для резонанса условия, а может быть, даже новая частица. Сегодня мы еще не можем сказать, что такое эти выбросы в кривых — «частица» или просто ре­зонанс. Очень *узкий* резонанс соответствует очень *точно от­меренному количеству энергии;* это бывает тогда, когда мы имеем дело с частицей. Когда резонансная кривая уширяется, то становится трудно сказать, с чем мы имеем дело — с части­цей, которая живет очень мало, или просто с резонансом в реак­ции. В гл. 2 мы отнесли эти резонансы к частицам, но когда писалась та глава, об этом резонансе еще не было известно, по­этому нашу таблицу элементарных частиц можно дополнить!

***Глава 24***

**ПЕРЕХОДНЫЕ РЕШЕНИЯ**

[**§ 1. Энергия о****с****цилл****ятора**](#a1)

[**§ 2. Затухаю****щи****е** **колебания**](#a2)

[**§ 3. Переходные к****о****лебания в электрических цепях**](#a3)

**§ 1. Энергия осциллятора**

Хотя глава названа «Переходные решения», речь здесь все еще в основном идет об осцил­ляторе, на который действует внешняя сила. Мы еще ничего не говорили об *энергии* колеба­ний. Давайте займемся ею.

Чему равна кинетическая энергия осцил­лятора? Она пропорциональна квадрату скоро­сти. Здесь мы затронули важный вопрос. Пред­положим, что мы изучаем свойства некоторой величины *А;* это может быть скорость или еще что-нибудь. Мы обратились к помощи ком­плексных чисел: A==Âехр(iωt), но в физике праведна и чтима только *действительная* часть комплексного числа. Поэтому если вам для чего-нибудь понадобится получить *квадрат А,* то не возводите в квадрат комплексное число, чтобы потом выделить его действительную часть.

Действительная часть квадрата комплексно­го числа не равна квадрату действительной ча­сти, она содержит еще и *мнимую* часть первона­чального числа. Таким образом, если мы захо­тим найти энергию и посмотреть на ее превра­щения, нам придется на время забыть о комп­лексных числах.

Итак, истинно физическая величина *А —* это действительная часть A0exp[i(ωt+Δ)], т. е.

A=A0соs(ωt+Δ), а комплексное число *А —* это j4oexp(iΔ). Квадрат этой физической величины равен A20cos2(ωt+Δ). Он изменяется от нуля до максимума, как это предписывается квадра­том косинуса. Максимальное значение квадрата косинуса равно 1, минимальное равно 0, а его среднее значение — это 1/2.

Зачастую нас совсем не интересует энергия в каждый дан­ный момент колебания; во многих случаях достаточно знать лишь среднюю величину *A2 (среднее значение* квадрата *А* в те­чение времени, много большего, чем период колебаний). При этих условиях можно усреднить квадрат косинуса и доказать теорему: если *А* представляется комплексным числом, то сред­нее значение *А*2 равно 1/2*A20.* Здесь *А20 —* это квадрат модуля комплексного числа *А.* (Квадрат модуля *Â* записывают по-раз­ному;

|*Â* |2 или *ÂÂ* \*— в виде произведения числа *Â* на комплек­сно сопряженное.) Эта теорема пригодится нам еще много раз.

C:\1\pic\gray.jpgИтак, речь идет об энергии осциллятора, на который дейст­вует внешняя сила. Движение такого осциллятора описывается уравнением

C:\1\pic\gray.jpgМы, конечно, предполагаем, что *F(t)* пропорциональна *cosωt.* Выясним теперь, много ли приходится этой силе работать. Ра­бота, произведенная силой в 1 *сек,* т. е. мощность, равна произ­ведению силы на скорость. [Мы знаем, что работа, совершаемая за время *dt,* равна *Fdx,* а мощность равна *F(dx/dt).]* Значит,

Как легко проверить простым дифференцированием, первые два члена можно переписать в виде *(d/dt)][l/2m(dx/dt)2+1/2mω2x2].* Выражение в квадратных скобках — производная по времени суммы двух членов. Это понятно; ведь первый член суммы — кинетическая энергия движения, а второй — потенциальная энергия пружины. Назовем эту величину *запасенной энергией,* т. е. энергией, накопленной при колебаниях. Давайте усред­ним мощность по многим циклам, когда сила включена уже давно и осциллятор изрядно наколебался. Если пробег длится долго, запасенная энергия не изменяется; производная по вре­мени дает эффект, в среднем равный нулю. Иными словами, если усреднить затраченную за долгое время мощность, то *вся энергия поглотится из-за сопротивления, описываемого членом γm(dx/dt)2.* Определенную часть энергии осциллятор, конечно, запасет, но если усреднять по многим циклам, то количество ее не будет меняться со временем. Таким C:\1\pic\gray.jpgобразом, средняя мощ­ность <P> равна

Применяя метод комплексных чисел и нашу теорему о том, что <*А2>=1/2A20,* легко найти эту среднюю мощность. Так как

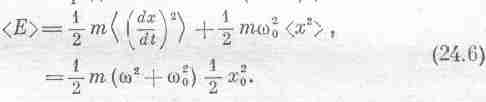
*,* то *.* Следовательно, средняя мощность равна

<P>=1/2γω2x20. (24.4)

Если перейти к электрическим цепям, то *dx/dt* надо заменить на ток I (I — это *dq/dt,* где *q* соответствует *х),* а γm *—* на сопро­тивление *R.* Значит, скорость потери энергии (мощности силы) в электрической цепи равна произведению сопротивления на средний квадрат силы тока

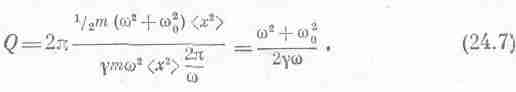
<Р>=R<I2>=Rl/2I20. (24.5)

Энергия, естественно, переходит в тепло, выделяемое сопро­тивлением; это так называемые тепловые потери, или джоулево тепло.

Интересно разобраться также в том, много ли энергии может *накопить* осциллятор. Не путайте этого вопроса с вопросом о средней мощности, ибо хотя выделяемая силой мощность сна­чала действительно накапливается осциллятором, потом на его долю остается лишь то, что не поглотило трение. В каждый мо­мент осциллятор обладает вполне определенной энергией, по­этому можно вычислить среднюю запасенную энергию <E>. Мы уже вычислили среднее значение *(dx/dt)2,* так что

Если осциллятор достаточно добротен и частота ω близка к ω0, то ⏐*х*⏐ *—* большая величина, запасенная энергия очень велика и можно накопить очень много энергии за счет небольшой силы. Сила производит большую работу, заставляя осциллятор рас­качиваться, но после того, как установилось равновесие, вся сила уходит на борьбу с трением. Осциллятор располагает большой энергией, если трение очень мало, и потери энергии невелики даже при очень большом размахе колебаний. Доб­ротность осциллятора можно измерять величиной запасенной энергии по сравнению с работой, совершенной силой за период колебания.

Что это за величина — накопленная энергия по сравнению с работой силы за цикл? Ее обозначили буквой *Q.* Величина *Q —* это умноженное на 2πотношение средней запасенной энер­гии к работе силы за один цикл (можно рассматривать работу не за цикл, а за *радиан,* тогда в определении *Q* исчезнет 2π)



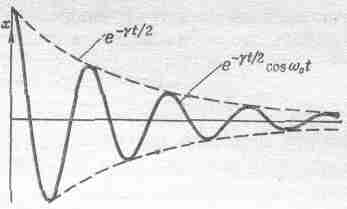
Пока *Q* не слишком велика — это плохая характеристика системы, если же *Q* довольно большая величина, то можно сказать, что это мера добротности осциллятора. Многие пыта­лись дать самое простое и полезное определение *Q;* разные оп­ределения немногим отличаются друг от друга, но если *Q* очень велика, то все они согласуются друг с другом. При самом общем определении по формуле (24.7) *Q* зависит от ω. Если мы имеем дело с хорошим осциллятором вблизи резонансной частоты, то (24.7) можно упростить, положив ω = ω0, тогда *Q=*ω*0/γ,* такое определение *Q* было дано в предыдущей главе. Что такое *Q* для электрической цепи? Чтобы найти эту ве­личину, надо заменить mна *L, mγ* на *R* и mω*20* на 1/С(см. табл. 23.1). Тогда *q в* точке резонанса равна Lω*/R,* где ω — ре­зонансная частота. В цепи с большой *Q* запасенная цепью энергия велика по сравнению с работой за один цикл, произ­водимой поддерживающей колебания в цепи машиной.

**§ 2. Затухающие колебания**

C:\1\pic\gray.jpgВернемся к основной теме — переходным решениям. *Пе­реходными решениями* называются решения дифференциаль­ного уравнения, соответствующие ситуации, когда внешняя сила не действует, но система тем не менее не находится в покое. (Конечно, лучше всего решать задачу, когда сила не действует, а система покоится, покоится — ну и пусть покоится!) Соответ­ствующие переходным решениям колебания можно вызвать так: заставить силу поработать, а потом выключить ее. Что тогда случится с осциллятором? Сначала подумаем, как будет вести себя система с очень большой *Q.* Если сила действовала долго, то запасенная энергия была постоянной и работа тратилась лишь для того, чтобы поддержать ее. Предположим теперь, что мы выключили силу, тогда трению, которое раньше поглощало энергию поставщика, питаться больше нечем — кормильца-то *нет.* И трение начинает пожирать запасенную осциллятором энергию. Пусть добротность системы Q/2π=1000. Это значит, что работа, произведенная за цикл, равна 1/1000 запасенной энергии. Пожалуй, разумно предположить, что при не поддерживае­мых внешней силой колебаниях за каждый цикл будет теряться одна тысячная часть имеющейся к началу цикла энергии. Будем считать, что при больших *Q* изменение энергии описывается угаданным нами приближенным уравнением (мы еще вернемся к этому уравнению и сделаем его совсем верным!)

Уравнение это приближенное, потому что оно справедливо только для больших *Q.* За каждый радиан система теряет 1*/Q* часть запасенной энергии *Е.* Значит, за промежуток времени *dt* энергия уменьшится в *(ωdt/Q* раз (частота появляется при переводе радианов в настоящие секунды). А какая это частота? Предположим, что система устроена очень жестко, поэтому даже при действии силы она сколько-нибудь заметно колеблется толь­ко со своей собственной частотой. Поэтому будем считать, что ω — это резонансная частота ω0. Таким образом, из уравнения (24.8) следует, что запасенная энергия меняется C:\1\pic\gray.jpgследующим образом:

C:\1\pic\gray.jpgТеперь нам известно значение *энергии* в любой момент. Какой будет приближенная формула, определяющая амплитуду коле­баний как функцию времени? Той же самой? Нет! Потенциаль­ная энергия пружины изменяется как *квадрат смещения,* кинетическая энергия — как *квадрат скорости;* это приводит к тому, что полная энергия пропорциональна квадрату сме­щения. Таким образом, смещение (амплитуда колебаний) будет уменьшаться с половинной скоростью. Иначе говоря, мы ожидаем, что решение в случае затухающего переходного дви­жения будет выглядеть как колебание с частотой, близкой к ре­зонансной частоте ω0; амплитуда этого колебания будет умень­шаться как ехр(-γ*t/2)*

Эта формула и фиг. 24.1 дают представление о том, чего следует ожидать, а теперь приступим к *точному* анализу движе­ния, т. е. к решению дифференциального уравнения движения.

*Фиг. 24.1. Затухающие колебания.*

Как же решить уравнение (24.1), если выкинуть из него внешнюю силу? Будучи физиками, мы интересуемся не столько *методом,* сколько самим *решением.* Поскольку мы люди уже опытные, попытаемся представить решение в виде экспоненци­альной кривой, *х=А*exp(iαt). (Почему мы так поступили? Оттого, что экспоненту легче всего дифференцировать!) Подставим это выражение в (24.1), помня о том, что каждое дифференцирование *х* по времени сводится к умножению на *iα* [напомним, что *F(t)=0].* Сделать это очень легко, и наше уравнение примет вид

*( -α2+i*γ*α+*ω*20)Аеiαt=0.* (24.11)

C:\1\pic\gray.jpgЛевая часть равенства должна быть равна нулю *все время,* но это возможно только в двух случаях: а) *А=0,* однако это даже и не решение: ведь тогда все покоится, или б)

C:\1\pic\gray.jpgЕсли мы сможем решить это уравнение и найти *α*, то мы найдем и решение, амплитуда которого *А* не обязательно равна нулю!

C:\1\pic\gray.jpgЧтобы не думать о том, как извлечь квадратный корень, предположим, что γ меньше ω0, и поэтому ω20-γ2/4 — положи­тельная величина. Беспокоит другое: почему мы получили *два* решения! Им соответствуют

C:\1\pic\gray.jpgи

C:\1\pic\gray.jpgЗаймемся пока первым решением, предположив, что мы ничего не знаем о том, что квадратный корень принимает два значе­ния. В этом случае смещение *х* равно x1=Aexp(i*α*1t), где *А —* произвольная постоянная. Чтобы сократить запись, введем специальное обозначение для входящего в *α*t квадратного корня:

Так, и *,* или, если воспользоваться замечательным свойством экспоненты,

C:\1\pic\gray.jpg

Итак, система осциллирует с частотой ωγ , которая *в точности* не равна частоте ω0, но практически близка к ней, если система достаточно добротна. Кроме того, амплитуда колебаний экспо­ненциально затухает! Если взять действительную часть (24.16), то мы получим

C:\1\pic\gray.jpg

Это решение очень напоминает угаданное нами решение (24.10), вот только частота немного другая, ωγ. Но это лишь небольшая поправка, значит, первоначальная идея была правильной.

И все-таки *не все* благополучно! А не благополучно то, что *су­ществует второе решение.*

C:\1\pic\gray.jpgЭтому решению соответствует α2, и оно отличается от пер­вого лишь знаком ωγ

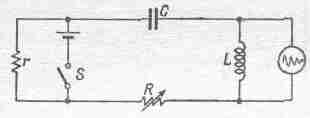
C:\1\pic\gray.jpgЧто все это значит? Скоро мы докажем, что если x1и *х2—* воз­можные решения (24.1) при *F(t)=0,* то х1+х2—тоже решение этого уравнения! Таким образом, общее решение имеет вид

C:\1\pic\gray.jpgТеперь можно спросить: «А, собственно, зачем нам беспокоить себя еще одним решением, если нас вполне устраивало первое? К чему эти дополнительные решения, если мы все равно должны взять только действительную часть?» Мы знаем, что нужно взять действительную часть, но откуда *математика* знает, что мы хо­тим взять действительную часть? Когда у нас была внешняя сила *F(t),* то мы ее дополнили *искусственной* силой, и она каким-то образом управляла *мнимой* частью уравнения. Но когда мы по­ложили *F(t)=0,* то соглашение о том, что, каково бы ни было *х,* нужно взять только его действительную часть, стало нашим лич­ным делом, и математическое уравнение об этом ничего не знало. В мире физики *есть* только действительные решения, но реше­ние, которому мы так радовались, *комплексно.* Уравнению не из­вестно, что мы делаем совершенно неожиданный шаг и отбираем только действительную часть, и оно предлагает нам еще, так сказать, комплексно сопряженное решение, чтобы, сложив оба решения, мы получили *настоящее действительное решение;* вот для чего мы взяли еще и α2. Чтобы *х* было действительным, *Ввхр(-i*ω*γt*) должно быть комплексно сопряженным к *Aexp(i*ω*γt)* числом, тогда мнимая часть исчезнет. Таким образом, *В* долж­но быть комплексно сопряжено с *А,* поэтому наше решение имеет вид

Значит, наши колебания — это колебания с *фазовым сдвигом* и, как полагается, с затуханием.

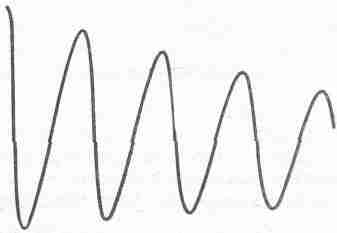
**§ 3. Переходные колебания в электрических цепях**

Посмотрим, как выглядят переходные колебания. Для этого соберем цепь, изображенную на фиг. 24.2.



*Фиг. 24,2. Электрическая цепь для демонстраций переходных колебаний.*

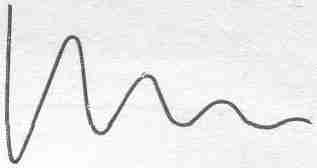
В этой цепи разность потенциалов между концами индуктивности L поступает в осцил­лоскоп. Неожиданное включение рубильника *S* включает допол­нительное напряжение и вызывает в осцилляторной цепи переходные колебания. Эти колебания аналогичны колебаниям механического осциллятора, вызванными неожиданным ударом. Сама цепь представляет собой электрический аналог механи­ческого осциллятора с затуханием, и мы можем наблюдать коле­бания при помощи осциллоскопа. Он покажет нам кривые, анализом которых мы и займемся. На фиг. 24.3—24.6 представ­лены кривые затухающих колебаний, полученные на экране осциллоскопа. На фиг. 24.3 показаны затухающие колебания в цепи с большой *Q,* т. е. с малым значением *γ.*



*Фиг. 24.3. Затухающие коле­бания.*

В такой цепи ко­лебания затухают не очень быстро; мы видим довольно длинную синусоиду с медленно убывающим размахом.

Теперь давайте посмотрим, что произойдет, если мы будем уменьшать *Q,* так что колебания должны затухать быстрее. Чтобы уменьшить *Q,* увеличим сопротивление цепи *R.* При повороте ручки сопротивления колебания действительно зату­хают скорее (фиг. 24.4).



*Фиг. 24.4. Колебания затухают быстрее.*



Если еще увеличить сопротивление, то колебания затухнут еще быстрее (фиг. 24.5).

*Фиг, 24.5. Колебания почти исчезли.*

Но если сопротив­ление увеличить сверх некоторого предела, колебаний мы вооб­ще не увидим. А может быть, нам просто отказывают глаза? Увеличим еще сопротивление и получим тогда кривую, пред­ставленную на фиг. 24.6; по ней можно лишь с натяжкой сказать, что в цепи произошли колебания, ну разве что одно.



*Фиг. 24.6. Колебаний нет.*

Можем ли мы математически объяснить это явление?

C:\1\pic\gray.jpgСопротивление механического осциллятора, конечно, про­порционально γ. В нашем случае γ— это *R/L.* Теперь, если уве­личивать γ, то в столь приятных нам решениях (24.14) и (24.15) наступает беспорядок; когда γ*/2* становится больше ω0, реше­ния приходится записывать по-другому:

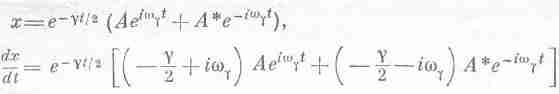
C:\1\pic\gray.jpgЭто снова два решения, которые приводят нас к решениям exp(iα1t) и ехр(iα2t). Подставив теперь α1, получим

Никаких колебаний. Чисто экспоненциальное убывание. То же самое дает и второе решение

C:\1\pic\gray.jpg

Заметим, что квадратный корень не может превысить γ/2; даже если ω0=0, оба члена равны. Если же ω20 отличается от γ/2/4, то квадратный корень меньше γ//2 и выражение в круглых скобках всегда положительно. Это очень хорошо! Почему? Да потому что если бы это выражение было отрицательным, то *е* пришлось бы возводить в *положительную* степень и мы по­лучили бы возрастающее со временем решение. Но при увели­чении в цепи сопротивления колебания не могут возрастать, зна­чит, мы избегли противоречия. Итак, мы получили два решения; оба решения экспоненциально затухают, но одно из них стре­мится «умереть» гораздо скорее. Общее решение, конечно, пред­ставляет собой комбинацию обоих решений, а значения коэф­фициентов *А и В* зависят от того, как начинаются колебания, каковы начальные условия. В нашей цепи случилось так, что *А —* отрицательное число, а *В —* положительное, поэтому на экране осциллоскопа мы увидели разность двух экспонент.

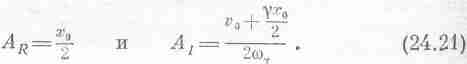
Давайте обсудим, как найти коэффициенты *А* и *В* (или *А* и A\*), если известны начальные условия. Предположим, что в момент t=0 нам известны смещение *х=х0* и скорость *dx/dt=v0.* Если в соотношения



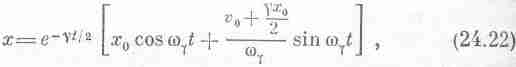
подставить значения t=0, *х=х0, dx/dt=v0* и воспользо­ваться тем, что е0=еi0=1, то мы получим

C:\1\pic\gray.jpg*x0=A+A\*=2AR,*

Значит,



Таким образом, зная начальные условия, мы полностью определили *А и А\*,* а значит, и кривую переходного решения. Можно записать решение и по-другому. Вспомним, что

eiθ+e-iθ=2cosθ и *ei*θ*- e-i*θ*=2isin*θ*,* тогда

где ωγ=+√(ω20-(γ2/4). Мы получили формулу затухающих колебаний. Такая формула нам не понадобится, однако отметим ее особенности, справедливые и в более общих случаях.

Прежде всего поведение системы, на которую не действует внешняя сила, описывается суммой (суперпозицией) временных экспонент [мы записали их в виде exp(iαt)]. Такое решение хорошо передает истинное положение вещей. В общем случае α — это комплексное число, и его мнимая часть соответствует затуханию колебаний. Наконец, тесная математическая связь синусоидальных и экспоненциальных функций, о которой го­ворилось в гл. 22, физически часто проявляется в переходе от колебаний к чисто экспоненциальному затуханию при крити­ческих значениях некоторых параметров системы (в нашем случае это было сопротивление γ).

***Глава 25***

**ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ И ОБЗОР**

[**§ 1. Линейные диффер****енци­****альные уравнения**](#a1)

[**§ 2. Суперпози****ция** **решений**](#a2)

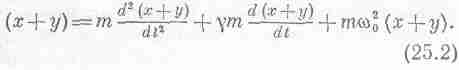
[**§ 3. Колебания в ли****нейн****ых системах**](#a3)

[**§ 4. Аналогии в** **фи****зике**](#a4)

[**§ 5. Последователь****ные** **и параллельн****ые сопротивления**](#a5)

**§ 1. Линейные дифференциальные уравнения**

C:\1\pic\gray.jpgВ этой главе мы снова вернемся к некоторым аспектам наших колебательных систем, только постараемся теперь увидеть нечто более общее, стоящее за спиной каждой частной системы. Изучение каждой колебательной системы своди­лось к решению дифференциального уравнения

Эта комбинация «операций» над переменной *х* обладает интересным свойством: если вместо *х* подставить *(х+у),* получится сумма одинаковых операций над *х* и y, а умножение *х* на число *а* сводится к умножению на это число первона­чальной комбинации. Это легко доказать. Что­бы не переутомиться, записывая все буквы, вошедшие в (25.1), давайте введем «скоропис­ные» обозначения. Обозначим всю левую часть уравнения (25.1) символом L*(х).* Увидев такой символ, вы должны мысленно представить себе левую часть уравнения (25.1). Поэтому, соглас­но этой системе, символ *L(x+y)* будет озна­чать следующее:

(Подчеркнем букву *L,* чтобы не спутать этот символ с обычной функцией.) Иногда мы будем употреблять термин *операторная запись,* но со­вершенно безразлично, какими словами это называть, просто-напросто это «скоропись». Наше первое утверждение, что

*L(x+y)=L(x)+L(y),* (25.3)

следует из соотношений *а(х+у)=ах+ау, d(x+y)/dt=dx/dt+-dy/dt* и т. д.

Легко доказать, что для постоянного *а*

*L(ax)=aL(x).* (25.4)

[Соотношения (25.3) и (25.4) тесно связаны одно с другим, потому что, подставив в (25.3) *х+х,* мы получим (25.4) для част­ного значения *а=2* и т. д.]

Решая более сложные задачи, можно получить *L,* в котором содержится больше членов и более высокие производные. Обыч­но первым делом интересуются, справедливы ли соотношения (25.3) и (25.4). Если они выполняются, то задачу называют *линейной.* В этой главе мы изучим некоторые свойства систем, следующие только из того факта, что система линейная. Это поможет нам понять общность некоторых свойств изученных ранее частных систем.

Давайте изучим некоторые свойства линейных дифферен­циальных уравнений, причем полезно помнить о хорошо зна­комом нам частном уравнении (25.1). Первое интересное свой­ство: предположим, что мы решаем дифференциальное уравне­ние для переходных движений: свободных колебаний без дейст­вия внешних сил. Нам предстоит решить уравнение

*L(x)=0.* (25.5)

Предположим, что мы как-то исхитрились одолеть это уравне­ние и нашли его частное решение *х1.* Это значит, что нам из­вестна функция x1, для которой L(x1)=0. После этого можно за­метить, что *ax1*— тоже решение нашего уравнения; можно умножить частное решение уравнения на любую постоянную и получить новое решение. Иначе говоря, если какое-либо ре­шение позволяет частице продвинуться на определенное рас­стояние, то она может совершить и более длинный рейс. *Дока­зательство: L(ax1)=aL(x1)=a*•*0=0.*

Предположим теперь, что нам удалось все-таки найти не *одно* частное решение *x1,* но и второе *х2* (напомним, что когда мы в поисках переходного решения подставляли x*=exp(iαt),* то мы нашли *два* значения α, т. е. два решения: *x1* и *х2).* Пока­жем теперь, что комбинация *x1+x2 —* тоже решение. Иными словами, если положить *x=x1+x2,* то *х —* это опять решение уравнения. Почему? Потому что если *L(x1)=0* и *L(x2)=*0, то *L(xt+x2)=L(x1)+L(x2)*=0+0=0. Таким образом, мы вправе складывать отдельные решения, описывающие движения ли­нейной системы.

Продолжая в том же духе, мы можем сложить шесть первых и два вторых решения; ведь если *x1* есть решение, то αx1 — тоже решение. Другими словами, любая сумма двух решений, на­пример αx1+βx2, удовлетворяет уравнению. Если нам посча­стливится найти три решения, то мы увидим, что любая комби­нация трех решений снова удовлетворяет уравнению, и т. д. Поток таких решений можно ограничить [*независимыми ре**ше­ниями*](#прим1)*;* в случае осциллятора мы получили только *два* таких решения. Число независимых решений в общем случае зависит от того, что называется числом *степеней свободы.* Мы не будем сейчас подробно обсуждать этот вопрос, но в случае дифферен­циального уравнения второго порядка имеются лишь два неза­висимых решения. Если мы найдем оба эти решения, то можно построить общее решение уравнения.

Посмотрим, что будет, когда на систему действует внешняя сила. Предположим, что нам встретилось уравнение

*L(x)=F(t)* (25.6)

и мы нашли его частное решение. Назовем его решением Джо xД, т. е. *L(xД)=F(t).* Хотелось бы найти еще одно решение этого уравнения. Добавим к решению Джо какое-нибудь решение свободного уравнения (25.5), например x1. Тогда, вспомнив о (25.3), получим

*L(xД+xl)=L(xД)+L(x1)=F(t)+0=F(t).* (25.7)

Следовательно, добавив к решению уравнения (25.6) любое «свободное» решение, мы получим новое решение. Свободное ре­шение называют еще *переходным* решением.

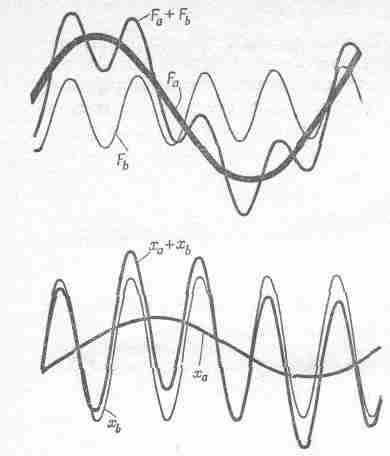
Если неожиданно включить внешнюю силу, то движение осциллятора не сразу будет описываться равновесным (синусо­идальным) решением: сначала к нему будут примешиваться пе­реходные решения, которые, если подождать подольше, в конце концов «вымрут». Равновесное решение «выживет», потому что только оно соответствует внешней силе. В конце концов это бу­дет единственным решением, но начальные движения системы зависят от того, какие обстоятельства сопутствуют включе­нию силы.

**§ 2. Суперпозиция решений**

Перейдем теперь к другой интересной проблеме. Предполо­жим, что нам задана какая-нибудь внешняя сила ***F****a* (например, периодическая сила с частотой ω=ωа, но наши выводы будут верны для любой зависимости силы от времени) и мы нашли движение, соответствующее этой силе (переходные движения можно учитывать или не учи­тывать, это неважно). Пред­положим, что мы решили еще одну задачу — нашли движе­ние в случае действия силы *Fb.* После этого предположим, что кто-то вбежал в комнату и сказал: «На контрольной за­дают задачу с силой *Fa+Fb.* Что нам делать?» Конечно, мы решим эту задачу — ведь мы сразу обнаружим одно замечательное свойство: сумма реше­ний *ха* и *хb,* получаемых в том случае, если брать силы по от­дельности, будет решением новой задачи. Для этого надо только вспомнить о (25.3):

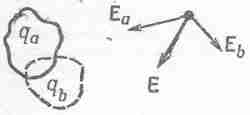
*L(xa+xb)=L(xa)+L(xb)=Fa(t)+Fb(t).* (25.8)

Это пример того, что называют *принципом суперпозиции* для линейных систем, и это очень важная вещь. Дело обстоит так: если мы сможем представить сложную силу в виде суммы не­скольких более простых сил и сможем решить уравнение для каждой силы в отдельности, то мы сможем решить и первона­чальное уравнение, потому что для этого надо просто объеди­нить *куски решения* так же, как мы объединяли отдельные силы, чтобы получить *полную силу* (фиг. 25.1).



*Фиг. 25.1. Пример принципа суперпозиции для линейных си­стем.*

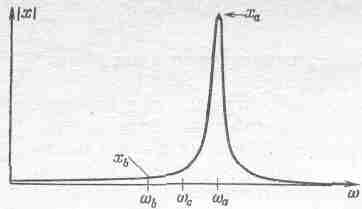
Еще один пример принципа суперпозиции. В гл. 12 (вып. 1) говорилось об одном из важнейших фактов, вытекающих из за­конов электричества. Если нам задано распределение зарядов *qa,* можно найти электрическое поле **Е**в, порождаемое этими заря­дами в точке *Р.* Другое распределение зарядов *qb* порождает в этой же точке поле **E**b. Оба эти распределения, действуя вме­сте, породят в точке *Р* поле **Е**, которое представляет собой *сумму* полей **Е**а и **Е**b. Иначе говоря, поле, соответствующее совокуп­ности многих зарядов,— это векторная сумма полей, соответ­ствующих отдельным зарядам. Аналогия с предыдущим приме­ром бросается в глаза: ведь если мы знаем результат действия отдельных сил, то отклик на силу, являющуюся суммой этих сил, будет суммой отдельных откликов.



*Фиг. 25.2. Принцип суперпо­зиции в электростатике.*

Причина справедливости принципа суперпозиции в электри­честве состоит в том, что основные законы электричества, опреде­ляющие электрическое поле (уравнения Максвелле), — это *линейные* дифференциальные уравнения, обладающие свойством (25.3). Силам в этих уравнениях соответствуют *заряды,* порождающие электрическое поле, а уравнения, определяющие электрическое поле по заданным зарядам,— линейные уравнения.

Чтобы придумать еще один пример принципа суперпозиции, спросите себя, как вам удается настроить свой радиоприемник на определенную радиостанцию, хотя одновременно работает очень много станций. Сигналы радиостанций — это колеблю­щиеся электрические поля очень высокой частоты, действую­щие на антенну радиоприемника. Амплитуда этих колебаний, правда, меняется, их модулирует голос диктора, но скорость этих изменений очень мала и об этом можно пока забыть. Когда вы слышите: «Станция работает на частоте 780 килогерц», это значит, что частота излучаемого антенной радиостанции элект­ромагнитного поля равна 780 000 колебаний в секунду и это поле с точно такой же частотой раскачивает электроны в ан­тенне вашего приемника. Но ведь в то же самое время поблизо­сти может работать и другая радиостанция на другой частоте, скажем на частоте 550 *кгц.* Эта станция тоже раскачивает электроны вашей антенны. Как же отделяются сигналы, посту­пающие в приемник с частотой 780 *кгц,* от сигналов, имею­щих частоту 550 *кгц?* Ведь вы же не слышали голоса обоих дикторов одновременно.

Первая часть электрической цепи радиоприемника — это линейная цепь. По принципу суперпозиции ее отклик на элект­рическое поле *Fа+Fb* равен *ха+хb.* По всему выходит, что нам придется слушать обоих дикторов сразу. Но вспомним, что в *резонансной* цепи кривая отклика *х* на единичную силу ***F***за­висит от частоты примерно так, как это изображено на фиг. 25.3.

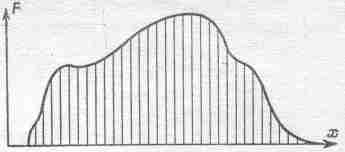
*Фиг. 25.3. Резонансная кривая с острым максимумом.*

В цепи с очень большим значением *Q* отклик имеет очень острый максимум. Предположим, что обе станции имеют примерно одинаковую мощность, поэтому обе *силы* имеют примерно оди­наковую амплитуду. *Отклик* равен сумме откликов *ха* и *хb,* но на фиг. *25.3 ха* громаден, а *хb* очень мал. Таким образом, хотя оба сигнала одинаковы по силе, в приемнике они проходят через остро резонансную цепь, настроенную на частоту ωа (частоту передач одной из станций), и отклик на эту частоту (станцию) значительно больше отклика на все остальные. Поэтому, не­смотря на то что на антенну действуют оба сигнала, полный отклик почти целиком составлен из частоты ωа, и мы можем выб­рать ту станцию, какую пожелаем.

Несколько слов о механизме настройки. Как мы настраиваем радиоприемник? Мы изменяли частоту ω0, меняя *L* или *С* цепи, потому что частота цепи зависит от комбинации *L* и *С.* Боль­шинство радиоприемников устроено так, что в них меняется зна­чение *С.* Поворачивая ручку настройки приемника, мы изменяем собственную частоту цепи. Пусть какому-то положению ручки соответствует частота ωс; если нет радиостанций, работающих на этой частоте, приемник молчит. Вы продолжаете изменять емкость *С* цепи, пока не построите кривую отклика с резонан­сом при частоте ωb, тогда вы услышите другую станцию. Вот так и настраивается радиоприемник; все дело в принципе супер­позиции, в сочетании с резонансным откликом.

Чтоб закончить обсуждение, давайте подумаем, как посту­пить при анализе линейных задач с заданной силой, когда сила очень *сложно зависит от времени.* Можно поступать по-разному, но есть два особенно удобных общих метода решения таких за­дач. Первый метод: предположим, что мы можем решить зада­чу в некоторых частных случаях, например в случае синусои­дальных сил разных частот. Решать линейные уравнения в таких случаях — детская забава. Пусть нам и встретился этот «детский» случай. Теперь встает вопрос, нельзя ли представить любую силу в виде суммы двух или более «детских» сил? Мы уже показали на фиг. 25.1 довольно хитрую зависимость силы от времени; если туда добавить еще несколько синусоид, то ре­зультирующая кривая будет выглядеть еще сложнее. Таким образом, простенькие «детские» силы могут породить очень сложную силу. Верно и обратное: практически каждая кривая может быть представлена в виде *бесконечной суммы* синусоидаль­ных волн разной длины волн (или частоты). Таким образом, мы знаем, как представить заданную силу ***F***в виде синусоидальных волн, поэтому решение *х* можно представить в виде суммы *F* синусоидальных волн, каждая из которых умножается на эф­фективное отношение *х* к ***F.***Такой метод решения называют ме­тодом *преобразования, Фурье,* или *анализом (разложением) Фурье.* Мы не будем сейчас делать такого разложения; пока до­статочно только идеи.

Очень интересен другой способ решения сложных задач. Предположим, что кто-то после больших умственных усилий решил заданную нам задачу в случае одной частной силы — *импульсной.* Сила внезапно и быстро действует на систему, затем выключается и все опять спокойно. Нам теперь достаточно решить такую задачу лишь в случае единичной силы, потом умножением на подходящее число мы сможем получить любые силы. Мы знаем, что осциллятор откликается на импульсную силу затухающими колебаниями. А как быть в случае другой силы, например силы, изображенной на фиг. 25.4?



*Фиг. 25.4. Сложную силу можно представить как последователь­ность коротких импульсов.*

Такую силу можно представить в виде последовательных ударов молотком. Сначала всюду стоит тишина, потом кто-то берет в руки молоток и внезапно раздаются равномерные уда­ры — удар, удар, удар, удар, ... и опять все тихо. Иначе говоря, непрерывно действующую силу можно представить в виде ряда последовательных импульсов, быстро следующих один за дру­гим. Мы знаем последствия одного импульса, а последствием серии импульсов будет ряд затухающих колебаний; нарисуйте кривую колебаний для первого импульса, затем, немного от­ступя, такие же кривые для второго импульса, третьего и т. д. Потом сложите все кривые. Таким образом математически можно представить полное решение в случае произвольной силы, если можно решить задачу для импульса. Ответ для любой силы можно получить путем интегрирования. Это *метод функции Грина.* Функция Грина — это отклик системы на отдельный импульс, а метод функции Грина — это метод ана­лиза действия силы суммированием откликов на импульсы.

Физические принципы, лежащие в основе обоих методов, очень просты; они просто напрашиваются, если понять смысл линейного уравнения, но *математические* методы содержат до­вольно сложные интегрирования и т. д.; мы мало подготовлены, чтобы прямо атаковать эти методы. К этому вы еще вернетесь, когда поднабьете руку в математике. Но сама *идея* методов, право, очень проста.

Наконец, скажем еще, почему *линейные* системы так важны. Ответ прост: потому что мы умеем решать линейные уравнения! Поэтому большую часть времени мы будем решать линейные задачи. Вторая (и главная) причина заключается в том, что *основные законы физики часто линейны.* Например, уравнения Максвелла для законов электромагнетизма — линейные урав­нения. Великие законы квантовой механики, насколько нам они известны, тоже сводятся к линейным уравнениям. Вот почему мы так много времени уделяем линейным уравнениям: если мы поняли линейные уравнения, мы готовы в принципе понимать очень многие вещи.

Упомянем еще другие ситуации, когда возникают линейные уравнения. Когда отклонения малы, многие функции можно *приближенно* заменить линейными. Например, точное уравне­ние движения маятника гласит

d2θ/dt2=-g/Lsinθ. (25.9)

Это уравнение решается при помощи эллиптических функций, но легче его решить численно, как мы это делали в гл. 9 (вып. 1) при изучении ньютоновых законов движения. Большинство нелинейных уравнений вообще можно решить лишь *численно.* Для малых углов sinθ практически равен θ, и в этом случае можно перейти к линейному уравнению. На этом примере мож­но сообразить, что есть много обстоятельств, при которых ма­лые эффекты линейны (здесь это отклонения маятника на малые углы). Другой пример: если на пружине качается небольшой грузик, сила пропорциональна растяжению пружины. Если сильно потянуть за пружину, она может и порваться, значит, в этом случае сила совсем иначе зависит от расстояния! Линей­ные уравнения очень важны. Они *настолько* важны, что физики и инженеры, пожалуй, половину своего времени тратят на ре­шение линейных уравнений.

**§ 3. Колебания в линейных системах**

Давайте вспомним, о чем мы говорили в нескольких послед­них главах. Физику колебательных движений очень легко за­темнить математикой. На самом-то деле здесь физика очень про­ста, и если на минуту забыть математику, то мы увидим, что понимаем почти все, что происходит в колебательной системе.

Во-первых, если мы имеем дело только с пружинкой и грузи­ком, то легко понять, почему система колеблется — это следст­вие инерции. Мы оттянули массу вниз, а сила тянет ее назад; наступает момент, когда сила равна нулю, но грузик не может остановиться мгновенно: у него есть импульс, который застав­ляет его двигаться. Теперь пружинка тянет грузик в другую сторону, грузик начинает двигаться взад и вперед. Итак, если бы не было трения, то, несомненно, получилось бы колебатель­ное движение, и так оно и есть на самом деле. Но достаточно незначительного трения, чтобы размах следующих колебаний стал меньше, чем раньше.

Что случится потом, после многих циклов? Это зависит от ха­рактера и величины трения. Предположим, что мы придумали такое устройство, что при изменении амплитуды сила трения оказывается пропорциональной другим силам — инерции и натяжению. Иначе говоря, при малых колебаниях трение сла­бее, чем при колебаниях с большой амплитудой. Обычно сила трения таким свойством не обладает, так что можно предполо­жить, что в нашем случае действуют силы трения особого рода — силы, пропорциональные скорости; тогда для больших колеба­ний эти силы будут больше, а для малых — меньше. Если у нас именно такой вид трения, то в конце каждого цикла система будет находиться в тех же условиях, что и в начале цикла, только всего будет меньше. Все силы будут меньше в тех же пропорциях: сила пружинки немного ослабнет, инерциальные эффекты будут меньше. Ведь теперь и ускорения грузика будут меньше, и сила трения ослабеет (об этом мы позаботились, соз­давая наше устройство). Если бы мы имели дело с такими си­лами трения, то увидели бы, что каждое колебание в точности повторяет первое, только амплитуда его стала меньше. Если после первого цикла амплитуда составляла, например, 90% пер­воначальной, то после второго цикла она будет равна 90% от 90% и т. д., т. е. *размах колебаний после каждого цикла умень­шается в одинаковое число раз.* Кривая, ведущая себя таким образом,— это экспоненциальная функция. Она изменяется в одинаковое число раз на любых интервалах одинаковой длины. Иначе говоря, если отношение амплитуды одного цикла к амплитуде предыдущего равно *а,* то такое же отношение для вто­рого цикла равно а2, затем а3 и т. д. Таким образом, амплитуда колебаний после nциклов равна

*А=А0аn.* (25.10)

Но, конечно, *n~t,* поэтому общее решение будет произведением какой-нибудь периодической функции sinωt или соsωt на ам­плитуду, которая ведет себя примерно как bt. Если bположи­тельно и меньше единицы, то его можно записать в виде *е-c.*

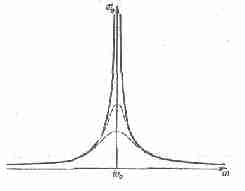
Вот почему решение задачи о колебаниях при учете трения бу­дет выглядеть примерно как

ехр(-*ct)cosωt.* Это очень просто.

Что случится, если трение не будет таким искусственным; например обычное трение о стол, когда сила трения по­стоянна по величине, не зависит от размаха колебаний и меняет свое направление каждые полпериода? Тогда уравнения движе­ния станут нелинейными; решить их трудно, поэтому придется прибегнуть к описанному в гл. 2 численному решению или рас­сматривать по отдельности каждую половину периода. Самым мощным, конечно, является численный метод; с его помощью можно решить любое уравнение. Математический анализ ис­пользуется лишь для решения простых задач.

Надо сказать, что математический анализ вообще не такое уж могучее средство исследования; с его помощью можно ре­шить лишь простейшие возможные уравнения. Как только урав­нение чуть усложняется, его уже нельзя решить аналитически. Численный же метод, с которым мы познакомились в начале курса, позволяет решить любое уравнение, представляющее физический интерес.

Пойдем дальше. Что можно сказать о резонансной кривой? Как объяснить резонанс? Представим сначала, что трения нет и мы имеем дело с чем-то, что может колебаться само по себе. Если подталкивать маятник каждый раз, когда он пройдет мимо нас, то очень скоро маятник начнет раскачиваться, как сумас­шедший. А что случится, если мы закроем глаза и, не следя за маятником, начнем толкать его с произвольной частотой, с ка­кой захотим? Иногда наши толчки, попадая не в ритм, будут замедлять маятник. Но когда нам посчастливится найти вер­ный темп, каждый толчок будет достигать маятника в нужный момент и он будет подниматься все выше, выше и выше. Таким образом, если не будет трения, то для зависимости амплитуды от частоты внешней силы мы получим кривую, которая выгля­дит, как сплошная линия на фиг. 25.5.



*Фиг. 25.5. Резонансная кривая, отражающая разнообразные виды трения.*

Качественно мы по­няли резонансную кривую; чтобы найти ее точные очертания, пожалуй, придется прибегнуть к помощи математики. Кривая стремится к бесконечности, если ω→ω0, где ω0— собственная частота осциллятора.

Предположите, что существует слабое трение. Тогда при не­значительных отклонениях осциллятора влияние трения сказы­вается слабо и резонансная кривая вдали от максимума не из­меняется. Однако около резонанса кривая уже не уходит в бесконечность, а просто поднимается выше, чем в остальных ме­стах. Когда амплитуда колебаний достигает максимума, работа, совершенная нами в момент толчка, полностью компенсирует потери энергии на трение за период. Таким образом, вершина кривой закруглена, и она уже не уходит в бесконечность. Чем больше трение, тем больше сглажена вершина кривой. Кто-нибудь может сказать: «Я думал, что ширины резонансных кривых зависят от трения». Так можно подумать, потому что ре­зонансные кривые рисуют, принимая за единицу масштаба вер­шину кривой. Однако если нарисовать все кривые в одном мас­штабе (это прояснит дело больше, чем изучение математических выражений), то окажется, что трение срезает вершину кривой! Если трение мало, мы можем подняться высоко по резонансной кривой; когда трение сгладит кривую, мы на том же интервале частот поднимаемся на меньшую высоту, и это создает ощу­щение ширины. Таким образом, чем выше пик кривой, тем ближе к максимуму точки, где высота кривой равна половине максимума.

Наконец, подумаем, что произойдет при очень большом тре­нии. Ясно, что, если трение очень велико, система вообще не осциллирует. Энергии пружинки едва-едва хватит на борьбу с силами трения, и грузик будет медленно ползти к положению равновесия.

**§ 4. Аналогии в физике**

Продолжая обзор, заметим, что массы и пружинки — это не единственные линейные системы; есть и другие. В частности, существуют электрические системы (их называют линейными цепями), полностью аналогичные механическим системам. Мы не старались до конца выяснить, *почему* каждая часть электри­ческой цепи работает так, а не иначе; это нам еще трудно по­нять. Можно просто поверить, что то или иное поведение каж­дого элемента цепи можно подтвердить экспериментально.

Возьмем для примера простейшее устройство. Приложим к куску проволоки (сопротивлению) разность потенциалов *V.* Это значит, что если от одного конца проволоки до другого проходит заряд q*,* то при этом совершается работа *qV.* Чем вы­ше разность потенциалов, тем большая работа совершается при «падении» заряда с высокопотенциального конца проволоки на низкопотенциальный. Заряды, проходя с одного конца прово­локи на другой, выделяют энергию. Но зарядам не так-то просто плыть вдоль проволоки: атомы проволоки оказывают сопротивление потоку, и это сопротивление подчиняется закону, справедливому почти для всех *обычных* материалов: ток I про­порционален приложенной к проволоке разности потенциалов. Иначе говоря, число зарядов, проходящих через проволоку за 1 *сек,* пропорционально силе, с которой их толкают:

V=IR=R(dq/dt), (25.11)

Коэффициент *R* называют *сопротивлением,* а само уравнение— *законом Ома.* Единица сопротивления — *ом;* он равен отноше­нию одного вольта (1 *в)* к одному амперу (1 а). В механических устройствах очень трудно отыскать силу трения, пропорцио­нальную скорости, а в электрических цепях — это дело обычное и закон Ома справедлив для большинства металлов с очень высокой точностью.

Нас интересует, много ли совершается работы за 1 *сек* при прохождении зарядов по проволоке (эту же величину можно назвать потерей мощности или выделяемой зарядами энергией)? Чтобы прогнать заряд *q* через разность потенциалов *V,* надо со­вершить работу *qV;* таким образом, работа за 1 сек равна *V(dq/dt),* или *VI.* Это выражение можно записать иначе: *IR*•*I=I2R.* Эту величину называют *тепловыми потерями;* вследствие закона сохранения энергии, такое количество теплоты про­изводит в 1 *сек* сопротивление проволоки. Эта теплота накаляет проволоку электрической лампы.

У механических устройств есть, конечно, и другие интересные свойства, например, такие, как масса (инерция). В электриче­ских цепях, оказывается, тоже существуют аналоги инерции. Можно построить прибор, называемый *индуктором,* а свойство, которым он обладает, носит название *индуктивность.* Ток, попа­дающий в такой прибор, *не хочет останавливаться.* Чтобы изме­нить ток, к этому прибору нужно приложить разность потенци­алов. Если по прибору течет постоянный ток, то падения по­тенциалов нет. Цепи с постоянным током ничего «не знают» об индуктивности; эффекты индуктивности обнаруживаются толь­ко при *изменениях* тока. Описывающее эти эффекты уравнение гласит;

V=L(dI/dt)=L(d2q/dt2), (25.12)

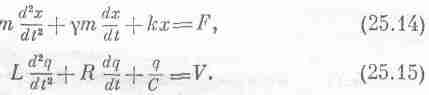
а индуктивность измеряется в единицах, которые называются *генри (гн).* Приложенная к прибору с индуктивностью в 1 *гн* разность потенциалов в 1 *в* изменяет ток на 1 *а/сек.* Уравнение (25.12), если хотите,— электрический аналог закона Ньютона: *V* соответствует *F, L* соответствует *т, а I* — скорости!

Все последующие уравнения, описывающие обе системы, выводятся одинаково, потому что мы просто можем заменить буквы в уравнении для одной системы и получить уравнение для другой системы; любой вывод, сделанный при изучении од­ной системы, будет верен и для другой системы.

Какое электрическое устройство соответствует пружинке, в которой сила пропорциональна растяжению? Если начать с *F=kx и заменить F на V, a х на q,* тополучим *V=aq.*Мы уже знаем, что такое устройство существует; более того, это единственный из трех элементов цепи, работу которого мы понимаем. Мы уже знакомились с парой параллельных пластинок и обнаружили, что если зарядить пластинки равными, но противоположными по знаку зарядами, то поле между пластинками будет про­порционально величине заряда. Работа, совершаемая при пе­реносе единичного заряда через щель от одной пластинки к дру­гой, прямо пропорциональна заряду пластинок. Эта работа слу­жит *определением* разности потенциалов и равна линейному ин­тегралу электрического поля от одной пластинки к другой. По исторически сложившимся причинам постоянную пропор­циональности называют не *С,* а *1/С,* т. е.

V=q/C. (25.13)

Единица емкости называется *фарадой (ф);* заряд в 1 *кулон,* по­мещенный на каждой пластинке конденсатора емкостью в 1 *ф,* создает разность потенциалов в 1 в. Вот все нужные аналогии. Теперь можно, заменив *m* на *L, q* на *х* и т. д., написать уравне­ние для резонансной цепи



Все, что мы знаем об уравнении (25.14), можно применить и к уравнению (25.15). Переносится каждое *следствие;* анало­гов так много, что с их помощью можно сделать замечательные вещи.

Предположим, что мы натолкнулись на очень сложную механическую систему: имеется не одна масса на пружинке, а много масс на многих пружинках, и все это перепутано. Что нам делать? Решать уравнения? Можно и так. Но попробуем соб­рать *электрическую* цепь, которая будет описываться теми же уравнениями, что и механическое устройство! Если мы собрались анализировать движение массы на пружинке, почему бы нам не собрать цепь, в которой индуктивность пропорциональна массе, сопротивление пропорционально *тγ, 1/С* пропорциональ­но k? Тогда электрическая цепь, конечно, будет точным анало­гом механического устройства в том смысле, что любой отклик *q* на *V (V* соответствует действующей силе) в точности соответст­вует отклику *х* на силу! Перепутав в цепи великое множество сопротивлений, индуктивностей и емкостей, можно получить цепь, *имитирующую* сложнейшую механическую систему. Что в этом хорошего? Каждая задача, механическая или электриче­ская, столь же трудна (или легка), как и другая: ведь они в точ­ности эквивалентны. Открытие электричества не помогло решить *математические уравнения,* но дело в том, что всегда легче *собрать* электрическую цепь и *изменять* ее параметры.

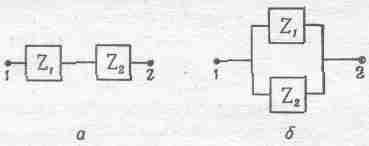
Предположим, что мы построили автомобиль и хотим узнать, сильно ли его будет трясти на ухабах. Соберем электрическую цепь, в которой индуктивности скажут нам об инерции колес, об упругости колес представление дадут емкости, сопротивле­ния заменят амортизаторы и т. д. В конце концов мы заменим элементами цепи все части автомобиля. Теперь дело за ухабами. Хорошо, подадим на схему *напряжение от* генератора — он смо­жет изобразить любой ухаб; измеряя заряд на соответствую­щем конденсаторе, мы получаем представление о раскачке колеса. Измерив заряд (это сделать легко), мы решим, что авто­мобиль трясет слишком сильно. Надо что-то сделать. То ли ос­лабить амортизаторы, то ли усилить их. Неужели придется переделывать автомобиль, снова проверять, как его трясет, а потом снова переделывать? Нет! Просто нужно повернуть ручку сопротивления: сопротивление номер 10 — это аморти­затор номер 3; так можно усилить амортизацию. Трясет еще сильнее — не страшно, мы ослабим амортизаторы. Все равно трясет. Изменим упругость пружины (ручка номер 17). Так мы всю наладку произведем с помощью *электричества,* много­кратным поворотом ручек.

Вот вам *аналоговая вычислительная машина.* Так называют устройства, которые имитируют интересующие нас задачи, описываемые теми же уравнениями, но совсем другой природы. Эти устройства легко построить, на них легко провести измере­ния, отладить их, и... разобрать!

**§ 5. Последовательные и параллельные сопротивления**

Обсудим, наконец, еще один важный вопрос, хотя он не сов­сем подходит по теме. Что делать с электрической цепью, если в ней много элементов? Например, когда индуктивность, сопротив­ление и емкость соединены, как показано на фиг. 24.2 , то все заряды проходят через каждый из трех элементов так, что связывающий элементы ток во всех точках цепи одинаков. Поскольку ток всюду одинаков, падение напряжения на соп­ротивлении равно IR*,* на индуктивности равно *L(dI/dt)* и т. д. Полное падение напряжения получается суммированием частичных падений, и мы приходим к уравнению (25.15). Исполь­зуя комплексные числа, мы решили это уравнение в случае равновесного отклика на синусоидальную силу. Мы нашли, что *V=ZI* (Z называется *импедансом* цепи). Зная импеданс, легко найти ток в цепи I, если к цепи приложено синусоидальное нап­ряжение *V.*

Предположим, что нужно собрать более сложную цепь из двух кусков, импедансы которых равны Z1 и Z2; соединим их *по­следовательно* (фиг. 25.6, а) и приложим напряжение.



*Фиг. 25.6. Импедансы, соеди­ненные последовательно (а) и па­раллельно (б).*

Что слу­чится? Задача немного сложнее предыдущей, но разобраться в ней нетрудно: если через Z1 течет ток I1, то падение напряже­ния на Z1 равно V1=IZ1, а падение напряжения на Z2 будет V2 = IZ2. *Через оба элемента цепи течет одинаковый ток.* Пол­ное падение напряжения вдоль такой цепи равно V=V1+V2=(Z1+Z2)I. Таким образом, падение напряжения в такой цепи мощно записать в виде V=IZs, a *Zs—* импеданс системы, состав­ленной из двух последовательно соединенных элементов, равен сумме импедансов отдельных элементов

Zs=Z1+Z2. (25.16)

Но это не единственный способ решения вопроса. Можно со­единить отдельные элементы *параллельно* (фиг. 25.6,б). При та­ком соединении, если соединительные провода считать идеаль­ными проводниками, к обоим элементам приложено одинаковое внешнее напряжение, а сила тока в каждом элементе не зависит от другого элемента. Ток через Z1 равенI1=V/Z1, ток в Z2 равен /2=V/Z2. Напряжение в обоих случаях *одинаково.* Полный ток через концы цепи равен сумме токов в отдельных частях цепи:

C:\1\pic\gray.jpgI=V/Z1+V/Z2. Это можно записать и так:

C:\1\pic\gray.jpgТаким образом,

Многие сложные цепи иногда становятся более понятными, если расчленить их на куски, выяснить, чему равны импедансы отдельных частей, а затем шаг за шагом следить за соединением частей, помня о только что выведенных правилах. Если мы соб­рали цепь из большого числа произвольно соединенных эле­ментов и создаем в этой цепи разности потенциалов при помощи небольших генераторов, импедансом которых можно пренебречь (когда заряд проходит через генератор, то потенциал возрастает на V), то при анализе цепи можно использовать такие правила:

1) сумма токов, протекающих через любое соединение, равна нулю; ведь притекший к любому соединению ток должен обязательно вытечь из него;

2) если заряд, двигаясь по замкнутой петле, вернулся в то место, откуда начал путешествие, полная работа должна быть равна нулю.

Эти правила называются *законами Кирхгофа.* Систематиче­ское применение этих правил часто облегчает анализ работы сложных цепей. Мы к ним вернемся, когда будем говорить о законах электричества.

\* ***В новейших супергетеродинных приемниках дело, конечно, об­стоит сложнее. Усилители приемника настроены на определенную промежуточную частоту; осциллятор с переменной настраивающейся частотой связан с входным сигналом нелинейной связью, порождая новую частоту (равную разности частот сигнала и осциллятора) —промежуточную частоту, которая и усиливается. Об этом мы поговорим в гл. 50 (вып. 4).***

\* Решения, которые нельзя выразить линейно одно через другое, называются независимыми решениями.