*От редактора*

Этим выпуском мы начинаем печатание перевода второго

тома лекций, прочитанных Р. Фейнманом студентам второго

курса. Весь материал второго тома составляет 42 главы и займет

три выпуска русского издания (5—7). Основное содержание

этих глав-лекций — электричество, магнетизм, физика сплошных сред. Остальные лекции, в которых рассказывалось о квантовой механике, составили третий том и войдут в русском издании в вып. 8 и 9. Кроме того, вышли три тетради задач

по курсу (по тетради к каждому тому). В нашем издании

они составят дополнительный выпуск: «Задачи и упражнения».

О втором томе хотелось бы сделать два замечания. Первое относится к гл. 19 (вып. 6). Это не обычная лекция, а скорее док­лад на научном семинаре; понять его смогут, по-видимому, лишь самые сильные студенты (и то, если хорошо поработают!). Фейнман рассказывает о том, как можно, посмотрев иначе на совсем разные разделы физики, увидеть между ними много общего.

Это рассказ о принципе наименьшего действия, как его понимает Фейнман, а также замечания о близких по духу задачах, которые, как признает сам автор, не понимает даже он сам.

Смотреть на все своими глазами — замечательное качество.

Именно это и надо понять, читая гл. 19.

Второе замечание относится к гл. 30 (вып. 7). В американском издании в эту главу в качестве § 19 включена самая настоящая научная статья из журнала Английской Академии наук

(или, как ее называют с давних пор, Королевского общества).

Эта статья имеет непосредственное отношение к содержанию

главы, она посвящена моделированию явлений в кристалле.

Но рассказ о методе ведет не лектор, а сами авторы метода —

английские физики Брэгг и Най. При этом создатели курса

добивались еще одной цели — познакомить читателя с оригинальной научной работой из серьезного журнала. В русском издании перевод ее (немного сокращенный) помещен в конце вып. 7 в виде приложения.

Так, читая «Фейнмановские лекции по физике», вы будете понемногу приобщаться к живой, развивающейся науке.

*Я. Смородинский* Декабрь 1965 г.

P. S. В ноябре 1965 г. Ричард Фейнман вместе с двумя другими физиками-теоретиками (Швингером и Томонага) за работы по квантовой электродинамике получил Нобелевскую премию.

Много лет Ричард П. Фейнман размышляет о таинственных механизмах физического мира и упорно стремится найти порядок в кажущемся хаосе. Последние два года он отдавал свою энергию еще и лекциям для начинающих студентов. Для этих лекций он отобрал самое важное из того, что знал сам, и нарисовал физическую картину Вселен­ной так, что студенты могли надеяться в ней разобраться. В эти лекции он вложил блеск и ясность мысли, оригинальность и живость метода, зарази­тельный энтузиазм рассказчика. Его рассказ доставлял истинную радость слушателям. В основу первого тома легли лекции, прочитанные для студентов первого курса. Во второй том мы включили запись части лекций для [второго курса](#прим1).

Они были прочитаны в течение 1962/63 учебного года. Оставшиеся лекции для второкурсников войдут в [третий том](#прим2).

Лекции для второго курса на две трети были посвящены весьма обстоятельному изучению физики

электричества и магнетизма. При этом преследовалась двоякая цель. Во-первых, мы хотели дать студентам полную картину одного из самых больших разделов физики — от первых, сделанных ощупью шагов Франклина, через великий синтез Максвелла, до лоренцевой электронной теории свойств вещества, включая еще не решенные дилеммы электромагнитной собственной энергии. Во-вторых, мы надеялись ввести с самого начала исчисление векторных полей и дать таким образом солидное введение в математику полевых теорий. Чтоб подчеркнуть общую полезность математических методов, порой родственные вопросы из других областей физики анализировались

одновременно с их электрическими двойниками.

Мы пытались все время внедрять в сознание общность математики («одинаковые уравнения имеют одинаковые решения»). Это подчеркивалось характером упражнений, а потом и экзаменов.

После электромагнетизма две главы посвящены упругости, а две — течению жидкости. В первой главе каждой из этих тем обсуждаются лишь элементарные и практические вопросы, вторые главы посвящены попытке обзора всего сложного круга явлений, к которым ведет рассматриваемая задача. Эти четыре главы, впрочем, можно без особого ущерба опустить, поскольку они вовсе не обязательны для понимания материала.

Примерно вся последняя четверть второго курса была посвя­щена введению в квантовую механику. Она вошла в третий том.

Публикуя запись лекций Фейнмана, мы хотели осуществить нечто большее, нежели просто переложить на бумагу то, что было им сказано устно. Мы хотели, чтобы на бумагу как можно более ясно легли те идеи, на которых основывались лекции. Для некоторых лекций этого удалось добиться, пришлось вне­сти лишь небольшую правку в стенографические записи, дру­гие же потребовали значительной работы и довольно серьезного редактирования. Иногда мы чувствовали, что для большей ясности нужно включить добавочный материал. При этом мы прибегали постоянно к помощи и советам самого Фейнмана.

«Перевод» в столь сжатые сроки свыше миллиона устных слов в связный текст — работа громадная, особенно если к этому еще добавляются другие обязанности, сопровождающие обычно чтение нового курса,— подготовка к опросу, семинары, упраж­нения, экзамены и т. д. Потребовалось множество рук и голов. Я все же надеюсь, что в ряде случаев нам удалось верно отразить фейнмановский оригинал. В других же мы оказались очень далеки от идеала. Нашими успехами мы обязаны всем, кто помогал нам. Мы очень сожалеем о неудачах.

Как мы подробно объясняли в предисловии к первому тому, эти лекции были всего частью программы, которую наметил и за выполнением которой следил Комитет по пересмотру курса (Р. Лейтон — председатель, Г. Неер и М. Сэндс) КАЛТЕХа при финансовой поддержке Фонда Форда. Кроме того, в подготовке текста лекций второго тома участвовали Т. Кохи, М. Клейтон, Д. Курцио, Д. Хартл, Т. Харвей, М. Израэль, В. Карзас, Р. Каванах, Д. Мэтьюс, М. Плессет, Ф. Уоррен, В. Уэйлинг, С. Уилтс и Б. Циммерман. В работе над лекциями помогали Дж. Блю, Дж. Чаплин, М. Клаузер, Р. Доллен, Г. Хилл и А. Тайтл. Мне хотелось бы особо сказать здесь о постоянной по­мощи профессора Нойгебауера. И все же если бы не выдающееся дарование и активность самого Фейнмана, то этот рассказ о физике, который вы сейчас читаете, никогда бы не прозвучал.

***Мэтью Сэндс* Март 1964 г.**

***\* Выпуски 5—7.— Прим. ред.***

***\*\* Выпуски 8 и 9, в них вошли и восемь дополнительных лекций.— Прим. ред.***

# Глава 1

**ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ**

[**§1 .Электричес****к****ие с****илы**](#a1)

[**§2. Электрич****еск****ие и магнитные поля**](#a2)

[**§3. Характ****ерис****т****ик****и векторных полей**](#a3)

[**§4.Законы эле****кт****р****о­****магнетизма**](#a4)

[**§5.Что это** **такое****—** **«****поля»?**](#a5)

[**§6. Элект****ромаг****нет****изм в науке и техн****ике**](#a6)

***Повторить:* гл. 12 (вып. 1) «Харак­теристики силы»**

**§ 1. Электрические силы**

Рассмотрим силу, которая, подобно тяготе­нию, меняется обратно квадрату расстояния, но только в *миллион биллионов биллионов биллионов* раз более сильную. И которая от­личается еще в одном. Пусть существуют два сорта «вещества», которые можно назвать поло­жительным и отрицательным. Пусть одинако­вые сорта отталкиваются, а разные — притя­гиваются в отличие от тяготения, при котором происходит только притяжение. Что же тогда случится?

Все положительное оттолкнется со страш­ной силой и разлетится в разные стороны. Все отрицательное — тоже. Но совсем другое прои­зойдет, если положительное и отрицательное перемешать поровну. Тогда они с огромной силой притянутся друг к другу, и в итоге эти невероятные силы почти нацело сбалансируются, образуя плотные «мелкозернистые» смеси положительного и отрицательного; между двумя грудами таких смесей практически не будет ощущаться ни притяжения, ни отталкивания.

Такая сила существует: это электрическая сила. И все вещество является смесью положи­тельных протонов и отрицательных электронов, притягивающихся и отталкивающихся с неимо­верной силой. Однако баланс между ними столь совершенен, что, когда вы стоите возле кого-нибудь, вы не ощущаете никакого действия этой силы. А если бы баланс нарушился хоть немножко, вы бы это сразу почувствовали. Если бы в вашем теле или в теле вашего соседа (стоящего от вас на расстоянии вытянутой руки) электронов оказалось бы всего на 1% больше, чем протонов, то сила вашего отталкивания была бы невообразимо большой. Насколько большой? Доста­точной, чтобы поднять небоскреб? Больше! Достаточной, чтобы поднять гору Эверест? Больше! Силы отталкивания хватило бы, чтобы поднять «вес», равный весу нашей Земли!

Раз такие огромные силы в этих тонких смесях столь совер­шенно сбалансированы, то нетрудно понять, что вещество, стремясь удержать свои положительные и отрицательные заря­ды в тончайшем равновесии, должно обладать большой жестко­стью и прочностью. Верхушка небоскреба, скажем, отклоняется при порывах ветра лишь на пару метров, потому что электри­ческие силы удерживают каждый электрон и каждый протон более или менее на своих местах. А с другой стороны, если рас­смотреть достаточно малое количество вещества так, чтобы в нем насчитывалось лишь немного атомов, то там необязательно будет равное число положительных и отрицательных зарядов, и могут проявиться большие остаточные электрические силы. Даже если числа тех и других зарядов одинаковы, все равно между соседними областями может действовать значительная электрическая сила. Потому что силы, действующие между отдельными зарядами, изменяются обратно пропорционально квадратам расстояний между ними и может оказаться, что отрицательные заряды одной части вещества ближе к положи­тельным зарядам (другой части), чем к отрицательным. Силы притяжения тогда превзойдут силы отталкивания, и в итоге возникнет притяжение между двумя частями вещества, в кото­рых нет избыточного заряда. Сила, удерживающая атомы, и химические силы, скрепляющие между собой молекулы,— все это силы электрические, действующие там, где число зарядов неодинаково или где промежутки между ними малы.

Вы знаете, конечно, что в атоме имеются положительные протоны в ядре и электроны вне ядра. Вы можете спросить: «Если эти электрические силы так велики, то почему же про­тоны и электроны не налезают друг на друга? Если они стре­мятся образовать тесную компанию, почему бы ей не стать еще теснее?» Ответ связан с квантовыми эффектами. Если попы­таться заключить наши электроны в малый объем, окружающий протон, то, согласно принципу неопределенности, у них должен возникнуть средний квадратичный импульс, тем больший, чем сильнее мы их ограничим. Именно это движение (требуемое законами квантовой механики) мешает электрическому притяжению еще больше сблизить заряды.

Тут возникает другой вопрос: «Что скрепляет ядро?» В ядре имеется несколько протонов, и все они положительно заряжены. Почему же они не разлетаются? Оказывается, что в ядре, помимо электрических сил, еще действуют и неэлектрические силы, называемые *ядерными.* Эти силы более мощные, чем электриче­ские, и они способны, несмотря на электрическое отталкивание,

удержать протоны вместе. Действие ядерных сил, однако, про­стирается недалеко; оно падает гораздо быстрее, чем 1/r2. И это приводит к важному результату. Если в ядре имеется слишком много протонов, то ядро становится чересчур большим и оно уже не может удержаться. Примером может служить уран с его 92 протонами. Ядерные силы действуют в основном между про­тоном (или нейтроном) и его ближайшим соседом, а электриче­ские силы действуют на большие расстояния и вызывают оттал­кивание каждого протона в ядре от всех остальных. Чем больше в ядре протонов, тем сильнее электрическое отталкивание, пока (как у урана) равновесие не станет столь шатким, что ядру почти ничего не стоит разлететься от действия электрического отталкивания. Стоит его чуть-чуть «толкнуть» (например, по­слав внутрь медленный нейтрон) — и оно разваливается надвое, на две положительно заряженные части, разлетающиеся врозь в результате электрического отталкивания. Энергия, которая при этом высвобождается,— это энергия атомной бомбы. Ее обычно именуют «ядерной» энергией, хотя на самом деле это «электрическая» энергия, высвобождаемая, как только электри­ческие силы превзойдут ядерные силы притяжения.

Наконец, можно спросить, чем скрепляется отрицательно заряженный электрон (ведь в нем нет ядерных сил)? Если элек­трон весь состоит из вещества одного сорта, то каждая его часть должна отталкивать остальные. Тогда почему же они не разле­таются в разные стороны? А точно ли существуют у электрона «части»? Может быть, следует считать электрон просто точкой и говорить, что электрические силы действуют только между *разными* точечными зарядами, так что электрон не действует сам на себя? Возможно. Единственно, что можно сейчас сказать,— что вопрос о том, чем скреплен электрон, вызвал много трудно­стей при попытке создать полную теорию электромагнетизма. И ответа на этот вопрос так и не получили. Мы займемся обсуж­дением его немного позже.

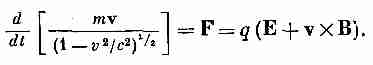
Как мы видели, можно надеяться, что сочетание электриче­ских сил и квантовомеханических эффектов определит структуру больших количеств вещества и, следовательно, их свойства. Одни материалы — твердые, другие — мягкие. Некоторые из них — электрические «проводники», потому что их электроны свободны и могут двигаться; другие — «изоляторы», их элек­троны привязаны каждый к своему атому. Позже мы выясним, откуда появляются такие свойства, но вопрос этот очень сложен, поэтому рассмотрим сначала электрические силы в самых про­стых ситуациях. Начнем с изучения одних только законов эле­ктричества, включив сюда и магнетизм, так как и то и другое в действительности суть явления одной и той же природы.

Мы сказали, что электрические силы, как и силы тяготения, уменьшаются обратно пропорционально квадрату расстояния между зарядами. Это соотношение называется законом Кулона. Однако этот закон перестает выполняться точно, если заряды движутся. Электрические силы зависят также сложным обра­зом и от движения зарядов. Одну из частей силы, действующей между движущимися зарядами, мы называем *магнитной* силой. На самом же деле это только одно из проявлений электрического действия. Потому мы и говорим об «электромагнетизме».

Существует важный общий принцип, позволяющий относи­тельно просто изучать электромагнитные силы. Мы обнаружи­ваем экспериментально, что сила, действующая, на отдельный заряд (независимо от того, сколько там еще есть зарядов или как они движутся), зависит только от положения этого отдель­ного заряда, от его скорости и величины. Силу F, действую­щую на заряд q*,* C:\1\pic\gray.jpgдвижущийся со скоростью v, мы можем на­писать в виде:

(1.1)

здесь Е — *электрическое поле* в точке расположения заряда, а В — *магнитное поле.* Существенно, что электрические силы, действующие со стороны всех прочих зарядов Вселенной, скла­дываются и дают как раз эти два вектора. Значения их зависят от того, *где* находится заряд, и могут меняться со *временем.* Если мы заменим этот заряд другим, то сила, действующая на новый заряд, изменяется точно пропорционально величине заряда, если только все прочие заряды мира не меняют своего движения или положения. (В реальных условиях, конечно, каждый заряд действует на все прочие расположенные по со­седству заряды и может заставить их двигаться, так что иногда при замене одного данного заряда другим поля *могут* изме­ниться.)

Из материала, изложенного в первом томе, мы знаем, как определить движение частицы, если сила, действующая на нее, известна. Уравнение (1.1) в сочетании с уравнением движения дает

(1.2)

Значит, если Е и В известны, то можно определить движение зарядов. Остается только узнать, как получаются Е и В.

Один из самых важных принципов, упрощающих получение величины полей, состоит в следующем. Пусть некоторое коли­чество движущихся каким-то образом зарядов создает поле E1 , a другая совокупность зарядов — поле Е2. Если действуют оба набора зарядов одновременно (сохраняя те же свои положения и движения, какими они обладали, когда рассматривались порознь), то возникающее поле рав­но в точности сумме

Е = Е1 + Е2. (1.3)

Этот факт называется *принципом на­ложения* полей (или *принципом су­перпозиции}.* Он выполняется и для магнитных полей.

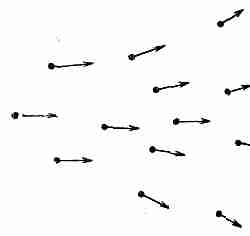
Принцип этот означает, что если нам известен закон для электричес­кого и магнитного полей, образуемых *одиночным* зарядом, движущимся произвольным образом, то, значит, нам известны все законы электроди­намики. Если мы хотим знать силу, действующую на заряд *А,* нам нужно только рассчитать величину полей Е и В, созданных каждым из зарядов *В, С, D* и т. д., и сложить все эти Е и В; тем самым мы найдем поля, а из них — силы, действующие на *А.* Если бы оказалось, что поле, созда­ваемое одиночным зарядом, отлича­ется простотой, то это стало бы са­мым изящным способом описания законов электродинамики. Но мы уже описывали этот закон (см. вып. 3, гл. 28), и, к сожалению, он довольно сложен.



Оказывается, что форма, в которой законы электродинамики становятся простыми, совсем не такая, какой можно было бы ожидать. Она *не* проста, если мы захотим иметь формулу для силы, с которой один заряд действует на другой. Правда, когда заряды покоятся, закон силы — закон Кулона — прост, но когда заряды движутся, соотношения усложняются из-за запа­здывания во времени, влияния ускорения и т. п. В итоге лучше не пытаться строить электродинамику с помощью одних лишь законов сил, действующих между зарядами; гораздо более приемлема другая точка зрения, при которой с законами элек­тродинамики легче управляться.

**§ 2. Электрические и магнитные поля**

Первым делом нужно несколько расширить наши представ­ления об электрическом и магнитном векторах Е и В. Мы опре­делили их через силы, действующие на заряд. Теперь мы наме­реваемся говорить об электрическом и магнитном полях в *точке,* даже если там нет никакого заряда.



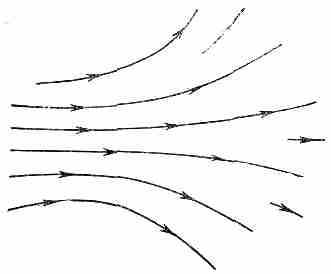
*Фиг. 1.1. Векторное поле, пред­ставленное множеством стрелок, длина и направление которых от­мечают величину векторного поля в тех точках, откуда выходят стрелки.*

Следовательно, мы утверж­даем, что раз на заряд «действуют» силы, то в том месте, где он стоял, остается «нечто» и тогда, когда заряд оттуда убрали. Если заряд, расположенный в точке *(х, у,* z), в момент *t* ощущает действие силы F, согласно уравнению (1.1), то мы связываем векторы Е и В *с точкой (х, у, z)* в пространстве. Можно считать, что Е (х, y, *z, t)* и В *(х, у, z, t)* дают силы, действие которых ощутит в момент *t* заряд, расположенный в *(х, у, z), при условии,* что помещение заряда в этой точке *не потревожит* ни распо­ложения, ни движения всех прочих зарядов, ответственных за поля.

Следуя этому представлению, мы связываем с *каждой* точкой *(х, у, z)* пространства два вектора Е и В, способных меняться со временем. Электрические и магнитные поля тогда рассматри­ваются как *векторные функции* от *х, у, z* и *t.* Поскольку вектор определяется своими компонентами, то каждое из полей Е *(х, у,* 2, *t)* и В *(х, у, z, t)* представляет собой три математиче­ские функции от *х, у, z* и *t.*

Именно потому, что Е (или В) может быть определено для каждой точки пространства, его и называют «полем». Поле — это любая физическая величина, которая в разных точках про­странства принимает различные значения. Скажем, темпера­тура — это поле (в этом случае скалярное), которое можно записать в виде *Т (х, у,* z). Кроме того, температура может ме­няться и во времени, тогда мы скажем, что температурное поле зависит от времени, и напишем *Т (х, у, z, t).* Другим примером поля может служить «поле скоростей» текущей жидкости. Мы записываем скорость жидкости в любой точке пространства в момент *t* в виде v *(х, у, z, t).* Поле это векторное.

Вернемся к электромагнитным полям. Хотя формулы, по которым они создаются зарядами, и сложны, у них есть следую­щее важное свойство: связь между значениями полей в *некото­рой точке* и значениями их в *соседней точке* очень проста. Нескольких таких соотношений (в форме дифференциальных уравнений) достаточно, чтобы полностью описать поля. Именно в такой форме законы электродинамики и выглядят особенно просто.



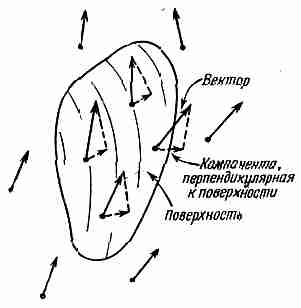
*Фиг. 1.2. Векторное поле, пред­ставленное линиями, касательны­ми к направлению векторного поля в каждой точке.*

*Плотность линий указывает величину вектора поля.*

Немало изобретательности было потрачено на то, чтобы помочь людям мысленно представить поведение полей. И самая правильная точка зрения — это самая отвлеченная: надо про­сто рассматривать поля как математические функции коорди­нат и времени. Можно также попытаться получить мысленную картину поля, начертив во многих точках пространства по век­тору так, чтобы каждый из них показывал напряженность и направление поля в этой точке. Такое представление приво­дится на фиг. 1.1. Можно пойти и дальше: начертить линии, которые в любой точке будут касательными к этим векторам. Они как бы следуют за стрелками я сохраняют направление поля. Если это сделать, то сведения о *длинах* векторов будут утеряны, но их можно сохранить, если в тех местах, где напря­женность поля мала, провести линии пореже, а где велика — погуще. Договоримся, что *число линий на единицу площади,* расположенной поперек линий, будет пропорционально *на­пряженности поля.* Это, конечно, всего лишь приближение; иногда нам придется добавлять новые линии, чтобы их коли­чество отвечало напряженности поля. Поле, изображенное на фиг. 1.1, представлено линиями поля на фиг. 1.2.

**§ 3. Характеристики векторных полей**

Векторные поля обладают двумя математически важными свойствами, которыми мы будем пользоваться при описании законов электричества с полевой точки зрения. Представим себе замкнутую поверхность и зададим вопрос, вытекает ли из нее «нечто», т. е. обладает ли поле свойством «истечения»? Скажем, для поля скоростей мы можем поинтересоваться, всегда ли скорость направлена от поверхности, или, в более общем слу­чае, вытекает ли из поверхности больше жидкости (в единицу времени), нежели втекает.



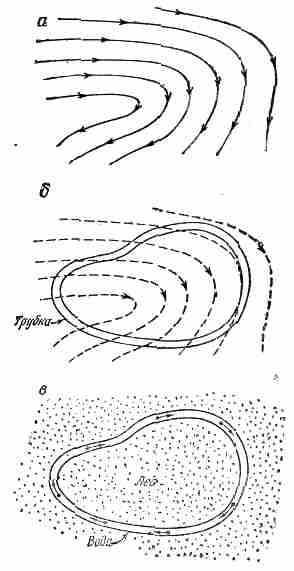
*Фиг. 1.3. Поток векторного поля через поверхность, определяе­мый как произведение среднего зна­чения перпендикулярной состав­ляющей вектора на площадь этой поверхности.*

Общее количество жидкости, выте­кающее через поверхность, мы назовем «потоком скорости» через поверхность за единицу времени. Поток через элемент поверхности равен составляющей скорости, перпендикулярной к элементу, умноженной на его площадь. Для произвольной замкнутой поверхности *суммар­ный поток* равен среднему зна­чению нормальной компоненты скорости (отсчитываемой нару­жу), умноженному на площадь поверхности:

Поток = (Средняя нормальная ком­понента)•(Площадь поверхности).

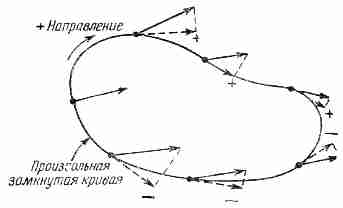
(1.4)

В случае электрического поля можно математически определить понятие, сходное с истоком жидкости; мы тоже



*Фиг. 1.4. Поле скоростей в жид­кости (а).*

*Представьте себе трубку постоянного се­чения, уложенную вдоль произвольной замкнутой кривой* (б). *Если жидкость внезапно заморозить повсюду*, *кроме трубки,* то *жидкость в трубке начнет циркулировать (в).*



*Фиг. 1.5. Циркуляция векторн*ого *поля, равная произведению*

*средней касательной составляющей вектора (с учетом ее знака*

*по отношению к направлению обхода) на длину контура.*

называем его потоком, но, конечно, это уже не течение какой-то жидкости, потому что электрическое поле нельзя считать ско­ростью чего-то. Оказывается все же, что математическая вели­чина, определяемая как средняя нормальная компонента поля, по-прежнему имеет полезное значение. Тогда мы говорим о *потоке электричества,* также определяемом уравнением (1.4). Наконец, полезно говорить и о потоке не только сквозь замкну­тую, но и сквозь любую ограниченную поверхность. Как и прежде, поток сквозь такую поверхность определяется как средняя нормальная компонента вектора, умноженная на пло­щадь поверхности. Эти представления иллюстрируются фиг. 1.3. Другое свойство векторных полей касается не столько по­верхностей, сколько линий. Представим опять поле скоростей, описывающее поток жидкости. Можно задать интересный вопрос: циркулирует ли жидкость? Это значит: существует ли вращательное ее движение вдоль некоторого замкнутого кон­тура (петли)? Вообразите себе, что мы мгновенно заморозили жидкость повсюду, за исключением внутренней части замкну­той в виде петли трубки постоянного сечения (фиг. 1.4). Снаружи трубки жидкость остановится, но внутри она может продолжать двигаться, если в ней (в жидкости) сохранился импульс, т. е. если импульс, который гонит ее в одном направлении, больше импульса в обратном. Мы определяем величину, называемую *циркуляцией,* как скорость жидкости в трубке, умноженную на длину трубки. Опять-таки мы можем расширить наши пред­ставления и определить «циркуляцию» для любого векторного поля (даже если там нет ничего движущегося). У всякого век­торного поля *циркуляция по любому воображаемому замкнутому контуру* определяется как средняя касательная компонента вектора (с учетом направления обхода), умноженная на про­тяженность контура (фиг. 1.5):

Циркуляция = (Средняя касательная компонента)•(Длина пути обхода). (1.5)

Вы видите, что это определение действительно дает число, про­порциональное циркуляции скорости в трубке, просверленной в быстрозамороженной жидкости.

Пользуясь только этими двумя понятиями — понятием о потоке и понятием о циркуляции,— мы способны описать все законы электричества и магнетизма. Вам, быть может, трудно будет отчетливо понять значение законов, но они дадут вам некоторое представление о том, каким способом в конечном счете может быть описана физика электромагнитных явлений.

**§ 4. Законы электромагнетизма**

Первый закон электромагнетизма описывает поток электри­ческого поля:

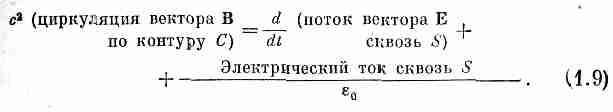
C:\1\pic\gray.jpg

где ε0 — некоторая постоянная (читается эпсилон-нуль). Если внутри поверхности нет зарядов, а вне ее (даже совсем рядом) есть, то все равно *средняя* нормальная компонента Е равна нулю, так что никакого потока через поверхность нет. Чтобы показать пользу от такого типа утверждений, мы дока­жем, что уравнение (1.6) совпадает с законом Кулона, если только учесть, что поле отдельного заряда обязано быть сфери­чески симметричным. Проведем вокруг точечного заряда сферу. Тогда средняя нормальная компонента в точности равна значе­нию Е в любой точке, потому что поле должно быть направлено по радиусу и иметь одну и ту же величину во всех точках сферы. Тогда наше правило утверждает, что поле на поверхности сферы, умноженное на площадь сферы (т. е. вытекающий из сферы поток), пропорционально заряду внутри нее. Если увеличивать радиус сферы, то ее площадь растет, как квадрат радиуса. Произведение средней нормальной компоненты электрического поля на эту площадь должно по-прежнему быть равно внутрен­нему заряду, значит, поле должно убывать, как квадрат рас­стояния; так получается поле «обратных квадратов».

C:\1\pic\gray.jpgЕсли взять в пространстве произвольную кривую и измерить циркуляцию электрического поля вдоль этой кривой, то ока­жется, что она в общем случае не равна нулю (хотя в кулоновом поле это так). Вместо этого для электричества справедлив вто­рой закон, утверждающий, что

C:\1\pic\gray.jpgИ, наконец, формулировка законов электромагнитного поля будет закончена, если написать два соответствующих уравнения для магнитного поля В:

(1.8)

А для поверхности *S,* ограниченной кривой *С:*

Появившаяся в уравнении (1.9) постоянная с2 — это квадрат скорости света. Ее появление оправдано тем, что магнетизм по существу есть релятивистское проявление электричества. А константа εо поставлена для того, чтобы возникли привычные единицы силы электрического тока.

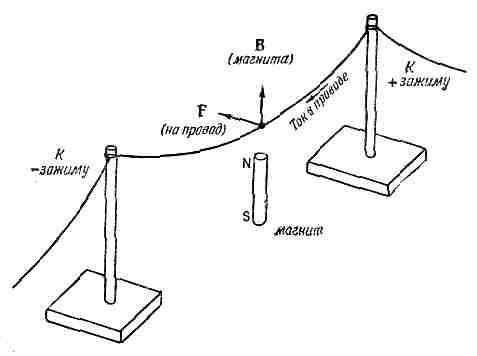
Уравнения (1.6) — (1.9), а также уравнение (1.1) — это все законы электродинамики.

[Как вы помните, законы Нь](#прим1)[ю­тона написать было о](#прим1)[чень просто](#прим1), но из них зато вытекало мно­жество сложных следствий, так что понадобилось немало времени, чтобы изучить их все. Законы электромагнетизма написать несравненно трудней, и мы должны ожидать, что следствия из них будут намного более запутаны, и теперь нам придется очень долго в них разбираться.

Мы можем проиллюстрировать некоторые законы электро­динамики серией несложных опытов, которые смогут нам пока­зать хотя бы качественно взаимоотношения электрического и магнитного полей. С первым членом в уравнении (1.1) вы зна­комитесь, расчесывая себе волосы, так что о нем мы говорить не будем. Второй член в уравнении (1.1) можно продемонстриро­вать, пропустив ток по проволоке, висящей над магнитным бруском, как показано на фиг. 1.6. При включении тока про­волока сдвигается из-за того, что на нее действует сила F=qvXB. Когда по проводу идет ток, заряды внутри него движутся, т. е. имеют скорость v, и на них действует магнит­ное поле магнита, в результате чего провод отходит в сторону.

Когда провод сдвигается влево, можно ожидать, что сам магнит испытает толчок вправо. (Иначе все это устройство можно было бы водрузить на платформу и получить реактивную систему, в которой импульс не сохранялся бы!) Хотя сила чересчур мала, чтобы можно было заметить движение магнитной палочки, однако движение более чувствительного устройства, скажем стрелки компаса, вполне заметно.

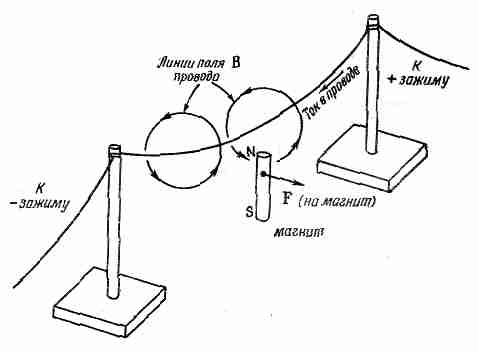
Каким же образом ток в проводе толкает магнит? Ток, теку­щий по проводу, создает вокруг него свое собственное магнит­ное поле, которое и действует на магнит. В соответствии с по­следним членом в уравнении (1.9) ток должен приводить к *цир­куляции* вектора В; в нашем случае линии поля В замкнуты вокруг провода, как показано на фиг. 1.7. Именно это поле В и ответственно за силу, действующую на магнит.



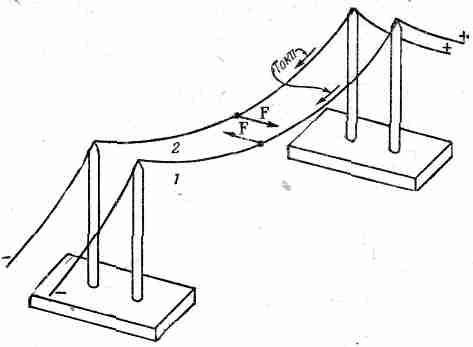
*Фиг.**1.6.**Магнитная палочка, создающая возле провода поле* В.

*Когда по проводу идет ток, провод смещается из-за действия силы F = q*vXB.

Уравнение (1.9) сообщает нам, что при данной величине тока, текущего по проводу, циркуляция поля В одинакова для *любой* кривой, окружающей провод. У тех кривых (окружно­стей, например), которые лежат далеко от провода, длина ока­зывается больше, так что касательная компонента В должна убывать. Вы видите, что следует ожидать линейного убывания В с удалением от длинного прямого провода.

Мы сказали, что ток, текущий по проводу, образует вокруг него магнитное поле и что если имеется магнитное поле, то оно действует с некоторой силой на провод, по которому идет ток.

*Фиг.**1.7. Магнитное поле тока, текущего по про­воду, действует на магнит с некоторой силой.*



*Фиг. 1.8. Два провода, по которым течет ток,*

*тоже действуют друг на друга с определенной силой.*

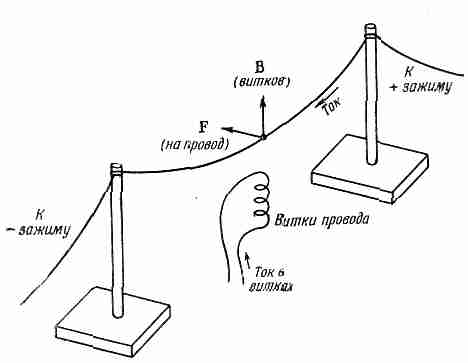
Значит, следует думать, что если магнитное поле будет создано током, текущим в одном проводе, то оно будет действовать с не­которой силой и на другой провод, по которому тоже идет ток. Это можно показать, применив два свободно подвешенных про­вода (фиг. 1.8). Когда направление токов одинаково, провода притягиваются, а когда направления противоположны — от­талкиваются.

Короче говоря, электрические токи, как и магниты, создают магнитные поля. Но тогда что же такое магнит? Раз магнитные поля создаются движущимися зарядами, то не может ли ока­заться, что магнитное поле, созданное куском железа, на самом деле есть результат действия токов? Видимо, так оно и есть. В наших опытах можно заменить магнитную палочку катушкой с навитой проволокой, как показано на фиг. 1.9. Когда ток проходит по катушке (как и по прямому проводу над нею), наблюдается точно такое же движение проводника, как и преж­де, когда вместо катушки стоял магнит. Все выглядит так, как если бы внутри куска железа непрерывно циркулировал ток. Действительно, свойства магнитов можно понять как непре­рывный ток внутри атомов железа. Сила, действующая на маг­нит на фиг. 1.7, объясняется вторым членом в уравнении (1.1).

Откуда же берутся эти токи? Один источник — это движе­ние электронов по атомным орбитам. У железа это не так, но у некоторых материалов происхождение магнетизма именно таково. Кроме вращения вокруг ядра атома, электрон вращается еще вокруг своей собственной оси (что-то похожее на вращение Земли); вот от этого-то вращения и возникает ток, создающий магнитное поле железа. (Мы сказали «что-то похожее на вра­щение Земли», потому что на самом деле в квантовой механике вопрос столь глубок, что не укладывается достаточно хорошо в классические представления.) В большинстве веществ часть электронов вертится в одну сторону, другая — в другую, так что магнетизм исчезает, а в железе (по таинственной причине, о которой мы поговорим позже) многие электроны вращаются так, что их оси смотрят в одну сторону и это служит источником магнетизма.

Поскольку поля магнитов порождаются токами, то в урав­нения (1.8) и (1.9) нет нужды вставлять добавочные члены, учитывающие существование магнитов. В этих уравнениях речь идет обо *всех* токах, включая круговые токи от вращающихся электронов, и закон оказывается правильным. Надо еще отме­тить, что, согласно уравнению (1.8), магнитных зарядов, по­добных электрическим зарядам, стоящим в правой части урав­нения (1.6), не существует. Они никогда не были обнаружены.

Первый член в правой части уравнения (1.9) был открыт Максвеллом теоретически; он очень важен. Он говорит, что изменение *электрических* полей вызывает магнитные явления. На самом деле без этого члена уравнение утеряло бы смысл, ведь без него исчезли бы токи в незамкнутых контурах. А на деле такие токи существуют; об этом говорит следующий при­мер. Представьте конденсатор, составленный из двух плоских пластин.

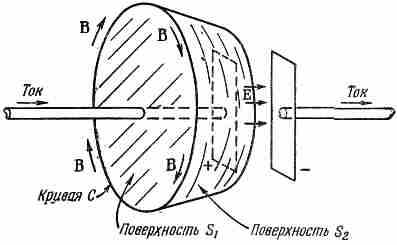


*Фиг. 1.9. Магнитная палочка, показанная на фиг. 1.6,*

*может быть заменена катушкой, по которой течет*

*ток.*

*На провод по-прежнему будет действовать сила.*



*Фиг. 1.10. Циркуляция поля В по кривой С опре­деляется либо током, текущим сквозь поверх­ность S1 либо быстро­той изменения потока, поля Е сквозь поверх­ность S2.*

Он заряжается током, притекающим к одной из пла­стин и оттекающим от другой, как показано на фиг. 1.10. Про­ведем вокруг одного из проводов кривую *С* и натянем на нее поверхность (поверхность *S1,* которая пересечет провод. В со­ответствии с уравнением (1.9) циркуляция поля В по кривой *С* дается величиной тока в проводе (умноженной на *с2).* Но что будет, если мы натянем на кривую *другую* поверхность S2 в форме чашки, донышко которой расположено между пласти­нами конденсатора и не касается провода? Через такую поверх­ность никакой ток, конечно, не проходит. Но ведь простое изме­нение положения и формы воображаемой поверхности не должно изменять реального магнитного поля! Циркуляция поля В должна остаться прежней. И действительно, первый член в пра­вой части уравнения (1.9) так комбинируется со вторым членом, что для обеих поверхностей S1 и S2возникает одинаковый эффект. Для *S2* циркуляция вектора В выражается через сте­пень изменения потока вектора Е от одной пластины к другой. И получается, что изменение Е связано с током как раз так, что уравнение (1.9) оказывается выполненным. Максвелл видел необходимость этого и был первым, кто написал полное урав­нение.

С помощью устройства, изображенного на фиг. 1.6, можно продемонстрировать другой закон электромагнетизма. Отсо­единим концы висящей проволочки от батарейки и присоединим их к гальванометру — прибору, регистрирующему прохожде­ние тока по проводу. Стоит лишь в поле магнита *качнуть* про­волоку, как по ней сразу пойдет ток. Это новое следствие урав­нения (1.1): электроны в проводе почувствуют действие силы F=qvXB. Скорость их сейчас направлена в сторону, потому что они отклоняются вместе с проволочкой. Это v вместе с вер­тикально направленным полем В магнита приводит к силе, действующей на электроны *вдоль* провода, и электроны отправ­ляются к гальванометру.

Положим, однако, что мы оставили проволочку в покое и принялись перемещать магнит. Мы чувствуем, что никакой разницы быть не должно, ведь относительное движение то же самое, и впрямь ток по гальванометру идет. Но как же магнит­ное поле действует на покоящиеся заряды? В соответствии с уравнением (1.1) должно возникнуть электрическое поле. Движущийся магнит должен создавать электрическое поле. На вопрос — как это происходит, отвечает количественно уравнение (1.7). Это уравнение описывает множество практи­чески очень важных явлений, происходящих в электрических генераторах и трансформаторах.

Наиболее замечательное следствие наших уравнений — это то, что, сочетая уравнения (1.7) и (1.9), можно понять, отчего электромагнитные явления распространяются на дальние рас­стояния. Причина этого, грубо говоря, примерно такова: пред­положим, что где-то имеется магнитное поле, которое возрас­тает по величине, скажем, оттого, что внезапно пустили ток по проводу. Тогда из уравнения (1.7) следует, что должна воз­никнуть циркуляция электрического поля. Когда электриче­ское поле начинает постепенно возрастать для возникновения циркуляции, тогда, согласно уравнению (1.9), должна возни­кать и магнитная циркуляция. Но возрастание *этого* магнит­ного поля создаст новую циркуляцию электрического поля и т. д. Таким способом поля распространяются сквозь простран­ство, не нуждаясь ни в зарядах, ни в токах нигде, кроме источ­ника полей. Именно таким способом мы *видим* друг друга! Все это спрятано в уравнениях электромагнитного поля.

**§ 5. Что это такое — «п****оля»?**

Сделаем теперь несколько замечаний о принятом нами спо­собе рассмотрения этого вопроса. Вы можете сказать: «Все эти потоки и циркуляции чересчур абстрактны. Пусть в каждой точке пространства есть электрическое поле, кроме того, имеют­ся эти самые „законы". Но что же там *на самом деле* происходит? Почему вы не можете объяснять все это, скажем, тем, что что-то, что бы это ни было, протекает между зарядами?» Все зависит от ваших предрассудков. Многие физики часто говорят, что пря­мое действие сквозь пустоту, сквозь ничто, немыслимо. (Как они могут называть идею немыслимой, если она уже вымыш­лена?) Они говорят: «Посмотрите, ведь единственные силы, которые нам известны,— это прямое действие одной части ве­щества на другую. Невозможно, чтобы существовала сила без чего-то, передающего ее». Но что в действительности происхо­дит, когда мы изучаем «прямое действие» одного куска вещества на другой? Мы обнаруживаем, что первый из них вовсе не «упирается» во второй; они слегка отстоят друг от друга, и между ними существуют электрические силы, действующие в малом масштабе. Иначе говоря, мы обнаруживаем, что собрались объяснить так называемое «действие посредством прямого кон­такта» — при помощи картины электрических сил. Конечно, неразумно пытаться стоять на том, что электрическая сила должна выглядеть так же, как старый привычный мышечный тяни-толкай, если все равно оказывается, что все наши по­пытки тянуть или толкать приводят к электрическим силам! Единственно разумная постановка вопроса — спросить, какой путь рассмотрения электрических эффектов *наиболее удобен.* Одни предпочитают представлять их как взаимодействие заря­дов на расстоянии и пользоваться сложным законом. Другим по душе силовые линии. Они их все время чертят, и им кажется, что писать разные Е и В слишком абстрактно. Но линии поля — это всего лишь грубый способ описания поля, и очень трудно сформулировать строгие, количественные законы не­посредственно в терминах линий поля. К тому же понятие о линиях поля не содержит глубочайшего из принципов элек­тродинамики — принципа суперпозиции. Даже если мы знаем, как выглядят силовые линии одной совокупности зарядов, затем другой совокупности, мы все равно не получим никакого представления о картине силовых линий, когда обе совокуп­ности зарядов действуют вместе. А с математических позиций наложение проделать легко, надо просто сложить два вектора. У силовых линий есть свои достоинства, они дают наглядную картину, но есть у них и свои недостатки. Способ рассуждений, основанный на понятии о непосредственном взаимодействии (близкодействии), тоже обладает большими преимуществами, пока речь идет о покоящихся электрических зарядах, но обла­дает и большими недостатками, если иметь дело с быстрым дви­жением зарядов.

Лучше всего пользоваться абстрактным представлением о поле. Жаль, конечно, что оно абстрактно, но ничего не поде­лаешь. Попытки представить электрическое поле как движение каких-то зубчатых колесиков или с помощью силовых линий или как напряжения в каких-то материалах потребовали от физиков больше усилий, чем понадобилось бы для того, чтобы просто получить правильные ответы на задачи электродина­мики. Интересно, что правильные уравнения поведения света в кристаллах были выведены Мак-Куллохом еще в 1843 г. Но все ему говорили: «Позвольте, ведь нет же ни одного реального материала, механические свойства которого могли бы удовлет­ворить этим уравнениям, а поскольку свет — это колебания, которые должны происходить в *чем-то,* постольку мы не можем поверить этим абстрактным уравнениям». Если бы у его совре­менников не было этой предвзятости, они бы поверили в пра­вильные уравнения поведения света в кристаллах намного раньше того, чем это на самом деле случилось.

А что касается магнитных полей, то можно высказать следующее замечание. Предположим, что вам, в конце концов, удалось нарисовать картину магнитного поля при помощи каких-то линий или каких-то шестеренок, катящихся сквозь простран­ство. Тогда вы попытаетесь объяснить, что происходит с двумя зарядами, движущимися в пространстве параллельно друг другу и с одинаковыми скоростями. Раз они движутся, то они ведут себя как два тока и обладают связанным с ними магнитным по­лем (как токи в проводах на фиг. 1.8). Но наблюдатель, который мчится вровень с этими двумя зарядами, будет считать их неподвижными и скажет, что *никакого* магнитного поля там нет. И «шестеренки», и «линии» пропадают, когда вы мчитесь рядом с предметом! Все, чего вы добились,— это изобрели *новую* проблему. Куда могли деваться эти шестерни?! Если вы чертили силовые линии — у вас появится та же забота. Не только нельзя определить, движутся ли эти линии вместе с за­рядами или не движутся, но и вообще они могут полностью исчезнуть в какой-то системе координат.

Мы бы еще хотели подчеркнуть, что явление магнетизма — это на самом деле чисто релятивистский эффект. В только что рассмотренном случае двух зарядов, движущихся параллельно друг другу, можно было бы ожидать, что понадобится сделать релятивистские поправки к их движению порядка *v2/c2.* Эти поправки должны отвечать магнитной силе. Но как быть с силой взаимодействия двух проводников в нашем опыте (фиг. 1.8)? Ведь там магнитная сила — это *вся* действующая сила. Она не очень-то смахивает на «релятивистскую поправку». Кроме того, если оценить скорости электронов в проводе (вы сами можете это проделать), то вы получите, что их средняя скорость вдоль провода составляет около 0,01 *см/сек.* Итак, v2/с2 равно при­мерно 10-25. Вполне пренебрежимая «поправка». Но нет! Хоть в этом случае магнитная сила и составляет 10-25 от «нормаль­ной» электрической силы, действующей между движущимися электронами, вспомните, что «нормальные» электрические силы исчезли в результате почти идеального баланса из-за того, что количества протонов и электронов в проводах одинаковы. Этот баланс намного более точен, чем 1/1025, и тот малый реля­тивистский член, который мы называем магнитной силой,— это единственный остающийся член. Он становится преобладаю­щим.

Почти полное взаимное уничтожение электрических эффек­тов и позволило физикам изучить релятивистские эффекты (т. е. магнетизм) и открыть правильные уравнения (с точно­стью до v2/с2), даже не зная, что в них происходит. И по этой-то причине после открытия принципа относительности законы электромагнетизма не пришлось менять. В отличие от механи­ки они уже были правильны с точностью до v2/с2.

**§ 6. Электромагнетизм в науке и технике**

В заключение мне хочется закончить эту главу следующим рассказом. Среди многих явлений, изучавшихся древними грека­ми, были два очень странных. Первое: натертый кусочек янта­ря мог поднять маленькие клочки папируса, и второе: близ го­рода Магнезия были удивительные камни, которые притягивали железо. Странно думать, что это были единственные известные грекам явления, в которых проявлялись электричество и магне­тизм. А почему только это и было им известно, объясняется прежде всего сказочной точностью, с которой сбалансированы в телах заряды (о чем мы уже упоминали). Ученые, жившие в позднейшие времена, раскрыли одно за другим новые явления, в которых выражались некоторые стороны тех же эффектов, связанных с янтарем и с магнитным камнем. Сейчас нам ясно, что и явления химического взаимодействия и, в конечном счете, саму жизнь нужно объяснять с помощью понятий элек­тромагнетизма.

И по мере того как развивалось понимание предмета элек­тромагнетизма, появлялись такие технические возможности, о которых древние не могли даже мечтать: стало возможным посылать сигналы по телеграфу на большие расстояния, бесе­довать с человеком, который находится за много километров от вас, без помощи какой-либо линии связи, включать огромные энергетические системы — большие водяные турбины, соеди­ненные многосоткилометровыми линиями проводов с другой машиной, которую пускает в ход один рабочий простым поворо­том колеса; многие тысячи разветвляющихся проводов и десятки тысяч машин в тысячах мест приводят в движение различные механизмы на фабриках и в квартирах. Все это вращается, двигается, работает благодаря нашему знанию законов электро­магнетизма.

Сегодня мы используем и еще более тонкие эффекты. Гигант­ские электрические силы можно сделать очень точными, их можно контролировать и использовать на всякий лад. Наши приборы так чувствительны, что мы способны узнать, что сей­час делает человек только по тому, как он воздействует на электроны, заключенные в тонком металлическом прутике за сотни километров от него. Для этого только нужно приспосо­бить этот прутик в качестве телевизионной антенны!

В истории человечества (если посмотреть на нее, скажем, через десять тысяч лет) самым значительным событием XIX столетия, несомненно, будет открытие Максвеллом законов электроди­намики. На фоне этого важного научного открытия граждан­ская война в Америке в том же десятилетии будет выглядеть мелким провинциальным происшествием.

***\* Нужно только договориться о выборе знака циркуляции.***

***Глава 2***

# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

[**§1, Пониман****ие физики**](#a1)

[**§2.Скаляр****ные и векторные поля — Т и h**](#a2)

[**§3. Производ****ные нолей —градиент**](#a3)

[**§4.0пера****тор ∇**](#a4)

[**§5.Оверац****ии с ∇**](#a5)

[**§6. Дифференци****альное уравнение потока тепла**](#a6)

[**§7.Вторые пр****оизводные векторных полей**](#a7)

[**§8.Под****вохи**](#a8)

**Повторить гл.1 (вып. 1) «Векторы»**

**§ 1. Понимание физики**

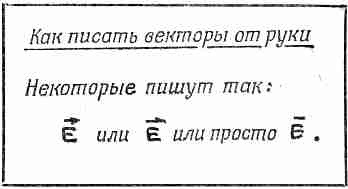
Физик должен обладать умением подходить к задаче с разных точек зрения. Точный анализ реальных физических проблем обычно крайне сложен, и любое конкретное физическое явле­ние может оказаться слишком запутанным и не поддающимся анализу путем решения дифферен­циальных уравнений. Но можно все же полу­чить хорошее представление о поведении си­стемы, выработав в себе особую способность чувствовать характер решения в различных обстоятельствах. Этой цели хорошо служат представления о линиях поля, о емкостном, индуктивном и активном сопротивлениях. Мы потратим достаточно много времени на их изу­чение. Это поможет нам приобрести способ­ность ощущать, что происходит в тех или иных электромагнитных явлениях. С другой сторо­ны, ни одна из вспомогательных, эвристиче­ских моделей (например, картина силовых линий) на самом деле не может вместить в себя адекватно и точно все события. Имеется лишь один точный способ представления законов — способ дифференциальных уравнений. Урав­нения обладают тем преимуществом, что, во-первых, они фундаментальны, а

во-вторых (насколько нам известно), точны. Если вы их выучили, вы всегда можете к ним вернуться. В них нет ничего, что следовало бы потом за­быть.

Чтобы начать понимать, что должно про­изойти в тех или иных условиях, вам понадо­бится какое-то время. Вам придется порешать уравнения, и всякий раз, когда вы решите их, вы тем самым узнаете что-то новое о характере решений. Чтобы запомнить эти решения, полезно также сформулировать их смысл на языке линий поля и иных подобных понятий. Таков путь, на котором приходит истинное «понимание» уравнений. В этом и заключается раз­ница между физикой и математикой. Математики или люди с математическим складом ума часто при «изучении» физики теряют физику из виду и впадают в заблуждение. Они говорят: «Послушайте, эти дифференциальные уравнения — уравнения Максвелла — ведь это все, что есть в электродинамике; ведь сами физики признают, что нет ничего, что бы не содержалось в этих уравнениях. Уравнения эти сложны; ладно, но это всего лишь математические уравнения, и если я разберусь в них ма­тематически, я разберусь и в физике». Но ничего из этого не выходит. Математики, которые подходят к физике с этой точки зрения (а таких очень много), обычно не делают большого вкла­да в физику, да, кстати, и в математику. Их постигает неудача оттого, что настоящие физические ситуации реального мира так запутаны, что нужно обладать гораздо более широким понима­нием уравнений.

Дирак объяснил, что значит действительно понять уравне­ние — понять, не ограничиваясь его строгим математическим смыслом. Он сказал: «Я считаю, что понял смысл уравнения, если в состоянии представить себе общий вид его решения, не решая его непосредственно». Значит, если у нас есть способ узнать, что случится в данных условиях, не решая уравнения непосредственно, мы «понимаем» уравнения в применении к этим условиям. Физическое понимание — это нечто неточное, неопределенное и абсолютно нематематическое, но для физика оно совершенно необходимо.

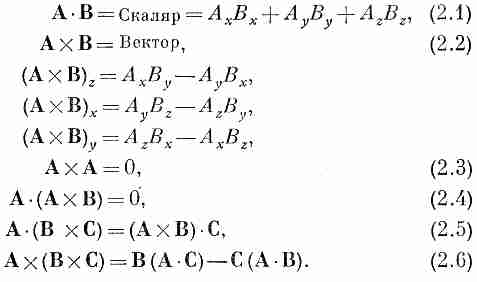
Обычно курс физики подобного рода строится так, что физи­ческие представления развиваются постепенно: начиная с са­мых простейших явлений, переходят ко все более и более слож­ным. Кое-что из изученного при этом неминуемо забывается (то, что верно лишь в определенных условиях, а не всегда). К примеру, «закон» обратных квадратов для электрической силы верен *не всегда.* Нам больше по душе обратный подход. Луч­ше начать *с полных, самых общих* законов, а затем повер­нуть вспять и применять их к простым задачам, развивая фи­зические представления по мере продвижения вперед. Так мы и собираемся сделать.

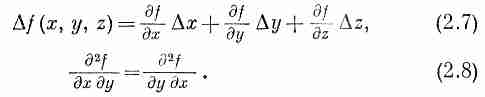
Наш подход совершенно противоположен подходу истори­ческому, когда изложение слепо следует за экспериментами, в которых впервые была получена нужная информация. Но ведь физику развивают множество очень умных людей уже свыше 200 лет, а у нас времени мало и нам нужно овладеть зна­ниями побыстрее. Поэтому мы не можем охватить все, что они сделали. Так что в этих лекциях мы будем вынуждены прене­бречь историей предмета и не будем рассказывать об опытах. Мы надеемся, что вы восполните пропущенное на лабораторных занятиях; и, конечно, очень полезно почитать статьи и книги по истории физики.

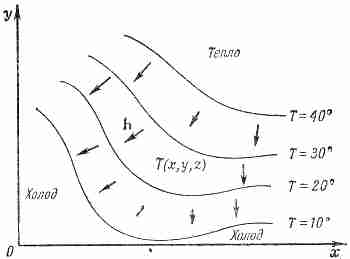
**§ 2. Скалярные и векторные поля — Т и h**

Мы начинаем сейчас рассмотрение абстрактного, математи­ческого подхода к теории электричества и магнетизма. Наша цель — объяснить смысл законов, написанных в гл. 1. Но для этого надо сперва объяснить новые особенные обозначения, которые мы хотим использовать. Давайте поэтому на время позабудем электромагнетизм и разберемся в математике век­торных полей. Она очень важна не только в электромагнетизме, но и во многих физических обстоятельствах, подобно тому как обычное дифференциальное и интегральное исчисление важно во всех областях физики. Мы переходим к дифференциальному исчислению векторов.

Ниже перечислены некоторые сведения из алгебры векторов. Считается, что вы с ними уже знакомы



Мы будем также пользоваться следующими двумя равенствами:



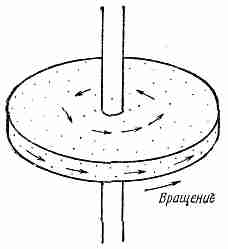
*Фиг. 2.1. Температура Т — пример скалярного поля. С каждой точкой (х, у, z) в прост­ранстве связывается число* Т(х, *у, z*). *Все точки на поверхности с помет­кой Т=20° (изображенной в виде кривой при* z=0) *имеют одну и ту же температуру. Стрелки — это примеры вектора потока тепла* h.

Уравнение (2.7) справедливо, конечно, только при Δx; Δy и Δz→0.

Простейшее из физических полей — скалярное. Полем, как вы помните, называется величина, зависящая от положения в пространстве. *Скалярное поле —* это просто такое поле, кото­рое в каждой точке характеризуется одним-единственным чис­лом — скаляром. Это число, конечно, может меняться во вре­мени, но пока мы на это не будем обращать внимания. (Речь будет идти о том, как поле выглядит в данное мгновение.) В ка­честве примера скалярного поля рассмотрим брусок из какого-то материала. В одних местах брусок нагрет, в других — осту­жен, так что его температура меняется ют точки к точке каким-то сложным образом. Температура тогда будет функцией *х, у* и z — положения в пространстве, измеренного в прямоугольной си­стеме координат. Температура — это скалярное поле.

Один способ представить себе скалярное поле — это вообра­зить «контуры»,

т. е. мысленные поверхности, проведенные через точки с одинаковыми значениями поля, подобно гори­зонталям на картах, соединяющим точки на одной высоте над уровнем моря. Для температурного поля контуры носят назва­ние «изотермические поверхности», или изотермы. На фиг. 2.1 показано температурное поле и зависимость *Т от х и у* при z=0. Проведено несколько изотерм.

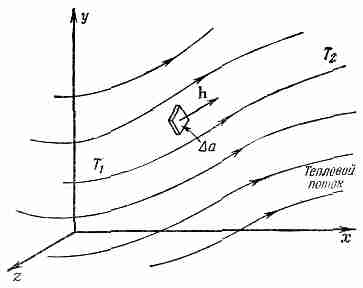
Поля бывают также векторными. Идея их очень проста. В каждой точке пространства задается вектор. Он меняется от точки к точке. Рассмотрим в виде примера вращающееся тело. Скорость материала тела во всякой точке — это вектор, кото­рый является функцией ее положения (фиг. 2.2). Другой при­мер — поток тепла в бруске из некоторого материала. Если в одной части бруска температура выше, а в другой — ниже, то от горячей части к холодной будет идти поток тепла. Тепло в разных частях бруска будет растекаться в различных направ­лениях. Поток тепла — это величина, имеющая направление;

*Фиг. 2.2. Скорости атомов во* *вращающемся теле — пример век­торного поля.*

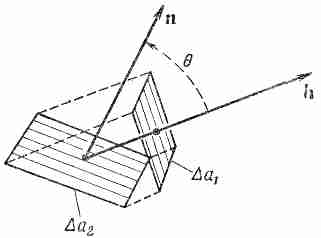
обозначим ее h; длина этого вектора пусть измеряет количество протекающего тепла. Векторы потока тепла также изображены на фиг. 2.1.

C:\1\pic\gray.jpgОпределим теперь h более точно. Длина вектора потока тепла в данной точке — это количество тепловой энергии, про­ходящее за единицу времени и в пересчете на единицу площади сквозь бесконечно малый элемент поверхности, перпендикуляр­ный к направлению потока. Вектор указывает направление потока (фиг. 2.3). В буквенных обозначениях: если ΔJ — теп­ловая энергия, протекающая за единицу времени сквозь эле­мент поверхности Δа, то

(2.9)

где еf — *единичный вектор* направления потока Вектор h можно определить и иначе — через его компонен­ты. Зададим себе вопрос, сколько тепла протекает через малую поверхность под *произвольным* углом к направлению потока. На фиг. 2.4 мы изобразили малую поверхность Аa2 под некото­рым углом к поверхности Δat, которая перпендикулярна к по­току. *Единичный вектор n* перпендикулярен к поверхности

*Фиг.**2.3.**Тепловой поток*— *векторное поле. Вектор* ***h*** *указывает направление потока. Абсолютная величина его выражает энергию, переносимую за единицу времени через элемент по­верхности, ориентированный попе­рек потока, деленную на площадь элемента поверхности.*



*Фиг. 2.4. Тепловые потоки сквозь* Aа2 и *сквозь* Aa1 *одинаковы.*

C:\1\pic\gray.jpgAа2. Угол θ между **n** и **h** равен углу между поверхностями (так как **h** — нормаль к Δa1). Чему теперь равен поток тепла че­рез Δа2 *на единицу площади?* Потоки сквозь Δа2 и Δа1 равны между собой, отличаются только площади. Действительно, Δа1 = Δа2cosθ. Поток тепла через Δа2 равен

(2.10)

Поясним это уравнение: поток тепла (в единицу времени и на единицу площади) через *произвольный* элемент поверхности с единичной нормалью n равен h•n. Можно еще сказать так: компонента потока тепла, перпендикулярная к элементу по­верхности Δа2, равна h•n. Можно, если мы хотим, считать эти утверждения *определением* **h**. Сходные идеи мы применим и к другим векторным полям.

**§ 3. Производные полей — градиент**

Когда поля меняются со временем, то их изменение можно описать, задав их производные по *t.* Мы хотим также описать и их изменение в пространстве, потому что мы интересуемся связью, скажем, между температурой в некоторой точке и в точке с ней рядом. Как же задать производную температуры по координате? Дифференцировать температуру по *х?* Или по *у,* или по z?

Осмысленные физические законы не зависят от ориентации системы координат. Поэтому их нужно писать так, чтобы по обе стороны знака равенства стояли скаляры или векторы. Что же такое производная скалярного поля, скажем, *дТ/дх?* Скаляр ли это, или вектор, или еще что? Это, как легко понять, ни то ни другое, потому что если взять другую ось *х,* то *дТ/дх* изменится. Но заметьте: у нас есть три возможных производ­ных: *дТ/дх, дТ/ду* и *dT/dz.* Три сорта производных, а ведь мы знаем, что нужно как раз три числа, чтобы образовать вектор.

C:\1\pic\gray.jpgМожет быть, эти три производные и представляют собой ком­поненты вектора:

(2.11)

Ясно, конечно, что, вообще говоря, не из *любых* трех чисел можно составить вектор. О векторе можно говорить только тогда, когда при повороте системы координат компоненты пре­образуются по правильному закону. Так что следует просле­дить, как меняются эти производные при повороте системы координат. Мы покажем, что (2.11) — действительно вектор. Производные действительно преобразуются при вращении си­стемы координат так, как полагается.

C:\1\pic\gray.jpgВ этом можно убедиться по-разному. Можно, например, задать себе вопрос, ответ на который не должен зависеть от системы координат, и попытаться выразить ответ в «инвариант­ной» форме. К примеру, если S=A•B и если А и В — векторы, то мы знаем (это доказано в вып. 1, гл. 11), что *S —* скаляр. Мы *знаем,* что *S —* скаляр, не проверяя, меняется ли он при изменении системы координат. Ему *ничего иного не остается,* раз он является скалярным произведением двух векторов. По­добным же образом, если мы *знаем,* что А — вектор, и у нас есть три числа B1, B2, В3*,* и мы обнаруживаем, что

(2.12)

(где S в любой системе координат одно и то же), то три числа b1, b2, В3 обязаны быть компонентами Вх, Ву, Вz некоторого вектора В.

Рассмотрим теперь температурное поле. Возьмем две точки P1 и Р2, разделенные маленьким расстоянием **ΔR.** Температура в Р1 есть T1, а в Р2 она равна T2 , и их разница ΔТ=Т2-Т1 .Температура в этих реальных физических точках, конечно, не зависит от того, какие оси мы выбрали для измерения коорди­нат. В частности, ΔT — тоже число, не зависящее от системы координат. Это скаляр.

## Выбрав удобную систему координат, мы можем написать

Т1 = Т(х, у, z) и Т2=Т(х + Δх, у + Δу, z + Δz),

где Δx:, Δy, Δz — компоненты вектора **ΔR** (фиг. 2.5). Вспомнив (2.7), напишем

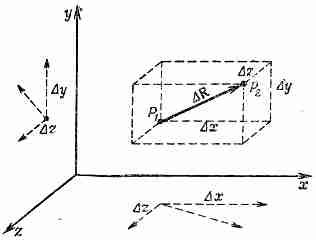
C:\1\pic\gray.jpg

(2.13)

Слева в (2.13) стоит скаляр, а справа — сумма трех произведе­ний каких-то чисел на Δx;, Δy, Δz, которые являются компонен­тами вектора. Значит,

три числа — тоже *х-, у-* и z-компоненты вектора.

C:\1\pic\gray.jpg



*Фиг. 2.5. Вектор ΔR с компо­нентами Δх, Δу, Δz.*

Мы напишем этот новый вектор при помощи символа ∇*Т.* Символ ∇ (называемый набла) — это Δ вверх ногами; он напоминает нам о дифференцировании. Читают ∇ T по-разному: [«набла](#прим1) [T», или «градиент T», или «gradT»:](#прим1)

C:\1\pic\gray.jpg

[(2.14)](#п1)

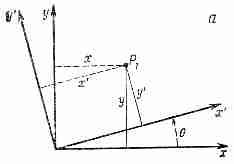
С этим обозначением (2.13) переписывается в более компакт­ной форме

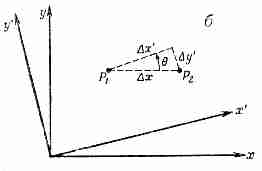
C:\1\pic\gray.jpg

(2.15)

Или, выражая словами: разница температур в двух близких точках есть скалярное произведение градиента Т на вектор смещения второй точки относительно первой. Форма (2.15) так­же служит иллюстрацией к нашему утверждению, что ΔТ — действительно вектор.

Быть может, вы еще не убеждены? Тогда докажем иначе. (Хотя, вглядевшись внимательно, вы увидите, что это на самом деле то же самое доказательство, только подлиннее!) Мы по­кажем, что компоненты ΔТ преобразуются абсолютно так же, как я компоненты R, а значит, ΔТ — тоже вектор в соответствии с первоначальным определением вектора в вып. 1, гл. 11. Мы выберем новую систему координат х', у', z' и в ней вычис­лим *дТ/дх', дТ/ду': дТ/dz'.* Для простоты положим z=z', так что о третьей координате мы можем позабыть. (Можете сами заняться проверкой более общего случая.)





Фиг. 2.6. Переход к повернутой системе координат (а) и частный

*случай интервала ΔR***,** *параллель­ного к оси х (б).*

Выберем систему х', у', повернутую относительно х, y-системы на угол 9 (фиг. 2.6, а). Координаты точки (х, у) в штрихованной системе имеют вид:

C:\1\pic\gray.jpg

(2.16)

C:\1\pic\gray.jpg

(2.17)

или, решая относительно x и y,

C:\1\pic\gray.jpg

(2.18)

C:\1\pic\gray.jpg

(2.19)

Если всякая пара чисел преобразуется так же, как x и y, то она является компонентами вектора.

C:\1\pic\gray.jpgРассмотрим теперь разницу в температурах двух сосед­них точек *Р1* и *Р2* (фиг. 2.6, б). В координатах *х, у* запишем

(2.20)

так как Δу = 0.

C:\1\pic\gray.jpgА в штрихованной системе? Там мы бы написали

(2.21)

C:\1\pic\gray.jpgГлядя на фиг. 2.6, б, мы видим, что

(2.22)

и

C:\1\pic\gray.jpg

(2.23)

C:\1\pic\gray.jpgтак как Δy отрицательно при положительном Δx. Подстав­ляя в (2.21), получаем

C:\1\pic\gray.jpg(2.24)

(2.25)

C:\1\pic\gray.jpgСравнивая (2.25) с (2.20), мы видим, что

(2.26)

Это уравнение говорит нам, что *дТ/дх* получается из *дТ/дх'* и *дТ/ду'* в точности так же, как *х* из *х'* и *у'* в (2.18). Значит, *дТ/дх —* это x-компонента вектора. Сходные же рассуждения показывают, что *дТ/ду* и *dT/dz* суть *у-* и z-компоненты. Стало быть, *∇Т* есть на самом деле вектор. Это векторное поле, обра­зованное из скалярного поля *Т.*

**§ 4. Оператор ∇**

C:\1\pic\gray.jpgА сейчас мы проделаем крайне занятную и остроумную вещь — одну из тех, которые так украшают математику. До­казательство того, что grad *Т,* или *∇*T является вектором, не зависит от того, *какое* скалярное поле мы дифференцируем. Все доводы остались бы в силе, если бы *Т* было заменено *любым скалярным полем.* А поскольку уравнения преобразований одинаковы независимо от того, что дифференцируется, то можно *Т* убрать и уравнение (2.26) заменить операторным уравнением

(2.27)

Как выразился Джинс, мы оставляем операторы «жаждущими продифференцировать что угодно».

Так как сами дифференциальные операторы преобразуются как компоненты векторного поля, то можно назвать их компо­нентами *векторного оператора.* Можно написать

C:\1\pic\gray.jpg

(2.28)

это означает, конечно,

C:\1\pic\gray.jpg

(2.29)

C:\1\pic\gray.jpgМы абстрагировали градиент от *Т —* в этом и есть остроумие. Конечно, вы должны все время помнить, *что* ∇ — это опе­ратор. Сам по себе он ничего не означает. А если ∇ сам по себе ничего не означает, то что выйдет, если мы *градиент* помножим на скаляр, например на T, чтобы получилось произведе­ние T∇? (Ведь вектор всегда можно умножить на скаляр.) Это опять ничего не означает. Компонента *х* этого выражения равна

(2.30)

а это не число, а все еще какой-то оператор. Однако в согласии с алгеброй векторов *Т*∇по-прежнему можно называть векто­ром.

А сейчас помножим ∇ на скаляр с другой стороны. Полу­чится произведение ∇*T.* В обычной алгебре

C:\1\pic\gray.jpg

(2.31)

но нужно помнить, что операторная алгебра немного отличается от обычной векторной. Надо всегда выдерживать правильный порядок операторов, чтобы их операции имели смысл. Тогда у вас трудностей не возникнет, если вы припомните, что опе­ратор yподчиняется тем же условиям, что и производные. То, что вы дифференцируете, должно быть поставлено справа от ∇ Порядок здесь существен.

Если помнить о порядке, то сразу ясно, что *Т*∇ *—* это опе­ратор, а произведение ∇*Т —* это уже не «жаждущий» опера­тор, его жажда утолена. Это физическая величина, имеющая смысл. Он представляет собой скорость пространственного из­менения *Т: x*-компонента ∇*Т* показывает, насколько быстро *Т* изменяется в

x-направлении. А куда направлен вектор ∇*Т?* Мы знаем, что скорость изменения *Т* в каком-то направлении — это компонента ∇*Т* в этом направлении [см. (2.15)]. Отсюда следует, что направление ∇*Т —* это то, по которому ∇*Т* обла­дает самой длинной проекцией; иными словами, то, по которому ∇*Т* меняется быстрее всего. Направление градиента *Т —* это направление быстрейшего подъема величины *Т.*

**§ 5. Операции с ∇**

Можно ли с векторным оператором ∇ производить другие алгебраические действия? Попробуем скомбинировать его с век­тором. Из двух векторов можно составить скалярное произве­дение, причем двоякого рода:

(Вектор)•∇ или ∇• (Вектор).

Первое выражение пока что ничего не означает — это все еще оператор. Окончательный смысл его зависит от того, на что он Судет действовать. А второе произведение — это некое скаляр­ное поле (потому что А•В — всегда скаляр).

C:\1\pic\gray.jpgПопробуем составить скалярное произведение ∇ на извест­ное поле, скажем на h. Распишем покомпонентно

C:\1\pic\gray.jpg(2.32)

(2.33)

C:\1\pic\gray.jpgЭта сумма инвариантна относительно преобразования координат. Если выбрать другую систему (отмеченную штрихами), [то получилось бы](#прим2)

(2.34)

а это — *то же самое* число, которое получилось бы и из (2.33), хотя с виду оно выглядит иначе, т. е.

C:\1\pic\gray.jpg

(2.35)

в любой точке пространства. Итак, ∇•h — это скалярное поле, и оно должно представить собой некоторую физическую вели­чину. Вы должны понимать, что комбинация производных в ∇•h имеет довольно специальный вид. Могут быть и другие комбинации всяческого вида, скажем *dhy/dx,* которые не яв­ляются ни скалярами, ни компонентами векторов.

Скалярная величина ∇• (Вектор) очень широко применяется в физике. Ей присвоили имя «дивергенция», или «расходимость». Например,

∇•h = div h = «Дивергенция h». (2.36)

Можно было бы, как и для ∇T, описать физический смысл ∇•h. Но мы отложим это до лучших времен.

C:\1\pic\gray.jpgПосмотрим сначала, что еще можно испечь из векторного оператора ∇. Как насчет векторного произведения? Можно на­деяться, что

(2.37)

C:\1\pic\gray.jpgКомпоненты этого вектора можно написать, пользуясь обыч­ным правилом для векторного произведения [см. (2.2)]:

(2.38)

Подобно этому,

C:\1\pic\gray.jpg

C:\1\pic\gray.jpg(2.39)

(2.40)

Комбинацию ∇Xh называют «ротор» (пишут rot **h**), или (редко) «вихрь **h**» (пишут curl **h).** Происхождение этого назва­ния и физический смысл комбинации мы обсудим позже.

В итоге мы получили три сорта комбинаций, куда входит ∇:

∇*Т* = grad *T =* Вектор,

∇•h=divh = Скаляр,

∇Xh = roth = Вектор.

Используя эти комбинации, можно пространственные вариации полей записывать в удобном виде, т. е. в виде, не зависящем от той или иной совокупности осей координат.

В качестве примера применения нашего векторного диф­ференциального оператора ∇ выпишем совокупность вектор­ных уравнений, в которой содержатся те самые законы электро­магнетизма, которые мы словесно высказали в гл. 1. Их назы­вают уравнениями Максвелла.

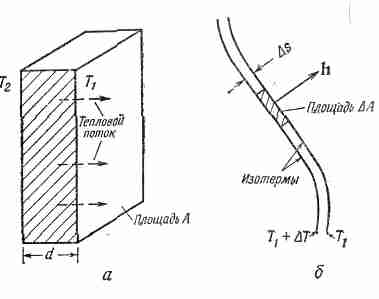
### C:\1\pic\gray.jpgУравнения Максвелла

(2.41)

где ρ (ро) — «плотность электрического заряда» (количество заряда в единице объема), a j — «плотность электрического тока» (скорость протекания заряда сквозь единицу площади). Эти четыре уравнения содержат в себе законченную классиче­скую теорию электромагнитного поля. Видите, какой элегант­ной и простой записи мы добились с помощью наших новых обозначений!

**§ 6. Дифференциальное уравнение потока тепла**

Приведем другой пример векторной записи физического закона. Этот закон не из точных, но во многих металлах и других материалах, проводящих тепло, он проявляется со­вершенно четко. Известно, что если взять плиту из какого-то материала и нагреть одну ее сторону до температуры *Т2 ,* а дру­гую охладить до *Т1 ,* то тепло потечет от *T2* к *Т1* (фиг. 2.7, *а).* Поток тепла пропорционален площади торцов *А* и разнице температур. Кроме того, он обратно пропорционален расстоя­нию между торцами. (Для заданной разницы температур чем тоньше плита, тем мощнее поток тепла.).



*Фиг. 2.7. Тепловой по­ток через плиту (а) и бесконечно малая плит­ка, параллельная изо­термической поверхно­сти в большом блоке вещества (б).*

C:\1\pic\gray.jpgОбозначая через *J* тепловую энергию, проходящую сквозь плиту за единицу вре­мени, мы напишем

Что произойдет в более сложных случаях, скажем, в блоке материала необычной формы, в котором температура как-то прихотливо меняется? Рассмотрим тонкий слой материала и представим себе плиту наподобие изображенной на фиг. 2.7, а, но в миниатюре. Ориентируем ее торцы параллельно изотерми­ческим поверхностям (фиг. 2.7, б), так что для этой малой плиты выполняется уравнение (2.42).

### C:\1\pic\gray.jpgЕсли площадь этой плиты ΔА, то поток тепла за единицу времени равен

(2.42)

Коэффициент пропорциональности χ (каппа) называется *тепло­проводностью.*

C:\1\pic\gray.jpg

(2.43)

где Δs — толщина плиты. Но Δ*J*/ΔA мы раньше определили как абсолютную величину **h** — вектора, направленного туда, куда течет тепло. Тепло течет от T1 + ΔT к *T1,*так что вектор **h** перпендикулярен изотермам (фиг. 2.7, *б).* Далее, ΔТ/Δs как раз равно быстроте изменения *Т с* изменением положения. А по­скольку изменения положения перпендикулярны изотермам, то наше AT/As — это максимальная скорость изменения. Она равна поэтому величине у *Т.* И, наконец, раз направления *∇Т* и h противоположны, то (2.43) можно записать в виде вектор­ного уравнения

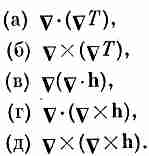
*h = -* χ∇Т*.* (2.44)

(Знак минус написан потому, что тепло течет в сторону пониже­ния температуры.) Уравнение (2.44) — это дифференциальное уравнение теплопроводности в массиве вещества. Вы видите, что это чисто векторное уравнение. С обеих сторон стоят векторы (если *x* число). Это обобщение на произвольный случай частного соотношения (2.42), верного для прямоугольной плиты.

Мы с вами должны будем научиться выписывать все соот­ношения элементарной физики [наподобие (2.42)] в этих хитро­умных векторных обозначениях. Они полезны не только потому, что уравнения начинают от этого *выглядетъ* проще. В них намного яснее проступает *физическое содержание* уравнений безотносительно к выбору системы координат.

**§ 7. Вторые производные векторных полей**

Пока мы имели дело только с первыми производными. А почему не со вторыми? Из вторых производных можно соста­вить несколько комбинаций:



(2.45)

Вы можете убедиться, что никаких иных комбинаций быть не может.

Посмотрим сперва на вторую комбинацию (б). Она имеет ту же форму, что и

АX(АT) = (АXА)T = 0, потому что АXА всегда нуль. Значит,

C:\1\pic\gray.jpg

(2.46)

Можно понять, как это получается, если расписать одну из компонент:

C:\1\pic\gray.jpg

что равно нулю [по уравнению (2.8)]. Это же верно и для других компонент. Стало быть, ∇Х(∇T)=0 для любого распределе­ния температур, да и для *всякой* скалярной функции.

Возьмем второй пример. Посмотрим, нельзя ли получить нуль другим путем. Скалярное произведение вектора на век­торное произведение, содержащее этот вектор, равно нулю

А•(АХВ) = 0, (2.48)

потому что АХВ перпендикулярно к А и не имеет тем самым составляющих вдоль А. Сходная комбинация стоит в списке (2.45) под номером (г):

∇(∇Xh) = div(roth) = 0. (2.49)

В справедливости этого равенства опять-таки легко убедиться, проделав выкладки на компонентах.

Теперь сформулируем без доказательства две теоремы. Они очень интересны и весьма полезны для физиков.

В физических задачах часто оказывается, что ротор какой-то величины (скажем, векторного поля А) равен нулю. Мы видели в уравнении (2.46), что ротор градиента равен нулю. (Это легко запоминается по свойствам векторов.) Далее, может оказаться, что А будет градиентом какой-то величины, потому что тогда ротор А с необходимостью обратится в нуль. Имеется интерес­ная теорема, утверждающая, что если ротор А есть нуль, то тогда А *непременно* окажется *чьим-то* градиентом; существует некоторое скалярное поле ψ; (пси), такое, что A=gradψ. Иными словами, справедлива

Т Е О Р Е М А

Если ∇XА = 0,

то имеется ψ, (2.50)

такое, что А = ∇ψ.

. Сходная теорема формулируется и для случая, когда ди­вергенция А есть нуль. Из уравнения (2.49) видно, что дивер­генция ротора любой величины равна всегда нулю. Если вам случайно встретилось векторное поле D, для которого div D — нуль, то вы имеете право заключить, что D это ротор некоторого векторного поля С.

ТЕОРЕМА

Если ∇•D = 0,

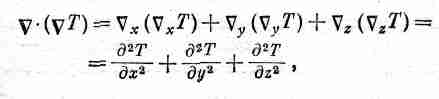
то имеется С, (2.51)

такое, что D = ∇XC.

Перебирая всевозможные сочетания двух операторов у, мы обнаружили, что два из них всегда дают нуль. Займемся теперь теми, которые *не равны* нулю. Возьмем комбинацию ∇• (∇T), первую в нашем списке. В общем случае это не нуль. Выпишем компоненты

C:\1\pic\gray.jpg

Далее,



(2.52)

что может, вообще говоря, быть любым числом. Это скаляр­ное поле.

Вы видите, что скобок можно не ставить, а вместо этого писать, не рискуя ошибиться:

C:\1\pic\gray.jpg

(2.53)

Можно рассматривать ∇2 как новый оператор. Это скаляр­ный оператор. Так как он в физике встречается часто, ему дали особое имя — *лапласиан.*

C:\1\pic\gray.jpg

(2.54)

Раз оператор лапласиана —оператор скалярный, он может действовать и на вектор. Под этим мы подразумеваем, что он применяется к каждой компоненте вектора

C:\1\pic\gray.jpg

Рассмотрим еще одну возможность: ∇X(∇X h) [(д) в списке (2.45)]. Ротор от ротора можно написать иначе, если исполь­зовать векторное равенство (2.6)

АX(ВXС) = В(А•С)-С(А•В). (2.55)

Заменим в этой формуле А и В оператором у и положим C=h. Получится

∇X(∇Xh) = ∇(∇b)-h(∇•∇)...???

Погодите-ка! Здесь что-то не так. Как и положено, первые два члена — векторы (операторы утолили свою жажду), но послед­ний член совсем не такой. Он все еще оператор. Ошибка в том, что мы не были осторожны и не выдержали нужного порядка членов. Вернувшись обратно, вы увидите, что (2.55) можно с равным успехом записать в виде

АX(ВXС) = В(А•С) -(А•В)С. (2.56)

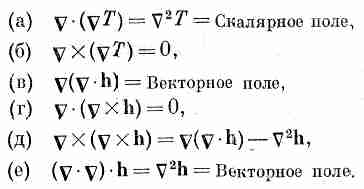
Такой порядок членов выглядит уже лучше. Сделаем нашу под­становку в (2.56). Получится

∇X (∇Xh) = ∇ (∇h)-( ∇•∇)h. (2.57)

С этой формулой уже все в порядке. Она действительно пра­вильна, в чем вы можете убедиться, расписав компоненты. По­следний член — это лапласиан, так что с равным успехом мож­но написать

∇X (∇Xh) = ∇(∇•h)- ∇2h. (2.58)

Из нашего списка (2.45) двойных ∇ мы разобрали все комби­нации, кроме (в), ∇(∇•h). В ней есть смысл, это — векторное поле, но больше сказать о ней нечего. Это просто векторное поле, которое может случайно возникнуть в каком-нибудь рас­чете.

Удобно будет все наши рассуждения свести теперь в таблицу:

(2.59)

Вы могли заметить, что мы не пытались изобрести новый век­торный оператор ∇Х∇. Понимаете, почему?

**§ 8. Подвохи**

C:\1\pic\gray.jpgМы применили наши знания обычной векторной алгебры к алгебре оператора y Здесь нужно быть осторожным, иначе легко напутать. Нужно упомянуть о двух подвохах (впрочем, в нашем курсе они не встретятся). Что можете вы сказать о сле­дующем выражении, куда входят две скалярные функции ψ и ϕ (фи):

Вы можете подумать, что это нуль, потому что оно похоже на

(Аa)X(Аb),

а это всегда равно нулю (векторное произведение двух *одина­ковых* векторов АXА всегда нуль). Но в нашем примере два оператора ∇ отнюдь не одинаковы! Первый действует на одну функцию, ψ, а второй — на другую, ϕ. И хотя мы изображаем их одним и тем же значком у, они все же должны рассматри­ваться как разные операторы. Направление ∇ψ зависит от функ­ции ψ, а направление ∇ϕ — от функции ϕ, так что они не обя­заны быть параллельными:

(∇ψ)X(∇ϕ)≠0 (в общем случае).

К счастью, к таким выражениям мы прибегать не будем. (Но сказанное нами не меняет того факта, что ∇ϕX∇ψ =0 в любом скалярном поле: здесь обе ∇действуют на одну и ту же функцию.) Подвох номер два (он тоже в нашем курсе не встретится): правила, которые мы здесь наметили, выглядят просто и красиво только в прямоугольных координатах. Например, если мы хо­тим написать x-компоненту выражения ∇2h, то сразу пишем

C:\1\pic\gray.jpg

(2.60)

Ио это выражение *не годится,* если мы ищем *радиальную* ком­поненту ∇2h. Она не равна ∇2hr. Дело в том, что в алгебре век­торов все их направления полностью определены. А когда мы имеем дело с векторными полями, то их направления в разных местах различны. Когда мы пробуем описать векторное поле, например, в полярных координатах, то «радиальное» направле­ние меняется от точки к точке. И начав дифференцировать ком­поненты, вы запросто можете попасть в беду. Даже в *постоян­ном* векторном поле радиальная компонента от точки к точке меняется.

Обычно безопаснее и проще всего держаться прямоугольных координат. Но стоит упомянуть и одно исключение: поскольку лапласиан ∇2 есть скаляр, то можно писать его в любой системе координат (скажем, в полярных координатах). Но так как это дифференциальный оператор, то применять его надо только к векторам с фиксированным направлением компонент, т. е. к заданным в прямоугольных координатах. Итак, расписывая наши векторные дифференциальные уравнения покомпонентно, мы будем предварительно выражать все наши векторные поля через их *х-, у-,* z-компоненты.

C:\1\pic\gray.jpg***\* В наших обозначениях выражение (а, b, с) представляет вектор с компонентами а, b, с. Если вам нравится пользоваться единичными векторами i, j и k, то можно написать***

***\* Мы рассматриваем h как физическую величину, зависящую от по­ложения в пространстве, а не как заданную математически функцию трех переменных. Когда h «дифференцируется» по х, у и z или по х', у' и z', то математическое выражение для h должно быть предварительно выраже­но в виде функции соответствующих переменных, Поэтому в новой си­стеме координат мы не отмечаем h штрихом.***

***Глава 3***

**ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ВЕКТОРОВ**

[**§1.Векторные ин****те****г­ралы; к****риволи­нейный** **интеграл от ∇ψ**](#a1)

[**§2.Поток векто****р****ного поля**](#a2)

[**§З. Поток из** **куба; тео****рем****а Гаусса**](#a3)

[**§4.Теплопроводн****ость****; уравнение** **диффу­зии**](#a4)

[**§5.Циркуляция век****торного поля**](#a5)

[**§6. Циркуляция по к****вадрату; теорема Стокса**](#a6)

[**§7. Поля без роторов и п****оля без дивер­генций**](#a7)

[**§8.И****тоги**](#a8)

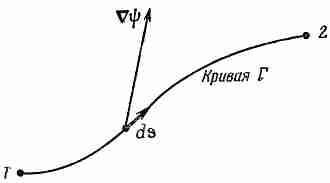
**§ 1. Векторные интегралы;**

**криволинейный интеграл от ∇ψ**

В предыдущей главе мы видели, что брать производные от поля можно по-разному. Одни приводят к векторным полям; другие — к скалярным. Хотя формул было выведено до­вольно много, все их можно подытожить одним правилом: операторы *д/дх, д/ду* и *д/dz* суть три компоненты векторного оператора у. Сейчас нам хотелось бы лучше разобраться в значении производных поля. Тогда мы легче почувствуем смысл векторных уравнений поля.

Мы уже говорили о смысле операции градиен­та (∇ на скаляр). Обратимся теперь к смыслу опе­раций вычисления дивергенции (расходимости) и ротора (вихря). Толкование этих величин лучше всего сделать на языке векторных интегралов и уравнений, связывающих эти интегралы. Но уравнения эти, к несчастью, нельзя вывести из векторной алгебры при помощи каких-либо легких подстановок, так что вам придется учить их как что-то новое. Одна из этих инте­гральных формул практически тривиальна, а другие две — нет. Мы выведем их и поясним их смысл. Эти формулы фактически являются математическими теоремами. Они полезны не только для толкования смысла и содержания понятий дивергенции и ротора, но и при раз­работке общих физических теорий. Для теории полей эти математические теоремы — все равно, что теорема о сохранении энергии для меха­ники частиц. Подобные теоремы общего харак­тера очень важны для более глубокого пони­мания физики. Но вы увидите, что, за немногими простыми исключениями, они мало что дают для решения задач. К счастью, как

раз в начале нашего курса многие простые задачи будут решаться именно этими тремя интегральными формулами.

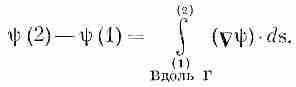


*Фиг. 3.1. Иллюстрация уравнения (3.1).*

*Вектор ∇ψ вычисляется на линей­ном элементе ds.*

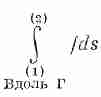
Позже, однако, когда задачи станут потруднее, этими простыми методами мы больше обойтись не сможем.

Мы начнем с той интегральной формулы, куда входит гра­диент. Мысль, которая содержится в ней, очень проста: раз градиент есть быстрота изменения величины поля, то интеграл от этой быстроты даст нам общее изменение поля. Пусть у нас есть скалярное поле ψ*(x, у,* z). В двух произвольных точках (1) и (2) функция я|з имеет соответственно значения ψ(l) и ψ(2). [Используется такое удобное обозначение: (2) означает точку (x2, y2, z2), а ψ(2) это то же самое, что ψ(x2, y2, z2).] Если Г (гамма) — произвольная кривая, соединяющая (1) и (2) (фиг. 3.1), то справедлива

Т Е О Р Е М А 1

(3.1)

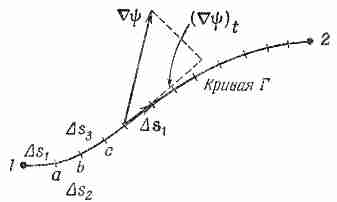
Интеграл, стоящий здесь, это *криволинейный интеграл* от (1) до (2) вдоль кривой Г от скалярного произведения вектора ∇ψ) на другой вектор, *ds,* являющийся бесконечно малым элемен­том дуги кривой Г [направленной от (1) к (2)].

Напомним, что мы понимаем под криволинейным интегралом. Рассмотрим скалярную функцию f(x, y, z) и кривую Г, соеди­няющую две точки (1) и (2). Отметим на кривой множество то­чек и соединим их хордами, как на фиг. 3.2. Длина i-й хорды равна Δsi,-, где *i* пробегает значения 1, 2, 3, .... Под криволиней­ным интегралом

подразумевается предел суммы

C:\1\pic\gray.jpg

где fi — значение функции где-то на i-й хорде. Предел — это то,



*Фиг. 3.2. Криволинейный интег­рал есть предел суммы.*

к чему стремится сумма, когда растет число хорд (разумным об­разом, чтобы даже наибольшее Δsi→0).

C:\1\pic\gray.jpgВ нашей теореме (3.1) интеграл означает то же самое, хоть и выглядит чуть по-иному. Вместо f стоит другой скаляр — составляющая ∇ψ в направлении Δs. Если обозначить эту составляющую через (∇ψ)t , то ясно, что

(3.2)

Интеграл в (3.1) и подразумевает сумму таких членов.

C:\1\pic\gray.jpgА теперь посмотрим, почему уравнение (3.1) правильно. В гл. 1 мы показали, что составляющая ∇ψ вдоль малого сме­щения ΔRравна быстроте изменения ψ в направлении ΔR. Рассмотрим хорду кривой Δs от точки (1) до точки *а* на фиг. 3.2. По нашему определению

(3.3)

Точно так же мы имеем

C:\1\pic\gray.jpg

(3.4)

C:\1\pic\gray.jpgгде, конечно, (∇ψ)1 означает градиент, вычисленный на хорде Δs1, a (∇ψ)2 — градиент, вычисленный на Δs2. Сложив (3.3) и (3.4), получим

(3.5)

Вы видите, что, продолжая прибавлять такие члены, мы полу­чаем в итоге

C:\1\pic\gray.jpg

(3.6)

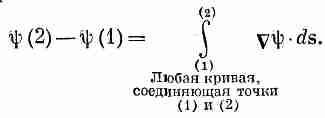
Левая часть не зависит от того, как выбирать интервалы — лишь бы точки (1) и (2) были теми же самыми, так что справа можно перейти к пределу. Так доказывается уравнение (3.1). Из нашего доказательства видно, что, подобно тому как ра­венство не зависит и от выбора точек а, *b, с,...,* точно так же оно не зависит от выбора самой кривой Г. Теорема верна для *любой* кривой, соединяющей точки (1) и (2).

Два слова об обозначениях. Не будет путаницы, если писать для удобства

C:\1\pic\gray.jpg

(3.7)

Тогда наша теорема примет такой вид:

Т Е О Р Е М А 1

(3.8)

**§ 2. Поток векторного поля**

Прежде чем рассматривать следующую интегральную теоре­му — теорему о дивергенции,— хотелось бы разобраться в од­ной идее, смысл которой в случае теплового потока легко усваи­вается. Мы уже определили вектор h, представляющий коли­чество тепла, протекающего сквозь единицу площади в еди­ницу времени. Положим, что внутри тела имеется замкнутая поверхность *S,* ограничивающая объем *V* (фиг. 3.3). Нам хочется узнать, сколько тепла вытекает из этого *объема.* Мы это можем, конечно, определить, рассчитав общий тепловой поток через *поверхность S.*

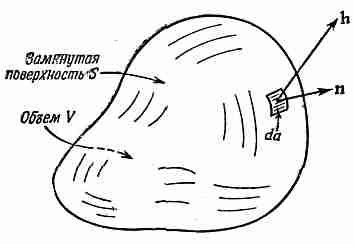
Обозначим через *da* площадь элемента поверхности. Этот символ заменяет двумерный дифференциал. Если, например, элемент окажется в плоскости *ху,* то

*da* = *dxdy.*

Позже мы будем иметь дело с интегралами по объему, и тогда будет удобно рассматривать элемент объема в виде малого куби­ка и обозначать его *dV,* подразумевая, что

*dV= dxdydz.*

Кое-кто пишет и *d2a* вместо *da,* чтобы напомнить самому себе, что это выражение второй степени; вместо *dV* пишут также d3V. Мы будем пользоваться более простыми обозначениями, а вы уж постарайтесь не забывать, что у площадей бывают два измерения, у объемов — три.

*Фиг. 3.3. Замкнутая поверх­ность S, ограничивающая объем V.*

*Единичный вектор n* — *внешняя нор­маль к элементу поверхности da, a* ***h*** — *вектор теплового потопа сквозь элемент поверхности.*

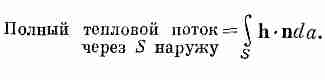
Поток тепла через элемент поверхности *da* равен произведе­нию площади на составляющую h, перпендикулярную к *da.* Мы уже определяли n — единичный вектор, направленный наружу перпендикулярно к поверхности (см. фиг. 3.3). Искомая составляющая h равна

hn=h•n, (3.9)

и тогда поток тепла сквозь *da* равен

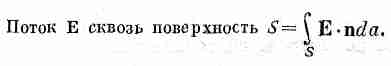
*h*•*nda.* (3.10)

А весь поток тепла через произвольную поверхность получается суммированием вкладов от всех элементов поверхности. Иными словами, (3.10) интегрируется по всей поверхности



(3.11)

Этот интеграл мы будем называть «поток **h** через поверх­ность». Мы рассматриваем **h** как «плотность потока» тепла, а поверхностный интеграл от **h** — это общий поток тепла наружу через поверхность, т. е. тепловая энергия за единицу времени (джоули в секунду).

Мы хотим эту идею обобщить на случай, когда вектор не представляет собой потока какой-то величины, а, скажем, является электрическим полем. Конечно, если это будет нужно, то и в этом случае все равно можно проинтегрировать нормаль­ную составляющую электрического поля по площади. Хотя теперь она уже не будет ничьим потоком, мы все еще будем упот­реблять слово

«поток». Мы будем говорить, что

(3.12)

Слову «поток» мы придаем смысл «поверхностного интеграла от нормальной составляющей» некоторого вектора. То же опре­деление будет применяться и тогда, когда поверхность незамк­нута.

C:\1\pic\gray.jpgА возвращаясь к частному случаю потока тепла, обратим внимание на те случаи, когда *количество тепла сохраняется.* Представьте себе, к примеру, материал, в котором после перво­начального подогрева не происходит ни дальнейшего подвода, ни поглощения тепла. Тогда, если из какой-то замкнутой по­верхности наружу поступает тепло, содержание тепла во внут­реннем объеме должно падать. Так что в условиях, когда количество тепла сохраняется, мы говорим, что

(3.13)

где *Q —* запас тепла внутри *S.* Поток тепла из *S* наружу равен со знаком минус быстроте изменения со временем общего за­паса тепла *Q* внутри *S.* Это толкование возможно оттого, что речь идет о потоке тепла, и оттого, что мы предположили, что количество тепла сохраняется. Конечно, если бы внутри объема создавалось тепло, нельзя было бы говорить о полном запасе тепла в нем.

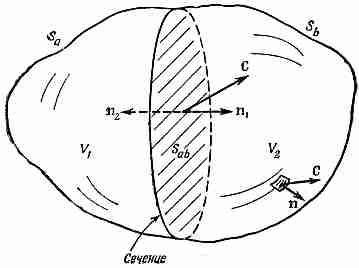
C:\1\pic\gray.jpgУкажем теперь на интересное свойство потока любого век­тора. Можете при этом представлять себе вектор потока тепла, но верно это будет и для произвольного векторного поля С. Представьте себе замкнутую поверхность *S,* окружающую объем *V.* Разобьем теперь объем на две части каким-то «сече­нием» (фиг. 3.4). Получились два объема и две замкнутые по­верхности. Объем V1окружен поверхностью S1 *,* составленной частью из прежней поверхности Saи частью из «сечения» Sab*.* Объем V2 окружен поверхностью S2, составленной из остатка прежней поверхности *(*Sb*)* и замкнутой сечением Sab*.* Зададим вопрос: если мы рассчитаем поток через поверхность Slи при­бавим к нему поток сквозь поверхность S2, будет ли их сумма равна потоку через первоначальную поверхность? Ответ гласит: «Да». Потоки через часть Sab *,* общую обеим поверхностям S*1* и S2, в точности сократятся. Для потока вектора С из *V1* можно написать

(3.14)

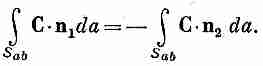
а для потока из V2:

C:\1\pic\gray.jpg

(3.15)

Заметьте, что во втором интеграле мы обозначили внешнюю нормаль к Sabбуквой n1,если она относится к S*1 ,* и буквой n2,если она относится к S*1* (см. фиг. 3.4).

*Фиг.**3.4. Объем V, заключенный внутри поверхности S, делится на две части «сече­нием» (поверхностью Sab). Получается объем V1, окруженный поверхностью S1 = Sa+Sab, и объем V2, окруженный поверхностью S2= Sb+Sab.*

Ясно, что n1=-n2, и тем самым

(3.16)

Складывая теперь уравнения (3.14) и (3.15), мы убеждаемся, что сумма потоков сквозь *S1* и *S2* как раз равна сумме двух ин­тегралов, которые, взятые вместе, дают поток через перво­начальную поверхность *S=Sa+Sb.*

Мы видим, что поток через всю внешнюю поверхность *S* можно рассматривать как сумму потоков из тех двух частей, на которые разрезан объем. Эти части можно еще разрезать: скажем, *V1* разбить пополам. Опять придется прибегнуть к тем же доводам. Так что *для любого* способа разбиения первоначаль­ного объема всегда остается справедливым то свойство, что по­ток через внешнюю поверхность (первоначальный интеграл) равен сумме потоков изо всех внутренних частей.

**§ 3. Поток из куба; теорема Гаусса**

Рассмотрим теперь частный случай потока из маленького [ку­бика](#прим1) и получим интересную формулу. Ребра куба пусть нап­равлены вдоль осей координат (фиг. 3.5), координаты вершины, ближайшей к началу, суть *х, у,* z, ребро куба в направлении *х* равно Δx, ребро куба (а точнее, бруска) в направлении *у* равно Δy, а в направлении z равно Δz. Мы хотим найти поток вектор­ного поля С через поверхность куба. Для этого вычислим сумму потоков через все шесть граней. Начнем с грани 1 (см. фиг. 3.5).

Поток *наружу* сквозь нее равен x-компоненте С с минусом, проинтегрированной по площади грани. Он равен

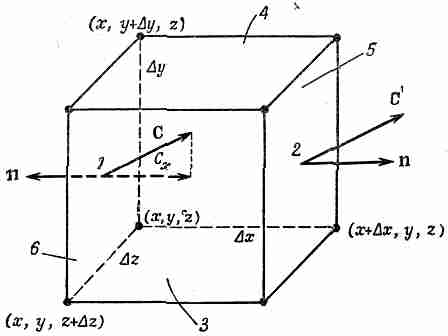
C:\1\pic\gray.jpg

Так как куб считается малым, этот интеграл можно заменить значением Сх в центре грани 1эту точку мы обозначили (1), умноженным на площадь грани ΔyΔz:

Поток сквозь 1 наружу=-Cx(1)ΔyΔz.

Подобным же образом поток наружу через грань 2 равен

Поток сквозь 2 наружу= Cx(2) ΔyΔz.

*Фиг. 3.5. Вычисление потока вектора С из маленького кубика.*

C:\1\pic\gray.jpgВеличины *Cx(1)* и *Сх(2),* вообще говоря, слегка отличаются. Ес­ли Δх достаточно мало, то можно написать

C:\1\pic\gray.jpgСуществуют, конечно, и другие члены, но в них входит (Δx)2 и высшие степени Δx, и в пределе малых Δx ими запросто можно пренебречь. Значит, поток сквозь грань 2 равен

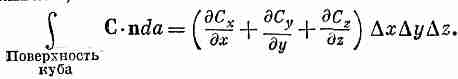
C:\1\pic\gray.jpgСкладывая потоки через грани 1 и 2, получаем

Производную нужно вычислять в центре грани 1, т. е. в точке **[x,** y+(Δy/2), z+(Δz/2)]. Но если куб очень маленький, мы сде­лаем пренебрежимую ошибку, если вычислим ее в вершине (х, у, z).

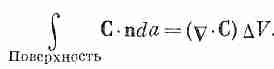
Повторяя те же рассуждения с каждой парой граней, мы получаем

C:\1\pic\gray.jpg

C:\1\pic\gray.jpgа

А общий поток через все грани равен сумме этих членов. Мы обнаруживаем, что

Сумма производных в скобках как раз есть ∇•С, a ΔxΔyΔz=ΔV (объем куба). Таким образом, мы можем утверждать, что *для бесконечно малого куба*



(3.17)

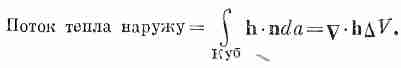
Мы показали, что поток наружу с поверхности бесконечно ма­лого куба равен произведению дивергенции вектора на объем куба. Теперь мы понимаем «смысл» понятия дивергенции век­тора. Дивергенция вектора в точке *Р —* это поток С («исте­чение» С наружу) *на единицу объема,* взятого в окрестности *Р.* Мы связали дивергенцию С с потоком С из бесконечно малого объема. Для любого конечного объема можно теперь использовать факт, доказанный выше, что суммарный поток из объема есть сумма потоков из отдельных его частей. Иначе говоря, мы можем проинтегрировать дивергенцию по всему объему. Это приводит нас к теореме, согласно которой интеграл от нормальной составляющей произвольного вектора по замк­нутой поверхности может быть представлен также в виде ин­теграла от дивергенции вектора по объему, заключенному внутри поверхности. Теорему эту называют теоремой Гаусса.

C:\1\pic\gray.jpgТЕОРЕМА ГАУССА

(3.18)

где *S —* произвольная замкнутая поверхность, *V —* объем внутри нее.

**§ 4, Теплопроводность; уравнение диффузии**

Чтобы привыкнуть к теореме, разберем на примере, как ее применяют. Обратимся опять к распространению тепла, скажем в металле, рассмотрим совсем простой случай: все тепло было подведено к телу заранее, а теперь тело остывает. Источников теп­ла нет, так что количество тепла сохраняется. Сколько же тогда тепла должно оказаться внутри некоего определенного объема в какой-то момент времени? Оно должно *уменьшаться* как раз на то количество, которое уходит с поверхности объема. Если этот объем — маленький кубик, то, следуя формуле (3.17), мож­но написать

(3.19)

Но это должно быть равно скорости потери тепла внутренностью куба. Если *q —* количество тепла в единице объема, то весь

запас тепла в кубе *qΔV,* а скорость *потерь* равна

C:\1\pic\gray.jpg

(3.20)

C:\1\pic\gray.jpgСравнивая (3.19) с (3.20), мы видим, что

(3.21)

Внимательно вглядитесь в форму этого уравнения; эта форма часто встречается в физике. Она выражает закон сохра­нения, в данном случае закон сохранения тепла. В уравнении (3.13) тот же физический факт был выражен иначе. Там была *интегральная* форма уравнения сохранения, а здесь у нас — *дифференциальная* форма.

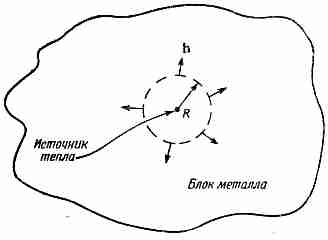
C:\1\pic\gray.jpgУравнение (3.21) мы получили, применив формулу (3.13) к бесконечно малому кубу. Можно пойти и по другому пути. Для большого объема F, ограниченного поверхностью *S,* за­кон Гаусса утверждает, что

(3.22)

Интеграл в правой части можно, используя (3.21), преобразо­вать как раз к виду -*dQ/dt,* и тогда получится формула (3.13).

Теперь рассмотрим другой случай. Представим, что в блоке вещества имеется маленькая дырочка, а в ней идет химическая реакция, генерирующая тепло. Можно еще представить себе, что к маленькому сопротивлению внутри блока подведены про­волочки, нагревающие его электрическим током. Предположим, что тепло создается практически в одной точке, a *W* представ­ляет собой энергию, возникающую в этой точке за секунду. В остальной же части объема пусть тепло сохраняется и, кро­ме того, пусть генерация тепла началась так давно, что сейчас температура уже нигде больше не изменяется. Вопрос состоит в следующем: как выглядит вектор потока тепла h в разных точках металла? Сколько тепла перетекает через каждую точку?

Мы знаем, что если мы будем интегрировать нормальную составляющую h по замкнутой поверхности, окружающей источ­ник, то всегда получится *W.* Все тепло, которое генерируется в точечном источнике, должно протечь через поверхность, ибо предполагается, что поток постоянен. Перед нами трудная задача отыскания такого векторного поля, которое после ин­тегрирования по произвольной поверхности всегда давало бы *W.* Но мы сравнительно легко можем найти это поле, выбрав поверхность специального вида. Возьмем сферу радиусом *R* с центром в источнике и предположим, что поток тепла радиален (фиг. 3.6). Интуиция нам подсказывает, что h должен быть направлен по радиусу, если блок вещества велик и мы не приближаемся слишком близко к его границам; кроме того, вели­чина h во всех точках сферы должна быть одинакова.



*Фиг. 3.6. В области близ точеч­ного источника поток тепла на­правлен по радиусу наружу.*

Вы ви­дите, что для получения ответа к нашим выкладкам мы вы­нуждены добавить известное количество домыслов (обычно это именуют «физической интуицией»).

C:\1\pic\gray.jpgКогда h радиально и сферически симметрично, интеграл от нормальной компоненты h по площади поверхности вычис­ляется очень просто, потому что нормальная компонента в точ­ности равна h и постоянна. Площадь, по которой интегрируется, равна 4πR2. Тогда мы получаем

(3.23)

где *h —* абсолютная величина **h**. Этот интеграл должен быть равен *W —* скорости, с которой источник генерирует тепло. Получается

C:\1\pic\gray.jpg

или

C:\1\pic\gray.jpg

(3.24)

где, как всегда, er обозначает единичный вектор в радиаль­ном направлении. Этот результат говорит нам, что **h** пропорцио­нален *W* и меняется обратно квадрату расстояния от источника.

Только что полученный результат применим к потоку те­пла вблизи точечного источника тепла. Теперь попытаемся найти уравнения, которые справедливы для теплового потока самого общего вида (придерживаясь единственного условия, что количество тепла должно сохраняться). Нас будет интере­совать только то, что происходит в местах вне каких-либо ис­точников или поглотителей тепла.

Дифференциальное уравнение распространения тепла было получено в гл. 2. В соответствии с уравнением (2.44),

C:\1\pic\gray.jpg

(3.25)

C:\1\pic\gray.jpg(Помните, что это соотношение приближенное, но для некоторых веществ вроде металлов выдерживается неплохо.) Применимо оно, конечно, только в тех частях тела, где нет ни выделения, ни поглощения тепла. Выше мы вывели другое соотношение (3.21), которое выполняется тогда, когда количество тепла сохраняется. Если мы это уравнение скомбинируем с (3.25), то получим

C:\1\pic\gray.jpgили

(3.26)

если *χ —* величина постоянная. Напоминаю, что *q —* это количество тепла в единичном объеме, а ∇•∇ = ∇2 — лапласиан, т. е. оператор

C:\1\pic\gray.jpg

Если мы теперь сделаем еще одно допущение, сразу воз­никнет одно очень интересное уравнение. Допустим, что тем­пература материала пропорциональна содержанию тепла в еди­нице объема, т. е. что у материала есть определенная удельная теплоемкость. Когда это допущение верно (а так бывает часто), мы можем писать

C:\1\pic\gray.jpg

или

C:\1\pic\gray.jpg

(3.27)

C:\1\pic\gray.jpgСкорость изменения количества тепла пропорциональна ско­рости изменения температуры. Коэффициент пропорциональ­ности *cv* здесь — удельная теплоемкость на единицу *объема* материала. Подставляя (3.27) в (3.26), получаем

(3.28)

Мы обнаружили, что *быстрота изменения со временем* темпера­туры *Т* в каждой точке пропорциональна лапласиану от *Т,* т. е. вторым производным от пространственного распределения тем­ператур. Мы имеем дифференциальное уравнение — в перемен­ных *х, у, z* и *t* — для температуры *Т.*

Дифференциальное уравнение (3.28) называется *уравнением диффузии тепла,* или *уравнением теплопроводности.* Часто его пишут в виде

C:\1\pic\gray.jpg

(3.29)

где *D —* постоянная. Она равна x/cv.

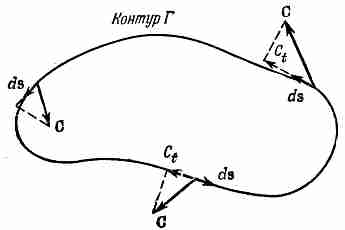
Уравнение диффузии появляется во многих физических задачах: о диффузии газов, диффузии нейтронов и других. Мы уже обсуждали физику некоторых таких явлений в вып. 4, гл. 43. Теперь перед вами полное уравнение, описывающее диффузию в самом общем виде. Немного позже мы зай­мемся решением уравнения диффузии, чтобы посмотреть, как распределяется температура в некоторых случаях. А сейчас вернемся к рассмотрению других теорем о векторных полях.

**§ 5. Циркуляция векторного поля**

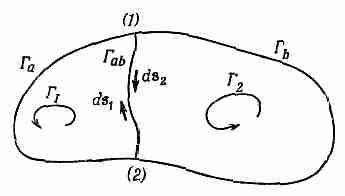
Мы хотим теперь рассмотреть ротор поля примерно так же, как рассматривали дивергенцию. Мы вывели теорему Гаусса, вычисляя интеграл по поверхности, хотя с самого начала отнюдь не было ясно, что мы будем иметь дело с дивергенцией. Откуда же можно было знать, что для ее получения надо интегрировать по поверхности? Этот результат вовсе не был очевиден. И столь же неоправданно мы сейчас вычислим другую характе­ристику поля и покажем, что она связана с ротором. На этот раз мы подсчитаем так называемую циркуляцию векторного поля. Если С — произвольное векторное поле, мы возьмем его составляющую вдоль кривой линии и проинтегрируем эту составляющую по замкнутому контуру. Интеграл называется *циркуляцией* векторного поля по контуру. Мы уже раньше в этой главе рассматривали криволинейный интеграл от ∇ψ. Сейчас мы то же самое проделываем с *произвольным* векторным полем С.

C:\1\pic\gray.jpgПусть Г — произвольный замкнутый контур в пространстве (воображаемый, разумеется). Пример мы видим на фиг. 3.7. Криволинейный интеграл от касательной составляющей С по контуру записывается в виде

(3.30)



*Фиг. 3.7. Циркуляция вектора С но кривой Г есть криволиней­ный интеграл от Сt (касатель­ной составляющей С).*



*Фиг. 3.8. Циркуляция по всему контуру есть сумма циркуляции по двум контурам: Г1=Гa+Гab и Г2=Гь+ГaЬ.*

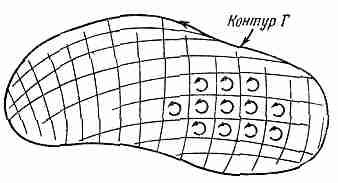
Заметьте, что интеграл берется по всему замкнутому пути, а не от одной точки до другой, как это делалось раньше. Кру­жочек на знаке интеграла должен нам напоминать об этом. Такой интеграл называется циркуляцией векторного поля по кривой Г. Название связано с тем, что первоначально так рас­считывали циркуляцию жидкости. Но название это, как и по­ток, было распространено на любые поля, даже такие, в которых «циркулировать» нечему.

Забавляясь той же игрой, как с потоком, мы можем пока­зать, что циркуляция вдоль контура есть сумма циркуляции вдоль двух меньших контуров. Положим, что, соединив две точки (1) и (2) первоначальной кривой с помощью некоторой линии, мы разбили кривую на два контура Г1 и Г2 (фиг. 3.8). Контур Г1 состоит из Гa — части первоначальной кривой слева от (1) и (2) и «соединения» Г*ab .* Контур Г2 состоит из остатка первоначальной кривой плюс то же соединение.

Циркуляция вдоль Г1 есть сумма интеграла вдоль Га и вдоль ГаЬ. Точно так же и циркуляция вдоль Г2 есть сумма двух ча­стей, одной вдоль Гb, другой — вдоль Гab. Интеграл вдоль Гab для кривой Г2 имеет знак, противоположный тому знаку, кото­рый он имел для кривой *Г1 ,* потому что направления обхода противоположны (в обоих криволинейных интегралах направ­ления поворота нужно брать одни и те же).

Повторяя прежние аргументы, мы можем убедиться, что сумма двух циркуляции даст как раз криволинейный интеграл вдоль первоначальной кривой Г. Интегралы по Гab сократятся. Циркуляция по одной части плюс циркуляция вдоль другой равняется циркуляции вдоль внешней линии. Этот процесс раз­резания большого контура на меньшие можно продолжить. При сложении циркуляции по меньшим контурам смежные части будут сокращаться, так что сумма их сведется к цирку­ляции вдоль единственного первоначального контура.

Теперь предположим, что первоначальный контур — это граница некоторой поверхности. Существует бесконечное мно­жество поверхностей, границей которых служит все тот же первоначальный замкнутый контур. Наши результаты не зави­сят, однако, от выбора этих поверхностей. Сперва мы разобьем наш первоначальный контур на множество малых контуров, лежащих на выбранной поверхности (фиг. 3.9).



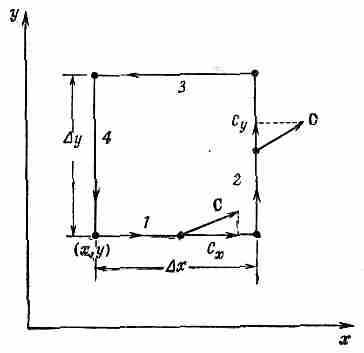
*Фиг. 3.9. Некоторая поверх­ность, ограниченная конту­ром Г.*

*Поверхность разделена на множе­ство маленьких участков, каждый примерно в форме квадрата. Цир­куляция по Г есть сумма циркуля­ции по всем маленьким контурам.*

Какой бы ни была форма поверхности, но если малые контуры сделать до­статочно малыми, всегда можно будет считать каждый из них замыкающим достаточно плоскую поверхность. Кроме того, каждый из них можно сделать очень похожим на квадрат. И циркуляцию вокруг большого контура Г можно найти, под­считав циркуляции по всем квадратикам и сложив их.

**§ 6. Циркуляция по квадрату; теорема Стокса**

Как нам найти циркуляцию по каждому квадратику? Все зависит от того, как квадрат ориентирован в пространстве. Если ориентация его подобрана удачно (к примеру, он распо­ложен в одной из координатных плоскостей), то расчет сде­лать легко. Так как пока мы не делали никаких предположений об ориентации осей координат, мы вправе выбрать их так, чтобы тот квадратик, на котором мы сосредоточили свое вни­мание, оказался в плоскости *ху* (фиг. 3.10). Если результат расчета будет выражен в векторной записи, то можно говорить, что он не зависит от специальной ориентации плоскости.



*Фиг. 3.10. Вычисление цирку­ляции вектора* С *по маленькому квадратику.*

Мы хотим теперь найти циркуляцию поля С по нашему квад­ратику. Криволинейное интегрирование легко проделать, если квадратик сделать таким маленьким, чтобы вектор С на про­тяжении одной стороны квадрата менялся очень мало. (Это предположение выполняется тем лучше, чем меньше квадратик, так что на самом деле речь идет о бесконечно малых квадра­тиках.) Отправившись от точки *(х, у) —* в левом нижнем углу фигуры,— мы обойдем весь квадрат в направлении, указанном стрелками. Вдоль первой стороны, отмеченной цифрой 1, ка­сательная составляющая равна *Сх*(1),а расстояние равно Δх. Первая часть интеграла равна Cx(1) Δх, Вдоль второй стороны получится Су(2) Δy. Вдоль третьей мы получим -Сx(3) Δх, а вдоль четвертой -Cy(4) Δy. Знаки минус стоят потому, что нас интересует касательная составляющая в направлении об­хода. Весь криволинейный интеграл тогда равен

C:\1\pic\gray.jpg

C:\1\pic\gray.jpg(3.31) Посмотрим теперь на первый и третий члены. В сумме они дают

(3.32)

C:\1\pic\gray.jpgВам может показаться, что в принятом приближении эта раз­ность равна нулю. Но это только в первом приближении. Мы можем быть более точными и учесть скорость изменения *Сх ,* тогда можно написать

(3.33)

C:\1\pic\gray.jpgВ следующем приближении пойдут члены с (Δy)2, но ввиду того, что нас интересует в конечном счете только предел при Δy→0, то этими членами можно пренебречь. Подставляя (3.33) в (3.32), мы получаем

(3.34)

C:\1\pic\gray.jpgПроизводную при нашей точности можно брать в точке *(х, у).* Подобным же образом оставшиеся два члена можно написать в виде

(3.35)

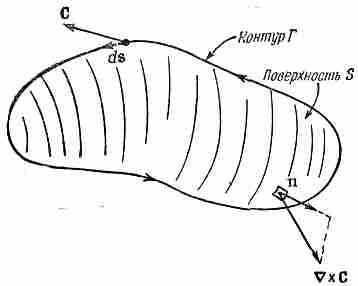
C:\1\pic\gray.jpgи циркуляция по квадрату тогда равна

(3.36)

Интересно, что в скобках получилась как раз z-компонента ротора *С.* Множитель ΔxΔy— это площадь нашего квадрата. Так что циркуляцию (3.36) можно записать как

(∇XС)zΔа.

Но z-компонента это на самом деле компонента, *нормальная* к элементу поверхности.



*Фиг. 3.11. Циркуляция век­тора С по Г равна поверхност­ному интегралу от нормальной компоненты вектора* ∇XС.

Поэтому циркуляцию вокруг квад­ратика можно задать и в инвариантной векторной записи:

C:\1\pic\gray.jpg

(3.37)

В результате имеем: циркуляция произвольного вектора С по бесконечно малому квадрату равна произведению состав­ляющей ротора С, нормальной к поверхности, на площадь квад­рата.

Циркуляция по произвольному контуру Г легко теперь может быть увязана с ротором векторного поля. Натянем на кон­тур любую подходящую поверхность *S* (как на фиг. 3.11) и сложим между собой циркуляции по всем бесконечно малым квадратикам на этой поверхности. Сумма может быть записана в виде интеграла. В итоге получится очень полезная теорема, называемая теоремой Стокса [по имени физика Стокса].

C:\1\pic\gray.jpgТЕОРЕМА СТОКСА

(3.38)

где *S —* произвольная поверхность, ограниченная контуром Г. Теперь мы должны ввести соглашение о знаках. На приведен­ной ранее фиг. 3.10 ось z показывает *на* вас, если система коорди­нат «обычная», т. е. «правая». Когда в криволинейном интеграле мы брали «положительное» направление обхода, то циркуляция получилась равной z-компоненте вектора ∇XC. Обойди мы кон­тур в другую сторону, мы бы получили противоположный знак. Как вообще узнавать, какое направление надо выбирать для положительного направления «нормальной» компоненты век­тора ∇XC? «Положительную» нормаль надо всегда связывать с направлением так, как это сделано было на фиг. 3.10. Об­щий случай показан на фиг. 3.11.

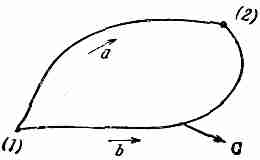
Для запоминания годится «правило правой руки». Если вы расположите пальцы вашей *правой* руки вдоль контура Г, чтобы кончики пальцев показывали положительное направление обхода *ds,* то ваш большой палец укажет направление *положи­тельной* нормали к поверхности *S.*

**§ 7. Поля без роторов и поля без дивергенций**

Теперь перейдем к некоторым следствиям из наших новых теорем. Возьмем сперва случай вектора, у которого ротор (или вихрь) *повсюду* равен нулю. Тогда, согласно теореме Стокса, циркуляция по любому контуру — нуль. Если мы теперь возь­мем две точки (1) и (2) на замкнутой кривой (фиг. 3.12), то кри­волинейный интеграл от касательной составляющей от (1) до (2) не должен зависеть от того, какой из двух возможных путей мы выбрали. Можно заключить, что интеграл от (1) до (2) может зависеть только от расположения этих точек, т. е. что он есть функция только от координат точек. Той же логикой мы пользо­вались в вып. 1, гл. 14, когда доказывали, что если интеграл от некоторой величины по произвольному замкнутому контуру всегда равен нулю, то этот интеграл может быть представлен в виде разности функций от координат двух концов. Это позво­лило нам изобрести понятие потенциала. Мы доказали далее, что векторное поле является градиентом этой потенциальной функ­ции [см. вып. 1, уравнение (14.13)].

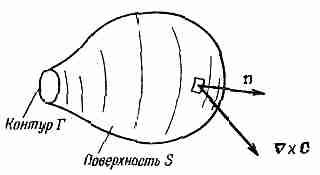
Отсюда следует, что любое векторное поле, у которого ротор равен нулю, может быть представлено в виде градиента неко­торой скалярной функции, т. е. если АXС=0 всюду, то существует некоторая функция ψ (пси), для которой С = ∇ψ (полезное представление). Значит, мы можем, если захотим, опи­сывать этот род векторных полей при помощи скалярных полей.

Теперь докажем еще одну формулу. Пусть у нас есть *про­извольное* скалярное поле ϕ (фи). Если взять его градиент *∇*ϕ, то интеграл от этого вектора по любому замкнутому контуру должен быть равен нулю.



*Фиг. 3.12. Если ∇XС равно нулю, то циркуляция по замкнутой при­вой Г тоже нуль.*

*Криволинейный интеграл от C•ds на участке от (1) до (2) вдоль а должен быть равен интегралу вдоль b.*



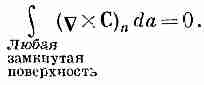
*Фиг. 3.13. При переходе к пределу замкнутой поверхности поверхно­стный интеграл от (∇XС)n должен обратиться в нуль.*

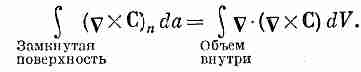
C:\1\pic\gray.jpgКриволинейный интеграл от точки (1) до точки (2) равен [ϕ(2)- ϕ (1)]. Если точки (1) и (2) совпадают, то наша теорема 1 [уравнение (3.8)] сообщает нам, что криволинейный интеграл равен нулю:

C:\1\pic\gray.jpgПрименяя теорему Стокса, можно заключить, что

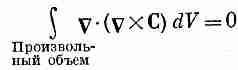
C:\1\pic\gray.jpgпо *любой* поверхности. Но раз интеграл по *любой* поверхности равен нулю, то подынтегральное выражение обязано быть равно нулю. Значит,

Тот же результат был доказан в гл. 2, § 7 при помощи векторной алгебры.

Рассмотрим теперь частный случай, когда на *маленький* контур Г натягивается *большая* поверхность *S* (фиг. 3.13). Мы хотим посмотреть, что случится, когда контур стянется в точку. Тогда граница поверхности исчезнет, а сама поверхность превратится в замкнутую. Если вектор С повсюду конечен, то криволинейный интеграл по Г должен стремиться к нулю по мере стягивания контура (интеграл в общем-то пропорционален длине контура Г, а она убывает). Согласно теореме Стокса, поверхност­ный интеграл от (∇XС)n тоже должен убывать до нуля. Когда поверхность замыкается, то при этом каким-то образом в ин­теграл привносится вклад, который взаимно уничтожается с накопленным ранее. Получается новая теорема:

Это нас должно заинтересовать, потому что у нас уже есть одна теорема о поверхностном интеграле векторного поля. Та­кой поверхностный интеграл равен объемному интегралу от дивергенции вектора, как это следует из теоремы Гаусса [уравнение (3.18)]. Теорема Гаусса в применении к ∇XС утверждает, что

(3.40)

Мы заключаем, что интеграл в правой части должен обращать­ся в нуль и что это должно быть справедливо для любого векторного по­ля С, каким бы оно ни было.

(3.41)

Раз уравнение (3.41) выполнено для *произвольного объема,* то *в каждой точке* пространства подын­тегральное выражение должно быть равно нулю. Получается, что

C:\1\pic\gray.jpg

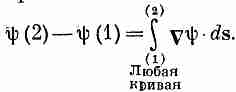
Тот же результат был выведен с помощью векторной алгебры в гл. 2, § 7. Теперь мы начинаем понимать, как все здесь прила­жено одно к другому.

**§ *8. Итоги***

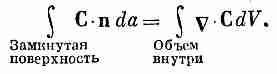
Подытожим теперь все, что мы узнали о векторном исчисле­нии. Вот самые существенные моменты гл. 2 и 3.

1. Операторы *д/дх, д/ду* и *д/dz* можно рассматривать как три составляющих векторного оператора ∇*;* формулы, сле­дующие из векторной алгебры, остаются правильными, если этот оператор считать вектором

C:\1\pic\gray.jpg

2. Разность значений скалярного поля в двух точках равна криволинейному интегралу от касательной составляющей гра­диента этого скаляра вдоль любой кривой, соединяющей пер­вую точку со второй:

(3.42)

1. Поверхностный интеграл от нормальной составляющей произвольного вектора по замкнутой поверхности равен интег­ралу от дивергенции вектора по объему, лежащему внутри этой поверхности:

(3.43)

4. Криволинейный интеграл от касательной составляющей произвольного вектора по замкнутому контуру равен поверх­ностному интегралу от нормальной составляющей ротора этого вектора по произвольной поверхности, ограниченной этим кон­туром

(3.44)

**От редактора. Начиная изучать уравнения Максвелла, обратите вни­мание, что в этих лекциях используется рационализированная система единиц, в которой уравнения Максвелла не содержат коэффициентов.**

**Более привычно вместо ε0 писать ε0/4π; тогда коэффициент 4π исче­зает из знаменателя закона Кулона (4.9), но появляется в правых частях уравнений (4.1) и (4.3). [Улучшение системы единиц всегда похоже на Тришкин кафтан.]**

**Кроме того, вместо квадрата скорости света вводят новую постоян­ную μ0=ε0/c2, называют ее (довольно неудачно) магнитной проницаемос­тью пустоты (так же, как ε0 называют диэлектрической проницаемостью пустоты) и обозначают ε0E=D, B=μ0H.**

**Будьте осторожны! Проверяйте систему единиц, когда открываете новую книгу об электричестве!**

***\*******Конечно, последующие выкладки в равной мере относятся и к лю­бому прямоугольному параллелепипеду.***

***Глава 4***

**ЭЛЕКТРОСТАТИКА**

[**§1. Стат****ика**](#a1)

[**§2.Закон** **Кулона; наложение сил**](#a2)

[**§З. Элект****рический потенциал**](#a3)

[**§4.** **E=-∇ϕ**](#a4)

[**§5.Пото****к поля Е**](#a5)

[**§6.Закон Гау****сса; дивергенция поля Е**](#a6)

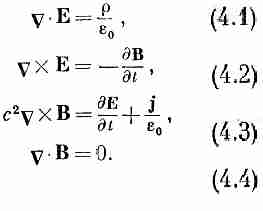
[**§7 .Поле заряжен****ного шара**](#a7)

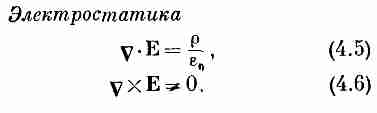
[**§8. Линии поля; э****квипотенциальные поверхн****ости**](#a8)

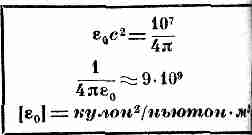
***Повторишь: гл.13 и* 14 (вып. 1) «Работа и потенциальная энергия»**

**§ 1. Статика**

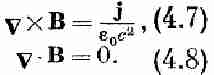
Начнем теперь подробное изучение теории электромагнетизма. Она вся (весь электромаг­нетизм целиком) запрятана в *уравнениях Мак­свелла:*



Явления, описываемые этими уравнениями, могут быть очень сложными. Но прежде чем перейти к более сложным, мы начнем со сравни­тельно простых и сначала научимся обращаться с ними. Самым легким для изучения является случай, который называют *статическим.* Это случай, когда от времени ничего не зависит, когда все заряды либо намертво закреплены на своих местах, либо если уж движутся, то их ток постоянен (т. е. ρ и j постоянны во времени). В этих условиях в уравнениях Максвелла все члены, являющиеся производными по времени, обращаются в нуль, и уравнения приобретают следующий вид:



###### Магнитостатика



Обратите внимание на интересное свойство этой системы четырех уравнений. Она распалась на две части. Электрическое поле Е появляется только в первой паре уравнений, а магнит­ное поле В — только во второй. Между собой эти два поля совсем не связаны. Это означает, что *коль скоро заряды и токи постоян­ны, то электричество и магнетизм* — *явления разные.* Нельзя обнаружить никакой зависимости полей Е и В друг от друга, пока не возникают изменения в зарядах или токах, скажем, пока конденсатор не начнет заряжаться или магнит двигаться. Только когда возникают сравнительно быстрые изменения, так что временные производные в уравнениях Максвелла достигают заметной величины, Е и В начинают влиять друг на друга.

Если вы всмотритесь в уравнения статики, то обнаружите, что для изучения математических свойств векторных полей эти два предмета — электростатика и магнитостатика — являются идеальным объектом. Электростатика — это чистый пример век­торного поля с *нулевым ротором* и *заданной дивергенцией,* а магнитостатика — чистейший пример поля с *нулевой диверген­цией* и *заданным ротором.* Более общепринятый (и, быть может, с чьей-то точки зрения более удовлетворительный) путь изло­жения теории электромагнетизма состоит в том, чтобы начать с электростатики и выучить тем самым все про дивергенцию. Магнитостатику и ротор оставляют на потом. И лишь в кон­це объединяют и электричество, и магнетизм. Мы же с вами начали с полной теории векторного исчисления. Применим те­перь ее к частному случаю электростатики, к полю Е, задавае­мому первой парой уравнений.

Начнем с самых простых задач, в которых положения всех зарядов фиксированы. Если бы нам нужно было изучить элект­ростатику только на этом уровне (а этим мы и будем заниматься в ближайших двух главах), то жизнь наша была бы очень проста. Все было бы почти тривиальным и нам понадобился бы, как вы в этом сейчас убедитесь, только закон Кулона да несколько интегрирований. Однако во многих реальных электростатиче­ских задачах мы вначале *не знаем,* где находятся заряды. Мы знаем только, что они в зависимости от свойств вещества распре­делились как-то и где-то. Положение, которое примут заряды, зависит от поля Е, а оно в свою очередь зависит от расположе­ния зарядов. И тогда все сразу усложняется. Если, например, заряженное тело поднесено к проводнику или к изолятору, то электроны и протоны в проводнике или изоляторе начнут пере­текать на новое место. Одна часть плотности заряда ρ в уравнении (4.5) будет нам известна — это тот заряд, который мы подносим; но в ρ войдут и другие части от тех зарядов, которые перетекают. Мы обязаны будем учесть движение всех зарядов. Возникнут довольно тонкие и интересные задачи.

Однако настоящая глава, хоть она и посвящена электро­статике, не будет касаться самых красивых и тонких вопросов этой науки. В ней будут рассмотрены лишь такие ситуации, в которых можно предположить, что расположение всех зарядов известно. Но и в этом случае, прежде чем научиться справляться со сложными случаями, естественно сначала освоиться с про­стыми.

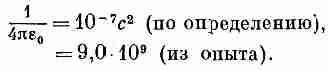
**§ 2. Закон Кулона; наложение сил**

Логично было бы принять за отправную точку уравнения (4.5) и (4.6). Но легче начать с другого, а потом вернуться к этим уравнениям. Результат получится одинаковый. Мы начнем с закона, о котором говорилось раньше,— с закона Кулона, утверждающего, что между двумя покоящимися зарядами дей­ствует сила, прямо пропорциональная произведению зарядов и обратно пропорциональная квадрату расстояния между ними. Сила направлена по прямой от одного заряда к другому.

# Закон Кулона

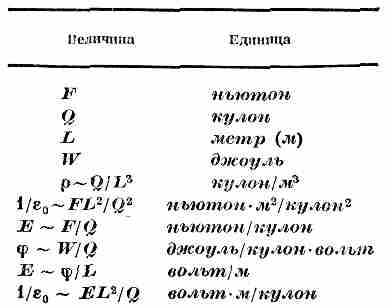
C:\1\pic\gray.jpg

(4.9)

здесь F1 — сила, действующая на заряд q1; е12 — единичный вектор, направленный *от q2* к *q1 ,* а г12— расстояние между q1 и q2. Сила F2, действующая на q2, равна и противоположна силе F1. Множитель пропорциональности по историческим причи­нам пишется в виде 1/4яе0. В системе единиц СИ, которой мы пользуемся, он определяется как 10-7 от квадрата скорости света. Так как скорость света примерно 3•108 *м/сек,* то множи­тель приблизительно равен 9•109, и единица оказывается рав­ной *ньютон*•*м2/кулон2,* или *вольт* •*м/кулон*

(4.10)

Если зарядов больше двух (а именно такие случаи наи­более интересны), то закон Кулона нужно дополнить другим существующим в природе фактом: сила, действующая на заряд, есть векторная сумма кулоновских сил, действующих со сто­роны всех прочих зарядов. Этот экспериментальный факт на­зывается «принципом наложения», или «принципом суперпозиции». Это и есть все, что имеется в электростатике. Если доба­вить к закону Кулона принцип наложения, то больше ничего в ней не останется. Точно к таким же выводам, ни больше, ни меньше, приведут уравнения электростатики, уравнения (4.5) и (4.6).



C:\1\pic\gray.jpgПрименяя закон Кулона, удобно ввести понятие об электри­ческом поле. Мы говорим, что поле Е(1) — это сила, действую­щая со стороны прочих зарядов *на единицу заряда q1 .* Деля (4.9) на *q1 ,*мы получаем для действия всех зарядов, кроме *q1,*

(4.11)

Кроме того, мы считаем, что Е(1) описывает нечто, существую­щее в точке (1), даже если в ней нет заряда q*1* (в предположении, что все прочие заряды сохранили свои позиции). Мы говорим: Е(1) — это электрическое поле в *точке* (1).

Электрическое поле Е — это вектор, так что в (4.11) на са­мом деле написаны три уравнения, по одному для каждой ком­поненты. Расписывая x-компоненту в явном виде, получаем

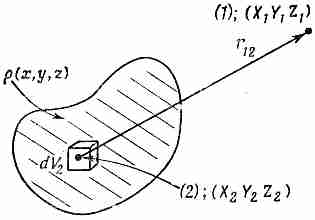
C:\1\pic\gray.jpg

(4.12)

и точно так же для остальных компонент.

Если зарядов много, то поле Е в любой точке (1) равно сумме вкладов от всех зарядов. Каждый член в сумме будет выглядеть как (4.11) или (4.12). Пусть *qj —* величина j-го заряда, а г1*j* — смещение q*j* от точки (1); тогда мы напишем

C:\1\pic\gray.jpg

(4.13)

*Фиг. 4.1. В точке (1)* ***э****лектрическое поле* Е *от некоторо­го распределения зарядов полу­чается из интеграла по рас­пределению.*

*Точка* (I) *может находится также внутри распределения.*

что означает, конечно,

C:\1\pic\gray.jpg

и т. д.

Часто бывает удобно игнорировать тот факт, что заряды всегда существуют в виде отдельных кусочков, таких, как элект­роны или протоны, а считать, что они размазаны сплошным пятном, или, как говорят, описываются «распределением». До тех пор пока нам все равно, что происходит в малых масшта­бах, такое описание вполне законно. Распределение заряда описывается «плотностью заряда» ρ *(х, у, z).* Если количество заряда в небольшом объеме ΔV2 близ точки (2) есть Δq2, то ρ определяется равенством

C:\1\pic\gray.jpg

(4.15)

Пользуясь теперь законом Кулона при непрерывном рас­пределении заряда, мы заменяем в уравнениях (4.13) или (4.14) суммы интегралами по всему объему, содержащему заряды. Получается

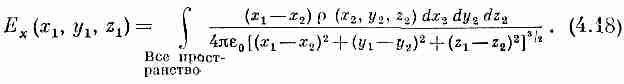
(4.16)

Некоторые предпочитают писать

C:\1\pic\gray.jpg

где r12 — вектор смещения *от (2) к* (1) (фиг. 4.1). Интеграл для Е тогда запишется в виде

(4.17)

Если мы хотим действительно провести интегрирование до конца, то обычно приходится интегралы расписывать подробнее. Для x-компоненты уравнений (4.16) или (4.17) получается

Мы не собираемся вычислять что-либо по этой формуле. Написали мы ее здесь только для того, чтобы подчеркнуть, что мы полностью решили те электростатические задачи, в которых известно расположение всех зарядов.

*Дано:* Заряды.

*Определить:* Поля.

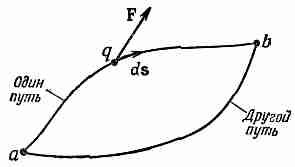
*Решение:* Возьми этот интеграл.

Так что по существу все сделано; остается только проделать сложные интегрирования по трем переменным. Эта работа в са­мый раз для счетной машины!

Пользуясь этими интегралами, мы можем найти поле за­ряженной плоскости, заряженной линии, заряженной сферы и любого выбранного распределения. Хотя мы сейчас начнем чер­тить силовые линии, говорить о потенциалах и вычислять ди­вергенции, важно понимать, что ответ на все решаемые задачи в принципе уже готов. Просто порой бывает легче взять интег­рал, придумав фокус, чем проделывать все выкладки чест­но. Но чтобы догадываться, нужно научиться разным ухищ­рениям. Быть может, лучше было бы вычислять интегралы не­посредственно, а не тратить силы на остроумные способы реше­ния да демонстрировать свою сообразительность. Но все-таки мы пойдем по пути развития сообразительности. Переходим, таким образом, к обсуждению некоторых других особенностей электрического поля.

**§ 3. Электрический потенциал**

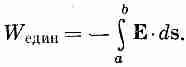
Для начала усвоим понятие электрического потенциала, связанное с работой переноса заряда из одной точки в другую. Пусть имеется какое-то распределение зарядов. Оно создает электрическое поле. Спрашивается, какую работу надо затра­тить, чтобы перенести небольшой заряд из одной точки в другую? Работа, произведенная *против* действия электрических сил при переносе заряда по некоторому пути, равна *минус* компоненте электрической силы в направлении движения, проинтегрирован­ной по этому пути. Если заряд переносится от точки *а* к точке b*,* то



*Фиг. 4.2. Работа переноса заряда от а к b равна минус интегралу от F•ds no выбранному пути.*

где F — электрическая сила, действующая *на* заряд в каждой точке, a ds — дифференциал вектора перемещения вдоль траек­тории (фиг. 4.2).

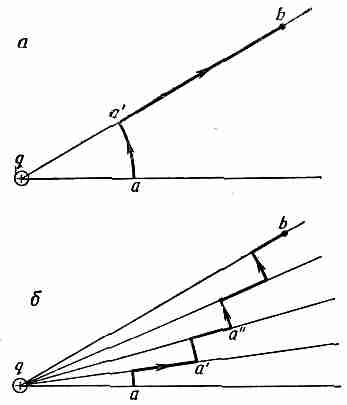
Для наших целей интереснее рассмотреть работу переноса *единицы* заряда. Тогда сила, действующая на такой заряд, численно совпадает с электрическим полем. Обозначая в этом случае работу против действия электрических сил буквой *Wедин ,* напишем



(4.19)

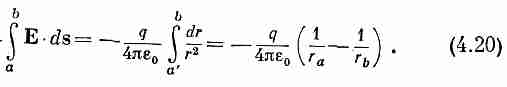
Вообще говоря, то, что получается при интегрированиях такого сорта, зависит от выбранного пути интегрирования. Но если бы интеграл в (4.19) зависел от пути, мы бы могли извлечь из поля работу, поднеся заряд к *b* по одному пути и унеся обратно к *а* по другому. Можно было бы подойти к *b* по тому пути, где *W* меньше, а *удалиться* по тому пути, где оно больше, *получив* работы больше, чем было *вложено,*

В принципе нет ничего невозможного в том, чтобы получать работу из поля. Мы еще познакомимся с полями, в которых это возможно. Может оказаться, что, двигая заряды, вы действуете на остальную часть всего «механизма» с какой-то силой. Если «механизм» сам движется против этой силы, он будет терять энергию, и полная энергия будет тем самым оставаться постоян­ной. В *электростатике,* однако, никакого «механизма» нет. Мы знаем, каковы те силы отдачи, которые действуют на источ­ники поля. Это кулоновские силы, действующие на заряды, ответственные за создание поля. Если положения всех прочих зарядов зафиксированы (а это допущение делается в одной только *электростатике),* то силы отдачи на них не смогут дей­ствовать. И тогда нет способа извлечь из них энергию, разу­меется, при условии, что принцип сохранения энергии в элект­ростатике справедлив. Мы, конечно, верим, что это так, однако попробуем все же показать, как это следует из закона силы Кулона.

Посмотрим сначала, что происходит в поле, созданном еди­ничным зарядом *q.* Пусть точка *а* удалена от *q* на расстояние r1, а точка b *—* на расстоя­ние r2.

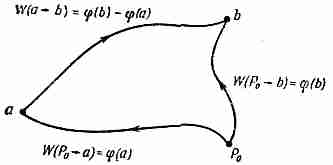
*Фиг. 4.3. При переносе проб­ного заряда от а к b по любому пути тратится одна и та же работа.*

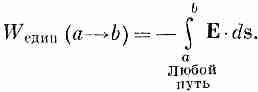
Перенесем теперь другой заряд, называемый «пробным» и равный еди­нице, от а до b*.* Изберем сперва самый легкий для расчета путь. Перенесем наш пробный заряд снача­ла по дуге круга, а после no радиусу (фиг. 4.3, *а).*

Рассчитать работу переноса по такому пути - детская забава (а иначе бы мы его и не выбрали). Во-первых, на участке aa*'* работа не производится. Поле по закону Кулона радиально, т. е. направлено поперек направления движения. Во-вторых, на участке *a'b* поле меняется как 1/r2 и направлено по движению. Так что работа переноса пробного заряда от *а к b* равна

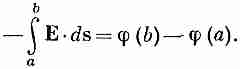
Выберем теперь другой легкий путь, скажем тот, который изображен на фиг. 4.3, *б.* Он идет попеременно то по дуге ок­ружности, то по радиусу. Каждый раз, когда путь пролегает по дуге, никакой работы не затрачивается. Каждый раз, когда путь идет по радиусу, интегрируется 1/r2. По первому радиаль­ному участку интеграл берется от r*a* до ra’., по следующему — от r*а.* до rа" и т. д. Сумма всех таких интегралов как раз равна одному интегралу, но в пределах от r*а* до r*b .* В общем получится тот же ответ, что и в первом испробованном нами пути. Ясно, что и для *любого* пути, составленного из произвольного числа участков такого вида, получится тот же результат.

Ну а как насчет плавных траекторий? Получим ли мы тот же ответ? Этот вопрос мы обсудили в вып. 1, гл. 13. Пользуясь теми же доводами, что и тогда, мы можем заключить, что работа переноса единичного заряда от *а* до bот пути не зависит:



*Фиг. 4.4. Работа, затрачен­ная на движение вдоль любого пути от а до b, равна минус работе от некоторой точки Р0 до а плюс работа от Р0 до b.*

А раз выполняемая работа зависит только от концов пути, то она может быть представлена в виде разности двух чисел. В этом можно убедиться следующим образом. Выберем отправ­ную точку *Р0* и договоримся оценивать наш интеграл, пользуясь только теми траекториями, которые проходят *через* точку *Р0 .* Обозначим работу, выполненную при движении против поля *от Р0* до точки а, через ϕ(а), а работу на участке *от Р0* до точки b *—* через ϕ(b) (фиг. 4.4). Работа перехода от *а к Р0* (по дороге к b*)* равна ϕ (a) с минусом, так что



(4.21)

Так как повсюду будет встречаться только разность значе­ний функции ϕ в двух точках, то положение точки *Р0* в сущности безразлично. Однако как только отправная точка выбрана, число ϕ тем самым определяется в *любой* точке пространства; значит, ϕ является *скалярным полем,* функцией от *х, у, z.* Эту скалярную функцию мы называем *электростатическим потен­циалом* в произвольной точке.

# C:\1\pic\gray.jpgЭлектростатический потенциал

(4.22)

C:\1\pic\gray.jpgЧасто очень удобно брать отправную точку на бесконеч­ности. Тогда потенциал ϕодиночного заряда в начале коорди­нат, взятый в произвольной точке *(х, у,* z), равен [см. уравнение (4.20)]

(4.23)

Электрическое поле нескольких зарядов можно записать в виде суммы электрических полей от первого заряда, от вто­рого, от третьего и т. д. Интегрируя сумму для того, чтобы определить потенциал, мы придем к сумме интегралов. Каждый из них — это потенциал соответствующего заряда. Значит, по­тенциал ϕ множества зарядов есть сумма потенциалов каждого из зарядов по отдельности. Таким образом, и для потенциалов существует принцип наложения. Пользуясь такими же аргу­ментами, как и тогда, когда мы искали электрическое поле группы зарядов или распределения зарядов, мы можем полу­чить окончательные формулы для потенциала ϕ в точке, обозна­ченной как (1):

C:\1\pic\gray.jpg

C:\1\pic\gray.jpg(4.24)

(4.25)

Не забывайте, что потенциал ϕ имеет физический смысл: это потенциальная энергия, которую имел бы единичный заряд, если его перенести в указанную точку пространства из неко­торой отправной точки.

**§4. E = -∇ϕ**

C:\1\pic\gray.jpgС какой стати нас заинтересовал потенциал ϕ? Силы, дейст­вующие на заряды, даются величиной Е — электрическим полем. Вся соль в том, что Е из ϕ очень легко получить, не труд­нее, чем вычислить производную. Рассмотрим две точки с одина­ковыми *у* и z, но с разными *х:* у одной *х,* у другой x+Δx;; поинте­ресуемся, какую работу надо совершить, чтобы перенести еди­ничный заряд из одной точки в другую. Путь переноса — го­ризонтальная линия от хдо х+Δх.Работа равна разности по­тенциалов в двух точках

Но работа против действия силы на том же отрезке равна

C:\1\pic\gray.jpg

Мы видим, что

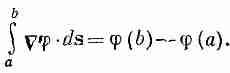
C:\1\pic\gray.jpg

(4.26)

Равным образом, *Еу=-дϕ/ду, Ez=-dϕ/dz;* все это в обозна­чениях векторного анализа можно подытожить так:

C:\1\pic\gray.jpg

4.27)

Это дифференциальная форма уравнения (4.22). Любую задачу, в которой заряды заданы, можно решить, вычислив по (4.24) или (4.25) потенциал и рассчитав по (4.27) поле. Уравнение (4.27) согласуется также с тем, что получается в векторном ана­лизе: с тем, что для любого скалярного поля

(4.28)

Согласно уравнению (4.25), скалярный потенциал ϕ пред­ставляется трехмерным интегралом, подобным тому, кото­рый мы писали для Е. Есть ли какая выгода в том, что вместо Е вычисляется ϕ? Да. Для вычисления ϕ нужно взять один ин­теграл, а для вычисления Е—три (ведь это вектор). Кроме того, обычно 1/r интегрировать легче, чем x/r3. Во многих прак­тических случаях оказывается, что для получения электриче­ского поля легче сперва подсчитать ϕ, а после взять градиент, чем вычислять три интеграла для Е. Это просто вопрос удобства.

Но потенциал ϕ имеет и глубокий физический смысл. Мы показали, что Е закона Кулона получается из Е=-gradϕ, где ϕ дается уравнением (4.22). Но если Е—это градиент скаляр­ного поля, то, как известно из векторного исчисления, ротор Е должен обратиться в нуль:

C:\1\pic\gray.jpg

(4.29)

Но это и есть наше второе основное уравнение электростатики — уравнение (4.6). Таким образом, мы показали, что закон Кулона дает поле Е, удовлетворяющее этому условию. Так что до сих пор все в порядке.

C:\1\pic\gray.jpgНа самом деле то, что ∇XЕ равно нулю, было доказано еще до того, как мы определили потенциал. Мы показали, что ра­бота обхода по замкнутому пути равна нулю, т. е. по *любому* пути.

Мы видели в гл. 3, что в таком поле ∇XЕ должно быть всюду равно нулю. Электрическое поле электро­статики — это поле без роторов.

Вы можете потренироваться в векторном исчислении, дока­зав равенство нулю вектора ∇XЕ другим способом, т. е. вычис­лив компоненты вектора ∇XЕ для поля точечного заряда по формулам (4.11). Если получится нуль, то принцип наложения обеспечит нам обращение ∇XЕ в нуль для любого распределе­ния зарядов.

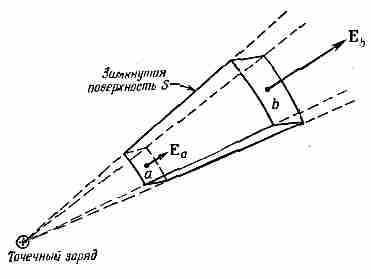
Следует подчеркнуть важный факт. Для любой *радиальной* силы выполняемая работа не зависит от пути и существует по­тенциал. Если вы вдумаетесь в это, то увидите, что все наши доказательства того, что интеграл работы не зависит от пути, сами определялись только тем, что сила от отдельного заряда была радиальна и сферически симметрична. То, что зависимость силы от расстояния имела вид 1/r2, не имело никакого значе­ния, при любой зависимости от rполучилось бы то же самое. Существование потенциала и обращение в нуль ротора Е выте­кают на самом деле только из *симметрии* и *направленности* электростатических сил. По этой причине уравнение (4.28) или (4.29) может содержать в себе только часть законов элект­ричества.

**§ 5. Поток поля Е**

Теперь мы хотим вывести уравнение, которое непосредст­венно и в лоб учитывает тот факт, что закон силы — это закон обратных квадратов. Кое-кому кажется «вполне естественным», что поле меняется обратно пропорционально квадрату расстоя­ния, потому что «именно так, мол, все распространяется». Возьмите световой источник, из которого льется поток света; количество света, проходящее через основание конуса с верши­ной в источнике, одно и то же независимо от того, насколько основание удалено от вершины. Это с необходимостью следует из сохранения световой энергии. Количество света на еди­ницу площади — интенсивность — должно быть обратно про­порционально площади, вырезанной конусом, т. е. квадрату расстояния от источника. Ясно, что по той же причине и элект­рическое поле должно изменяться обратно квадрату расстояния!

Но здесь ведь нет ничего похожего на «ту же причину». Ведь никто не может сказать, что электрическое поле есть мера чего-то такого, что похоже на свет и что поэтому должно сохра­няться. *Если бы у* нас была такая «модель» электрического поля, в которой вектор поля представлял бы направление и скорость (ну, например, был бы током) каких-то вылетающих маленьких «дробинок», *и* если бы эта модель требовала, чтобы число дро­бинок сохранялось и ни одна не могла пропасть после вылета из заряда, вот тогда мы могли бы говорить, что «чувствуем» неизбежность закона обратных квадратов. С другой стороны, непременно должен был бы существовать математический способ выражения этой физической идеи. Если бы электрическое поле *было* подобно сохраняющимся дробинкам, то оно меня­лось бы обратно пропорционально квадрату расстояния и мы могли бы описать такое поведение некоторым уравнением, т. е. чисто математическим путем. Если мы не утверждаем, что элект­рическое поле *сделано* из дробинок, а понимаем, что это просто модель, помогающая нам прийти к правильной математической теории, то ничего плохого в таком способе рассуждений нет.

Предположим, что мы на мгновение представили себе элект­рическое поле в виде потока чего-то сохраняющегося и текущего повсюду, за исключением того места, где расположен сам заряд (должен же этот поток откуда-то начинаться!).



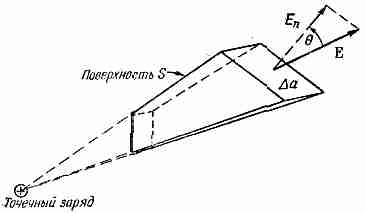
*Фиг. 4.5. Поток E* *из поверхности S равен нулю.*

Представим что-то (что именно — неважно), вытекающее из заряда в окружающее пространство. Если бы Е было вектором такого потока (как **h** — вектор теплового потока), то вблизи от точечного источника оно обладало бы зависимостью 1/r2. Теперь мы желаем исполь­зовать эту модель для того, чтобы глубже сформулировать закон обратных квадратов, а не просто говорить об «обратных квадратах». (Вам может показаться удивительным, почему вместо того, чтобы сходу, прямо и открыто сформулировать столь прос­той закон, мы хотим трусливо протащить то же самое, но с зад­него хода. Немного терпения! Это окажется небесполезным.) Спросим себя: чему равно «вытекание» Е из произвольной замкнутой поверхности в окрестности точечного заряда? Для начала возьмем простенькую поверхность — такую, как пока­зано на фиг. 4.5. Если поле Е похоже на поток, то суммарное вытекание из этого ящика должно быть равно нулю. Это и полу­чается, если под «вытеканием» из этой поверхности мы понимаем поверхностный интеграл от нормальной составляющей Е, т. е. поток Е в том смысле, который был установлен в гл. 3. На бо­ковых гранях нормальная составляющая Е равна нулю. На сферических гранях нормальная составляющая Е равна самой величине Е, с минусом на меньшей грани и с плюсом на большей. Величина Е убывает как 1/r2, а площадь грани растет как r2, так что их произведение от r не зависит. Приток Е через грань *а* в точности гасится оттоком через грань b*.* Суммарный поток через *S* равен нулю, а это все равно, что сказать, что

C:\1\pic\gray.jpg

(4.30)

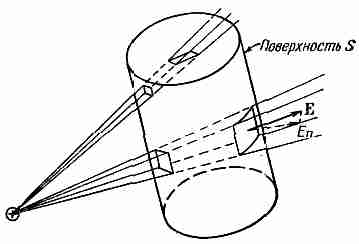
на этой поверхности.

Теперь покажем, что две «торцевые» поверхности могут быть без ущерба для величины интеграла (4.30) перекошены отно­сительно радиуса. Хотя это верно всегда, но для наших целей

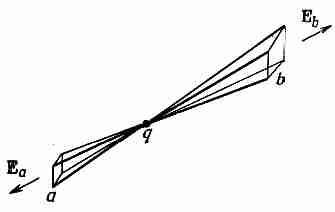
*Фиг. 4.6. Поток Е из поверхности S равен нулю.*

достаточно только показать, что это справедливо тогда, когда «торцы» малы и стягивают малый угол с вершиной в источнике, т. е. в действительности бесконечно малый угол. На фиг. 4.6 показана поверхность S, «боковые грани» которой радиальны, а «торцы» перекошены. На рисунке они не малы, но надо пред­ставить себе, что на самом деле они очень малы. Тогда поле Е над поверхностью будет достаточно однородным, так что можно взять его значение в центре. Если торец наклонен на угол θ, то его площадь возрастает в 1/cosθ раз, а *Еn —* компонента Е, нормальная к поверхности торца, убывает в cosθ раз, так что произведение *ЕnΔа* не меняется. Поток из всей поверхности *S* по-прежнему равен нулю.

Теперь уже легко разглядеть, что и поток из объема, окру­женного *произвольной* поверхностью *S,* обязан быть равным ну­лю. Ведь любой объем можно представить себе составленным из таких частей, как на фиг. 4.6. Вся поверхность раз­делится на пары торцевых участков, а поскольку потоки через каждую из них внутрь и наружу объема попарно уничтожаются, то и суммарный поток через поверхность обратится в нуль. Идея эта иллюстрируется фиг. 4.7. Мы получаем совершенно общий результат: суммарный поток Е через *любую* поверхность *S* в поле точечного заряда равен нулю.



*Фиг. 4.7. Всякий объем можно представлять себе состоящим из бесконечно ма­лых усеченных конусов.*

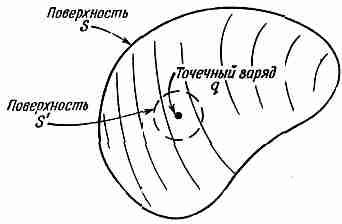
*Поток E сквозь один конец каж­дого конического сегмента равен и противоположен потоку сквозь другой конец. Общий поток из поверхности S поэтому равен пулю.*

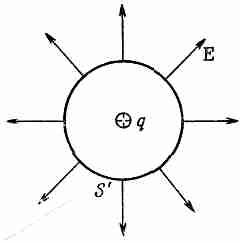
*Фиг. 4.8. Если заряд нахо­дится внутри поверхности, поток наружу не равен нулю.*

Будьте, однако, внимательны! Наше доказательство рабо­тает только тогда, когда поверхность *S не окружает* заряд. А что случилось бы, если бы точечный заряд оказался *внутри* поверхности? Как и раньше, поверхность можно было бы разде­лить на пары площадок, связанные радиальными прямыми, про­ходящими через заряд (фиг. 4.8). Потоки через эти участки по той же причине, что и раньте, по-прежнему попарно равны, но только теперь их знаки *одинаковы.* Поток из поверхности, *окружающей* заряд, *не равен* нулю. Тогда чему же он равен? Это можно определить с помощью фокуса. Допустим, что мы «убрали» заряд «изнутри», окружив его маленькой поверхно­стью *S'* так, чтобы она лежала целиком внутри первоначальной поверхности 5 (фиг. 4.9). Теперь в объеме, заключенном *между* двумя поверхностями *S* и *S',* никакого заряда нет. Общий по­ток из этого объема (включая поток через *S')* равен нулю, в чем можно убедиться при помощи прежних аргументов. Они говорят нам, что поток через *S'* внутрь *объема* такой же, как поток через *S* наружу.

Для *S'* мы можем выбрать любую, какую угодно форму, поэтому давайте сделаем ее сферой с зарядом в центре (фиг. 4.10). Тогда поток через нее подсчитать легко. Если радиус малой сферы равен r, то значение Е повсюду на ее поверхности равно

C:\1\pic\gray.jpg

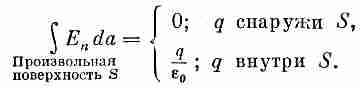
и направлено всегда по нормали к поверхности. Весь поток

*Фиг. 4.9. Поток через S равен потоку через S'.*

*Фиг. 4.10****.*** *Поток через сфериче­скую поверхность, охватывающую точечный заряд q, равен qlε0.*

через *S'* получится, если эту нормальную составляющую Е умножить на площадь поверхности:

C:\1\pic\gray.jpgПоток через поверхность

т. е. равен числу, не зависящему от радиуса сферы! Значит, и поток наружу через *S* тоже равен q/ε0; это значение не зависит от формы *S* до тех пор, пока заряд *q* находится внутри. Наши выводы мы можем записать так:

(4.32)

Давайте вернемся к нашей аналогии с «дробинками» и по­смотрим, есть ли в ней смысл. Наша теорема утверждает, что суммарный поток дробинок через поверхность равен нулю, если поверхность не окружает собой ружье, стреляющее дробью. А если ружье окружено поверхностью, то какого бы размера или формы она ни была, количество проходящих через нее дро­бинок всегда одно и то же — оно дается скоростью, с которой дробинки вылетают из ружья. Все это выглядит вполне разумно для сохраняющихся дробинок. Но сообщает ли эта модель нам хоть что-то сверх того, что получается просто из уравнения (4.32)? Никому не удалось добиться того, чтобы «дробинки» произвели на свет что-нибудь сверх этого закона. Кроме него, они порождают только ошибки. Поэтому-то мы сегодня предпо­читаем чисто абстрактное представление об электромагнитном поле.

**§ 6. Закон Гаусса; дивергенция поля Е**

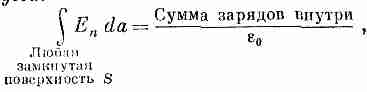
Наш изящный результат — уравнение (4.32) — был дока­зан для отдельного точечного заряда. А теперь допустим, что имеются два заряда: заряд *ql—*в одной точке и заряд (q2 — в другой. Задача выглядит уже потруднее. Теперь электрическое поле, нормальную составляющую которого мы интегрируем, это уже поле, созданное обоими зарядами. Иначе говоря, если e1—то электрическое поле, которое создал бы один только заряд q1 ,a E2 — электрическое поле, создаваемое одним зарядом *q2,* то суммарное электрическое поле равно Е=Е1 + Е2. Поток через произвольную замкнутую поверхность *S* равен

C:\1\pic\gray.jpg

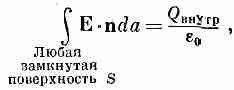
(4.33)

Поток при наличии двух зарядов — это поток, вызванный од­ним зарядом, плюс поток, вызванный другим. Если оба находятся снаружи *S,* то поток сквозь *S* равен нулю. Если *ql* нахо­дится внутри *S, a q2 —* снаружи, то первый интеграл даст q1/ε0, а второй — нуль. Если поверхность окружает оба заряда, то каждый внесет вклад в интеграл и поток окажется равным (q1+q2)/ε0. Общее правило очевидно: суммарный поток из замк­нутой поверхности равен суммарному заряду *внутри* нее, де­ленному на ε0.

Этот результат представляет собой важный общий закон электростатического поля, и называется он теоремой Гаусса,

*Закон Гаусса:*

(4.34)

или

(4.35)

C:\1\pic\gray.jpgгде

(4.36)

Из нашего вывода видно, что закон Гаусса вытекает из того факта, что показатель степени в законе Кулона в точности равен двум. Поле с законом 1/r3, да и любое поле 1/rn с n≠2, не привело бы к закону Гаусса. Значит, закон Гаусса как раз выражает (только в другой форме) закон сил Кулона, дей­ствующих между двумя зарядами. Действительно, отправляясь от закона Гаусса, можно вывести закон Кулона. Оба они со­вершенно равноценны до того момента, пока силы между заря­дами действуют радиально.

C:\1\pic\gray.jpgТеперь мы хотим записать закон Гаусса на языке произ­водных. Чтобы это сделать, применим его к поверхности бес­конечно малого куба. В гл. 3 мы показали, что поток Е из такого куба равен дивергенции ∇•Е, помноженной на объем *dV* куба. Заряд внутри *dV по* определению ρ равен ρ*dV,* так что закон Гаусса дает

или

C:\1\pic\gray.jpg

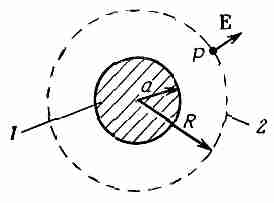
(4.38)

Дифференциальная форма закона Гаусса — это первое из наших фундаментальных уравнений поля в электростатике, уравнение (4.5). Мы теперь показали, что два уравнения электростатики (4.5) и (4.6) эквивалентны закону силы Кулона. Разберем один пример применения закона Гаусса (другие примеры будут рас­смотрены позже).

**§ 7. Поле заряженного шара**

Одной из самых трудных задач, которую пришлось нам ре­шать, когда мы изучали теорию гравитационного притяжения, было доказать, что сила, создаваемая твердым шаром на его поверхности, такая же, как если бы все вещество шара было сконцентрировано в его центре. Много лет Ньютон не решался обнародовать свою теорию тяготения, так как не был уверен в правильности этой теоремы. Мы доказали ее в вып. 1, гл. 13, взяв интеграл для потенциала и вычислив силу тяготения по градиенту. Теперь эту теорему мы можем доказать очень просто. Но на этот раз мы докажем не совсем ее, а сходную теорему для однородно заряженного электричеством шара. (Поскольку за­коны электростатики и тяготения совпадают, то то же доказа­тельство может быть проведено и для поля тяготения.)

C:\1\pic\gray.jpgЗададим вопрос: каково электрическое поле Е в точке *Р* где-то снаружи сферы, наполненной однородно распределенным зарядом? Так как здесь нет «выделенного» направления, то закон­но допустить, что Е всюду направлено прямо от центра сферы. Рассмотрим воображаемую сферическую поверхность, концент­рическую со сферой зарядов и проходящую через точку *Р* (фиг. 4.11). Для этой сферы поток наружу равен



Ф*иг*. *4.11. Применение закона Гаусса для определения поля одно­родно заряженного шара.*

*1* — *распределение заряда ρ*; *2* — гаус­сово поверхность S.

C:\1\pic\gray.jpgЗакон Гаусса утверждает, что этот поток равен суммарному за­ряду сферы *Q* (деленному на ε0):

или

C:\1\pic\gray.jpg

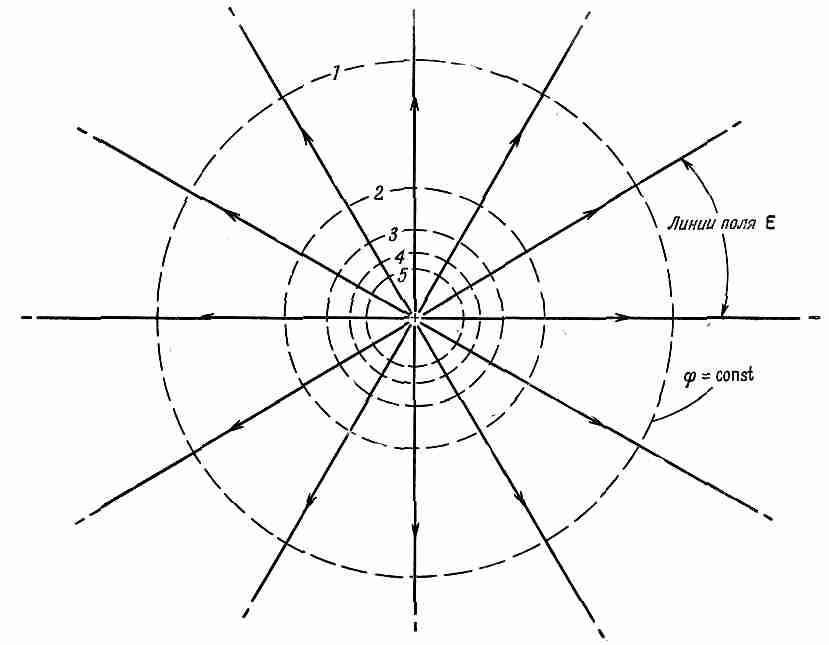
(4.39)

а это как раз та формула, которая получилась бы для точеч­ного заряда Q*.* Мы решили проблему Ньютона проще, без ин­теграла. Конечно, это кажущаяся простота; вам пришлось зат­ратить какое-то время на то, чтобы разобраться в законе Гаус­са, и вы можете думать, что на самом деле время нисколько не сэкономлено. Но когда вам придется часто применять эту тео­рему, то она практически окупится. Все дело в привычке.

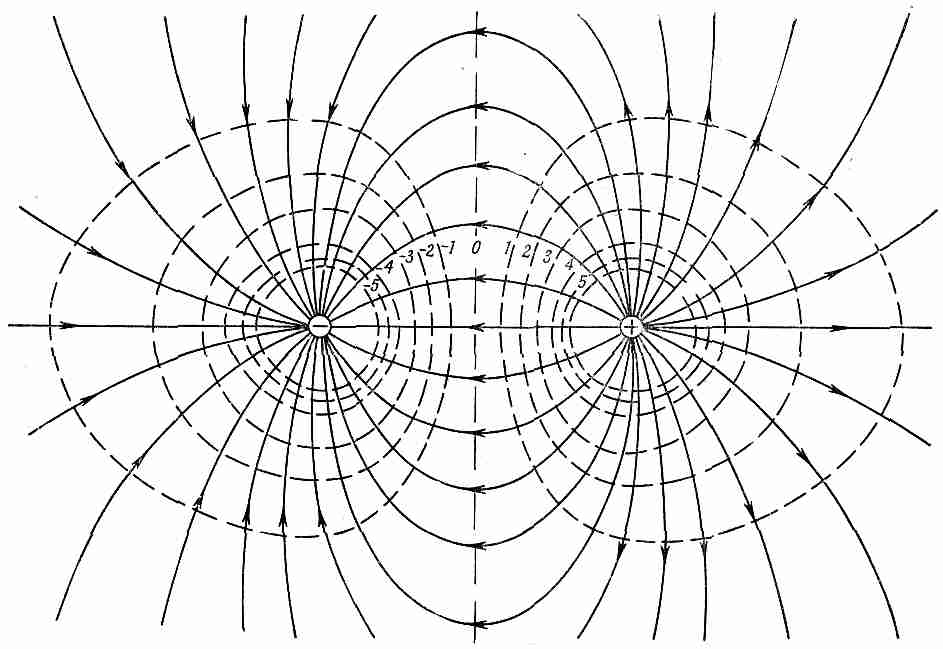
**§ 8. Линии поля; эквипотенциальные поверхности**

Теперь мы собираемся дать геометрическое описание электро­статического поля. Два закона электростатики: один — о пропор­циональности потока и внутреннего заряда и другой — о том, что электрическое поле есть градиент потенциала, могут также быть изображены геометрически. Мы проиллюстрируем это дву­мя примерами.

Первый пример: возьмем поле точечного заряда. Проведем линии в направлении поля, которые повсюду касательны к век­торам поля (фиг. 4.12). Их называют *линиями поля.* Линии поля всюду показывают направление электрического вектора. Но, кроме этого, мы хотим изобразить и абсолютную величину векто­ра. Можно ввести такое правило: пусть напряженность электри­ческого поля представляется «плотностью» линий. Под этим мы подразумеваем число линий на единицу площади, перпенди­кулярной линиям. С помощью этих двух правил мы можем на­чертить картину электрического поля. Для точечного заряда плотность линий должна убывать как 1/r2. Но площадь сфери­ческой поверхности, перпендикулярной к линиям на всех радиу­сах r*, возрастает как r*2, так что если мы сохраним всюду, на *всех* расстояниях от центра, *одно и то же число* линий, то их *плот­ность* останется пропорциональной величине поля.



*Фиг. 4.12. Линии поля и эквипотенциальные поверхности для положительного точечного заряда.*



*Фиг. 4.13. Линии поля и эквипотенциальные поверхности для двух равных*, но »разноименных *точечных зарядов.*

Мы можем гарантировать неизменность числа линий на всех расстояниях, если обеспечим *непрерывность* линий, т. е. если уж линия вышла из заряда, то она никогда не кончится. На языке линий поля за­кон Гаусса утверждает, что линии могут начинаться только в плюс-зарядах и кончаться только в минус-зарядах. А число линий, *покидающих* заряд *q,* должно быть равно q/ε0.

Сходную геометрическую картину можно отыскать и для потенциала ϕ. Проще всего изображать его, рисуя поверхности, на которых ϕ постоянно. Их называют *эквипотенциальными,* т. е. поверхностями одинакового потенциала. Какова геомет­рическая связь эквипотенциальных поверхностей и линий поля? Электрическое поле является градиентом потенциала. Градиент направлен по самому быстрому изменению потенциала, поэтому он перпендикулярен к эквипотенциальной поверхности. Если бы Е небыло перпендикулярно к поверхности, у него су­ществовала бы составляющая *вдоль* поверхности и потенциал изменялся бы вдоль поверхности и тогда нельзя было бы считать ее эквипотенциальной. Эквипотенциальные поверхности долж­ны поэтому непременно всюду проходить поперек линий элект­рического поля.

У отдельно взятого точечного заряда эквипотенциальные поверхности — это сферы с зарядом в центре. На фиг. 4.12 показано пересечение этих сфер с плоскостью, проведенной че­рез заряд.

В качестве второго примера рассмотрим поле близ двух одинаковых зарядов, одного положительного, а другого отри­цательного. Это поле получить легко. Это суперпозиция (нало­жение) полей каждого из зарядов. Значит, мы можем взять две картинки, похожие на фиг. 4.12, и наложить их... нет, это невозможно! Тогда получились бы пересекающиеся линии поля, а этого быть не может, потому что Е не может иметь в одной точке *двух* направлений. Неудобство картины линий поля теперь становится очевидным. С помощью геометрических рассуждений невозможно в простой форме проанализировать, куда пойдут новые линии. Из двух независимых картин нельзя получить их сочетание. Принцип наложения, столь простой и глубокий прин­цип теории электрических полей, в картине полевых линий не имеет простого соответствия.

Картина полевых линий все же имеет свою область приме­нимости, так что мы можем все же захотеть начертить эту кар­тину для пары равных (и противоположных) зарядов. Если мы вычислим поля из уравнения (4.13), а потенциалы из (4.23), то сумеем начертить и линии поля и эквипотенциалы.

Фиг. 4.13 демонстрирует этот результат. Но сперва пришлось решить за­дачу аналитически!

***Глава* 5**

ЗАКОНА ГАУССА ПРИМЕНЕНИЯ

[**§ 1.Электростатика— это есть закон Гаусса** **плюс...**](#a1)

[**§2.Равновес****ие в электростати­ческом поле**](#a2)

[**§3. Равновесие с п****роводниками**](#a3)

[**§4. Устойчивост****ь а****томов**](#a4)

[**§5.Поле заря****женной прямой линии**](#a5)

[**§6. Заряженная п****лоскость; пара плоскостей**](#a6)

[**§7.Однородно заряженн****ый шар; заряженная сфера**](#a7)

[**§8.Точен ли зако****н Кулона?**](#a8)

[**§9. Поля про****водника**](#a9)

[**§10.По****ле внутр****и по****лости проводника**](#a10)

**§ 1. Электростатика—это есть закон Гаусса плюс...**

Существуют два закона электростатики: поток электрического поля из объема пропор­ционален заряду внутри него — закон Гаусса, и циркуляция электрического поля равна нулю — Е есть градиент. Из этих двух законов следуют все предсказания электростатики. Но одно дело высказать эти вещи математически, и совсем другое — применять их с легкостью и с нужной долей остроумия. В этой главе мы будем заниматься только такими расчетами, которые могут быть проделаны непосредственно на основе закона Гаусса. Мы докажем неко­торые теоремы и опишем некоторые эффекты (в частности, в проводниках), которые на основе закона Гаусса очень легко понять. Сам по себе закон Гаусса не может дать решения ни одной задачи, потому что должны быть выпол­нены и какие-то другие законы. Значит, приме­няя закон Гаусса к решению частных задач, нужно всегда к нему что-то добавлять. Мы должны, например, заранее делать какие-то предположения о том, как выглядит поле, осно­вываясь, скажем, на соображениях симметрии. Или должны будем особо вводить представление о том, что поле есть градиент потенциала.

**§ 2. Равновесие в электростатическом поле**

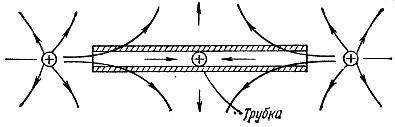
Рассмотрим сначала следующий вопрос: в каких условиях точечный заряд может пребы­вать в механическом равновесии в электриче­ском поле других зарядов? В качестве примера представим себе три отрицательных заряда в вершинах равностороннего треугольника, расположенного в горизонтальной плоскости.

*Фиг. 5.1. Если бы точка Р0 от­мечала положение устойчивого рав­новесия положительного заряда, то электрическое поле повсюду в ее окрестности было бы направлено к Р0 .*

Останется ли на своем месте положительный заряд, помещенный в центр тре­угольника? (Для простоты тяжестью пренебрежем; но и учет ее влияния не изменит выводов.) Сила, действующая на поло­жительный заряд, равна нулю, но устойчиво ли это равнове­сие? Вернется ли заряд в положение равновесия, если его чуть сдвинуть с этого места? Ответ гласит: нет.

*Ни в каком* электростатическом поле не существует *никаких* точек устойчивого равновесия, за исключением случая, когда заряды сидят друг на друге. Применяя закон Гаусса, легко по­нять почему. Во-первых, чтобы заряд пребывал в равновесии в некоторой точке Р0, поле в ней должно быть равно нулю. Во-вторых, чтобы равновесие было устойчивым, требуется, чтобы смещение заряда из *Р0* в *любую сторону* вызывало восстанав­ливающую силу, направленную против смещения. Векторы электрического поля во *всех* окрестных точках должны показы­вать внутрь — на точку *Р0 .* Но как легко видеть, это нарушает закон Гаусса, если в *Р0* нет заряда.

Возьмем небольшую воображаемую поверхность, окружаю­щую точку *Р0* (фиг. 5.1). Если повсюду вблизи *Р0* электрическое поле направлено к Р0, то поверхностный интеграл от нормаль­ной составляющей определенно не равен нулю. В случае, изоб­раженном на фигуре, поток через поверхность должен быть от­рицательным числом. Но, согласно закону Гаусса, поток электрического поля сквозь любую поверхность пропорциона­лен количеству заряда внутри нее. Если в *Р0* нет заряда, то изображенное нами поле нарушит закон Гаусса. Уравновесить положительный заряд в пустом пространстве, в точке, в которой нет какого-нибудь отрицательного заряда, невозможно. Но если положительный заряд размещен *в центре* распределенного от­рицательного заряда, то он *может* находиться в равновесии. Конечно, распределение отрицательного заряда должно само удерживаться на своем месте посторонними, неэлектрическими силами!

Этот вывод мы проделали для точечного заряда. Соблю­дается ли он для сложной расстановки зарядов, относительное расположение которых чем-то фиксировано (скажем, стерж­нями)? Разберем этот вопрос на примере двух одинаковых зарядов, закрепленных на стержне. Может ли эта комбинация в каком-то электрическом поле застыть в равновесии?

*Фиг. 5.2. Заряд может быть в равновесии, если имеются механические ограничения.*

И опять ответ гласит: нет. *Суммарная* сила, действующая на стержень, не способна возвращать его к положению равновесия при любых направлениях смещения.

Обозначим суммарную силу, действующую на стержень ' в любом положении, буквой F. Тогда F — это векторное поле. Повторяя те же рассуждения, что и выше, мы придем к заклю­чению, что в положении устойчивого равновесия дивергенция F должна быть числом отрицательным. Но суммарная сила, действующая на стержень, равна произведению первого заряда на поле в том месте, где он находится, плюс произведение вто­рого заряда на поле в том месте, где он находится:

C:\1\pic\gray.jpg

(5.1)

Дивергенция F дается выражением

C:\1\pic\gray.jpg

Если каждый из двух зарядов *q1* и *q2* находится в свободном пространстве, то и ∇•Е1, и ∇•Е2 равны нулю, и ∇•F тоже нуль, а не отрицательное число, как должно было бы быть при рав­новесии. Дальнейшее расширение этого доказательства пока­жет, что никакая жесткая комбинация любого числа зарядов не способна замереть в положении устойчивого равновесия в электростатическом поле в пустом пространстве.

Но мы не собираемся доказывать, что если заряд может скользить по стержням или опираться на другие механические связи, то равновесие все равно невозможно. Это не так. Возьмем для примера трубку, в которой заряд может свободно двигаться вперед и назад (но не в сторону). Теперь легко устроить элект­рическое поле, которое на концах трубки направлено внутрь нее (при этом близ центра трубки ему разрешается быть на­правленным наружу, в сторону). Для этого надо просто поместить по положительному заряду на каждом конце трубки (фиг. 5.2). Теперь точка равновесия существует даже в том случае, когда дивергенция Е равна нулю. Конечно, заряд не оказался бы в устойчивом равновесии, если бы не «неэлектрические» силы от стенок трубки.

**§ 3. Равновесие с проводниками**

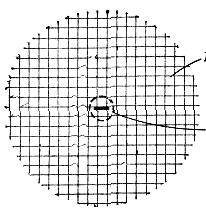
В системе закрепленных зарядов устойчивого места для пробного заряда нет. А как обстоит дело с системой заряженных проводников? Может ли система заряженных проводников соз­дать поле, в котором для точечного заряда хоть где-нибудь найдется устойчивое местечко? (Конечно, имеется в виду не место на поверхности проводника.) Вы знаете, что проводники характерны тем, что заряды по ним могут двигаться свободно. Может быть, если чуть сдвинуть точечный заряд, то прочие заряды на проводниках так сместятся, что на точечный заряд начнет действовать восстанавливающая сила? Ответ по-преж­нему отрицательный, хотя из приведенного нами доказательства этого вовсе не следует. В этом случае доказательство сложнее, и мы только наметим его ход.

Во-первых, мы замечаем, что когда заряды перераспреде­ляются по проводникам, то это возможно только тогда, когда от их движения их суммарная потенциальная энергия сокра­щается. (Часть их энергии, когда они движутся по проводнику, переходит в тепло.) А мы уже показали, что когда заряды, соз­дающие поле, *стационарны,* то вблизи любой точки Р0, в ко­торой поле равно нулю, существует направление, в котором смещение точечного заряда из *Р0 уменьшит* энергию системы (так как сила направлена от *Р0).* Любое перемещение зарядов по проводникам может только еще больше снизить их потен­циальную энергию, так что (по принципу виртуальной рабо­ты) их движение только *увеличит* силу в этом указанном направлении, но никак не обратит ее знак.

Наши слова не означают, что заряд невозможно уравно­весить электрическими силами. Это можно сделать, если спе­циальными устройствами контролировать расположение или размер поддерживаемых зарядов. Вы же знаете, что стержень, стоящий в гравитационном поле на своем нижнем конце, не­устойчив, но отсюда не следует, что его нельзя уравновесить на кончике пальца. Точно так же и заряд можно удержать на одном месте с помощью одних только электрических сил, если вовремя изменять эти силы. Но этого нельзя сделать с помощью пассивной, т. е. *статической,* системы сил.

**§ 4. Устойчивость атомов**

Раз заряды не могут иметь устойчивого положения, то, разу­меется, неправильно представлять вещество построенным из ста­тических *точечных* зарядов (электронов и протонов), управляе­мых только законами электростатики. Такая статическая кон­фигурация немыслима, она обвалится!

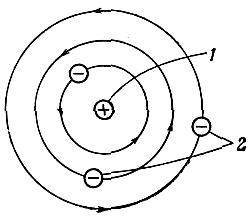


*Фиг. 5.3. Томсоновская модель атома.*

*1* — *однородно распределенный положи­тельный заряд; 2 — отрицательный заряд, сконцентрированный в центре.*

В свое время предлагалось считать положительный заряд атома распределенным однородно по шару, а отрицательные заряды (электроны) покоящимися внутри положительного за­ряда (фиг. 5.3). Это была первая атомная модель, предложен­ная Томсоном. Но Резерфорд из опыта, проделанного Гейгером и Марсденом, сделал вывод, что положительные заряды очень сильно сконцентрированы и образуют то, что мы называем ядром. И статическую модель Томсона пришлось отставить. Затем Резер­форд и Бор предположили, что равновесие может быть динами­ческим — электроны обращаются по орбитам (фиг. 5.4). Орби­тальное движение в этом случае удерживало бы электроны от падения на ядро. Но мы с вами знакомы, по крайней мере, с од­ной трудностью, возникающей и при таком представлении об атоме. При движении по орбитам электроны ускоряются (из-за вращательного движения), и поэтому они излучали бы энергию. При этом они потеряют кинетическую энергию, необходимую для того, чтобы остаться на орбитах, и они должны будут падать, двигаясь по спирали, на ядро. Опять неустойчивость!

Сейчас стабильность атома объясняется с помощью кванто­вой механики. Электростатические силы притягивают электрон к ядру насколько это возможно, но электрон вынужден оста­ваться размазанным в пространстве на расстоянии, диктуемом принципом неопределенности. Если бы он держался в очень узком пространстве близ ядра, у него была бы большая неопре­деленность в импульсе. Но это означало бы, что его ожидаемая энергия высока и может быть использована для того, чтобы разорвать электрическое притяжение ядра.



*Фиг. 5.4. Модель атома Резерфорда—Бора.*

*1 — положительные ядра в центре;*

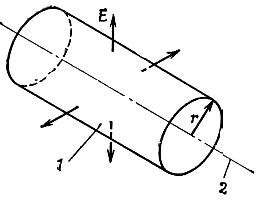
*2* — *отрицательные электроны на пла­нетных орбитах.*

Выходит, что в ито­ге электрическое равновесие не слишком отличается от идеи Томсона, но только на этот раз размазан *отрицательный* заряд (потому что масса электрона несравненно меньше массы про­тона).

**§ 5. Поле заряженной прямой линии**

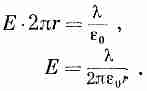
Закон Гаусса может быть применен для решения множества задач, связанных с электрическим полем, обладающим специаль­ной симметрией (чаще всего сферической, цилиндрической или плоской). В оставшейся части этой главы мы займемся приме­нением закона Гаусса к некоторым задачам подобного рода. Легкость, с которой будут решаться эти задачи, может создать ошибочное впечатление о мощи метода и о возможности с его помощью перейти к решению многих других задач. К сожале­нию, это не так. Список задач, легко решаемых по закону Гаус­са, быстро исчерпывается. В дальнейших главах мы разовьем куда более мощные методы исследования электростатических полей.

В качестве первого примера рассмотрим систему с цилинд­рической симметрией. Пусть у нас имеется длинная-длинная равномерно заряженная спица. Под этим мы понимаем элект­рические заряды, равномерно распределенные по длине беско­нечно длинной прямой, так что на единицу длины приходится заряд λ,. Мы хотим определить электрическое поле. Конечно, задачу можно решить интегрированием вкладов в поле от всех частей прямой. Но мы собираемся решить ее без интегрирова­ния, только с помощью закона Гаусса и некоторых догадок. Во-первых, легко догадаться, что электрическое поле будет направлено по радиусу. Любой осевой составляющей от зарядов, лежащих с одной стороны от некоторой плоскости, должна отве­чать такая же осевая составляющая от зарядов, лежащих с дру­гой стороны. В итоге должно остаться только радиальное поле. Кроме того, резонно полагать, что во всех точках, равноот­стоящих от прямой, поле имеет одинаковую величину. Это очевидно.



*Фиг. 5.5. Цилиндрическая гауссо­ва поверхность, коаксиальная за­ряженной прямой.*

*1 — гауссова* поверхность; *2 — заря­женная прямая.*

 (Может быть, это нелегко доказать, но это верно, если пространство симметрично, а мы считаем, что это так.) Применить закон Гаусса можно следующим образом. *Вооб­разим* себе поверхность, имеющую форму цилиндра, ось ко­торого совпадает с нашей прямой (фиг. 5.5). Согласно закону Гаусса, весь поток Е из этой поверхности равен заряду внутри нее, деленному на ε0. Раз поле считается нормальным к поверх­ности, то его нормальная составляющая — это величина векто­ра поля. Обозначим ее *Е.* Пусть радиус цилиндра будет r, а длина его для удобства выбрана равной единице. Поток сквозь цилиндрическую поверхность равен произведению *Е* на площадь поверхности, т. е. на 2πr. Поток через торцы равен нулю, потому что поле касательно к ним. Весь заряд внутри нашей поверх­ности равен как раз λ, потому что длина оси цилиндра равна единице. Тогда закон Гаусса дает

(5.2)

Электрическое поле заряженной прямой обратно пропорцио­нально *первой* степени расстояния от прямой.

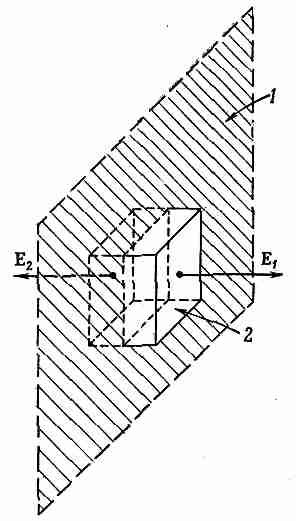
**§ 6. Заряженная плоскость; пара плоскостей**

В качестве другого примера рассчитаем поле однородно заряженного плоского листа. Предположим, что лист имеет бесконечную протяженность и заряд на единицу площади равен а. Сразу приходит в голову следующее соображение: из симмет­рии следует, что поле направлено всюду поперек плоскости, и *если не существует поля от всех прочих зарядов в мире,* то поля по обе стороны плоскости должны совпадать (по величине). На этот раз за гауссову поверхность мы примем прямоугольный ящик, пересекающий нашу плоскость (фиг. 5.6). Каждая из граней, параллельных плоскости, имеет площадь *А.* Поле нор­мально к этим двум граням и параллельно остальным четырем. Суммарный поток равен *Е,* умноженному на площадь первой грани, плюс *Е,* умноженному на площадь противоположной грани; от остальных граней никаких слагаемых C:\1\pic\gray.jpgне войдет. За­ряд внутри ящика равен *σА.* Уравнивая поток с зарядом, на­пишем

C:\1\pic\gray.jpgоткуда

(5.3)

Простой, но важный результат.



*Фиг. 5.6. Электрическое поле во­зле однородно заряженной плоско­сти, найденное с помощью теоремы Гаусса, применяемой к воображае­мому ящику.*

*1 — однородно заряженная плоскость;*

*2 — гауссова поверхность.*

Вы помните, может быть, что тот же результат был получен в первых главах интегрирова­нием по всей плоскости. Закон Гаусса дает ответ намного бы­стрее (хотя он не так широко применим, как прежний метод).

Подчеркнем, что этот резуль­тат относится *только* к полю,

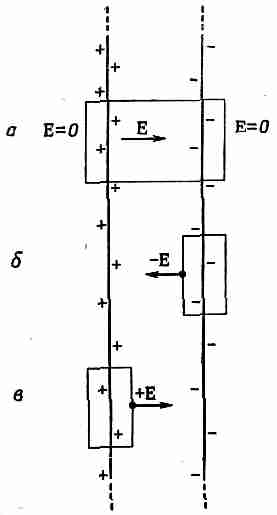
созданному зарядами, размещенными на плоскости. Если по соседству есть другие заряды, общее поле близ плоскости бы­ло бы суммой (5.3) и поля прочих зарядов. Закон Гаусса тогда только гарантировал бы, что

C:\1\pic\gray.jpg

(5.4)

где *E1* и *Е2 —* поля, направленные на каждой стороне плоско­сти наружу от нее.

Задача о двух параллельных плоскостях с равными и про­тивоположными плотностями зарядов +σ и -σрешается тоже просто, если только снова предположить, что внешний мир абсолютно симметричен. Составите ли вы суперпозицию двух ре­шений для отдельных плоскостей или построите гауссов ящик, охватывающий обе плоскости, в обоих случаях легко видеть, что поле *снаружи* плоскостей равно нулю (фиг. 5.7, *а).* Но, зак­лючив в ящик только одну или только другую поверхность, как показано на фиг. 5.7, *б* или *в,* мы легко обнаружим, что поле между плоскостями должно быть вдвое больше поля отдельной плоскости.



*Фиг****.*** *5.7. Поле между двумя за­ряженными листами равно* σ/ε0.

C:\1\pic\gray.jpgИтог таков:

(5.5)

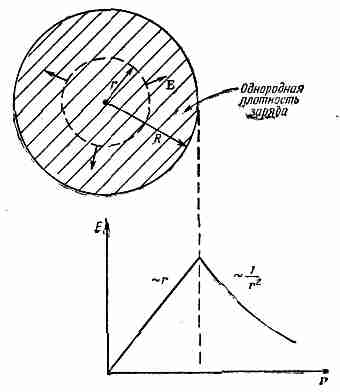
*Е* (снаружи) =0. (5.6)

**§ 7. Однородно заряженный шар; заряженная сфера**

В гл. 4 мы уже применяли закон Гаусса, когда должны были найти поле вне однородно заряженной шаровой области. Тот же метод может дать нам и поле в точках *внутри* шара. Этот рас­чет, например, может быть использован для получения хоро­шего приближения к полю внутри атомного ядра. Вопреки тому, что протоны в ядре взаимно отталкиваются, они из-за сильного ядерного притяжения распределены по всему ядру почти од­нородно.

Пусть у нас имеется сфера радиуса *R,* однородно наполнен­ная зарядами. Пусть заряд в единице объема равен р. Снова, используя соображения симметрии, можно предположить, что поле радиально и в точках, равноудаленных от центра, по величине одинаково.

*Фиг. 5.8. Закон Гаусса можно применить для определения поля внутри однородно заря­женного шара.*



Чтоб определить поле в точке на расстоянии rот центра, представим сферическую гауссову поверхность радиуса r (r<R), как показано на фиг. 5.8. Поток из нее равен

C:\1\pic\gray.jpg

Заряд внутри нее равен внутреннему объему, умноженному на ρ, т. е.

C:\1\pic\gray.jpg

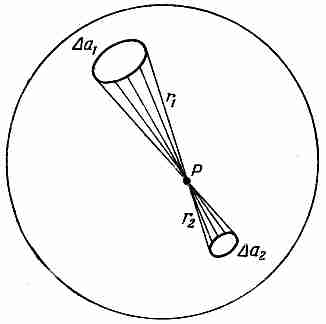
C:\1\pic\gray.jpgПрименяя закон Гаусса, получаем величину поля

(5.7)

Вы видите, что при *r=R* эта формула дает правильный резуль­тат. Электрическое поле *пропорционально* расстоянию от центра и направлено по радиусу наружу.

Аргументы, которые мы только что приводили для однород­но заряженного шара, можно применить и к заряженной сфере. Опять предполагая радиальность и сферическую симметрию поля, из закона Гаусса немедленно получаем, что поле вне сфе­ры во всем подобно полю точечного заряда, поле же внутри сфе­ры — нуль (если мы проведем гауссову поверхность внутри сфе­ры, то внутри нее зарядов не окажется).

**§ 8. Точен ли закон Кулона?**

Если мы вглядимся чуть пристальнее в то, *как* поле внутри сферы оказывается нулевым, то лучше поймем, почему закон Гаусса обязан своим происхождением закону Кулона, т. е. точ­ной зависимости силы от второй степени расстояния. Возьмем произвольную точку *Р* внутри однородно заряженной сфери­ческой поверхности.

*Фиг. 5.9. Во всякой точке Р внутри заряженной сфериче­ской оболочки поле равно нулю.*

C:\1\pic\gray.jpgПредставим узкий конус, который начи­нается в точке *Р* и тянется до поверхности сферы, вырезая там небольшой сферический участок Δat (фиг. 5.9). В точности сим­метричный конус по другую сторону вершины вырежет на по­верхности площадь Δа2. Если расстояния от *Р* до этих двух элементов площади равны r1 и r2, то площади находятся в от­ношении

(Вы можете доказать это для любой точки шара с помощью гео­метрии.)

Если поверхность сферы заряжена равномерно, то заряд Δ*q* на каждом элементе поверхности пропорционален его пло­щади

C:\1\pic\gray.jpg

C:\1\pic\gray.jpgТогда закон Кулона утверждает, что величины полей, созда­ваемых в *Р* этими двумя элементами поверхности, находятся в отношении

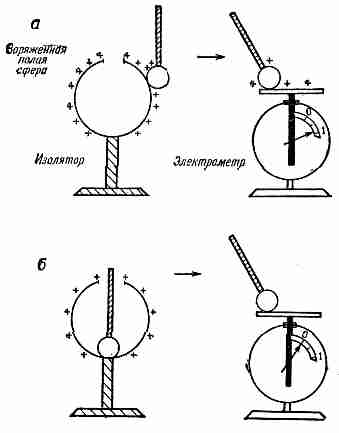
Поля в точности взаимно уничтожаются. Таким способом можно разбить на пары всю сферу. Значит, все поле в точке *Р* равно нулю. Но вы видите, что этого не было бы, окажись показатель степени rв законе Кулона не равным в точности двойке.

Справедливость закона Гаусса зависит от закона обратных квадратов Кулона. Если бы закон силы не подчинялся в точности зависимости 1/r2, то поле внутри однородно заряженной сфе­ры не было бы в точности равно нулю. Например, если бы поле менялось быстрее (скажем, как 1/r3), то часть сферы, которая ближе к точке Р, создала бы в точке *Р* более сильное поле, чем дальняя часть. Получилось бы (для положительного поверх­ностного заряда) радиальное поле, направленное к центру. Эти заключения подсказывают нам элегантный путь проверки точности выполнения закона обратных квадратов. Для этого нужно только узнать, в точности ли поле внутри однородно за­ряженной сферы равно нулю.

Наше счастье, что такой способ существует. Ведь обычно трудно измерить физическую величину с высокой точностью. Добиться однопроцентной точности было бы нетрудно, но как быть, если нам понадобится измерить закон Кулона с точностью, скажем, до одной миллиардной? Можно почти ручаться, что из­мерить с такой точностью *силу,* действующую между двумя за­ряженными телами, не способны даже лучшие приборы. Но если только нужно убедиться в том, что поле внутри сферы *меньше* некоторого значения, то можно провести довольно точное из­мерение справедливости закона Гаусса и тем самым проверить обратную квадратичную зависимость в законе Кулона. В сущ­ности происходит *сравнение* закона силы с идеальным законом обратных квадратов. Именно такие сравнения одинаковых, или почти одинаковых, вещей обычно становятся основой самых точ­ных физических измерений.

Как же наблюдать поле внутри заряженной сферы? Один из способов,— это попытаться зарядить тело, дотронувшись им до внутренней части сферического проводника. Вы знаете, что если коснуться металлическим шариком заряженного тела, затем электрометра, то прибор зарядится и стрелка отклонится от нуля (фиг. 5.10, *а).* Шар собирает на себя заряды, потому что снаружи заряженной сферы имеются электрические поля, за­ставляющие заряды переходить на шарик (или с него). А если вы проделаете тот же опыт, коснувшись шариком *внутренности* заряженной сферы, то увидите, что к электрометру заряд не подводится. Из такого опыта сразу видно, что внутреннее поле составляет в лучшем случае несколько процентов от внешнего и что закон Гаусса верен, по крайней мере, приближенно.

Кажется, первым, заметившим, что поле внутри заряженной сферы равно нулю, был Бенджамен Франклин. Это показалось ему странным. Когда он сообщил об этом Пристли, тот заподоз­рил, что это связано с законом обратных квадратов, потому что было известно, что сферический слой вещества не создает внут­ри себя поля тяготения. Но Кулон измерил обратную квадра­тичную зависимость только через 18 лет, а закон Гаусса появился на свет и того позже.



*Фиг. 5.10. Внутри замкну­той проводящей оболочки электрическое поле равно нулю.*

Закон Гаусса был про­верен очень тщательно; для этого электрометр помещали внутрь большой сферы и наблюдали, отклонится ли стрелка, когда сферу зарядят до высокого напряжения. Результат всегда получался отрицательным. Если знать геометрию аппарата и чув­ствительность прибора, можно рассчитать наименьшее поле, которое еще доступно наблю­дению. Из этого числа можно установить верхний предел отклонения показателя степени от двух. Если записать зависи­мость электростатической силы от расстояния в виде r-2+ε, то можно определить верхнюю границу ε. Этим способом Максвелл узнал, что ε меньше 1/10000. Опыт был повторен и усовершен­ствован в 1936 г. Плимптоном и Лафтоном. Они обнаружили, что кулонов показатель отличается от 2 меньше чем на одну миллиардную.

Это подводит нас к интересному вопросу: как точно выполня­ется закон Кулона в различных обстоятельствах? В только что описанных опытах измерялась зависимость поля от расстояния на расстояниях порядка десятков сантиметров. А что можно сказать о внутриатомных расстояниях, скажем внутри атома водорода, где, как мы считаем, электрон притягивается к ядру по тому же закону обратных квадратов? Конечно, для описа­ния механической части поведения электрона нужна кванто­вая механика, но сила здесь — по-прежнему привычная элект­ростатическая сила. В постановке задачи об атоме водорода известна потенциальная энергия электрона как функция рас­стояния от ядра, и тогда закон Кулона приводит к потенциалу, обратно пропорциональному первой степени расстояния. С ка­кой точностью этот показатель известен на таких малых расстоя­ниях? В итоге очень тщательных измерений относительного расположения уровней энергии водорода, проведенных в 1947 г. Лэмбом и Ризерфордом, нам теперь известно, что и на расстоя­ниях порядка атомных, т. е. порядка ангстрема (10-8см),пока­затель выдерживается с точностью до одной миллиардной.

Такая точность измерений Лэмба и Ризерфорда оказалась возможной опять благодаря одной физической «случайности». Среди состояний атома водорода есть два таких, у которых энер­гии должны быть почти одинаковыми *лишь* в том случае, если потенциал меняется точно по закону 1/r*.* Измерялась очень ма­лая *разница* в энергиях по частоте ω фотонов, испускаемых или поглощаемых при переходах из одного состояния в другое (сог­ласно формуле ΔE=hω). Расчеты показали, что ΔЁ заметно отличалась бы от наблюдавшегося значения, если бы показатель степени в законе силы 1/г2 отличался бы от 2 только на одну миллиардную.

А верен ли этот закон и на еще меньших расстояниях? В ядер­ной физике измерения показали, что на типично ядерных рас­стояниях (порядка 10-13 *см)* существуют электростатические силы и что меняются они все еще как обратные квадраты расстоя­ний. Одно из свидетельств в пользу этого мы разберем в следую­щих главах. Мы уверены, таким образом, что закон Кулона еще выполняется и на расстояниях около 10-13 *см.*

А что можно сказать о расстоянии 10-14 *см!* Этот интервал исследовали, бомбардируя протоны очень энергичными элект­ронами и следя за тем, как они рассеиваются. Сегодняшние дан­ные указывают на то, что на этих расстояниях закон терпит крах. Электрические силы на расстояниях меньше 10-14 *см* оказываются чуть ли не в 10 раз слабее. Этому есть два объясне­ния. То ли закон Кулона на таких маленьких расстояниях не действует, то ли эти тела (электроны и протоны) не являются точечными зарядами. Возможно, что один из них как-то размазан (а может, и оба). Большинство физиков предпочитают думать, что размазан заряд протона. Мы знаем, что протоны сильно взаимодействуют с мезонами. Это означает, что протон время от времени существует в виде нейтрона с π+ - мезоном вокруг. Такое расположение в среднем выглядело бы как небольшой шарик положительного заряда. А мы знаем, что нельзя считать поле шара зарядов меняющимся вплоть до самого центра по закону 1/r2. Вполне вероятно, что заряд протона размазан, но теория пионов еще очень несовершенна, и не исключено, что и закон Кулона на малых расстояниях отказывает. Вопрос пока остается открытым.

Еще один каверзный вопрос: если закон обратных квадратов верен и на расстояниях порядка 1м и на расстояниях порядка 10-10 *м,* то остается ли тем же коэффициент 1/4πε0? Да,— гласит ответ,— по крайней мере, с точностью до 15 миллионных.

Вернемся теперь к важному вопросу, от которого мы отмах­нулись, когда говорили об опытном подтверждении закона Гаусса.

Вас могло удивить, как в опыте Максвелла и Плимптона— Лафтона удалось достичь такой точности. Ведь вряд ли сфери­ческий проводник мог быть идеальной сферой. Достичь точно­сти в одну миллиардную — это прекрасно; но резонно спро­сить: как могли они столь точно изготовить сферу? Наверняка на сфере были небольшие неправильности, как на всякой реаль­ной сфере, и не могли ли эти нерегулярности создать какое-то поле внутри? Мы хотим показать теперь, что в идеальной сфере вовсе нет необходимости. Оказывается можно доказать, что внут­ри замкнутой проводящей оболочки *любой* формы поля не бы­вает. Иными словами, опыты зависели от 1/r2, но никак не были связаны со сферической формой поверхности (разве что со сфе­рой легче было бы рассчитать поле, *если бы* закон Кулона ока­зался ошибочным). Итак, мы снова возвращаемся к этому воп­росу. Для решения его нам нужно знать кое-какие свойства проводников электричества.

**§ 9. Поля проводника**

Проводник электричества — это твердое тело, в котором есть много «свободных» электронов. Электроны могут двигаться в *веществе* свободно, но не могут покидать поверхности. В ме­талле бывает так много свободных электронов, что всякое элект­рическое поле приводит многие из них в движение. И либо воз­никший таким образом ток электронов должен непрерывно поддерживать свое существование за счет внешних источников энергии, либо движение электронов прекращается, как только они разрядят источники, вызвавшие ноле вначале. В условиях «электростатики» мы не рассматриваем непрерывных источни­ков тока (о них мы будем говорить в магнитостатике), так что электроны движутся только до тех пор, пока не расположатся так, что повсюду внутри проводника создастся нулевое элект­рическое поле. (Как правило, это происходит в малые доли се­кунды.) Если бы осталось внутри хоть какое-нибудь поле, оно бы вынудило двигаться еще какие-то электроны; возможно только такое электростатическое решение, когда поле всюду внутри равно нулю.

Теперь рассмотрим *внутренность* заряженного проводящего тела. (Мы имеем в виду внутреннюю часть самого *металла.)* Так как металл — проводник, то внутреннее поле должно быть ну­лем, а значит, и градиент потенциала ϕ равен нулю. Это значит, что ϕ от точки к точке не меняется. Любой проводник — это эквипотенциальная *область,* и его поверхность — эквипотен­циальна. Раз в проводящем материале электрическое поле пов­сюду равно нулю, то и дивергенция Е тоже равна нулю, и по закону Гаусса плотность заряда во *внутренней* части провод­ника обращается в нуль.

Но если внутри проводника не может быть зарядов, как же он вообще может быть заряжен? Что мы имеем в виду, когда говорим, что проводник «заряжен»? Где эти заряды? Они нахо­дятся на поверхности проводника, где существуют большие силы, не дающие им покинуть ее, так что они не вполне «сво­бодны». Когда мы будем изучать физику твердого тела, мы уви­дим, что избыточный заряд в любом проводнике находится толь­ко в узком слое у поверхности, толщиной в среднем в один-два атома. Для наших нынешних целей достаточно правильно будет говорить, что любой заряд, попавший на (или в) проводник, собирается на его поверхности; внутри проводника никаких зарядов нет.

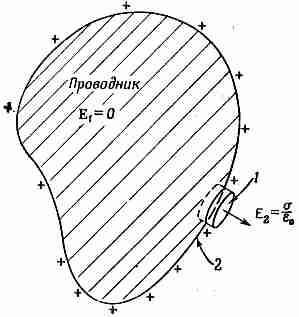
Мы замечаем также, что электрическое поле *возле самой поверхности* проводника должно быть нормально к поверхности. Касательной составляющей у него быть не может. Если бы она появилась, электроны двигались бы *вдоль* поверхности; нет сил, которые способны помешать этому. Это можно выразить и иначе: мы знаем, что линии электрического поля должны всег­да быть направлены поперек эквипотенциальной поверхности.

Применяя закон Гаусса, мы можем связать напряженность поля у самой поверхности проводника с локальной плотностью заряда на поверхности. За гауссову поверхность мы примем не­большой цилиндрический стакан, наполовину погруженный в проводник, а наполовину выдвинутый из него (фиг. 5.11). Вклад в общий поток Е дает только та часть стакана, которая находится вне проводника. Тогда поле у наружной поверх­ности проводника равно

*Вне проводника:*

C:\1\pic\gray.jpg

(5.8)



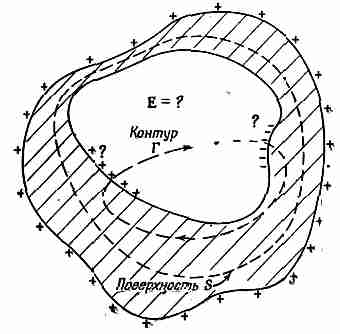
*Фиг. 5.11. Электрическое поле у самой внешней поверхности провод­ника пропорционально локальной поверхностной плотности заряда.*

*1 — гауссова поверхность; 2* — *локаль­ная плотность поверхностного* заряда.σ.

Почему слой зарядов на проводнике создает не такое поле, как слой зарядов *сам по себе!* Иначе говоря, почему (5.8) вдвое больше (5.3)? Но ведь мы *не утверждали,* будто в проводнике нет больше никаких «других» зарядов. В действительности для того, чтобы в проводнике Е было равно 0, в нем обязательно должны присутствовать какие-то заряды. В непосредственной близости от точки *Р* на поверхности заряды действительно соз­дают поле Eлок=σлок/2ε0 как внутри, так и снаружи поверхно­сти. Но все прочие заряды проводника сообща «устраивают за­говор», чтобы создать в точке *Р* добавочное поле, равное по величине *Елок.* Суммарное внутреннее поле обращается в нуль, а наружное удваивается: 2Eлок=σ/ε0.

**§ 10. Поле внутри полости проводника**

Вернемся теперь к проблеме пустотелого резервуара — про­водника, имеющего внутри полость. В *металле* поля нет, а вот есть ли оно в *полости?* Покажем, что если полость *пуста,* то поля в ней быть не может, *какова бы ни была форма* провод­ника или полости (фиг. 5.12). Рассмотрим гауссову поверхность, подобную S на фиг. 5.12, которая окружает собой полость, но остается всюду в веществе проводника. Всюду на поверхности *S* поле равно нулю, так что потока сквозь *S* быть не может, и *суммарный* заряд внутри *S* должен быть равен нулю. Затем можно вывести из симметрии, что на внутренней поверхности сферической оболочки нет *никакого* заряда. Но в более общем случае мы только можем сказать, что на внутренней поверх­ности проводника имеется равное количество положительного и отрицательного зарядов. Может быть, окажется, что на од­ной части имеется положительный заряд, а где-то в другом месте — отрицательный (см. фиг. 5.12)? Такие вещи законом Гаусса не исключаются.



*Фиг. 5.12. Чему равно поле в пустой полости проводника произвольной формы?*

На самом деле, конечно, получается, что равные, но проти­воположные заряды на внутренней поверхности должны были бы соскользнуть навстречу друг другу и уничтожить друг дру­га. Мы можем убедиться в том, что они уничтожат друг друга, применив закон о равенстве нулю циркуляции Е (электроста­тику). Пусть на каких-то частях внутренней поверхности ока­зались заряды. Мы знаем, что еще где-то должно присутствовать равное количество противоположных зарядов. Но любые ли­нии поля Е начинаются на положительных зарядах и кончаются на отрицательных (мы рассматриваем случай, когда свобод­ных зарядов в полости нет). Представим себе теперь контур Г, пересекающий полость вдоль линии силы от какого-то положи­тельного заряда к какому-то отрицательному и возвращаю­щийся к исходной точке по телу проводника (см. фиг. 5.12). Интеграл вдоль такой линии сил в пределах от положительного до отрицательного заряда не был бы равен нулю, а интеграл по пути через металл C:\1\pic\gray.jpgравен нулю, так как там Е = 0. Так что мы бы имели

Но криволинейный интеграл от Е по любому замкнутому кон­туру в электростатическом поле всегда равен нулю. Значит, внутри пустой полости не может быть никаких полей, равно как не может быть никаких зарядов на внутренней поверхности.

Заметьте, что мы все время подчеркивали, что полость *пуста.* Если *поместить* какие-то заряды в фиксированных местах по­лости (скажем, на изоляторе или на небольшом проводнике, изолированном от основного), то внутри полости *могут* быть поля. Но тогда она уже не будет «пустой».

Мы показали, что если полость целиком окружена провод­ником, то никакое статическое распределение зарядов *снаружи* никогда не создаст поля внутри. Это объясняет принцип «защи­ты» электрического оборудования, которое помещается в ме­таллическую коробку. К тем же рассуждениям можно прибег­нуть, если нужно показать, что никакое статическое распреде­ление зарядов *внутри* замкнутого сплошного проводника не может создать поля *вне* его. Защита действует в обе стороны! В электростатике (но не в изменяющихся полях) поля по обе стороны сплошной проводящей оболочки полностью не зависят одно от другого.

Теперь вы понимаете, почему удалось проверить закон Ку­лона с такой точностью. Форма полой оболочки не имела зна­чения. Она вовсе не должна была быть круглой, она могла быть и кубом! Если закон Гаусса точен, то поле внутри всегда равно нулю. Вы понимаете теперь, почему вполне безопасно сидеть внутри высоковольтного генератора Ван-де-Граафа в миллион вольт, не боясь, что вас ударит ток, — Вас охраняет сам Гаусс!

***Глава* 6**

# ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В РАЗНЫХ ФИЗИЧЕСКИХ УСЛОВИЯХ

[**§1.Уравнения электростатиче­ского** **потенциала**](#a1)

[**§2.Электрический** **диполь**](#a2)

[**§3.3амеча****ния о векторных уравнениях**](#a3)

[**§4.Дипольный пот****енциал как градиент**](#a4)

[**§5.Дипольное приближе****ние для произвольного распределения**](#a5)

[**§6.Поля** **заряженных проводников**](#a6)

[**§7. Метод из****ображений**](#a7)

[**§8.Точечный** **заряд у проводящей плоскости**](#a8)

[**§9.Точечный заряд** **у проводящей сферы**](#a9)

[**§10.Конденеаторы; пара****лл****ельные пластины**](#a10)

[**§11.Пробой** **при** **высоком напряжении**](#a11)

[**§12.Ионный** **микроскоп**](#a12)

***Повторить:* гл. 23 (вып. 2) «Резонанс»**

**§ 1. Уравнения электростатического потенциала**

В этой главе мы расскажем о поведении электрического поля в тех или иных обстоятель­ствах. Вы познакомитесь с тем, как ведет себя электрическое поле, и с некоторыми математи­ческими методами, используемыми для опреде­ления поля.

Отметим для начала, что математически вся задача состоит в решении двух уравнений — максвелловских уравнений электростатики:

C:\1\pic\gray.jpg

(6.1)

C:\1\pic\gray.jpg

(6.2)

Фактически оба эти уравнения можно объ­единить в одно. Из второго уравнения сразу же следует, что поле может считаться гра­диентом некоего скаляра (см. гл. 3, § 7):

C:\1\pic\gray.jpg

(6.3)

Электрическое поле каждого частного ви­да можно, если нужно, полностью описать с помощью потенциала поля ϕ. Дифферен­циальное уравнение, которому должно удо­влетворять ϕ, получится, если (6.3) подста­вить в (6.1):

C:\1\pic\gray.jpg

(6.4)

Расходимость градиента ϕ—это то же, что ∇2, действующее на ϕ:

C:\1\pic\gray.jpg

(6.5)

C:\1\pic\gray.jpgтак что уравнение (6.4) мы запишем в виде

(6.6)

Оператор ∇2 называется лапласианом, а уравнение (6.6) — уравнением Пуассона. Весь предмет электростатики с мате­матической точки зрения заключается просто в изучении реше­ний одного-единственного уравнения (6.6). Как только из (6.6) вы найдете ϕ, поле Е немедленно получается из (6.3).

C:\1\pic\gray.jpgОбратимся сперва к особому классу задач, в которых ρ задано как функция *х, у, z.* Такая задача почти тривиальна, потому что решать уравнение (6.6) в общем случае мы уже умеем. Мы ведь показали, что если ρ в каждой точке известно, то потенциал в точке (1) равен

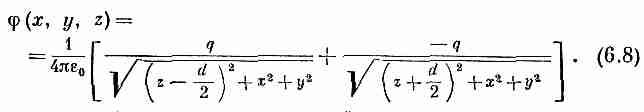
(6.7)

C:\1\pic\gray.jpgгде ρ(2) — плотность заряда, dV2 — элемент объема в точке (2), а r12 — расстояние между точками (1) и (2). Решение *диф­ференциального* уравнения (6.6) свелось к *интегрированию* по пространству. Решение (6.7) нужно отметить особо, потому что в физике часто встречаются ситуации, приводящие к уравнениям, которые выглядят так:

и (6.7) является прототипом решения любой такой задачи.

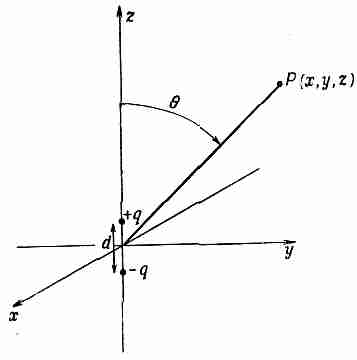
Проблема расчета электростатического поля, таким образом, решается совершенно честно, если только положения всех за­рядов известны. Давайте посмотрим на нескольких примерах, как действует эта формула.

**§ 2. Электрический диполь**

Сначала возьмем два точечных заряда +*q* и -*q,* разделенных промежутком *d.* Проведем ось z через заряды, а начало коор­динат поместим посредине между ними (фиг. 6.1). Тогда по фор­муле (4.24) потенциал системы двух зарядов дается выраже­нием

Мы не собираемся выписывать формулу для электрического поля, но всегда при желании можем это сделать, раз мы знаем потенциал. Так что задача двух зарядов решена.

Существует важный частный случай этой задачи, когда за­ряды расположены близко друг к другу, иными словами, когда нас интересует поле на таких расстояниях от зарядов, что по сравнению с ними промежуток между зарядами кажется незна­чительным. Такую тесную пару зарядов называют *диполем.* Диполи встречаются очень часто.

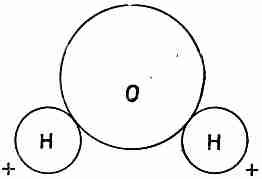


*Фиг. 6.1. Диполь: два заряда*  +q *и -q, удаленные друг от друга на расстояние d.*

«Дипольную» антенну можно часто приближенно рассматривать как два за­ряда, разделенные неболь­шим расстоянием (если нас не интересует поле у са­мой антенны). (Обычно ин­терес представляют антенны с *движущимися* зарядами; уравнения статики тогда не­применимы, но для некоторых целей они все же представ­ляют весьма сносное приближение.)

Важнее, пожалуй, диполи атомные. Если в каком-то веще­стве есть электрическое поле, то электроны и протоны испыты­вают влияние противоположных сил и смещаются друг относи­тельно друга. Вы помните, что в проводнике некоторые электроны сдвигаются к поверхности, так что внутреннее поле обращает­ся в нуль. В изоляторе электроны не могут сильно разой­тись; им мешает притяжение ядра. И все же они как-то смеща­ются. Так что хотя атом (или молекула) и остается нейтральным, во внешнем электрическом поле все же возникает еле заметное разделение положительных и отрицательных зарядов, и атом становится микроскопическим диполем. Если нам нужно знать поле этих атомных диполей поблизости от предмета обычных размеров, то мы имеем дело с расстояниями, большими по срав­нению с промежутками между зарядами.

В некоторых молекулах из-за самой их формы заряды не­сколько разделены даже в отсутствие внешних полей. В моле­куле воды, например, имеется отрицательный заряд на атоме кислорода и положительный заряд на обоих атомах водорода, которые расположены несимметрично (фиг. 6.2). Хоть заряд всей молекулы равен нулю, все же имеется распределение за­ряда с небольшим преобладанием отрицательного заряда на од­ной стороне и положительного на другой. Это расположение, конечно, не такое простое, как у двух точечных зарядов, но если смотреть на него издалека, оно действует как диполь. Как мы увидим чуть позже, поле на больших расстояниях нечувстви­тельно к мелким деталям расположения.



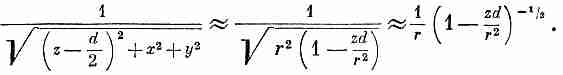
*Фиг. 6.2. Молекула воды* Н2O.

C:\1\pic\gray.jpgВзглянем теперь на поле двух зарядов противоположных знаков, расстояние *d* между которыми мало. Если *d* станет ну­лем, два заряда сойдутся в одном месте, два потенциала сокра­тятся, поле исчезнет. Но если они не совсем слились, то можно получить хорошее приближение к потенциалу, разложив сла­гаемые в (6.8) в ряд по степеням малой величины *d* (по формуле бинома Ньютона). Оставляя только первые степени *d,* мы напи­шем

C:\1\pic\gray.jpgУдобно обозначить

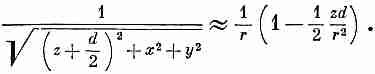
Тогда

C:\1\pic\gray.jpg

и

Разлагая в биномиальный ряд [1 — (zd/r2)]-1/2 и отбрасывая члены с высшими степенями *d,* мы получаем

C:\1\pic\gray.jpg

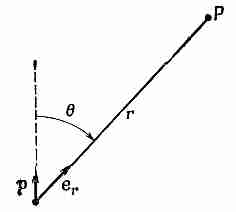
Подобно этому,

Вычитая эти два члена, имеем для потенциала

C:\1\pic\gray.jpg

(6.9)

Потенциал, а значит, и поле, являющееся его производной, пропорциональны *qd —* произведению заряда на расстояния меж­ду зарядами.



*Фиг. 6.3. Векторные обозначения, для диполя.*

Это произведение называется *диполъным моментом* пары зарядов, и мы обозначим его символом *р (не путайте* с импульсом!):

C:\1\pic\gray.jpg

(6.10)

C:\1\pic\gray.jpgУравнение (6.9) можно также записать в виде

(6.11)

так как z/r=cosθ, где θ — угол между осью диполя и радиус-вектором к точке *(х, у, z)* (см. фиг. 6.1). *Потенциал* диполя убы­вает как 1/r2 при фиксированном направлении (а у точечного заряда он убывает как *1/r).* Электрическое поле Е диполя по­этому убывает как 1/r3.

Мы можем записать нашу формулу и в векторном виде, если определим *р.,* как вектор, абсолютная величина которого равна *р,* а направление выбрано вдоль оси диполя от *q-* к *q+.* Тогда

C:\1\pic\gray.jpg

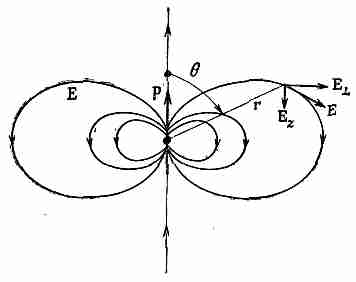
(6.12)

C:\1\pic\gray.jpgгде еr— единичный радиальный вектор (фиг. 6.3). Кроме того, точку (x, y, z) можно обозначить буквой r. Итак, *Дипольный потенциал:*

(6.13)

Эта формула справедлива для диполя произвольной ориентации и положения, если r — вектор, направленный от диполя к ин­тересующей нас точке.

C:\1\pic\gray.jpgЕсли нас интересует электрическое поле диполя, то нужно взять градиент ϕ. Например, z-компонента поля есть -*d*ϕ*/dz.* Для диполя, ориентированного вдоль оси *z,* мы можем исполь­зовать (6.9):



*Фиг. 6.4. Электрическое поле диполя.*

C:\1\pic\gray.jpgили

(6.14)

*А х- и y*-компоненты равны

C:\1\pic\gray.jpg

Из этих двух компонент можно составить компоненту, *пер­пендикулярную* к оси z, которая называется поперечной компонентой E⊥:

C:\1\pic\gray.jpg

или

C:\1\pic\gray.jpg

(6.15)

Поперечная компонента Е⊥лежит в плоскости *ху* и направ­лена прямо от оси диполя. Полное поле, конечно, равно

C:\1\pic\gray.jpg

Поле диполя меняется обратно пропорционально кубу рас­стояния от диполя. На оси при 6 =0 оно вдвое сильнее, чем при 9 =90°. При обоих этих углах электрическое поле обладает только z-компонентой. Знаки ее при 2=0 и при z=90° проти­воположны (фиг. 6.4).

**§ 3. Замечания о векторных** **уравнениях**

Здесь, пожалуй, уместно сделать общее замечание, касаю­щееся векторного анализа. Хотя его теоремы и доказаны в общем виде, однако, приступая к расчетам и анализу какой-либо за­дачи, следует с толком выбирать направление осей координат. Вспомните, что когда мы вычисляли потенциал диполя, то ось выбиралась не как попало, а мы направили ее по оси диполя.

Это намного облегчило нашу задачу. Потом уже уравнения были переписаны в векторной форме и сразу перестали зависеть от выбора системы координат. Теперь стало возможным выби­рать какую угодно систему координат, зная, что формула от­ныне всегда будет справедлива. Вообще нет смысла вводить произвольную систему координат, где оси направлены под ка­ким-то сложным углом, если можно в данной задаче выбрать систему получше, а уже в самом конце выразить результат в виде векторного уравнения. Так что старайтесь использовать то преимущество векторных уравнений, что они не зависят ни от какой системы координат.

C:\1\pic\gray.jpgС другой стороны, если вы хотите подсчитать дивергенцию какого-то вектора, то вместо того, чтобы смотреть на у•Е и вспоминать, что это такое, лучше расписать это в виде

Если вы затем вычислите по отдельности *х-, у-* и z-компоненты электрического поля и продифференцируете, то получите иско­мую дивергенцию. Часто при этом испытывают такое чувство, как будто произошло что-то некрасивое — словно, расписав вектор покомпонентно, потерпели неудачу; все время кажется, будто все действия надо проделывать только с векторными опе­раторами ∇. Но часто от них нет никакого проку. Когда вы впер­вые сталкиваетесь с какой-то новой задачей, то, как правило, полезно расписать все в компонентах, чтобы удостовериться, что вы правильно представляете себе, что происходит. Нет ничего некрасивого в том, что в уравнения подставляются числа, и нет ничего неприличного в том, чтобы подставлять производные на место причудливых символов. Наоборот, в этом-то и проявляется ваша мудрость. Конечно, в специальном журнале статья будет выглядеть гораздо приятнее (да и понят­нее), если все записано в векторном виде. Но там надо эконо­мить еще и место.

**§ 4. Диполъный потенциал как градиент**

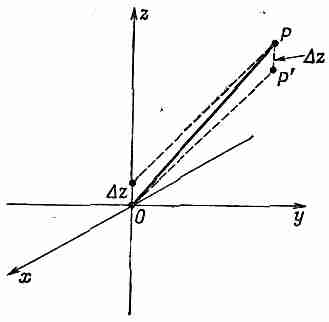
C:\1\pic\gray.jpgМы хотели бы теперь отметить любопытное свойство формулы диполя (6.13). Потенциал можно записать также в виде

(6.16)

Действительно, вычислив градиент 1/r, вы получите

C:\1\pic\gray.jpg

и (6.16) совпадет с (6.13).



*Фиг. 6.5. Потенциал в точке Р от точечного заряда, поднятого на Δz над началом координат, равен потенциалу в точке Р' (на Δ*z *ниже Р) того же заряда, но помещенного вначале координат.*

Как мы догадались об этом? Мы просто вспомнили, что er/r2 уже появлялось в формуле для *поля* точечного заряда и что поле — это градиент *потенциала,* изменяющегося как 1/r.

Существует и *физическая* причина того, что дипольный по­тенциал может быть записан в форме (6.16). Пусть в начало коор­динат помещен точечный заряд q*.* Потенциал в точке *Р(х, у, z)* равен

C:\1\pic\gray.jpg

C:\1\pic\gray.jpg(Множитель 1/4πε0 опустим, а в конце мы его можем снова вста­вить.) Если заряд +*q* мы сдвинем на расстояние Δz, то потен­циал в точке Р чуть изменится, скажем на Δϕ+. На сколько же именно? Как раз на столько, на сколько *изменился бы* потен­циал, если б заряд *оставили* в покое, а *Р* сместили на столько же *вниз* (фиг. 6.5). Иначе говоря,

где Δz означает то же, что и d/2*.* Беря ϕ0=q/r, мы получаем для потенциала положительного заряда

C:\1\pic\gray.jpg

(6.17)

C:\1\pic\gray.jpgПовторяя те же рассуждения с потенциалом отрицательного заряда, можно написать

(6.18)

А общий потенциал—просто сумма (6.17) и (6.18):

C:\1\pic\gray.jpg

(6.19)

C:\1\pic\gray.jpgПри других расположениях диполя смещение положи­тельного заряда можно изобразить вектором Δг+, а уравне­ние (6.17) представить в виде

где Δr впоследствии надо будет заменить на d/2. Завершая доказательство так, как это было сделано выше, мы приве­дем уравнение (6.19) к виду

C:\1\pic\gray.jpg

Это то же уравнение, что и (6.16). Надо только заменить qd на р и вставить потерянный по дороге множитель 1/4πε0. Взглянув на это уравнение по-иному, видим, что дипольный потенциал (6.13) можно толковать как

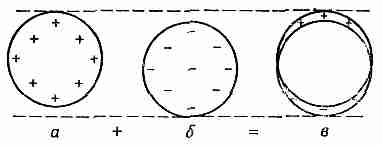
C:\1\pic\gray.jpg

(6.20)

где Ф0=1/4πε0r — потенциал *единичного* точечного заряда.

Хотя потенциал данного распределения зарядов всегда мо­жет быть найден при помощи интегрирования, иногда можно сберечь время, применив какой-нибудь хитроумный прием. Например, на помощь часто приходит принцип наложения. Если нам дано распределение зарядов, которое можно соста­вить из двух распределений с уже известными потенциалами, то искомый потенциал легко получить, просто сложив уже из­вестные между собой. Наш вывод формулы (6.20) — один из примеров применения этого приема.

А вот и другой. Пусть имеется сферическая поверхность, на которой поверхностный заряд распределен пропорционально косинусу полярного угла. Интегрировать такое распределение— задача, откровенно говоря, не из приятных. Но как ни странно, на помощь приходит принцип наложения. Представьте себе шар с однородной *объемной* плотностью положительных зарядов и другой шар с такой же однородной объемной плотностью заря­дов, но противоположного знака. Первоначально они вложены друг в друга, образуя нейтральный, т. е. незаряженный шар. Если затем положительный шар чуть сместить по отношению к отрицательному, то нутро незаряженного шара так и останется незаряженным, но на одной стороне возникнет небольшой поло­жительный заряд, а на противоположной — такой же отрица­тельный (фиг. 6.6). И если относительное смещение двух шаров мало, то эти заряды эквивалентны существованию поверхност­ного заряда (на сферической поверхности) с плотностью, про­порциональной косинусу полярного угла.

Когда же нам понадобится потенциал этого распределения, то брать интегралы не нужно. Мы знаем, что потенциал каждого заряженного шара —- в точках вне его— совпадает с потенциа­лом точечного заряда. А два смещенных шара — все равно, что два точечных заряда; значит, искомый потенциал и есть как раз потенциал диполя.

*Фиг. 6,6. Две равномерно заряженные сферы, вложенные друг в* *друга и слегка смещенные, эквивалентны неоднородному распределению*

*поверхностного заряда.*

Таким путем можно показать, что распределение зарядов на сфере радиуса *а с* поверхностной плотностью

C:\1\pic\gray.jpg

создает снаружи сферы такое же поле, как и диполь с моментом

C:\1\pic\gray.jpg

Можно также показать, что внутри сферы поле постоянно и равно

C:\1\pic\gray.jpg

Если θ — угол с положительной осью *z,* то электрическое поле внутри сферы направлено по *отрицательной* оси *z.* Рассмотрен­ный нами пример отнюдь не досужая выдумка составителя за­дач; он нам встретится еще в теории диэлектриков.

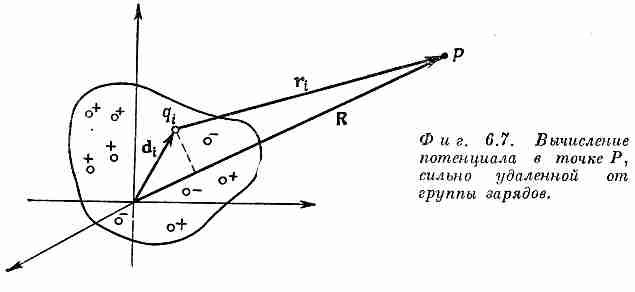
**§ 5. Дипольное приближение для произвольного распределения**

Столь же интересно и не менее важно поле диполя, возни­кающее при других обстоятельствах. Пусть у нас есть тело со сложным распределением заряда, скажем, как у молекулы воды (см. фиг. 6.2), а нас интересует только поле вдали от него. Мы покажем, что можно получить сравнительно простое выраже­ние для полей, пригодное для расстояний, много больших, чем размеры тела.

Мы можем смотреть на это тело, как на скопление точеч­ных зарядов *qi* в некоторой ограниченной области (фиг. 6.7). (Позже, если понадобится, мы *qi* заменим на *pdV.)* Пускай заряд *qi* удален от начала координат, выбранного где-то внутри груп­пы зарядов, на расстояние di . Чему равен потенциал в точке *Р,* расположенной где-то на отлете, на расстоянии R, много боль­шем, чем самое большое из di,?Потенциал всего нашего скопле­ния выражается формулой

C:\1\pic\gray.jpg

(6.21)



C:\1\pic\gray.jpgгде ri — расстояние от *Р* до заряда *qi* (длина вектора R-di). Если расстояние от зарядов до *Р* (до точки наблюдения) чрез­вычайно велико, то каждое из ri можно принять за *R.* Каждый член в сумме станет равным *qi/R,* и 1*IR* можно будет вынести из-под знака суммы. Получится простой результат

(6.22)

где Q *—* суммарный заряд тела. Таким образом, мы убеди­лись, что из точек, достаточно удаленных от скопления зарядов, оно кажется просто точечным зарядом. Этот результат в общем не очень удивителен.

Но что, если положительных и отрицательных зарядов в группе окажется поровну? Суммарный заряд Qтогда будет равен нулю. Это не такой уж редкий случай; мы знаем, что большинство тел нейтрально. Нейтральна молекула воды, но заряды в ней размещаются отнюдь не в одной точке, так что, приблизившись вплотную, мы должны будем заметить какие-то признаки того, что заряды разделены. Для потенциала произвольного рас­пределения зарядов в нейтральном теле мы нуждаемся в при­ближении, лучшем, чем даваемое формулой (6.22). Уравнение (6.21) по-прежнему годится, но полагать *ri=R* больше нельзя. Для ri нужно выражение поточнее. В хорошем приближении ri можно считать отличающимся от *R* (если точка *Р* сильно уда­лена) на проекцию вектора d на вектор R (см. фиг. 6.7, но вы должны только представлять себе, что *Р* намного дальше, чем показано). Иными словами, если er — единичный вектор в нап­равлении R, то за следующее приближение к *ri* нужно принять

C:\1\pic\gray.jpg

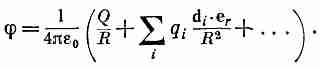
(6.23)

Но нам ведь нужно не r*i,* а 1/ri; оно в нашем приближении (с учетом *di<<R)* равно

C:\1\pic\gray.jpg

(6.24)

Подставив это в (6.21), мы увидим, что потенциал равен



(6.25)

Многоточие указывает члены высшего порядка по *d/R,* ко­торыми мы пренебрегли. Как и те члены, которые мы выписали, это последующие члены разложения 1/*ri* в ряд Тэйлора в ок­рестности 1*/R* по степеням *di/R,*

C:\1\pic\gray.jpgПервый член в (6.25) мы уже получили; в нейтральных телах он пропадает. Второй член, как и у диполя, зависит от 1/R2. Действительно, если мы *определим*

(6.26)

C:\1\pic\gray.jpgкак величину, описывающую распределения зарядов, то вто­рой член потенциала (6.25) обратится в

(6.27)

т. е. *как раз в дипольный потенциал.* Величина р называется *дипольным моментом распределения.* Это обобщение нашего прежнего определения; оно сводится к нему в частном случае точечных зарядов.

В итоге мы выяснили, что достаточно далеко от *любого* набора зарядов потенциал оказывается дипольным, лишь бы этот набор был в целом нейтральным. Он убывает, как 1*/R2,* и меняется, как cos 0, а величина его зависит от дипольного момента распределения зарядов. Именно по этой причине поля диполей и важны; сами же по себе пары точечных зарядов встре­чаются крайне редко.

У молекулы воды, например, дипольный момент довольно велик. Электрическое поле, создаваемое этим моментом, ответ­ственно за некоторые важные свойства воды. А у многих моле­кул, скажем у СO2, дипольный момент исчезает благодаря их симметрии. Для таких молекул разложение нужно проводить еще точнее, до следующих членов потенциала, убывающих как 1/R3 и называемых квадрупольным потенциалом. Эти случаи мы рассмотрим позже.

**§ 6. Поля заряженных проводников**

Мы покончим на этом с примерами таких физических задач, в которых распределение зарядов известно с самого начала. Такие задачи решаются без особых затруднений, в худшем слу­чае требуя нескольких интегрирований. Теперь мы обратимся

к совершенно новому типу задач — определению полей вблизи заряженных проводников.

Представим себе, что какие-то заряды, произвольные по ве­личине Q*,* помещены на проводнике. Теперь уже мы не можем точно сказать, где они расположатся. Они как-то растекутся по поверхности. Как же узнать, как они на ней распределятся? Распределиться они должны так, чтобы потенциал вдоль всей поверхности был одним и тем же. Если бы поверхность не была эквипотенциальной, то внутри проводника существовало бы электрическое поле и заряды вынуждены были бы двигаться до тех пор, пока поле не исчезло бы. Общую задачу такого рода можно было бы решать так. Предположим, что распределение зарядов такое-то, и рассчитаем потенциал. Если он оказывается на поверхности повсюду одинаковым, то задача решена. Если же поверхность не эквипотенциальна, то значит, мы сделали непра­вильное предположение о распределении зарядов; сделаем но­вое предположение и постараемся, чтобы оно было удачнее! Так может продолжаться без конца, разве что вы здорово набье­те руку на таких пробах.

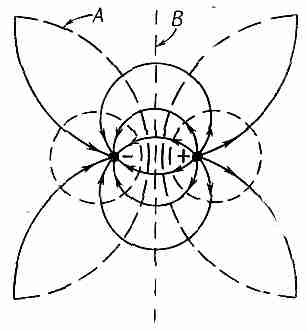
Вопрос о том, как догадываться о распределениях, матема­тически труден. Конечно, у природы есть время решать его; заряды притягиваются и отталкиваются до тех пор, пока не уравновесятся взаимно. А когда мы пробуем решить задачу, то каждая проба занимает так много времени, что этот метод оказывается очень громоздким. Когда имеется произвольный сложный набор проводников и зарядов, задача весьма услож­няется, и в общем случае не может быть решена без специально разработанных численных методов. Такие численные расчеты в наши дни выполняются на счетных машинах, которые могут все посчитать за нас, если мы им объясним, как это сделать.

С другой стороны, имеется множество мелких практических случаев, в которых, к нашему удовольствию, удается добиться решения каким-то прямым методом, не составляя программы для машины. На наше счастье, во многих случаях с помощью того или иного фокуса можно выжать ответ из природы.

Первый такой фокус, который мы хотим вам показать, со­стоит в использовании уже известных решений задач с фиксированным расположением зарядов.

**§ 7. Метод изображений**

Мы определили поле двух точечных зарядов. На фиг. 6.8 показаны некоторые линии поля и эквипотенциальные поверх­ности, полученные из расчетов, приведенных в гл. 5. Рассмот­рим теперь эквипотенциальную поверхность *А.* Предположим, что мы изогнули тонкий лист металла так, что он в точности



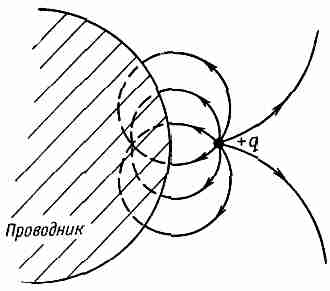
*Фиг. 6.8. Линии поля и эквипо­тенциальные поверхности двух точечных зарядов.*

накладывается на эту поверх­ность. Если его действитель­но наложить и установить на нем правильное значение потенциала, то никто не будет даже знать, что он там лежит, потому что ничего от его появле­ния не изменилось.

А теперь взгляните внимательнее! На самом-то деле мы ре­шили задачу уже с новым условием: поверхность изогнутого проводника с заданным потенциалом помещена близ точечного заряда. Если наш металлический лист, уложенный на экви­потенциальную поверхность, замыкается сам на себя (или тянется очень далеко), то получается картина, рассмотренная в Гл. 5, § 10, когда пространство делится на две области: одна внутри, другая снаружи замкнутой проводящей поверхности. Там мы пришли к выводу, что поля в этих двух областях совершенно не зависят друг от друга. Так что независимо от того, каково поле внутри замкнутого проводника, сна­ружи поле всегда одно и то же. Можно даже заполнить всю сердцевину проводника проводящим материалом. Вы­ходит, нам удалось найти поле при конфигурации проводников и зарядов, изображенной на фиг. 6.9. В пространстве вне проводника поле как раз такое, как у двух точечных зарядов (см. фиг. 6.8). Внутри проводника оно нуль. И, кроме того, электрическое поле, как и следовало ожидать, у самой поверх­ности проводника нормально к ней.

Итак, мы можем рассчитать поля на фиг. 6.9, вычисляя поле, созданное зарядом *q* и воображаемым точечным зарядом *—q,* помещенным в подходящем месте. А точечный заряд, ко­торый мы представили себе существующим за проводящей по­верхностью, так и называется *зарядом-изображением.*

В книгах можно найти длинные перечни решений задачи электростатики для гиперболических поверхностей и других сложных штук. Вас могло бы удивить, как это удалось рассчи­тать поля близ поверхностей столь ужасной формы. Но они были рассчитаны задом наперед! Кто-то решил простую задачу



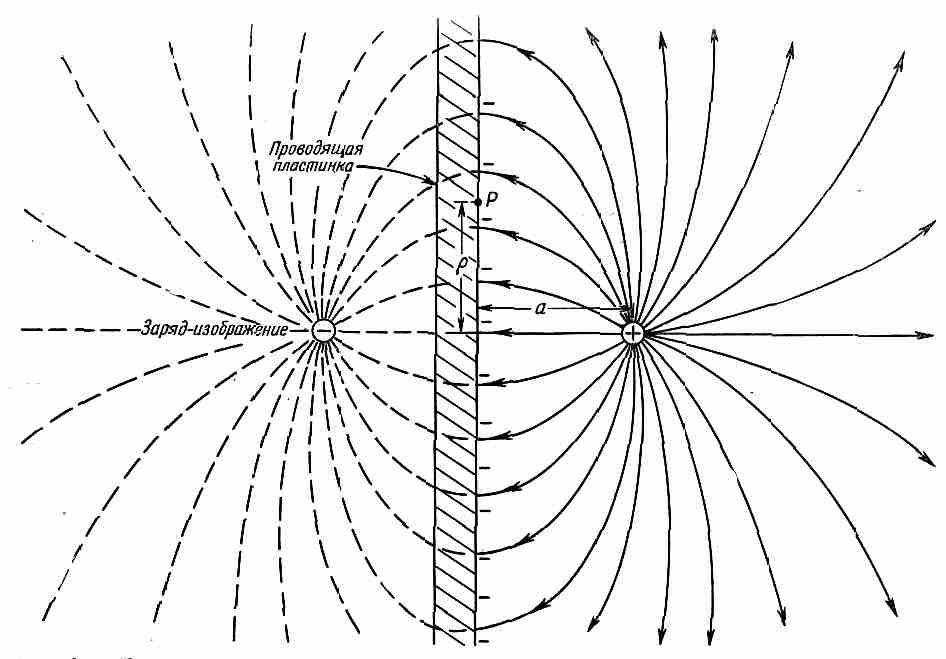
*Фиг. 6.9. Поле вне проводника, изогнутого вдоль эквипотенци­альной поверхности А на пре­дыдущем рисунке.*

с фиксированными зарядами. А затем обнаружил, что появля­ются некоторые эквипотенциальные поверхности новой формы, ну и написал работу, в которой указал, что поля снаружи про­водника такой формы могут быть изображены так-то и так-то.

**§ 8. Точечный заряд у проводящей плоскости**

В качестве простейшего применения этого метода используем плоскую эквипотенциальную поверхность *В* (см. фиг. 6.8). Она поможет нам решить задачу о заряде вблизи проводящей плоскости. Для этого зачеркнем просто левую часть фигуры. Линии поля нашего решения показаны на фиг. 6.10. Заметьте, что плоскость обладает нулевым потенциалом, потому что она находится как раз на полпути между зарядами. Мы решили за­дачу о положительном заряде вблизи заземленной проводящей плоскости.

Так мы узнали суммарное поле, но что можно сказать о том, каковы те *реальные* заряды, которые создали его? Кроме нашего положительного точечного заряда, ими являются какие-то отри­цательные заряды, наведенные на проводящей плоскости и при­тянутые положительным зарядом (с каких-то далеких расстоя­ний). Но теперь пусть вам захотелось узнать (то ли для техни­ческих целей, то ли просто из любопытства), как распределены эти отрицательные заряды по поверхности. Поверхностную плотность заряда вы сможете узнать, использовав результат, полученный в гл. 5, § 6 при помощи теоремы Гаусса. Нормаль­ная составляющая электрического поля возле самого провод­ника равна плотности поверхностного заряда а, деленной на ε0. Мы можем узнать плотность заряда в каждой точке поверхности, отправляясь назад от нормальной составляющей электриче­ского поля на поверхности. А ее мы знаем, потому что вообще нам известно поле в любой точке.



*Фиг. 6.10. Поле заряда, помещенного близ плоской проводящей поверхности, найденное методом изображений.*

C:\1\pic\gray.jpgРассмотрим точку поверхности на расстоянии ρ от той точки, которая расположена прямо против положительного заряда (см. фиг. 6.10). Электрическое поле в этой точке нор­мально к поверхности и направлено внутрь нее. Составляющая поля *положительного* точечного заряда, нормальная к поверх­ности, равна

(6.28)

C:\1\pic\gray.jpgК ней мы должны добавить электрическое поле, созданное отри­цательным зеркальным зарядом. Это удвоит нормальную со­ставляющую (и уничтожит все прочие), так что плотность за­ряда 0 в произвольной точке поверхности будет равна

(6.29)

Проинтегрировав а по всей поверхности, мы сможем прове­рить наши расчеты. Мы должны получить весь наведенный заряд, т. е. -*q.*

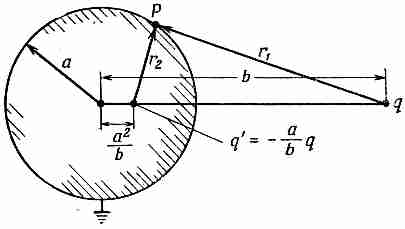
C:\1\pic\gray.jpgЕще один вопрос: действует ли на точечный заряд сила? Да, потому что наведенные на плоскости отрицательные заряды должны его притягивать. А раз мы знаем, каковы эти поверх­ностные заряды [по формуле (6.29)], то можем с помощью интег­рирования подсчитать силу, действующую на наш положитель­ный заряд. Но мы ведь знаем также, что сила, действующая на него, в точности такая, какой она была бы, если бы вместо плоскости был один только отрицательный зеркальный заряд, потому что поля поблизости от них в обоих случаях одинаковы. Точечный заряд тем самым испытывает силу притяжения к пло­скости, равную

(6.30)

Мы определили эту силу очень легко, без интегрирования по отрицательным зарядам.

**§ 9. Точечный заряд у проводящей сферы**

А какие еще поверхности, кроме плоскости, имеют простое решение? Самая простая из них — сфера. Попробуем определить поля вокруг металлической сферы с точечным зарядом *q* вблизи нее (фиг. 6.11). Придется поискать простую физическую задачу, для которой сфера есть эквипотенциальная поверхность. Если мы просмотрим те задачи, которые уже решены, то увидим, что у поля двух *неравных* точечных зарядов одна из эквипотен­циальных поверхностей как раз и есть сфера. Отметим себе это! Если мы как следует подберем положение заряда-изображения и нужную его величину, может быть, тогда мы и сможем подо­гнать эквипотенциальную поверхность к нашей сфере.



*Фиг. 6.11. Точечный заряд q наводит на за­земленной проводящей сфере заряды, которые создают поле, такое же, как у заряда-изображе­ния, помещенного в ука­занной точке.*

Это и впрямь может быть сделано, если действовать по следующему рецепту.

Положим, что вы хотите, чтобы эквипотенциальная поверх­ность была сферой радиуса *а* с центром, отстоящим от заряда *q* на расстояние b*.* Поместите изображение заряда величины q'=-*q(a/b)* на радиусе, проходящем через заряд на расстоянии a2*/b* от центра. Потенциал сферы пусть будет нуль.

Математически причина состоит в том, что сфера есть гео­метрическое место точек, отношение расстояний которых от двух данных точек постоянно. Как следует из фиг. 6.11, потен­циал в точке *Р* от зарядов *q* и *q'* пропорционален сумме

C:\1\pic\gray.jpg

C:\1\pic\gray.jpgи будет равен нулю во всех точках, для которых

Если мы помещаем *q'* на расстоянии *а2!b* от центра, то отноше­ние r2/r1 равно постоянной величине a/b. Тогда если

C:\1\pic\gray.jpg

(6.31)

то сфера станет эквипотенциалью. Потенциал ее на самом деле будет равен нулю.

C:\1\pic\gray.jpgА что, если нам понадобится сфера с ненулевым потенциалом? Ведь он равен нулю только тогда, когда ее суммарный заряд слу­чайно окажется равным *q'*!Конечно, если ее заземлить, то наведенные на ней заряды окажутся в точности такими, как на­до. Ну, а если она заизолирована и мы не снабдили ее никаким зарядом? Или снабдили ее зарядом Q*≠*q'? Или она находится под напряжением, *не равным* нулю? Такие вопросы разрешаются сходу. Всегда ведь можно добавить в центр сферы точечный заряд *q".* По принципу наложения сфера всегда останется эк­випотенциальной, а изменится только величина потенциала. Если у нас, скажем, есть проводящая сфера, предваритель­но разряженная и изолированная от всего, и мы поднесли к ней положительный заряд *q,* то суммарный заряд сферы останется равным нулю. Решение можно найти, взяв тот же, что и прежде, заряд-изображение *q'* и вдобавок к нему заряд в центре сферы, такой, что

(6.32)

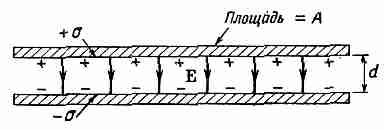
Поля повсюду вне сферы будут получаться наложением полей от q, q'и q*".* Задача решена.

Теперь ясно, что между сферой и точечным зарядом qдолж­на существовать сила притяжения. Она не пропадает, даже если сфера нейтральна, на ней нет никакого заряда. Откуда же берется притяжение? Когда вы подносите к проводящей сфере положительный заряд, то он притягивает отрицательные за­ряды на ближний конец сферы, положительные же оставляет на дальнем. А притяжение отрицательными зарядами пере­вешивает отталкивание положительными; в итоге остается при­тяжение. Силу его можно прикинуть, подсчитав силу, действую­щую на qв поле, созданном q'и q*".* Суммарная сила равна силе притяжения между зарядами qи *q' = -(a/b)q* на расстоянии b-(а2/b) плюс сила отталкивания *q* и заряда *q"* = +*(a/b)q* на расстоянии b*.*

Если вы в детстве любили разглядывать журнал, на облож­ке которого был показан мальчик, разглядывающий журнал, на обложке которого показан мальчик, разглядывающий жур­нал, на обложке которого..., то вас заинтересует и следующая задача. Две одинаковые сферы, одна с зарядом +Q, а другая с зарядом -*Q,* расположены на некотором расстоянии друг от друга. Какова сила притяжения между ними? Задача решает­ся при помощи бесконечного количества изображений. Первое приближает каждую сферу зарядом в ее центре. Эти заряды создают свои изображения на другой сфере. У изображений в свою очередь есть свои изображения и т. д., и т. д., и т. д. Решение здесь — все равно что картинка на обложке. Схо­дится оно очень быстро.

**§ 10. Конденсаторы; параллельные пластины**

Теперь обратимся к другому роду задач, связанных с про­водниками. Рассмотрим две широкие металлические пластины, параллельные между собой и разделенные узким (по сравнению с их размерами) промежутком. Предположим, что пластины наэлектризованы равными, но противоположными зарядами.



*Фиг. 6.12. Плоский конденсатор.*

Заряды одной пластины будут притягивать к себе заряды дру­гой и потом равномерно распределятся на внутренней поверх­ности пластин. Пусть поверхностная плотность зарядов на пластинах будет +σ и -σсоответственно (фиг. 6.12). Из гл. 5 мы знаем, что поле между пластинами равно σ/ε0, а поле снаружи пластин равно нулю. Пластины обладают неравными потен­циалами ϕ1 и ϕ2. Их разности *V* удобно дать особое имя, ее часто называют «напряжением»

C:\1\pic\gray.jpg

[некоторые обозначают буквой *V* потенциал, мы же его обозна­чили буквой ϕ].

C:\1\pic\gray.jpgРазность потенциалов V — это работа (на единицу заряда), требуемая для переноса небольшого заряда с одной пластины на другую, так что

(6.33)

где *±Q —* суммарный заряд каждой пластины, *А —* ее пло­щадь, *d —* щель между пластинами.

Мы видим, что напряжение пропорционально заряду. Эта пропорциональность между *V* и Qсоблюдается для любых двух проводников в пространстве, если на одном из них имеется плюс-заряд, а на другом равный ему минус-заряд. Разность потенциалов между ними, т. е. напряжение, оказывается про­порциональной заряду. (Мы предполагаем, что вокруг нет ни­каких других зарядов.)

Почему возникает эта пропорциональность? Просто из-за принципа наложения. Пусть нам известно решение для одной совокупности зарядов, а потом мы наложим на него другое такое же решение. Заряды удвоятся, поля удвоятся, работа пе­реноса заряда от точки к точке тоже удвоится. По этой причине разность потенциалов двух точек пропорциональна заряду. В частности, разность потенциалов двух проводников пропор­циональна их зарядам. Эту пропорциональность когда-то решили записывать иначе. И стали писать

Q=CV,

где *С —* постоянное число. Этот коэффициент пропорциональ­ности назвали *емкостью,* а систему двух проводников — *конденсатором.* Для нашего конденсатора из параллельных пластин

C:\1\pic\gray.jpg

(параллельные обкладки). (6.34)

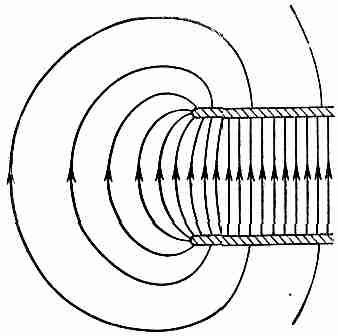
Эта формула неточна, потому что поле в противоречии с на­шим предположением на самом деле не всюду однородно. Поле не кончается сразу на ребрах пластин, а похоже скорее на то, что изображено на фиг. 6.13. Суммарный заряд тоже равен не *σА,* как мы предположили; существует маленькая поправ­ка на краевой эффект. Чтобы знать, какова она, надо точнее рас­считать поле и посмотреть, что происходит на краях. Это очень сложная математическая задача, однако ее можно решить при помощи техники, о которой мы, впрочем, говорить здесь не бу­дем. Расчеты показывают, что плотность зарядов возле края пластин слегка возрастает. Это значит, что емкость пластин чуть выше, чем мы думали. [Хорошее приближение для емкости можно получить, если в уравнении (6.34) принять за *А* площадь, которую *имели бы* пластины, если б их расширили на 3/8 расстояния между ними.]

Мы говорили пока только о емкости двух проводников. Иногда люди говорят о емкости предмета самого по себе. Так, говорят, что емкость сферы радиусом *а* есть *4πε0а*. При этом подразумевается, что вторым полюсом является сфера беско­нечного радиуса, т. е. что если на сфере помещен заряд

+ Q*,* то противоположным зарядом -*Q* обладает бесконечно боль­шая сфера. Можно говорить также о емкостях и тогда, когда проводников три или больше трех, но обсуждение этого во­проса мы отложим до лучших времен.

Пусть нам необходимо иметь конденсатор очень большой емкости. Большую емкость можно получить, взяв очень большую

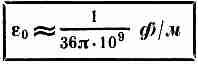
площадь и очень малый промежуток. Можно про­ложить алюминиевые лен­ты провощенной бумагой и смотать их в трубку. (Поместив ее в пластмас­совую упаковку, мы полу­чим типичный радиоконденсатор.)



*Фиг. 6.13. Электрическое поле у краев двух параллельных пластин.*

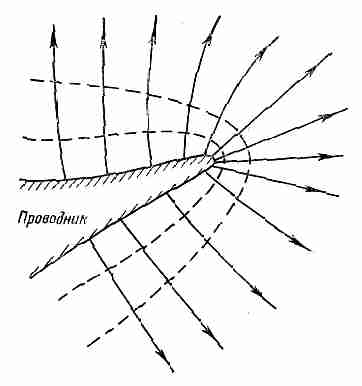
Зачем они нужны? Они пригодны для того, чтобы накапливать заряд. Если бы мы захотели, например, собрать заряд на каком-то шаре, то его потенциал быстро подско­чил бы, а вскоре так поднялся бы, что заряды стали бы стекать в воздух, и от шара посыпались бы искры. Но если тот же заряд поместить внутрь конденсатора большой емкости, то напряжение близ конденсатора будет очень малым.

Во многих электронных схемах полезно иметь устройство, способное поглощать или выделять большие количества зарядов, заметно не изменяя потенциал. Вот конденсатор (или «емкость»)— как раз такое устройство. Он имеет множество применений и в электронных приборах и в счетных машинах. Там он исполь­зуется для получения определенного изменения в напряжении в ответ на то или иное изменение заряда. С подобным приме­нением мы уже познакомились в вып. 2, гл. 23, когда описыва­ли свойства резонансных контуров.

Из определения *С* мы получаем, что единица емкости есть *кулон/вольт.* Эту единицу называют также *фарадой (ф).* А вгля­девшись в уравнение (6.34), мы видим, что ε0 можно выразить в *фарадах/метр (ф/м);* эта единица обычно и применяется.

Типичные емкости конденсаторов лежат в интервале от 1 мик­ромикрофарады *(мкмкф)* [или, что тоже самое, 1 пикофарады (1 *пф)]* до миллифарад. Небольшие конденсаторы на несколько пикофарад используются в высокочастотных контурах наст­ройки, а емкости порядка сотен или тысяч микрофарад мы на­ходим в силовых фильтрах. Пара обкладок с площадью 1 *см2* с промежутком 1 *мм* имеет емкость примерно 1 *пф.*

**§ 11. Пробой при высоком напряжении**

Сейчас мы качественным образом рассмотрим некоторые ха­рактеристики полей вокруг проводников. Зарядим электри­чеством проводник, но на сей раз не сферический, а такой, у ко­торого есть острие или ребро (например, в форме, изображен­ной на фиг. 6.14). Тогда поле в этом месте окажется намного сильнее, чем в других местах. Причина в общих чертах состоит в том, что заряды стремятся как можно шире растечься по по­верхности проводника, а кончик острия всегда отстоит дальше всего от остальной поверхности. Поэтому часть зарядов на пла­стине течет к острию. Относительно малое *количество* заряда на нем может создать большую поверхностную *плотность,* а высокая плотность означает сильное поле близ проводника в этом месте.

*Фиг. 6.14. Электрическое по­ле у острого края проводника очень велико.*

C:\1\pic\gray.jpgВообще в тех местах проводника, в которых радиус кривизны меньше, поле оказывается сильнее. Чтобы убедиться в этом, рас­смотрим комбинацию из большой и маленькой сфер, соединен­ных проводом, как показано на фиг. 6.15. Сам провод не будет сильно влиять на внешние поля; его дело — уравнять потен­циалы сфер. Возле какого шара поле окажется более напряжен­ным? Если радиус левого шара а, а заряд Q, то его потенциал примерно равен

(Конечно, наличие одного шара скажется на распределении за­рядов на другом, так что на самом деле ни на одном из них заря­ды не будут распределены симметрично. Но если нас интересует лишь примерная величина поля, то можно пользоваться форму­лой для потенциала сферического заряда.) Если меньший шар радиусом bобладает зарядом *q,* то его потенциал примерно ра­вен

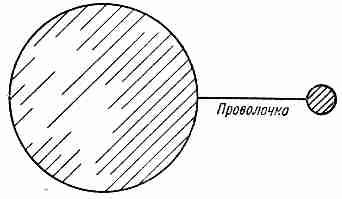
C:\1\pic\gray.jpg

Но ϕ1=ϕ2, так что

C:\1\pic\gray.jpg

C:\1\pic\gray.jpgС другой стороны, поле у поверхности [см. уравнение (5.8)] пропорционально поверхностной плотности заряда, которая в свою очередь пропорциональна суммарному заряду, делен­ному на квадрат радиуса. Получается, что

(6.35)



*Фиг. 6.15. Поле остроконеч­ного предмета можно прибли­женно считать полем двух сфер одинакового потенциала.*

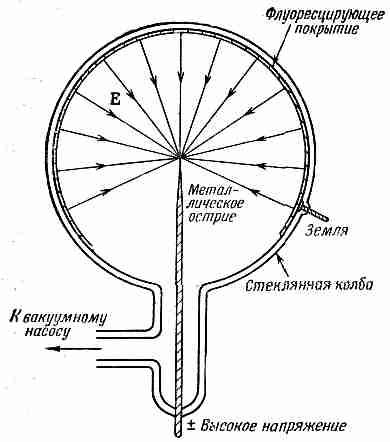
Значит, у поверхности меньшей сферы поле больше. Поля об­ратно пропорциональны радиусам.

Этот результат с технической точки зрения очень важен, потому что в воздухе возникает пробой, если поле чересчур велико. Какой-нибудь свободный заряд в воздухе (электрон или ион) ускоряется этим полем, и если оно очень сильное, то за­ряд может набрать до столкновения с атомом такую скорость, что вышибет из атома новый электрон. В итоге появляется все больше и больше ионов. Их движение и составляет искру, или разряд. Если вам требуется зарядить тело до высокого потен­циала так, чтобы оно не разрядилось в воздух, вы должны быть уверены, что поверхность тела гладкая, что на нем нет мест, где поле чересчур велико.

**§ 12. Ионный микроскоп**

Сверхвысокое электрическое поле, окружающее всякий острый выступ заряженного проводника, получило интересное применение в одном приборе. Работа *ионного микроскопа* обус­ловлена мощными полями, возникающими вокруг [металличе­ского острия.](#прим1) Устроен этот прибор так. Очень тонкая игла, диаметр кончика которой не более 1000 Å, помещена в центре стеклянной сферы, из которой выкачан воздух (фиг. 6.16). Внутренняя поверхность сферы покрыта тонким проводящим слоем флуоресцирующего вещества, и между иглой и флуоре­сцирующим покрытием создана очень высокая разность потенциалов.

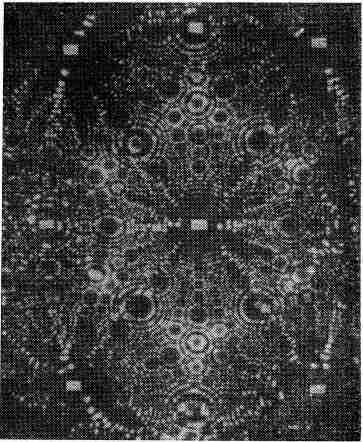
Посмотрим сперва, что будет, если игла по отношению к флу­оресцирующему экрану заряжена отрицательно. Линии поля у кончика иглы сконцентрированы очень сильно. Электрическое поле может достигать 40•106 в на 1 *см.* В таких сильных полях электроны отрываются от поверхности иглы и ускоряются на участке от иглы до экрана за счет разности потенциалов. Достигнув экрана, они вызывают в этом месте свечение (в точности, как на экране телевизионной трубки).



*Фиг. 6.16. Ионный мик­роскоп.*

Электроны, пришедшие в данную точку флуоресцирующей поверхности,— это, в очень хорошем приближении, те самые электроны, которые покинули другой конец радиальной линии поля, потому что электроны движутся вдоль линий поля, сое­диняющих кончик иглы с поверхностью сферы. Так что на поверхности мы видим своего рода изображение кончика иглы. А точнее, мы видим картину *испускателъной способности* по­верхности иглы, т. е. легкости, с которой электроны могут оставить поверхность металлического острия. Если сила разре­шения достаточно высока, то можно рассчитывать разрешить положения отдельных атомов на кончике иглы. Но с электро­нами такого разрешения достичь нельзя по следующим причи­нам. Во-первых, возникает квантовомеханическая дифракция электронных волн, и изображение затуманится. Во-вторых, в результате внутреннего движения в металле электроны имеют небольшую поперечную начальную скорость в момент вырывания из иглы и эта случайная поперечная составляющая ско­рости приведет к размазыванию изображения. В общей слож­ности эти эффекты ограничивают разрешимость деталей вели­чиной порядка 25А.

Если, однако, мы переменим знак напряжения и впустим в колбу немного гелия, то детали разрешены будут лучше. Когда атом гелия сталкивается с кончиком острия, мощное поле срывает с атома электрон, и атом заряжается положительно.



*Фие. 6.17. Изображение, полученное ионным микро­скопом.*

Затем ион гелия ускоряется вдоль силовой линии, пока не по­падет в экран. Поскольку ион гелия несравненно тяжелее элект­рона, то и квантовомеханические длины волн у него намного меньше. А если к тому же температура не очень высока, то и влияние тепловых скоростей также значительно слабее, чем у электрона. Изображение размазывается меньше и получается куда более резкое изображение кончика иглы. С микроскопом, работающим на принципе ионной эмиссии, удалось добиться увеличения вплоть до 2 000 000 раз, т. е. в десять раз лучше, чем на лучших электронных микроскопах.

На фиг. 6.17 показано, что удалось получить на таком мик­роскопе, применив вольфрамовую иглу. Центры атомов вольфра­ма ионизуют атомы гелия чуть иначе, чем промежутки между атомами вольфрама. Расположение пятен на флуоресцирующем экране демонстрирует расстановку *отдельных атомов* на воль­фрамовом острие. Почему пятна имеют вид колец, можно по­нять, если представить себе большой ящик, набитый шарами, уложенными в прямоугольную сетку и образующими таким обра­зом кубическую решетку. Эти шары — как бы атомы в металле. Если вы из этого ящика вырежете примерно сферическую часть, то увидите картину колец, характерную для атомной структуры. Ионный микроскоп впервые снабдил человечество средством видеть атомы. Замечательное достижение, да еще полученное с таким простым прибором.

***\*******См. статью Мюллера [Е. W. Mueller, The field-ion microscope, Advances in Electronics and Electron Physics, 13, 83 (I960)].***

***Глава 7***

# ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В РАЗНЫХ ФИЗИЧЕСКИХ УСЛОВИЯХ (продолжение)

**[§1.Методы определен](#a1)****[ия электростати­ческого поля](#a1)**

**[§2.Двумерные поля;](#a2)** **[функции комп](#a2)****[лексного переменного](#a2)**

[**§З.Колебан****ия плазмы**](#a3)

[**§4.Коллоидны****е частицы в электролите**](#a4)

[**§5.Электростати­****ческое поле сетки**](#a5)

**§ 1. Методы определения электростатического поля**

В этой главе мы продолжим рассмотрение характеристик электрических полей в различ­ных условиях. Сперва мы опишем один из наи­более разработанных методов расчета полей в присутствии проводников. Мы не рассчиты­ваем, конечно, что эти усовершенствованные методы будут вами тотчас усвоены. Но вам дол­жно быть интересно получить какое-то пред­ставление о характере задач, которые удается решать при помощи техники, излагаемой в спе­циальных, более глубоких курсах. Затем мы приведем два примера, в которых нет ни за­ранее фиксированных распределений зарядов, ни растекания зарядов по проводнику, а вместо этого распределение определяют другие физи­ческие законы.

Как мы выяснили в гл. 6, задача об электро­статическом поле решается очень просто, когда распределение зарядов оговорено заранее; ос­тается только взять интеграл. Когда же име­ются проводники, то возникают усложнения, потому что распределение зарядов на провод­никах с самого начала неизвестно; заряды вынуждены сами распределять себя по поверх­ности проводника так, чтобы весь проводник приобрел одинаковый потенциал. Эти задачи так просто не решаются.

Мы рассмотрели обходный путь решения таких задач, при котором сначала отыскивают эквипотенциальные поверхности некоторого заданного распределения зарядов и потом одну из них заменяют проводящей поверх­ностью. Таким манером можно составить ката­лог частных решений для проводников любой формы, плоской, сферической и т. п. Использование изображений, описанное в гл. 6, является примером косвенного способа решения. Другой такой способ мы опишем в этой главе.

Если наша задача не относится к тем, для которых годен об­ходный путь, приходится решать ее в лоб. Математической ос­новой такого способа решения задач является решение урав­нения Лапласа

C:\1\pic\gray.jpg

(7.1)

при условии, что потенциал ϕ на некоторой границе (поверхно­стях проводников) равен условленной константе. Задачи, свя­занные с решением дифференциального уравнения поля, удовлетворяющего некоторым *граничным условиям,* называются задачами *о граничных значениях.* Они явились предметом интен­сивного математического изучения. Для сложных проводников общих аналитических методов решения нет. Даже такая про­стая задача, как поле заряженного металлического цилиндра с запаянными торцами — консервной банки, представляет огромные математические трудности. Ее можно решить лишь приближенно, численным методом. *Единственный* общий метод решения — численный.

Имеется несколько задач, в которых уравнение (7.1) все же решается. К примеру, задача о заряженном проводнике, имею­щем форму эллипсоида вращения, может быть решена с по­мощью некоторых специальных функций. Решение для тонкого диска тогда можно получить, бесконечно сплющив эллипсоид. А бесконечно вытянув тот же эллипсоид, получим поле заряжен­ной иглы. Но надо подчеркнуть, что единственный прямой спо­соб, применимый всюду и всегда, это путь численных расчетов.

Задачу о граничных значениях можно также решать на ее физическом аналоге. Уравнение Лапласа возникает во многих физических ситуациях: при изучении установившегося потока тепла, безвихревого течения жидкости, отклонений упругой мембраны. Часто можно соорудить физическую модель, являю­щуюся аналогом решаемой нами электрической задачи. Изме­рив в модели величину, аналогичную интересующей нас, можно узнать решение задачи. Примером аналоговой техники являет­ся применение электролитической ванны для решения двумер­ных задач электростатики. Решение удается потому, что дифференциальное уравнение для потенциала в однородной проводя­щей среде такое же, как и в вакууме.

C:\1\pic\gray.jpgИмеется много физических задач, в которых физические поля в каком-то одном направлении не изменяются или этим измене­нием можно пренебречь по сравнению с изменениями в двух дру­гих направлениях. Такие задачи называют двумерными; поле за­висит только от двух координат. Скажем, если вдоль оси z про­тянуть длинную заряженную проволоку, то в точках неподалеку от нее электрическое поле зависит от xи y, а не от z; задача дву­мерная. Так как в двумерных задачах *dϕ/dz=0,* то уравнение для ϕ в свободном пространстве имеет вид

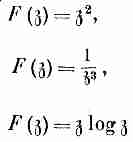
(7.2)

Поскольку двумерное уравнение сравнительно простое, то су­ществует широкий класс условий, в которых оно решается ана­литически. Действительно, существует могучая математическая техника, связанная с теоремами теории функций комплексного переменного. К изложению ее мы сейчас и перейдем.

**§ 2. Двумерные поля; функции комплексного переменного**

Комплексная величина з определяется так:

C:\1\pic\gray.jpg

(Не перепутайте з с координатой z; координата z не встретится в дальнейшем, потому что зависимости полей от z не будет.) Тогда каждой точке на плоскости *(х, у)* отвечает комплексное число з. Мы можем считать з особой (комплексной) переменной величиной и с ее помощью записывать обычные математические функции F(з). Например,

C:\1\pic\gray.jpgЕсли дана некоторая определенная функция *F(з),* то можно подставить *з=x+iy;* получится функция от *х* и *у* с действи­тельной и мнимой частями. Например,

(7.3)

C:\1\pic\gray.jpgЛюбую функцию *F*(з) можно записать в виде суммы чисто дей­ствительной и чисто мнимой частей, и каждая из частей будет функцией от *х* и *у:*

(7.4)

C:\1\pic\gray.jpgгде *U(x, у)* и *V(x, у) —* действительные функции. Значит, из лю­бой комплексной функции *F(з)* можно произвести две новые функции *U (х, у)* и *V(x,y).* К примеру, .F(з) = з2 дает две функ­ции:

(7.5)

C:\1\pic\gray.jpgи

(7.6)

Мы подошли сейчас к удивительной математической теореме, столь прекрасной, что доказательство ее придется отложить до соответствующего математического курса. (Если мы начнем заранее приоткрывать все тайны математики, она покажется вам потом скучной.) Теорема эта состоит вот в чем. Для любой «нормальной» функции (что это такое, математики вам объяснят лучше) функции *U* и *V автоматически* удовлетворяют соотно­шениям

C:\1\pic\gray.jpg

(7.7)

и

C:\1\pic\gray.jpg

(7.8)

C:\1\pic\gray.jpgОтсюда немедленно следует, что каждая из функций *U* и *V* удовлетворяет уравнению Лапласа:

C:\1\pic\gray.jpg(7.9)

(7.10)

Сразу видно, что для функций (7.5) и (7.6) эти уравнения выполняются.

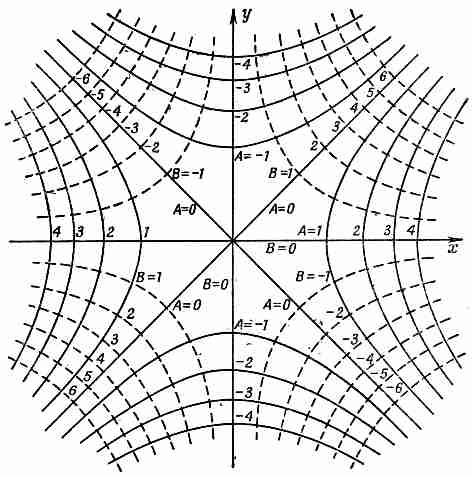
Значит, всегда, отправившись от какой угодно обычной функции, можно прийти к двум функциям *U (х, у)* и *V (х, у),* которые обе есть решения двумерного уравнения Лапласа. Каждая функция представляет некоторый электростатический потенциал. *Любая* выбранная нами функция F(з) обязана снаб­дить нас решением *какой-то* задачи из электростатики, вернее даже *двух* задач, потому что решением является *как U*, *так* и *V.* Так можно выписать сколько угодно решений: просто напридумывать множество функций и останется только найти *задачи* с такими решениями. Такой подход к задачам вполне допустим, хоть он и производится задом наперед.

Для примера посмотрим, к какой физической задаче приве­дет нас функция *Р(з)=з2.* Из нее мы получаем две потенциаль­ные функции (7.5) и (7.6). Чтобы увидеть, какую задачу решает функция *U,* мы найдем эквипотенциальные поверхности, пола­гая *V* равным постоянному числу *А:*

*х2-у2 = А.*

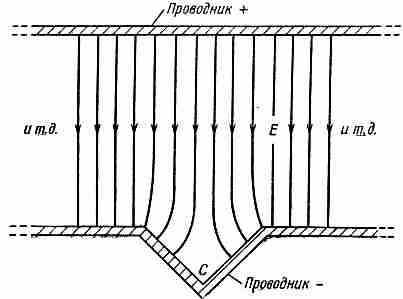
Это уравнение прямоугольной гиперболы. Перебирая разные значения *А,* мы получаем семейство гипербол, начерченное на фиг. 7.1. Когда A=0, то гиперболы вырождаются в пару диагоналей, проходящих через начало.

Такое семейство эквипотенциальных поверхностей встре­чается в нескольких физических задачах. В одной из них оно изображает детали структуры поля возле точки между двумя одинаковыми точечными зарядами.

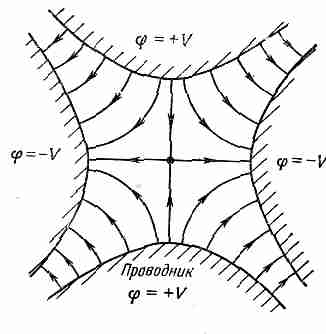


*Фиг. 7.1. Два семейства ортогональных кривых, которые могут представлять собой эквипотенциаль­ные линии двумерного электростатического поля.*

В другой оно изображает поле внутри прямого угла, образованного двумя проводящими плоскостями. Если есть два электрода, изогнутых так, как по­казано на фиг. 7.2, и имеющих разные потенциалы, то поле внутри угла *С* будет выглядеть в точности так же, как поле около начала координат на фиг. 7.1.



*Фиг. 7.2. Поле возле точки С такое же, как на фиг. 7.1.*



*Фиг. 7.3. Поле квадрупольной линзы.*

Сплошные линии — это эквипотенциальные поверхности, а пересекающие их штрихо­вые — это линии поля Е. Вблизи острия или выступа электри­ческое поле повышается, а возле впадины или отверстия оно слабеет.

C:\1\pic\gray.jpgНайденное нами решение отвечает также гиперболическому электроду, помещенному около прямого угла, или двум гипер­болам при соответствующих потенциалах. Заметьте, что поле фиг. 7.1 имеет интересное свойство. Составляющая *х* электри­ческого поля Е дается выражением

т. е. электрическое поле пропорционально расстоянию от оси координат. Этот факт был использован, чтобы создать устрой­ство (называемое квадрупольной линзой), необходимое для фокусирования пучков частиц (см. вып. 6, гл. 29, § 9). Фокуси­рующее поле обычно получают с помощью четырех гипербо­лических электродов, изображенных на фиг. 7.3. Проводя здесь линии электрического поля, мы просто перечертили с фиг. 7.1 семейство штриховых кривых V=const. Эти линии достались нам совершенно бесплатно! Кривые V=const перпендикулярны к кривым *U=*const, как это следует из уравнений (7.7) и (7.8). Как только мы выбираем функцию *F(з),* то получаем из *U* и *V* сразу же эквипотенциальные линии и линии поля. Мы дав­но знаем, что можно решить на выбор любую из двух задач, смотря по тому, какое семейство кривых мы примем за экви­потенциальное.

Другим примером послужит функция

C:\1\pic\gray.jpg

(7.11)

Если мы напишем

C:\1\pic\gray.jpg

C:\1\pic\gray.jpgгде

и

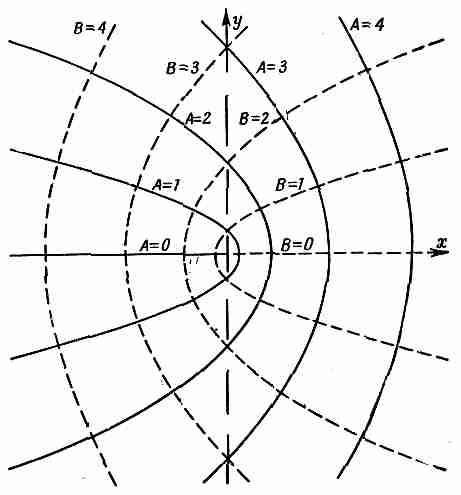
C:\1\pic\gray.jpg

C:\1\pic\gray.jpgто

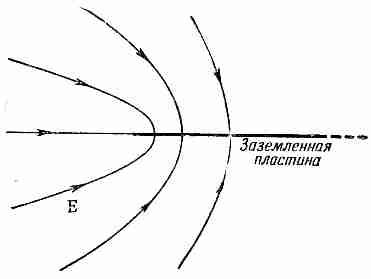
откуда следует

C:\1\pic\gray.jpg

Кривые *U (х, у) =А* и *V (х, у) = В,* где *U и V* взяты из уравнения (7.12), проведены на фиг. 7.4. И здесь тоже можно назвать немало случаев, описываемых этими полями. Один из самых интересных — это поле у края тонкой пластинки. Если линия *В=0* направо от оси *у* изображает тонкую заряженную пластину, то линии поля близ нее даются кривыми с различными А.



*Фиг. 7.4. Кривые постоянных U(x, у) и V(x, у) ив уравнения (7.12).*



*Фиг. 7.5. Электрическое поле возле края тонкой за­земленной пластины.*

Физическая картина показана на фиг. 7.5. Дальнейшие примеры — это функция

C:\1\pic\gray.jpg

(7.13)

дающая нам поле *снаружи* прямого угла, функция

C:\1\pic\gray.jpg

(7.14)

дающая поле заряженной нити, и функция

C:\1\pic\gray.jpg

(7.15)

изображающая поле двумерного аналога электрического ди­поля, т. е. двух параллельных прямых, заряженных противо­положным знаком и помещенных вплотную друг к другу.

Больше этим вопросом в нашем курсе мы заниматься не бу­дем; мы должны только подчеркнуть, что, хотя техника комп­лексных переменных часто оказывается очень мощной, она ограничена все же только двумерными задачами; к тому же это все-таки косвенный метод.

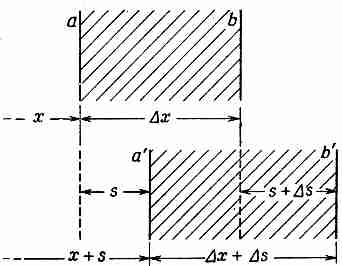
**§ 3. Колебания плазмы**

Займемся теперь такими физическими задачами, в которых поле создается не закрепленными зарядами и не зарядами на проводящих поверхностях, а сочетанием обоих факторов. Ины­ми словами, полем управляют одновременно две системы урав­нений: 1) уравнения электростатики, связывающие электриче­ское поле с распределением зарядов; 2) уравнения из другой области физики, определяющие положение или движения за­рядов в поле.

Сперва мы разберем один динамический пример. В нем дви­жение зарядов контролируется законами Ньютона. Простой пример такого положения вещей наблюдается в плазме, в ионизованном газе, состоящем из ионов и свободных электронов распределенных в какой-то области пространства. Ионосфера (верхний слой атмосферы) служит примером такой плазмы. Ультрафиолетовые лучи Солнца отрывают от молекул воздуха электроны и создают свободные электроны и ионы. В плазме положительные ионы намного тяжелее электронов, так что можно пренебречь движением в ней ионов но сравнению с дви­жением электронов.

Пусть n*0* будет плотностью электронов в невозмущенном равновесном состоянии. Такой же должна быть и плотность положительных ионов, потому что в невозмущенном состоянии плазма нейтральна. Теперь допустим, что электроны каким-то образом выведены из равновесия. Что тогда получится? Если плотность электронов в какой-то области возросла, они начнут отталкиваться и стремиться вернуться в прежнее положение равновесия. Двигаясь к своим первоначальным положениям, они наберут кинетическую энергию и вместо того, чтобы заме­реть в равновесной конфигурации, проскочат мимо. Начнутся колебания. Нечто похожее наблюдается в звуковых волнах, но там возвращающей силой было давление газа. В плазме воз­вращающая сила — это действующее на электроны электриче­ское притяжение.

Чтобы упростить рассуждения, мы будем заниматься только одномерным движением электронов — скажем, в направлении x;. Предположим, что электроны, первоначально находившиеся в точке *х,* к моменту *t* сместились из положения равновесия на расстояние *s (x, t).* Раз они сместились, то плотность их, вообще говоря, изменилась. Это изменение подсчитать легко. Если посмотреть на фиг. 7.6, то видно, что электроны, вначале нахо­дившиеся между плоскостями *а* и b, сдвинулись и теперь нахо­дятся между плоскостями а' и b*'.* Количество электронов между *а* и bпрежде было пропорционально n*0*Δ*х;* теперь *то же* их ко­личество находится в промежутке шириной Δx+Δs.



*Фиг. 7.6. Движение волны в плазме.*

*Электроны от плоскости а сдвига­ются к а', а от b —к b'.*

Плотность C:\1\pic\gray.jpgтеперь стала

(7.16)

Если изменение плотности мало, то можно написать [заменяя с помощью биномиального разложения (1+ε)-1 на (1-ε)]

C:\1\pic\gray.jpg

(7.17)

C:\1\pic\gray.jpgЧто касается ионов, то предположим, что они не сдвинулись заметно с места (инерция-то у них куда больше), так что плот­ность их осталась прежней, n0.Заряд каждого электрона -q*e ,* и средняя плотность заряда в любой точке равна

или

C:\1\pic\gray.jpg

(7.18)

(здесь Δs/Δx записано через дифференциалы).

Далее, уравнения Максвелла связывают с плотностью заря­дов электрическое поле. В частности,

C:\1\pic\gray.jpg

(7.19)

Если задача действительно одномерна (и никаких полей, кроме вызываемых смещением электронов, нет), то у электрического поля Е есть одна-единственная составляющая *Ех.* Уравнение (7.19) вместе с (7.18) приведет к

C:\1\pic\gray.jpg

(7.20)

C:\1\pic\gray.jpgИнтегрируя (7.20), получаем

(7.21)

Постоянная интегрирования *К* равна нулю, потому что *Ех=0* при s=0.

C:\1\pic\gray.jpgСила, действующая на смещенный электрон, равна

(7.22)

т. е. возвращающая сила пропорциональна смещению s элект­рона. Это приведет к гармоническим колебаниям электронов. Уравнение движения смещенного электрона имеет вид

C:\1\pic\gray.jpg

(7.23)

Отсюда следует, что s меняется по гармоническому закону. Во времени s меняется как cos ωt или, если использовать экспоненту (см. вып. 3), как

C:\1\pic\gray.jpg

(7.24)

Частота колебаний ω*р* определяется из (7.23):

C:\1\pic\gray.jpg

(7.25)

Это число, характеризующее плазму, называют *собственной частотой колебаний плазмы,* или *плазменной частотой.*

Оперируя с электронами, многие предпочитают получать ответы в единицах *e2,* определяемых как

C:\1\pic\gray.jpg

(7.26)

При этом условии (7.25) превращается в

C:\1\pic\gray.jpg

(7.27)

В таком виде эту формулу можно встретить во многих книгах.

Итак, мы обнаружили, что возмущения плазмы приводят к свободным колебаниям электронов вблизи положения равновесия с собственной частотой *ωр,* пропорциональной корню квад­ратному из плотности электронов. Плазменные электроны ве­дут себя как резонансная система, подобная описанным в вып. 2, гл. 23.

Этот собственный резонанс плазмы приводит к интересным эффектам. Например, при прохождении радиоволн сквозь ионо­сферу обнаруживается, что они могут пройти только в том слу­чае, если их частота выше плазменной частоты. А иначе они от­ражаются обратно. Для связи с искусственным спутником мы используем высокие частоты. Если же мы хотим связаться с ра­диостанцией, расположенной где-то за горизонтом, то необхо­димы частоты меньшие, чем плазменная частота, иначе сигнал не отразится обратно к Земле.

Другой интересный пример колебаний плазмы наблюдается в металлах. В них содержится плазма из положительных ионов и свободных электронов. Плотность n*0* там очень высока, зна­чит, велика и *ωр.* Но колебания электронов все же можно обна­ружить. Ведь, согласно квантовой механике, гармонический осциллятор с собственной частотой *ωр* обладает уровнями энер­гии, отличающимися друг от друга на величину h*ω*р. Значит, если, скажем, обстреливать электронами алюминиевую фольгу и очень точно измерять их энергию по ту сторону фольги, то можно ожидать, что временами электроны будут из-за колеба­ний плазмы терять как раз энергию *hωp.* Так это и происходит. Впервые это явление наблюдалось экспериментально в 1936 г. Электроны с энергиями от нескольких сот до несколь­ких тысяч электронвольт, рассеиваясь от тонкой металлической фольги или проходя сквозь нее, теряли энергию порциями. Эффект оставался непонятым до 1953 г., пока Бом и [Пайнс не показали](#прим1), что все это можно объяснить квантовым возбужде­нием плазмы в металле.

**§ 4. Коллоидные частицы в электролите**

Обратимся к другому явлению, когда местоположение заря­дов определяется потенциалом, создаваемым в какой-то степени самими зарядами. Такой эффект существен для поведения коллоидов. Коллоид — это взвесь маленьких заряженных час­тичек в воде. Хотя эти частички и микроскопические, но по сравнению с атомом они все же очень велики. Если бы коллоид­ные частицы не были заряжены, они бы стремились коагулиро­вать (слиться) в большие комки; но, будучи заряженными, они отталкиваются друг от друга и остаются во взвешенном состоя­нии. Если в воде растворена еще соль, то она диссоциирует (расползается) на положительные и отрицательные ионы. (Та­кой раствор ионов называется электролитом.) Отрицательные ионы притягиваются к коллоидным частицам (будем считать, что их заряды положительны), а положительные — отталки­ваются. Нам нужно узнать, как ионы, окружающие каждую частицу коллоида, распределены в пространстве.

Чтобы мысль была яснее, рассмотрим только одномерный случай. Представим себе коллоидную частицу в виде очень боль­шого (по сравнению с атомом!) шара; тогда мы можем малую часть ее поверхности считать плоскостью. (Вообще, пытаясь понять новое явление, лучше разобраться в нем на чрезвычайно упрощенной модели; и только потом, поняв суть проблемы, стоит браться за более точные расчеты.)

Предположим, что распределение ионов создает плотность за­рядов *р(х)* и электрический потенциал ϕ, связанные электро­статическим законом ∇2ϕ =-ρ/ε0, или в одномерном случае законом

C:\1\pic\gray.jpg

(7.28)

Как бы распределились ионы в таком поле, если бы потен­циал подчинялся этому уравнению? Узнать это можно при помощи принципов статистической механики. Вопрос в том, как определить ϕ, чтобы вытекающая из статистической меха­ники плотность заряда *тоже* удовлетворяла бы условию (7.28)?

Согласно статистической механике (см. вып. 4, гл. 40), час­тицы, пребывая в тепловом равновесии в поле сил, распределя­ются так, что плотность nчастиц с координатой xдается фор­мулой

C:\1\pic\gray.jpg

(7.29)

где *U(x) —* потенциальная энергия, *k* — постоянная Больцмана, *а Т —* абсолютная температура.

C:\1\pic\gray.jpgПредположим, что у всех ионов один и тот же электрический заряд, положительный или отрицательный. На расстоянии *х* от поверхности коллоидной частицы положительный ион будет обладать потенциальной энергией

Плотность положительных ионов тогда равна

C:\1\pic\gray.jpg

C:\1\pic\gray.jpgа плотность отрицательных

C:\1\pic\gray.jpgСуммарная плотность заряда

C:\1\pic\gray.jpgили

(7.30)

Подставляя в (7.28), увидим, что потенциал ϕ должен удов­летворять уравнению

C:\1\pic\gray.jpg

(7.31)

Это уравнение решается в общем виде [помножьте обе его части на 2(dϕ/dx)и проинтегрируйте по х],но, продолжая упрощать задачу, мы ограничимся здесь только предельным случаем малых потенциалов или высоких температур *Т.* Малость ϕ отвечает разбавленному раствору. Показатель экспоненты тогда мал, и можно взять

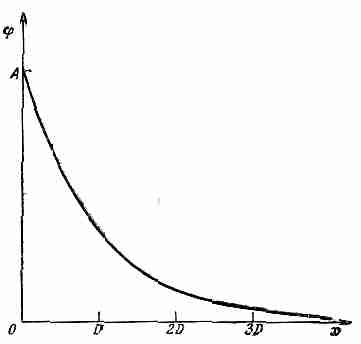
C:\1\pic\gray.jpg

(7.32)

C:\1\pic\gray.jpgУравнение (7.31) дает

(7.33)

Заметьте, что теперь в правой части стоит знак плюс (ре­шение не колебательное, а экспоненциальное).



*Фиг. 7.7. Изменение по­тенциала у поверхности коллоидной частицы. D — дебаевская длина.*

Общее решение (7.33) имеет вид

C:\1\pic\gray.jpg

(7.34)

где

C:\1\pic\gray.jpg

(7.35)

Постоянные *А* и *В* определяются из добавочных условий. В на­шем случае *В* должно быть нулем, иначе потенциал для боль­ших *х* обратится в бесконечность. Итак,

C:\1\pic\gray.jpg

(7.36)

где *А —* потенциал при x=0 на поверхности коллоидной час­тицы.

Потенциал убывает в eраз при удалении на *D* (фиг. 7.7). Число *D* называется *дебаевской длиной;* это мера толщины ион­ной оболочки, окружающей в электролите каждую большую за­ряженную частицу. Уравнение (7.36) утверждает, что оболочка становится тоньше по мере увеличения концентрации ионов (n0) или уменьшения температуры.

C:\1\pic\gray.jpgПостоянную *А в* (7.36) легко получить, если известен поверх­ностный заряд а на поверхности заряженной частицы. Мы знаем, что

(7.37)

C:\1\pic\gray.jpgНо *Е* это также градиент ϕ

(7.38)

откуда получается

C:\1\pic\gray.jpg

(7.39)

C:\1\pic\gray.jpgПодставив этот результат в (7.36), мы получим (положив *х=0), что* потенциал коллоидной частицы равен

(7.40)

Заметьте, что этот потенциал совпадает с разностью потенциалов в конденсаторе с промежутком *D и* поверхностной плотностью заряда *σ .*

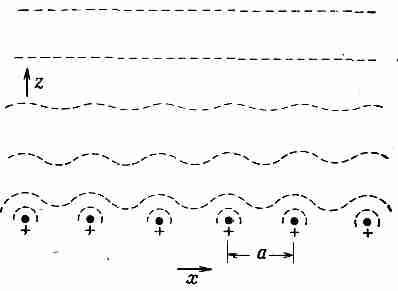
Мы сказали, что коллоидные частицы не слипаются вслед­ствие электрического отталкивания. Но теперь мы видим, что невдалеке от поверхности частицы из-за возникающей вокруг нее ионной оболочки поле спадает. Если бы оболочка стала до­статочно тонкой, у частиц появился бы шанс столкнуться друг с другом. Тогда они бы слиплись, коллоид бы осадился и выпал из жидкости. Из нашего анализа ясно, что после добавления в коллоид подходящего количества соли начнется выпадение осадка. Этот процесс называется «высаливанием коллоида».

Другой интересный пример — это влияние растворения соли На осаждение белка. Молекула белка — это длинная, слож­ная и гибкая цепь аминокислот. На ней там и сям имеются за­ряды, и временами заряд какого-то одного знака, скажем отри­цательного, распределяется вдоль всей цепи. В результате вза­имного отталкивания отрицательных зарядов белковая цепь распрямляется. Если в растворе имеются еще другие такие же молекулы-цепочки, то они не слипаются между собой вследст­вие того же отталкивания. Так возникает в жидкости взвесь молекул-цепочек. Но стоит добавить туда соли, как свойства взвеси изменятся. Уменьшится дебаевская длина, молекулы начнут сближаться и свертываться в спирали. А если соли мно­го, то молекулы белка начнут выпадать в осадок. Существует множество других химических явлений, которые можно понять на основе анализа электрических сил.

**§ 5. Электростатическое поле сетки**

Напоследок мы хотим изложить еще одно интересное свой­ство электрических полей. Оно используется в электрических приборах, электронных лампах и для других целей. Речь идет о поведении электрического поля близ сетки, составленной из заряженных проволочек. Чтоб упростить задачу, возьмем плос­кую систему параллельных проволочек бесконечной длины, про­межутки между которыми одинаковы.

Если мы посмотрим на поле где-то высоко над плоскостью проволочек, перед нами предстанет однородное электрическое поле, такое, словно заряд распределен на плоскости равномер­но. По мере приближения к сетке начнутся отклонения от преж­ней однородности. Мы хотим оценить, насколько близко от сетки появятся заметные изменения в потенциале.



*Фиг. 7.8. Эквипотен­циальные поверхности над однородной сеткой из заряженных прово­лочек.*

На фиг. 7.8 показа­но примерное расположение эквипотенциальных поверхностей на разных расстояниях от сетки. Чем ближе к сетке, тем сильнее колебания. Двигаясь параллельно сетке, мы заметим, что поле изменяется периодически.

Мы уже знаем (см. вып. 4, гл. 50), что любая периодическая величина может быть представлена в виде суммы синусных волн (теорема Фурье). Посмотрим, нельзя ли найти подходящую коле­бательную функцию, которая удовлетворяет нашим уравнениям поля.

Если проволочки лежат в плоскости *ху* параллельно оси y, то можно попробовать испытать члены вида



(7.41)

C:\1\pic\gray.jpgгде *а —* расстояние между нитями, а n *—* число колебаний. (Мы предположили, что нити эти очень длинные, так что ника­ких изменений по *у* не заметно.) Полное решение должно со­стоять из суммы таких членов при n=1, 2, 3... Чтоб получился правильный потенциал, оно должно в области над сеткой (где зарядов нет) подчиняться уравнению Лапласа, т. е.

Испытывая этим уравнением функцию ϕ из (7.41), мы получаем

C:\1\pic\gray.jpg

(7.42)

т.е. Fn(z) должно удовлетворять условию

C:\1\pic\gray.jpg

(7.43)

C:\1\pic\gray.jpgИтак, должно быть

(7.44)

C:\1\pic\gray.jpg

(7.45)

Мы обнаружили, что если имеется компонента Фурье n*-й* гар­моники поля, то *эта* компонента должна убывать по экспоненте с высотой, причем характерным расстоянием является *z0=a/2πn.* Амплитуда у первой гармоники (n=1) уменьшается в *е2π* раз (очень резкое падение) каждый раз, когда мы удаляемся от сетки на величину одного промежутка *а.* Другие гармоники убы­вают еще быстрее. Мы видим, что уже на расстоянии в несколько *а* сетка кажется почти однородной, т. е. колебания поля очень малы. Конечно, всегда остается «нулевая гармоника» поля

ϕ0=-E0z.

которая и дает однородное поле при больших z. Для полного решения нужно добавить этот член к сумме членов вида (7.41) с *Fn* из (7.44) , причем каждый член надо взять с коэффициентом *Аn .* Эти коэффициенты выбираются так, чтобы после дифферен­цирования получилось поле, согласующееся с плотностью заря­дов *К* на проволочках сетки.

Развитым нами методом можно объяснить, почему электро­статическая защита с помощью сетки ничуть не хуже сплошных листов металла. Поле за сеткой равно нулю всюду, за исключе­нием промежутка у самой сетки, не превышающего по размерам нескольких ее ячеек. Мы видим, что медная сетка, которая на­много легче и дешевле сплошной медной обшивки, вполне при­годна для защиты чувствительного электрического оборудова­ния от возмущающих внешних полей.

***\* О новых работах по этому вопросу и библиографию см. в статье С. J.Powell, J.B. Swann, Phys. Rev., 115, 869 (1959).***

***Глава* 8**

**ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ**

[**§1 .Электростатиче­ска****я энергия зарядов. Однородный шар**](#a1)

**[§2.Энергия конде](#a2)****[нсатора. Силы, действующие на заряженные проводники](#a2)**

[**§З.Элек****тростатическая энергия ионного кристалла**](#a3)

[**§4.Электростатиче­ская** **энергия ядра**](#a4)

[**§5,Энергия в эл****ектро­статическом поле**](#a5)

[**§6.Энергия точ****ечного заряда**](#a6)

***Повторить:* гл. 4 (вып. 1) «Сохранение энергии»; гл. 13 и 14 (вып. 1) «Работа и потенциальная энергия»**

**§ 1. Электростатическая энергия зарядов. Однородный шар**

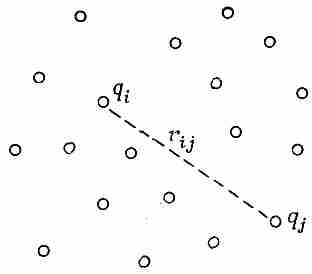
Одно из самых интересных и полезных от­крытий в механике —это закон сохранения энер­гии. Зная формулы для кинетической и потен­циальной энергий механической системы, мы способны обнаруживать связь между состоя­ниями системы в два разных момента времени, не вникая в подробности того, что происходит между этими моментами. Мы хотим определить теперь энергию электростатических систем. В электричестве сохранение энергии окажется столь же полезным для обнаружения многих любопытных фактов.

Закон, по которому меняется энергия при электростатическом взаимодействии, очень прост; на самом деле мы его уже обсуждали. Пусть имеются заряды *q*1и *q2,* разделенные про­межутком r12. У этой системы есть какая-то энергия, потому что понадобилась какая-то работа, чтобы сблизить заряды. Мы подсчиты­вали работу, производимую при сближении двух зарядов с большого расстояния; она равна

C:\1\pic\gray.jpg

(8.1)

Мы знаем из принципа наложения, что если зарядов много, то общая сила, действующая на любой из зарядов, равна сумме сил, дей­ствующих со стороны всех прочих зарядов. От­сюда следует, что полная энергия системы не­скольких зарядов есть сумма членов, выражаю­щих взаимодействие каждой пары зарядов по отдельности. Если *qi* и *qj- —* какие-то два из зарядов, а расстояние между ними r*ij* (фиг. 8.1),

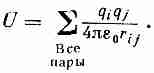


*Фиг. 8.1. Электростатическая анергия системы частиц есть сумма электростатических энер­гий каждой пары.*

то энергия именно этой пары равна

C:\1\pic\gray.jpg

(8.2)

Полная электростатическая энергия *U* есть сумма энергий все­возможных пар зарядов:

(8.3)

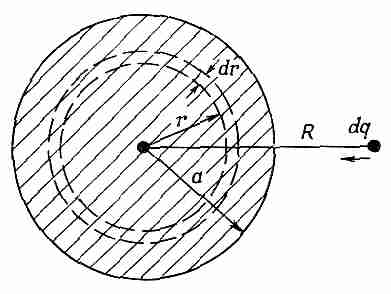
Если распределение задается плотностью заряда ρ, то сумму в (8.3) нужно, конечно, заменить интегралом.

Мы расскажем здесь об энергии с двух точек зрения. Пер­вая — *применение* понятия энергии к электростатическим зада­чам; вторая — разные способы *оценки* величины энергии. По­рой легче бывает подсчитать выполненную в каком-то случае работу, чем оценить величину суммы в (8.3) или величину со­ответствующего интеграла. Для образца подсчитаем энергию, необходимую для того, чтобы собрать из зарядов однородно за­ряженный шар. Энергия здесь есть не что иное, как работа, которая затрачивается на собирание зарядов из бесконечности.

Представьте, что мы сооружаем шар, наслаивая последова­тельно друг на друга сферические слои бесконечно малой тол­щины. На каждой стадии процесса мы собираем небольшое ко­личество электричества и размещаем его тонким слоем от rдо *r+dr.* Мы продолжаем процесс этот до тех пор, пока не добе­ремся до заданного радиуса *а* (фиг. 8.2). Если *Qr* -— это заряд шара в тот момент, когда шар доведен до радиуса r, то работа, требуемая для доставки на шар заряда *dQ,* равна

C:\1\pic\gray.jpg

(8.4)



Фиг. 8.2. Энергию однород­но заряженного шара можно рассчитать, вообразив, что его слепили, последовательно наслаивая друг на друга сферические слои.

C:\1\pic\gray.jpgЕсли плотность заряда внутри шара есть ρ, то заряд *Qr* равен

Уравнение (8.4) превращается в

C:\1\pic\gray.jpg

(8.5)

Полная энергия, требуемая на то, чтобы накопить полный шар зарядов, равна интегралу по *dU* от r=0 до r=а, т.е.

C:\1\pic\gray.jpg

(8.6)

а если мы желаем выразить результат через полный заряд *Q* шара, то

C:\1\pic\gray.jpg

(8.7)

Энергия пропорциональна квадрату полного заряда и об­ратно пропорциональна радиусу. Можно представить (8.7) и так: среднее значение (1/rij) по всем парам точек внутри шара равно 6/5а.

**§ 2. Энергия конденсатора. Силы, действующие на заряженные проводники**

Рассмотрим теперь энергию, требуемую на то, чтоб зарядить конденсатор. Если заряд *Q был* снят с одной обкладки конден­сатора и перенесен на другую, то между обкладками возникает разность потенциалов, равная

C:\1\pic\gray.jpg

(8.8)

где *С —* емкость конденсатора. Сколько работы затрачено на зарядку конденсатора? Поступая точно так же, как мы посту­пали с шаром, вообразим, что конденсатор уже заряжен перено­сом заряда с одной обкладки на другую маленькими порциями *dQ.* Работа, требуемая для переноса заряда *dQ*,равна

C:\1\pic\gray.jpg

Взяв *V* из (8.8), напишем

C:\1\pic\gray.jpg

Или, интегрируя от *Q=0* до конечного заряда *Q,* получаем

C:\1\pic\gray.jpg

(8.9)

Эту энергию можно также записать в виде

C:\1\pic\gray.jpg

(8.10)

Вспоминая, что емкость проводящей сферы (по отношению к бесконечности) равна

C:\1\pic\gray.jpg

C:\1\pic\gray.jpgмы немедленно получим из уравнения (8.9) энергию заряженной сферы

(8.11)

Это выражение, конечно, относится также и к энергии тонкого *сферического слоя* с полным зарядом *Q;* получается 5/6 энер­гии *однородно заряженного* шара [уравнение (8.7)].

Посмотрим, как применяется понятие электростатической энергии. Рассмотрим два вопроса. Какова сила, действующая между обкладками конденсатора? Какой вращательный (крутя­щий) момент вокруг некоторой оси испытывает заряженный про­водник в присутствии другого проводника с противоположным зарядом? На такие вопросы легко ответить, пользуясь нашим выражением (8.9) для электростатической энергии конденсатора и принципом виртуальной работы (см. вып. 1, гл. 4, 13 и 14).

C:\1\pic\gray.jpgПрименим этот метод для определения силы, действующей между двумя обкладками плоского конденсатора. Если мы пред­ставим, что промежуток между пластинами расширился на не­большую величину Δz, то тогда механическая работа, произво­димая извне для того, чтобы раздвинуть обкладки, была бы равна

(8.12)

где *F —* сила, действующая между обкладками. Эта работа обя­зана быть равной изменению электростатической энергии кон­денсатора, если только заряд конденсатора не изменился.

Согласно уравнению (8.9), энергия конденсатора первона­чально была равна

C:\1\pic\gray.jpg

Изменение в энергии (если мы не допускаем изменения величи­ны заряда) тогда равно

C:\1\pic\gray.jpg

(8.13)

Приравнивая (8.12) и (8.13), получаем

C:\1\pic\gray.jpg

(8.14)

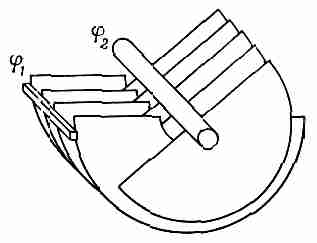
C:\1\pic\gray.jpgчто может также быть записано в виде

(8.15)

Ясно, эта сила здесь возникает от притяжения зарядов на обкладках; мы видим, однако, что заботиться о том, как там они рас­пределены, нам нечего; единственное, что нам нужно, — это учесть емкость *С.*

Легко понять, как обобщить эту идею на проводники произ­вольной формы и на прочие составляющие силы. Заменим в урав­нении (8.14) *F* той составляющей, которая нас интересует, а Δz — малым смещением в соответствующем направлении. Или если у нас есть электрод, насаженный на какую-то ось, и мы хо­тим знать вращательный момент τ, то запишем виртуальную ра­боту в виде

ΔW = τΔθ,

где Δθ — небольшой угловой поворот. Конечно, теперь Δ(1/C) должно быть изменением *1/С,* отвечающим повороту на Δθ.

*Фиг. 8.3. Чему равен вращатель­ный момент, действующий на переменный конденсатор?*

Таким способом мы можем определить вращательный момент, действующий на подвижные пластины переменного конденса­тора, показанного на фиг. 8.3.

Вернемся к частному случаю плоского конденсатора; мы можем взять формулу для емкости, выведенную в гл. 6:

C:\1\pic\gray.jpg

(8.16)

C:\1\pic\gray.jpgгде *А—*площадь каждой обкладки. Если промежуток уве­личится на Δz, то

C:\1\pic\gray.jpgИз (8.14) тогда следует, что сила притяжения между двумя обкладками равна

(8.17)

Взглянем на уравнение (8.17) повнимательнее и подумаем, нельзя ли сказать, как возникает эта сила. Если заряд на одной из обкладок мы запишем в виде

C:\1\pic\gray.jpg

то (8.17) можно будет переписать так:

C:\1\pic\gray.jpg

Или поскольку поле между пластинами равно

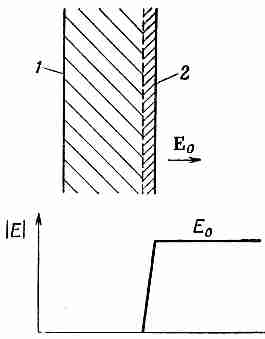
C:\1\pic\gray.jpg

то

C:\1\pic\gray.jpg

(8.18)

Можно было сразу догадаться, что сила, действующая на одну из пластин, будет равна заряду *Q* этой пластины, умножен­ному на поле, действующее на заряд. Но что удивляет, так это множитель 1/2. Дело в том, что *Е0 —*это не то поле, *которое действует на* заряды. Если вообразить, что заряд на поверх­ности пластины занимает какой-то тонкий слой (фиг. 8.4), то поле будет меняться от нуля на внутренней границе слоя до *Е0* в пространстве снаружи пластин. Среднее поле, действующее на поверхностные заряды, равно *Е0/2.* Вот отчего в (8.18) стоит множитель 1/2.

Вы должны обратить внимание на то, что, рассчитывая вир­туальную работу, мы предположили, что заряд конденсатора постоянен, что конденсатор не был электрически связан с дру­гими предметами и полный заряд не мог изменяться.

*Фиг. 8.4. Поле у поверхности проводника меняется от нуля до E*0=σ/ε0, *когда пересечен слой по­верхностного заряда. 1 — проводящая пластина; 2 — слой поверхностного заряда.*

А теперь пусть мы предположили, что при виртуальных пе­ремещениях конденсатор поддерживается при постоянной раз­ности потенциалов. Тогда мы должны были бы взять

C:\1\pic\gray.jpg

C:\1\pic\gray.jpgи вместо (8.15) мы бы имели

что приводит к силе, равной по величине той, что была получена в уравнении (8.15) (так как *V = Q/C),* но с противоположным знаком!

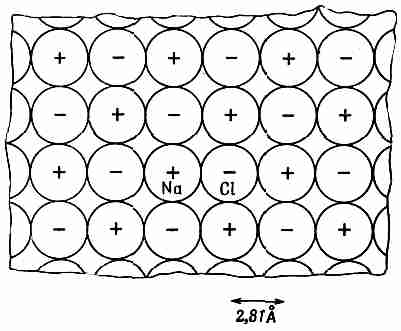
Конечно, сила, действующая между пластинами конденса­тора, не меняет свой знак, когда мы отсоединяем конденсатор от источника электричества. Кроме того, мы знаем, что две плас­тины с разноименными электрическими зарядами должны при­тягиваться. Принцип виртуальной работы во втором случае был применен неправильно, мы не приняли во внимание виртуаль­ную работу, производимую источником, заряжающим конден­сатор. Это значит, что для того, чтобы удержать потенциал при постоянном значении *V,* когда меняется емкость, источник элект­ричества должен снабдить конденсатор зарядом VΔC. Но этот заряд поступает при потенциале V, так что работа, выполняе­мая электрической системой, удерживающей заряд постоянным, равна V2ΔC. Механическая работа .FΔz *плюс* эта электрическая работа V2ΔC вместе приводят к изменению полной энергии кон­денсатора на 1/2V2ΔC. Поэтому на механическую работу, как и прежде, приходится *F*Δ*z=-1/2* V2ΔC.

**§ 3. Электростатическая энергия ионного кристалла**

Рассмотрим теперь применение понятия электростатической энергии в атомной физике. Мы не можем запросто измерять силы, действующие между атомами, но часто нас интересует разница в энергиях двух расстановок атомов (к примеру, энергия химических изменений). Так как атомные силы в основе своей — это силы электрические, то и химическая энергия в главной своей части — это просто электростатиче­ская энергия.

Рассмотрим, например, электростатическую энергию ионной решетки. Ионный кристалл, такой, как NaCl, состоит из поло­жительных и отрицательных ионов, которые можно считать жесткими сферами. Они электрически притягиваются, пока не соприкоснутся; затем вступает в дело сила отталкивания, кото­рая быстро возрастает, если мы попытаемся сблизить их теснее.

Для первоначального приближения вообразим себе совокуп­ность жестких сфер, представляющих атомы в кристалле соли. Строение такой решетки было определено с помощью дифрак­ции рентгеновских лучей. Эта решетка кубическая — что-то вроде трехмерной шахматной доски. Сечение ее изображено на фиг. 8.5. Промежуток между ионами 2,81 Å (или 2,81•10-8 *см).*

Если наше представление о системе правильно, мы должны уметь проверить его, задав следующий вопрос: сколько понадо­бится энергии, чтобы разбросать эти ионы, т. е. полностью раз­делить кристалл на ионы? Эта энергия должна быть равна теп­лоте испарения соли плюс энергия, требуемая для диссоциации молекул на ионы. Полная энергия разделения NaCl на ионы, как следует из опыта, равна 7,92 *эв* на молекулу.

*Фиг. 8.5. Поперечный разрез кристалла соли в масштабе нескольких атомов.*

*В двух перпендикулярных* к *плоскости рисунка сечениях будет такое же шахматное расположение ионов* Na *и* Сl *(см. вып. 1, фиг. 1.7).*

C:\1\pic\gray.jpgПользуясь коэффициентом перевода

C:\1\pic\gray.jpgи числом Авогадро (количество молекул в грамм-молекуле)

можно представить энергию испарения в виде

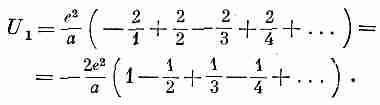
C:\1\pic\gray.jpg

C:\1\pic\gray.jpgИзлюбленная единица энергии, которой пользуются физико-химики,— килокалория, равная 4190 *дж;* так что 1 *эв* на молеку­лу — это все равно что 23 *ккал/моль.* Химик сказал бы поэтому, что энергия диссоциации NaCl равна

Можем ли мы получить эту химическую энергию теоретиче­ски, подсчитывая, сколько работы понадобится для того, чтобы распотрошить кристалл? По нашей теории она равна сумме по­тенциальных энергий всех пар ионов. Проще всего составить себе представление об этой энергии, выбрав какой-то один ион и подсчитав его потенциальную энергию по отношению ко всем прочим ионам. Это даст *удвоенную* энергию на один ион, потому что энергия принадлежит *парам* зарядов. Если нам нужна энер­гия, связанная с одним каким-то ионом, то мы должны взять полусумму. Но на самом деле нам нужна энергия *на молекулу,* содержащую два иона, так что вычисляемая нами сумма прямо даст нам энергию на молекулу.

Энергия иона по отношению к его ближайшему соседу равна —e2/a, где e*2=q2e*/4πε0, а *а* — промежуток между центрами ио­нов. (Мы рассматриваем одновалентные ионы.) Эта энергия рав­на —5,12 *эв;* мы уже видим, что ответ получается правильного порядка величины. Но нам еще предстоит подсчитать бесконеч­ный ряд членов.

Начнем со сложения энергий всех ионов, лежащих по пря­мой. Считая ион, отмеченный на фиг. 8.5 значком Na, нашим выделенным ионом, сперва рассмотрим те ионы, которые лежат на одной с ним горизонтали. Там есть два ближайших к нему иона хлора с отрицательными зарядами, на расстоянии я от Na каждый. Затем идут два положительных иона на расстояниях 2а и т. д. Обозначая эту сумму энергий U1*,* напишем



(8.19)

Ряд сходится медленно, так что численно его оценить трудно,

C:\1\pic\gray.jpgно известно, что он равен ln2. Значит,

(8.20)

C:\1\pic\gray.jpgТеперь перейдем к ближайшей линии, примыкающей сверху. Ближайший ион отрицателен и находится на расстоянии *а.* Затем стоят два положительных на расстояниях√2а. Следующая пара — на расстоянии √5а, следующая— на√10а и т. д. Для всей линии получается ряд

(8.21)

Таких линий *четыре:* выше, ниже, спереди и сзади. Затем име­ются четыре линии, которые являются ближайшими по диагона­ли, и т. д. и т. д.

C:\1\pic\gray.jpgЕсли вы терпеливо произведете подсчеты для всех линий и затем все сложите, то увидите, что итог таков:

Это число немного больше того, что было получено в (8.20) для первой линии. Учитывая, что *е2/а=-*5,12 *эв,* мы получим

C:\1\pic\gray.jpg

Наш ответ приблизительно на 10% больше экспериментально наблюдаемой энергии. Он показывает, что наше представление о том, что вся решетка скрепляется электрическими кулоновскими силами, в основе своей правильно. Мы впервые получили спе­цифическое свойство макроскопического вещества из наших по­знаний в атомной физике. Со временем мы добьемся гораздо большего. Область науки, пробующая понять поведение боль­ших масс вещества на языке законов атомного поведения, назы­вается *физикой твердого тела.*

А как же с ошибкой в наших расчетах? Почему они не до конца верны? Мы не учли отталкивание между ионами на близ­ких расстояниях. Это ведь не совершенно жесткие сферы, так что, сблизясь, они немного сплющиваются. Но они не очень мягкие и сплющиваются самую чуточку. Все же какая-то энер­гия уходит на эту деформацию, и вот, когда ионы разлетаются, эта энергия высвобождается. Энергия, которая на самом деле нужна для того, чтобы развести все ионы врозь, чуть меньше той, которую мы вычислили; отталкивание помогает преодолеть электростатическое притяжение.

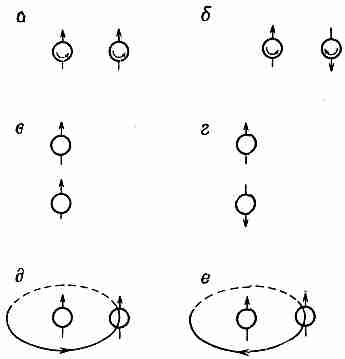
А есть ли возможность как-то прикинуть долю этого оттал­кивания? Да, если мы знаем закон силы отталкивания. Мы еще не умеем пока анализировать детали механизма отталкивания, но некоторое представление о его характеристиках мы можем получить из макроскопических измерений. Измеряя *сжимае­мость* кристалла как целого, можно получить количественное представление о законе отталкивания между ионами, а отсю­да — о его вкладе в энергию. Таким путем было обнаружено, что вклад этот должен составлять 1/9,4 часть вклада от электро­статического притяжения и иметь, естественно, противополож­ный знак. Если этот вклад мы вычтем из чисто электростатиче­ской энергии, то получим для энергии диссоциации на молекулу число 7,99 *эв.* Это намного ближе к наблюдаемому результату 7,92 *эв,* но все еще не находится в совершенном согласии. Есть еще одна вещь, которую мы не учли: мы не сделали никаких до­пущений о кинетической энергии колебаний кристалла. Если сделать поправку на этот эффект, то сразу возникнет очень хоро­шее согласие с экспериментальной величиной. Значит, наши представления правильны: главный вклад в энергию кристалла, такого, как NaCl, является электростатическим.

**§ 4. Электростатическая энергия ядра**

Обратимся теперь к другому примеру электростатической энергии в атомной физике — к электростатической энергии атомного ядра. Прежде чем заняться этим вопросом, мы должны рассмотреть некоторые свойства тех основных сил (называемых ядерными силами), которые скрепляют между собой протоны и нейтроны в ядре. Первое время после открытия ядер — и про­тонов с нейтронами, которые их составляют,— надеялись, что закон сильной, неэлектрической части силы, действующей, на­пример, между одним протоном и другим, будет иметь какой-нибудь простой вид, подобный, скажем, закону обратных квад­ратов в электричестве. Если бы удалось определить этот закон сил и, кроме того, сил, действующих между протоном и нейт­роном и между нейтроном и нейтроном, то тогда можно было бы теоретически описать все поведение этих частиц в ядрах. Поэтому начала разворачиваться большая программа изучения рассеяния протонов в надежде отыскать закон сил, действую­щих между ними; но после тридцатилетних усилий ничего про­стого не возникло. Накопился заметный багаж знаний о силах, действующих между протоном и протоном, но при этом обнару­жилось, что эти силы сложны настолько, насколько возможно себе представить.

Под словами «сложны настолько, насколько возможно» мы понимаем, что силы зависят от всех величин, от каких они могли бы зависеть.

Во-первых, сила не простая функция расстояния между протонами. На больших расстояниях существует притяжение, на меньших — отталкива­ние.



*Фиг. 8.6. Сила взаимодейст­вия двух протонов зависит от всех мыслимых параметров.*

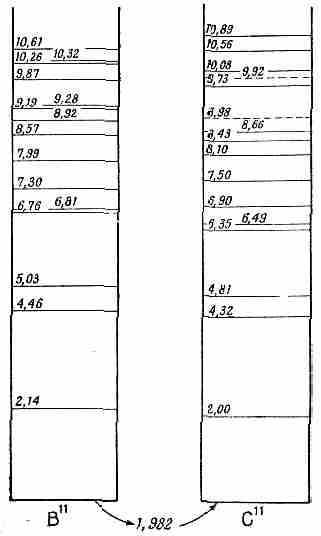
Зависимость от рас­стояния — это некоторая сложная функция, все еще не очень хорошо известная. Во-вторых, сила зави­сит от ориентации спина протонов. У протонов есть спин, а два взаимодействующих протона могут вращаться либо в одном и том же, либо в про­тивоположных направлениях. И сила, когда спины парал­лельны, отличается от того, что бывает, когда спины антипа­раллельны (фиг. 8.6, *а* и *б).* Разница велика; пренебречь ею нельзя.

В-третьих, сила заметно изменяется, смотря по тому, *па­раллелен* или нет промежуток между протонами их спинам (фиг. 8.6, в и г) или же он им *перпендикулярен* (фиг. 8.6, *а* и *б).*

В-четвертых, сила, как и в магнетизме, зависит (и даже зна­чительно сильнее) от скорости протонов. И эта скоростная зави­симость силы отнюдь не релятивистский эффект; она велика да­же тогда, когда скорости намного меньше скорости света. Бо­лее того, эта часть силы зависит, кроме величины скорости, и от других вещей. Скажем, когда протон движется невдалеке от другого протона, сила меняется от того, совпадает ли орби­тальное движение по направлению со спиновым вращением (фиг. 8.6, *д),* или эти два направления противоположны (фиг. 8.6, *е).* Это то, что называется «спин-орбитальной» частью силы.

Не в меньшей степени сложный характер имеют силы вза­имодействия протона с нейтроном и нейтрона с нейтроном. До сего дня мы не знаем механизма, определяющего эти силы, не знаем никакого простого способа их понять.

Впрочем, в одном важном отношении ядерные силы все же *проще,* чем могли бы быть. *Ядерные* силы, действующие между двумя нейтронами, совпадают с силами, действующими между протоном и нейтроном, и с силами, действующими между двумя протонами! Если в некоторой системе, в которой имеются ядра, мы заменим нейтрон протоном (и наоборот), то *ядерные взаимодействия* не изменятся! «Фундаментальная причина» этого равенства нам не известна, но это проявление важного принципа, который может быть расширен на законы взаимодействия других силь­но взаимодействующих ча­стиц, таких, как л-мезоны и «странные» частицы.

Этот факт прекрасно ил­люстрируется расположе­нием уровней энергии в похожих ядрах.

*Фиг. 8.7. Энергетические уровни ядер В11 и С11 (энергии в Мэв). Основное состояние С11 на 1,982 Мэв выше, чем то же состояние В11.*

Рассмотрим такое ядро, как В11 (бор-одиннадцать), состоящее из пяти протонов и шести нейтронов. В ядре эти одиннадцать частиц взаимодействуют друг с другом, совершая какой-то замысловатый танец. Но существу­ет такое сочетание всех возможных взаимодействий, кото­рое обладает энергией, наинизшей из возможных; это нормаль­ное состояние ядра, и его называют *основным.* Если ядро возму­тить (скажем, стукнув по нему высокоэнергичным протоном или еще какой-то частицей), то оно может перейти в любое число дру­гих конфигураций, называемых *возбужденными состояниями,* каждое из которых будет обладать своей характеристической энергией, которая выше энергии основного состояния. В иссле­дованиях по ядерной физике, скажем проводимых с генератором Ван-де-Граафа, энергии и другие свойства этих возбужденных состояний определяются экспериментально. Энергии пятнад­цати наинизших из известных возбужденных состояний В11 показаны на одномерной схеме в левой половине фиг. 8.7. Гори­зонталь внизу представляет основное состояние. Первое возбуж­денное состояние имеет энергию на 2,14 *Мэв* выше, чем основ­ное, следующее — на 4,46 *Мэв* выше, чем основное, и т. д. Иссле­дователи пытаются найти объяснение этой довольно запутанной картины уровней энергии; пока, однако, нет еще полной общей теории таких ядерных уровней энергии.

Если в В11 заменить один из нейтронов протоном, получится ядро изотопа углерода С11. Энергии шестнадцати низших воз­бужденных состояний ядра С11 тоже были измерены; они пока­заны на фиг. 8.7 справа. (Штрихами проведены уровни, для ко­торых экспериментальная информация находится под вопросом.)

Глядя на фиг. 8.7, мы замечаем поразительное подобие меж­ду картинами уровней энергии обоих ядер. Первые возбужден­ные состояния находятся примерно на 2 *Мэв* выше основного. Затем имеется широкая щель шириной 2,3 *Мэв,* отделяющая второе возбужденное состояние от первого, затем небольшой скачок на 0,5 *Мэв* до третьего уровня. Потом опять большой скачок от четвертого до пятого уровня, но между пятым и ше­стым узкий промежуток в 0,1 *Мэв.* И так далее. Примерно на десятом уровне соответствие, видимо, пропадает, но его все еще можно обнаружить, если пометить уровни другими характе­ристиками, скажем их моментами количества движения, и тем, каким способом они теряют свой избыток энергии.

Впечатляющее подобие картины уровней энергии ядер В11 и С11 — отнюдь не просто совпадение. Оно скрывает за собой некоторый физический закон. И действительно, оно показы­вает, что даже в сложных условиях ядра замена нейтрона про­тоном мало что изменит. Это может значить лишь то, что нейтрон-нейтронные и протон-протонные силы должны быть почти оди­наковыми. Только тогда мы могли бы ожидать, что ядерные конфигурации из пяти протонов и шести нейтронов совпадут с комбинацией «пять нейтронов — шесть протонов».

Заметьте, что свойства этих ядер ничего не говорят нам о нейтрон-протонных силах; число нейтрон-протонных комбина­ций в обоих ядрах одинаково. Но если мы сравним два других ядра, таких, как С14 с его шестью протонами и восемью нейтро­нами и N14, в котором и тех, и других по семи штук, то выявим в энергетических уровнях такое же соответствие. Можно выве­сти заключение, что *р—р-, n—n-* и *р*—n-силы совпадают между собой во всех деталях. В законах ядерных сил возник неожидан­ный принцип. Хотя силы, действующие между каждой парой ядерных частиц, очень запутаны, но силы взаимодействия для любой из трех мыслимых пар одни и те же.

Однако есть и какие-то слабые отличия. Точного соответствия уровней нет; кроме того, основное состояние С11 обладает абсо­лютной энергией (массой), которая на 1,982 *Мэв* выше основного состояния В11. Все прочие уровни тоже по абсолютной величине энергии выше на такое же число. Так что силы не совсем точно равны. Но мы и так хорошо знаем, что *полная,* величина сил не совсем одинакова; между двумя протонами действуют *электриче­ские* силы, ведь каждый из них заряжен положительно, а между нейтронами таких сил нет. Может быть, различие между В11 и С11 объясняется тем фактом, что в этих двух случаях различны электрические взаимодействия протонов? А может, и остающаяся ми­нимальная разница в уровнях вызывается электрическими эф­фектами? Раз уж ядерные силы так сильны по сравнению с электрическими, то электрические эффекты могли бы только слегка возмутить энергии уровней.

Чтобы проверить это представление или, лучше сказать, чтобы выяснить, к каким следствиям оно приведет, мы сперва рассмотрим разницу в энергиях основных состояний обоих ядер. Чтобы модель была совсем простой, положим, что ядра — это шары радиуса r (который нужно определить), содержащие Z протонов. Если считать ядро шаром с равномерно распреде­ленным зарядом, то можно ожидать, что электростатическая энергия [из уравнения (8.7)] окажется равной

C:\1\pic\gray.jpg

(8.22)

где *qe —* элементарный заряд протона. Из-за того, что Z равно для В11 пяти, а для С11 шести, электростатические энергии бу­дут различаться.

C:\1\pic\gray.jpgНо при таком малом количестве протонов уравнение (8.22) не совсем правильно. Если мы подсчитаем электрическую энер­гию взаимодействия всех пар протонов, рассматриваемых как точки, примерно однородно распределенные по шару, то увидим, что величину Z2 в (8.22) придется заменить на *Z(Z-*1), так что энергия будет равна

(8.23)

C:\1\pic\gray.jpgЕсли известен радиус ядра r, мы можем воспользоваться выра­жением (8.23), чтобы определить разницу электростатических энергий ядер В11 и С11. Но проделаем обратное: из наблюдаемой разницы в энергиях вычислим радиус, считая, что вся суще­ствующая разница по происхождению — электростатическая. В общем, это не совсем верно. Разность энергий 1,982 *Мэв* двух основных состояний В11 и С11 включает энергии покоя, т. е. энергии *тc2* всех частиц. Переходя от В11 к С11, мы замещаем нейтрон протоном, масса которого чуть поменьше. Так что часть разности энергий — это разница в массах покоя нейтрона и протона, составляющая 0,784 *Мэв.* Та разность, которую надо сравнивать с электростатической энергией, тем самым больше 1,982 *Мэв;* она равна

C:\1\pic\gray.jpgПодставив эту энергию в (8.23), для радиуса В11 или С11 по­лучим

(8.24)

Имеет ли это число какой-нибудь смысл? Чтобы это прове­рить, сравним его с другими определениями радиусов этих ядер.

Например, можно определить радиус ядра иначе, наблюдая, как рассеивает оно быстрые частицы. В ходе этих измерений выяс­нилось, что *плотность* вещества во всех ядрах примерно оди­накова, т. е. их объемы пропорциональны числу содержащихся в них частиц. Если через *А* обозначить число протонов и нейтро­нов в ядре (число, очень близко пропорциональное его массе), то оказывается, что радиус ядра дается выражением

C:\1\pic\gray.jpg

(8.25)

C:\1\pic\gray.jpgгде

(8.26)

C:\1\pic\gray.jpgИз этих измерений мы получим, что радиус ядра В11 (или С11)должен быть примерно равен

Сравнив это с выражением (8.24), мы увидим, что наши пред­положения об электростатическом происхождении разницы в энергиях В11 и С11 не столь неверны; расхождение едва ли до­стигает 15% (а это не так уж скверно для первого расчета по теории ядра!).

Причина расхождения, по всей вероятности, состоит в сле­дующем. Согласно нашему нынешнему пониманию ядер, четное количество ядерных частиц (в случае В11 пять нейтронов с пятью протонами) образует своего рода *оболочку;* когда к этой оболочке добавляется еще одна частица, то вместо того, чтобы поглотиться, она начинает обращаться вокруг оболочки. Если это так, то для добавочного протона нужно взять другое значение электростатической энергии. Нужно считать, что избыток энер­гии С11 над В11 как раз равен

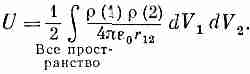
C:\1\pic\gray.jpg

т. е. равен энергии, необходимой для того, чтобы снаружи обо­лочки появился еще один протон. Это число составляет 5/6 ве­личины, предсказываемой уравнением (8.23), так что новое значение радиуса будет равно 5/6 от (8.24). Оно намного лучше согласуется с прямыми измерениями.

Согласие в цифрах приводит к двум выводам. *Первый:* зако­ны электричества, видимо, действуют и на столь малых расстоя­ниях, как 10-13 *см. Второй:* мы убедились в замечательном сов­падении — неэлектрическая часть сил взаимодействия протона с протоном, нейтрона с нейтроном и протона с нейтроном одинакова.

**§ 5. Энергия в электростатическом поле**

Рассмотрим теперь другие способы подсчета электростатичес­кой энергии. Все они могут быть получены из основного соот­ношения (8.3) суммированием (по всем парам) взаимных энергий каждой пары зарядов. Прежде всего, мы хотим написать выраже­ние для энергии распределения зарядов. Как обычно, считаем, что каждый элемент объема *dV* содержит в себе элемент заряда *pdV.* Тогда уравнение (8.3) запишется так:



(8.27)

C:\1\pic\gray.jpgОбратите внимание на появление множителя 1/2. Он возник из-за того, что в двойном интеграле по *dV1* и по *dV2* каждая пара элементов заряда считалась дважды. (Не существует удобной записи интеграла, в которой каждая пара считалась бы только по одному разу.) Затем заметьте, что интеграл по dV2 в (8.27) — это просто потенциал в точке (1), т. е.

C:\1\pic\gray.jpgтак что (8.27) можно записать в виде

C:\1\pic\gray.jpgА так как точка (2) при этом выпала, то можно написать просто

(8.28)

C:\1\pic\gray.jpgЭто уравнение можно истолковать так. Потенциальная энер­гия заряда *ρdV* равна произведению этого заряда на потенциал в той же точке. Вся энергия поэтому равна интегралу от ϕρdV. Но, кроме этого, есть множитель 1/2. Он все еще необходим, по­тому что энергии считаются дважды. Взаимная энергия двух зарядов равна заряду одного из них на потенциал другого в этой точке. *Или* заряду другого на потенциал от первого во второй точке. Так что для двух точечных зарядов можно написать

или

C:\1\pic\gray.jpg

C:\1\pic\gray.jpgОбратите внимание, что это же можно написать и так:

(8.29)

Интеграл в (8.28) отвечает сложению обоих слагаемых в скобках выражения (8.29). Вот зачем нужен множитель 1/2.

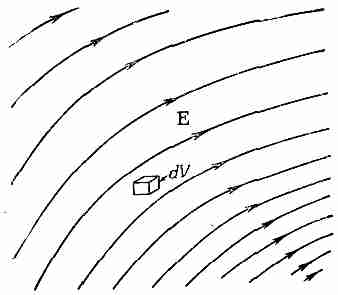
Интересен и такой вопрос: где размещается электростатичес­кая энергия? Правда, можно в ответ спросить: а не все ли равно?

Есть ли смысл у такого вопроса? Если имеется пара взаимодей­ствующих зарядов, то их сочетание обладает некоторой энер­гией. Неужели нужно непременно уточнять, что энергия со­средоточена на этом заряде, или на том, или на обоих сразу, или между ними? Все эти вопросы лишены смысла, потому что мы знаем, что на самом деле сохраняется только полная, суммар­ная энергия. Представление о том, что энергия сосредоточена *где-то,* не так уж необходимо.

Ну а все же предположим, что в том, что энергия всегда со­средоточена в каком-то определенном месте (подобно тепловой энергии), действительно *смысл есть.* Тогда мы могли бы наш принцип сохранения энергии *расширить,* соединив его с идеей о том, что если в каком-то объеме энергия меняется, то это изме­нение можно учесть, наблюдая приток или отток энергии из объема. Вы ведь понимаете, что наше первоначальное утвержде­ние о сохранении энергии по-прежнему будет превосходно вы­полняться, если какая-то энергия пропадет в одном месте и возникнет где-то далеко в другом, а в промежутке между этими местами ничего не случится (ничего — это значит не случится каких-либо явлений особого рода). Поэтому мы можем перейти теперь к расширению наших идей о сохранении энергии. Назо­вем это расширение принципом *локального* (местного) сохране­ния энергии. Такой принцип провозглашал бы, что энергия внутри любого данного объема изменяется лишь на количество, равное притоку (или убыли) энергии в объем (или из него). И действительно, такое локальное сохранение энергии вполне возможно. Если это так, то в нашем распоряжении будет куда более детальный закон, чем простое утверждение о сохранении полной энергии. И, как оказывается, в природе *энергия действи­тельно сохраняется локально, в каждом месте порознь,* и можно написать формулы, показывающие, где энергия сосредоточена и как она перетекает с места на место.

Имеется и *физический* резон в требовании, чтобы мы были в состоянии указать, где именно заключена энергия. По теории тяготения всякая масса есть источник гравитационного притя­жения. А по закону *Е=тс2* мы также знаем, что масса и энергия вполне равноценны друг другу. Стало быть, всякая энергия яв­ляется источником силы тяготения. И если б мы не могли узнать, где находится энергия, мы бы не могли знать, где расположена масса. Мы не могли бы сказать, где размещаются источники поля тяготения. И теория тяготения стала бы неполной.

Конечно, если мы ограничимся электростатикой, то способа узнать, где сосредоточена энергия, у нас нет. Но полная система максвелловских уравнений электродинамики снабдит нас не­сравненно более полной информацией (хотя и тогда, строго говоря, ответ до конца определенным не станет). Подробнее мы этот вопрос рассмотрим позже. А сейчас приведем лишь результат, касающийся частного случая электростатики



*Фиг. 8.8. Каждый элемент объема dV=dxdydz в электриче­ском поле содержит в себе энер­гию* (ε0/2) *E2dV.*

C:\1\pic\gray.jpgЭнергия заключена в том пространстве, где имеется электрическое поле. Это, ви­димо, вполне разумно, потому что известно, что, ускоряясь, заряды излучают электрические поля. И когда свет или радио­волны распространяются от точки к точке, они переносят с со­бой свою энергию. Но в этих волнах нет зарядов. Так что энер­гию хотелось бы размещать там, где есть электромагнитное поле, а не там, где есть заряды, создающие это поле. Таким об­разом, мы описываем энергию не на языке зарядов, а на языке создаваемых ими полей. Действительно, мы можем показать, что уравнение (8.28) *численно* совпадает с

(8.30)

C:\1\pic\gray.jpgЭту формулу можно толковать, говоря, что в том месте простран­ства, где присутствует электрическое поле, сосредоточена и энергия; *плотность* ее (количество энергии в единице объема) равна

(8.31)

Эта идея иллюстрируется фиг. 8.8.

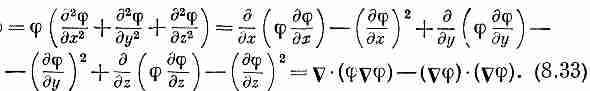
C:\1\pic\gray.jpgЧтобы показать, что уравнение (8.30) согласуется с нашими законами электростатики, начнем с того, что введем в уравне­ние (8.28) соотношение между ρ и ϕ, полученное в гл. 6:

Получим

C:\1\pic\gray.jpg

(8.32)

Расписав покомпонентно подынтегральное выражение, мы

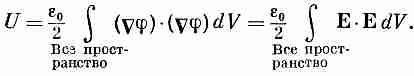
увидим, что

C:\1\pic\gray.jpgА наш интеграл энергий тогда равен

C:\1\pic\gray.jpgС помощью теоремы Гаусса второй интеграл можно превратить в интеграл по поверхности:

(8.34)

Этот интеграл мы подсчитаем для того случая, когда поверх­ность простирается до бесконечности (так что интеграл по объе­му обращается в интеграл по всему пространству), а все заряды расположены на конечном расстоянии друг от друга. Проще всего это сделать, взяв поверхность сферы огромного радиуса с центром в начале координат. Мы знаем, что вдали от всех заря­дов ϕ изменяется как 1/R, a ∇ϕ как *1/R2.* (И даже быстрее, если суммарный заряд нуль.) Площадь же поверхности большой сферы растет только как R2, так что интеграл по поверхности убывает по мере возрастания радиуса сферы как

(1/R)(1/R2)/R2= *(1/R).* Итак, если наше интегрирование захватит собой все пространство (R→ ∞), то поверхностный интеграл обратится в нуль, и мы обнаружим

(8.35)

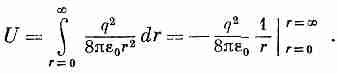
Мы видим, что существует возможность представить энергию произвольного распределения зарядов в виде интеграла от плотности энергии, сосредоточенной в поле.

**§ 6. Энергия точечного заряда**

Новое соотношение (8.35) говорит нам, что даже у отдель­ного точечного заряда *q* имеется какая-то электростатическая энергия. Поле в этом случае дается выражением

C:\1\pic\gray.jpg

C:\1\pic\gray.jpgтак что плотность энергии на расстоянии rот заряда равна

За элемент объема можно принять сферический слой толщиной *dr,* по площади равный 4πr2. Полная энергия будет

(8.36)

Верхний предел г=∞ не приводит к затруднениям. Но раз заряд точечный, то мы намерены интегрировать до самого нуля (r=0), а это означает бесконечность в интеграле. Уравнение (8.35) утверждает, что в поле одного точечного заряда содер­жится бесконечно много энергии, хотя начали мы с представле­ния о том, что энергия имеется только *между* точечными заря­дами. В нашу первоначальную форму для энергии совокупно­сти точечных зарядов (8.3) мы не включили никакой энергии взаимодействия заряда с самим собой. Что же потом случилось? А то, что, переходя в уравнении (8.27) к непрерывному распределению зарядов, мы засчитывали в общую сумму взаимодей­ствие всякого *бесконечно малого* заряда со всеми прочими беско­нечно малыми зарядами. Тот же учет велся и в уравнении (8.35), так что, когда мы применяем его к *конечному* точечному заряду, мы включаем в интеграл энергию, которая понадобилась бы, чтобы накопить этот заряд из бесконечно малых частей. И действи­тельно, вы могли заметить, что результат, следующий из урав­нения (8.36), мы могли бы получить также из выражения (8.11) для энергии заряженного шара, устремив его радиус к нулю.

Мы вынуждены прийти к заключению, что представление о том, будто энергия сосредоточена в поле, не согласуется с пред­положением о существовании точечных зарядов. Один путь преодоления этой трудности — это говорить, что элементарные заряды (такие, как электрон) на самом деле вовсе не точки, а не­большие зарядовые распределения. Но можно говорить и обрат­ное: неправильность коренится в нашей теории электричества на очень малых расстояниях или в нашем представлении о со­хранении энергии в каждом месте порознь. Но каждая такая точка зрения все равно встречается с затруднениями. И их ни­когда еще не удавалось преодолеть; существуют они и по сей день. Немного позже, когда мы познакомимся с некоторыми до­полнительными представлениями, такими, как импульс электро­магнитного поля, мы более подробно поговорим об этих основ­ных трудностях в нашем понимании природы

***Глава 9***

**ЭЛЕКТРИЧЕСТВО В АТМОСФЕРЕ**

[**§1. Градиент элек****трического потенциала в атмосфере**](#a1)

[**§2. Электрические токи в** **атмосфере**](#a2)

[**§3. Про****исхождение токов в атмосфере**](#a3)

[**§4. Гро****зы**](#a4)

[**§5. Мех****анизм разделения зарядов**](#a5)

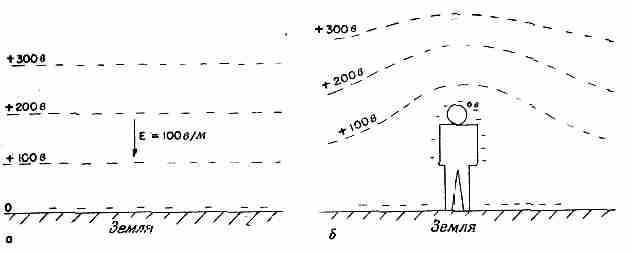
[**§6. М****олния**](#a6)

**§ 1. Градиент электрического потенциала** **в атмосфере**

В обычный день над пустынной равниной или над морем электрический потенциал по мере подъема возрастает с каждым метром примерно на 100 *в.* В воздухе имеется вертикальное элект­рическое поле Е величиной 100 *в/м.* Знак поля отвечает отрицательному заряду земной поверх­ности. Это означает, что на улице потенциал на уровне вашего носа на 200 *в* выше, чем потен­циал на уровне пяток! Можно, конечно, спро­сить: «Почему бы не поставить пару электродов на воздухе в метре друг от друга и не использо­вать эти 100 *в* для электрического освещения?» А можно и удивиться: «Если *действительно* между моим носом и моей пяткой имеется напря­жение 200 в, то почему же меня не ударяет то­ком, как только я выхожу на улицу?»

Сперва ответим на второй вопрос. Ваше те­ло — довольно хороший проводник. Когда вы стоите на земле, вы вместе с нею образуете эк­випотенциальную поверхность. Обычно экви­потенциальные поверхности параллельны земле (фиг. 9.1, а), но когда на земле оказываетесь вы, то они смещаются, и поле начинает выглядеть примерно так, как показано на фиг. 9.1, *б.* Так что разность потенциалов между вашей ма­кушкой и пятками почти равна нулю. С земли на вашу голову переходят заряды и изменяют поле вокруг вас. Часть из них разряжается ионами воздуха, но ионный ток очень мал, ведь воздух плохой проводник.

Как же измерить такое поле, раз оно иска­жается от всего, что в него попадает? Имеется несколько способов. Один способ — располо­жить изолированный проводник на какой-то высоте над землей и не трогать его до тех пор, пока он не приобретет потенциал воздуха.



*Фиг. 9.1. Распределение потенциала.*

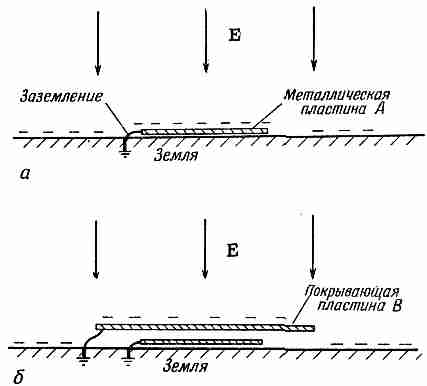
*а — над землей; б — около* человека, *стоящего на ровном месте.*

Если подождать довольно долго, то даже при очень малой проводимости воз­духа заряды стекут с проводника (или натекут на него), уравняв его потенциал с потенциалом воздуха на этом уровне. Тогда мы можем опустить его к земле и измерить изменение его потенциала. Другой более быстрый способ — в качестве провод­ника взять ведерко воды, в котором имеется небольшая течь. Вытекая, вода уносит излишек заряда, и ведерко быстро приобретает потенциал воздуха. (Заряды, как вы знаете, растека­ются по поверхности, а капли воды — это уходящие «куски по­верхности».) Потенциал ведра можно измерить электрометром.

Имеется еще способ прямого измерения *градиента* потенциа­ла. Раз существует электрическое поле, то должен быть и поверхностный заряд на земле (0 = ε*0Е).* Если мы поместим у по­верхности земли плоскую металлическую пластинку *А* и зазем­лим ее, то на ней появятся отрицательные заряды (фиг. 9.2, а). Если затем прикрыть пластинку другой заземленной проводя­щей крышкой *В,* то заряды появятся уже на крышке *В,* а на пластинке *А* исчезнут. Если мы измерим заряд, перетекающий с пластинки *А* на землю (скажем, с помощью гальванометра в цепи заземляющего провода) в тот момент, когда *А* закрывают крышкой, то мы найдем плотность поверхностного заряда, быв­шего на *А,* а значит, и электрическое поле.

Рассмотрев способы измерения электрического поля в ат­мосфере, продолжим теперь его описание. Измерения прежде всего показывают, что с увеличением высоты поле продолжает существовать, только становится слабее. На высоте примерно 50 *км* поле уже еле-еле заметно, так что большая часть измене­ния потенциала (интеграла от *Е)* приходится на малые высоты. Вся разность потенциалов между поверхностью земли и верхом атмосферы равна почти

400 000 *в.*



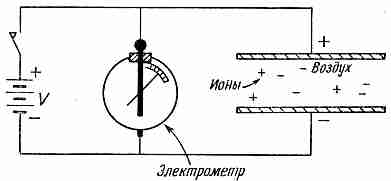
*Фиг. 9.2. Заземленная металлическая пла­стинка обладает тем же поверхностным зарядом, что и земля (а); если пластинка прикрыта сверху заземленным проводником, на ней заряда нет (б).*

**§ 2. Электрические токи в атмосфере**

Помимо градиента потенциала, можно измерять и другую величину — ток в атмосфере. Плотность его мала: через каждый квадратный метр, параллельный земной поверхности, проходит около 10-6 *мка.* Воздух, по-видимому, не идеальный изолятор; из-за этой проводимости от неба к земле все время течет слабый ток, вызываемый описанным нами электрическим полем.

Почему атмосфера имеет проводимость? Потому что в ней среди молекул воздуха попадаются ионы, например, молекулы кислорода, порой снабженные лишним электроном, а порой ли­шенные одного из своих. Эти ионы не остаются одинокими; бла­годаря своему электрическому полю они обычно собирают близ себя другие молекулы. Каждый ион тогда становится маленьким комочком, который вместе с другими такими же комочками дрейфует в поле, медленно двигаясь вверх или вниз, создавая ток, о котором мы говорили.

Откуда же берутся *ионы!* Сперва думали, что ионы создает радиоактивность Земли. (Было известно, что излучение радио­активных веществ делает воздух проводящим, ионизуя молеку­лы воздуха.) Частицы, выходящие из атомного ядра, скажем. β-лучи, движутся так быстро, что они вырывают электроны у атомов, оставляя за собой дорожку из ионов.



*Фиг. 9.3. Намерение проводимости воздуха, вызываемой движением ионов.*

Такой взгляд, конечно, предполагает, что на больших высотах ионизация должна была бы становиться меньше, потому что вся радиоак­тивность — все следы радия, урана, натрия и т. д.— находится в земной пыли.

Чтобы проверить эту теорию, физики поднимались на воз­душных шарах и измеряли ионизацию (Гесс, в 1912 г.). Выяс­нилось, что все происходит как раз наоборот — ионизация на единицу объема с высотой *pacmem!* (Прибор был похож на изо­браженный на фиг. 9.3. Две пластины периодически заряжались до потенциала *V.* Вследствие проводимости воздуха они медлен­но разряжались; быстрота разрядки измерялась электрометром.) Этот непонятный результат был самым потрясающим открытием во всей истории атмосферного электричества. Открытие было столь важно, что потребовало выделения новой отрасли науки — физики космических лучей. А само атмосферное электричество осталось среди явлений менее удивительных. Ионизация, види­мо, порождалась чем-то вне Земли; поиски этого неземного ис­точника привели к открытию космических лучей. Мы не будем сейчас говорить о них и только скажем, что именно они поддер­живают снабжение воздуха ионами. Хотя ионы постоянно уно­сятся, космические частицы, врываясь из мирового простран­ства, то и дело сотворяют новые ионы.

Чтобы быть точными, мы должны отметить, что, кроме ионов, составленных из молекул, бывают и другие сорта ионов. Мель­чайшие комочки почвы, подобно чрезвычайно тонким частичкам пыли, плавают в воздухе и заряжаются. Их иногда называют «ядрами». Скажем, когда в море плещутся волны, мелкие брызги взлетают в воздух. Когда такая капелька испарится, в воздухе остается плавать маленький кристаллик NaCl. Затем эти крис­таллики могут привлечь к себе заряды и стать ионами; их назы­вают «большими ионами».

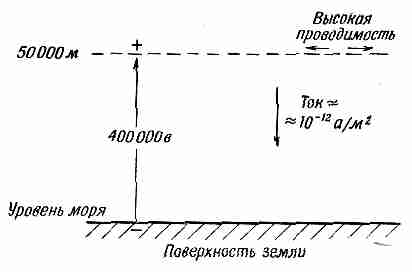
Малые ионы, т. е. те, которые создаются космическими луча­ми, самые подвижные. Из-за того, что они очень малы, они быст­ро проносятся по воздуху, со скоростью около 1 *см/сек* в поле 100 в/м, или 1 *в/см.* Большие и тяжелые ионы движутся куда медленнее. Оказывается, что если «ядер» много, то они перехва­тывают заряды от малых ионов. Тогда, поскольку «большие ионы» движутся в поле очень медленно, общая проводимость уменьшается. Поэтому проводимость воздуха весьма перемен­чива — она очень чувствительна к его «засоренности». Над су­шей этого «сора» много больше, чем над морем, ветер подымает с земли пыль, да и человек тоже всячески загрязняет воздух. Нет ничего удивительного в том, что день ото дня, от момента к моменту, от одного места к другому проводимость близ земной поверхности значительно меняется. Электрическое поле в каж­дой точке над земной поверхностью тоже меняется, потому что ток, текущий сверху вниз, в разных местах примерно одинаков, а изменения проводимости у земной поверхности приводят к вариациям поля.

Проводимость воздуха, возникающая в результате дрейфа ионов, также быстро увеличивается с высотой. Происходит это по двум причинам. Во-первых, с высотой растет ионизация воз­духа космическими лучами. Во-вторых, по мере падения плот­ности воздуха увеличивается свободный пробег ионов, так что до столкновения им удается дальше пройти в электрическом по­ле. В итоге на высоте проводимость резко подскакивает.

Сама плотность электрического тока в воздухе равна всего нескольким микромикроамперам на квадратный метр, но ведь на Земле очень много таких квадратных метров. Весь электри­ческий ток, достигающий земной поверхности, равен примерно 1800 *а.* Этот ток, конечно, «положителен» — он переносит к Зем­ле положительный заряд. Так что получается ток в 1800 *а* при напряжении 400 000 *в.* Мощность 700 *Мвт!*

При таком сильном токе отрицательный заряд Земли должен был бы вскоре исчезнуть. Фактически понадобилось бы только около получаса, чтобы разрядить всю Землю. Но с момента от­крытия в атмосфере электрического поля прошло куда больше получаса. Как же оно держится? Чем поддерживается напря­жение? И между чем и чем оно? На одном электроде Земля, а что на другом? Таких вопросов множество.

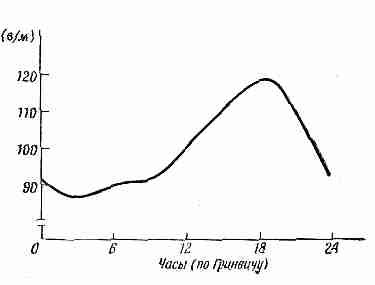
Земля заряжена отрицательно, а потенциал в воздухе поло­жителен. На достаточно большой высоте проводимость так велика, что вероятность изменений напряжения по горизонтали становится равной нулю. Воздух при том масштабе времени, о котором сейчас идет речь, фактически превращается в провод­ник. Это происходит на высоте около 50 *км.* Это еще не так вы­соко, как то, что называют «ионосферой», где имеется очень боль­шое количество ионов, образуемых за счет фотоэффекта от сол­нечных лучей. Для наших целей можно, обсуждая свойства атмосферного электричества, считать, что на высоте примерно 50 *км* воздух становится достаточно проводящим и там су­ществует практически проводящая сфера, из которой вытекают вниз токи. Положение дел изображено на фиг. 9.4. Вопрос в том, как держится там положительный заряд. Как он накачивается обратно?



*Фиг. 9.4. Типичные характеристики элек­трических свойств чис­той атмосферы.*

Раз он стекает на Землю, то должен же он как-то перекачиваться обратно? Долгое время это было одной из главных загадок атмосферного электричества.

Любая информация на этот счет может дать ключ к загадке или, по крайней мере, хоть что-то сообщить о ней. Вот одно интересное явление: если мы измеряем ток (а он, как мы знаем, устойчивее, чем градиент потенциала), скажем над морем, и при тщательном соблюдении предосторожностей, очень аккурат­но все усредняем и избавляемся от всяких ошибок, то мы обна­руживаем, что остаются все же какие-то суточные вариации. Среднее по многим измерениям над океанами обладает времен­ной вариацией примерно такой, какая показана на фиг. 9.5. Ток меняется приблизительно на ±15% и достигает наиболь­шего значения в 7 часов вечера по лондонскому времени. Самое странное здесь то, что, *где бы вы ни измеряли* ток — в Атланти­ческом ли океане, в Тихом ли или в Ледовитом, — его часы пик бывают тогда, когда часы в *Лондоне* показывают 7 вечера! По­всюду во всем мире ток достигает максимума в 19.00 по лондон­скому времени, а минимума — в 4.00 по тому же времени. Ины­ми словами, ток зависит от абсолютного земного времени, а *не от местного* времени в точке наблюдения.



*Фиг. 9.5. Средняя су­точная вариация гради­ента потенциала атмос­феры в ясную погоду над океанами.*

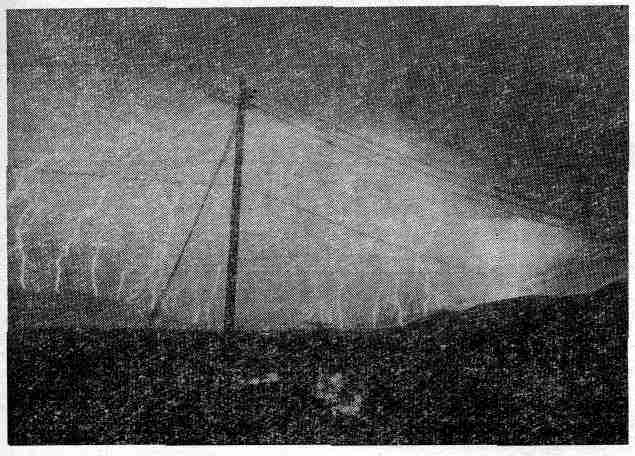
В одном отношении это все же не так уж странно; это вполне сходится с нашим пред­ставлением о том, что на самом верху имеется очень большая го­ризонтальная проводимость, которая и исключает местные изменения разности потенциалов между Землей и верхом. Любые изменения потенциала должны быть всемирными, и так оно и есть. Итак, теперь мы знаем, что напряжение «вверху» с изме­нением абсолютного земного времени то подымается, то падает на 15%.

**§ 3. Происхождение токов в атмосфере**

Теперь нужно ответить на вопрос об источнике больших отрицательных токов, которые должны течь от «верха» к земной поверхности, чтобы поддержать ее отрицательный заряд. Где же те батареи, которые это делают? «Батарея» показана на фиг. 9.6. Это гроза или вернее молнии. Оказывается, вспышки молний не «разряжают» той разности потенциалов, о которой мы говорили (и как могло бы на первый взгляд показаться). Молнии *снабжают* Землю *отрицательным* зарядом. Если мы увидали молнию, то можно поспорить на десять против одного, что она привела на Землю большое количество отрицательных зарядов. Именно грозы заряжают Землю в среднем током в 1800 *а* элект­ричества, которое затем разряжается в районах с хорошей по­годой.

На Земле каждые сутки гремит около 300 гроз. Их-то и мож­но считать теми батареями, которые накачивают электричество в верхние слои атмосферы и сохраняют разность потенциалов. А теперь учтите географию — полуденные грозы в Бразилии, тропические — в Африке и т. д. Ученые сделали оценки того, сколько молний ежесекундно бьет в Землю; нужно ли говорить, что их оценки более или менее согласуются с измерениями разности потенциалов: общая степень грозовой деятельности достигает на всей Земле максимума в 19.00 по лондонскому вре­мени. Однако оценки грозовой деятельности делать очень трудно; сделаны они были только *после* того, как стало известно, что та­кие вариации должны существовать. Трудность заключается в том, что в океанах, да и повсюду в мире не хватает наблюдений, их мало, чтобы точно установить число гроз. Но те ученые, ко­торые думают, что они «все учли правильно», уверяют, что мак­симум деятельности приходится на 19.00 по гринвичскому сред­нему времени.

Чтобы понять, как работают эти батареи, попробуем разоб­раться в грозе поглубже. Что происходит внутри грозы? Опишем грозу так, как ее сейчас представляют. Когда мы вникаем в не­обыкновенное явление природы (а не в эти столь изящно нами разобранные идеальные сферы из идеальных проводников, по­мещенных внутри других сфер), мы открываем, что не так уж много знаем.

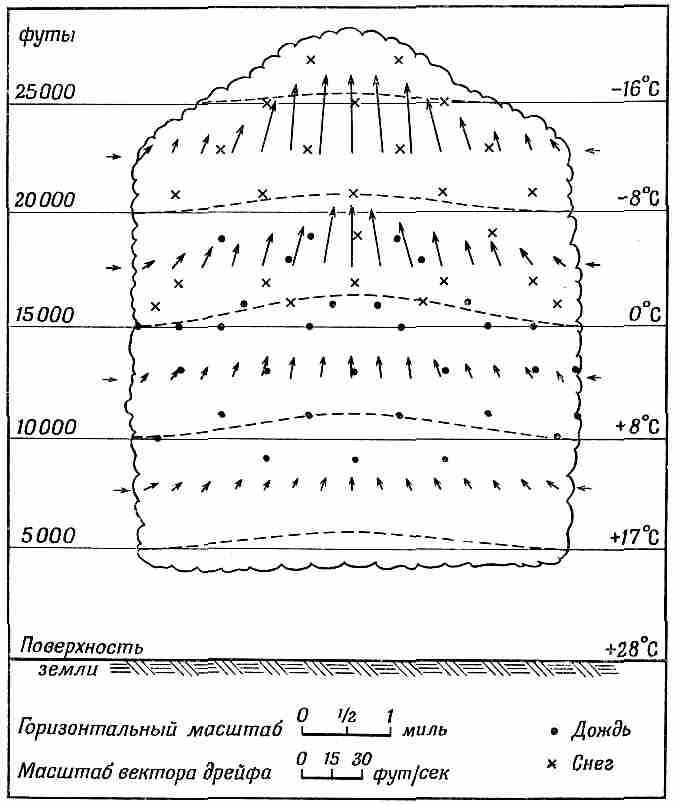


*Фиг. 9.6. Механизм, создающий электрическое поле атмосферы.*

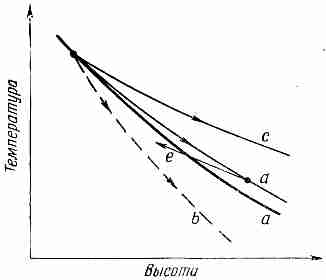
А это все очень интересно. Гроза не оставляет че­ловека равнодушным: она пугает его или восхищает; в общем возбуждает в нем какие-то чувства. А там, где в природе появ­ляются чувства, обычно сразу всплывает и сложность природы и ее таинственность. Нет никакой возможности точно описать, как происходит гроза, мы пока мало об этом знаем. Но мы все же попробуем немножко рассказать о том, что происходит.

**§ 4. Грозы**

1 Прежде всего следует сказать, что обычная гроза состоит из множества «ячеек», тесно примыкающих друг к другу, но почти независимых. Поэтому достаточно проанализировать одну из них. Под «ячейкой» мы подразумеваем область (имеющую в горизонтальном направлении ограниченную протяженность), в которой происходят все основные процессы. Обычно имеется несколько ячеек, расположенных одна возле другой, а в каждой из них творится примерно одно и то же, разве что с некоторым сдвигом во времени. На фиг. 9.7 в идеализированном виде представлена ячейка в начальный период грозы. Оказывается, что в воздухе в некотором месте и при некоторых условиях (мы их вскоре опишем) существует восходящий ток, все более убы­стряющийся по мере подъема. Теплый и влажный воздух снизу подымается, остывает и конденсирует влагу.



*Фие. 9.7. Грозовая ячейка в ранней стадии развития.*



*Фиг. 9.8. Температура ат­мосферы.*

*а — статическая атмосфера; b — адиабатическое охлаждение сухого воздуха; с — адиабатическое охлаж­дение влажного воздуха; а — влаж­ный воздух с какой-то примесью окружающего воздуха.*

На рисунке крести­ки означают снег, а точки — дождь, но поскольку восходящий ток довольно велик, а капельки очень малы, то на этой стадии ни снег, ни дождь не выпадают. Это начальная стадия, и пока это еще не настоящая гроза, в том смысле, что внизу вообще не видно, чтобы что-нибудь происходило. По мере того как теплый воздух подымается вверх, в ячейку прибывает воздух со всех сторон (весьма важное обстоятельство, которым долго пренеб­регали). Так что подымается не только тот воздух, который был внизу, но и какое-то количество другого воздуха — с разных сторон.

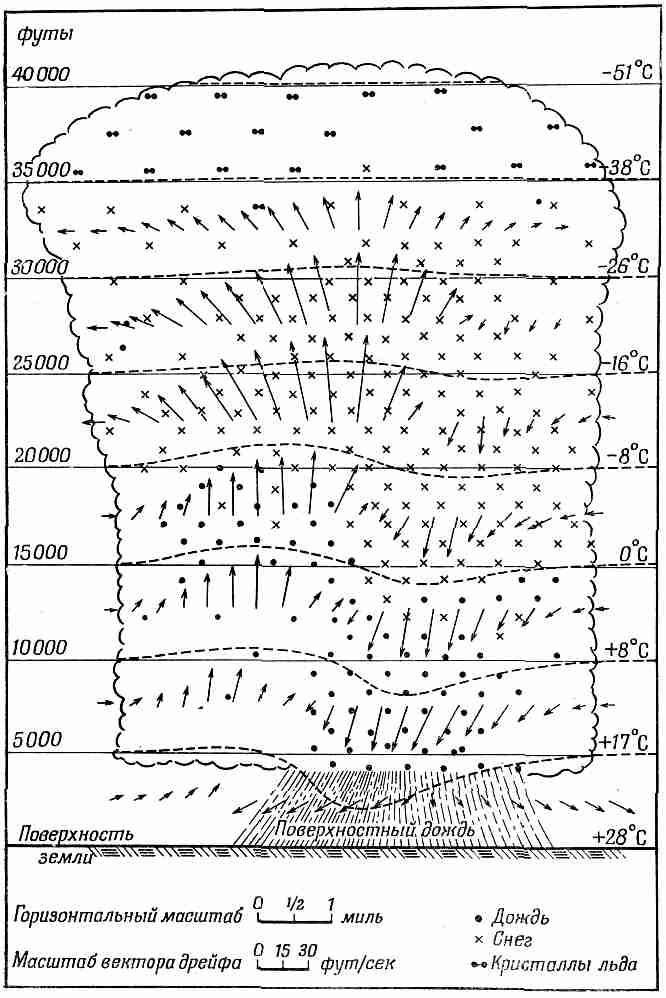
Отчего воздух вот так поднимается? Как вы знаете, наверху воздух прохладнее. Солнце нагревает *почву,* а водяной пар в верхних слоях атмосферы излучает тепло вверх; поэтому на больших высотах воздух холодный, а внизу теплый. Вы можете сказать: «Тогда все очень просто. Теплый воздух легче холод­ного; поэтому вся эта комбинация механически неустойчива, и теплый воздух поднимается». Конечно, если температура на разных высотах разная, то воздух *действительно термоди­намически* неустойчив. Предоставленный самому себе надолго, весь воздух примет одинаковую температуру. Но он не предо­ставлен самому себе; весь день светит солнце. Так что проблема касается не только термодинамического, но и *механического* равновесия. Пусть мы начертили, как на фиг. 9.8, кривую зави­симости температуры воздуха от высоты. В обычных условиях получается убывание по кривой типа *а;* по мере подъема темпе­ратура падает. Как же атмосфера может быть устойчивой? По­чему бы теплому воздуху просто не подняться к холодному? Ответ состоит в том, что если бы воздух начал подниматься, то давление в нем упало бы, и, рассматривая определенную пор­цию поднимающегося воздуха, мы бы увидели, что она адиаба­тически расширяется. (Тепло не уходило бы из нее и не приходило бы, потому что из-за огромных размеров не хватило бы вре­мени для больших передач тепла.) Итак, порция воздуха при подъеме охладится. Такой адиабатический процесс привел бы к такой зависимости температура — высота, как показано кривой bна

фиг. 9.8. Любой воздух, поднимающийся снизу, оказался бы *холоднее,* чем то место, куда он направляется. Так что теплому воздуху снизу нет резона идти вверх; если бы он всплыл, то остыл бы и стал холоднее того воздуха, который уже там есть; он оказался бы тяжелее этого воздуха, и ему бы захотелось сра­зу обратно вниз. В хороший, ясный денек, когда влажность невелика, устанавливается какая-то быстрота падения темпера­туры с высотой, и эта быстрота, вообще говоря, ниже «макси­мального устойчивого перепада», представляемого кривой b*.* Воздух находится в устойчивом механическом равновесии.

Но, с другой стороны, если мы возьмем воздушную ячейку, содержащую много водяных паров, то кривая ее адиабатичес­кого охлаждения будет совсем другой. При расширении и ох­лаждении этой ячейки водяной пар начнет конденсироваться, а при конденсации выделяется тепло. Поэтому влажный воздух остывает не так сильно, как сухой. Значит, когда воздух, влаж­ность которого выше средней, начнет подниматься, его темпе­ратура будет следовать кривой *с* на фиг. 9.8. Слегка охлаждаясь при подъеме, он все же окажется теплее окружающего его на этой высоте воздуха. Если имеется область теплого влажного воздуха и он почему-то начинает подниматься, то он все время будет оставаться легче и теплее окружающего воздуха и по-прежнему будет всплывать, пока не достигнет огромных высот. Вот тот механизм, который заставляет воздух в грозовой ячейке подниматься.

В течение многих лет именно так объясняли грозовую ячей­ку. А затем измерения показали, что температура облака на различных уровнях над Землей не так высока, как это следует из кривой *с.* Причина в том, что, когда «пузырь» влажного воз­духа всплывает, он уносит с собой воздух из окружающей среды и охлаждается им. Кривая «температура — высота» похожа больше на кривую *d,* которая гораздо ближе к первоначальной кривой *а,* нежели к *с.*

После того как описанная конвекция началась, поперечный разрез грозовой ячейки выглядит уже так, как показано на фиг. 9.9. Это так называемая «зрелая» гроза. В ней действует очень сильная тяга вверх, достигающая на этой стадии высот в 10—15 *км,* а иногда и выше. Грозовой купол с происходящей в нем конденсацией громоздится надо всей облачной грядой с быст­ротой, достигающей обычно 60 *км/час.* По мере того как водяной пар поднимается и конденсируется, возникают крохотные ка­пельки, которые быстро охлаждаются до температуры ниже нуля. Они должны замерзнуть, но делают это не сразу — они «переохлаждаются».



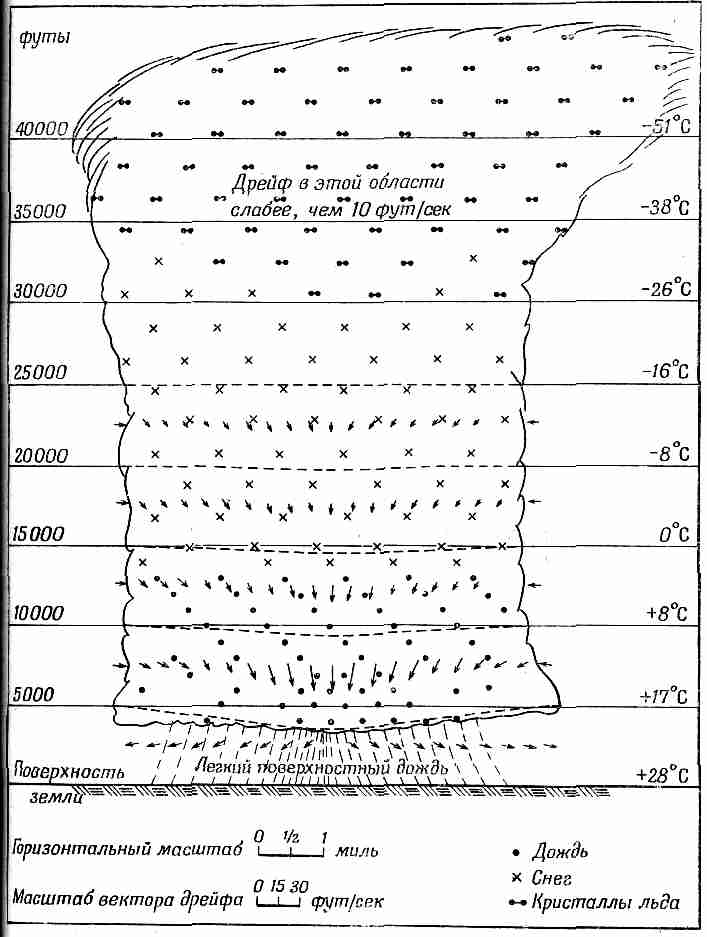
*Фиг. 9.9. Созревшая грозовая ячейка.*

Вода, да и другие жидкости обычно легко охлаждаются ниже своей точки замерзания, не кристаллизуясь, если только вокруг нет «ядер», которые необходимы, чтобы на­чалась кристаллизация. Только если имеются мелкие крошки вещества, наподобие кристалликов NaCl, капельки воды пре­вратятся в льдинки. Тогда равновесие будет приводить к испа­рению капель и росту кристаллов льда. Итак, в какой-то мо­мент начинается внезапное исчезновение воды и быстрое обра­зование льда. Кроме того, могут происходить прямые соударения водяных капелек и льдинок — столкновения, в которых пе­реохлажденная вода, прикоснувшись к кристаллику льда, мгно­венно сама кристаллизуется. Стало быть, в какой-то момент раз­вития облака в нем происходит быстрое накопление крупных частиц льда.

И когда они станут достаточно тяжелыми, они начнут па­дать сквозь восходящий воздух, ибо они стали слишком груз­ными, чтобы тяга могла их нести. Падая, они увлекут за собой немного воздуха. Начинается противоток воздуха — вниз. И легко понять, что, как это ни странно, раз уж противоток на­чался, то прекратиться он не сможет. Воздух теперь полным хо­дом помчится вниз!

Посмотрите: кривая *d* на фиг. 9.8 (истинное распределение температур по высоте облака) не так крута, как кривая *с* (от­носящаяся к влажному воздуху). Значит, когда начнет падать влажный воздух, его температура будет повышаться по кривой, соответствующей кривизне линии с, т. е. при достаточно сильном падении окажется *ниже* температуры окружающего воздуха (как это видно из кривой *е).* И в момент, когда это случится, он окажется плотнее окружающего воздуха, падение станет неот­вратимым.

Но вы скажете: «Уж не вечное ли это движение? Сперва го­ворилось, что воздух должен подниматься, а когда вы его под­няли, то одинаково убедительно принимаетесь доказывать, что ему положено падать». Нет, это не вечное движение. Когда по­ложение неустойчиво и теплый воздух вынужден подниматься, тогда, естественно, что-то должно его заместить. Не менее верно и то, что спускающийся холодный воздух был бы в состоянии энергетически заместить теплый воздух. Но поймите, что то, что спустилось вниз,— это уже не тот воздух, который был вна­чале. Давние рассуждения, в которых шла речь об изолирован­ном облаке, сперва подымавшемся, а затем спускающемся, содержали в себе какую-то загадку. Нужен был дождь, чтобы обеспечить спуск, а этот способ был мало правдоподобен. Но как только вы поняли, что к восходящему потоку воздуха приме­шан воздух, бывший вначале на той высоте, откуда началась тяга, термодинамические соображения покажут вам, что падение холодного воздуха, первоначально плававшего на больших высотах, тоже возможно. Это и объясняет картину активной грозы, представленную схематически на фиг. 9.9.



*Фиг. 9.10, Поздняя фаза грозовой ячейки.*

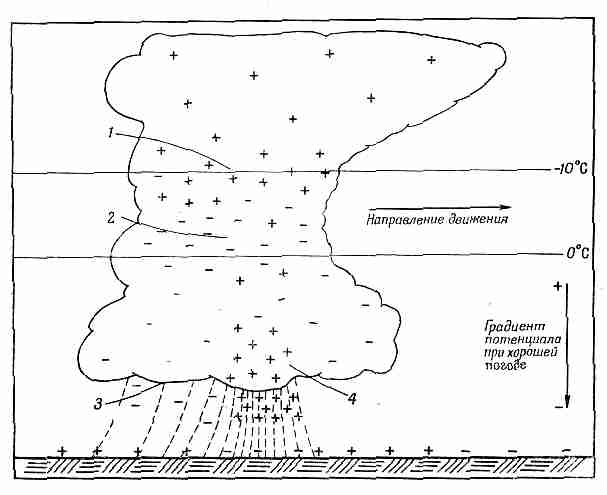
Когда воздух доходит донизу, из нижней части тучи начи­нает идти дождь. Вдобавок, достигнув земной поверхности, от­носительно холодный воздух растекается во все стороны. Значит, перед самой грозой начинается холодный ветер, предупреждаю­щий нас о предстоящей буре. Во время самой бури наблюдаются резкие и внезапные порывы ветра, облака клубятся и т. д. Но в основном сперва существует ток, текущий вверх, потом про­тивоток вниз — картина, вообще говоря, очень сложная.

В то же мгновение, когда начинаются осадки, возникает и противоток. И в тот же самый момент обнаруживаются электри­ческие явления. Но прежде чем описать молнию, мы закончим рассказом о том, что творится в грозовой ячейке через полчаса или, скажем, через час. Она выглядит так, как показано на фиг. 9.10. Тяга вверх прекратилась — больше нет теплого воз­духа, и поддерживать ее нечем. Какое-то время еще продолжа­ются осадки, последние капельки воды падают на землю, все становится спокойнее, хотя часть льдинок еще осталась в воздухе. На больших высотах ветры дуют в разные стороны, поэтому верх грозовой тучи обычно начинает принимать вид наковальни. Ячейке пришел конец.

**§ 5. Механизм распределения зарядов**

Теперь мы хотим обратиться к обсуждению самой важной для нас стороны дела — к возникновению электрических заря­дов. Разного рода эксперименты, включая полеты сквозь грозо­вой фронт (пилоты, совершающие их — истинные храбрецы!), выяснили, что распределение зарядов в грозовой ячейке напоминает изображенное на фиг. 9.11. Верхушка грозы заряжена положительно, а низ — отрицательно, за исключением неболь­шого участка положительных зарядов в нижней части тучи, при­чинившего немало забот исследователям. Никто не знает, поче­му он там появляется и насколько он важен, то ли это всего лишь вторичный эффект положительного дождя, то ли сущест­венная часть всего механизма. Если б этого не было, все выгля­дело бы значительно проще. Во всяком случае преимущест­венно отрицательный заряд внизу и положительный навер­ху — это как раз такое расположение полюсов батареи, которое может зарядить Землю отрицательно. Положительные заряды находятся в 6—7 *км* над Землей, где температура достигает -20°C,а отрицательные — на высоте 3—4 *км,* и температура там от 0 до -10°C.

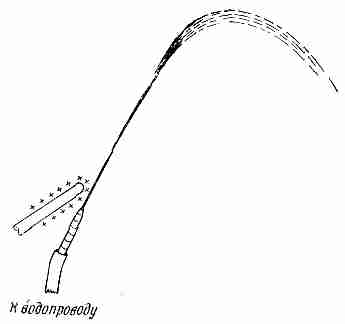
Заряда нижней части тучи хватает на то, чтобы создать между ней и землей разность потенциалов в 20, 30 и даже 100 млн. *в —* несравненно больше, чем те 0,4 млн. *в* перепада, которые бывают между «небом» и Землей при ясном небе.



*Фиг. 9.11. Распределение электричества в созревшей грозовой ячейке.*

Эти огромные напряжения пробивают воздух и создают гигантский грозовой разряд. При пробое отрицательный заряд с нижней части тучи переносится зигзагами молнии на Землю.

А теперь мы в нескольких словах опишем строение молнии. Прежде всего имеется настолько большой перепад потенциалов, что воздух пробивается. Молния бьет между одной частью тучи и другой, или между одной тучей и другой, или между тучей и Землей. С каждой независимой вспышкой — с каждым ударом молнии, который вы видите, с небес низвергается 20—30 *кулон* электричества. Интересно, сколько же времени тратит туча на восстановление этих 20—30 *кулон,* уходящих с молнией? Это можно выяснить, измеряя вдали от тучи электрическое поле, вызываемое дипольным моментом тучи. При таких измерениях вы видите внезапный спад поля при ударе молнии, а затем экспо­ненциальный возврат к первоначальному его значению с ха­рактерной временной постоянной порядка 5 *сек,* немного меняю­щейся от случая к случаю. Значит, грозе достаточно 5 *сек,* чтобы восстановить весь свой заряд. Но это, конечно, не означает, что очередная молния ударит точно через 5 *сек,* потому что меняется и геометрия туч и другие факторы.



*Фиг. 9.12.**Струя воды с электри­ческим полем, созданным вблизи насадки шланга.*

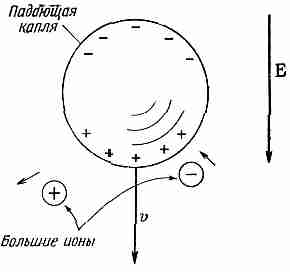
Вспышки следуют друг за другом нерегулярно, но существенно то, что возвраще­ние к начальным условиям всегда происходит примерно за 5 *сек.* Следовательно, в грозовой динамомашине течет ток при­мерно в 4 а. А это означает, что любая модель, придуманная для объяснения того, как грозовой вихрь генерирует электричество, должна быть очень мощной — это должна быть огромная быст­родействующая махина.

Прежде чем двинуться дальше, рассмотрим кое-что, почти наверняка не имеющее никакого отношения к излагаемому пред­мету, но тем не менее само по себе любопытное, так как это де­монстрирует влияние электрического поля на водяные капли. Мы говорим, что это может и не иметь отношения, потому что связано с опытом, который можно проделать в лаборатории со струйкой воды и который показывает довольно сильное действие электричества на капельки. В грозе же нет никаких водяных струй; там просто имеется туча сконденсированного льда и ка­пель воды. Так что вопрос о механизмах, действующих в грозе, по всей вероятности, никак не связан со всем тем, что вы увидите в том простом опыте, который мы хотим описать. Насадите на водопроводный кран шланг с суженным концом и направьте струю воды из него под крутым углом (фиг. 9.12). Вода забьет тонкой струйкой и, вероятно, начнет разбрызгиваться мелкими капельками. Если поперек струи навести электрическое поле (скажем, заряженной палочкой), то форма струи изменится. При слабом электрическом поле вы увидите, что струя разби­вается на несколько больших капель, а при сильном поле струя разбрызгивается на много-много мельчайших капелек, гораздо более мелких, чем [прежде](#прим1). У слабого электрического поля есть тенденция воспрепятствовать дроблению струи на капли, а сильное, напротив, стремится раздробить поток.

Эти эффекты, по всей видимости, можно объяснить следую­щим образом. Когда из шланга бьет вода и мы приложили по­перек небольшое поле, то одна сторона струи может зарядиться чуть-чуть более положительно, а другая — чуть-чуть более отрицательно. И потом, когда струя дробится, капли с одной стороны струи могут стать положительно заряженными, а с дру­гой — отрицательно заряженными. Они начнут притягиваться и захотят сливаться в более крупные, чем прежде, капли. Струя не будет сильно дробиться. Если же поле увеличить, то заряд на каждой отдельной капле станет очень большим, и *сам* заряд будет стремиться измельчать капли (из-за их отталкивания). Каждая капелька разделится на более мелкие (и тоже заряжен­ные), они начнут отталкиваться, и посыплются брызги. Итак, при нарастании поля струйка дробится все мельче. Единствен­ное, что нам хотелось бы подчеркнуть,— это что при некоторых обстоятельствах электрическое поле может сильно сказываться на каплях. Точный механизм того, что происходит в грозе, не­известен, и совсем не обязательно связывать его с только что описанным. Мы включили это описание лишь для того, чтобы вы оценили сложность явлений, которые могут играть роль. На самом деле ни у кого из ученых нет теории, основанной на таком представлении.

Мы хотели бы привести две теории, изобретенные для объяс­нения разделения зарядов в грозе. Обе они основаны на пред­ставлении о том, что на падающей частице должен существовать один заряд, а в воздухе — противоположный. Тогда при движе­нии падающей частицы (воды или льда) сквозь воздух возникает разделение электрических зарядов. Вопрос только в том, отчего начинается электризация? Одна из старейших теорий — это теория «дробления капель». Кто-то когда-то обнаружил, что если в потоке воздуха капли дробятся на части, то сами они за­ряжаются положительно, а воздух — отрицательно. У этой тео­рии есть несколько недостатков, самый серьезный из которых — что *знак* получается не тот. Кроме того, в большей части гроз умеренного пояса, сопровождаемых молниями, осадки на боль­ших высотах бывают *не в виде* воды, а в виде льда.

Из только что сказанного следует, что если б мы могли пред­ставить себе способ сделать так, чтобы верх и низ капли были наэлектризованы по-разному, и если б мы усмотрели какой-то резон для капель разбиваться в быстром потоке воздуха на не­равные части — большую впереди, а меньшую позади (ну, ска­жем, из-за движения сквозь воздух или из-за чего-то подобно­го), то и у нас появилась бы своя теория (отличная от всех из­вестных!). Тогда из-за сопротивления воздуха крупные капли при падении отставали бы от мелких и вышло бы разделение зарядов.



*Фиг. 9.13. Теория Ч. Вильсона о разделении зарядов в грозовой туче.*

Как видите, можно измышлять любые возмож­ности.

Одна из самых остроумных теорий, во многом более удовлет­ворительная, чем теория дробящихся капель, принадлежит Вильсону. Описывая ее, мы, как и сам Вильсон, будем говорить о каплях, хотя все это относится в равной мере и ко льду. Пусть у нас имеется водяная капелька, падающая в электрическом поло напряженностью 100 *в/м* к отрицательно заряженной земле. У капли появится наведенный дипольный момент — положи­тельный заряд внизу, отрицательный наверху (фиг. 9.13). Кро­ме этого, в воздухе имеются «ядра», о которых мы уже говори­ли,— большие неторопливо движущиеся ионы. (Быстрые ионы не окажут здесь заметного влияния.) Предположим, что на своем пути вниз капля приблизилась к большому иону. Если он сам положителен, то положительный заряд низа капли оттолк­нет его, и он отойдет в сторону. Так что, собственно, капля даже не соприкоснется с ним. Если же ион приблизится к капле свер­ху, он может притянуться к ней. Но капля падает сквозь воздух, и воздух проносится мимо нее вверх, унося с собой ионы (если только они движутся достаточно медленно). Так что положи­тельные ионы не успевают коснуться верхушки капли. Все это относится, как видите, только к крупным, малоподвижным ионам. Положительные ионы такого сорта не смогут соприкасать­ся ни с нижней, ни с верхней поверхностью летящей капельки. Но когда крупные, медленные, *отрицательные* ионы входят в соприкосновение с каплей, она их притягивает к себе и захва­тывает. На капле накапливается отрицательный заряд (знак за­ряда определяется исходной разностью потенциалов всей Земли и получается как раз тот, какой нам нужен). Отрицатель­ный заряд будет перенесен каплями в нижнюю часть тучи, а положительные ионы, брошенные по дороге, будут сдуты к ее вер­хушке различными восходящими потоками. Теория выглядит довольно мило и, во всяком случае, дает правильные знаки.

К тому же она не зависит от того, град ли у нас или капли дож­дя. Мы увидим, когда будем изучать поляризацию диэлектри­ков, что с льдинками должно происходить то же самое. У них тоже в электрическом поле будут появляться на концах поло­жительные и отрицательные заряды.

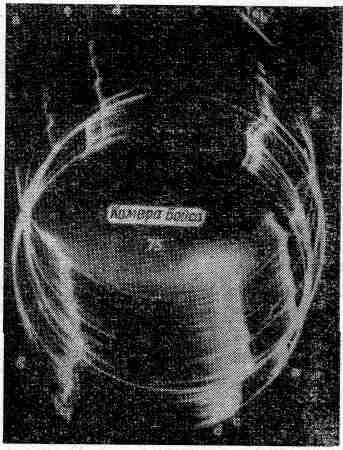
Однако и эта теория оставляет какие-то неясности. Во-пер­вых, суммарный заряд грозы очень велик. Довольно быстро весь запас больших ионов израсходуется. Вильсон и другие вынуждены были предположить, что существуют добавочные источники больших ионов. Как только начинается разделение зарядов, развиваются очень сильные электрические поля, и в этих полях могут быть места, где воздух ионизуется. Если там имеется сильно заряженная точка или любой небольшой объект наподобие капли, то они могут сконцентрировать вокруг себя поле, достаточно большое для того, чтобы возник «кистевой разряд». Когда имеется достаточно сильное поле, скажем по­ложительное, то электроны будут попадать в это поле и успе­вать набирать между столкновениями большую скорость. Она будет такой высокой, что, попадая в атомы, электроны будут срывать атомные электроны с их оболочки, оставляя позади себя положительные ионы. Эти новые электроны тоже наберут ско­рость и, столкнувшись, породят еще больше новых электронов. Произойдет своего рода цепная реакция, или лавина, вызываю­щая быстрое накопление ионов. Положительные заряды оста­нутся невдалеке от своих прежних мест, так что чистый эффект состоит в распределении положительных зарядов в области вокруг исходной точки. При этом, конечно, сильное поле исчез­нет и процесс замрет. Таков характер кистевого разряда. Не исключено, что поля в "грозовой туче могут достичь такой вели­чины, что сколько-то там кистевых разрядов действительно возникнет; могут также быть и другие механизмы ионизации, включаемые, едва начнется гроза. Но никто точно не знает, как они действуют. Так что по-настоящему до конца происхождение молнии не понято. Мы знаем только, что молнии бывают от гро­зы (и знаем, конечно, что гром бывает от молнии — от тепловой энергии, высвобождаемой при вспышке молнии).

Но, по крайней мере, мы можем хоть отчасти понять происхож­дение атмосферного электричества. Из-за того, что во время гро­зы существуют воздушные течения, ионы и капли воды на льдин­ках — положительные и отрицательные заряды — разделяются. Положительные заряды уносятся вверх, к облачному куполу (см. фиг. 9.11), а отрицательные при ударах молнии скатываются на Землю. Положительные так и остаются на верхушке облака, входят в высокие слои хорошо проводящего воздуха и расходятся над всей Землей. В районах, где держится ясная погода положи­тельные заряды в этом слое медленно переводятся к земной по­верхности ионами в воздухе — ионами, образованными то ли космическими лучами, то ли всплесками волн и деятельностью человека. Атмосфера — это беспрерывно действующая электрическая машина!

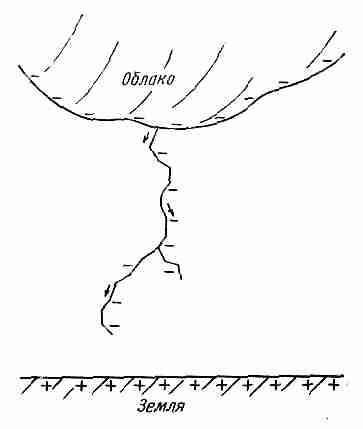
**§ 6. Молния**

Первое свидетельство о том, что происходит при вспышке молнии, было получено в фотоснимках, сделанных камерой, ко­торую держали руками и перемещали при закрытом затворе, на­целиваясь туда, где ожидалась вспышка молнии. Первые полу­ченные таким способом фотографии явственно показали, что обычно удары молнии — это повторные разряды по одному и тому же пути. Позже была изобретена камера «Бойс», в которой *две* линзы смонтированы на быстро вращающемся диске под уг­лом 180° друг к другу. Изображение, даваемое каждой линзой, движется поперек пленки, картина развертывается во времени. Если, скажем, удар повторился, то на снимке появятся бок о бок два изображения. Сравнивая изображения от обеих линз, можно выяснить различные детали временной последователь­ности вспышек. На фиг. 9.14 показан снимок, сделанный такой камерой.

Расскажем о молнии подробнее, хотя мы и не понимаем точ­но, как она действует. Мы хотим дать качественное описание того, *на что это похоже,* но мы не будем входить в детали того, *почему* происходит то, что, по-видимому, происходит. Опишем обычный случай тучи с отрицательным дном, висящей над рав­ниной.



*Фиг.**9.14. Снимок вспышки молнии, сделанный камерой «Бойс».*



*Фиг. 9.15. Образование ступенчатого лидера.*

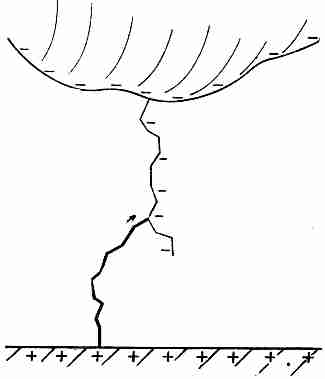
Ее потенциал намного более отрицателен, чем земная поверхность под нею, так что отрицательные электроны будут ускоряться по направлению к Земле. А происходит здесь вот что. Все начинается со светящегося комка, называемого «ступенча­тым лидером». Он не такой яркий, как сама вспышка молнии. На снимках можно видеть вначале небольшое светлое пятнышко, выходящее из тучи и очень быстро катящееся вниз со скоростью 1/6 скорости света! Но оно проходит всего около 50 *м* и останав­ливается. Следует пауза около 50 *мксек,* а затем происходит сле­дующий шаг. И за ним снова пауза, а после новый шаг и т. д. Так, шаг за шагом, пятно движется к Земле, по пути, похожему на то, что изображено на фиг. 9.15. В лидере имеются отрица­тельные заряды из тучи; весь столб полон отрицательного элект­ричества. Кроме того, воздух начинает ионизоваться быстро движущимися зарядами, образующими лидер, так что воздух вдоль отмеченного пути становится проводящим. В момент, ког­да лидер коснется грунта, получается проводящая «проволока», которая тянется до самой тучи и полна отрицательного электри­чества. Теперь, наконец, отрицательный заряд может запросто удрать из тучи. Первыми замечают это электроны, находящиеся *в самом низу* лидера; они соскакивают наземь, оставив позади себя положительный заряд, который притягивает новые отрица­тельные заряды из высших частей лидера; они тоже вывалива­ются наземь и т. д. В конце концов весь отрицательный заряд этой части тучи быстро и энергично сбежит по этому каналу вниз. Так что молния, которую вы *видите,* бьет от земли *вверх*

(фиг. 9.16). И, действительно, этот основной разряд — самая яркая часть разряда — называется *обратной вспышкой.* Она и вызывает яркое свечение и выделение тепла, которое, приводя к быстрому расширению воздуха, производит громовой удар.

Ток в пике молнии достигает 10 000 *а* и уносит около 20 *ку­лон* электричества.

Но мы еще не кончили. Спустя небольшой промежуток вре­мени, может быть, в несколько сотых секунды, когда обратная молния уже исчезла, вниз пикирует новый лидер. Но на этот раз уже без пауз, без остановок. Теперь его именуют «темным лидером», и весь путь сверху донизу он проходит одним брос­ком. Он мчится на всех парах в точности по прежнему следу, потому что вдоль следа хватает осколков атомов для того, чтобы этот путь оказался самым легким из всех путей. Новый лидер снова полон отрицательного электричества. И в мгновение, когда он касается почвы,— трах! — появляется обратная мол­ния, катящаяся по тому же пути. И вы видите, как молния бьет еще раз, и еще раз, и еще. Порой бывает только один-два удара, временами пять или десять (однажды видели 42 разряда по одному и тому же каналу), но всегда быстро следующих один за другим.

Временами все еще более усложняется. Скажем, после одной из остановок лидер может начать ветвиться, образовав *две* сту­пеньки — обе идут вниз, но не совсем в одном направлении (см. фиг. 9.15). Что затем случится, зависит от того, коснется ли одна из ветвей земли намного раньше другой. Если да, то яркая обратная молния (вспышка отрицательных зарядов, разгружае­мых наземь) прокладывает себе путь *вверх* вдоль ветви, которая коснулась земли, а когда на своем пути вверх достигает и про­скакивает начало другой ветви, то кажется, что яркая молния бьет *вниз* по этой другой ветви. Почему?



*Фиг. 9.16. Обратная молния мчится по следу, проложенному лидером.*

Потому что отрицатель­ное электричество ссыпается на землю, и это вызывает вспышку молнии. Этот заряд начинает двигаться в начале вторичной вет­ви, последовательно опорожняя ее дальнейшие участки, так что кажется, что яркая молния прокладывает себе путь вниз по этой ветви в то же самое время, как она движется вверх. Если, одна­ко, одна из этих добавочных ветвей лидера достигнет почвы почти вместе с самим лидером, то порой может случиться, что *темный* лидер повторной вспышки изберет себе путь по второй ветви. Тогда вы увидите первую главную вспышку в одном месте, а вторую — в другом. Это — вариант первоначальных представ­лений.

Кроме того, наше описание чересчур упрощает явления у са­мой земной поверхности. Когда ступенчатый лидер оказывается примерно в 100 *м* от почвы, то оттуда поднимается ему навстречу разряд. По-видимому, поле становится таким сильным, что мо­жет начаться разряд кистевого типа. Если, к примеру, в этом месте есть какой-то вытянутый предмет (дом с острием на кры­ше), то при приближении лидера поля так нарастают, что начи­нается разряд с этого острия, который достигает лидера. Молния стремится бить как раз в такие острия.

То, что молния бьет в высокие предметы, по-видимому, было известно давным-давно. Известно высказывание Артабана, советника Ксеркса. Артабан дает своему господину совет от­носительно предполагавшегося похода на греков, имевшего целью бросить весь известный тогда мир к ногам персов. Он говорит: «Взгляни, как Бог молниями своими всегда поражает крупных животных и не позволяет им становиться дерзкими, а существа меньших размеров не раздражают Его. И как молнии Его падают всегда на самые большие дома и самые высокие де­ревья». И затем он объясняет причину: «Так, очевидно, Он лю­бит унижать все, что возносит себя».

Как вы думаете — сейчас, когда у вас есть правильный взгляд на молнию, поражающую высокие деревья, смогли ли бы вы давать королям советы по военным вопросам с большей муд­ростью, чем делал это Артабан 2300 лет назад? Скажите им, чтоб они не возносили себя! У вас только это выйдет не столь поэтично.

***\* Удобный способ наблюдать размер капель — дать воде падать на большой противень. От крупных капель дробь будет громче.***

***Глава 10***

**ДИЭЛЕКТРИКИ**

[**§1. Диэлектрическая проницаемость**](#a1)

[**§2. Вектор поляризации Р**](#a2)

[**§З. Поляризационные заряды**](#a3)

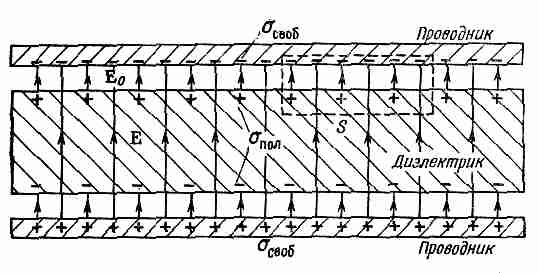
[**§4. Уравнения электростатики для диэлектриков**](#a4)

[**§5. Поля и силы в присутствии диэлектриков**](#a5)

**§ 1. Диэлектрическая проницаемость**

Сейчас мы разберем еще одно характерное свойство материи, возникающее под влиянием электрического поля. В одной из предыдущих глав мы рассмотрели поведение *проводников,* в которых заряды под влиянием электрического поля свободно текут в такие участки, что поле внутри проводника обращается в нуль. Теперь мы будем говорить об *изоляторах,* т. *е.* таких материалах, которые не проводят электриче­ство. Сначала можно было бы подумать, что в них вообще ничего не происходит. Но Фарадей с помощью простого электроскопа и конденса­тора, состоящего из двух параллельных плас­тин, обнаружил, что это не так. Его опыт по­казал, что если между пластинами поместить изолятор, то емкость такого конденсатора *уве­личится.* Когда изолятор целиком заполняет пространство между пластинами, емкость воз­растает в *x* раз, причем *x* зависит только от свойств изолирующего материала. Изолирую­щие материалы называют также *диэлектриками;* тогда множитель *x* характеризует свойства диэлектрика и называется *диэлектрической про­ницаемостью.* Диэлектрическая проницаемость вакуума, конечно, равна единице.

Наша задача теперь состоит в том, чтобы объяснить, почему вообще возникает электри­ческий эффект, раз изоляторы фактически яв­ляются изоляторами и не проводят электриче­ства. Начнем с экспериментального факта, что емкость увеличивается, и попытаемся разоб­раться, что же там может происходить. Рас­смотрим плоский конденсатор, на проводящих пластинах которого имеются заряды, скажем, на верхней пластине отрицательные, а на нижней — положительные.



*Фиг. 10.1. Плоский конденсатор с диэлектриком. Показаны линии паяя E.*

Пусть расстояние между пластинами равно *d,* а пло­щадь каждой пластины *А.* Как мы показали раньше, емкость равна

C:\1\pic\gray.jpg

(10.1)

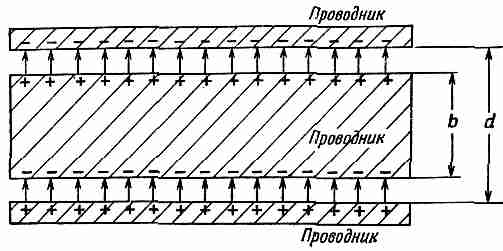
а заряд и потенциал конденсатора связаны соотношением

C:\1\pic\gray.jpg

(10.2)

Далее, экспериментальный факт состоит в том, что если мы по­ложим между пластинами кусок изолирующего материала, на­пример стекла или плексигласа, то емкость возрастет. Это, ра­зумеется, означает, что при том же заряде потенциал стал мень­ше. Но разность потенциалов есть интеграл от электрического поля, взятый поперек конденсатора; отсюда мы должны заклю­чить, что электрическое поле внутри конденсатора стало мень­ше, хотя заряды пластин и не изменились.

Но как может это быть? Нам известна теорема Гаусса, кото­рая утверждает, что полный поток электрического поля прямо связан с находящимся внутри объема электрическим зарядом. Рассмотрим входящую в теорему Гаусса поверхность *S,* изобра­женную пунктиром на фиг. 10.1. Поскольку электрическое поле в присутствии диэлектрика уменьшается, мы заключаем, что полный заряд внутри поверхности должен теперь быть меньше, чем до внесения изолятора. Остается сделать единственный вы­вод, что на поверхности диэлектрика должны находиться положи­тельные заряды. Раз поле уменьшилось, но все же не обратилось в нуль, значит, этот положительный заряд меньше отрица­тельного заряда в проводнике. Итак, явление это можно объяс­нить, если мы поймем, почему на одной поверхности диэлектри­ка, помещенного в электрическое поле, индуцируется положи­тельный заряд, а на другой — отрицательный.



*Фиг. 10.2. Если поместить пластинку проводника внутрь плоского конденсатора, наведенные заряды обратят поле в проводнике в нуль.*

Все было бы понятно, если бы речь шла о проводнике. Пусть у нас был бы, например, конденсатор, расстояние между пластинами которого равно *d,* и мы вставили бы между этими пластинами незаряженный проводник толщиной *b* (фиг. 10.2). Электрическое поле индуцирует положительный заряд на верх­ней поверхности и отрицательный заряд на нижней поверхнос­ти, так что в результате поле внутри проводника погашается. Во всех остальных местах поле такое же, какое было без провод­ника, поэтому оно равно поверхностной плотности зарядов, де­ленной на εо; но расстояние, по которому мы должны интегри­ровать, чтобы получить напряжение (разность потенциалов), стало меньше.

Напряжение равно

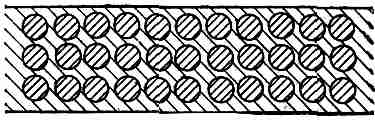
C:\1\pic\gray.jpg

C:\1\pic\gray.jpgОкончательное выражение для емкости похоже на (10.1), где *d* нужно заменить разностью *(d-b):*

(10.3)

Емкость увеличилась в некоторое число раз, зависящее от *b/d,* доли объема, занятого проводником.

Отсюда мы получаем модель того, что происходит в диэлект­риках: внутри материала имеется множество мелких прово­дящих слоев. Беда такой модели состоит в том, что в ней должна иметься выделенная ось — перпендикуляр ко всем слоям, а у большинства диэлектриков такой оси нет.



*Фиг. 10.3. Модель диэлек­трика; маленькие проводя­щие шарики, вставленные внутрь идеального изоля­тора.*

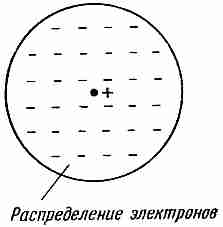
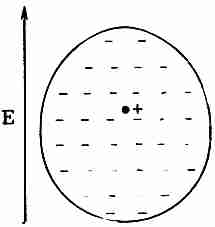
Эту трудность, одна­ко, можно устранить, предположив, что все изолирующие мате­риалы содержат маленькие проводящие шарики, отделенные один от другой изолятором (фиг. 10.3). Появление диэлектри­ческой проницаемости тогда объясняется действием зарядов, ин­дуцируемых в каждом шарике. В этом и состоит одна из самых первых физических моделей диэлектриков, предложенная для объяснения явления, которое наблюдал Фарадей. Точнее, пред­полагалось, что каждый атом материала есть идеальный провод­ник, изолированный от остальных атомов. Диэлектрическая проницаемость *x* тогда должна была определяться долей того объема, который занимают проводящие шарики. Теперь, одна­ко, пользуются другой моделью.

**§ 2. Вектор поляризации Р**

Продолжив наш анализ, мы обнаружим, что идея о проводя­щих и непроводящих участках не так уж существенна. Любой из маленьких шариков действует как диполь, момент которого создается внешним полем. Для понимания диэлектриков суще­ственной является идея о том, что в материале возбуждается множество маленьких диполей. Почему они возбуждаются — то ли потому, что в материале есть проводящие шарики, то ли по каким-либо другим причинам — абсолютно несуще­ственно.

Почему поле должно индуцировать дипольный момент у ато­ма, хотя атом не является проводящим шариком? Мы обсудим этот вопрос гораздо подробнее в следующей главе, которая бу­дет посвящена внутреннему механизму диэлектрических мате­риалов. А сейчас мы дадим лишь один пример, только чтобы проиллюстрировать возможный механизм. Атом имеет ядро с по­ложительным зарядом, окруженное отрицательными электрона­ми. В электрическом поле ядро притягивается в одну сторону, а электроны в другую. Орбиты или плотности вероятности элект­ронов (или какая-либо другая картина, используемая в кванто­вой механике) несколько искажаются (фиг. 10.4); центр тяжести отрицательных зарядов сместится и больше не будет совпадать с положительным зарядом ядра. Мы уже обсуждали такое рас­пределение заряда. Если взглянуть на него издалека, то подоб­ная нейтральная конфигурация в первом приближении эквива­лентна маленькому диполю.

Если поле не чересчур велико, естественно считать величину индуцированного дипольного момента пропорциональной полю. Иначе говоря, небольшое поле сместит заряды чуть-чуть, а более сильное поле раздвинет их дальше — пропорционально величине поля, пока смещение не станет чересчур большим.



*Фиг. 10.4. Распределение электронов атома в электрическом поле сдвигается относительно ядра.*

До конца этой главы мы будем считать, что дипольный мо­мент в точности пропорцио­нален полю.

Предположим теперь, что в каждом атоме заряды *q* раз­делены промежутком δ, так что qδ есть дипольный момент одного атома. (Мы пишем δ, потому что *d* уже использовано для обозначения расстояния между пластинами.) Если в еди­нице объема имеется *N* атомов, то *дипольный момент в еди­нице объема* равен *Nq*δ*.* Этот дипольный момент в единице объема мы запишем в виде вектора Р. Нет необходимости подчеркивать, что он лежит в направлении всех отдельных дипольных моментов, т. е. в направлении смещения за­рядов δ:

C:\1\pic\gray.jpg

(10.4)

Вообще говоря, Р будет меняться в диэлектрике от точки к точке. Но в каждой точке Р пропорционален электрическому полю Е. Константа пропорциональности, которая определяется тем, насколько легко можно сместить электрон, зависит от сорта атомов в материале.

О том, что действительно определяет поведение этой констан­ты и степень ее постоянства для больших полей, а также о том, что происходит внутри разных материалов, мы поговорим позже. А пока мы просто предположим, что существует какой-то механизм, благодаря которому индуцируется дипольный момент, пропорциональный электрическому полю.

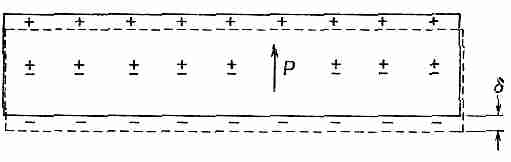
**§ 3. Поляризационные заряды**

Посмотрим теперь, что дает эта модель для конденсатора с диэлектриком. Рассмотрим сначала лист материала, в котором на единицу объема приходится дипольный момент Р. Полу­чится ли в результате в среднем какая-нибудь плотность заря­дов? Нет, если Р постоянен.

Если положительные и отрицательные заряды, смещенные относительно друг друга, имеют одну и ту же среднюю плот­ность, то сам факт их смещения не приводит к появлению сум­марного заряда внутри объема. С другой стороны, если бы Р в одном месте был больше, а в другом меньше, то это означало бы, что в некоторые области попало больше зарядов, чем отту­да вышло; тогда мы бы могли получить объемную плотность за­ряда. В случае плоского конденсатора предположим, что Р — величина постоянная, поэтому достаточно будет только посмот­реть, что происходит на поверхностях. На одной поверхности отрицательные заряды (электроны) эффективно выдвинулись на расстояние δ, а на другой поверхности они сдвинулись внутрь, оставив положительные заряды снаружи на эффективном расстоянии δ. Возникает, как показано на фиг. 10.5, поверх­ностная плотность зарядов, которую мы будем называть *поляризационным зарядом.*

C:\1\pic\gray.jpgЭтот заряд можно подсчитать следующим образом. Если пло­щадь пластинки равна *А,* то число электронов, которое ока­жется на поверхности, есть произведение *А* и *N* (числа электро­нов на единицу объема), а также смещения S, которое, как мы предполагаем, направлено перпендикулярно к поверхности. Полный заряд получится умножением на заряд электрона *qe .* Чтобы найти поверхностную плотность поляризационных за­рядов, индуцируемую на поверхности, разделим на *А.* Вели­чина поверхностной плотности зарядов равна

Но она равна как раз длине *Р* вектора поляризации Р [формула (10.4)]:



*Фиг. 10.5. Диэлектрик в однородном поле. Положительные заряды сместились на расстояние δ относи­тельно отрицательных.*

C:\1\pic\gray.jpg

(10.5)

Поверхностная плотность зарядов равна поляризации внутри материала. Поверхностный заряд, конечно, на одной поверх­ности положителен, а на другой отрицателен.

Предположим теперь, что наша пластинка служит диэлектри­ком в плоском конденсаторе. *Пластины* конденсатора также име­ют поверхностный заряд (который мы обозначим σсвоб, потому что заряды в проводнике могут двигаться «свободно» куда угодно). Конечно, это тот самый заряд, который мы сообщили конденсатору при его зарядке. Следует подчеркнуть, что σпол существует только благодаря σсвоб. Если, разрядив конденсатор, удалить σсвоб, то σпол также исчезнет, но он не стечет по проволо­ке, которой разряжают конденсатор, а уйдет назад внутрь ма­териала, за счет релаксации поляризации в диэлектрике.

C:\1\pic\gray.jpgТеперь мы можем применить теорему Гаусса к поверхности *S,* изображенной на фиг. 10.1. Электрическое поле *Е* в диэлект­рике равно *полной* поверхностной плотности зарядов, деленной на ε0. Очевидно, что σпол и σсвоб имеют разные знаки, так что

(10.6)

C:\1\pic\gray.jpgЗаметьте, что поле *Е0* между металлической пластиной и по­верхностью диэлектрика больше поля *Е;* оно соответствует только σсвоб. Но нас здесь интересует поле внутри диэлектрика, которое занимает почти весь объем, если диэлектрик заполняет почти весь промежуток между пластинами. Используя формулу (10.5), можно написать

(10.7)

Из этого уравнения мы не можем определить электрическое поле, пока не узнаем, чему равно Р. Здесь мы, однако, предпо­лагаем, что Р зависит от Е и, более того, пропорционально Е. Эта пропорциональность обычно записывается в виде

C:\1\pic\gray.jpg

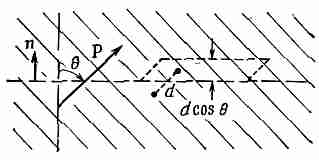
(10.8)

Постоянная χ (греческое «хи») называется *диэлектрической вос­приимчивостью* диэлектрика.

C:\1\pic\gray.jpgТогда выражение (10.7) приобретает вид

(10.9)

откуда мы получаем множитель 1/(1+χ), показывающий, во сколько раз уменьшилось поле.



*Фиг.**10.6. Количество ааряда, прошедшее через элемент вообра­жаемой поверхности в диэлект­рике, пропорционально компонен­те* Р, *нормальной к поверхности.*

C:\1\pic\gray.jpgНапряжение между пластинами есть интеграл от электри­ческого поля. Раз поле однородно, интеграл сводится просто к произведению *Е* и расстояния между пластинами *d.* Мы по­лучаем

C:\1\pic\gray.jpgПолный заряд конденсатора есть σсвоб *А,* так что емкость, определяемая формулой (10.2), оказывается равной

(10.10)

Мы объяснили явление, наблюдавшееся на опыте. Если заполнить плоский конденсатор диэлектриком, емкость возрастает на множитель

C:\1\pic\gray.jpg

(10.11)

который характеризует свойства данного материала. Наше объяснение останется, конечно, неполным, пока мы не объясним (а это мы сделаем позже), как возникает атомная поляризация.

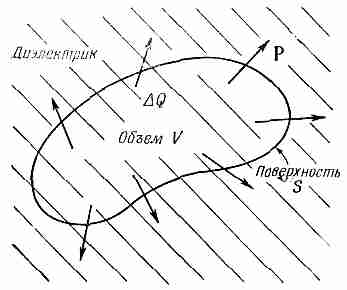
Обратимся теперь к чуть более сложному случаю — когда поляризация Р не всюду одинакова. Мы уже говорили, что если поляризация непостоянна, то вообще может возникнуть объемная плотность заряда, потому что с одной стороны в ма­ленький элемент объема может войти больше зарядов, чем вый­дет с другой. Как определить, сколько зарядов теряется или приобретается в маленьком объеме?

Подсчитаем сначала, сколько зарядов проходит через вооб­ражаемую плоскость, когда материал поляризуется. Коли­чество заряда, проходящее через поверхность, есть просто *Р,* умноженное на площадь поверхности, если поляризация направлена по *нормали* к поверхности. Разумеется, если поля­ризация *касательна,* к поверхности, то через нее не пройдет ни одного заряда.

Продолжая прежние рассуждения, легко понять, что коли­чество заряда, прошедшее через любой элемент поверхности, пропорционально *компоненте* Р, *перпендикулярной* к поверх­ности. Сравним фиг. 10.6 и 10.5. Мы видим, что уравнение (10.5) в общем случае должно быть записано так:

C:\1\pic\gray.jpg

(10.12)



*Фиг. 10.7. Неоднородная поляризация* Р *может приво­дить к появлению результиру­ющего заряда внутри диэлек­трика.*

Если мы имеем в виду воображаемый элемент поверхности *внутри* диэлектрика, то формула (10.12) дает заряд, который прошел через поверхность, но не приводит к результирующему поверхностному заряду, потому что возникают равные и про­тивоположно направленные вклады от диэлектрика по обе стороны поверхности.

C:\1\pic\gray.jpgОднако смещение зарядов может привести к появлению *объемной* плотности зарядов. Полный заряд, выдвинутый *из* объема *V* за счет поляризации, есть интеграл от внешней нор­мальной составляющей Р по поверхности *S,* охватывающей объем (фиг. 10.7). Такой же излишек зарядов противоположного знака остается внутри. Обозначая суммарный заряд внутри F через ΔQпол, запишем

(10.13)

C:\1\pic\gray.jpgМы можем отнести ΔQпол за счет объемного распределения заряда с плотностью ρпол, так что

(10.14)

Комбинируя оба уравнения, получаем

C:\1\pic\gray.jpg

(10.15)

Мы получили разновидность теоремы Гаусса, связывающую плотность заряда поляризованного материала с вектором поля­ризации Р. Мы видим, что она согласуется с результатом, полученным для поверхностного поляризационного заряда или же для диэлектрика в плоском конденсаторе. Уравнение (10.15) с гауссовой поверхностью *S,* изображенной на фиг. 10.1, дает в правой части интеграл по поверхности, равный *Р*ΔA, а в левой части заряд внутри объема оказывается σпол ΔA, так что мы снова получаем σ=*Р.*

C:\1\pic\gray.jpgТочно так же, как мы делали в случае закона Гаусса для электростатики, мы можем перейти в уравнении (10.15) к диф­ференциальной форме, пользуясь математической теоремой Гаусса:

Мы получаем

C:\1\pic\gray.jpg

(10.16)

Если поляризация неоднородна, ее дивергенция определяет появляющуюся в материале результирующую плотность заря­дов. Подчеркнем, что это совсем *настоящая* плотность зарядов; мы называем ее «поляризационным зарядом», только чтобы помнить, откуда она взялась.

**§ 4. Уравнения электростатики для диэлектриков**

Давайте теперь свяжем полученные нами результаты с тем, что мы уже узнали в электростатике. Основное уравнение имеет вид

C:\1\pic\gray.jpg

(10.17)

где ρ — плотность *всех* электрических зарядов. Поскольку уследить за поляризационными зарядами непросто, удобно разбить ρ на две части. Обозначим снова через ρпол заряды, появляющиеся за счет неоднородной поляризации, а остальную часть назовем ρсвоб. Обычно ρсвоб означает заряд, сообщаемый проводникам или распределенный известным образом в про­странстве. В этом случае уравнение (10.17) приобретает вид

C:\1\pic\gray.jpg

C:\1\pic\gray.jpgили

(10.18)

Уравнение для ротора от *Е,* конечно, не меняется:

C:\1\pic\gray.jpg

(10.19)

C:\1\pic\gray.jpgПодставляя Р из уравнения (10.8), получаем более простое уравнение:

(10.20)

Это и есть уравнения электростатики в присутствии диэлектри­ков. Они, конечно, не дают ничего нового, но имеют вид, более удобный для расчетов в тех случаях, когда ρсвоб известно, а поляризация Р пропорциональна Е.

Заметьте, что мы не вытащили «константу» диэлектрической проницаемости *x* за знак дивергенции. Это потому, что она может не быть всюду одинаковой. Если она повсюду одинакова, то ее можно выделить в качестве множителя и уравнения станут в точности обычными уравнениями электростатики, где только ρсвоб нужно поделить на x. В написанной нами форме уравне­ния годятся в общем случае, когда в разных местах поля рас­положены разные диэлектрики. В таких случаях решить урав­нения иногда бывает очень трудно.

Здесь следует отметить один момент, имеющий историческое значение. На заре рождения электричества атомный механизм поляризации не был еще известен и о существовании ρпол не знали. Заряд ρсвоб считался равным всей плотности зарядов. Чтобы придать уравнениям Максвелла простой вид, вводили новый вектор D как линейную комбинацию Е и Р:

C:\1\pic\gray.jpg

(10.21)

В результате уравнения (10.18) и (10.19) записывались в очень простом виде:

C:\1\pic\gray.jpg

(10.22)

C:\1\pic\gray.jpgМожно ли их решить? Только когда задано третье уравне­ние, связывающее D и Е. Если справедливо уравнение (10.8), то эта связь есть

(10.23)

Последнее уравнение обычно записывается так:

C:\1\pic\gray.jpg

(10.24)

C:\1\pic\gray.jpgгде ε — еще одна постоянная, описывающая диэлектрические свойства материалов. Она также называется «проницаемостью». (Теперь вы понимаете, почему в наших уравнениях появилось ε0, это «проницаемость пустого пространства».) Очевидно.

(10.25)

Сейчас мы рассматриваем эти вещи уже с другой точки зрения, а именно что в вакууме всегда имеются самые простые уравнения, и если в каждом случае учесть все заряды, какова бы ни была причина их возникновения, то они всегда справед­ливы. Выделяя часть зарядов либо из соображений удобства, либо потому, что мы не хотим вникать в детали процесса, мы всегда можем при желании написать уравнения в любой удоб­ной для нас форме.

Сделаем еще одно замечание. Уравнение D = εЕ пред­ставляет собой попытку описать свойства вещества. Но веще­ство исключительно сложно по своей природе, и подобное уравнение на самом деле неправильно. Так, если Е становится очень большим, D перестает быть пропорциональным Е. В некоторых веществах пропорциональность нарушается уже при достаточно слабых полях. Кроме того, «константа» про­порциональности может зависеть от того, насколько быстро Е меняется со временем. Следовательно, уравнение такого типа есть нечто вроде приближенного уравнения типа закона Гука. Оно не может быть глубоким, фундаментальным уравнением. С другой стороны, наши основные уравнения для Е (10.17) и (10.19) выражают наиболее полное и глубокое понимание электростатики.

**§ 5. Поля и силы в присутствии диэлектриков**

Мы докажем сейчас ряд довольно общих теорем электроста­тики для тех случаев, когда имеются диэлектрики. Мы уже видели, что емкость плоского конденсатора при заполнении его диэлектриком увеличивается в определенное число раз. Сейчас можно показать, что это верно для емкости *любой* формы, если вся область вокруг двух проводников заполнена одно­родным линейным диэлектриком. В отсутствие диэлектрика уравнения, которые требуется решить, такие:

C:\1\pic\gray.jpgКогда имеется диэлектрик, первое из этих уравнений изменяет­ся, и мы получаем

(10.26)

Далее, поскольку мы считаем и всюду одинаковой, последние два уравнения можно записать в виде



(10.27)

Следовательно, для хЕ получаются такие же уравнения, как для Е0, и тогда они имеют решение хЕ = Е0. Другими сло­вами, поле всюду в х раз меньше, чем в отсутствие диэлектрика. Поскольку разность потенциалов есть линейный интеграл от поля, она уменьшится во столько же раз. А так как заряд на электродах конденсатора в обоих случаях тот же самый, то уравнение (10.2) говорит, что емкость в присутствии всюду однородного диэлектрика увеличивается в х раз.

C:\1\pic\gray.jpgЗададимся теперь вопросом, как взаимодействуют два за­ряженных проводника в диэлектрике. Рассмотрим жидкий диэлектрик, повсюду однородный. Мы уже видели раньше, что один из способов найти силу — это продифференцировать энер­гию по соответствующему расстоянию. Если заряды на про­водниках равны и противоположны по знаку, то энергия *U — QZ/2C,* где *С —* их емкость. С помощью принципа вир­туальной работы любая компонента силы получается некоторым дифференцированием; например,

(10.28)

Поскольку диэлектрик увеличивает емкость в х раз, все силы *уменьшатся* в такое же число раз.

Однако все это не так просто. Сказанное справедливо, только если диэлектрик жидкий. Любое перемещение провод­ников, окруженных твердым диэлектриком, изменяет условия механических напряжений в диэлектрике и его электрические свойства, а также несколько меняет механическую энергию диэлектрика. Движение проводников в жидкости не меняет свойств жидкости. Жидкость перетекает в другое место, но ее электрические свойства остаются неизменными.

Во многих старых книгах по электричеству изложение на­чинается с «основного» закона, по которому сила, действующая между двумя зарядами, есть

C:\1\pic\gray.jpg

(10.29)

а эта точка зрения абсолютно неприемлема. Во-первых, это не всегда верно; это справедливо только в мире, заполненном жидкостью; во-вторых, так получается лишь для постоянного значения х, что для большинства реальных материалов вы­полняется приближенно.

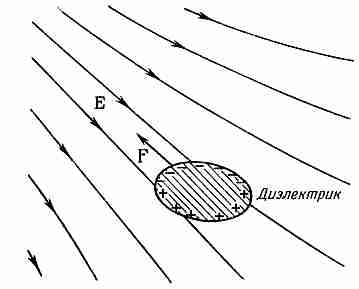
Гораздо легче начинать со всегда справедливого (для непод­вижных зарядов) закона Кулона для зарядов в *вакууме.*

Что же происходит с зарядами в твердом теле? На это трудно ответить, потому что даже не вполне ясно, о чем идет речь. Если вы вносите заряды внутрь твердого диэлек­трика, то возникают всякого рода давления и напряжения. Вы не можете считать работу виртуальной, не включив сюда также механическую энергию, необходимую для сжатия тела, а отличить однозначным образом электрические силы от механических, возникающих за счет самого материала, вообще говоря, очень трудно. К счастью, никому на самом деле не бывает нужно знать ответ на предложенный вопрос. Иногда нужно знать величину натяжений, которые могут возникнуть в твердом теле, а это можно вычислить. Но результаты здесь оказываются гораздо сложнее, чем простой ответ, полученный нами для жидкостей.

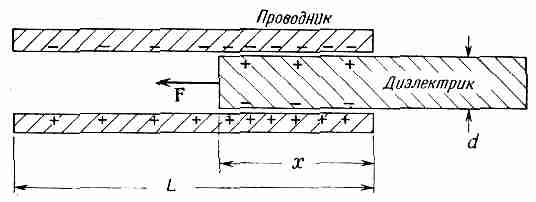
Неожиданно сложной оказывается следующая проблема в теории диэлектриков: почему заряженное тело подбирает ма­ленькие кусочки диэлектрика? Если вы в сухой день причесы­ваетесь, то ваша расческа потом легко будет подбирать маленькие кусочки бумаги. Если вы не вдумались в этот вопрос, то, вероятно, сочтете, что на расческе заряды одного знака, а на бумаге противоположного. Но бумага ведь была сначала элект­рически нейтральной. У нее нет суммарного заряда, а она все же притягивается. Правда, иногда бумажки подскакивают к расческе, а затем отлетают, сразу же отталкиваясь от нее. Причина, конечно, заключается в том, что, коснувшись рас­чески, бумага сняла с нее немного отрицательных зарядов, а одноименные заряды отталкиваются. Но это все еще не дает ответа на первоначальный вопрос. Прежде всего, почему бу­мажки вообще притягиваются к расческе?

Ответ заключается в поляризации диэлектрика, помещен­ного в электрическое поле. Возникают поляризационные заряды обоих знаков, притягиваемые и отталкиваемые расческой. Однако в результате получается притяжение, потому что поле поблизости от расчески сильнее, чем вдали от нее, ведь расческа не бесконечна. Ее заряд локализован. Нейтральный кусочек бумаги не притянется ни к одной из параллельных пластин конденсатора. Изменение поля составляет существенную часть механизма притяжения.

Как показано на фиг. 10.8, диэлектрик всегда стремится из области слабого поля в область, где поле сильнее. В дей­ствительности можно показать, что сила, действующая на малые объекты, пропорциональна градиенту *квадрата* элект­рического поля. Почему она зависит от квадрата поля? Потому что индуцированные поляризационные заряды пропорциональ­ны полям, а для данных зарядов силы пропорциональны полю. Однако, как мы уже указывали, *результирующая* сила возни­кает, только если квадрат поля меняется от точки к точке. Следовательно, сила пропорциональна градиенту квадрата поля. Константа пропорциональности включает помимо всего прочего еще диэлектрическую проницаемость данного тела и зависит также от размеров и формы тела.



*Фиг. 10.8, На диэлектрик в неоднородном поле действует сила, направленная в сторону областей с большей напряжен­ностью поля.*



*Фиг. 10.9. Сила, действующая на диэлектрик в пло­ском конденсаторе, может быть вычислена с помощью закона сохранения энергии.*

C:\1\pic\gray.jpgЕсть еще одна близкая задача, в которой сила, действующая на диэлектрик, может быть найдена точно. Если мы возьмем плоский конденсатор, в котором плитка диэлектрика задвинута лишь частично (фиг. 10.9), то возникнет сила, вдвигающая диэлектрик внутрь. Провести детальное исследование силы очень трудно; оно связано с неоднородностями поля вблизи концов диэлектрика и пластин. Однако если мы не интересуемся деталями, а просто используем закон сохранения энергии, то силу легко вычислить. Мы можем определить силу с помощью ранее выведенной формулы. Уравнение (10.28) эквивалентно

(10.30)

Нам осталось только найти, как меняется емкость в зависи­мости от положения плитки диэлектрика.

Пусть полная длина пластин есть L, ширина их равна *W,* расстояние между пластинами и толщина диэлектрика равна *d,* а расстояние, на которое вдвинут диэлектрик, есть *х.* Емкость есть отношение полного свободного заряда на пластинах к разности потенциалов между пластинами. Выше мы видели, что при данном потенциале *V* поверхностная плотность сво­бодных зарядов равна C:\1\pic\gray.jpgxε0V/d. Следовательно, полный заряд пластин равен

C:\1\pic\gray.jpgоткуда мы находим емкость

(10.31)

C:\1\pic\gray.jpgС помощью (10.30) получаем

(10.32)

Но пользы от этого выражения не очень много, разве только вам понадобится определить силу именно в таких условиях. Мы хотели лишь показать, что можно подчас избежать страш­ных осложнений при определении сил, действующих на ди­электрики, если пользоваться энергией, как это было в настоя­щем случае.

В нашем изложении теории диэлектриков мы имели дело только с электрическими явлениями, принимая как факт, что поляризация вещества пропорциональна электрическому полю. Почему возникает такая пропорциональность — вопрос, пред­ставляющий, пожалуй, еще больший интерес для физики. Стоит нам понять механизм возникновения диэлектрической проницаемости с атомной точки зрения, как мы сможем исполь­зовать измерения диэлектрической проницаемости в изменяю­щихся условиях для получения подробных сведений о строении атомов и молекул. Эти вопросы будут частично изложены в следующей главе.

***Глава 11***

**ВНУТРЕННЕЕ УСТРОЙСТВО ДИЭЛЕКТРИКОВ**

[**§1. Молекулярные** **диполи**](#a1)

[**§2. Электронна****я поляризация**](#a2)

[**§3. Полярные м****олекулы; ориентационная поляризация**](#a3)

[**§4. Электрические по****ля в пустотах диэлектрика**](#a4)

**[§5. Диэлектрич](#a5)****[еская проницаемость жидкостей; формула Клаузиуса — Моссотти](#a5)**

[**§6. Твер****дые диэлектрики**](#a6)

[**§7. Сегнето****электричество; титанат бария**](#a7)

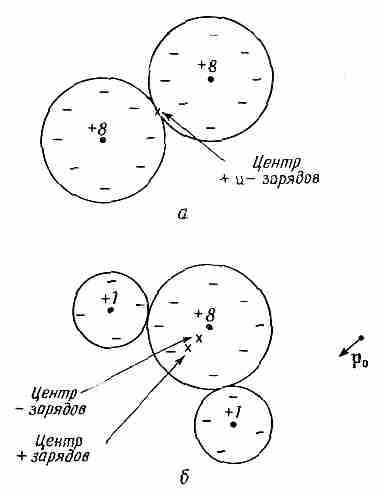
***Повторить:* гл. 3 (вып. 3) «Как возникает показатель преломления», гл. 40 (вып. 4) «Принципы статистической механики *»***

**§ 1. Молекулярные диполи**

C:\1\pic\gray.jpgВ этой главе мы поговорим о том, почему вещество бывает диэлектриком. В предыдущей главе мы указывали, что свойства электри­ческих систем с диэлектриками можно было бы понять, предположив, что электрическое поле, действуя на диэлектрик, индуцирует в атомах дипольный момент. Именно, если элект­рическое поле Е индуцирует средний диполь­ный момент в единице объема *Р,* то диэлектри­ческая проницаемость х дается выражением

(11.1)

О применениях этого выражения мы *уже* говорили; сейчас же нам нужно обсудить меха­низм возникновения поляризации внутри ма­териала под действием электрического поля. Начнем с самого простого примера — поляри­зации газов. Но даже в газах возникают слож­ности: существуют два типа газов. Молекулы некоторых газов, например кислорода, в каж­дой молекуле которого имеются два симметрич­ных атома, лишены собственного дипольного момента. Зато молекулы других газов, вроде водяного пара (у которого атомы водорода и кислорода образуют несимметричную молекулу), обладают постоянным электрическим дипольным моментом. Как мы отмечали в гл. 6 и 7, в молекуле водяного пара атомы водорода в среднем имеют положительный заряд, а атом кислорода — отрицательный. Поскольку цент­ры тяжести положительного и отрицательного зарядов не совпадают, то распределение всего заряда в молекуле обладает дипольным моментом.



*Фиг. 11.1. Молекула кислорода с нулевым дипольным моментом (а) и моле­кула воды* с *постоянным дипольным моментом* р0 *(б).*

Такая молекула называется *полярной* молекулой. А у кисло­рода вследствие симмет­рии молекулы центр тяжести и положитель­ных, и отрицательных зарядов один и тот же, так что это *неполярная* молекула. Она, правда,

может стать диполем, если ее поместить в электрическое поле. Формы этих двух типов молекул нарисованы на фиг. 11.1.

**§ 2. Электронная поляризация**

Займемся сначала поляризацией неполярных молекул. Начнем с простейшего случая одноатомного газа (например, гелия). Когда атом такого газа находится в электрическом поле, электроны его тянутся в одну сторону, а ядро — в другую, как показано на рис. 10.4 (стр. 200). Хотя атомы имеют очень боль­шую жесткость по отношению к электрическим силам, которые мы можем приложить к ним на опыте, центры зарядов чуть-чуть смещаются относительно друг друга и индуцируется дипольный момент. В слабых полях величина смещения, а следовательно, и дипольного момента пропорциональна напряженности элект­рического поля. Смещение электронного распределения, ко­торое приводит к этому типу индуцированного дипольного момента, называется *электронной поляризацией.*

Мы уже обсуждали воздействие электрического поля на атом в гл. 31 (вып. 3), когда занимались теорией показателя преломления. Подумав немного, вы сообразите, что теперь нужно сделать то же, что и тогда. Только теперь нас заботят поля, не меняющиеся со временем, тогда как показатель пре­ломления был связан с полями, зависящими от времени.

В гл. 31 (вып. 3) мы предполагали, что центр электронного заряда атома, помещенного в осциллирующее электрическое поле, подчиняется уравнению

C:\1\pic\gray.jpg

(11.2)

Первый член — это произведение массы электрона на его ускорение, а второй — возвращающая сила; справа стоит сила, действующая со стороны внешнего электрического поля. Если электрическое поле меняется с частотой ω, то уравнение (11.2)

C:\1\pic\gray.jpgдопускает решение

(11.3)

имеющее резонанс при ω=ω0. Когда раньше мы нашли это решение, то интерпретировали ω0 как частоту, при которой атом поглощает свет (она лежит либо в оптической, либо в ультрафиолетовой области, в зависимости от атома). Для нашей цели, однако, достаточно случая постоянных полей, т.е. ω=0; поэтому мы можем пренебречь членом с ускорением в (11.2) и получаем смещение

C:\1\pic\gray.jpg

(11.4)

C:\1\pic\gray.jpgОтсюда находим дипольный момент *р* одного атома

(11.5)

В таком подходе дипольный момент *р* действительно пропор­ционален электрическому полю. Обычно пишут

C:\1\pic\gray.jpg

(11.6)

(Снова ε0 вошло по историческим причинам.) Постоянная *α* называется *поляризуемостью* атома и имеет размерность L3. Это мера того, насколько легко индуцировать электрическим полем дипольный момент у атома. Сравнивая C:\1\pic\gray.jpg(11.5) и (11.6), получаем, что в нашей простой теории

(11.7)

C:\1\pic\gray.jpgЕсли в единице объема содержится *N* атомов, то поляри­зация (дипольный момент единицы объема) дается формулой

(11.8)

C:\1\pic\gray.jpgОбъединяя (11.1) и (11.8), получаем

(11.9)

или в силу (11.7)

C:\1\pic\gray.jpg

(11.10)

С помощью уравнения (11.9) можно предсказать, что ди­электрическая проницаемость х различных газов должна зависеть от плотности газа и от резонансной частоты ω0.

Наша формула, конечно, лишь очень грубое приближение, потому что в уравнении (11.2) мы воспользовались моделью, игнорирующей тонкости квантовой механики. Например, мы считали, что атом имеет только одну резонансную частоту, тогда как на самом деле их много. Чтобы по-настоящему вычислить поляризуемость атомов, нужно воспользоваться последовательной квантовомеханической теорией, однако и классический подход, изложенный выше, дает вполне разумную оценку.

Посмотрим, сможем ли мы получить правильный порядок величины диэлектрической проницаемости какого-нибудь ве­щества. Возьмем, к примеру, водород. Мы уже оценивали (вып. 4, гл. 38) энергию, необходимую для ионизации атома водорода, и получили приближенно

C:\1\pic\gray.jpg

(11.11)

Для оценки собственной частоты ω0 можно положить эту энер­гию равной ћω0— энергии атомного осциллятора с собственной частотой ω0. Получаем

C:\1\pic\gray.jpg

C:\1\pic\gray.jpgПользуясь этой величиной в уравнении (11.7), находим элек­тронную поляризуемость

(11.12)

Величина *(h2/mez)* есть радиус основной орбиты атома Бора (см. вып. 4, гл. 38), равный 0,528 А. При нормальном давлении и температуре (1 *атм,* 0°С) в газе на 1 *см3* приходится 2,69•1019 атомов, и уравнение (11.9) дает

χ= 1+ (2,69•1019) 16π (0,528•10-8)3 = 1,00020. (11.13) Измеренная на опыте диэлектрическая проницаемость равна

χэксп = 1,00026.

Видите, наша теория почти правильна. Лучшего нельзя было и ожидать, потому что измерения проводились, конечно, с обычным водородом, обладающим двухатомными молекулами, а не одиночными атомами. Не следует удивляться тому, что поляризация атомов в молекуле не совсем такая, как поляри­зация отдельных атомов. На самом деле молекулярный эффект не столь велик. Точное квантовомеханическое вычисление вели­чины *α* для атомов водорода дает результат, превышающий (11.12) примерно на 12% (вместо 16πполучается 18π), поэтому он предсказывает для диэлектрической проницаемости значе­ние, более близкое к наблюденному. Во всяком случае, со­вершенно очевидно, что наша модель диэлектрика вполне хороша.

Еще одна проверка нашей теории. Попробуем применить уравнение (11.12) к атомам с большей частотой возбуждения. Например, чтобы отобрать электрон у гелия, требуется 24,5 *в,* тогда как для ионизации водорода необходимы 13,5 *в.* Поэтому мы предположим, что частота поглощения ω0 для гелия должна быть примерно в два раза больше, чем для водорода, а α должна быть меньше в четыре раза. Мы ожидаем, что

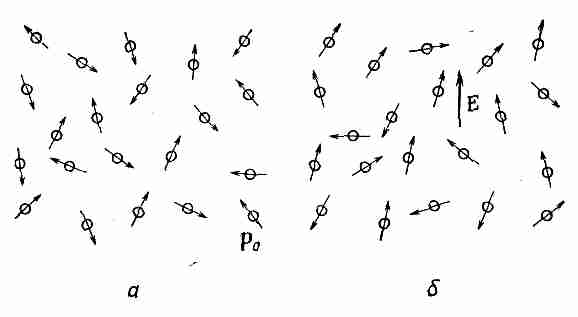
хгелнй≈1,000050, а экспериментально получено

xгелий**=**1,000068,

так что наши грубые оценки показывают, что мы на верном пути. Итак, мы поняли диэлектрическую проницаемость не­полярного газа, но только качественно, потому что пока мы еще не использовали правильную атомную теорию движения атомных электронов.

**§ 3. Полярные молекулы; ориентационная поляризация**

Теперь рассмотрим молекулу, обладающую постоянным дипольным моментом *р0 ,* например молекулу воды. В отсутст­вие электрического поля отдельные диполи смотрят в разных направлениях, так что суммарный момент в единице объема равен нулю. Но если приложить электрическое поле, то сразу же происходят две вещи: во-первых, индуцируется добавочный дипольный момент из-за сил, действующих на электроны; эта часть приводит к той же самой электронной поляризуемости, которую мы нашли для неполярной молекулы. При очень точ­ном исследовании этот эффект, конечно, нужно учитывать, но мы пока пренебрежем им. (Его всегда можно добавить в конце.) Во-вторых, электрическое поле стремится выстроить отдельные диполи, создавая результирующий момент в единице объема.



*Фиг. 11.2. В газе полярных молекул отдельные моменты ориен­тированы случайным образом, средний момент в небольшом объеме равен нулю* (а); *под действием электрического поля в среднем возникает некоторое выстраивание молекул (б).*

Если бы в газе выстроились все диполи, поляризация была бы очень большой, но этого не происходит. При обычных темпе­ратурах и напряженностях поля столкновения молекул при их тепловом движении не позволяют им как следует выстроить­ся. Но некоторое выстраивание все же происходит, а отсюда и небольшая поляризация (фиг. 11.2). Возникающая поляри­зация может быть подсчитана методами статистической меха­ники, описанными в гл. 40 (вып. 4).

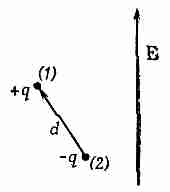
C:\1\pic\gray.jpgЧтобы использовать этот метод, нужно знать энергию диполя в электрическом поле. Рассмотрим диполь с моментом р0 в электрическом поле (фиг. 11.3). Энергия положительного за­ряда равна qϕ (1), а энергия отрицательного есть —qϕ(2). Отсюда получаем энергию диполя

C:\1\pic\gray.jpgили

(11.14)

где θ — угол между р0 и Е. Как и следовало ожидать, энергия становится меньше, когда диполи выстраиваются вдоль поля. Теперь с помощью методов статистической механики мы выясним, насколько сильно диполи выстраиваются. В гл. 40 (вып. 4) мы нашли, что в состоянии теплового равновесия относительное число молекул с потенциальной энергией *U* пропорционально

C:\1\pic\gray.jpg

(11.15)

*Фие. 11.3. Энергия диполя* р0 *в поле* Е *равна* —р0•Е.

где *U (х, у, z) —* потенциальная энергия как функция поло­жения. Оперируя теми же аргументами, можно сказать, что если потенциальная энергия как функция *угла* имеет вид (11.14), то число молекул под углом 0, приходящееся *на единичный телесный угол,* пропорционально ехр (— *U/kT).*

C:\1\pic\gray.jpgПолагая число молекул на единичный телесный угол, на­правленных под углом θ, равным n(θ), имеем

(11.16)

C:\1\pic\gray.jpgДля обычных температур и полей показатель экспоненты мал, и, разлагая экспоненту, можно воспользоваться прибли­женным выражением

(11.17)

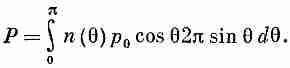
Найдем n *,* проинтегрировав (11.17) по всем углам; результат должен быть равен *N,* т.е. числу молекул в единице объема. Среднее значение cos θ при интегрировании по всем углам есть нуль, так что интеграл равен просто n0 *,* умноженному на полный телесный угол 4π. Получаем

C:\1\pic\gray.jpg

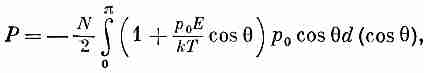
(11.18)

Из (11.17) видно, что вдоль поля (cosθ=1) будет ориен­тировано больше молекул, чем против поля (cosθ = -1). Поэтому в любом малом объеме, содержащем много молекул, возникнет суммарный дипольный момент на единицу объема, т.е. поляризация *Р.* Чтобы вычислить *Р,* нужно знать векторную сумму всех молекулярных моментов в единице объема. Мы зна­ем, что результат будет направлен вдоль Е, поэтому нужно только просуммировать компоненты в этом направлении (ком­поненты, перпендикулярные Е, при суммировании дадут нуль):

Мы можем оценить сумму, проинтегрировав по угловому распределению. Телесный угол, отвечающий θ, есть 2πsin θdθ; отсюда



(11.19)

Подставляя вместо n(θ) его выражение из (11.17), имеем

что легко интегрируется и приводит к следующему результату:

C:\1\pic\gray.jpg

(11.20)

Поляризация пропорциональна полю *Е,* поэтому диэлектри­ческие свойства будут обычные. Кроме того, как мы и ожидаем, поляризация обратно пропорциональна температуре, потому что при более высоких температурах столкновения больше разрушают выстроенность. Эта зависимость вида 1/*T* называется *законом Кюри.* Квадрат постоянного момента *р0* появляется по следующей причине: в данном электрическом поле выстраиваю­щая сила зависит от р0, а средний момент, возникающий при выстраивании, снова пропорционален *р0.* Средний индуцируе­мый момент пропорционален *р02*

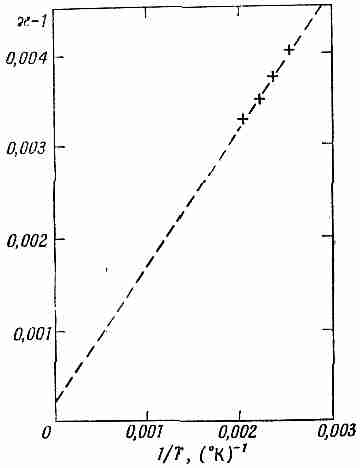
Теперь посмотрим, насколько хорошо уравнение (11.20) согласуется с экспериментом. Возьмем водяной пар. Поскольку мы не знаем, чему равно *р0 ,* то не можем прямо вычислить и *Р,* но уравнение (11.20) предсказывает, что *x-*1 должна ме­няться обратно пропорционально температуре, и это нам сле­дует проверить.

Из (11.20) получаем

C:\1\pic\gray.jpg

(11.21)

так что x-1 должна меняться прямо пропорционально плот­ности *N* и обратно пропорционально абсолютной температуре. Диэлектрическая проницаемость была измерена при несколь­ких значениях давления и температуры, выбранных таким об­разом, чтобы число молекул в единице объема [оставалось постоянным](#прим1). (Заметим, что, если бы все измерения выполнялись при постоянном давлении, число молекул в единице объема уменьшалось бы линейно с повышением температуры, а х-1 изменялась бы как T-2, а не как T-1.)



Фиг. 11.4. Измеренные значе­ния диэлектрической проницае­мости водяного пара при не­скольких температурах.

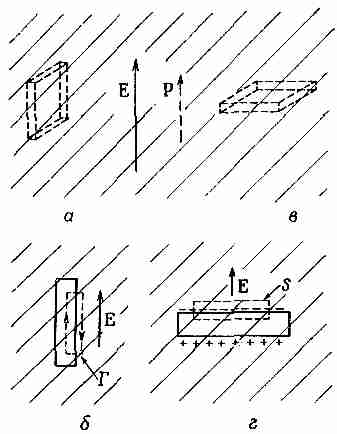
На фиг. 11.4 мы отложили измеренные значения *к —* 1 как функ­цию 1/T. Зависимость, предсказываемая форму­лой (11.21), выполняется хорошо.

Есть еще одна особен­ность диэлектрической проницаемости полярных молекул — ее изменение в зависимости от частоты внешнего поля. Благодаря тому что молекулы имеют момент инерции, тяжелым молекулам тре­буется определенное время, чтобы повернуться в направлении поля. Поэтому, если использовать частоты из верхней микро­волновой зоны или из еще более высокой, полярный вклад в диэлектрическую проницаемость начинает спадать, так как молекулы не успевают следовать за полем. В противополож­ность этому электронная поляризуемость все еще остается неизменной вплоть до оптических частот, поскольку инерция

электронов меньше.

**§ 4. Электрические поля в пустотах диэлектрика**

Теперь мы переходим к интересному, но сложному вопросу о диэлектрической проницаемости плотных веществ. Возьмем, например, жидкий гелий, или жидкий аргон, или еще какое-нибудь неполярное вещество. Мы по-прежнему ожидаем, что у них есть электронная поляризуемость. Но в плотных средах значение Р может быть велико, поэтому в поле, действующее на отдельный атом, вклад будет давать поляризация атомов, находящихся по соседству. Возникает вопрос, чему равно электрическое поле, действующее на отдельный атом?



Фиг. 11.5. Поле внутри щели, вырезанной в диэлектрике, за­висит от ее формы, и ориента­ции.

*Вообразите, что между пластинами конденсатора находится жидкость. Если пластины заряжены, они создадут в жидкости элек­трическое поле. Но каждый атом имеет заряды, и пол­ное поле Е есть сумма обоих этих вкладов. Это истинное электрическое поле в жидкости меняется очень-очень быстро от точки к точке. Оно чрезвычайно велико внутри атомов, особенно вблизи ядра, и сравнительно мало между атомами. Разность потенциалов между пластинами есть интеграл от этого полного поля. Если мы пренебрежем всеми быстрыми изменениями, то можем представить себе некое среднее электрическое поле Е, равное как раз V/d. (Именно это поле мы исполь­зовали в предыдущей главе.) Это поле мы должны себе пред­ставлять как среднее по пространству, содержащему много атомов.*

Вы можете подумать, что «средний» атом в «среднем» поло­жении почувствует именно это среднее поле. Но все не так просто, и в этом можно убедиться, представив, что в диэлект­рике имеются отверстия разной формы. Предположим, что мы вырезали в поляризованном диэлектрике щель, ориентирован­ную параллельно полю (фиг. 11.5, *а).* Поскольку мы знаем, что ∇XE = 0, то линейный интеграл от Е вдоль кривой Г, на­правленной так, как показано на фиг. 11.5, *б,* должен быть равен нулю. Поле внутри щели должно давать такой вклад, который в точности погасит вклад от поля вне щели. Поэтому поле E0 в центре длинной тонкой щели равно *Е,* т.е. среднему электрическому полю, найденному в диэлектрике.

Рассмотрим теперь другую щель, повернутую своей ши­рокой стороной перпендикулярно Е (фиг. 11.5, в). В этом случае поле e0 в щели не совпадает с Е, потому что на стенках щели возникают поляризационные заряды. Применив закон Гаусса к поверхности S, изображенной на фиг. 11.5, г, мы находим, что поле Ей внутри щели дается выражением

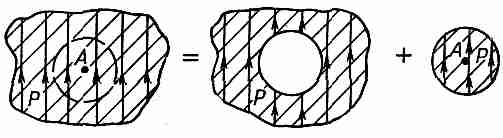
C:\1\pic\gray.jpg

(11.22)

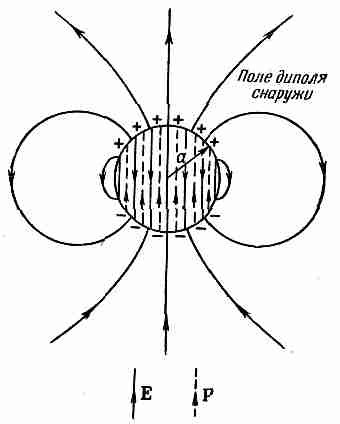
где *Е,* как и раньше,— электрическое поле в диэлектрике. (Гауссова поверхность охватывает поверхностный поляриза­ционный заряд σпол = *Р.)* Мы отмечали в гл. 10, что ε*0Е* + *Р* часто обозначают через *D,* поэтому ε0Е0 = D0равно величине *D* в диэлектрике.

В ранний период истории физики, когда считалось очень важным определять каждую величину прямым экспериментом, физики были очень довольны, обнаружив, что они могут опре­делить то, что понимают под *Е* и *D* в диэлектрике, не ползая в промежутках между атомами. Среднее поле Е численно равно полю Е0, измеренному в щели, параллельной полю. А поле D могло быть измерено с помощью *Е0,* найденной в щели, перпен­дикулярной полю. Но никто эти поля никогда не измерял (таким способом, во всяком случае), так что это одна из многих бесплодных проблем.

В большинстве жидкостей, не слишком сложных по своему строению, каждый атом в среднем так окружен другими ато­мами, что можно с хорошей точностью считать его находящимся в сферической полости. И тогда мы спросим: «Чему равно поле в сферической полости?» Мы замечаем, что вырезание сфери­ческой дырки в однородном поляризованном диэлектрике равно­сильно отбрасыванию шарика из поляризованного материала, так что мы можем ответить на этот вопрос. (Мы должны пред­ставить себе, что поляризация была «заморожена» до того, как мы вырезали дырку.) Однако в силу принципа суперпозиции поле внутри диэлектрика, до того как оттуда был вынут шарик, есть сумма полей от всех зарядов вне объема шарика плюс полей от зарядов внутри поляризованного шарика.



Фиг. 11.6. Поле в любой точке А диэлектрика можно представить в виде суммы поля сферической дырки и поля сферического вкладыша.



Фиг. 11.7. Электрическое поле однородно поляризо­ванного шарика.

### Следова­тельно, если поле внутри однородного диэлектрика мы назовем Е, то можно записать

E=Eдырка+Eшарнк,

(11.23)

где Eдырка — поле в дырке, а Eшарик — по­ле в однородно поля­ризованном шарике (фиг. 11.6). Поле одно­родно поляризованного шарика показано на фиг. 11.7. Электрическое поле внутри шарика однородно и равно

C:\1\pic\gray.jpg

(11.24)

*С помощью (11.23) получаем*

C:\1\pic\gray.jpg

(11.25)

Поле в сферической полости больше среднего поляна величину Р/Зε0. (Сферическая дырка дает поле, находящееся на 1/3 пути от поля параллельной щели к полю перпендикулярной щели.)

**§ 5. Диэлектрическая проницаемость жидкостей; формула Клаузиуса — Моссотти**

В жидкости мы ожидаем, что поле, поляризующее отдель­ный атом, скорее похоже на Едырка, чем просто на Е. Если взять Eдырка из (11.25) в качестве поляризующего поля, вхо­дящего в (11.6), то уравнение (11.8) приобретет вид

C:\1\pic\gray.jpg

(11.26)

C:\1\pic\gray.jpg*или*

(11.27)

C:\1\pic\gray.jpgВспоминая, что х-1 как раз равна *Р/*ε*0Е,* получаем

(11.28)

что определяет диэлектрическую проницаемость жидкости и через атомную поляризуемость α*.* Это *формула Клаузиуса — Моссотти.*

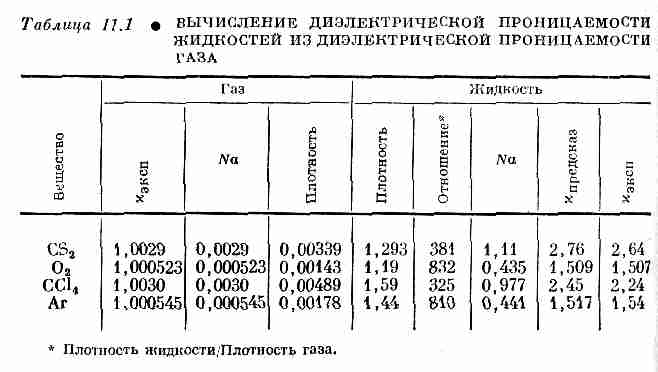
*Если Nα очень мало, как, например, для газа (потому что там мала плотность N), то членом Nα/3 можно пренебречь по сравнению с 1, и мы получаем наш старый результат — уравне­ние (11.9), т.е.*

C:\1\pic\gray.jpg

(11.29)

Давайте сравним уравнение (11.28) с некоторыми экспери­ментальными данными. Сначала стоит обратиться к газам, для которых из измерений *x* можно с помощью уравнения (11.29) найти значение а. Так, для дисульфида углерода при нулевой температуре по Цельсию диэлектрическая проницаемость равна 1,0029, так что *N*α= 0,0029. Плотность газа легко вычислить, а плотность жидкостей можно найти в справочниках. При 20°C плотность жидкого CS2 в 381 раз выше плотности газа при 0°С, Это значит, что *N* в 381 раз больше в жидкости, чем в газе, а отсюда (если сделать допущение, что исходная атомная поля­ризуемость дисульфида углерода не меняется при его конден­сации в жидкое состояние) *N*αв жидкости в 381 раз больше 0,0029, или равно 1,11. Заметьте, что *N*α*/З* составляет почти 0,4. С помощью этих чисел мы предсказываем, что величина диэлектрической проницаемости равна 2,76, что достаточно хорошо согласуется с наблюденным значением 2,64.

В табл. 11.1 мы приводим ряд экспериментальных данных по разным веществам, а также значения диэлектрической проницаемости, вычисленной, как только что было описано, no формуле (11.28).



Согласие между опытом и теорией для аргона и кислорода даже лучше, чем для CS2, и не столь хорошее для четыреххлористого углерода. В целом результаты показывают, что уравнение (11.28) работает с хорошей точностью.

Наш вывод уравнения (11.28) справедлив только для *элек­тронной* поляризации в жидкостях. Для полярных молекул вроде Н2O он неверен. Если провести такие же вычисления для воды, то для *Nα.* получим значение 13,2, что означает, что диэлектрическая проницаемость этой жидкости *отрицательна,* тогда как опытное значение *x* равно 80. Дело здесь связано с неправильной трактовкой постоянных диполей, и Онзагер указал правильный способ решения. Мы не можем сейчас останавливаться на этом вопросе, но если он вас интересует, то подробно это обсуждается в книге Киттеля «Введение в фи­зику твердого [тела».](#прим2)

**§ 6. Твердые диэлектрики**

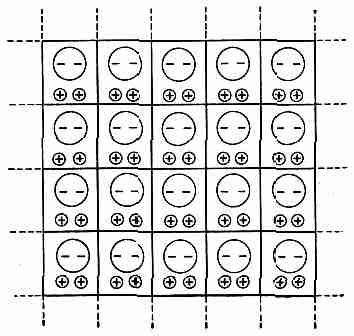
Обратимся теперь к твердым телам. Первый интересный факт относительно твердых тел заключается в том, что у них бывает постоянная поляризация, которая существует даже и без приложения внешнего электрического поля. Примеры можно найти у веществ типа воска, который содержит длинные молекулы с постоянным дипольным моментом. Если растопить немного воску и, пока он еще не затвердел, наложить на него сильное электрическое поле, чтобы дипольные моменты частично выстроились, то они останутся в таком положении и после того, как воск затвердеет. Твердое вещество будет обладать постоянной поляризацией, которая остается и в отсутствие поля. Такое вещество называется *электретом.*

На поверхности электрета расположены постоянные поляри­зационные заряды. Электрет представляет собой электрический аналог магнита, однако пользы от него гораздо меньше, потому что свободные заряды воздуха притягиваются к его поверхности и в конце концов нейтрализуют поляризационные заряды. Электрет «разряжается» и заметного внешнего поля не со­здает.

Постоянная внутренняя поляризация *Р* встречается и у не­которых кристаллических веществ. В таких кристаллах каждая элементарная ячейка решетки обладает одним и тем же постоян­ным дипольным моментом (фиг. 11.8). Все диполи направлены в одну сторону даже в отсутствие электрического поля. Многие сложные кристаллы обладают такой поляризацией; обычно мы этого не замечаем, потому что создаваемое ими внешнее поле, как и у электретов, разряжается.

Если, однако, внутренние диполъные моменты кристалла меняются, то внешнее поле становится заметным, потому что блуждающие заряды не успевают собраться и нейтрализовать поляризационные заряды. Если диэлектрик находится в кон­денсаторе, свободные заряды индуцируются на электродах. Моменты могут, например, измениться вследствие теплового расширения, если нагреть диэлектрик. Такой эффект называется *пироэлектричеством.* Аналогично, если менять напряжения в кристалле, скажем, сгибая его, то момент может снова немного измениться, и тогда обнаружится слабый электрический эффект, называемый *пьезоэлектричеством.*

Для кристаллов, не обладающих постоянным моментом, можно развить теорию диэлектрической проницаемости, куда включается электронная поляризуемость атомов. Делается это почти так же, как для жидкостей. Некоторые кристаллы имеют внутренние моменты, и вращение их также вносит вклад в x. В ионных кристаллах, таких, как NaCl, возникает также ионная поляризуемость. Кристалл состоит из положительных и отрицательных ионов, расположенных в шахматном порядке, и в электрическом поле положительные ионы тянутся в одну сторону, а отрицательные — в другую; возникает результи­рующее смещение положительных и отрицательных зарядов, а следовательно, и объемная поляризация. Мы могли бы оце­нить величину ионной поляризуемости, зная жесткость кри­сталлов соли, но мы не будем сейчас останавливаться на этом вопросе.



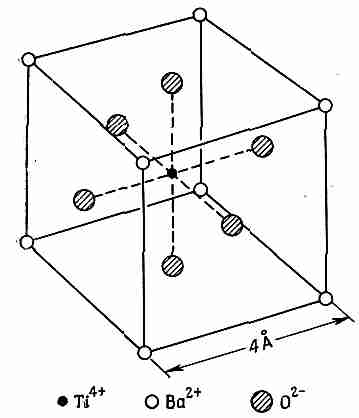
Фиг. 11.8. Сложная кристаллическая решетка может иметь постоянную внутреннюю поля­ризацию Р.

**§ 7. Сегиетоэлектричество; титанат бария**

Мы опишем здесь особый класс кристаллов, которые, можно сказать, почти случайно обладают «встроенным» постоянным электрическим моментом. Ситуация здесь настолько критична, что, если слегка увеличить температуру выше некоторой, кри­сталл этого класса совсем потеряет постоянный момент. С дру­гой стороны, если структура кристалла близка к кубической, так что электрические моменты могут располагаться в разных направлениях, можно обнаружить большие изменения полного момента при изменении приложенного электрического поля. Все моменты перевертываются в направлении поля, и мы полу­чаем большой эффект. Вещества, обладающие такого рода постоянным моментом, называются [сегнетоэлектриками.](#прим3) Мы хотели бы объяснить механизм сегнетоэлектричества на частном примере какого-нибудь сегнетоэлектрического ма­териала. Сегнетоэлектрические свойства могут возникать нес­колькими путями; однако мы разберем только один из них на примере таинственного титаната бария (BaТiO3). Это вещество обладает кристаллической решеткой, основная ячейка кото­рого изображена на фиг. 11.9. Оказывается, что выше некоторой температуры (а именно 118°С) титанат бария — обычный ди­электрик с огромной диэлектрической проницаемостью, а ниже этой температуры он неожиданно приобретает постоянный момент.

При вычислении поляризации твердых тел мы должны сна­чала найти локальные поля в каждой элементарной ячейке. Причем для этого нужно ввести поля самой поляризации, как это делалось в случае жидкости. Но кристалл — не однородная жидкость, так что мы не можем взять в качестве локального поля то, что мы нашли в сферической дыре. Если мы сделаем это для кристалла, то окажется, что множитель 1/3 в уравнении (11.24) слегка изменится, но ненамного. (Для простого куби­ческого кристалла он равен в точности 1/3.) Поэтому предпо­ложим в нашем предварительном обсуждении, что этот множитель для BaTi03 действительно равен 1/3.

Далее, когда мы писали уравнение (11.28), вам, наверное, было интересно знать, что случится, если Nαстанет больше 3. На первый взгляд величина *x* должна бы стать отрицательной. Но такого наверняка не может быть. Посмотрим, что произойдет, если в каком-нибудь определенном кристалле постепенно увеличивать значение α.



*Фиг. 11.9. Элементарная ячей­ка ВаТiO3.*

Атомы в действительности запол­няют большую часть пространства; показаны только положения их центров.

*По мере роста* α *растет и поляризация, создавая большее локаль­ное поле. Но увеличившее­ся локальное поле заполяризует атом еще больше, дополнительно усиливая само локальное поле. Если атомы достаточно «податливы», про­цесс продолжается; возникает своего рода обратная связь, приводящая к безудержному росту поляризации (если пред­положить, что поляризация каждого атома увеличивается пропорционально полю). Условие «разгона» возникает при Nα = 3. Поляризация, конечно, не обращается в бесконечность, потому что при сильных полях пропорциональность между индуцированным моментом и электрическим полем нарушается, так что наши формулы становятся неправильными. А полу­чается то, что в решетку, оказывается, «встроена» большая внутренняя самопроизвольная поляризация.*

В случае ВаТiO3 вдобавок к электронной поляризации имеется довольно большая ионная поляризация, обусловлен­ная, как предполагают, ионами титана, которые могут слегка сдвигаться внутри кубической решетки. Решетка сопротив­ляется большим смещениям, так что ион титана, переместив­шись на небольшое расстояние, затормаживается и останавли­вается. Но тогда у кристаллической решетки образуется по­стоянный дипольный момент.

*У большинства сегнетоэлектрических кристаллов такая ситуация действительно возникает при всех достижимых тем­пературах. Однако титанат бария представляет особый интерес: он так деликатно устроен, что при малейшем уменьшении Nα момент «высвобождается». Поскольку N с повышением температуры уменьшается (вследствие теплового расширения), то можно изменять Nα, меняя температуру. Ниже критической температуры момент сразу образуется, и тогда, накладывая внешнее поле, поляризацию легко повернуть и закрепить в нужном направлении.*

C:\1\pic\gray.jpgПопробуем разобраться в происходящем более подробно. Назовем критической температуру Тс, при которой Nα равно в точности 3. При увеличении температуры значение N немного уменьшается вследствие расширения решетки. Поскольку рас­ширение мало, мы можем сказать, что вблизи критической температуры

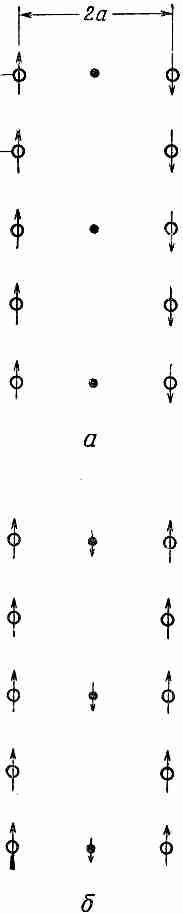
(11.30)

C:\1\pic\gray.jpg*где β — малая константа, того же порядка величины, что и коэф­фициент теплового расширения, т. е. около 10-5—10-6град-1. Подставляя это в выражение (11.28), получаем*

C:\1\pic\gray.jpgПоскольку мы считаем величину β (Т -Тс) малой по сравне­нию с единицей,можно записать приближенно

(11.31)

Это, конечно, справедливо только для Т>Тс. Мы видим, что если температура чуть выше критической, то величина х огромна. Из-за того, что Nα так близко к 3, возникает гро­мадный эффект усиления и диэлектрическая проницаемость легко достигает величины от 50 000 до 100 000. Она тоже весьма чувствительна к температуре. При увеличении температуры диэлектрическая проницаемость уменьшается обратно про­порционально температуре, но в отличие от дипольного газа, где разность x-1 обратно пропорциональна абсолютной температуре, у сегнетоэлектриков она меняется обратно пропор­ционально разности между абсолютной и критической темпе­ратурами (этот закон называется законом Кюри — Вейсса).

Что получается, когда мы понижаем температуру до кри­тического значения? Если кристаллическая решетка состоит из элементарных ячеек вида, изображенного на фиг. 11.9, то, очевидно, можно выбрать цепочки ионов вдоль вертикальных линий. Одна из них состоит попеременно из ионов кислорода и титана. Имеются и другие цепочки, состоящие либо из ионов бария, либо из ионов кислорода, но расстояния между ионами вдоль таких линий оказываются больше. Используем простую модель, вообразив ряд ионных цепочек (фиг. 11.10, а). Вдоль цепочки, которую мы назовем главной, расстояние между ионами равно а, что составляет половину постоянной решетки; поперечное расстояние между одинако­выми цепочками равно 2а.

*Фиг. 11.10. Модели сегнетоалектрика.*

а — антисегнетоэлектрик; б — нормальный сегнетовлектрик.

В промежут­ке имеются менее плотные цепочки, которые мы пока не будем рассматри­вать. Чтобы немного упростить наш анализ, предположим еще, что все ионы главной цепочки одинаковы. (Упроще­ние не очень значительное, потому что все важные эффекты еще останутся. Это просто одна из хитростей теорети­ческой физики. Сначала решают видо­измененную задачу, потому что так в первый раз ее легче понять, а затем, разобравшись, как все происходит, вносят все усложнения.)

Попробуем теперь выяснить, что будет происходить в нашей модели. Предположим, что дипольный момент каждого иона равен р, и пусть мы хотим вычислить поле вблизи одного из ионов в цепочке. Мы должны найти сумму полей от всех остальных ионов. Сначала вычислим поле от диполей только в одной вертикальной цепочке; об остальных цепочках поговорим поз­же. Поле на расстоянии r от диполя в направлении вдоль его оси дается формулой

C:\1\pic\gray.jpg

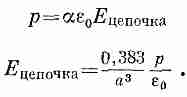
(11.32)

Для точки вблизи любого иона про­чие диполи, расположенные на одина­ковом расстоянии кверху и книзу от него, дают поля в одном и том же на­правлении, поэтому для всей цепочки получаем

C:\1\pic\gray.jpg

(11.33)

*Не представляет большого труда пока­зать, что если бы наша модель была подобна кубическому кристаллу, т. е. если бы следующая идентичная линия проходила на расстоянии а, число 0,383 превратилось бы в 1/3 (~0,333). Другими словами, если бы соседние линии проходили на расстоянии а, они вносили бы в нашу сумму всего лишь —0,050. Однако следующая глав­ная цепочка, которую мы рассмотрим, находится на расстоянии 2а, и, как вы помните из гл. 7, поле, создаваемое периодической структурой, спадает с расстоянием экспоненциально. Поэтому эти линии вносят в сумму гораздо меньше —0,050, и мы можем просто пренебречь всеми остальными цепочками.*

Теперь нужно выяснить, какова должна быть поляризуе­мость а, чтобы привести в действие механизм разгона. Предпо­ложим, что индуцированный момент р каждого атома цепочки в соответствии с уравнением (11.6) пропорционален действую­щему на него полю. Поляризующее поле, действующее на атом, мы получаем из Eцепочка с помощью формулы (11.32). Итак, мы имеем два уравнения:

*Имеются два решения: когда Е и р оба равны нулю и когда Е и р не равны нулю, но при условии, что*

C:\1\pic\gray.jpg

Таким образом, если α достигает величины α3/0,383, устанавли­вается постоянная поляризация, поддерживаемая своим соб­ственным полем. Это критическое равенство должно достигать­ся для титаната бария как раз при температуре Тс. (Заметьте, что если бы поляризуемость α была больше критического зна­чения для слабых полей, то она уменьшится при больших полях и в точке равновесия установится полученное нами ра­венство.)

Для ВаТiO3 промежуток α равен 2*•*10-8 см, поэтому мы должны ожидать значения α=21,8*•*10-24 см3. Мы можем сравнить эту величину с известными величинами поляризуе­мости отдельных атомов. Для кислорода α = 30,2*•*10-24 см3. (Мы на верном пути!) Но для титана α = 2,4*•*10-24см3. (Слиш­ком мало.) В нашей модели нам, видимо, следует взять среднее. (Мы могли бы рассчитать снова цепочку для перемежающихся атомов, но результат был бы почти такой же.) Итак, αсредн = 16,3*•*10-24 см3, что недостаточно велико для установ­ления постоянной поляризации.

*Но подождите! Мы ведь до сих пор складывали только электронные поляризуемости. А есть еще и ионная поляриза­ция, возникающая из-за смещения иона титана. Однако по­требуется ионная поляризуемость величиной 9,2•10-24 см3.*

(Более точное вычисление с учетом перемежающихся атомов показывает, что на самом деле требуется даже 11,9•10-24см3.) Чтобы понять свойства ВаТiO3, мы должны предположить, что возникает именно такая ионная поляризуемость.

Почему ион титана в титанате бария имеет столь большую ионную поляризуемость, неизвестно. Более того, непонятно, почему при меньших температурах он поляризуется одинаково хорошо и в направлении диагонали куба и в направлении диаго­нали грани. Если мы вычислим действительные размеры ша­риков на фиг. 11.9 и попробуем найти, достаточно ли свободно титан держится в коробке, образованной соседними атомами кислорода (а этого хотелось бы, потому что тогда его было бы легко сдвинуть), то получится совсем противоположный ответ. Он сидит очень плотно. Атомы *бария* держатся намного сво­боднее, но если считать, что это они движутся, то ничего не получится. Так что, как видите, вопрос совсем не ясен; остаются еще загадки, которые очень хотелось бы разгадать.

Возвращаясь к нашей простой модели (см. фиг. 11.10, *а),* мы видим, что поле от одной цепочки будет вызывать поляриза­цию соседней цепочки в *противоположном* направлении. Это значит, что, хотя каждая цепочка будет заморожена, постоян­ная поляризация в единице объема будет равна нулю! (Внешние электрические проявления тут не возникли бы, но можно было бы наблюдать определенные термодинамические эффекты.) Такие системы существуют и называются они *антисегнетоэлектриками.* Поэтому наше объяснение фактически относилось к антисегнетоэлектрикам. Однако в действительности титанат бария устроен очень похоже на то, что изображено на фиг. 11.10, б. Все кислородо-титановые цепочки поляризованы в одном направлении, потому что между ними помещаются проме­жуточные цепочки атомов. Хотя атомы в этих цепочках поляри­зованы не очень сильно и не очень тесно расположены, они все-таки будут немного поляризованы в направлении, антипараллельном кислородо-титановым цепочкам. Небольшие по­ля, создаваемые у следующей кислородо-титановой цепочки, заставят ее поляризоваться параллельно первой. Поэтому ВаТiO3 на самом деле сегнетоэлектрик, и произошло это бла­годаря атомам, находящимся в промежутке. Вы можете спро­сить: «А что же получается с прямым взаимодействием между двумя цепочками О — Ti?» Вспомним, однако, что прямое взаи­модействие убывает с расстоянием экспоненциально; действие цепочки из *сильных* диполей на расстоянии *2а* может быть мень­ше действия цепочки слабых диполей на расстоянии *а.*

На этом мы закончим довольно подробное изложение наших сегодняшних познаний о диэлектрических свойствах газов, жидкостей и твердых тел.

***\* Sānger, Steiger, Gachter, Helvetica Physica Acta, 5, 200 (1932).***

* ***Имеется перевод: Ч. Киттель, «Введение в физику твердого те­ла», М., 1962.— Прим. ред.***

***\*По-английски сегнетоэлектричество называется ferroelectricity (ферроэлектричество); этот термин возник по аналогии с ферромагне******тизмом: наличие спонтанного момента (электрического в сегнетоэлектриках, магнитного в ферромагнетиках), точки Кюри, гистерезиса и т. п. Однако физическая природа этих групп явлений совершенно различ­на.— Прим. ред.***

***Глава 12***

# ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИЕ АНАЛОГИИ

[**§1. Одинаковые уравнения— о****динаковые решения**](#а1)

**[§2.Поток тепла; точечны](#а2)****[й источ­ник вблизи бесконечной плоской границы](#а2)**

**[§3. Натяну](#а3)****[тая мембрана](#а3)**

**[§4. Диффузия](#а4)** **[нейтронов; сфе­рически-симмет­ричный источник в однородной среде](#а4)**

**[§5. Безвихревое течени](#а5)****[е жидкости; обтекание шара](#а5)**

**[§6. Освещение](#а6)****[; равномерное осве­щение плоскости](#а6)**

**[§7. «Фундаменталь­](#а7)****[ное единство» природы](#а7)**

**§ 1. Одинаковые уравнения — одинаковые решения**

Вся информация о физическом мире, при­обретенная со времени зарождения научного прогресса, поистине огромна, и кажется почти невероятным, чтобы кто-то овладел заметной частью ее. Но фактически физик вполне может постичь общие свойства физического мира, не становясь специалистом в какой-то узкой об­ласти. Тому есть три причины. *Первая.* Суще­ствуют великие принципы, применимые к лю­бым явлениям, такие, как закон сохранения энергии и момента количества движения. Глу­бокое понимание этих принципов позволяет сразу постичь очень многие вещи. *Вторая.* Оказывается, что многие сложные явления, как, например, сжатие твердых тел, в основном обусловливаются электрическими и квантовомеханическими силами, так что, поняв основ­ные законы электричества и квантовой меха­ники, имеется возможность понять многие явления, возникающие в сложных условиях. *Третья.* Имеется замечательнейшее совпадение: *Уравнения для самых разных физических усло­вий часто имеют в точности одинаковый вид.* Использованные символы, конечно, могут быть разными — вместо одной буквы стоит другая, но математическая форма уравнений одна и та же. Это значит, что, изучив одну область, мы сразу получаем множество прямых и точных сведений о решениях уравнений для другой области.

C:\1\pic\gray.jpgМы закончили электростатику и скоро пе­рейдем к изучению магнетизма и электродина­мики. Но прежде хотелось бы показать, что, изучив электростатику, мы одновременно узна­ли о многих других явлениях. Мы увидим, что уравнения электростатики фигурируют и в ряде других областей физики. Путем прямого переноса решений (одинаковые матема­тические уравнения должны, конечно, иметь одинаковые ре­шения) можно решать задачи из других областей с той же легкостью (или с таким же трудом), как и в электростатике. Уравнения электростатики, как мы знаем, такие:

(12.1)

C:\1\pic\gray.jpg

(12.2}

(Мы пишем уравнения электростатики в присутствии диэлект­риков, чтобы учесть общий случай.) То же физическое содер­жание может быть выражено в другой математической форме:

C:\1\pic\gray.jpg

C:\1\pic\gray.jpg(12.3)

(12.4)

И вот суть дела заключается в том, что существует множество физических проблем, для которых математические уравнения имеют точно такой же вид. Сюда входит потенциал (ϕ), градиент которого, умноженный на скалярную функцию *(x),* имеет ди­вергенцию, равную другой скалярной функции (-ρ/ε0).

Все, что нам известно из электростатики, можно немедленно перенести на другой объект, и наоборот. (Принцип, конечно, работает в обе стороны: если известны какие-то характеристики другого объекта, то можно использовать эти сведения в соот­ветствующей задаче по электростатике.) Мы рассмотрим ряд примеров из разных областей, когда имеются уравнения такого вида.

**§ 2. Поток тепла; точечный источник вблизи бесконечной плоской границы**

Ранее мы уже обсуждали (гл. 3, § 4) поток тепла. Вообразите кусок какого-то материала, необязательно однородного (в раз­ных местах может быть разное вещество), в котором темпера­тура меняется от точки к точке. Как следствие этих температур­ных изменений возникает поток тепла, который можно обозна­чить вектором h. Он представляет собой количество тепловой энергии, которое проходит в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную потоку. Дивергенция h есть скорость ухода тепла из данного места в расчете на единицу объема:

∇•h = Скорость ухода тепла на единицу объема.

(Мы могли, конечно, записать уравнение в интегральном виде, как мы поступали в электродинамике с законом Гаусса, тогда оно выражало бы тот факт, что поток через поверхность равен скорости изменения тепловой энергии внутри материала. Мы не будем больше переводить уравнения из дифференциальной формы в интегральную и обратно, это делается точно так же, как в электростатике.)

C:\1\pic\gray.jpgСкорость, с которой тепло поглощается или рождается в разных местах, конечно, зависит от условий задачи. Предпо­ложим, например, что источник тепла находится внутри мате­риала (возможно, радиоактивный источник или сопротивление, через которое пропускают ток). Обозначим через s тепловую энергию, производимую этим источником в единице объема за 1 *сек.* Кроме того, могут возникнуть потери (или, наоборот, дополнительное рождение) тепловой энергии за счет перехода в другие виды внутренней энергии в данном объеме. Если *и —* внутренняя энергия в единице объема, то —*du/dt* будет тоже играть роль «источника» тепловой энергии. Итак, имеем

(12.5)

Мы не собираемся здесь обсуждать полное уравнение, ве­личины в котором изменяются со временем, потому что мы про­водим аналогию с электростатикой, где ничто не зависит от вре­мени. Мы рассмотрим только задачи *с постоянным потоком тепла,* в которых постоянные источники создают состояние равновесия. В таких случаях

C:\1\pic\gray.jpg

(12.6)

Нужно иметь, конечно, еще одно уравнение, которое описы­вает, как поток течет в разных местах. Во многих веществах поток тепла примерно пропорционален скорости изменения температуры с положением: чем больше разность температур, тем больше поток тепла. Мы знаем, что *вектор* потока тепла пропорционален градиенту температуры. Константа пропор­циональности *К,* зависящая от свойств материала, называется *коэффициентом теплопроводности*

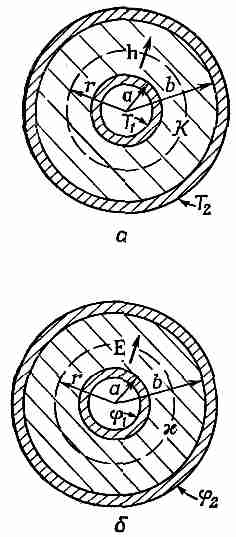
C:\1\pic\gray.jpg

(12.7)

C:\1\pic\gray.jpgЕсли свойства материала меняются от точки к точке, то *К=К (х, у,* z) и есть функция положения. [Уравнение (12.7) не столь фундаментально, как (12.5), выражающее сохранение тепловой энергии, потому что оно зависит от характерных свойств вещества.] Подставляя теперь уравнение (12.7) в (12.6), получаем

(12.8)

что в точности совпадает по форме с (12.4). *Задачи с постоянным потоком тепла и задачи электростатики одинаковы.* Вектор потока тепла h соответствует Е, а тем­пература *Т* соответствует ϕ.



*Фиг. 12.1. Поток тепла в случае цилиндрической симметрии (а) и соответствующая задача из элек­тричества* (б).

Мы уже отмечали, что точечный тепловой источник создает поле температур, меняющееся, как 1/r, и поток тепла, меняющийся, как 1/r2. Это есть не более чем простой перенос утвержде­ний электростатики, что точечный заряд дает потенциал, меняющийся, как 1/r, и электрическое поле, меня­ющееся, как 1/r2. Вообще мы можем решать статистические тепловые за­дачи с той же степенью легкости, как и задачи электростатики.

Рассмотрим простой пример. Пусть имеется цилиндр с ра­диусом *а* при температуре T1? поддерживающейся за счет гене­рации тепла в цилиндре. (Это может быть, скажем, проволока, по которой течет ток, или трубка с конденсацией пара внутри цилиндра.) Цилиндр покрыт концентрической обшивкой из изолирующего материала с теплопроводностью *К.* Пусть внеш­ний радиус изоляции равен b*,* а в наружном пространстве под­держивается температура T2(фиг. 12. 1, *а).* Нам нужно опреде­лить скорость потери тепла проволокой или паропроводом (все равно чем), проходящим по центру цилиндра. Пусть полное количество тепла, теряемого на длине трубы *L,* равно G, его-то мы и хотим найти.

Как надо решать такую задачу? У нас есть дифференциаль­ные уравнения, но поскольку они такие же, как в электроста­тике, то математическое решение их нам уже известно. Анало­гичная задача электростатики относится к проводнику радиу­сом *а* при потенциале ϕ1, отделенном от другого проводника радиусом bпри потенциале ϕ2, с концентрическим слоем ди­электрика между ними (фиг. 12.1, *б).* Далее, поскольку поток тепла h соответствует электрическому полю Е, то наша искомая величина G соответствует потоку электрического поля от единичной длины (другими словами, электрическому заряду на единице длины, деленному на ε0). Мы решали электростати­ческую задачу с помощью закона Гаусса. Нашу задачу о потоке тепла будем решать таким же способом.

Из симметрии задачи мы видим, что *h* зависит только от расстояния до центра. Поэтому мы окружим трубку гауссовой поверхностью — цилиндром длиной L и радиусом r*.* С помощью закона Гаусса мы выводим, что поток тепла h, умноженный на площадь поверхности 2πrL, должен быть равен полному количеству тепла, рождаемому внутри, т. е. тому, что мы назвали *G:*

C:\1\pic\gray.jpg

(12.9)

Поток тепла пропорционален градиенту температуры

C:\1\pic\gray.jpg

или в данном случае величина h равна

C:\1\pic\gray.jpg

C:\1\pic\gray.jpgВместе с (12.9) это дает

(12.10)

C:\1\pic\gray.jpgИнтегрируя от r=а до *r=b,* получаем

(12.11)

C:\1\pic\gray.jpgРазрешая отнсительно *G,* находим

(12.12)

Этот результат в точности соответствует формуле для заряда цилиндрического конденсатора:

C:\1\pic\gray.jpg

Задачи одинаковые и имеют одинаковые решения. Зная электро­статику, мы тем самым знаем, сколько тепла теряет изолирован­ная труба.

Рассмотрим еще один пример. Пусть мы хотим узнать поток тепла в окрестности точечного источника, расположенного неглубоко под поверхностью земли или же вблизи поверхности большого металлического предмета. В качестве локализованно­го источника тепла может быть и атомная бомба, которая взор­валась под землей и представляет собой мощный источник тепла, или же небольшой источник радиоактивности внутри железного блока — возможностей очень много.

Рассмотрим идеализированную задачу о точечном источнике тепла, мощность которого *G,* на расстоянии а под поверхностью бесконечной однородной среды с коэффициентом теплопровод­ности *К.* Теплопроводностью воздуха над поверхностью среды мы пренебрежем. Мы хотим определить распределение темпе­ратуры на поверхности среды. Насколько горячо будет прямо над источником и в разных местах на поверхности?

Как же решить эту задачу? Она похожа на задачу по электро­статике, в которой имеются два материала с разной диэлектри­ческой проницаемостью xпо обе стороны от разделяющей их границы. Здесь что-то есть! Возможно, это похоже на точечный заряд вблизи границы между диэлектриком и проводником или что-нибудь вроде этого. Посмотрим, что происходит вблизи границы. Физическое условие состоит в том, что нормальная составляющая h на поверхности равна *нулю,* поскольку мы предположили, что потока из блока нет. Мы должны задать вопрос: в какой электростатической задаче возникает условие, что нормальная компонента электрического поля Е (представ­ляющая собой аналог h) равна *нулю* у поверхности? Нет такой!

Это один из тех случаев, к которым следует относиться с осторожностью. По физическим причинам могут быть опре­деленные ограничения тех математических условий, которые возникают в каком-либо случае. Поэтому если мы проанализи­ровали дифференциальное уравнение только для некоторых ограниченных примеров, то вполне можем упустить ряд реше­ний, возникающих в других физических условиях. Например, нет материала, обладающего диэлектрической проницаемостью, равной нулю, а теплопроводность вакуума равна нулю. Поэтому нет электростатического аналога идеального теплоизолятора. Мы можем, однако, попытаться использовать те же *методы.* Попробуем *вообразить,* что произошло бы, если бы диэлектри­ческая проницаемость *была* равна нулю. (Разумеется, в реаль­ных условиях диэлектрическая проницаемость никогда не обра­щается в нуль. Но может представиться случай, когда вещество имеет очень *большую* диэлектрическую проницаемость, так что диэлектрической проницаемостью воздуха вне среды можно пренебречь.)

Как же найти электрическое поле, у которого нет составляю­щей, перпендикулярной к поверхности? Иначе говоря, такое поле, которое всюду *касательно* к поверхности? Вы заметите, что эта задача обратна задаче о точечном заряде вблизи прово­дящей плоскости. Там нам нужно было поле, *перпендикулярное*

к поверхности, потому что проводник всюду находился при одном и том же значении потенциала.

В задаче об электрическом поле мы придумали решение, вообразив за проводящей плоскостью точечный заряд. Можно воспользоваться снова этой же идеей. Попытаемся выбрать такое «изображение» источника, которое автоматически обраща­ло бы в нуль нормальную компоненту поля вблизи поверхности. Решение показано на фиг. 12.2. Электрическое изображение источника с *тем же знаком* и той же величины, находящееся на расстоянии *а* над поверхностью, дает поле, горизонтальное повсюду у поверхности. Нормальные компоненты от обоих ис­точников взаимно уничтожаются.

Итак, наша задача о потоке тепла решена. Температура во всем пространстве одинакова по непосредственной аналогии с потенциалом от двух одинаковых точечных зарядов. Темпера­тура *Т* на расстоянии rот одного точечного источника *G* в бес­конечной среде равна

C:\1\pic\gray.jpg

(12.13)

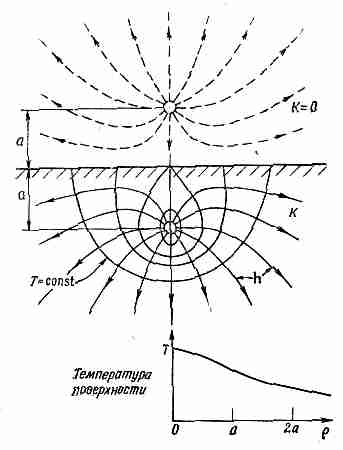
C:\1\pic\gray.jpg(Это, конечно, полностью аналогично ϕ= q/4πε0r.) Температура точечного источника и, кроме того, его изображения равна

(12.14)

Эта формула дает нам температуру всюду внутри блока. Несколько изотермических поверхностей приведено на фиг. 12.2.

Показаны также линии h, ко­торые можно получить из вы­ражения h =-К∇Т*.*

В самом начале мы инте­ресовались распределением температуры на поверхности. Для точки на поверхности находящейся на расстоянии р от оси, r1=r2=√ (р2 + а2),



*Фиг. 12.2. Поток тепла и изотерма у точечного источника тепла, расположенного на расстоя­нии а под поверхностью тела с хорошей теплопроводностью. Вне тела показано мнимое изображение источника.*

C:\1\pic\gray.jpgсле­довательно,

(12.15)

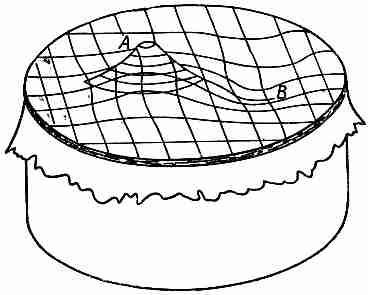
Эта функция также изображена на фиг. 12.2. Естественно, что температура прямо над источником выше, чем вдали от него. Такого рода задачи часто приходится решать геофизикам. Теперь мы видим, что это те же самые задачи, которые мы ре­шали в электричестве.

**§ 3. Натянутая мембрана**

Рассмотрим теперь совсем другую область физики, в которой тем не менее мы придем снова к точно таким же уравнениям. Возьмем тонкую резиновую пленку — мембрану, натянутую на большую горизонтальную раму (наподобие кожи на бараба­не). Нажмем на мембрану в одном месте вверх, а в другом — вниз (фиг. 12.3). Сможем ли мы описать форму поверхности? Покажем, как можно решить эту задачу, когда отклонения мембраны не очень велики.

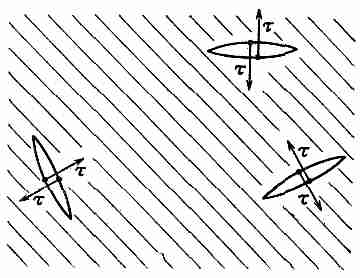
В пленке действуют силы, потому что она натянута. Если сделать в каком-нибудь месте пленки небольшой разрез, то два края разреза разойдутся (фиг. 12.4). Следовательно, в пленке имеется *поверхностное натяжение,* аналогичное одномерному натяжению растянутой веревки. Определим величину поверх­ностного натяжения τ как силу *на единицу длины,* которая как раз удержала бы вместе две стороны разреза (см. фиг. 12.4).

Предположим теперь, что мы смотрим на вертикальное по­перечное сечение мембраны. Оно будет иметь вид некоторой кривой, похожей на изображенную на фиг. 12.5. Пусть *и —* вертикальное смещение мембраны от ее нормального положения, а *х* и *у —* координаты в горизонтальной плоскости



*Фиг. 12.3. Тонкая резино­вая пленка, натянутая на цилиндр (нечто вроде ба­рабана).*

*Какой формы будет поверх­ность, если пленку приподнять в точке A и опустить в точке В?*



*Фиг. 12.4. Поверхностное натяжение* τ *натянутой, резиновой пленки есть сила отнесенная к единице дли­ны и направленная перпен­дикулярно линии разреза.*

(Приведенное сечение параллельно оси *х.)*

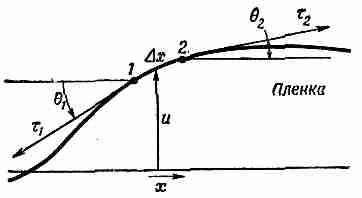
Возьмем небольшой кусочек поверхности длиной Δx; и ши­риной Δу. На него действуют силы вследствие поверхностного натяжения вдоль каждого края. Сила на стороне 1 (см. фиг. 12.5) будет равна τ1Δy и направлена по касательной к поверхности, т. е. под углом θ1 к горизонтали. Вдоль стороны 2 сила будет равна τ2Δy и направлена к поверхности под углом θ2. (Подобные силы будут и на двух других сторонах кусочка, но мы пока забудем о них.) Результирующая сила от сторон 1 и 2, дей­ствующая на кусочек *вверх,* равна

C:\1\pic\gray.jpg

C:\1\pic\gray.jpgМы ограничимся рассмотрением малых искажений мембраны, т. е. *малых изгибов и наклонов:* тогда мы сможем заменить sinθ на tgθ и записать как *дu/дx.* Сила при этих условиях дается выражением

Величина в скобках может быть с тем же успехом записана (для малых Δx:) как

C:\1\pic\gray.jpg



*Фиг. 12.5. Поперечное* *сечение изогнутой пленки.*

C:\1\pic\gray.jpgТогда

Имеется и другой вклад в Δ*F* от сил на двух других сторо­нах; полный вклад, очевидно, равен

C:\1\pic\gray.jpg

(12.16)

C:\1\pic\gray.jpgИскривления диафрагмы вызваны внешними силами. Пусть / означает направленную *вверх* силу *на единичную площадку* пленки (своего рода «давление»), возникающую *от внешних сил.* Если мембрана находится в равновесии *(статический* случай), то сила эта должна уравновешиваться только что вычисленной внутренней силой [уравнение (12.16)]. Иначе говоря,

C:\1\pic\gray.jpgУравнение (12.16) тогда может быть записано в виде

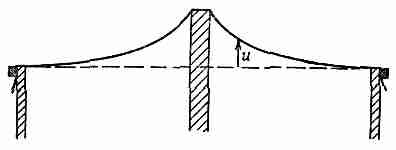
(12.17)

C:\1\pic\gray.jpgгде под знаком ∇мы теперь подразумеваем, конечно, двух­мерный оператор градиента *(д/дх, д/ду).* У нас есть дифферен­циальное уравнение, связывающее *u(х, у) с* приложенными си­лами *f(x, у)* и поверхностным натяжением пленки *t(x, у),* которое, вообще говоря, может меняться от места к месту. (Деформации трехмерного упругого тела тоже подчиняются таким уравнениям, но мы ограничимся двухмерным случаем.) Нас будет интересовать только случай, когда натяжение τ постоянно по всей пленке. Тогда вместо (12.17) мы можем запи­сать

(12.18)

Снова мы получили такое же уравнение, как в электроста­тике! Но на сей раз оно относится к двум измерениям. Сме­щение *u* соответствует ϕ, а f/τ соответствует ρ/ε0. Поэтому тот труд, который мы потратили на бесконечные заряженные плос­кости, или параллельные провода большой длины, или заряжен­ные цилиндры, пригодится для натянутой мембраны.

Предположим, мы подтягиваем мембрану в каких-то точках на определенную *высоту,* т. е. фиксируем величину *и* в ряде точек. В электрическом случае это аналогично заданию определенного *потенциала* в соответствующих местах. На­пример, мы можем устроить положительный «потенциал», если подопрем мембрану предметом, который имеет такое же сечение, как и соответствующий цилиндрический проводник. Если, скажем, мы подопрем мембрану круглым стержнем, поверхность примет форму, изображенную на фиг. 12.6.



*Фиг. 12.6. Поперечное сечение натянутой рези­новой пленки, подпертой круглым стержнем.*

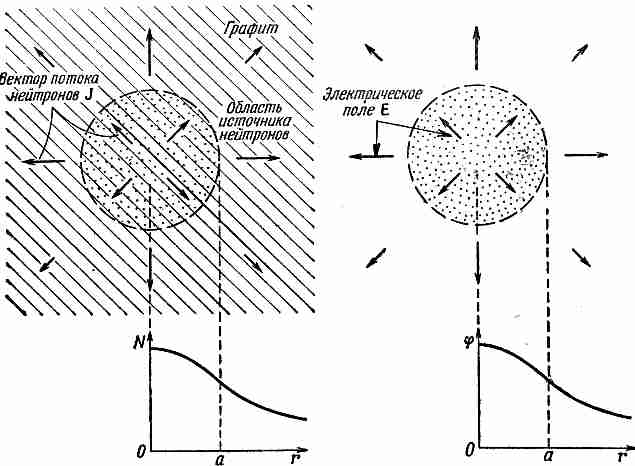
*Функция u(х, у) та же, что и потенциал* ϕ*(х, у) от очень длинного заряженного стержня.*

Высота *и* имеет такой же вид, как электростатический потенциал ϕ заряженного цилиндрического стержня. Она спадает, как ln(1/r). *(Наклон* поверхности, который соответствует электри­ческому полю Е, спадает, как 1/r.)

Натянутую резиновую пленку часто использовали для ре­шения сложных *электрических* задач экспериментальным путем. Аналогия используется в обратную сторону! Для подъема мембраны на высоту, соответствующую потенциалам всего набора электродов, подставляют разные стержни и полоски. Затем измерения высоты дают электрический потенциал в электростатической задаче. Аналогия проводится даже еще дальше. Если на мембране поместить маленькие шарики, то их движение примерно схоже с движением электронов в соответ­ствующем электрическом поле. Таким способом можно воочию проследить за движением «электронов» по их траекториям. Этот метод был использован для проектирования сложной системы многих фотоумножительных трубок (таких, например, какие используются в сцинтилляционном счетчике или для управления передними фарами в автомашине кадиллак). Метод используется и до сих пор, но его точность не очень велика. Для более точных расчетов лучше находить поле чис­ленным путем с помощью больших электронных вычислитель­ных машин.

**§ 4. Диффузия нейтронов; сферически-симметричный** **источник в однородной среде**

Приведем еще один пример, дающий уравнение того же вида, но на сей раз относящееся к диффузии. В гл. 43 (вып. 4) мы рассмотрели диффузию ионов в однородном газе и диффузию одного газа сквозь другой. Теперь возьмем другой пример — диффузию нейтронов в материале типа графита. Мы выбрали графит (разновидность чистого углерода), потому что углерод не поглощает медленных нейтронов. Нейтроны путешествуют в нем свободно. Они проходят по прямой в среднем несколько сантиметров, прежде чем рассеются ядром и отклонятся в сто­рону. Так что если у нас есть большой кусок графита толщи­ной в несколько метров, то нейтроны, находившиеся сначала в одном месте, будут переходить в другие места.



*Фиг. 12.7. Нейтроны рождаются однородно внутри сферы радиуса а в большом графитовом блоке и диффундируют наружу. Плотность нейтронов N получена как функция r, расстояния от центра источника.*

*Справа показана электростатическая аналогия: однородно заряженная сфе­ра, причем N соответствует* ϕ, а J *соответствует* Е.

Мы опишем их усредненное поведение, т. е. их *средний поток.*

C:\1\pic\gray.jpgПусть *N(x, у,* z)ΔV — число нейтронов в элементе объема ΔV в точке *(х, у, г).* Движение нейтронов приводит к тому, что одни покидают ΔV, а другие попадают в него. Если в одной области оказывается нейтронов больше, чем в соседней, то от­туда их будет переходить во вторую область больше, чем наобо­рот; в результате возникнет поток. Повторяя доказательства, приведенные в гл. 43 (вып. 4), можно описать поток вектором потока J. Его компонента ***Jx*** есть результирующее число ней­тронов, проходящих в единицу времени через единичную пло­щадку, перпендикулярную оси *х.* Мы получим тогда

(12.19)

где коэффициент диффузии *D* дается в терминах средней ско­рости *v* и средней длины свободного пробега l между столкно­вениями:

C:\1\pic\gray.jpg

Векторное уравнение для J имеет вид

C:\1\pic\gray.jpg

(12.20)

C:\1\pic\gray.jpgСкорость, с которой нейтроны проходят через некоторый элемент поверхности *da,* равна J•*nda* (где n, как обычно,— единичный вектор нормали). Результирующий поток *из эле­мента объема* тогда равен (пользуясь обычным гауссовым доказательством) ∇•J*dV.* Этот поток приводил бы к уменьше­нию числа нейтронов в ΔV, если нейтроны не генерируются внутри ΔV (с помощью какой-нибудь ядерной реакции). Если в объеме присутствуют источники, производящие *S* нейтронов в единицу времени в единице объема, то результирующий поток из ΔV будет равен *[S-(dNIdt)]*ΔV. Тогда получаем

(12.21)

Комбинируя (12.21) и (12.20), получаем *уравнение диффузии нейтронов*

C:\1\pic\gray.jpg

(12.22)

В статическом случае, когда *dN/dt=0,* мы снова имеем урав­нение (12.4)! Мы можем воспользоваться нашими знаниями в электростатике для решения задач по диффузии нейтронов. Давайте же решим какую-нибудь задачу. (Пожалуй, вы недо­умеваете: *зачем* решать новую задачу, если мы уже решили все задачи в электростатике? На этот раз мы можем решить *быстрее* именно потому, что электростатические задачи *дей­ствительно уже решены!)*

Пусть имеется блок материала, в котором нейтроны (ска­жем, за счет деления урана) рождаются равномерно в сфери­ческой области радиусом *а* (фиг. 12.7). Мы хотели бы узнать, чему равна плотность нейтронов повсюду? Насколько однород­на плотность нейтронов в области, где они рождаются? Чему равно отношение нейтронной плотности в центре к нейтронной плотности на поверхности области рождения? Ответы найти легко. Плотность нейтронов в источнике *S0* стоит вместо плот­ности зарядов ρ, поэтому наша задача такая же, как задача об однородно заряженной сфере. Найти *N—*все равно, что найти потенциал ϕ. Мы уже нашли поля внутри и вне однородно заряженной сферы; для получения потенциала мы можем их проинтегрировать. Вне сферы потенциал равен Q/4πε0r, где полный заряд *Q* дается отношением 4πа3ρ/3. Следовательно,

C:\1\pic\gray.jpg

(12.23)

Для внутренних точек вклад в поле дают только заряды *Q(r),* находящиеся внутри сферы радиусом r*; Q(r)* =4πг3ρ/3, следовательно,

C:\1\pic\gray.jpg

(12.24)

Поле растет линейно с r. Интегрируя *Е,* получаем ϕ:

C:\1\pic\gray.jpg

C:\1\pic\gray.jpgНа расстоянии радиуса *а* ϕвнешн должен совпадать с ϕвнутр) поэтому постоянная должна быть равна ρа2/2ε0. (Мы предпола­гаем, что потенциал ϕ равен нулю на больших расстояниях от источника, а это для нейтронов будет отвечать обращению .N в нуль.) Следовательно,

(12.25)

C:\1\pic\gray.jpgТеперь мы сразу же найдем плотность нейтронов в на­шей диффузионной задаче

(12.26)

C:\1\pic\gray.jpgи

(12.27)

На фиг. 12.7 представлена зависимость *N* от r.

Чему же теперь равно отношение плотности в центре к плотности на краю? В центре (r=0) оно пропорционально За2/2, а на краю *(r=а)* пропорционально 2а2/2; поэтому отно­шение плотностей равно 3/2. Однородный источник не дает однородной плотности нейтронов. Как видите, наши познания в электростатике дают хорошую затравку для изучения физики ядерных реакторов.

Диффузия играет большую роль во многих физических об­стоятельствах. Движение ионов через жидкость или электро­нов через полупроводник подчиняется все тому же уравнению. Мы снова и снова приходим к одним и тем же уравнениям.

**§ 5. Безвихревое течение жидкости; обтекание шара**

Рассмотрим теперь пример, по существу, не такой уж хоро­ший, потому что уравнения, которые мы будем использовать, на самом деле не описывают новый объект полностью, а отве­чают лишь некоторым идеализированным условиям. Это задача *о течении воды.* Когда мы разбирали случай натянутой плен­ки, то наши уравнения представляли приближение, справед­ливое лишь для *малых отклонений.* При рассмотрении течения воды мы прибегнем к приближению другого рода; мы должны принять ограничения, которые, вообще говоря, к обычной воде неприменимы. Мы разберем только случай постоянного тече­ния *несжимаемой, невязкой, лишенной завихрений* жидкости. Потом мы опишем течение, задав ему скорость v(r) как функцию положения г. Если движение постоянно (единственный случай, для которого имеется электростатическая аналогия), v не за­висит от времени. Если ρ — плотность жидкости, то ρv — масса жидкости, проходящая в единицу времени через единичную площадку. Из закона сохранения вещества дивергенция pv, вообще говоря, равна изменению со временем массы вещества в единице объема. Мы предположим, что процессы непрерыв­ного рождения или уничтожения вещества отсутствуют. Сохра­нение вещества требует тогда, чтобы ∇•ρv=0. (В правой части должно было бы стоять, вообще говоря, —*d*ρ*/dt,* но поскольку наша жидкость несжимаема, то ρ меняться не может.) Так как ρ повсюду одинаково, то его можно вынести, и наше уравнение запишется просто

∇•v=0.

Чудесно! Снова получилась электростатика (без зарядов); уравнение совсем похоже на ∇•E=0. Ну не совсем! В электро­статике *не просто* ∇•E=0. Есть *два* уравнения. Одно уравне­ние еще не дает нам всего; нужно дополнительное уравнение. Чтобы получилось совпадение с электростатикой, у нас rot от v должен был бы равняться нулю. Но для настоящих жид­костей это вообще не так. В большинстве их обычно возникают вихри. Следовательно, мы ограничиваемся случаем, когда циркуляция жидкости отсутствует. Такое течение часто назы­вают *безвихревым.* Как бы то ни было, принимая наши пред­положения, можно *представить* себе течение жидкости, ана­логичное электростатике. Итак, мы берем

∇•v=0 (12.28)

и

∇Xv = 0. (12.29)

Мы хотим подчеркнуть, что условия, при которых течение жидкости подчиняется этим уравнениям, встречаются весьма нечасто, но все-таки бывают. Это должны быть случаи, когда поверхностным натяжением, сжимаемостью и вязкостью можно пренебречь и когда течение можно считать безвихревым. Эти условия выполняются столь редко для обычной воды, что мате­матик Джон фон Нейман сказал по поводу тех, кто анализи­рует уравнения (12.28) и (12.29), что они изучают «сухую воду»!

| (Мы возвратимся к задаче о течении жидкости более подробно

в вып. 7, гл. 40 и 41.)

Поскольку ∇Xv=0, то скорость «сухой воды» можно написать в виде градиента от некоторого потенциала

v=-∇ϕ. (12.30)

Каков физический смысл ψ? Особо полезного смысла нет. Скорость можно записать в виде градиента потенциала просто потому, что течение безвихревое. По аналогии с электростати­кой ψ называется *потенциалом скоростей,* но он не связан с потенциальной энергией так, как это получается для ϕ. Поскольку дивергенция v равна нулю, то

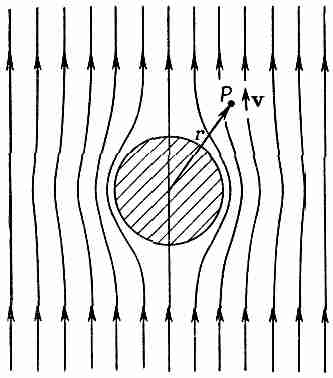
C:\1\pic\gray.jpg

(12.31)

Потенциал скоростей ψ подчиняется тому же дифференциаль­ному уравнению, что и электростатический потенциал в пустом пространстве (ρ=0).

Давайте выберем какую-нибудь задачу о безвихревом те­чении и посмотрим, сможем ли мы решить ее изученными ме­тодами. Рассмотрим задачу о шаре, падающем в жидкости. Если он движется слишком медленно, то силы вязкости, кото­рыми мы пренебрегали, будут существенны. Если он движется слишком быстро, то следом за ним будут идти маленькие вихри (турбулентность) и возникнет некоторая циркуляция воды. Но если шар движется и не чересчур быстро, и не чересчур медленно, то течение воды будет более или менее отвечать нашим предположениям, и мы сможем описать движение воды нашими простыми уравнениями.

Удобно описывать процесс в системе координат, *скреплен­ной с шаром.* В этой системе координат мы задаем вопрос: как течет вода около неподвижного шара, если на больших расстояниях течение однородно? Иначе говоря, если вдали от шара течение всюду одина­ково? Течение вблизи шара будет иметь вид, показан­ный линиями потока на фиг. 12.8. Эти линии, всег­да параллельные v, соответ­ствуют линиям напряженностей электрического поля.



*Фиг. 12.8. Поле скоростей без­вихревого обтекания сферы жидко­стью.*

Мы хотим получить количественное описание поля скоростей, т. е. выражение для скорости в любой точке *Р.*

Можно найти скорость как градиент от ψ), поэтому сначала определим потенциал. Мы хотим найти потенциал, который удовлетворял бы всюду (12.31) при следующих двух условиях: 1) течение отсутствует в сферической области за поверхностью шара; 2) течение постоянно на больших рас­стояниях. Чтобы выполнялось первое ограничение, компонен­та v, перпендикулярная поверхности шара, должна обращаться в нуль. Это значит, что *d*ψ*/dr=0* при r*=а.* Для выполнения второго ограничения нужно иметь *d*ψ*/dz=v0* всюду, где r>>*а.*Строго говоря, нет ни одной электростатической задачи, кото­рая в точности соответствовала бы нашей задаче. Она факти­чески соответствует сфере с *нулевой* диэлектрической прони­цаемостью, помещенной в однородное электрическое поле. Если бы мы имели решение задачи для сферы с диэлектриче­ской проницаемостью x, то, положив *x*=0, немедленно решили бы нашу задачу.

Мы раньше не разобрали такую электростатическую за­дачу во всех подробностях; давайте сделаем это сейчас. (Мы могли бы сразу решить задачу о жидкости с v и ψ, но будем пользоваться Е и ϕ, потому что привыкли к ним.)

Задача ставится так: найти такое решение уравнения ∇2ϕ=0, чтобы Е=-∇ϕ равнялось постоянной, скажем Е0, для больших r и, кроме того, чтобы радиальная компонента Е была равна нулю при r*=а.* Иначе говоря,

C:\1\pic\gray.jpg

(12.32)

C:\1\pic\gray.jpgНаша задача включает новый тип граничных условий — когда *д*ϕ*/дr* постоянно, а не тот, когда потенциал ϕ постоянен на поверхности. Это немножко другое условие. Получить ответ сразу нелегко. Прежде всего без шара ϕ был бы равен —E0z.Тогда Е было бы направлено по *z* и имело бы всюду постоянную величину *Е0.* Мы уже исследовали случай диэлектрического шара, поляризация внутри которого однородна, и нашли, что поле внутри поляризованного шара однородно, а вне его оно совпадает с полем точечного диполя, расположенного в центре шара. Давайте напишем, что искомое решение есть суперпо­зиция однородного поля плюс поле диполя. Потенциал диполя (см. гл. 6) есть pz/4πε0r3. Итак, мы предполагаем, что

(12.33)

C:\1\pic\gray.jpgПоскольку поле диполя спадает, как 1/r3, то на больших рас­стояниях мы как раз имеем поле *Е0.* Наше предположение автоматически удовлетворяет сформулированному выше второму условию (стр. 249). Но что нам взять в качестве силы диполя p? Для ответа мы должны использовать другое условие [урав­нение (12.32)]. Мы должны продифференцировать ϕ по r, но, разумеется, это нужно сделать при постоянном угле θ, поэтому удобнее выразить сначала ϕ через r и θ, а не через *z* и r. По­скольку z=rcosθ, то

(12.34)

Радиальная составляющая Е есть

C:\1\pic\gray.jpg

(12.35)

Она должна быть равна нулю при r*=а* для всех θ. Это будет выполнено, если

C:\1\pic\gray.jpg

(12.36)

Заметьте хорошенько, что если бы оба члена в уравнении (12.35) зависели бы от θ по-разному, то мы не смогли бы вы­брать *р* так, чтобы (12.35) обращалось в нуль при r*=а* для всех углов. Тот факт, что это получилось, означает, что мы были мудры, написав уравнение (12.33). Конечно, когда мы догадывались, мы заглядывали вперед; мы знали, что понадо­бится еще один член, который бы, во-первых, удовлетворял ∇2ϕ=0 (любое действительное поле удовлетворяет этому), во-вторых, зависел от cosθ и, в-третьих, спадал бы к нулю при больших r. Поле диполя — единственное, которое удовлет­воряет всем трем требованиям.

C:\1\pic\gray.jpgС помощью (12.36) наш потенциал приобретает вид

(12.37)

Решение задачи о течении жидкости может быть записано просто:

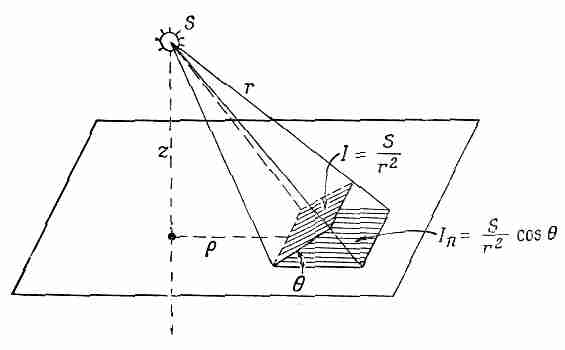
C:\1\pic\gray.jpg

(12.38)

Отсюда прямо находится v. Больше мы не будем заниматься этим вопросом.

**§ 6. Освещение; равномерное освещение плоскости**

В этом параграфе мы обратимся к совсем другой физической проблеме — мы ведь хотим показать большое разнообразие воз­можностей. На этот раз мы проделаем кое-что, что приведет нас к *интегралу* того же сорта, что мы нашли в электростатике.



*Фиг. 12.9. Освещенность In поверхности равна энергии излучения, падающей в единицу времени на единичную пло­щадку поверхности.*

C:\1\pic\gray.jpg(Если перед нами стоит математическая задача, приводящая к некоторому интегралу, а интеграл этот уже знаком нам по другой задаче, то кое-что о его свойствах нам известно.) Возь­мем пример из техники освещения. Пусть на расстоянии *а* над плоскостью имеется какой-то источник света. Как будет освещаться поверхность? Чему равна энергия излучения, падающая на единичную площадку поверхности за единицу времени (фиг. 12.9)? Мы предполагаем, что источник сфери­чески-симметричный, так что свет излучается одинаково во всех направлениях. Тогда количество излученной энергии, проходящее через единичную площадку, *перпендикулярную* потоку света, меняется обратно пропорционально квадрату расстояния. Очевидно, что интенсивность света в направлении нормали дается такой же формулой, что и электрическое поле от точечного источника. Если световые лучи падают на поверх­ность под углом 6 к нормали, то /, энергия, падающая *на еди­ничную площадку* поверхности, уменьшается в cos 9 раз, потому что та же энергия падает на площадь в I/cos 9 раз большую. Если мы назовем силу нашего источника *S,* тогда In, освещен­ность поверхности, равна

(12.39)

где e*r —* единичный вектор в направлении от источника, а n — единичная нормаль к поверхности. Освещенность In соот­ветствует нормальной компоненте электрического поля от точечного источника с зарядом 4πε0S. Учитывая это, мы видим, что для любого распределения источников света можно найти ответ, решая соответствующую задачу электростатики. Мы вы­числяем вертикальную компоненту электрического поля на плоскости от распределения зарядов точно таким же образом, как для [источников света.](#прим1)

Рассмотрим такой пример. Нам необходимо для какого-то эксперимента устроить так, чтобы стол освещался равномерно. Мы располагаем длинными трубками флуоресцентных ламп, излучающих равномерно по всей своей длине. Наш стол можно осветить, разместив флуоресцентные трубки правильными ря­дами на потолке, который находится на высоте z над столом. Чему должно быть равно наибольшее расстояние bот трубки до трубки, если мы хотим, чтобы поверхностное освещение было равномерным с точностью до одной тысячной? *Ответ:* 1) найдите электрическое поле от набора равномерно заряжен­ных проводов с промежутком между ними, равным b*;* 2) под­считайте вертикальную компоненту электрического поля; 3) определите, чему должно быть равно b*,* чтобы волнистость поля была не больше одной тысячной.

В гл. 7 мы видели, что электрическое поле от ряда заряжен­ных проводов может быть представлено в виде суммы членов, каждый из которых дает синусоидальное изменение поля с периодом b/n, где n *—* целое число. Амплитуда любого из этих членов дается уравнением (7.44):

C:\1\pic\gray.jpg

Нам нужно взять только случай n=1, раз мы хотим получить поле в точках, не слишком близких к проводам. Чтобы полу­чить полное решение, нам еще нужно определить коэффициенты *Аn,* которые мы пока не нашли (хотя они находятся прямым вычислением). Поскольку нам нужно знать только *A1* то можно оценить его величину, считая ее равной средней величине поля. Экспоненциальный множитель тогда дает нам сразу *относительную* амплитуду изменений. Если мы хотим, чтобы этот множитель был равен 10-3, то bоказывается равным 0,91 *z.* Если промежуток между лампами сделать равным 3/4 рас­стояния до потолка, экспоненциальный множитель тогда бу­дет равен 1/4000, и мы имеем фактор надежности 4, так что мы можем быть вполне уверены, что освещение будет постоян­ным с точностью до одной тысячной. (Точное вычисление пока­зывает, что *A1* в действительности в два раза больше среднего поля, так что точный ответ будет b=0,8 z.)

Немного неожи­данно, что для столь равномерного освещения допустимый промежуток между трубками оказался таким большим.

**§ 7. «Фундаментальное единство» природы**

В этой главе мы хотели показать, что, изучая электростати­ку, вы одновременно учитесь ориентироваться во многих во­просах физики и что, помня об этом, можно выучить почти всю физику за несколько лет.

Но в конце, естественно, напрашивается вопрос: *почему уравнения для разных явлений столь похожи?* Мы могли бы сказать: «В этом проявляется фундаментальное единство при­роды». Но что это значит? Что *могло бы* означать такое заяв­ление? Это могло бы просто означать, что уравнения для раз­ных явлений похожи; но тогда, конечно, мы не дали никакого объяснения. «Фундаментальное единство» могло бы означать, что все сделано из одного и того же материала, а потому под­чиняется одним и тем же уравнениям. Звучит как неплохое объяснение, но давайте поразмыслим. Электростатический потенциал, диффузия нейтронов, поток тепла — неужели мы действительно имеем дело с одним и тем же материалом? Мо­жем ли мы, в самом деле, представить себе, что электростатиче­ский потенциал *физически* идентичен температуре или плот­ности частиц? Наверняка ϕ *не совсем то же самое,* что тепловая энергия частиц. Смещение мембраны явно *не похоже* на темпе­ратуру. С какой же стати тогда здесь проявляется «фундамен­тальное единство»?

Более пристальный взгляд на физику разных вопросов по­казывает, что уравнения на самом деле не идентичны. Уравне­ние, найденное нами для диффузии нейтронов, всего лишь приближение, которое оказывается хорошим, если интересую­щее нас расстояние велико по сравнению с длиной свободного пробега. Если бы мы пригляделись повнимательнее, то увидели бы, как движутся отдельные нейтроны. Разумеется, движение одного нейтрона и гладкие изменения, которые мы получаем при решении дифференциального уравнения, вещи разные. Диф­ференциальное уравнение — это приближение, потому что мы сочли, что нейтроны гладко распределены в *пространстве.*

Может быть, *в этом* и состоит разгадка? Может быть, общее всем явлениям есть *пространство,* те рамки, в которые вложена физика? Пока все меняется в пространстве достаточно плавно, важными факторами, входящими в рассмотрение, будут ско­рости изменения величин в зависимости от положения в про­странстве. Вот почему у нас всегда получается уравнение с градиентом. Производные *должны* появляться в виде градиента или дивергенции; законы физики *не зависят от направления,* поэтому они должны выражаться в виде векторов. Уравнения электростатики — это простейшие векторные уравнения, вклю­чающие только пространственные производные величин, кото­рые можно вообще записать. Любая другая *простая* проблема— или упрощение сложной проблемы — должна быть похожа на электростатику. Общим для всех наших задач является то, что они связаны с *пространством,* и то, что мы *имитируем* по-настоящему сложные явления простым дифференциальным уравнением.

Отсюда возникает еще один интересный вопрос. А не спра­ведливо ли это утверждение и для уравнений *электростатики?* Может быть, и они годятся только как сглаженная имитация на самом деле гораздо более сложного микромира? И реальный мир состоит из маленьких *Х-онов,* которые можно различить только на *чрезвычайно* малых расстояниях? А проводя наши измерения, мы всегда наблюдаем все в таком грубом масштабе, что не можем увидеть эти маленькие Х-оны, вот почему мы и приходим к дифференциальным уравнениям?

Наша современная наиболее полная теория электродинамики действительно обнаруживает трудности на очень малых рас­стояниях. Поэтому в принципе возможно, что эти уравнения представляют собой сглаженные версии чего-то: Они оказы­ваются правильными на расстояниях вплоть до 10-14 *см,* но за­тем они начинают выглядеть неправильными. Возможно, что существует пока еще не открытый «механизм» и что детали внут­реннего сложного устройства скрыты в уравнениях, имеющих гладкий вид, как это получается в «гладкой» диффузии нейтро­нов. Но никто еще не сумел сформулировать успешной теории, которая бы работала таким образом.

Как это ни странно, оказывается (по причинам, в которых мы еще не разобрались), что комбинация релятивизма и кван­товой механики, насколько мы их знаем, по-видимому, *запре­щает* придумывание уравнений, фундаментально отличных от уравнения (12.4) и в то же время свободных от противоречий. Заметьте: не из-за расхождений с экспериментом, а от *внутренних противоречий.* Таких, как, скажем, предсказание, что сум­ма вероятностей всех возможных исходов станет не равной единице или что энергии оказываются комплексными числами, или еще какой-нибудь чепухи. Никто еще не создал теории электричества, в которой ∇2ϕ=-ρ/ε0 понималось бы как сгла­женное приближение к более глубокому механизму и которая не приводила бы, в конечном счете к какому-либо абсурду. Но надо сказать, что правильно также и то, что предположение о справедливости ∇2ϕ=-ρ/ε0 для любых как угодно малых расстояний тоже приводит к дикому абсурду (электрическая энергия электрона бесконечна) — абсурду, от которого никто еще не сумел избавиться.

\* Поскольку мы говорим о некогерентных источниках, интенсивности, которых всегда складываются линейно, то электрические заряды в аналогичной задаче всегда будут иметь одинаковые знаки. Следует учесть, что наша аналогия применяется только к световой энергии, падающей на поверхность непрозрачной плоскости, поэтому мы должны включить в интеграл лишь источники, излучающие над поверхностью (конечно, не те, которые расположены под поверхностью!).

## Глава13

**МАГНИТОСТАТИКА**

[**§1.Магнитное** **поле**](#а1)

[**§2.Электриче****ский ток; сохранение заряда**](#а2)

[**§З. Магнитна****я сила, действующая на ток**](#а3)

[**§4.Магнитное п****оле постоянных токов; закон Ампера**](#а4)

[**§5.Магнитное** **поле прямого провода и соленоида; атомные токи**](#а5)

[**§6.Относитель****ность магнитных и элек****трических полей**](#а6)

[**§7.Преобразован****и****е токов и зарядов**](#а7)

[**§8.Суперпозиция;** **правило пр****авой руки**](#а8)

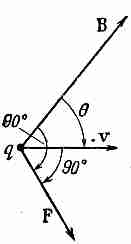
***Повторить:* гл. 15 (вып. 2) «Специальная теория относи­тельности»**

**§ 1. Магнитное поле**

Сила, действующая на электрический заряд, зависит не только от того, где он находится, но и от того, с какой скоростью он движется. Каждая точка в пространстве характеризуется двумя векторными величинами, которые опре­деляют силу, действующую на любой заряд. Во-первых, имеется *электрическая сила,* даю­щая ту часть силы, которая не зависит от дви­жения заряда. Мы описываем ее с помощью электрического поля Е. Во-вторых, есть еще добавочная компонента силы, называемая *маг­нитной силой,* которая зависит от скорости заряда. Эта магнитная сила имеет удивительное свойство: в любой данной точке пространства, как *направление,* так и *величина* силы зависят от направления движения частицы; в каждый момент сила всегда перпендикулярна вектору скорости; кроме того, в любом месте сила всегда перпендикулярна *определенному направ­лению в пространстве* (фиг. 13.1), и, наконец, величина силы пропорциональна *компоненте* скорости, перпендикулярной этому выделен­ному направлению. Все эти свойства можно описать, если ввести вектор магнитного поля В, который определяет выделенное направле­ние в пространстве и одновременно служит константой пропорциональности между силой и скоростью, и записать магнитную силу в виде qvXB. Полная электромагнитная сила, дей­ствующая на заряд, может тогда быть записана так:

**F=q(E+vXB)**, (13.1)

Она называется *силой Лоренца.*



*Фиг. 13.1. Зависящая от скоро­сти компонента силы на движу­щийся заряд направлена перпен­дикулярно V и вектору В. Она пропорциональна также компонен­те V, перпендикулярной В, т. е. vsinθ.*

Магнитную силу можно легко продемонстрировать, если поднести магнит вплотную к катодной трубке. Отклонение электронного луча указывает на то, что магнит возбуждает силы, действующие на электроны перпендикулярно направле­нию их движения (мы уже об этом говорили в вып. 1, гл. 12).

Единицей магнитного поля В, очевидно, является 1 ньютон-секунда, деленная на кулон-метр. Та *же* единица может быть написана как вольт-секунда на квадратный метр. Ее назы­вают еще [вебер на квадратный метр.](#прим1)

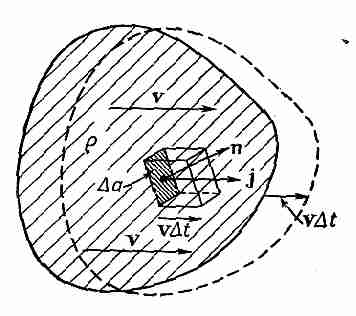
**§ 2. Электрический ток; сохранение заряда**

Подумаем теперь о том, почему магнитные силы дей­ствуют на провода, по которым течет электрический ток. Для этого определим, что понимается под плотностью тока. Элект­рический ток состоит из движущихся электронов или дру­гих зарядов, которые образуют результирующее течение, или поток. Мы можем представить поток зарядов вектором, опре­деляющим количество зарядов, которое проходит в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную по­току (точь-в-точь как мы это делали, определяя поток тепла). Назовем эту величину *плотностью тока* и обозначим ее век­тором j. Он направлен вдоль движения зарядов. Если взять маленькую площадку Δа в данном месте материала, то коли­чество зарядов, текущее через площадку в единицу времени, равно

j•**n**Δa, (13.2)

где **n** — единичный вектор нормали к Δа.

Плотность тока связана со средней скоростью течения зарядов. Предположим, что имеется распределение зарядов, в среднем дрейфующих со скоростью v. Когда это распределе­ние проходит через элемент поверхности Δа, то заряд Δq, проходящий через *Δа* за время *Δt,* равен заряду, содержащемуся в параллелепипеде с основанием Δ*а* и высотой *vΔt* (фиг. 13.2).



*Фиг. 13.2. Если распределение зарядов с плотностью* ρ *дви­жется со скоростью* v, *то коли­чество заряда, проходящее в единицу времени через площад­ку Δа,* *есть ρv•nΔа.*

Объем параллелепипеда есть произведение проекции *Δа,* пер­пендикулярной к v, на *vΔt,* а умножая его на плотность заря­дов ρ, получаем *Δq.* Таким образом,

*Δq =* ρ*v•nΔaΔt.*

Заряд, проходящий в единицу времени, тогда равен *рv•nΔа,* откуда получаем

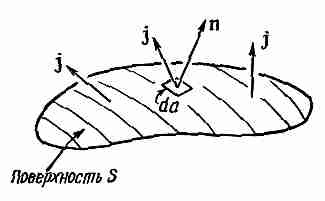
**j = pv.** (13.3)

Если распределение зарядов состоит из отдельных зарядов, скажем электронов с зарядом q*,* движущихся со средней ско­ростью v, то плотность тока равна

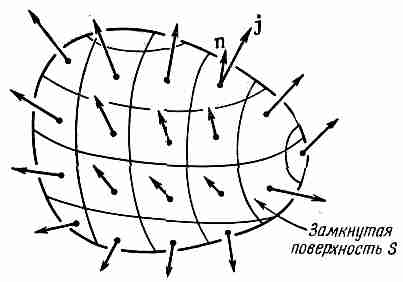
**j = Nqv,**(13.4)

где *N —* число зарядов в единице объема.

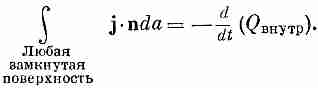
Полное количество заряда, проходящее в единицу времени через какую-то поверхность *S,* называется *электрическим то­ком I.* Он равен интегралу от нормальной составляющей потока по всем элементам поверхности (фиг. 13.3):



*Фиг. 13.3. Ток I через поверх­ность S равен* ***∫j•nda***



*Фиг. 13.4. Интеграл от j•n no замкнутой по­верхности равен скоро­сти изменения полного заряда Q внутри.*

Ток I из замкнутой поверхности *S* представляет собой ско­рость, с которой заряды покидают объем *V,* окруженный по­верхностью 5. Один из основных законов физики говорит, что *электрический заряд неуничтожаем;* он никогда не теряется и не создается. Электрические заряды могут перемещаться с места на место, но никогда не возникают из ничего. Мы го­ворим, что *заряд сохраняется.* Если из замкнутой поверхности возникает результирующий ток, то количество заряда внутри должно соответственно уменьшаться (фиг. 13.4). Поэтому мы можем записать закон сохранения заряда в таком виде:

(13.6)

Заряд внутри можно записать как объемный интеграл от плот­ности заряда



(13.7)

Применяя (13.6) к малому объему ΔV, можно учесть, что интеграл слева есть ∇•jΔV. Заряд внутри равен ρΔV, поэтому сохранение заряда можно еще записать и так:

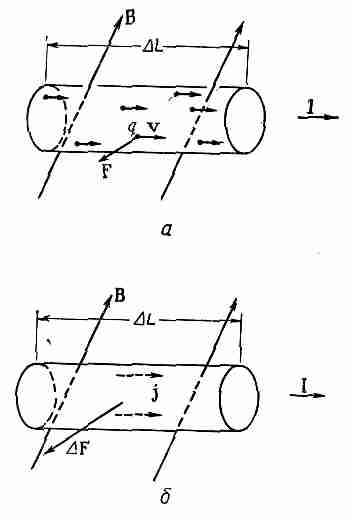
C:\1\pic\gray.jpg

(13.8)

(опять теорема Гаусса из математики!).

**§ 3. Магнитная сила, действующая на ток**

Теперь мы достаточно подготовлены, чтобы определить силу, действующую на находящуюся в магнитном поле проволоку, по которой идет ток. Ток состоит из заряженных частиц, дви­жущихся по проволоке со скоростью v. Каждый заряд чувствует поперечную силу F = qvXB (фиг. 13.5, а).



*Фиг. 13.5. Магнитная сила на проволоку с током равна сумме сил на отдельные движу­щиеся заряды*

Если в еди­ничном объеме таких за­рядов имеется *N, то* их число в малом объеме внутри проволоки ΔV рав­но *N*Δ*V.* Полная магнит­ная сила ΔV, действую­щая на объем ΔV, есть*.* сумма сил на отдельные заряды

C:\1\pic\gray.jpg

C:\1\pic\gray.jpgHo *Nqv* ведь как раз равно j, так что

(13.9)

(фиг. 13.5, *б).* Сила, действующая на единицу объема, равна **JXB.**

Если по проволоке с поперечным сечением *А* равномерно по сечению течет ток, то можно в качестве элемента объема взять цилиндр с основанием А и длиной ΔL. Тогда

ΔF = jXBΔL. (13.10)

Теперь можно jA назвать вектором тока I в проволоке. (Его величина есть электрический ток в проволоке, а его направле­ние совпадает с направлением проволоки.) Тогда

ΔF=IXBΔL. (13.11)

Сила, действующая на единицу длины проволоки, есть **IXB.**

Это уравнение содержит важный результат — магнитная

сила, действующая на проволоку и возникающая от движения в ней зарядов, зависит только от полного тока, а не от величины заряда, переносимого каждой частицей (и даже не зависит от его знака!). Магнитная сила, действующая на проволоку вбли­зи магнита, легко обнаруживается по отклонению проволоки при включении тока, как было нами описано в гл. 1 (см. фиг. 1.6, стр. 20).

**§ 4. Магнитное поле постоянного тока; закон Ампера**

Мы видели, что на проволоку в магнитном поле, создавае­мом, скажем, магнитом, действует сила. Из закона о том, что действие равно противодействию, можно ожидать, что, когда по проволоке [протекает ток,](#прим2) возникает сила, действующая на источник магнитного поля, т. е. на магнит. Такие силы дей­ствительно существуют; в этом можно убедиться по отклонению стрелки компаса вблизи проволоки с током. Далее, мы знаем, что магниты испытывают действие сил со стороны других маг­нитов, а отсюда вытекает, что когда по проволоке течет ток, то он создает собственное магнитное поле. Значит, движущиеся заряды *создают* магнитное поле. Попытаемся понять законы, которым подчиняются такие магнитные поля. Вопрос ставится так: дан ток, какое магнитное поле он создаст? Ответ на этот вопрос был получен экспериментально тремя опытами и под­твержден блестящим теоретическим доказательством Ампера. Мы не будем останавливаться на этой интересной истории, а просто скажем, что большое число экспериментов наглядно показало справедливость уравнений Максвелла. Их мы и возь­мем в качестве отправной точки. Опуская в уравнениях члены с производными по времени, мы получаем уравнения *магнито­статики*

C:\1\pic\gray.jpg

(13.12)

C:\1\pic\gray.jpgи

(13.13)

Эти уравнения справедливы только при условии, что все плотности электрических зарядов и все токи постоянны, так что электрические и магнитные поля не меняются со време­нем — все поля «статические».

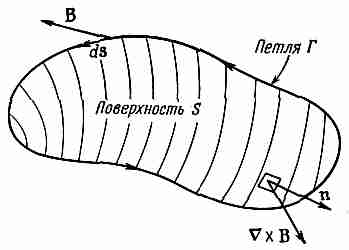
Можно тут заметить, что верить в существование статиче­ского магнитного поля довольно опасно, потому что вообще-то для получения магнитного поля нужны токи, а токи возникают только от движущихся зарядов. Следовательно, «магнитостатика» — только приближение.

Она связана с особым слу­чаем динамики, когда движется *большое число* зарядов, ко­торые можно приближенно описывать как *постоянный* поток зарядов. Только в этом случае можно говорить о плотности тока j, которая не меняется со временем. Более точно эту об­ласть следовало бы назвать изучением постоянных токов. Предполагая, что все поля постоянны, мы отбрасываем члены с d*E/dt* и *dB/dt* в полных уравнениях Максвелла [уравнения (2.41)] и получаем два написанных выше уравнения (13.12) и (13.13). Заметьте также, что поскольку дивергенция ротора любого вектора всегда нуль, то уравнение (13.13) требует, что­бы ∇•j=0. В силу уравнения (13.8) это верно, только если *дρ*/*дt*=0. Но такое может быть, если Е не меняется со време­нем, следовательно, наши предположения внутренне согласо­ваны.

Условие, что ∇•J= 0, означает, что у нас могут быть только заряды, текущие по замкнутым путям. Они могут, например, течь по проводам, образующим замкнутые петли, которые назы­ваются *цепями.* Цепи могут, конечно, содержать генераторы или батареи, поддерживающие ток зарядов. Но в них не должно быть конденсаторов, которые заряжаются или разря­жаются. (Мы, конечно, расширим теорию, включив перемен­ные поля, но сначала мы хотим взять более простой случай постоянных токов.)

Обратимся теперь к уравнениям (13.12) и (13.13) и посмот­рим, что они означают. Первое говорит, что дивергенция В равна нулю. Сравнивая его с аналогичным уравнением электро­статики, по которому ∇•Е=ρ/ε0, можно заключить, что маг­нитного аналога электрического заряда не существует. Не бы­вает *магнитных зарядов,* из которых могли бы исходить ли­нии В. Если говорить о «линиях» векторного поля В, то они нигде не начинаются и нигде не оканчиваются. Но тогда откуда же они берутся? Магнитные поля «появляются» *в присутствии* токов; *ротор,* взятый от них, пропорционален плотности тока. Когда есть токи, есть и линии магнитного поля, образующие петли вокруг токов. Поскольку линии В не имеют ни конца, ни начала, они часто возвращаются в исходную точку, образуя замкнутые петли. Но могут возникнуть и более сложные случаи, когда линии не представляют собой простых петель. Однако как бы они ни шли, они никогда не исходят из точек. Никаких магнитных зарядов никто никогда не находил, поэтому ∇•В=0. Это же утверждение справедливо не только для маг­нитостатики, но справедливо *всегда —* даже для динамических полей.

C:\1\pic\gray.jpgСвязь между полем В и токами дается уравнением (13.13). Положение здесь совсем другое, в корне отличное от элек­тростатики, где у нас было ∇XЕ = 0. Это уравнение означало, что линейный интеграл от Е по любому замкнутому пути равен нулю:



*Фиг. 13.6. Контурный интег­рал от тангенциальной со­ставляющей В равен поверхно­стному интегралу от нормаль­ной составляющей вектора*

*(∇X b).*

Мы получили этот результат с помощью теоремы Стокса, со­гласно которой интеграл по любому замкнутому пути от *любого* векторного поля равен поверхностному интегралу от нормаль­ной компоненты ротора этого вектора (интеграл берется по дюбой поверхности, натянутой на данный контур). Применяя эту же теорему к вектору магнитного поля и используя обо­значения, показанные на фиг. 13.6, получаем

C:\1\pic\gray.jpg

(13.14)

Найдя rot В из уравнения (13.13), имеем

C:\1\pic\gray.jpg

(13.15)

Интеграл от j по *S,* согласно (13.5), есть полный ток I через поверхность *S.* Поскольку для постоянных токов ток через *S* не зависит от формы *S,* если она ограничена кривой Г, то обыч­но говорят о «токе через замкнутую петлю Г». Мы имеем, та­ким образом, общий закон: циркуляция В по любой замкнутой кривой C:\1\pic\gray.jpgравна току I сквозь петлю, деленному на ε0с2:

(13.16)

Этот закон, называемый *законом Ампера,* играет такую же роль в магнитостатике, как закон Гаусса в электростатике. Один лишь закон Ампера не определяет В через токи; мы долж­ны, вообще говоря, использовать также ∇•В=0. Но, как мы увидим в следующем параграфе, он может быть использован для нахождения поля в тех особых случаях, которые обладают некоторой простой симметрией.

**§ 5. Магнитное поле прямого провода и соленоида; атомные токи**

C:\1\pic\gray.jpgМожно показать, как пользоваться законом Ампера, опреде­лив магнитное поле вблизи провода. Зададим вопрос: чему равно поле вне длинного прямолинейного провода цилиндри­ческого сечения? Мы сделаем одно предположение, может быть, не столь уж очевидное, но тем не менее правильное: линии поля В идут вокруг провода по окружности. Если мы сделаем такое предположение, то закон Ампера [уравнение (13.16)] говорит нам, какова величина поля. В силу симметрии задачи поле В имеет одинаковую величину во всех точках окружности, концентрической с проводом (фиг. 13.7). Тогда можно легко взять линейный интеграл от B•ds. Он равен просто величине В, умноженной на длину окружности. Если радиус окружности равен r*,* то

Полный ток через петлю есть просто ток I в проводе, поэтому

C:\1\pic\gray.jpg

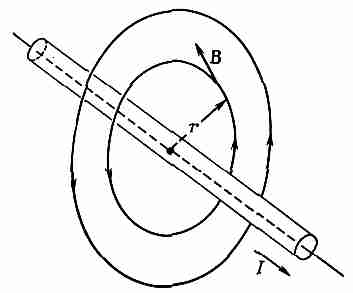
C:\1\pic\gray.jpgили

(13.17)

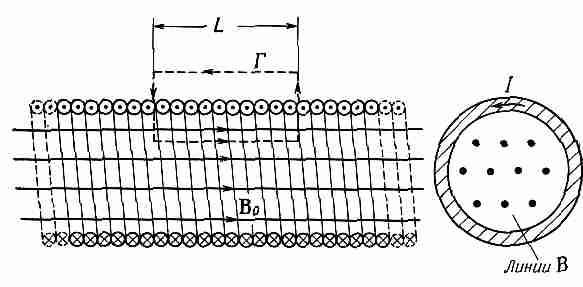
Напряженность магнитного доля спадает обратно пропорцио­нально r, расстоянию от оси провода. При желании уравнение (13.17) можно записать в векторной форме. Вспоминая, что В направлено перпендикулярно как I, так и r, имеем

C:\1\pic\gray.jpg

(13.18)



*Фиг. 13.7. Магнитное поле вне длинного провода с током I.*



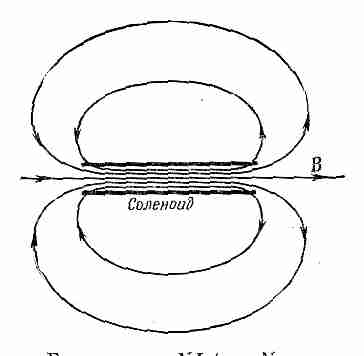
*Фиг. 13.8. Магнитное поле длинного соленоида.*

Мы выделили множитель 1/4πε0с2, потому что он часто по­является. Стоит запомнить, что он равен в точности 10-7 [(в си­стеме единиц СИ)](#прим3), потому что уравнение вида (13.17) исполь­зуется для *определения* единицы тока, ампера. На расстоянии 1 *м* ток в 1а создает магнитное поле, равное 2•10-7 *вебер/м2.*

Раз ток создает магнитное поле, то он будет действовать с некоторой силой на соседний провод, по которому также про­ходит ток. В гл. 1 мы описывали простой опыт, показывающий силы между двумя проводами, по которым течет ток. Если про­вода параллельны, то каждый из них перпендикулярен полю В другого провода; тогда провода будут отталкиваться или при­тягиваться друг к другу. Когда токи текут в одну сторону, провода притягиваются, когда токи противоположно направле­ны,— они отталкиваются.

Возьмем другой пример, который тоже можно проанализи­ровать с помощью закона Ампера, если еще добавить кое-какие сведения о характере поля. Пусть имеется длинный провод, свернутый в тугую спираль, сечение которой показано на фиг. 13.8. Такая спираль называется *соленоидом.* На опыте мы наблюдаем, что когда длина соленоида очень велика по сравнению с диаметром, то поле вне его очень мало по сравне­нию с полем внутри. Используя только этот факт и закон Ам­пера, можно найти величину поля внутри.

Поскольку поле *остается* внутри (и имеет нулевую дивер­генцию), его линии должны идти параллельно оси, как пока­зано на фиг. 13.8. Если это так, то мы можем использовать закон Ампера для прямоугольной «кривой» Г на рисунке. Эта кривая проходит расстояние *L* внутри соленоида, где поле, скажем, равно **В0,** затем идет под прямым углом к полю и возвращается назад по внеш­ней области, где полем можно пренебречь.

******

*Фиг. 13.9. Магнитное поле вне соленоида.*

Линей­ный интеграл от В вдоль этой кривой равен в точ­ности *B0L,* и это должно равняться 1/ε0с2, умноженному на полный ток внутри Г, т. е. на *NI* (где N — число витков соленоида на длине *L).* Мы имеем

***C:\1\pic\gray.jpg***

Или же, вводя n *—* число витков *на единицу длины* соленоида (так что *n=N/L),* мы получаем

***C:\1\pic\gray.jpg***

(13.19)

Что происходит с линиями В, когда они доходят до конца соленоида? По-видимому, они как-то расходятся и возвращают­ся в соленоид с другого конца (фиг. 13.9). В точности такое же поле наблюдается вне магнитной палочки. Ну а *что же такое* магнит? Наши уравнения говорят, что поле В возникает от присутствия токов. А мы знаем, что обычные железные бруски (не батареи и не генераторы) тоже создают магнитные поля. Вы могли бы ожидать, что в правой части (13.12) или (13.13) должны были бы быть другие члены, представляющие «плот­ность намагниченного железа» или какую-нибудь подобную величину. Но такого члена нет. Наша теория говорит, что магнитные эффекты железа возникают от каких-то внутренних токов, уже учтенных членом j.

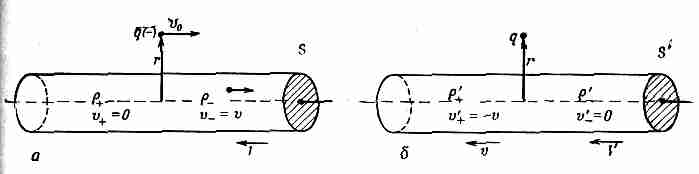
Вещество устроено очень сложно, если рассматривать его с глубокой точки зрения; в этом мы уже убедились, когда пы­тались понять диэлектрики. Чтобы не прерывать нашего из­ложения, отложим подробное обсуждение внутреннего меха­низма магнитных материалов типа железа. Пока придется принять, что любой магнетизм возникает за счет токов и что в постоянном магните имеются постоянные внутренние токи. В случае железа эти токи создаются электронами, вращающи­мися вокруг собственных осей. Каждый электрон имеет такой спин, который соответствует крошечному циркулирующему току. Один электрон, конечно, не дает большого магнитного поля, но в обычном куске вещества содержатся миллиарды и миллиарды электронов. Обычно они вращаются любым образом, так что суммарный эффект исчезает. Удивительно то, что в немногих веществах, подобных железу, большая часть элек­тронов крутится вокруг осей, направленных в одну сторону,— у железа два электрона из каждого атома принимают участие в этом совместном движении. В магните имеется большое число электронов, вращающихся в одном направлении, и, как мы увидим, их суммарный эффект эквивалентен току, циркули­рующему по поверхности магнита. (Это очень похоже на то, что мы нашли в диэлектриках,— однородно поляризованный диэлектрик эквивалентен распределению зарядов на его по­верхности.) Поэтому не случайно, что магнитная палочка эк­вивалентна соленоиду.

**§ 6. Относительность магнитных** и **электрических** **полей**

Когда мы сказали, что магнитная сила на заряд пропорциональна его скорости, вы, наверное, подумали: «Какой скорости? По отношению к какой системе отсчета?» Из определения В, данного в начале этой главы, на самом деле ясно, что этот век­тор будет разным в зависимости от выбора системы отсчета, в которой мы определяем скорость зарядов. Но мы ничего не сказали о том, какая же система подходит для определения магнитного поля.

Оказывается, что годится *любая* инерциальная система. Мы увидим также, что магнетизм и электричество — не неза­висимые вещи, они всегда должны быть взяты в совокупности как *одно* полное электромагнитное поле. Хотя в статическом случае уравнения Максвелла разделяются на две отдельные пары: одна пара для электричества и одна для магнетизма, без видимой связи между обоими полями, тем не менее в самой природе существует очень глубокая взаимосвязь между ними, возникающая из принципа относительности. Исторически принцип относительности был открыт после уравнений Мак­свелла. В действительности же именно изучение электричества и магнетизма привело Эйнштейна к открытию принципа отно­сительности. Но посмотрим, что наше знание принципа отно­сительности подскажет нам о магнитных силах, если предпо­ложить, что принцип относительности применим (а в действи­тельности так оно и есть) к электромагнетизму.

Давайте подумаем, что произойдет с отрицательным заря­дом, движущимся со скоростью v0параллельно проволоке, по которой течет ток (фиг. 13.10).

******

*Фиг. 13.10. Взаимодействие проволоки с током и частицы с зарядом q,*

*рассматриваемое в двух системах координат.*

*а — в системе S покоится проволока; б — в системе S' покоится заряд.*

Постараемся разобраться в происходящем, используя две системы отсчета: одну, связан­ную с проволокой, как на фиг. 13.10, *а,* а другую — с частицей, как на фиг. 13.10, *б.* Мы будем называть первую систему отсче­та *S,* а вторую *S'.*

В системе *S* на частицу явно действует магнитная сила. Сила направлена к проволоке, поэтому, если заряду ничего не ме­шает, его траектория загнется в сторону проволоки. Но в си­стеме *S'* магнитной силы на частицу быть не может, потому что скорость частицы равна нулю. Что же, следовательно, она так и будет стоять на месте? Увидим ли мы в разных системах разные вещи? Принцип относительности утверждает, что в си­стеме *S'* мы увидели бы тоже, как частица приближается к проволоке. Мы должны попытаться понять, почему такое могло бы произойти.

Вернемся к нашему атомному описанию проволоки, по ко­торой идет ток. В обычном проводнике, вроде меди, электри­ческие токи возникают за счет движения части отрицательных электронов (называемых электронами проводимости), тогда как положительные ядерные заряды и остальные электроны ос­таются закрепленными внутри материал а. Пусть плотность электронов проводимости есть ρ, а их скорость в системе *S* есть v. Плотность неподвижных зарядов в системе *S* есть ρ+, что долж­но быть равно ρ- с обратным знаком, потому что мы берем не­заряженную проволоку. Поэтому вне проволоки электриче­ского поля нет, и сила на движущуюся частицу равна просто

F=qv0XB.

***C:\1\pic\gray.jpg***Используя результат, найденный нами в уравнении (13.18) для магнитного поля на расстоянии rот оси проволоки, мы заключаем, что сила, действующая на частицу, направлена к проволоке и равна по величине

***C:\1\pic\gray.jpg***С помощью уравнений (13.4) и (13.5) ток I может быть за­писан как ρ+vA, где А — площадь поперечного сечения про­волоки. Тогда

(13.20)

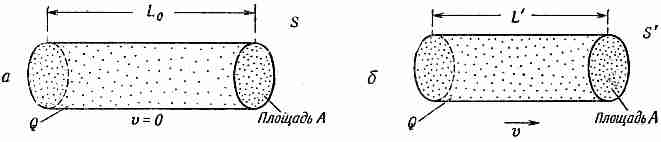
***C:\1\pic\gray.jpg***Мы могли бы продолжить рассмотрение общего случая про­извольных скоростей *v* и *v0,* но ничуть не хуже будет взять частный случай, когда скорость *v0* частицы совпадает со ско­ростью *v* электронов проводимости. Поэтому мы запишем *v=v0 ,* и уравнение (13.20) приобретет вид

(13.21)

Теперь обратимся к тому, что происходит в системе *S',* где частица покоится и проволока бежит мимо нее (влево на фиг. 13.10, б) со скоростью *v.* Положительные заряды, движущие­ся вместе с проволокой, создадут около частицы некоторое маг­нитное поле *В'.* Но частица теперь *покоится,* так что *магнит­ная* сила на нее не действует! Если и возникает какая-то сила, то она должна появиться за счет электрического поля. Выхо­дит, что движущаяся проволока создает электрическое поле. Но она может это сделать, только если она кажется *заряжен­ной;* должно получаться так, чтобы нейтральная проволока с током казалась заряженной, если ее привести в движение.

Нужно в этом разобраться. Попробуем вычислить плот­ность зарядов в проволоке в системе S', пользуясь тем, что мы знаем о ней в системе *S.* На первый взгляд можно было бы по­думать, что плотности одинаковы, но из гл. 15 (вып. 2) мы знаем, что при переходе от одной системы к другой длины меняются, следовательно, объемы также изменятся. Поскольку *плотности* зарядов зависят от объема, занимаемого зарядами, плотности будут также меняться.

Прежде чем определить плотности зарядов в системе *S',* нужно знать, что происходит с электрическим *зарядом* группы электронов, когда заряды движутся. Мы знаем, что кажущаяся масса частицы приобретает множитель 1/√(1-v2/c2). Происходит ли что-нибудь подобное с ее зарядом? Нет! *Заряды* никогда *не меняются* независимо от того, движутся ли они или нет. Иначе мы не могли бы наблюдать на опыте сохранение полного заряда.

******Возьмем кусок вещества, например проводника, и пусть он вначале незаряжен. Теперь нагреем его. Поскольку масса электронов иная, чем у протонов, скорости электронов и про­тонов изменятся по-разному. Если бы заряд частицы зависел от скорости частицы, которая его переносит, то в нагретом куске заряды электронов и протонов не были бы скомпенсированы. Кусок материала при нагревании становился бы заряженным.

Фиг. *13.11****.*** *Если распределение заряженных частиц имеет плотность зарядов* р0, *то с точки зрения системы, движущейся с относительной скоростью v, плотность зарядов будет равна* ρ=ρ0/√ (1 - v2/с2).

Мы видели раньше, что очень малое изменение заряда у каж­дого из электронов в куске привело бы к огромным электриче­ским полям. Ничего подобного никогда не наблюдалось.

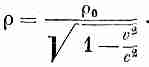
Кроме того, можно заметить, что средняя скорость электро­нов в веществе зависит от его химического состава. Если бы заряд электрона менялся со скоростью, суммарный заряд в куске вещества изменялся бы в ходе химической реакции. Как и раньше, прямое вычисление показывает, что даже совсем малая зависимость заряда от скорости привела бы в простей­ших химических реакциях к огромным полям. Ничего похо­жего не наблюдалось, и мы приходим к выводу, что электриче­ский заряд отдельной частицы не зависит от состояния движе­ния или покоя.

Итак, заряд частицы *q* есть инвариантная скалярная вели­чина, не зависящая от системы отсчета. Это означает, что в любой системе плотность зарядов у некоторого распределения электронов просто пропорциональна числу электронов в еди­нице объема. Нам нужно только учесть тот факт, что объем *может* меняться из-за релятивистского сокращения расстояний.

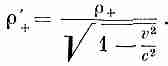
Применим теперь эти идеи к нашей движущейся проволоке. Если взять проволоку длиной L0, в которой плотность *непод­вижных* зарядов есть ρ0, то в ней будет содержаться полный за­ряд *Q-*ρ*0L0A0.* Если те же заряды движутся в другой системе со скоростью *v,* то они все будут находиться в куске материала ***C:\1\pic\gray.jpg****меньшей* длины

(13.22)

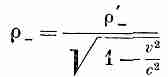
но того же сечения A0, поскольку размеры в направлении, пер­пендикулярном движению, не меняются (фиг. 13.11).

******Если через ρ обозначить плотность зарядов в системе, где они движутся, то полный заряд *Q* будет ρ*LA0.* Но это должно быть также равно ρ*0L0А,* потому что заряд в любой системе одинаков, следовательно, ρL=ρ0L0, или с помощью (13.22)

(13.23)

*******Плотность* зарядов движущейся *совокупности* зарядов меня­ется таким же образом, как и релятивистская масса частицы. Применим теперь этот результат к плотности положительных зарядов ρ+ в нашей проволоке. Эти заряды покоятся в систе­ме *S.* Однако в системе S", где проволока движется со скоростью *v,* плотность положительных зарядов становится равной

(13.24)

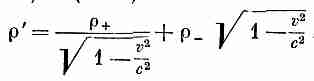
*******Отрицательные* заряды в системе *S'* покоятся, поэтому их плотность в этой системе есть «плотность покоя» ρ0. В уравне­нии (13.23) ρ0=ρ-, потому что их плотность зарядов равна ρ- , если *проволока* покоится, т. е. в системе S, где скорость отри­цательных зарядов равна *v.* Тогда для электронов проводимости мы получаем

(13;25)

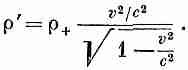
***C:\1\pic\gray.jpg***или

(13.26)

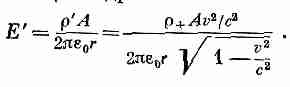
***C:\1\pic\gray.jpg***Теперь мы можем понять, почему в системе *S'* возникают электрические поля: потому что в этой системе в проволоке имеется результирующая плотность зарядов ρ', даваемая формулой

****С помощью (13.24) и (13.26) имеем

Поскольку покоящаяся проволока нейтральна, ρ- = -ρ+, получаем

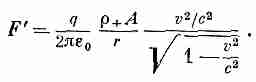
******

(13.27)

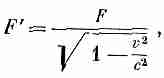
******Наша движущаяся проволока заряжена положительно и должна создавать поле *Е'* в точке, где находится внешняя по­коящаяся частица. Мы уже решали электростатическую задачу об однородно заряженном цилиндре. Электрическое поле на расстоянии r от оси цилиндра есть

(13.28)

Сила, действующая на отрицательно заряженную частицу, на­правлена к проволоке. Мы имеем силу, направленную одина­ково в обеих системах; электрическая сила в системе *S'* на­правлена так же, как магнитная сила в системе *S.* Величина силы в системе S' равна

******

(13.29)

Сравнивая этот результат для *F'* с нашим результатом для *F в* уравнении (13.21), мы видим, что величины сил с точки зре­ния двух наблюдателей почти одинаковы. Точнее,

(13.30)

поэтому для малых скоростей, которые мы рассматриваем, обе силы одинаковы. Мы можем сказать, что по меньшей мере для малых скоростей магнетизм и электричество суть просто «две разные стороны одной и той же вещи».

Но оказывается, что все обстоит даже еще лучше, чем мы сказали. Если принять во внимание тот факт, что *силы* также преобразуются при переходе от одной системы к другой, то окажется, что оба способа наблюдения за происходящим дают на самом деле одинаковые *физические* результаты при лю­бой скорости.

Чтобы это увидеть, можно, например, задать вопрос: ка­кой поперечный импульс приобретет частица, на которую в тече­ние некоторого времени действовала сила? Мы знаем из вып. 2, гл. 16, что поперечный импульс частицы должен быть один и тот же как в системе *S,* так ив системе S'. Обозначим попереч­ную координату *у* и сравним *Δрy* и *Δрy’ .* Используя релятивист­ски правильное уравнение движения *F—dp/dt,* мы ожидаем, что за время *Δt* наша частица приобретет поперечный импульс *Δрy* в системе *S,* даваемый выражением

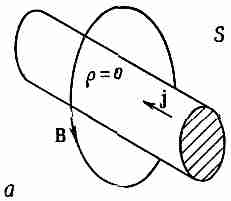
C:\1\pic\gray.jpg

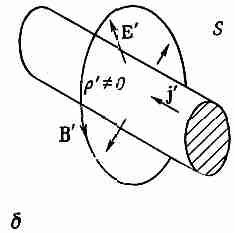
(13.31)

В системе S' поперечный импульс будет равен

C:\1\pic\gray.jpg

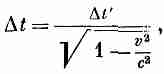
(13.32)





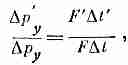
*Фиг. 13.12. В системе S плот­ность зарядов есть нуль, а плот­ность тока равна* j. *Есть только магнитное поле. В системе S' плотность зарядов равна* р', *а плотность тока* j'. *Магнитное поле здесь равно* В' *и существует электрическое поле* Е'.

Мы должны сравнивать Δрy и Δрy' , конечно, для соответствующих интер­валов времени Δt и Δt'. В гл. 15 (вып. 2) мы видели, что интервалы времени, относящиеся к движущейся частице, кажутся *длиннее* интерва­лов в системе покоя частицы. По­скольку наша частица первоначаль­но была в покое в системе *S',* то

мыожидаем, что для малых Δ*t*

(13.33)

и все получается великолепно. Согласно (13.31) и (13.32),



и если скомбинировать (13.30) и (13.33), то это отношение равно единице.

Вот и выходит, что мы получаем один и тот же результат, независимо от того, анализируем ли мы движение летящей рядом с проволокой частицы в системе покоя проволоки или в системе покоя частицы. В первом случае сила была чисто «магнитной», во втором — чисто «электрической». Оба способа наблюдения показаны на фиг. 13.12 (хотя во второй системе еще есть и магнитное поле В', оно не воздействует на непод­вижную частицу).

Если бы мы выбрали еще одну систему координат, мы бы нашли некую другую смесь полей E и В. Электрические и магнитные силы составляют части *одного* физического явления— электромагнитного взаимодействия частиц. Разделение этого взаимодействия на электрическую и магнитную части в большой степени зависит от системы отсчета, в которой мы описываем взаимодействие. Но полное электромагнитное описание инва­риантно; электричество и магнетизм, вместе взятые, согла­суются с принципом относительности, открытым Эйнштей­ном.

Раз электрические и магнитные поля появляются в разных соотношениях при изменении системы отсчета, мы должны проявлять осторожность в обращении с полями Е и В. Если, например, мы говорим о «линиях» Е или В, то не нужно пре­увеличивать реальность их существования. Линии могут ис­чезнуть, если мы захотим увидеть их в другой системе коорди­нат. Например, в системе *S'* имеются линии электрического поля, однако мы *не видим* их «движущимися мимо нас со ско­ростью v в системе S1». В системе *S* линий электрического поля нет вообще! Поэтому бессмысленно говорить что-нибудь вроде: «Когда я двигаю магнит, он несет свое поле с собой, поэтому линии поля В тоже движутся». Нет никакого способа сделать вообще осмысленным понятие о «скорости движущихся линий поля».

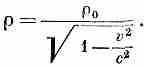
Поля суть способ описания того, что происходит в неко­торой точке пространства. В частности, Е и В говорят нам о силах, которые будут действовать на движущуюся частицу. Вопрос «чему равна сила, действующая на заряд со стороны *движущегося* магнитного поля?» не имеет сколько-нибудь точ­ного содержания. Сила дается величинами Е и В в точке за­ряда, и формула (13.1) не изменится, если *источник* полей Е или В движется (изменятся в результате движения как раз значения Е и В). Наше математическое описание относится только к полям как функциям *х, у, z* и *t,* взятым *в некоторой инерциалъной системе отсчета.*

Позднее мы будем говорить о *«волне* электрического и маг­нитного полей, распространяющейся в пространстве», напри­мер о световой волне. Но это все равно, что говорить о *волне,* бегущей по веревке. Мы при этом не имеем в виду, что какая-нибудь часть *веревки* движется в направлении волны, а подра­зумеваем, что *смещение* веревки появляется сначала в одном месте, а затем в другом. Аналогично для электромагнитной волны — сама *волна* распространяется, а величина полей *изме­няется.*

Так что в будущем, когда мы — или кто-нибудь еще — будем говорить о «движущемся» поле, вы должны понимать, что речь идет просто о коротком и удобном способе описания изменяющегося ноля в определенных условиях.

**§ 7. Преобразование токов и зарядов**

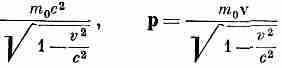
Вы, вероятно, были обеспокоены сделанным нами упроще­нием, когда мы взяли одну и ту же скорость v для частицы и электронов проводимости в проволоке. Можно было бы вер­нуться назад и снова проделать анализ с двумя разными ско­ростями, но легче просто заметить, что плотность заряда и тока являются компонентами четырехвектора (см. вып. 2, гл. 17).

Мы видели уже, что если ρ0 есть плотность зарядов в их системе покоя, то в системе, где они имеют скорость v, плотность равна

В этой системе их плотность тока есть

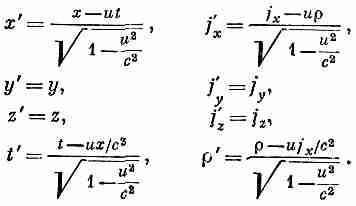


(13.34)

Далее, мы знаем, *что* энергия *U* и импульс частицы *р,* движущейся со скоростью v, даются выражениями

где m*0* *—* ее масса покоя. Мы знаем также, что *U* и р обра­зуют релятивистский четырехвектор. Поскольку ρ и j зави­сят от скорости v в точности, как *U* и р, то можно заклю­чить, что ρ и j *также* компоненты релятивистского четырехвектора. Это свойство есть ключ к общему анализу поля проволоки, движущейся с любой скоростью, и мы могли бы его использовать, если бы захотели решить снова задачу со скоростью частицы v0, не равной скорости электронов про­водимости.

Если нам нужно перевести ρ и j в систему координат, движущуюся со скоростью *и* в направлении *х,* то мы знаем, что они преобразуются в точности как *t* и *(х, у, z);* поэтому мы имеем (см. вып. 2, гл. 15)



(13.35)

С помощью этих уравнений можно связать заряды и токи в одной системе с зарядами и токами в другой. Взяв заряды и токи в какой-то системе, можно решить электромагнитную задачу в этой системе, пользуясь уравнениями Максвелла. Результат, который мы получим *для движения частиц,* будет одним и тем же, независимо от выбранной системы отсчета. Позже мы вернемся к релятивистским преобразованиям элек­тромагнитных полей.

**§ 8. Суперпозиция; правило правой руки**

C:\1\pic\gray.jpgМы закончим эту главу еще двумя замечаниями по вопро­сам магнитостатики. Первое: наши основные уравнения для магнитного поля

линейны до В и j. Это означает, что принцип суперпозиции (наложения) приложим и к магнитному полю. Поле, создава­емое двумя разными постоянными токами, есть сумма собствен­ных полей от каждого тока, действующего по отдельности. Наше второе замечание относится к правилам правой руки, с которыми мы уже сталкивались (правило правой руки для магнитного поля, создаваемого током). Мы указывали также, что намагничивание железного магнита объясняется вращением электронов в материале. Направление магнитного поля вра­щающегося электрона связано с осью его вращения тем же самым правилом правой руки. Поскольку В определяется правилом определенной руки (с помощью либо векторного произведения, либо ротора), он называется *аксиальным* век­тором. (Векторы, направление которых в пространстве не за­висит от ссылок на левую или правую руку, называются *по­лярными* векторами. Например, смещение, скорость, сила и Е — полярные векторы.)

*Физически наблюдаемые* величины в электромагнетизме, однако, *не связаны* с правой или левой рукой. Из гл. 52 (вып. 4) мы знаем, что электромагнитные взаимодействия симметричны по отношению к отражению. При вычислении магнитных сил между двумя наборами токов результат всегда инвариантен по отношению к перемене рук. Наши уравнения, независимо от условия правой руки, приводят к конечному результату, что параллельные токи притягиваются, а противоположные — отталкиваются. (Попробуйте вычислить силу с помощью «пра­вила левой руки».) Притяжение или отталкивание есть поляр­ный вектор. Так получается потому, что при описании любого полного взаимодействия мы пользуемся правилом правой руки дважды — один раз, чтобы найти В из токов, а затем, чтобы найти силу, оказываемую полем В на второй ток. Два раза пользоваться правилом правой руки — все равно что два раза пользоваться правилом левой руки. Если бы мы условились перейти к системе левой руки, все наши поля В изменили бы знак, но все силы или (что, пожалуй, нагляднее) наблюдаемые ускорения объектов не изменились бы.

Хотя физики недавно, к своему удивлению, обнаружили, что *не все* законы природы всегда инвариантны по отношению к зеркальным отражениям, тем не менее законы электромаг­нетизма обладают этой фундаментальной симметрией.

***\* Или, короче,─ тесла. ─ прим. ред.***

\*Потом мы увидим, что такие предположения, вообще говоря, неправильны для электромагнитных сил!

***\*Это и есть магнитная проницаемость пустоты.***

***Глава 14***

**МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В РАЗНЫХ СЛУЧАЯХ**

[**§1.Векторный п****отенциал**](#а1)

[**§2.Векторный потенциал** **заданных токов**](#а2)

[**§3. Прямо****й провод**](#а3)

[**§4.Длинный с****оленоид**](#а4)

[**§5.Поле мален****ькой петли; магнитный диполь**](#а5)

[**§6. Векторный по****тенциал цепи**](#а6)

[**§7.3акон Био—****Савара**](#а7)

**§ 1, Векторный потенциал**

В этой главе мы продолжим разговор о магнитостатике, т, е. о постоянных магнитных полях и постоянных токах. Магнитное поле и электрические токи связаны нашими основными уравнениями:

C:\1\pic\gray.jpg

(14.1)

и

C:\1\pic\gray.jpg

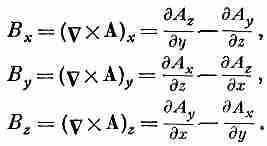
(14.2)

На этот раз нам нужно решить эти уравне­ния математически самым *общим образом,* а не ссылаться на какую-нибудь особую симметрию или на интуицию. В электростатике мы нашли прямой способ вычисления поля, когда из­вестны положения всех электрических зарядов: скалярный потенциал ϕ дается просто инте­гралом по зарядам, как в уравнении (4.25) на стр. 77. Если затем нужно знать электри­ческое поле, то его получают дифференцирова­нием ϕ. Мы покажем сейчас, что для нахожде­ния поля В существует аналогичная процедура, если известна плотность тока j всех движу­щихся зарядов.

В электростатике, как мы видели (из-за того, что rot от Е везде равен нулю), всегда можно представить Е в виде градиента от ска­лярного поля ϕ. А вот rot от В *не везде* равен нулю, поэтому представить его в виде градиента, вообще говоря, невозможно. Однако *диверген­ция* В везде равна нулю, а это значит, что мы можем представить В в виде *ротора* от другого векторного поля. Ибо, как мы видели в гл. 2, § 8, дивергенция ротора всегда равна нулю. Следовательно, мы всегда можем выразить В через поле, которое мы обозначим А:

C:\1\pic\gray.jpg

(14.3)

Или, расписывая компоненты:

(14.4)

C:\1\pic\gray.jpgЗапись B=∇XA гарантирует выполнение (14.1), потому что обязательно

Поле А называется *векторным потенциалом.*

Вспомним, что скалярный потенциал ϕ оказывается не полностью определенным. Если мы нашли для некоторой зада­чи потенциал ϕ, то всегда можно найти столь же хороший дру­гой потенциал ϕ', добавив постоянную:

C:\1\pic\gray.jpg

Новый потенциал ϕ' дает те же электрические поля, потому что градиент ∇*С* есть нуль; ϕ' и ϕ отвечают одной и той же картине.

C:\1\pic\gray.jpgТочно так же у нас может быть несколько векторных по­тенциалов А, приводящих к одним и тем же магнитным полям. Опять-таки, поскольку В получается из А дифференцированием, то прибавление к А константы не меняет физики дела. Но для А свобода больше. Мы можем добавить к А любое поле, которое есть градиент от некоторого скалярного поля, не меняя при этом физики. Это можно показать следующим образом. Пусть у нас есть А, которое в какой-то реальной задаче дает правиль­ное поле В. Спрашивается, при каких условиях другой век­торный потенциал А', будучи подставлен в (14.3), дает *то же самое* поле В. Значит, А и А' имеют одинаковый ротор

Поэтому

C:\1\pic\gray.jpg

C:\1\pic\gray.jpgНо если ротор вектора есть нуль, то вектор должен быть гра­диентом некоторого скалярного поля, скажем ψ, так что А'-A=∇ψ. Это означает, что если А есть векторный потен­циал, отвечающий данной задаче, то при любом ψ

(14.5)

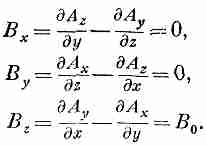
также будет векторным потенциалом, в одинаковой степени удовлетворяющим данной задаче и приводящим к тому же полю В.

Обычно бывает удобно уменьшить «свободу» А, накладывая на него произвольно некоторое другое условие (почти таким же образом мы считали удобным — довольно часто — выбирать потенциал ср равным нулю на больших расстояниях). Мы можем, например, ограничить А, наложив на него такое условие, чтобы дивергенция А чему-нибудь равнялась. Мы всегда можем это сделать, не задевая В. Так получается потому, что, хотя А' и А имеют одинаковый ротор и дают одно и то же В, они вовсе не обязаны иметь одинаковую дивергенцию. В самом деле, ∇•A' = ∇•A+∇2ψ, и, подбирая соответствующее ψ, можно придать ∇•A' любое значение.

Чему следует приравнять ∇•А? Выбор должен обеспечить наибольшее математическое удобство и зависит от нашей задачи. Для *магнитостатики* мы сделаем простой выбор

∇•A = 0. (14.6)

(Потом, когда мы перейдем к электродинамике, мы изменим наш выбор.) Итак, наше полное [определение](#прим1) А в данный момент есть ∇XA=B и ∇•А=0.

Чтобы привыкнуть к векторному потенциалу, посмотрим сначала, чему он равен для однородного магнитного поля В0. Выбирая ось z в направлении В0, мы должны иметь

(14.7)

Рассматривая эти уравнения, мы видим, что одно из *возможных* решений есть

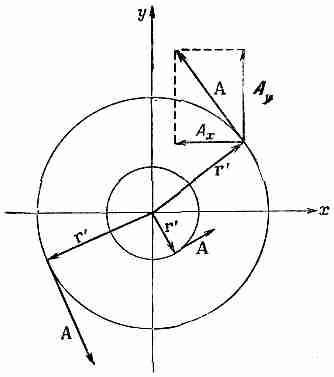
C:\1\pic\gray.jpg

C:\1\pic\gray.jpgИли с тем же успехом можно взять

Еще одно решение есть комбинация первых двух

C:\1\pic\gray.jpg

Ясно, что для каждого поля В векторный потенциал А не един­ственный; существует много возможностей.



*Фиг. 14.1. Однородное маг­нитное поле* В, *направленное по оси z, соответствует векторному потенциалу* А *(А=Вr'/2), который вращается вокруг оси z.* т' *— расстояние до оси z.*

Третье решение [уравнение (14.8)] обладает рядом интерес­ных свойств. Поскольку x-компонента пропорциональна -y, а y-компонента пропорциональна *-+x,* то вектор А должен быть перпендикулярен вектору, проведенному от оси z, кото­рый мы обозначим r' (штрих означает, что это *не вектор* рас­стояния от начала). Кроме того, величина А пропорциональна √(x2+y2) и, следовательно, пропорциональна r*'.* Поэтому А (для однородного поля) может быть записано просто

C:\1\pic\gray.jpg

(14.9)

Векторный потенциал А равен по величине Br*' /*2*,* и вращается вокруг оси z, как показано на фиг. 14.1. Если, например, поле В есть поле внутри соленоида вдоль его оси, то векторный по­тенциал циркулирует точно таким же образом, как и токи в соленоиде.

C:\1\pic\gray.jpgВекторный потенциал однородного поля может быть полу­чен и другим способом. Циркуляция А вдоль любой замкнутой петли Г может быть выражена через поверхностный интеграл от ∇XА с помощью теоремы Стокса [уравнение (3.38), стр. 63]

(14.10)

Но интеграл справа равен потоку В сквозь петлю, поэтому

C:\1\pic\gray.jpg

(14.11)

Итак, циркуляция А вдоль *всякой* петли равна потоку В сквозь петлю. Если мы возьмем круглую петлю радиуса r' в плоско­сти, перпендикулярной однородному полю В, то поток будет в точности равен

C:\1\pic\gray.jpg

C:\1\pic\gray.jpgЕсли выбрать начало отсчета в центре петли, так что А можно считать направленным по касательной и функцией толь­ко от r', то циркуляция будет равна

Как и раньше, получаем

C:\1\pic\gray.jpg

В только что разобранном примере мы вычисляем вектор­ный потенциал из магнитного поля, обычно поступают наоборот. В сложных задачах всегда проще найти векторный потенциал, а затем уже из него найти магнитное поле. Сейчас мы покажем, как это можно сделать.

**§ 2. Векторный потенциал** **заданных токов**

C:\1\pic\gray.jpgРаз В определяется токами, значит, и А тоже. Мы хотим теперь выразить А через токи. Начнем с нашего основного уравнения (14.2):

C:\1\pic\gray.jpgоткуда, конечно, следует

C:\1\pic\gray.jpgЭто уравнение для магнитостатики; оно похоже на уравнение

(14.13)

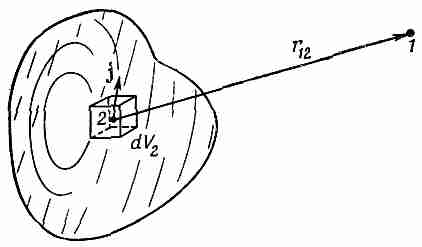
для электростатики.

C:\1\pic\gray.jpgНаше уравнение (14.12) для векторного потенциала ста­нет еще более похожим на уравнение для ϕ, если перепи­сать ∇X(∇X А), используя векторное тождество [см. уравне­ние (2.58) стр. 44]

(14.14)

C:\1\pic\gray.jpgПоскольку мы выбрали ∇•А=0 (и теперь вы видите, по­чему), уравнение (14.12) приобретает вид

(14.15)



*Фиг. 14.2. Векторный потенциал* А *в точке 1 определяется интегралом по элементам тока jdV во всех точках 2.*

### Это векторное уравнение, конечно, распадается на три урав­нения

C:\1\pic\gray.jpg

C:\1\pic\gray.jpgи каждое из этих уравнений *математически идентично* уравнению

(14.17)

Все, что мы узнали о нахождении потенциала для извест­ного ρ, можно использовать для нахождения каждой компо­ненты А, когда известно j!

C:\1\pic\gray.jpgВ гл. 4 мы видели, что общее решение уравнения элект­ростатики (14.17) имеет вид

C:\1\pic\gray.jpgТогда мы немедленно получаем общее решение для *Аx:*

(14.18)

и аналогично для *Ау* и *Az.* (Фиг. 14.2 напоминает вам о при­нятых нами обозначениях для r12 и *dV2.)* Мы можем объ­единить все три решения в векторной форме:

C:\1\pic\gray.jpg

(14.19)

(Вы можете при желании проверить прямым дифференцирова­нием компонент, что этот интеграл удовлетворяет ∇•А=0, поскольку ∇•j=0, а последнее, как мы видели, должно вы­полняться для постоянных токов.)

Мы имеем, таким образом, общий метод вычисления маг­нитного поля от постоянных токов. Принцип такой: x-компонента векторного потенциала, возникающая от плотности тока j, точно такая же, как электрический потенциал ϕ, который был бы создан плотностью зарядов р, равной *jx/c2,* и ана­логично для *у-* и z-компонент. (Этот принцип действует только для декартовых компонент. Например, «радиальная» компо­нента А не связана таким же образом с «радиальной» компонен­той j.) Итак, из вектора плотности тока j можно найти А, пользуясь уравнениями (14.19), т. е. мы находим каждую ком­поненту А, решая три воображаемые электростатические зада­чи для распределений заряда ρ1=jx/с2, ρ2=jу/с2 и ρ3=jz/с2. Затем мы находим В, вычислив разные производные от А, входящие в ухА. Немного сложнее, чем в электростатике, но идея та *же.* Сейчас мы проиллюстрируем теорию, вычислив векторный потенциал в нескольких частных случаях.

**§ 3. Прямой провод**

В качестве первого примера снова вычислим поле прямого провода, которое мы находили в предыдущем параграфе, поль­зуясь уравнением (14.2) и соображениями симметрии. Возьмем длинный прямой провод радиуса *а,* по которому течет постоян­ный ток I. В отличие от заряда в проводнике в случае электро­статики постоянный ток в проводе распределен равномерно по поперечному сечению провода. При таком выборе координат, как показано на фиг. 14.3, вектор плотности тока j имеет только z-компоненту. По величине она равна

C:\1\pic\gray.jpg

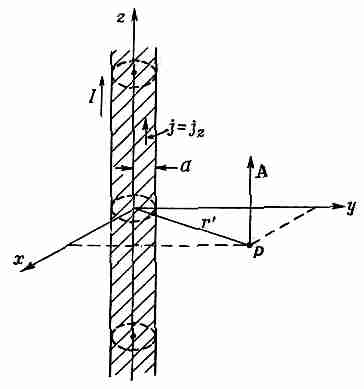
(14.20)

внутри провода и нулю вне его.

Поскольку j*х* и jy оба равны нулю, то сразу же получим

*Ах = 0, Ау = 0.*

Чтобы получить *Аг,* мож­но использовать наше ре­шение для электростати­ческого потенциала ϕ от провода с однородной плотностью заряда ρ=/г/с2.



*Фиг. 14.3. Длинный цилинд­рический провод с однородной плотностью тока j, направлен­ный вдоль оси z.*

C:\1\pic\gray.jpgДля точек вне бесконечного заряженного цилиндра электростатический потенциал равен

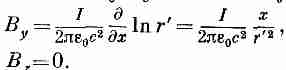
C:\1\pic\gray.jpgгде r'=√(x2+y2), a λ, — заряд на единицу длины πа2ρ. Следо­вательно, *Аг* должно быть равно

C:\1\pic\gray.jpgдля точек вне длинного провода с равномерно распределен­ным током. Поскольку πа2jz=I то можно также написать

(14.21)

Теперь можно найти В, пользуясь (14.4). Из шести про­изводных от нуля отличны только две. Получаем

C:\1\pic\gray.jpg

(14.22)

,(14.23)

C:\1\pic\gray.jpgМы получаем тот же результат, что и раньше: В обходит про­вод по окружности и по величине равен

(14.24).

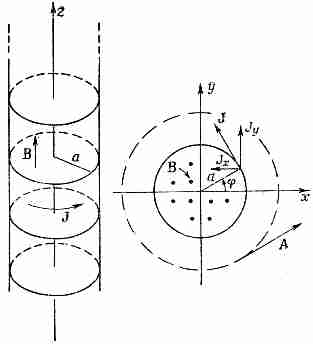
**§ 4. Длинный соленоид**

Еще пример. Рассмотрим опять бесконечно длинный соле­ноид с током по окружности, равным *пI* на единицу длины. (Мы считаем, что имеется nвитков проволоки на единицу дли­ны, несущих каждый ток I, и пренебрегаем небольшими зазо­рами между витками.)

C:\1\pic\gray.jpgТочно так же, как мы выводили «поверхностную плотность заряда» а, определим здесь «поверхностную плотность тока» J, равную току на единице длины по поверхности соленоида (что, конечно, есть просто среднее j, умноженное на толщину тонкой намотки). Величина J здесь равна *nI.* Этот поверхностный ток (фиг. 14.4) имеет компоненты

Мы должны теперь найти А для такого распределения токов. Прежде всего найдем *Ах в* точках вне соленоида. Резуль­тат такой же, как электростатический потенциал вне цилиндра с поверхностным зарядом:

C:\1\pic\gray.jpg



*Фиг. 14.4. Длинный соленоид с поверхностной плотностью тока J.*

где σ0=-,//c2. Мы не решали случай такого распределения заряда, но делали нечто по­хожее. Это распределение заряда эквивалентно двум *жестким* цилиндрам, состоя­щим из зарядов, один из положительных, другой из отрицательных, с малым относи­тельным смещением их осей в направлении *у.* Потенциал такой пары цилиндров пропорционален производной по *у* от потен­циала одного однородно заряженного цилиндра. Мы, конечно, можем вычислить константу пропорциональности, но пока не будем возиться с этим.

C:\1\pic\gray.jpgПотенциал заряженного цилиндра пропорционален lnr'; потенциал пары тогда равен

Итак, мы знаем, что

C:\1\pic\gray.jpg

(14.25)

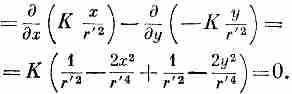
где *К —* некоторая константа. Рассуждая точно так же, найдем

C:\1\pic\gray.jpg

(14.26)

Хотя мы раньше говорили, что вне соленоида *магнитного* поля нет, теперь мы находим, что поле А существует и цир­кулирует вокруг оси z (см. фиг. 14.4). Возникает вопрос: равен ли нулю его ротор?

Очевидно, *Вх* и *Вy* равны нулю, а



Итак, магнитное поле вне очень длинного соленоида действи­тельно равно нулю, хотя векторный потенциал нулю не равен.

Мы можем проверить наш результат, прибегнув к другим соображениям. Циркуляция векторного потенциала вокруг соленоида должна равняться потоку *В* внутри катушки [урав­нение (14.11)]. Циркуляция равна *А•2πr'* или, поскольку *А=К1r',* она равна *2πК.* Заметьте, что циркуляция не зави­сит от r'. Так и должно быть, если В вне соленоида отсутствует, потому что поток есть просто величина В *внутри* соленоида, умноженная на πа2. Он один и тот же для всех окружностей с радиусом r'>а. Раньше мы нашли, что поле внутри равно n//e0c2, поэтому мы можем определить константу *К:*

C:\1\pic\gray.jpg

или

*C:\1\pic\gray.jpg*

Итак, векторный потенциал *снаружи* имеет величину

*C:\1\pic\gray.jpg*

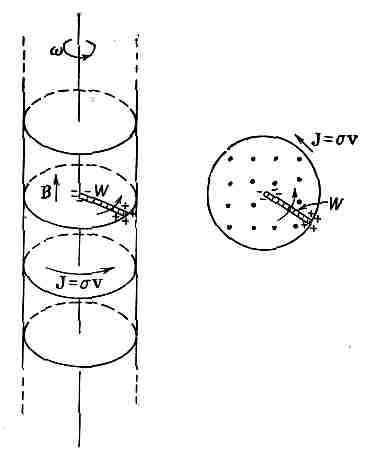
(14.27)

и всегда перпендикулярен вектору r'.

Мы говорили о соленоидальной катушке из проволоки, но такое же поле мы могли бы создать, вращая длинный ци­линдр с электростатическим зарядом на поверхности. Если у нас есть тонкий цилиндрический слой радиуса *а с* поверхност­ным зарядом σ, то вращение цилиндра образует поверхностный ток *J=*σ*v,* где v=σω — скорость поверхностного заряда. Внут­ри цилиндра тогда будет магнитное поле B=σaω/ε0с2.

Теперь можно поставить интересный вопрос. Предположим, что перпендикулярно к оси цилиндра мы поместили короткий отрезок проволоки *W* от оси до поверхности и прикрепили ее к цилиндру так, что проволока вращается вместе с ним (фиг. 14.5). Эта проволока движется в магнитном поле, так что сила vXB приведет к тому, что концы проволоки зарядятся (они будут заряжаться до тех пор, пока поле Е зарядов не урав­новесит силы vXB). Если цилиндр заряжен положительно, то конец проволоки вблизи оси будет иметь отрицательный заряд. Измеряя заряд на конце проволоки, мы могли бы опре­делить скорость вращения системы. Мы получили бы «угловой скоростемер» (или «угловой ситометр»)!

Но вы, наверно, засомневаетесь: «А что, если я сам перей­ду,— скажете вы,— в систему координат вращающегося ци­линдра? Там заряженный цилиндр покоится, а я знаю из электростатических уравнений, что внутри цилиндра никакого поля *не будет,* не будет и силы, толкающей заряды к центру. Поэтому здесь что-то не так?» Нет. Все правильно.

**

*Фиг. 14.5.**Вращающийся за­ряженный цилиндр создает внутри себя магнитное поле.*

*Короткая проволока, закрепленная вдоль радиуса, вращаясь вместе с цилиндром, приобретает на своих концах индуцированные заряды.*

«Относительности враще­ния» не существует. Вра­щающаяся система — *не* инерциальная система, и законы физики в ней дру­гие. Мы должны пользо­ваться уравнениями элек­тромагнетизма только в инерциальных системах координат.

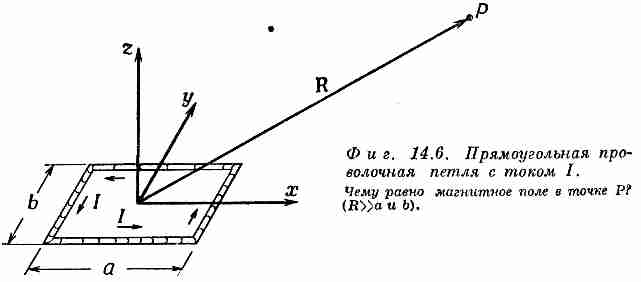
Было бы здорово, если бы смогли измерить абсолютное вра­щение Земли с помощью такого заряженного цилиндра, но эф­фект, к несчастью, настолько мал, что его невозможно наблю­дать даже с помощью самых тонких современных приборов.

**§ 5. Поле маленькой петли; магнитный диполь**

Воспользуемся методом векторного потенциала, чтобы найти магнитное поле маленькой петли с током. Как обычно, под словом «маленькая» мы просто подразумеваем, что нас интере­суют поля только на больших расстояниях по сравнению с раз­мером петли. Как мы увидим, любая петелька представляет собой «магнитный диполь». Это значит, что она создает *магнитное* поле, подобное электрическому полю от электриче­ского диполя.

Возьмем сначала прямоугольную петлю и выберем оси ко­ординат, как показано на фиг. 14.6. Токов в направлении z нет, поэтому *Az* равно нулю. Есть токи в направлении *х* по обеим сторонам прямоугольника, длина которых *а.* В каждой стороне плотность тока и ток однородны. Поэтому решение для *Ах* в точности подобно электростатическому потенциалу от двух заряженных палочек (фиг. 14.7). Поскольку палочки имеют противоположные заряды, их электрический потенциал на больших расстояниях есть как раз дипольный потенциал (см. гл. 6, *C:\1\pic\gray.jpg*§ 5). В точке *Р* на фиг. 14.6 потенциал равен

(14.28)

**

где р — дипольный момент распределения зарядов. В данном случае дипольный момент равен полному заряду на одной палочке, умноженному на расстояние между ними:

*C:\1\pic\gray.jpg*

(14.29)

*C:\1\pic\gray.jpg*Дипольный момент смотрит в отрицательном направлении y, поэтому косинус угла между R и р равен —*ylR* (где *у —* координата *Р).* Итак, мы имеем

Заменяя *λ* на I/с2, сразу же получаем *Ах:*

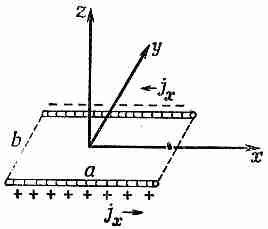
*C:\1\pic\gray.jpg*

(14.30)

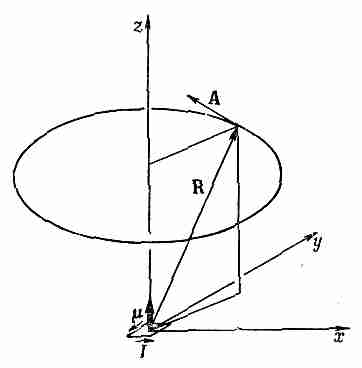
С помощью тех же рассуждений:

*C:\1\pic\gray.jpg*

(14.31)

**

*Фиг. 14.7. Распределение jx в проволочной петле о током, изо­браженной на фиг. 14.6.*

**

*Фиг. 14.8. Векторный потен­циал маленькой петли с током, расположенной в начале коорди­нат (в плоскости ху). Поле магнитного диполя*.

Снова *Ау* пропорциональ­но *х,* а *Ах* пропорцио­нально —y, так что век­торный потенциал (на больших расстояниях) идет по кругу вокруг оси z, циркулируя таким же образом, как ток I в петле (фиг. 14.8).

Величина А пропорциональна I*ab, т.* е. току, умноженному на площадь петли. Это произведение называется *магнитным дипольным моментом* (или часто просто «магнитным момен­том») петли. Мы обозначим его через μ:

*C:\1\pic\gray.jpg*

(14.32)

*C:\1\pic\gray.jpg*Векторный потенциал маленькой плоской петельки *любой* формы (круг, треугольник и т. п.) также дается уравнениями (14.30) и (14.31), если заменить I*ab* на

(14.33)

Мы предоставляем вам право это доказать.

Нашему уравнению можно придать векторную форму, если определить вектор μкак нормаль к плоскости петли с поло­жительным направлением, определяемым по правилу правой руки (см. фиг. 14.8). Тогда можно написать

*C:\1\pic\gray.jpg*

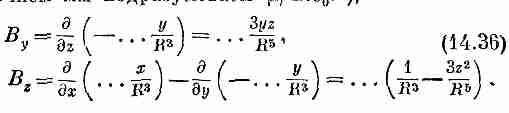
(14.34)

Нам еще нужно найти В. Пользуясь (14.33) и (14.34), а также (14.4). получаем

*C:\1\pic\gray.jpg*

(14.35)

(под многоточием мы подразумеваем μ/4πε0с2),

**

Компоненты поля В ведут себя точно так же, как компоненты поля Е для диполя, ориентированного вдоль оси z [см. уравне­ния (6.14) и (6.15), а также фиг. 6.5, стр. 115]. Вот почему мы называем петлю магнитным диполем. Слово «диполь» в при­менении к магнитному полю немного запутывает, потому что *нет* отдельных магнитных «полюсов», соответствующих элек­трическим зарядам. Магнитное «дипольное поле» создается не двумя «зарядами», а элементарной петлей с током.

В общем-то довольно любопытно, что, начав с совсем раз­ных законов, ∇•Е=ρ/ε0 и ∇XВ=j/ε0с2, можно прийти к полю одного и того же вида. Почему так получается? Потому что дипольные поля возникают, только когда мы находимся далеко от всех токов и зарядов. Тогда в большей части пространства уравнения для Е и В одинаковы: у обоих дивергенция и ротор равны нулю. Следовательно, они дают одни и те же решения. Однако *источники,* конфигурацию которых мы описываем с помощью дипольных моментов, физически совершенно различ­ны. В одном случае это циркулирующий ток, а в другом — пара зарядов, один над, а другой под плоскостью петли для соответствующего поля.

**§ 6. Векторный потенциал цепи**

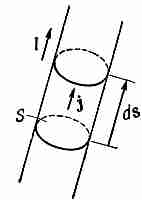
Нас часто интересует магнитное поле, создаваемое цепью проводов, в которой диаметр провода очень мал по сравнению с размерами всей системы. В таких случаях мы можем упро­стить уравнения для магнитного поля.

Для тонкого провода элемент объема можно записать в виде

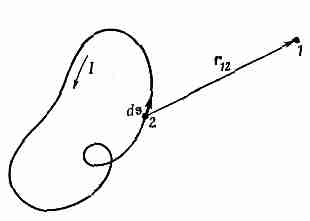
*dV = Sds,*

где *S —* площадь поперечного сечения провода, a *ds —* эле­мент расстояния вдоль проволоки. В самом деле, поскольку вектор *ds* имеет то же направление, что и j (фиг. 14.9), и мы можем предположить, что j постоянно по любому данному сечению, то можно записать векторное уравнение

*C:\1\pic\gray.jpg*

**(14.37)

*Фиг. 14.9. Для тонкой проволоки jdV то же самое, что и Ids.*

**

*Фиг. 14.10. Магнитное поле провода может быть получено интегрированием по всей цепи.*

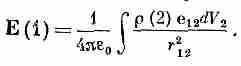
*C:\1\pic\gray.jpg*Ho *jS —* как раз то, что мы называем током I во всем проводе, так что наш интеграл для векторного потенциала (14.19) ста­новится равным

(14.38)

(фиг. 14.10). (Мы предполагаем, что / одно и то же вдоль всего контура. Если есть несколько ответвлений с разными токами, то следует, конечно, брать соответствующий ток в каждой ветви.)

Как и раньше, можно найти поле с помощью (14.38) либо прямым интегрированием, либо решая соответствующую элек­тростатическую задачу.

**§ 7. Закон Био— Савара**

**В ходе изучения электростатики мы нашли, что электриче­ское поле известного распределения зарядов может быть получено сразу в виде интеграла [уравнение (4.16)]

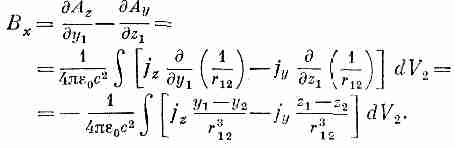
Как мы видели, вычислить этот интеграл (а их на самом деле три, по одному на каждую компоненту) обычно бывает труднее, чем вычислить интеграл для потенциала и взять от него гра­диент.

*C:\1\pic\gray.jpg*Подобный интеграл связывает и магнитное поле с токами. Мы уже имеем интеграл для А [уравнение (14.19)]; мы можем получить интеграл и для В, если возьмем ротор от обеих частей:

А теперь мы должны быть осторожны. Оператор ротора озна­чает взятие производных от А(1), т. е. он действует только на координаты (x1, y1, z1). Можно внести оператор ∇X под ин­теграл, если помнить, что он действует только на переменные со значком 1, которые появляются, конечно, только в

*C:\1\pic\gray.jpg*

Мы получаем для x-компоненты В:



(14.41)

C:\1\pic\gray.jpgВеличина в скобках есть просто x-компонента от

C:\1\pic\gray.jpgТакие же результаты получаются и для других компонент, и мы имеем

(14.42)

Интеграл дает В сразу через известные токи. Геометрия здесь точно такая же, какая изображена на фиг. 14.2.

C:\1\pic\gray.jpgЕсли токи текут только по тонким проводам, мы можем, как в предыдущем параграфе, немедленно взять интеграл по­перек провода, заменив j*dV* на I*ds,* где d*s —* элемент длины провода. Тогда, пользуясь обозначениями фиг. 14.10, имеем

(14.43)

(Знак минус появляется потому, что мы изменили порядок векторного произведения.) Это уравнение для В называется *законом Био — Савара* в честь открывших его ученых. Он дает формулу для прямого вычисления магнитного поля, создава­емого проводами с током.

Вероятно, вы удивились: «Какой же прок от векторного по­тенциала, если мы можем сразу найти В в виде векторного ин­теграла? В конце концов А тоже определяется тремя интегра­лами!» Из-за векторного произведения интегралы для В обычно сложнее устроены, как это видно из уравнения (14.41). Кроме того, поскольку интегралы для А похожи на электростатиче­ские, то нам не надо их вычислять заново. Наконец, мы уви­дим, что в более трудных теоретических вопросах, таких, как теория относительности, в современном изложении законов механики, вроде принципа наименьшего действия, о котором будет рассказано позже, в квантовой механике, векторный потенциал играет важную роль.

***\*Наше определение все еще не полностью задает А. Чтобы задание было единственным, мы должны были бы лто-нибудь сказать о поведении поля А на какой-либо границе или на больших расстояниях. Иногда бывает удобно выбрать, например, поле, спадающее к нулю на больших расстоя­ниях.***