***Глава 15***

**ВЕКТОРНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ**

[**§ 1. Силы, действующи****е на петлю с током; энергия диполя**](#а1)

[**§ 2. Механическая** **и электрическая энергии**](#а2)

[**§ 3. Энергия пос****тоянных токов**](#а3)

[**§ 4. В и****ли А?**](#а4)

[**§ 5. Вектор****ный потенциал и квантовая механика**](#а5)

[**§ 6. Что истинно в с****татике, но ложно в динами­ке?**](#а6)

**§ 1. Силы, действующие на петлю с током; энергия диполя**

В предыдущей главе мы изучали магнитное поле, создаваемое маленькой прямоугольной петлей, по которой течет ток. Мы нашли, что это поле диполя с дипольным моментом, равным

**μ= IA**,(15.1)

где I — сила тока, *a A —* площадь петли. Момент направлен по нормали к плоскости петли, так что можно писать и так:

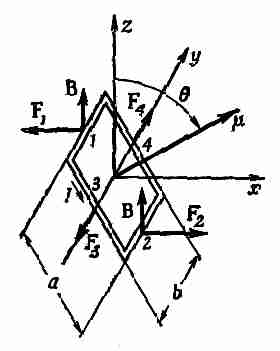
**μ=IАn,**

где n — единичный вектор нормали к пло­щади *А.*

Петли с током, или магнитные диполи, не только создают магнитные поля, но и сами подвергаются действию силы, попав в магнит­ное поле других токов. Рассмотрим сперва силы, действующие на прямоугольную петлю в однородном магнитном поле. Пусть ось z направлена по полю, а ось *y* лежит в плоскости петли, образующей с плоскостью xyугол θ (фиг. 15.1). Тогда магнитный момент петли, будучи нормальным к ее плоскости, образует с магнитным полем тоже угол θ.

Раз токи на противоположных сторонах петли текут в противоположные стороны, то и силы, действующие на них, тоже направлены врозь, а суммарная сила равна нулю (в одно­родном поле). Но благодаря силам, действую­щим на стороны, обозначенные на фиг. 15.1 цифрами *1* и *2,* возникает вращательный момент, стремящийся вращать петлю вокруг оси *у.* Величина этих сил *Fl* и F2 такова:

***F1=F2=IBb.***



*Фиг. 15.1. Прямоугольная петля с током I в однородном поле* В, *направленном по оси z.*

*Действующий на нее вращательный момент* равен *τ=μXB*, *где* магнитный *момент μ=Iab.*

Их плечо равно

C:\1\pic\gray.jpg

C:\1\pic\gray.jpgтак что вращательный момент

Вращательный момент может быть записан и векторно:

C:\1\pic\gray.jpg

(15.2)

То, что вращательный момент дается уравнением (15.2), мы показали пока только для довольно частного случая. Но ре­зультат, как мы увидим, верен для маленьких петель любой формы. Полезно напомнить, что и для вращательного момента, действующего на электрический диполь, мы получили соотно­шение подобного же рода:

C:\1\pic\gray.jpg

C:\1\pic\gray.jpgСейчас нас интересует механическая энергия нашей петли, по которой течет ток. Раз есть момент вращения, то энергия, естественно, зависит от ориентации петли. Принцип виртуаль­ной же работы утверждает, что момент вращения — это ско­рость изменения энергии с углом, так что можно написать

Подставляя τ =+μBsinθ и интегрируя, мы вправе принять за энергию выражение

C:\1\pic\gray.jpg

(Знак минус стоит потому, что петля стремится развернуть свой момент по полю; энергия ниже всего тогда, когда μ и В параллельны.)

C:\1\pic\gray.jpgПо причинам, о которых мы поговорим позже, эта энергия *не есть* полная энергия петли с током. (Мы, к примеру, не учли энергии, идущей на поддержание тока в петле.) По­этому мы будем называть ее Uмех, чтобы не забыть, что это лишь часть энергии. И, кроме того, постоянную интегриро­вания в (15.3) мы вправе принять равной нулю, все равно ведь какие-то другие виды энергии мы не учли. Так что мы перепишем уравнение так:

(15.4)

Опять получилось соответствие с электрическим диполем, где было

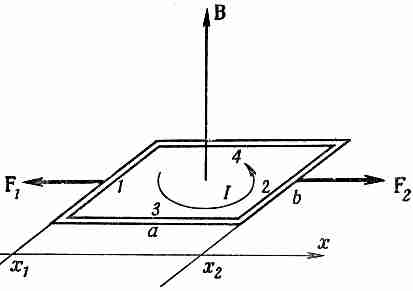
C:\1\pic\gray.jpg

(15.5)

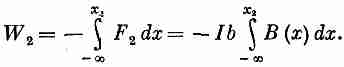
Только в (15.5) электрическая энергия — и вправду энергия, а U*мех* в (15.4) — не настоящая энергия. Но все равно ее *можно* применять для расчета сил по принципу виртуальной работы. Надо только предполагать, что ток в петле (или по крайней мере магнитный момент μ) остается неизменным при повороте.

Для нашей прямоугольной петли можно показать, что Uмех соответствует также работе, затрачиваемой на то, чтобы внести петлю в поле. Полная сила, действующая на петлю, равна нулю лишь в однородном поле, а в неоднородном все равно *останутся* какие-то силы, действующие на токовую петлю. Внося петлю в поле, мы вынуждены будем пронести ее через места, где поле неоднородно, и там будет затрачена работа. Будем считать для упрощения, что петлю вносят в поле так, что ее момент направлен вдоль поля. (А в конце, уже в поле, ее можно повер­нуть как надо.)

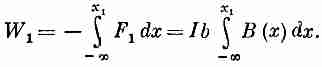
Вообразите, что мы хотим двигать петлю в направлении *x, т.* е. в ту область, где поле сильнее, и что петля ориентирована так, как показано на фиг. 15.2. Мы отправимся оттуда, где поле равно нулю, и будем интегрировать силу по расстоянию по мере того, как петля входит в поле.



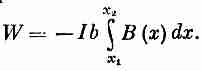
*Фиг. 15.2. Петлю проносят через поле* В *(поперек него) в направлении x.*

Рассчитаем сначала работу переноса каждой стороны по отдельности, а затем все сложим (вместо того, чтобы складывать силы до интегрирования). Силы, действующие на стороны *3* и *4,* направлены поперек движения, так что на эти стороны работа не тратится. Сила, действующая на сторону *2,* направлена по xи равна *1bВ(x);* чтобы узнать всю работу против действия магнитных сил, нужно проинтегрировать это выражение по xот некоторого значения *х,* где поле равно нулю, скажем, от *х* = -∞ до теперешнего положения *х2:*

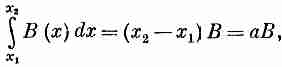
(15.6)

Подобно этому, и работа против сил, действующих на сторону 1*,равна*

(15.7)

Чтобы вычислить каждый интеграл, надо знать, как *В(х)* зависит от *х.* Но ведь сторона 1при движении рамки распо­ложена все время параллельно стороне 2на одном и том же расстоянии от нее, так что в ее интеграл входит почти вся работа, затраченная на перемещение стороны *2.* Сумма (15.6) и (15.7) на самом деле равна

(15.8)

Но, попав в область, где *В* на обеих сторонах *1* и *2* почти оди­наково, мы имеем право записать интеграл в виде

где *В —* поле в центре петли. Вся вложенная механическая энергия оказывается равной

C:\1\pic\gray.jpg

Это согласуется с выражением для энергии (15.4), выбранным нами прежде.

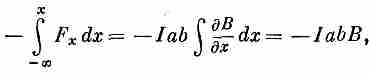
C:\1\pic\gray.jpgКонечно, тот же вывод получился бы, если бы мы до инте­грирования сложили все силы, действующие на петлю. Если бы мы обозначили через *В1* поле у стороны 1 а через *В2* — поле у стороны *2,* то вся сила, действующая в направлении *х,* оказа­лась бы равной

Если петля «узкая», т. е. если *В2* и *В1* не очень различаются между собой, то можно было бы написать

C:\1\pic\gray.jpg

C:\1\pic\gray.jpgТак что сила была бы равна

(15.10)

Вся работа, произведенная *внешними* силами над петлей, рав­нялась бы

C:\1\pic\gray.jpgа это опять -*μВ.* Но теперь нам становится понятно, почему получается, что *сила,* действующая на небольшую токовую петлю, пропорциональна производной магнитного поля, как это следовало ожидать из

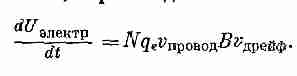
Другой наш результат состоит в следующем. Хоть и не исклю­чено, что не все виды энергии вошли в формулу Uмех= μ•B (ведь это просто некоторая имитация энергии), ею все же можно пользоваться, применяя принцип виртуальной работы, чтобы узнать, какие силы действуют на петли с постоянным током.

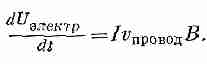
**§ 2. Механическая и электрическая энергии**

Теперь мы хотим пояснить, почему энергия Uмех, о которой говорилось в предыдущем параграфе, не настоящая энергия, связанная с постоянными токами, почему у нее нет прямой связи с полной энергией всей Вселенной. Правда, мы подчерк­нули, что ею можно пользоваться как энергией, когда вычис­ляешь силы из принципа виртуальной работы, *при условии,* что ток в петле (и все *прочие* токи) не меняется. Посмотрим теперь, почему же все так выходит.

Представим, что петля на фиг. 15.2 движется в направлении +*х,* а ось z примем за направление В. Электроны проводимости на стороне *2* будут испытывать действие силы, толкающей их вдоль провода, в направлении *у.* Но в результате их движения по проводу течет электрический ток и имеется составляющая скорости *vy* в том же направлении, в котором действует сила. Поэтому над каждым электроном каждую секунду будет произво­диться работа *Fyvy ,* где *vy —* компонента скорости электрона, направленная вдоль провода. Эту работу, совершаемую над электронами, мы назовем *электрической.* Оказывается, что когда петля движется в *однородном* поле, то полная электриче­ская работа равна нулю, потому что на одной части петли работа положительная, а на другой — равная ей отрица­тельная. Но при движении контура в неоднородном поле это не так — тогда *остается* какой-то чистый избыток одной работы над другой. Вообще-то эта работа стремится изменить поток электронов, но если он поддерживается неизменным, то энергия поглощается или высвобождается в батарейке или в другом источнике, сохраняющем ток постоянным. Вот именно эта энергия и не учитывалась, когда мы вычисляли Uмех в (15.9), потому что в наши расчеты входили только механические силы, действующие на провод.

Вы можете подумать: но сила, действующая на электроны, зависит от того, насколько *быстро* движется провод; быть мо­жет, если бы провод двигался достаточно медленно, этой элект­рической энергией можно было бы вообще пренебречь. Дейст­вительно, *скорость,* с какой высвобождается электрическая энер­гия, пропорциональна скорости провода, но все же полная выделенная энергия пропорциональна к тому же еще и *времени,* в течение которого проявлялась эта скорость. В итоге полная выделенная электрическая энергия пропорциональна произве­дению скорости на время, а это как раз и есть пройденное расстояние. Каждому пройденному в поле расстоянию отвечает заданное, и притом одно и то же, количество электрической работы.

Возьмем кусок провода единичной длины, по которому течет ток I. Провод движется перпендикулярно самому себе и маг­нитному полю В со скоростью v;провод. Благодаря наличию тока сами электроны обладают скоростью дрейфа *vдрейф* вдоль провода. Компонента магнитной силы, действующей на каждый электрон в направлении дрейфа, равна *qe v*провод *В.* Значит, скорость, с какой производится электрическая работа, равна Fvдрейф = (qevпровод*В)v*дрейф. Если на единице длины провода имеется N проводящих электронов, то вся величина электрической работы, производимой в секунду, такова:

Но Nqеvдрейф равно току I в проводе, так что

И поскольку ток поддерживается неизменным, то силы, действующие на электроны проводимости, не ускоряют их; электрическая энергия переходит не к электронам, а к тому источнику, который сохраняет силу тока постоянной.

Но заметьте, что сила, действующая на *провод,* равна *IB;* значит, IBvпровод — это *механическая работа,* выполняемая над проводом в единицу времени, *dUмех/dt* = IBvпровод. Отсюда мы заключаем, что механическая работа перемещения провода в точности равна электрической работе, производимой над источником тока, так что энергия петли *остается постоянной!*

Это не случайность. Это следствие закона, с которым мы уже знакомы. Полная сила, действующая на каждый из заря­дов в проводе, равна

C:\1\pic\gray.jpg

Скорость, с которой производится работа, равна

C:\1\pic\gray.jpg

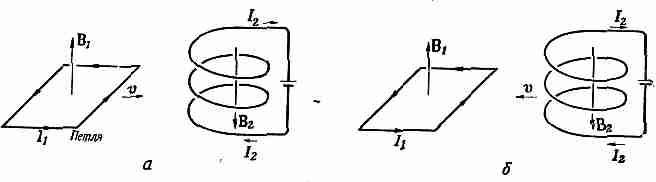
(15.12)

Если электрического поля нет, то остается только второе слага­емое, а оно всегда равно нулю. Позже мы увидим, что *изменение* магнитных полей создает электрические поля, так что наши рас­суждения применимы лишь к проводам в постоянных магнит­ных полях.

Но тогда почему же принцип виртуальной работы дает правильный ответ? Потому, что *пока* мы не учитывали *полную* энергию Вселенной. Мы не включали в рассмотрение энергию тех токов, которые *создают* магнитное поле, с самого начала присутствующее в наших рассуждениях.

Но представим себе полную систему, наподобие изображен­ной на фиг. 15.3,а, где петля с током I вдвигается в магнитное поле **B1** созданное током I2 в катушке. ТокI1, текущий по петле, тоже будет создавать какое-то магнитное поле **В2** близ катушки. Если петля движется, то поле **В2** изменяется. В следующей главе мы увидим, что изменяющееся магнитное поле создает поле Е, и это поле действительно начнет действовать на заряды в катушке. Эту энергию мы обязаны включить в наш сводный баланс энергий.

Мы, конечно, могли бы подождать говорить об этом новом вкладе в энергию до следующей главы, но уже сейчас можно оценить его, если применить соображения принципа относи­тельности.



*Фиг. 15.3. Вычисление энергии маленькой петли в магнитном поле.*

C:\1\pic\gray.jpgПриближаем петлю к неподвижной катушке и знаем, что электрическая энергия петли в точности равна и противо­положна по знаку произведенной механической работе. Иначе говоря,

Теперь предположим, что мы смотрим на происходящее с другой точки зрения: будем считать, что петля покоится, а катушка приближается к ней. Тогда катушка движется в поле, создан­ном петлей. Те же рассуждения приведут к выражению

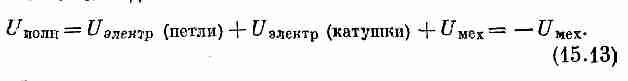
C:\1\pic\gray.jpg

Механическая энергия в обоих случаях одна и та же — она определяется только силой, действующей между двумя конту­рами.

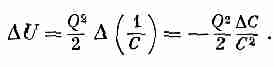
Сложение двух уравнений дает

C:\1\pic\gray.jpg

Полная энергия всей системы равна, конечно, сумме двух элект­рических энергий и взятой *один раз* механической энергии. В итоге выходит



C:\1\pic\gray.jpgПолная энергия всей системы — это на самом деле Uмех *со знаком минус.* Если нам нужна, скажем, полная энергия магнитного диполя, то следует писать

И только тогда, когда мы потребуем, чтобы все токи оставались постоянными, можно использовать лишь одну из частей энергии Uмех (всегда равную истинной анергии со знаком минус) для вычисления механических сил. В более общих задачах надо соблюдать осторожность, чтобы не забыть ни одной из энергий. Сходное положение наблюдалось и в электростатике. Мы показали там, что энергия конденсатора равна *Q2/2C.* Когда мы применяем принцип виртуальной работы, чтобы найти силу, действующую между обкладками конденсатора, то изменение энергии равно Q2/2, умноженному на изменение в 1*/С,* т. е.

(15.14)

А теперь предположим, что нам надо было бы подсчитать работу, затрачиваемую на сближение двух проводников, но при другом условии — что напряжение между ними остается постоянным. Тогда правильную величину силы мы могли бы получить из принципа виртуальной работы, если бы поступили немного искусственным образом. Раз *Q = CV,* то полная энер­гия равна 1/2 *CV2.* Но если бы мы ввели условную энергию, равную —1/2CV2, то принцип виртуальной работы можно было бы применить для получения сил, полагая изменение этой условной энергии равным механической работе (это при условии, что напряжение *V* C:\1\pic\gray.jpgсчитается постоянным). Тогда

(15.15)

а это то же самое, что написано в уравнении (15.14). Мы полу­чаем правильный ответ, хотя пренебрегаем работой, которую электрическая система тратит на постоянное поддержание напряжения. И здесь опять электрическая энергия ровно вдвое больше механической и имеет обратный знак.

Итак, если мы ведем расчет искусственно, пренебрегая тем фактом, что источник потенциала должен тратить работу на то, чтобы напряжение оставалось неизменным, то все равно мы приходим к правильному результату. Это в точности соответ­ствует положению дел в магнитостатике.

**§ 3. Энергия постоянных токов**

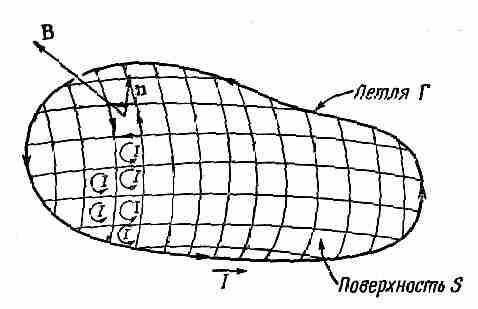
Зная, что Uполн = -Uмех, используем этот факт, чтобы найти истинную энергию постоянных токов в магнитных полях. Начать можно с истинной энергии небольшой токовой петельки. Обозначая *Uполн* просто через U*,* напишем

***U = μ•В***.(15.16)

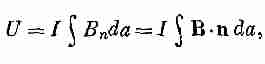
Хотя эту энергию мы подсчитали только для плоской прямо­угольной петли, все это верно и для плоской петельки произ­вольной формы.

Энергию контура произвольной формы можно найти, пред­ставив себе, что он состоит из небольших токовых петель. Ска­жем, имеется провод в форме петли Г (фиг. 15.4). Натянем на эту петлю поверхность *S,* а на ней наметим множество петелек, каждую из которых можно считать плоской. Если заставить ток I циркулировать по *каждой* петельке, то в итоге выйдет то же самое, как если бы ток шел только по петле Г, ибо токи на всех внутренних линиях взаимно уничтожатся. Система не­больших токов физически не будет отличима от исходного контура, и энергия должна быть той же, т. е. должна быть равна сумме энергий всех петелек.

Если площадь каждой петельки Δа, то ее энергия равна IΔаBn, где Bn — компонента *В,* нормальная к Δа. Полная энергия равна ***U = ΣIBnΔа.***

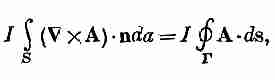


*Фиг. 15.4. Энергию большой петли в магнитном поле можно считать суммой энергий маленьких петелек.*

В пределе, когда петли становятся бесконечно малыми, сумма превращается в интеграл, и

(15.17)

где n — единичная нормаль к *da,*

Если мы положим В = ∇XA, то поверхностный интеграл можно будет связать с контурным (по теореме Стокса):

(15.18)

где *ds —* линейный элемент вдоль Г. Итак, мы получили энер­гию контура произвольной формы:

(15.19)

В этом выражении А обозначает, конечно, векторный потен­циал, возникающий из-за токов (отличных от тока / в про­воде), которые создают поле В близ провода.

C:\1\pic\gray.jpgДалее, любое распределение постоянных токов можно считать состоящим из нитей, идущих вдоль тех линий, по кото­рым течет ток. Для любой пары таких контуров энергия дается выражением (15.19), где интеграл взят вокруг одного из кон­туров, а векторный потенциал А создан другим контуром. Пол­ная энергия получается сложением всех таких пар. Если вместо того, чтобы следить за парами, мы полностью просуммируем по всем нитям, то каждую энергию мы засчитаем дважды (та­кой же эффект мы наблюдали в электростатике), и полную энергию можно будет представить в виде

(15.20)

Это соответствует полученному для электростатической энергии выражению

C:\1\pic\gray.jpg

(15.21)

Значит, мы можем считать А, если угодно, своего рода потен­циальной энергией токов в магнитостатике. К сожалению, это представление не очень полезно, потому что оно годится только для статических полей. В действительности, если поля со временем меняются, ни выражение (15.20), ни выражение (15.21) не дают правильной величины энергии.

**§ 4. B или А?**

В этом параграфе нам хотелось бы обсудить такой вопрос: что такое векторный потенциал — просто полезное для расче­тов приспособление (так в электродинамике полезен скалярный потенциал) или же он как поле вполне «реален»? Или же «реаль­но» лишь магнитное поле, так как только оно ответственно за силу, действующую на движущуюся частицу?

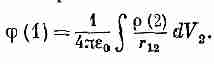
Для начала нужно сказать, что выражение «реальное поле» реального смысла не имеет. Во-первых, вы вряд ли вообще полагаете, что магнитное поле хоть в какой-то степени «реаль­но», потому что и сама идея поля — вещь довольно отвлеченная. Вы не можете протянуть руку и пощупать это магнитное поле. Кроме того, величина магнитного поля тоже не очень опреде­ленна; выбором подходящей подвижной системы координат можно, к примеру, добиться, чтобы магнитное поле в данной точке вообще пропало.

Под «реальным» полем мы понимаем здесь вот что: реальное поле — это математическая функция, которая используется нами, чтобы избежать представления о дальнодействии. Если в точке *Р* имеется заряженная частица, то на нее оказывают влияние другие заряды, расположенные на каком-то удалении от *Р.* Один прием, которым можно описать взаимодействие,— это говорить, что прочие заряды создают какие-то «условия» (какие — не имеет значения) в окрестности *Р.* Если мы знаем эти условия (мы их описываем, задавая электрическое и маг­нитное поля), то можем полностью определить поведение части­цы, нимало не заботясь после о том, что именно создало эти условия.

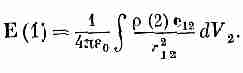
Иными словами, если бы эти прочие заряды каким-то обра­зом изменились, а условия в *Р,* описываемые электрическим и магнитным полем в точке Р, остались бы прежними, то движение заряда тоже не изменилось бы. «Реальное» поле тогда есть сово­купность чисел, заданных так, что то, что происходит в *некото­рой точке,* зависит только от чисел *в этой точке* и нам больше не нужно знать, что происходит в других местах. Именно с таких позиций мы и хотим выяснить, является ли векторный потен­циал «реальным» полем.

Вас может удивить тот факт, что векторный потенциал опре­деляется не единственным образом, что его можно изменить, добавив к нему градиент любого скаляра, а силы, действующие на частицы, не изменятся. Однако это не имеет ничего общего с вопросом реальности в том смысле, о котором мы говорили, К примеру, магнитное поле как-то меняется при изменении относительного движения (равно как и Е или А). Но нас ни­сколько не будет заботить, что поле *можно* изменять таким образом. Нам это безразлично; это никак не связано с вопросом о том, действительно ли векторный потенциал—«реальное» поле, пригодное для описания магнитных эффектов, или же это просто удобный математический прием.

Мы должны еще сделать кое-какие замечания о полезности векторного потенциала А. Мы видели, что им можно пользо­ваться в формальной процедуре расчета магнитных полей заданных токов, в точности как ϕ может применяться для оты­скания электрических полей. В электростатике мы видели, что ϕ давалось скалярным интегралом



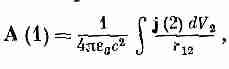
(15.22)

Из этого ϕ мы получали три составляющих Е при помощи трех дифференцирований. Обычно это было легче, чем вычислять три интеграла в векторной формуле

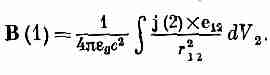
(15.23)

Во-первых, их три, а во-вторых, каждый из них вообще-то немного посложнее, чем (15.22).

В магнитостатике преимущества не так ясны. Интеграл для А уже сам по себе векторный:



(15.24)

т. е. здесь написаны три интеграла. Кроме того, вычисляя ро­тор А для получения В, надо взять шесть производных и рас­ставить их попарно. Сразу не ясно, проще ли это, чем прямое вычисление

(15.25)

В простых задачах векторным потенциалом часто бывает пользоваться труднее, и вот по какой причине. Предположим, нас интересует магнитное поле В в одной только точке, а задача обладает какой-то красивой симметрией. Скажем, нам нужно знать поле в точке на оси кольцевого тока. Вследствие симмет­рии интеграл в (15.25) легко возьмется и вы сразу получите В. Если бы, однако, мы начали с А, то пришлось бы вычислять В из *производных* А, а для этого надо было бы знать А во всех точках *по соседству* с той,которая нас интересует. Большая же часть их не лежит на оси симметрии, интеграл для А услож­няется. В задаче с кольцом, например, пришлось бы иметь дело с эллиптическими интегралами. В подобных задачах А, разу­меется, не приносит большой пользы. Во многих сложных задачах, бесспорно, легче работать с А, но в общем трудно было бы доказывать, что эти технические облегчения стоят того, чтобы начать изучать еще одно векторное поле.

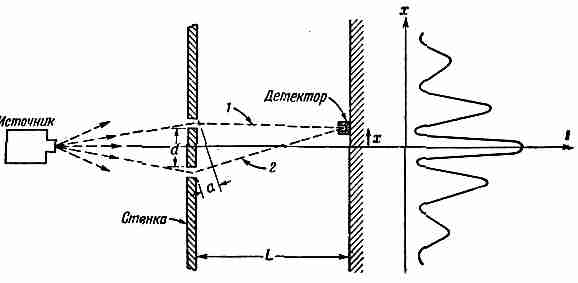
Мы ввели А потому, что оно *действительно* имеет большое физическое значение. Оно не просто связано с энергиями токов (в чем мы убедились в последнем параграфе), оно — «реальное» физическое поле в том смысле, о котором мы говорили выше. В классической механике силу, действующую на частицу, очевидно, можно записать в виде

***F = q(E+vXB),*** (15.26)

так что, как только заданы силы, движение оказывается пол­ностью определенным. В любой области, где В = 0, хотя бы А и не было равно нулю (например, вне соленоида), влияние А ни в чем не сказывается. Поэтому долгое время считалось, что А — не «реальное» поле. Оказывается, однако, что в квантовой механике существуют явления, свидетельствующие о том, что поле А на самом деле вполне «реальное» поле, в том смысле, в каком мы определили это слово. В следующем параграфе мы покажем, что все это значит.

**§ 5. Векторный потенциал и квантовая механика**

Когда мы от классической механики переходим к квантовой, то наши представления о важности тех или иных понятий во многом меняются. (Кое-какие из этих понятий мы уже рассмат­ривали раньше.) В частности, постепенно сходит на нет поня­тие силы, а понятия энергии и импульса приобретают перво­степенную важность. Вместо движения частиц, как вы пом­ните, речь теперь идет уже об амплитудах вероятностей, кото­рые меняются в пространстве и времени. В эти амплитуды входят длины волн, связанные с импульсами, и частоты, связывае­мые с энергиями. Импульсы и энергии определяют собой фазы волновых функций и по этой-то причине они важны для квантовой механики.



*Фиг. 15.5. Интерференционный опыт с электронами.*

Вместо силы речь теперь идет о том, каким образом взаимодействие меняет длину волны. Представление о силе становится уже второстепенным, если вообще о нем еще стоит говорить. Даже когда, к примеру, упоминают о ядерных силах, то на самом деле, как правило, работают все же с энер­гиями взаимодействия двух нуклонов, а не с силой их взаимо­действия. Никому не приходит в голову дифференцировать энергию, чтобы посмотреть, какова сила. В этом параграфе мы хотим рассказать, как возникают в квантовой механике век­торный и скалярный потенциалы. Оказывается, что именно из-за того, что в квантовой механике главную роль играют импульс и энергия, самый прямой путь введения в квантовое описание электромагнитных эффектов — сделать это с по­мощью А и ϕ.

Надо сперва слегка напомнить, как действует квантовая механика. Мы снова вернемся к описанному в вып. 3, гл. 37, воображаемому опыту, в котором электроны испытывали дифрак­цию на двух щелях. На фиг. 15.5 показано то же устройство. Электроны (все они обладают примерно одинаковой энергией) покидают источник и движутся к стенке с двумя узкими щелями. За стенкой находится «защитный» вал — поглотитель с подвиж­ным детектором. Этот детектор предназначен для измерения частоты I, с которой электроны попадают в небольшой участок поглотителя на расстоянии *х* от оси симметрии. Частота эта пропорциональна вероятности того, что отдельный электрон, вылетевший из источника, достигнет этого участка «вала». Вероятность обладает распределением сложного вида (оно показано на рисунке), которое объясняется интерференцией двух амплитуд, по одной от каждой щели. Интерференция двух амплитуд зависит от их разности фаз. Иными словами, когда амплитуды равны *С1еiф1* и *С2еiф2,* разность фаз δ=Ф1-Ф2 определяет интерференционную картину [см. вып. 3, гл. 29, уравнение (29.12)]. Если расстояние от щелей до экрана равно *L, а* разность длин путей электронов, проходящих через две щели, равна *а* (как показано на фигуре), то разность фаз двух волн дается отношением

C:\1\pic\gray.jpg

(15.27)

Как обычно, мы полагаем λ= λ/2π, где λ — длина волны, отвечающая пространственному изменению амплитуды вероят­ности. Для простоты рассмотрим лишь те значения *х,* кото­рые много меньше *L;* тогда можно будет принять

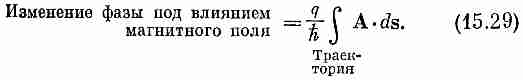
C:\1\pic\gray.jpg

и

C:\1\pic\gray.jpg

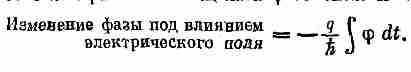
(15.28)

Когда *х* равно нулю, то и δ равно нулю; волны находятся в фазе, а вероятность имеет максимум. Когда δ равно *п,* волны оказываются в противофазе, интерферируя деструктивно, и вероятность достигает минимума. Так электронная интенсив­ность получает волнообразный вид.

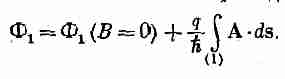
Теперь мы хотим сформулировать тот закон, которым в кван­товой механике заменяется закон силы F=qvXВ. Этот закон будет определять собой поведение квантовомеханических ча­стиц в электромагнитном поле. Раз все происходящее опреде­ляется амплитудами, то закон должен будет объяснить, как сказывается на амплитудах влияние магнитного поля; с уско­рениями же частиц мы больше никакого дела иметь не будем. Закон этот состоит в следующем: фазу, с какой амплитуда до­стигает детектора, двигаясь по какой-то траектории, присут­ствие магнитного поля меняет на величину, равную интегралу от векторного потенциала вдоль этой траектории, умноженному на отношение заряда частицы к постоянной Планка. То есть

Если бы магнитного поля не было, то наблюдалась бы какая-то определенная фаза прибытия. Если же где-то появляется маг­нитное поле, то фаза прибытия возрастает на величину инте­грала в (15.29).

Хотя для наших теперешних рассуждений в этом нет необ­ходимости, заметим все же, что влияние электростатического поля тоже выражается в изменении фазы, равном интегралу *по времени* от скалярного потенциала ϕ со знаком *минус:*

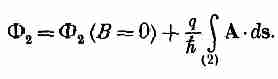


Эти два выражения справедливы лишь для статических полей, но, объединив их, мы получим правильный результат для любого, статического или динамического, электромаг­нитного поля. Именно этот закон и заменяет собой формулу F= *q*(E+vXВ). Мы сейчас, однако, будем говорить только о статическом магнитном поле.

Положим, что опыт с двумя щелями проводится в магнитном поле. Мы хотим узнать, с какой фазой достигают экрана две волны, пути которых пролегают через две разные щели. Их интерференция определяет то место, где окажется максимум вероятности. Фазу волны, бегущей по траектории (1), мы назо­вем Ф1; а через Ф1 *(В* = 0) обозначим фазу, когда магнитного поля нет. Тогда после включения поля фаза достигает величины

(15.30)

Аналогично, фаза для траектории (2) равна

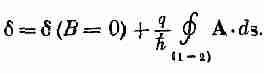


(15.31)

Интерференция волн в детекторе зависит от разности фаз

C:\1\pic\gray.jpg

Разность фаз в отсутствие поля мы обозначим δ *(В* = 0); это та самая разность, которую мы подсчитали в уравнении (15.28). Кроме того, мы замечаем, что из двух интегралов можно сделать один, идущий вперед по пути (1), а назад — по пути (2); этот замкнутый путь будет обозначаться (1—2). Так что получается



(15.33)

Это уравнение сообщает нам, как под действием магнитного поля изменяется движение электрона; с его помощью мы мо­жем найти новые положения максимумов и минимумов интен­сивности.

Прежде чем сделать это, мы хотим, однако, поставить один интересный и важный вопрос. Вы помните, что в вектор-потен­циальной функции есть некоторый произвол. Две разные век­тор-потенциальные функции А и А', отличающиеся на гра­диент ∇ψ некоторой скалярной функции, представляют одно и то же магнитное поле (потому что ротор градиента равен нулю). Они поэтому приводят к одной и той же классической силе *qvX*В. Если в квантовой механике все эффекты зависят от векторного потенциала, то какая из многих возможных А-функций правильна?

Ответ состоит в том, что в квантовой механике продолжает существовать тот же произвол в А. Если в уравнении (15.33) мы заменим А на А' = А+∇ψ, то интеграл от А пре­вратится в

C:\1\pic\gray.jpg

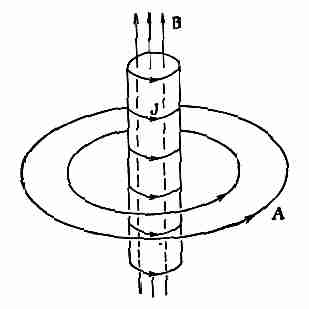
Интеграл от ∇ψ вычисляется *по замкнутому* пути (1—2); но интеграл от касательной составляющей градиента по замкну­тому пути всегда равен нулю (по теореме Стокса). Поэтому как А, так и А' приводят к одним и тем же разностям фаз и к од­ним и тем же квантовомеханическим эффектам интерференции. И в классической, и в квантовой теории важен только ротор 4; любая функция А, у которой ротор такой, как надо, приводит к правильной теории.

Тот же вывод становится очевидным, если мы используем результаты, приведенные в гл. 14, § 1. Там мы показали, что контурный интеграл от А по замкнутому пути равен потоку В через контур, в данном случае потоку между путями (1) и (2). Уравнение (15.33) можно, если мы хотим, записать в виде

C:\1\pic\gray.jpg

где под потоком В, как обычно, подразумевается поверхностный интеграл от нормальной составляющей В. Результат зависит только от В, т. е. только от ротора А.

Но раз результат можно выражать и через В и через А, то может создаться впечатление, что В удерживает свои позиции «реального» поля, а А все еще выглядит искусственным образо­ванием. Но определение «реального» поля, которое мы вначале предложили, основывалось на идее о том, что «реальное» поле не смогло бы действовать на частицу на расстоянии. Мы же беремся привести пример, в котором В равно нулю (или по крайней мере сколь угодно малому числу) в любом месте, где частицы могут оказаться, так что невозможно представить себе, что В *непосредственно* действует на них.

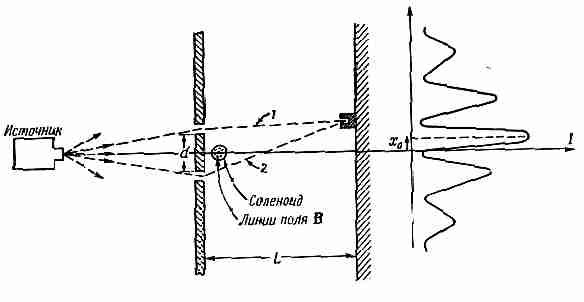
Вы помните, что если имеется длинный соленоид, по кото­рому течет электрический ток, то поле В существует внутри него, а снаружи поля нет, тогда как множество векторов А циркулирует снаружи соленоида (фиг. 15.6). Если мы создадим такие условия, что электроны будут проходить только *вне* соле­ноида (только там, где есть А), то, согласно уравнению (15.33), соленоид будет все же влиять на их движение.

*Фиг. 15.6. Магнитное поле и векторный потенциал длинного соленоида.*

По классическим же воззрениям это невозможно. По классическим представлениям сила зависит только от В. Чтобы узнать, течет ли по соле­ноиду ток, частица должна пройти сквозь него. А квантовая механика утверждает, что наличие магнитного поля в соле­ноиде можно установить, просто *обойдя* его, даже не прибли­жаясь к нему вплотную!

Представьте, что мы поместили очень длинный соленоид ма­лого диаметра прямо тут же за стенкой между двумя щелями (фиг. 15.7). Диаметр соленоида должен быть намного меньше расстояния *d* между щелями. В этих обстоятельствах дифракция электронов на щели не приведет к заметным вероятностям того, что электроны проскользнут где-то близ соленоида. Как же все это повлияет на наш интерференционный эксперимент?

Сравним два случая: когда ток по соленоиду идет и когда тока нет. Если тока нет, то нет ни В ни А, и получается перво­начальная картина электронных интенсивностей вдоль поглотителя.



*Фиг. 15.7. Магнитное поле способно влиять на движение элек­тронов, даже когда оно существует только в области, еде вероят­ность обнаружить электрон пренебрежимо мала.*

C:\1\pic\gray.jpgЕсли мы включим ток и создадим внутри соленоида магнитное поле В, то снаружи появится поле А. Возникнет сдвиг в разности фаз, пропорциональный циркуляции А вне соленоида, а это означает, что картина максимумов и миниму­мов сдвинется на другое место. Действительно, раз поток В между любыми двумя путями постоянен, то точно так же по­стоянна и циркуляция А. Для любой точки прибытия фаза ме­няется одинаково; это соответствует тому, что вся картина сдвигается по *х* на постоянную величину, скажем, на *х0.* Эту величину *х0* легко подсчитать. Максимальная интенсивность возникает там, где разность фаз двух волн равна нулю. Под­ставляя вместо δ выражение (15.32) или (15.33), а вместо δ (B=0) выражение (15.28), получаем

(15.35)

C:\1\pic\gray.jpgили

(15.36)

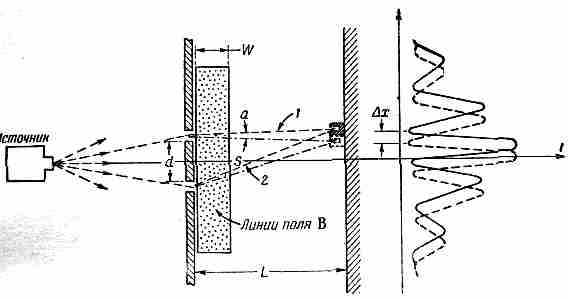
Картина при наличии соленоида [будет выглядеть так](#прим1), как показано на фиг. 15.7. По крайней мере так предсказывает квантовая механика.

Недавно был проделан точно такой же опыт. Это чрезвы­чайно сложный опыт. Длина волны электронов крайне мала, поэтому прибор должен быть миниатюрным, иначе интерферен­ции не заметишь. Щели должны лежать вплотную друг к другу, а это означает, что нужен необычайно тонкий соленоид. Оказы­вается, что при некоторых обстоятельствах кристаллы железа вырастают в виде очень длинных и микроскопически тонких нитей. Если эти железные нити намагнитить, они образуют маленький соленоид, у которого нет снаружи магнитного поля (оно проявляется только на концах). Так вот, был проделан опыт по интерференции электронов с железной нитью, помещенной между двумя щелями, и предсказанное смещение электронной картины подтвердилось.

А тогда поле А в нашем смысле уже «реально». Вы можете возразить: «Но ведь там есть магнитное поле». Да, есть, но вспомните нашу исходную идею — «реально» только такое поле, которое, чтобы определить собой движение частицы, должно быть задано *в том месте,* где она находится. Поле В в нити действует на расстоянии. Если мы не хотим, чтобы его влияние выглядело как действие на расстоянии, мы должны пользо­ваться векторным потенциалом.

Эта проблема имеет интересную историю. Теория, которую мы изложили, была известна с самого возникновения квантовой механики, с 1926 г. Сам факт, что векторный потенциал появ­ляется в волновом уравнении квантовой механики (так назы­ваемом уравнении Шредингера), был очевиден с того момента, как оно было написано. В том, что он не может быть заменен магнитным полем, убеждались все, кто пытался это проделать; друг за другом все убеждались, что простого пути для этого не существует. Это ясно и из нашего примера, когда электрон движется по области, где нет никакого поля, и тем не менее подвергается воздействию. Но, поскольку в классической механике А, по-видимому, не имело непосредственного, важного значения и, далее, из-за того, что его можно было менять добав­лением градиента, люди еще и еще раз повторяли, что вектор­ный потенциал не обладает прямым физическим смыслом, что даже в квантовой механике «правами» обладают только элект­рические и магнитные поля. Когда оглядываешься назад, ка­жется странным, что никто не подумал обсудить этот опыт вплоть до 1956 г., когда Бом и Аронов впервые предложили его и сделали весь вопрос кристально ясным. Все это ведь всегда подразумевалось, но никто не обращал на это внимания. И мно­гие были просто потрясены, когда всплыл этот вопрос. Вот по этой-то причине кое-кто и счел нужным поставить опыт и убе­диться, что все это действительно так, хотя квантовая меха­ника, в которую все мы верим вот уже сколько лет, давала вполне недвусмысленный ответ. Занятно, что подобные вещи могут тридцать лет быть на виду у всех, но из-за определенных предрассудков относительно того, что существенно, а что нет, могут всеми игнорироваться.

Сейчас мы хотим немного продолжить наш анализ. Мы продемонстрируем связь между квантовомеханической и класси­ческой формулами, чтобы показать, почему оказывается, что при макроскопическом взгляде на вещи все выглядит так, как будто частицы управляются силой, равной произведению *qv* на ротор А. Чтобы получить классическую механику из кванто­вой, нам нужно рассмотреть случаи, когда все длины волн малы по сравнению с расстояниями, на которых заметно ме­няются внешние условия (например, поля). Мы не будем гнаться за общностью доказательства, а только покажем все на очень простом примере. Обратимся снова к тому же опыту со щелями. Но теперь вместо того, чтобы втискивать все маг­нитное поле в узкий промежуток между щелями, представим себе такое магнитное поле, которое раскинулось позади щелей широкой полосой (фиг. 15.8). Возьмем идеализированный слу­чай, когда в узкой полосе шириной ω*,* много меньшей L, маг­нитное поле однородно. (Это легко устроить, надо только по­дальше отнести поглотитель.) Чтобы подсчитать сдвиг по фазе, мы должны взять два интеграла от А вдоль двух траекторий (1) и (2).



*Фиг. 15.8. Сдвиг интерференционной картины из-за наличия полоски магнитного поля.*

C:\1\pic\gray.jpgКак мы видели, они различаются просто на поток В между этими путями. В нашем приближении поток равен *Bωd.* Раз­ность фаз для двух путей поэтому равна

(15.37)

C:\1\pic\gray.jpgМы замечаем, что в принятом приближении сдвиг фаз не зави­сит от угла. Так что опять-таки эффект сводится к сдвигу всей картины вверх на величину *Δх.* Из формулы (15.28)

Подставляя δ-δ *(В* = 0) из (15.37), получаем

C:\1\pic\gray.jpg

(15.38)

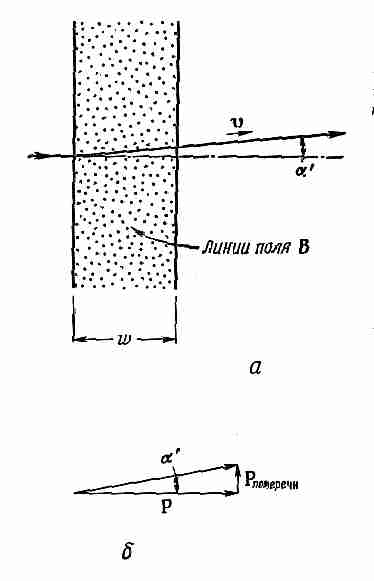
C:\1\pic\gray.jpgТакой сдвиг равноценен тому, что все траектории отклоняются на небольшой угол *а* (см. фиг. 15.8), равный

(15.39)

По классическим воззрениям мы тоже должны были ожи­дать, что узкая полоска магнитного поля отклонит все траекто­рии на какой-то маленький угол, скажем α' (фиг. 15.9,а). Когда электроны проходят через магнитное поле, они подвергаются действию поперечной силы *qv*XВ в течение времени *ωlv.* Изменение их поперечного импульса просто равно ему самому, так что

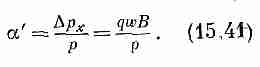
C:\1\pic\gray.jpg

(15.40)



*Фиг. 15.9. Отклонение частицы из-за прохождения ее через маг­нитное поле.*

Угловое отклонение (фиг. 15.9,6) равно отношению этого поперечного импульса к полному импульсу *р.* Мы получаем



: Этот результат можно сравнить с уравнением (15.39), в котором та же вели­чина вычислялась квантовомеханически. Но связь между классической и квантовой механикой в том и состоит, что частице с импульсом *р* ставится в соответствие квантовая амплитуда, изменяющаяся как волна длиной λ. = *h/p.* В соответствии с этим уравнением а и а' оказываются идентичными; и классические и квантовые выкладки приводят к одному и тому же.

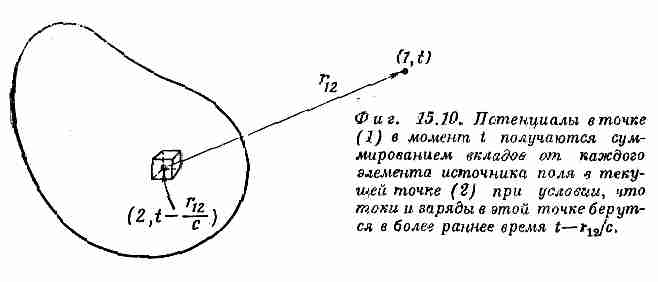
Из этого анализа мы видим, как получается, что векторный потенциал, который в квантовой механике появляется в явном виде, вызывает классическую силу, зависящую только от его производных. В квантовой механике существенна только ин­терференция между соседними путями; в ней всегда оказывается, что эффект зависит только от того, как сильно поле А *меняется* от точки к точке, а значит, только от производных А, а не от него самого. Несмотря на это, векторный потенциал А (наряду с сопровождающим его скалярным потенциалом ϕ), по-види­мому, приводит к более прямому описанию физических процес­сов. Чем глубже мы проникаем в квантовую теорию, тем яснее и прозрачней нам это становится. В общей теории — квантовой электродинамике — в системе уравнений, заменяющих собой уравнения Максвелла, векторные и скалярные потенциалы уже считаются фундаментальными величинами. Векторы Е и В постепенно исчезают из современной записи физических зако­нов: их вытесняют А и ϕ.

**§ 6. Что истинно в статике, но ложно в динамике?**

Наше исследование статических полей близится к концу. В этой главе мы опасно близко подошли к такому пункту, когда уже следует подумывать о том, что случится, если поля начнут меняться со временем. Толкуя о магнитной энергии, нам едва удалось избежать этого, да и то потому, что мы прикрылись релятивистскими соображениями. Даже при этом наша трак­товка проблемы энергии выглядела несколько искусственно и, пожалуй, даже таинственно, потому что мы игнорировали тот факт, что движущиеся катушки должны на самом деле создавать меняющиеся поля. Теперь самое время перейти к изучению полей, меняющихся во времени, к тому, что составляет предмет электродинамики. Мы проделаем это в следующей главе. Однако прежде следует подчеркнуть некоторые моменты.

Хотя мы и начали этот курс с того, что представили полные и точные уравнения электромагнетизма, мы сразу же принялись изучать какие-то вырезанные куски, потому что так было легче. Большим преимуществом является возможность начать с простой теории статических полей и лишь потом перейти к более сложной теории, включающей динамические поля. При этом приходится с самого начала учить меньше нового матери­ала и остается время потренировать мозги, поразмять свои ум­ственные мускулы, прежде чем приступить к задачам потруднее.

Но в таком процессе кроется одна опасность — пока мы не услышали весь рассказ целиком, в нас может укорениться и выдать себя за полную та неполная истина, которую мы успели усвоить; в голове все перепутается: то, что верно всегда, и то, что справедливо только временами. Поэтому в табл. 15.1 мы даем сводку важнейших формул, которых мы касались, отделяя в ней те, что верны в общем случае, от тех, которые соблю­даются только в статике, но ложны в динамике. Эта сводка со­держит намеки на то, куда мы собственно с вами путь держим; изучая динамику, мы должны будем детально развить то, что пока приходилось описывать без доказательства.

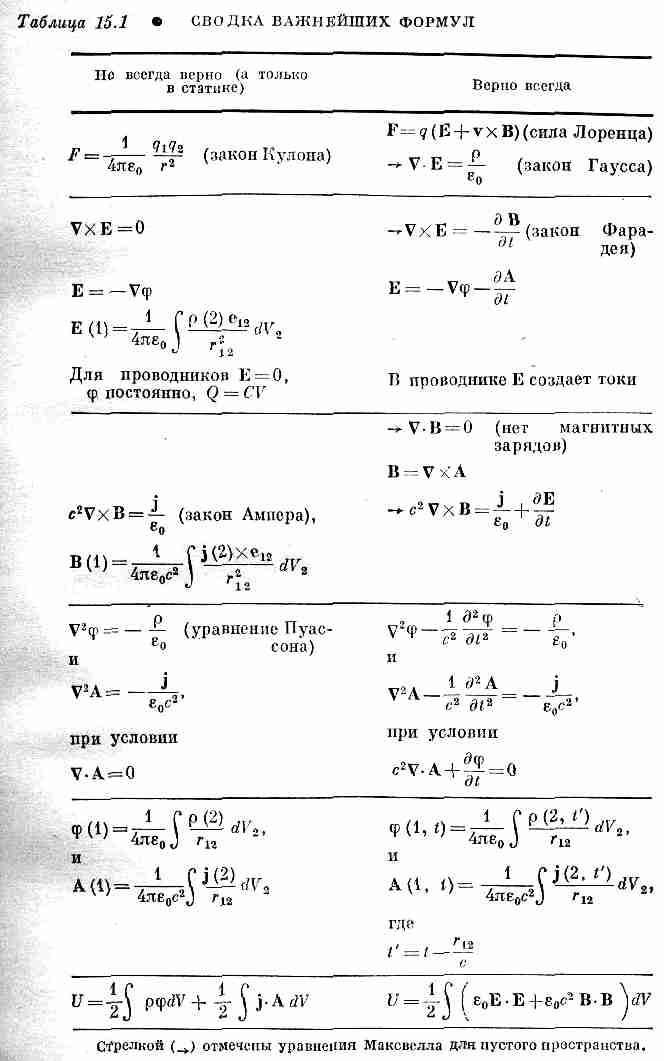
Пожалуй, здесь стоит сделать несколько замечаний по пово­ду самой таблицы. Прежде всего вы должны обратить внимание, что уравнения, с которых мы начали, это *правильные* уравнения, в этом месте мы вас не вводим в заблуждение. Формула для электромагнитной силы (часто именуемой *силой Лоренца)* F = *q*(E+vXВ) также *правильна.* Ошибочен только закон Кулона; он годится только для статики. Четыре уравнения Максвелла для Е и В тоже правильны. Уравнения, принятые нами в статике, ошибочны, потому что мы выбросили из них все члены с производными по времени.

Закон Гаусса ∇•E = ρ/ε0 остается, но ротор Е в общем случае *не равен* нулю. Значит, Е нельзя всегда приравнивать к градиенту скаляра — электростатического потенциала. Мы увидим, что скалярный потенциал все же остается, но это уже величина, которая меняется во времени и должна употребляться для полного описания электрического поля только вместе с век­торным потенциалом. Конечно, уравнения, управляющие этим новым скалярным потенциалом, также оказываются новыми.

Мы вынуждены также распроститься с представлением о том, что Е в проводниках равно нулю. Когда поля меняются, заряды в проводниках, вообще говоря, не успевают перестраиваться так, чтобы поле все время обращалось в нуль. Они приходят в движение, но никогда не достигают равновесия. Единственное общее утверждение таково: электрические поля создают токи в проводниках. Итак, в переменных полях проводники *не являются* эквипотенциальными поверхностями. Отсюда также следует, что представление о емкости нельзя сделать универ­сальным.

Раз магнитных зарядов не бывает, дивергенция В *всегда* равна нулю. Так что В можно всегда приравнивать ∇XА. (Выходит, что меняется не все!) Но В генерируется не только токами; ∇XВ пропорционально плотности тока *плюс* новое слагаемое *dE/dt.* Это означает, что А связано с токами новым уравнением. Оно связано и с ϕ. Если мы для собственного удобства воспользуемся свободой выбора ∇•А, то уравнения для А и ϕ можно будет записать так, что они приобретут простой и изящный вид. Поэтому мы выдвигаем требование, чтобы c2∇•А было равно -*д*ϕ*/dt,* и тогда дифференциальные уравне­ния для А или для ϕ оказываются такими, как в таблице.

Потенциалы А и ϕ все еще можно выразить в виде интегралов от токов и зарядов, но это уже *не те же самые* интегралы, что были в статике. Удивительнее всего, однако, то, что правильный вид интегралов похож на прежний, статический, но с одним небольшим видоизменением, имеющим ясный физический смысл.



Когда мы берем интегралы, чтобы получить потенциалы в некоторой точке, скажем в точке *(1)* на фиг. 15.10, то мы обя­заны использовать значения j и ρ в точке *(2) в более раннее время t' = t-*r12/c. Как и следовало ожидать, влияние точки *(2)* на точку (7) распространяется со скоростью *с.* Это небольшое видоизменение позволяет отыскивать поля изменяющихся токов и зарядов, потому что, как только мы узнаем А и ϕ, то В получается, как и раньше, как ∇XА, а Е = -∇ϕ-*dA/dt.*

Наконец, вы видите из таблицы, что некоторые выводы, по­лученные в статике (например, вывод о том, что плотность энергии в электрическом поле равна ε0E2/2), остаются справед­ливыми и в электродинамике. Не надо обманывать себя и ду­мать, что все это естественно. Правильность любой формулы, выведенной в статическом случае, должна в динамике доказы­ваться сызнова. Например, мы знаем, что объемный интеграл от ρϕ тоже дает электростатическую энергию. Но это верно *только* в статике.

В свое время мы детально разберем все эти вопросы; пока же полезно держать в уме эту сводку, чтобы знать, что не грех и позабыть, а что следует считать справедливым всегда.

***\*Если поле В выходит из плоскости рисунка, то поток, в соответ­ствии с его определением, будет отрицательным, а х0— положительным.***

***Глава 16***

**ИНДУЦИРОВАННЫЕ ТОКИ**

[**§ 1. Моторы и генераторы**](#a1)

[**§ 2. Трансформаторы и индуктивности**](#a2)

[**§ 3. Силы, действующие на индуцируемые токи**](#a3)

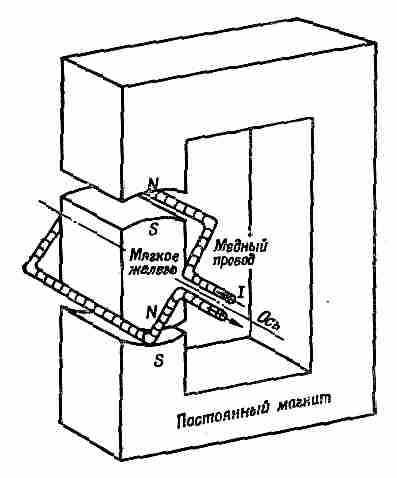
[**§ 4. Электротехника**](#a4)

**§ 1. Моторы и генераторы**

Открытие тесной связи между электричеством и магнетизмом, происшедшее в 1820 г., было поистине волнующим событием — ведь до того они считались совершенно независи­мыми. Сначала открыли, что токи в проводах создают магнитные поля, а затем в том же году обнаружили, что на провода в магнитном поле действуют силы.

Волнение было вызвано тем, что возникаю­щую механическую силу можно использовать в машине для выполнения какой-то работы. Сразу же после этого замечательного открытия люди начали конструировать электромоторы, заставив работать на себя силы, действующие на провода с током. Принцип устройства электромотора схематически показан на фиг. 16.1. Постоянный магнит (обычно в нем имеется несколько частей из мягкого железа) создает магнитное поле внутри двух щелей. Конец каждой щели представляет собой се­верный или южный полюсы, как показано на схеме. Прямоугольная рамка из медной проволоки помещается так, что одной из своих сторон она попадает в каждую щель. Когда по рамке проходит ток, то в обеих щелях он идет в противоположных направлениях, так что силы оказываются направленными противо­положно и создают в рамке вращательный момент вокруг изображенной на схеме оси. Если рамка закреплена на оси так, что она может вращаться, то ее можно подсоединить к шкивам или шестеренкам и заставить производить полезную работу.

Ту же идею можно использовать и при конструировании чувствительных приборов для электрических измерений.



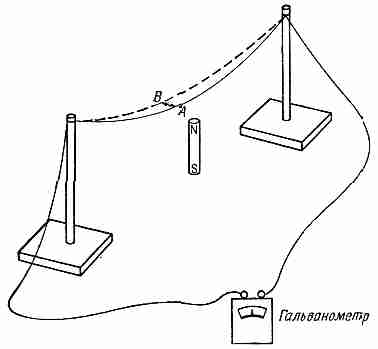
*Фиг. 16.1. Схематическое изображение простого электромагнитного мотора.*

Так что немедленно после от­крытия закона сил точность электрических измерений намного возросла. Прежде всего вращательный момент такого мотора может быть значительно увеличен для данного тока, если заставить его проходить по нескольким виткам, а не по одному. Кроме того, рамку можно установить так, чтобы она враща­лась под действием очень малого момента, укрепив ее ось в тщательно сделанных подшипниках, либо подвешивая ее на тончайшей проволоке или кварцевой нити. Тогда даже чрезвычайно слабый ток заставит катушку повернуться, и для малых углов величина поворота будет пропорциональна току. Угол поворота можно измерить, приклеив к рамке стрелку или (для очень тонких приборов) прикрепив маленькое зеркальце к рамке и отмечая сдвиг его изображения на шкале. Такие приборы называют гальванометрами. Вольтметры и ампер­метры работают по тому же принципу. Те же идеи могут быть применены в большом масштабе для создания мощных моторов, производящих механическую работу. Рамку можно заставить вращаться много, много раз, если с помощью укрепленных на оси контактов каждые пол-оборота менять направление тока в ней на противоположное, Тогда момент силы будет всегда направлен в одну и ту же сторону. Маленькие моторчики постоянного тока именно так и устроены. В моторах больших размеров постоянного или пе­ременного тока постоянные магниты часто заменяют электро­магнитами, и питаются они от источника электрической энергии.

Осознав, что электрический ток рождает магнитное поле, многие "сразу же предположили, что так или иначе магниты должны тоже создавать электрические поля. Для проверки этого предположения были поставлены различные эксперимен­ты. Например, располагали два провода параллельно друг другу и по одному из них пропускали ток, пытаясь обнаружить ток в другом проводе. Мысль заключалась в том, что магнитное поле сможет как-то протащить электроны вдоль второго про­вода по закону, который должен формулироваться как-то так: «одинаковое стремится двигаться одинаковым образом». Но, пропуская по одному проводу самый большой ток и используя самый чувствительный гальванометр, обнаружить ток во вто­ром проводе не удалось. Большие магниты тоже не давали никакого эффекта в расположенных поблизости проводах. Наконец, в 1840 г. Фарадей открыл существенную особенность, которую раньше упускали из виду,— электрические эффекты возникают только тогда, когда что-нибудь *изменяется,* Если в одной из двух проволок ток *меняется,* то в другой тоже наво­дится ток, или же если магнит *движется* вблизи электрического контура, то там возникает ток. Мы говорим теперь, что токи в этих случаях *индуцируются.* В этом и состояло явление ин­дукции, открытое Фарадеем. Оно преобразило довольно скуч­ную область статических полей в увлекательную динамическую область, в которой происходит огромное число удивительных явлений. Эта глава посвящена качественному описанию неко­торых из них. Как мы увидим, можно довольно быстро попасть в очень сложные ситуации, трудно поддающиеся подробному количественному анализу. Но это неважно. Наша главная задача в этой главе — сначала познакомить вас с кругом относя­щихся сюда явлений. Тщательный анализ мы проделаем немного позже.

Из того, что мы уже знаем, нам легко понять кое-что о маг­нитной индукции, то, что не было известно во времена Фарадея. Мы знаем о существовании действующей на движу­щийся заряд силы vXВ, которая пропорциональна его ско­рости в магнитном поле. Пусть у нас есть проволока, которая движется вблизи магнита (фиг. 16.2), и пусть мы подсоединили концы проволоки к гальванометру. Когда проволока проходит над полюсом магнита, стрелка гальванометра сдвигается.

Магнит создает вертикальное магнитное поле, и, когда мы двигаем проволоку поперек поля, электроны в проволоке чувствуют силу, *направленную вбок,* т. е. перпендикулярно нолю и направлению движения. Сила толкает электроны вдоль проволоки. Но почему же при этом приходит в движение стрел­ка гальванометра, который расположен так далеко от этой силы? Да потому, что электроны, испытывающие магнитную силу, начинают двигаться и толкают (за счет электрического отталкивания) другие электроны, находящиеся чуть дальше по проволоке, а те в свою очередь отталкивают еще более уда­ленные электроны и так далее на большое расстояние.



*Фиг. 16.2. Движение провода в магнитном поле создает ток (это регистрирует, гальвано­метр).*

Любо­пытная штука.

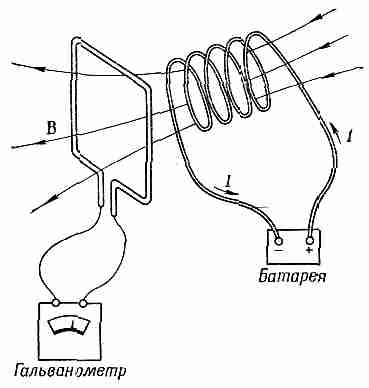
Это так удивило Гаусса и Вебера, построившего впервые гальванометр, что они попытались определить, как далеко рас­пространяются силы по проволоке. Они протянули проволоку поперек всего города, и один ее конец Гаусс присоединил к ба­тарее (батареи были известны раньше генераторов), а Вебер наблюдал, как сдвигается стрелка гальванометра. И они обнару­жили способ передавать сигналы на большое расстояние — это было рождение телеграфа! Разумеется, здесь нет прямого отно­шения к индукции, здесь речь шла о способе передачи тока по проволоке, о том, действительно ли ток продвигается за счет индукции или нет.

Предположим теперь, что в установке, изображенной на фиг. 16.2, мы проволоку оставляем в покое, а двигаем магнит. И снова наблюдаем эффект на гальванометре. Фарадей еще обнаружил, что движение магнита под проволокой (один спо­соб) вызывает такой же эффект, как и движение проволоки над магнитом (другой способ). Но когда движется магнит, то на электроны проволоки уже больше не действует сила v X В. Это и есть то новое явление, которое открыл Фарадей. Сегодня мы можем попытаться понять его с помощью принципа относи­тельности.

Мы уже поняли, что магнитное поле магнита возникает за счет его внутренних токов. Поэтому мы ожидаем появления такого же эффекта, если вместо магнита на фиг. 16.2 взять катушку из проволоки, по которой течет ток. Если двигать про­вод мимо катушки, то гальванометр обнаружит ток, равно, как и в том случае, когда катушка движется мимо провода. Но существует и еще более удивительная вещь: если менять маг­нитное поле катушки *не за счет* ее движения, а за счет *измене­ния в ней тока,* то гальванометр снова покажет наличие эффек­та. Например, если расположить проволочную петлю рядом с катушкой (фиг. 16.3), причем обе они неподвижны, и выклю­чить ток, то через гальванометр пройдет импульс тока. Если же снова включить ток в катушке, то стрелка гальванометра качнется в противоположную сторону.

Всякий раз, когда через гальванометр в установке, показан­ной на фиг. 16.2 или 16.3, проходит ток, в проводе в каком-то одном направлении возникает результативное давление на электроны. В разных местах электроны могут толкнуться в разные стороны, но в одном направлении напор оказывается больше, чем в другом. Учитывать нужно только давление электронов, просуммированное вдоль всей цепи. Мы назы­ваем этот результирующий напор электронов *электродвижу­щей силой* (сокращенно э. д. с.) цепи. Более точно э. д. с. определяется как тангенциальная сила, приходящаяся на один заряд, проинтегрированная по длине провода, вдоль всей цепи. Открытие Фарадея целиком состояло в том, что э. д. с. в проводе можно создать тремя способами: двигая провод, двигая магнит вблизи провода или меняя ток в соседнем проводе.

Обратимся снова к простому прибору, изображенному на фиг. 16.1, только теперь не будем пропускать ток через прово­локу, чтобы придать ей вращение, а будем крутить рамку с по­мощью внешней силы, например рукой или с помощью водяного колеса. При вращении рамки ее провода движутся в магнитном поле, и мы обнаруживаем в цепи рамки э. д. с.



*Фиг. 16.3. Катушка с то­ком возбуждает ток в дру­гой катушке, если первая катушка перемещается или если ток в ней меняется.*

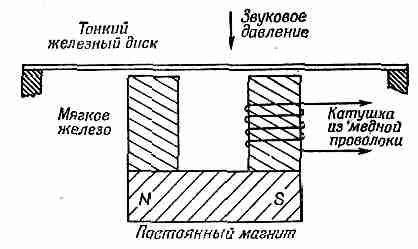
Мотор превра­тился в генератор.

Индуцированная э. д. с. возникает в катушке генератора за счет ее движения. Величина э. д. с. дается простым правилом, открытым Фарадеем. (Сейчас мы просто сформулируем это правило, а несколько позднее разберем его подробно.) Пра­вило такое: если магнитный поток, проходящий через петлю (этот поток есть нормальная составляющая В, проинтегрирован­ная по площади петли), меняется со временем, то э. д. с. равна скорости изменения потока. Мы будем в дальнейшем называть это «правилом потока». Вы видите, что, когда катушка на фиг. 16.1 вращается, поток через нее изменяется. Вначале, ска­жем, поток идет в одну сторону, а когда катушка повернется на 180°, тот же поток идет сквозь катушку по-другому. Если непрерывно вращать катушку, поток сначала будет положи­тельным, затем отрицательным, потом опять положительным и т. д. Скорость изменения потока должна тоже меняться. Следовательно, в катушке возникает переменная э. д. с. Если присоединить два конца катушки к внешним проводам через скользящие контакты, которые называются контактными кольцами (просто, чтобы провода не перекручивались), мы получаем генератор переменного тока.

А можно с помощью скользящих контактов устроить и так, чтобы через каждые пол-оборота соединение между концами катушки и внешними проводами становилось противополож­ным, так что когда э. д. с. изменит свой знак, то и соединение станет противоположным. Тогда импульсы э. д. с. будут всегда толкать ток в одном направлении вдоль внешней цепи. Мы получаем так называемый генератор постоянного тока.

Прибор, изображенный на фиг. 16.1, может быть либо мо­тором, либо генератором. Связь между моторами и генерато­рами хорошо демонстрируется с помощью двух одинаковых «моторов» постоянного тока с постоянными магнитами, катушки которых соединены двумя медными проводами. Если ручку од­ного из «моторов» поворачивать механически, он становится генератором и приводит в движение второй как мотор. Если же поворачивать ручку второго, то генератором уже становится он, а первый работает как мотор. Итак, здесь мы встречаемся с интересным примером нового рода эквивалентности в природе: мотор и генератор эквивалентны. Количественная эквивалент­ность на самом деле не совсем случайна. Она связана с законом сохранения энергии.

Другой пример устройства, которое может работать либо для создания э. д. с., либо воспринимать действие э. д. с., представляет собой приемная часть обычного телефона, т. е. «слухофон». Первоначальный телефон Белла состоял из двух таких «слухофонов», соединенных двумя длинными проводами.



*Фиг. 16.4. Приемное или передающее устрой­ство телефона.*

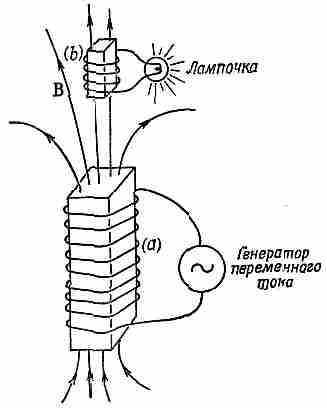
Основной принцип этого устройства показан на фиг. 16.4. По­стоянный магнит создает магнитное поле в двух сердечниках из мягкого железа и в тонком железном диске — мембране, которая приводится в движение звуковым давлением. При дви­жении мембрана изменяет величину магнитного поля в сердеч­никах. Следовательно, поток через катушку проволоки, намо­танной вокруг одного из сердечников, изменяется, когда зву­ковая волна попадает на мембрану. Тогда в катушке возникает э. д. с. Если концы катушки присоединены к цепи, в ней устанавливается ток, который представляет собой электри­ческое изображение звука.

Если концы катушки на фиг. 16.4 присоединить двумя про­водами к другому такому же устройству, то по второй катушке потечет меняющийся ток. Этот ток создаст меняющееся магнит­ное поле и заставит меняться и силу притяжения железной мембраны. Она начнет дрожать и породит звуковые волны, подобные тем, которые колебали первую мембрану. С помощью маленьких кусочков железа и меди человеческий голос пере­дается по проводам!

(Приемники в современных домашних телефонах похожи на только что описанный, а вот передатчики используются уже улучшенные, чтобы получить большую мощность. Это «микро­фоны с угольной мембраной», в которых звуковое давление изменяет электрический ток от батарей.)

**§ 2. Трансформаторы и индуктивности**

Одна из наиболее интересных сторон открытий Фарадея заключается совсем не в том, что э. д. с. возникает в движущейся катушке, это мы можем понять с помощью магнитной силы qXВ. Главное — в том, что изменение тока в одной катушке создает э. д. с. во второй катушке. И уж совсем удивительно, что величина э. д. с., наведенной во второй катушке, дается тем же самым «правилом потока»: э. д. с. равна скорости изме­нения магнитного потока сквозь катушку. Возьмем, например, две катушки (фиг. 16.5), каждая из которых намотана на отдель­ную стопку железных пластинок (с их помощью можно создать более сильные магнитные поля).



*Фиг. 16.5. Две катушки, намо­танные на стопки железных пла­стинок, позволяют зажечь лам­почку, не соединяя ее прямо с гене­ратором.*

Присоединим теперь одну из катушек — катушку *а — к* генератору переменного тока. Не­прерывно меняющийся ток создает непрерывно меняющееся магнитное поле. Такое изменяющееся магнитное поле генери­рует переменную э. д. с. во второй катушке — катушке b*.* Эта э. д. с., например, способна заставить гореть электриче­скую лампочку.

В катушке bэ. д. с. меняется с частотой, конечно, равной частоте первого генератора. Но ток в катушке bможет быть больше или меньше тока в катушке *а.* Ток в катушке bзависит от индуцированной в ней э. д. с. и от сопротивления и индук­тивности остальной части ее цепи. Эта э. д. с. может быть меньше э. д. с. генератора, если, скажем, изменение потока мало. Или же э. д. с. в катушке bможет оказаться много больше э. д. с. генератора, если на катушку 6 навить много витков, ибо в этом случае в данном магнитном поле поток через катушку будет больше. (Можно, если хотите, сказать об этом иначе — в каждом витке э. д. с. одна и та же, и поскольку пол­ная э. д. с. равна сумме э. д. с. отдельных витков, то большое число витков в совокупности создает большую э. д. с.)

Такая комбинация двух катушек (обычно с набором желез­ных пластинок, повышающих магнитное поле) называется *трансформатором.* Он может «трансформировать» одну э. д. с. (называемую еще «напряжением») в другую.

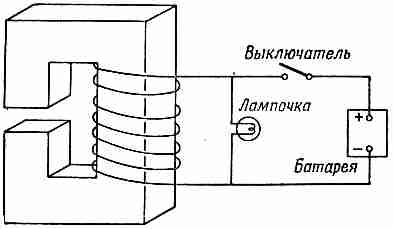
Эффекты индукции возникают и в одной отдельной катушке. Например, в установке, изображенной на фиг. 16.5, меняющийся поток проходит не только через катушку b*,* которая зажигает лампочку, но и через катушку *а.* Меняющийся ток в катушке *а* создает меняющееся магнитное поле внутри нее самой, и поток этого поля непрерывно изменяется, так что в катушке *а* получается *самоиндуцированная* э. д. с.

Э. д. с., действующая на ток, возникает тогда, когда его собственное магнитное поле растет, или в общем случае, если его собственное поле изменяется каким угодно образом. Этот эффект называется *самоиндукцией.*

Когда мы ввели «правило потока», утверждающее, что э. д. с. равна скорости изменения потока, мы не определяли направле­ние э. д. с. Существует простое правило (называемое правилом Ленца) для определения направления э.д. с.: э. д. с. *стремится препятствовать* всякому изменению потока. Иначе говоря, направление наведенной э. д. с. всегда такое, что, если бы ток пошел в направлении э. д. с., он создал бы поток поля В, препятствующий изменению поля В, создающего эту э. д. с. Правилом Ленца можно пользоваться, чтобы найти направление э. д. с. в генераторе, показанном на фиг. 16.1, или в обмотке трансформатора (фиг. 16.3).

В частности, если ток в отдельной катушке (или в любом проводе) меняется, возникает «обратная» э. д. с. в цепи. Эта э. д. с. действует на заряды, текущие в катушке а на фиг. 16.5, препятствуя изменению магнитного поля, и поэтому направлена так, чтобы препятствовать изменению тока. Она стремится сохранить ток постоянным; э. д. с. противоположна току, когда ток увеличивается, и направлена по току, когда он умень­шается. При самоиндукции ток обладает «инерцией», потому что эффекты индукции стремятся сохранить поток постоянным точно так же, как механическая инерция стремится сохранить скорость тела неизменной.

Любой большой электромагнит обладает большой самоин­дукцией. Пусть, например, к катушке большого электромаг­нита присоединена батарея (фиг. 16.6) и пусть установилось большое магнитное поле. (Ток достигает постоянной величины, определяемой напряжением батареи и сопротивлением провода катушки.)



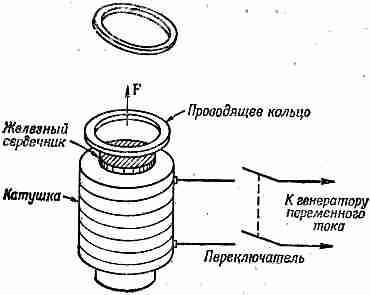
*Фиг. 16.6. Включение электромагнита в цепь.*

*Лампочка открывает проход току в момент отключения, препятствуя возникновению слишком большой э.д.с. на* кон­тактом *выключателя.*

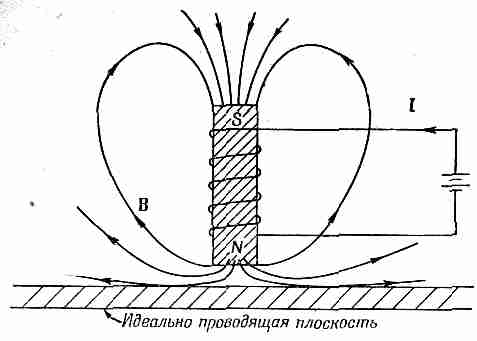
Но теперь предположим, что мы пытаемся отсоеди­нить батарею, разомкнув выключатель. Если бы мы на самом деле разорвали цепь, ток быстро уменьшился бы до нуля и в процессе уменьшения создал бы огромную э. д. с. В большин­стве случаев такой э. д. с. оказывается вполне достаточно, чтобы образовалась вольтова дуга между разомкнутыми контактами выключателя. Возникающее большое напряжение могло бы нанести вред катушке, да и вам, если бы именно вы раз­мыкали выключатель! По этим причинам электромагниты обыч­но включают в цепь примерно так, как показано на фиг. 16.6. Когда переключатель разомкнут, ток не меняется быстро, а продолжает течь через лампу, оставаясь постоянным за счет э. д. с. от самоиндукции катушки.

**§ 3. Силы, действующие на индуцируемые токи**

Вы, вероятно, наблюдали великолепную демонстрацию пра­вила Ленца с помощью приспособления, изображенного на фиг. 16.7. Это электромагнит точно такой же, как катушка а на фиг. 16.5. На одном конце электромагнита помещается алю­миниевое кольцо. Если с помощью переключателя подсоеди­нить катушку к генератору переменного тока, то кольцо взле­тает в воздух. Силу, конечно, порождают токи, индуцируемые в кольце. Тот факт, что кольцо отлетает прочь, показывает, что токи в нем препятствуют изменению поля, проходящего через кольцо. Когда у магнита северный полюс находится сверху, индуцированный ток в кольце создает внизу северный полюс. Кольцо и катушка отталкиваются точно так же, как два магнита, приложенные одинаковыми полюсами. Если в кольце сделать тонкий разрез по радиусу, сила исчезает — убедительное доказательство того, что она действительно обусловлена токами в кольце.



*Фиг. 16.7. Проводящее кольцо сильно отталкивает­ся электромагнитом, когда в нем меняется ток.*

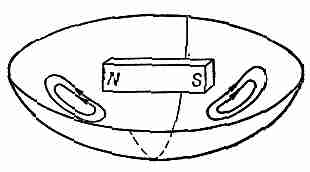


*Фиг. 16.8. Электромагнит вблизи идеально проводящей плоскости.*

Если вместо кольца у края электромагнита поместить алю­миниевый или медный диск, то и он отталкивается; индуциро­ванные токи циркулируют в материале диска и снова вызывают отталкивание.

Интересный эффект, в основе похожий на предыдущий, воз­никает с листом идеального проводника. В «идеальном провод­нике» ток совсем не встречает сопротивления. Поэтому возник­шие в нем токи могут течь не переставая. Фактически *малейшая* э. д. с. создала бы сколь угодно большой ток, а это на самом деле означает, что в нем вообще не может быть э. д. с. Любая попыт­ка создать магнитный поток, проходящий сквозь такой лист, вызовет токи, образующие противоположно направленные поля В — все со сколь угодно малыми *э.* д. с., так что никакого потока не будет.

Если к листу идеального проводника мы поднесем электромагнит, то при включении тока в магните в листе возникают токи (называемые вихревыми токами), и никакой магнитный поток не пройдет. Линии поля будут иметь вид, показанный на фиг. 16.8. То же самое произойдет, если к идеальному про­воднику поднести постоянный магнит. Поскольку вихревые токи создают противоположные поля, магниты от проводника отталкиваются. Поэтому оказывается возможным подвесить постоянный магнит в воздухе над листом идеального провод­ника, изготовленного в форме тарелки (фиг. 16.9). Магнит будет поддерживаться в воздухе за счет отталкивания индуцирован­ных вихревых токов в идеальном проводнике. При обычных температурах идеальных проводников не существует, но некоторые материалы при достаточно низких температурах стано­вятся идеальными проводниками.



*Фиг. 16.9. Магнитная палочка отталкивается вихревыми токами и повисает над чашей из сверх­проводника.*

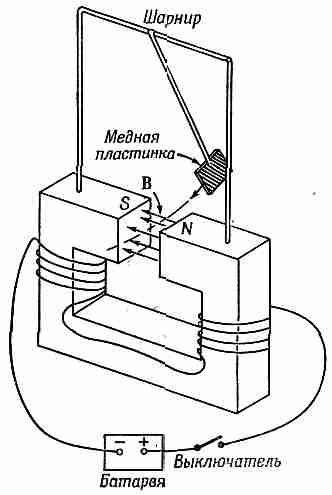
Так, при температуре ниже 3,8° К олово становится идеальным проводником; тогда оно называется сверхпроводником.

Если проводник, показанный на фиг. 16.8, не вполне иде­альный, то возникнет некоторое сопротивление течению вихре­вых токов. Токи будут постепенно замирать, и магнит медленно опустится. В неидеальном проводнике, чтобы течь дальше, вихревым токам необходима некоторая э. д. с., а для возник­новения э. д. с. поток должен непрерывно меняться. Поток магнитного поля постепенно проникает в проводник.

В обычном проводнике имеются не только силы отталкива­ния за счет вихревых токов, но могут быть и боковые силы. Например, если мы передвигаем магнит над проводящей поверхностью, вихревые токи создают тормозящую силу, по­тому что индуцированные токи препятствуют изменению по­тока. Такие силы пропорциональны скорости и похожи на силы вязкости.

Эти эффекты хорошо наблюдаются на приборе, изображен­ном на фиг. 16.10. Квадратная медная пластинка укреплена на конце стержня, образуя маятник. Пластинка качается взад и вперед между полюсами электромагнита. Когда магнит вклю­чается, движение маятника неожиданно прекращается. Как только металлическая пластинка попадает в зазор магнита, в ней индуцируется ток, который стремится помешать измене­нию потока через пластинку. Если бы пластинка была идеаль­ным проводником, токи были бы столь велики, что они снова вытолкнули бы пластинку и она отскочила бы назад. В медной же пластинке имеется некоторое сопротивление, поэтому токи' сначала заставляют пластинку почти намертво застыть, когда она начинает входить в поле. Затем, по мере того как токи зами­рают, пластинка продолжает медленно двигаться в магнитном; поле и останавливается совсем.

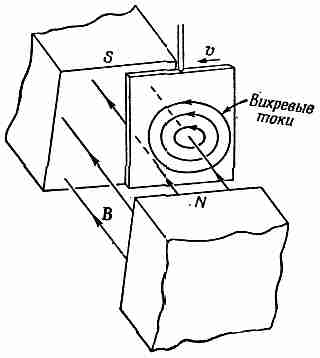
Схема вихревых токов в медном маятнике поясняется фиг. 16.11. Сила и расположение токов весьма чувствительны к форме пластинки. Если, скажем, вместо медной пластинки взять другую, в которой имеется ряд узких щелей (фиг. 16.12), то эффекты вихревых токов сильно уменьшатся. Маятник проходит сквозь магнитное по­ле лишь с небольшой тор­мозящей силой



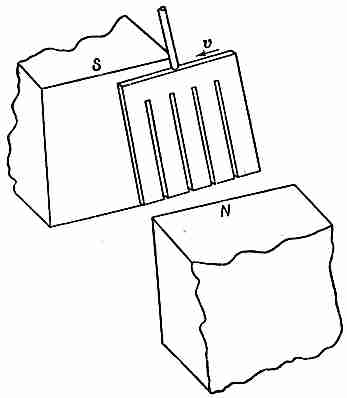
*Фиг. 16.10. Торможение маят­ника указывает на силы, возни­кающие благодаря вихревым то­кам.*

Причина в том, что токи в каждой ча­сти пластинки возбуждают­ся меньшими по величине потоками и, следовательно, эффекты сопротивления каж­дой петли оказываются боль­шими. Чем меньше токи, тем меньше и торможение. Вяз­кий характер силы проявит­ся еще более наглядно, если медную пластинку поместить между полюсами магнита и за­тем отпустить ее. Пластинка не падает, она просто медленно опускается. Вихревые токи оказывают сильное сопротивление движению, точь-в-точь как вязкое сопротивление меда.

Если мы не будем протаскивать проводник мимо магнита, а попробуем вращать его в магнитном поле, то в нем в резуль­тате тех же эффектов возникнет тормозящий момент. И наоборот, если вращать магнит, меняя местами его полюса, вблизи проводящей плоско­сти или кольца, то кольцо повернется за магнитом, токи в кольце создадут мо­мент, стремящийся повернуть кольцо вместе с магнитом.

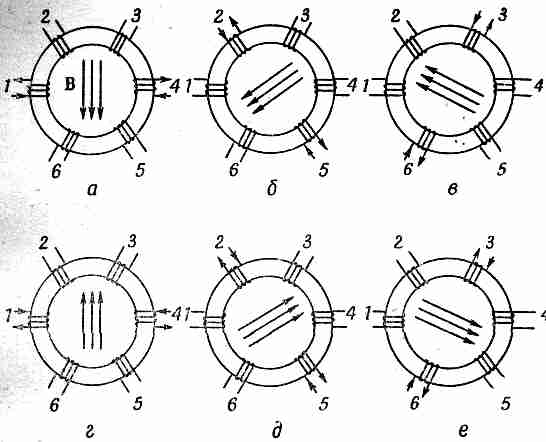


*Фиг. 16.11. Вихревые токи в медном маятнике.*



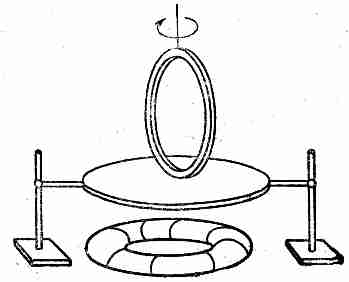
*Фиг. 16.12. Эффекты от вих­ревых токов си*льно *снижа­ются, если в пластинке про­резать щели.*

Поле, весьма похожее на поле вращающегося магнита можно создать с помощью устройства из катушек (фиг. 16.13). Мы берем железный тор (т. е. железное кольцо в виде бублика) и наматываем на него шесть катушек. Направив ток так, как показано на фиг. 16.13, *а,* через обмотки *1* и *4,* мы получим магнитное поле в направлении, указанном стрелками. Если мы теперь переключим ток на обмотки *2* и *5,* то магнитное поле будет направлено уже по-другому (фиг. 16.13, б). Продолжая так действовать, мы получаем последовательность полей, изо­браженных на остальных частях нашего рисунка. Если процесс проводить плавно, то получится «вращающееся» магнитное поле. Подсоединив катушки к сети трехфазного тока (а она дает именно такую последовательность токов), мы легко полу­чим требуемую последовательность токов. «Трехфазный ток» создается генератором, использующим принцип фиг. 16.1, за тем исключением, что на оси симметрично укрепляются *три* рамки, т. е. каждая под углом 120° к соседней. Когда рамки вращаются как единое целое, э. д. с. максимальна в одной рамке, затем в другой и т. д. в правильной последовательности. Трехфазный ток имеет много практических преимуществ. Одно из них заключается в возможности получить вращающееся магнитное поле. Момент, действующий на проводник со стороны такого вращающегося поля, легко обнаруживается на металлическом кольце, поставленном на изолирующей подставке прямо над тором (фиг. 16.14). Вращающееся поле вызывает вращение кольца вокруг вертикальной оси. Здесь видны те же основные элементы, которые имеются в больших промышленных трех­фазных индукционных моторах.

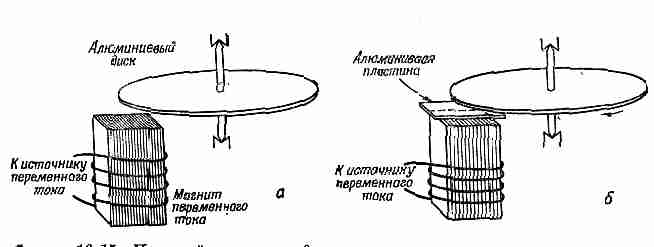


*Фиг.*  *16.13. Создание вращающегося магнитного поля.*

Другой тип индукционного мотора показан на фиг. 16.15. Это устройство непригодно для практических высокоэффектив­ных моторов, но иллюстрирует основной принцип. Электромаг­нит *М,* состоящий из пачки прокатанных железных листов, на которую навита спиральная обмотка, питается от генератора переменного тока. Магнит создает переменный поток поля 15 сквозь алюминиевый диск. Если имеются только эти две компо­ненты (см. фиг. 16.15, а), у нас еще нет мотора. В диске имеются вихревые токи, но они симметричны и момента не возникает. (Диск будет немного нагреваться за счет токов индукции.)



*Фиг. I6.14. С помощью враща­ющегося поля (фиг. 16.13) можно придать кольцу из проводника вращающий момент.*



*Фиг. 16.15. Простой пример индукционного мотора с затененным полюсом.*

Если теперь мы закроем только одну половину магнитного по­люса алюминиевой пластинкой (фиг. 16.15, б), то диск начнет вращаться и мы получим мотор. Действие его связано с *двумя* эффектами вихревых токов. Во-первых, вихревые токи в алю­миниевой пластинке препятствуют изменению потока сквозь нее, поэтому магнитное поле над пластинкой всегда отстает от поля над непокрытой частью полюса. Этот так называемый эффект «затененного полюса» создает поле, которое в «затенен­ной» области меняется совсем так же, как и в «незатененной», за исключением постоянного запаздывания во времени. Эффект в целом такой, как будто имеется вдвое более узкий магнит, постоянно передвигающийся из незатененной области в затенен­ную. Во-вторых, меняющиеся поля взаимодействуют с вихре­выми токами диска, создавая в нем момент силы.

**§ 4. Электротехника**

Когда Фарадей впервые опубликовал свое замечательное открытие о том, что изменение магнитного потока создает э. д. с., его спросили (как спрашивают, впрочем, всякого, кто откры­вает какие-то новые явления): «Какая от этого польза?» Ведь все, что он обнаружил, было очень странным — в проводе воз­никал крошечный ток, когда он двигал провод возле магнита. Какая же может быть от этого «польза»? Фарадей ответил: «Ка­кая может быть польза от новорожденного?»

А теперь вспомните о тех громадных практических приме­нениях, к которым привело его открытие. Все, что мы описы­вали,— отнюдь не игрушки; это примеры, выбранные по боль­шей части так, чтобы представить принцип той или иной прак­тической машины. Например, вращающееся кольцо во вращаю­щемся поле — индукционный мотор. Существует, конечно, известная разница между кольцом и практически используемым индукционным мотором. У кольца момент очень мал; протяните руку и вы можете остановить его. В хорошем моторе детали должны быть лучше пригнаны: магнитное поле не должно так щедро «растрачиваться» в воздухе. Во-первых, с помощью железа поле концентрируется. Мы не говорили о том, как это делает железо, но оно способно увеличить магнитное поле в де­сятки и тысячи раз по сравнению с полем одной медной ка­тушки. Во-вторых, зазоры между частями железа делаются небольшими; с этой целью железо даже встраивается внутрь вращающегося кольца. Словом, все направлено на то, чтобы получить наибольшие силы и максимальную эффективность, т. е. превратить электрическую мощность в механическую, и такое «кольцо» уже нельзя будет удержать рукой.

Задача уменьшения зазоров и установление самого практич­ного режима работы есть дело *инженерной* науки. Она требует серьезного изучения проблем конструирования, хотя никаких новых принципов получения силы не существует. Но от основ­ных принципов до практического и экономичного проектирова­ния — долгий путь. И именно тщательная инженерно-конст­рукторская работа сделала возможным такую грандиозную вещь, как гидростанция Боулдер Дэм и все, что с ней связано.

Что такое Боулдер Дэм? Огромная река, перегороженная бетонной стеной. Но что это за стена! Изогнутая в виде идеально плавной кривой, тщательно рассчитанная так, чтобы как можно меньше бетона сдерживало напор реки. Стена утолщается книзу, образуя чудесную форму, которой любуются художники, но которую способны оценить только инженеры, потому что они понимают, насколько это хорошо. Они знают, что утолще­ние определяется тем, как растет давление воды на глубине. Но мы отвлеклись от электричества.

Затем вода реки забирается в огромную трубу. Уже само по себе это замечательное инженерное сооружение. По трубе вода передается к «водяному колесу» — огромной турбине — и за­ставляет колесо вращаться. (Еще одно достижение техники.) Но зачем крутят колеса? Они присоединены к невероятно запутанной мешанине из железа и меди (там все перекручено и переплетено). Все сооружение состоит из двух частей — одна крутится, а другая — стоит. Все это сложное сооружение сделано из немногих материалов, главным образом из железа и меди, а также из бумаги и шеллака, служащих изоляцией. Вращающееся чудовище. Генератор. Откуда-то из этого ме­сива железа и меди вылезает несколько медных концов. Пло­тина, турбина, железо, медь — все собрано вместе для того, чтобы на этих медных полосках появилось нечто особенное — э. д. с. Затем медные полосы проходят небольшой путь и за­кручиваются несколько раз вокруг другого куска железа, образуя трансформатор; на этом их работа кончается.

Но вокруг этого же куска железа обвивается еще один мед­ный кабель, который не соединяется непосредственно с поло­сами, пришедшими от генератора; он проходит поблизости от полос и забирает их з. д. с. Трансформатор превращает энергию, которая имела сравнительно низкое напряжение, необходимое для эффективной работы генератора, в очень высокое напряжение, которое лучше всего подходит для экономичной передачи электроэнергии по длинным кабелям.

И все должно быть исключительно эффективным — не может быть ничего лишнего, никаких потерь. Почему? Через все эти устройства протекает вся электрическая энергия, которая ис­пользуется в стране. Если пропадет всего один или два про­цента энергии — подумайте, как много это составит. Если в трансформаторе остается только один процент энергии, то она должна куда-то деваться. Если бы, например, она выделя­лась в виде тепла — все устройство расплавилось бы.

Из Боулдер Дэм выходит во всех направлениях несколько дюжин медных стержней — длинных, очень длинных стержней толщиной, пожалуй, с вашу руку и длиной в сотни миль. Узкие медные дороги, несущие энергию гигантской реки. Затем эти дороги разветвляются... трансформаторов становится еще больше... иногда они подходят к большим генераторам, пере­водящим ток в другие формы... иногда к машинам, выполняю­щим важные промышленные работы... к новым трансформа­торам... Затем все новые и новые разветвления и ответвления... пока, наконец, река не распределится по всему городу; она крутит моторы, создает тепло, свет, изготовляет приборы. Чудо рождения горячего огня из холодной воды на расстоянии более 600 миль — и все это благодаря особым образом собранным кусочкам железа и меди. Большие моторы для проката стали и крошечные моторчики для бормашины. Тысячи маленьких колесиков, крутящихся под действием большого колеса в Боул­дер Дэм. Остановите большое колесо, и все остальные колесики замрут; огни потухнут.

Но этого мало. Те же явления, которые помогают взять гран­диозную мощь реки и распределить ее по всей округе, пока в конце концов несколько капель реки закрутят бормашину, снова приходят на помощь при создании исключительно тонких приборов... для определения неуловимо слабых токов... для передачи голосов, музыки и изображений... для вычислительных машин... для автоматических машин фантастической точности.

Все это возможно потому, что тщательно продумано устрой­ство из меди и железа — эффективно созданы магнитные поля... железные блоки диаметром в 2 метра, вращающиеся с зазором в 2 миллиметра... рассчитаны правильно пропорции меди, чтобы получить оптимальную эффективность... выдуманы стран­ные формы, которые все служат своим целям, так же как форма плотины.

Если археолог будущего когда-нибудь раскопает Боулдер Дэм, он, вероятно, восхитится красотой ее линий. А исследователь — гражданин какой-то великой цивилизации Будущего, посмотрев на генераторы и трансформаторы, скажет: «Заметьте, как красивы формы каждой железной детали. Подумайте, сколько мысли вложено в каждый кусочек меди».

Здесь проявляется сочетание могущества техники и тща­тельного расчета. В генераторе осуществляется то, что нигде более в природе не встречается. Правда, силы индукции появ­ляются и в других случаях. Несомненно, где-то вокруг Солнца и звезд действуют эффекты электромагнитной индукции. Воз­можно (хотя и не наверное), что магнитное поле Земли поддер­живается каким-то гигантским аналогом электрического гене­ратора, который работает на токах, циркулирующих в недрах Земли. Но нигде нет такого сочетания движущихся частей, кото­рые могли бы порождать электрическую энергию, как это делается в генераторе,— непрерывно и очень экономично.

Вы, возможно, думаете, что конструирование электрических генераторов уже не представляет интереса, что это уже мертвая наука, ведь все они давно созданы. Почти совершенные гене­раторы или моторы можно взять просто с полки. Но даже если бы это было и так, нужно восхищаться чудесной законченностью решения проблемы. Однако осталось немало и нерешенных задач. И даже генераторы и моторы становятся снова проблемой. Возможно, что скоро для решения проблемы распределения электрической энергии понадобится использовать всю область низких температур и сверхпроводников. Будут созданы новые оптимальные установки с учетом радикально новых факторов. Возможно, энергетические сети будущего будут мало похожи на сегодняшние.

Итак, вы видите, что при изучении законов индукции можно заняться бесчисленным множеством приложений и проблем. Конструирование электрических машин само по себе может стать задачей всей жизни. Мы не будем слишком углубляться в этот вопрос, но мы должны осознать то, что открытие закона индукции неожиданно связало теорию с огромным числом прак­тических применений. Область эта принадлежит инженерам и тем ученым прикладной науки, которые занимаются деталь­ной разработкой различных приложений. Физика дает им лишь основу — основные законы, не зависящие от того, к чему они применяются. (Создание этой основы еще далеко не закончено, потому что предстоит еще подробно рассмотреть свойства железа и меди. Немного позже мы увидим, что физика может кое-что сказать и о них.)

Современная электротехника берет свое начало с открытий Фарадея. Бесполезный новорожденный превратился в чудо-богатыря и изменил облик Земли так, как его гордый отец не мог себе и представить.

***Глава 17***

**ЗАКОНЫ ИНДУКЦИИ**

[**§ 1. Физика и****ндукции**](#a1)

[**§ 2. Исклю****чения из «правила потока»**](#a2)

[**§ 3. Ускорени****е частицы в индуцированном электрическом поле; бетатрон**](#a3)

[**§ 4. Пара****докс**](#a4)

[**§ 5. Генерат****ор переменного тока**](#a5)

[**§ 6. Взаимна****я индукция**](#a6)

[**§ 7. Самоин****дукция**](#a7)

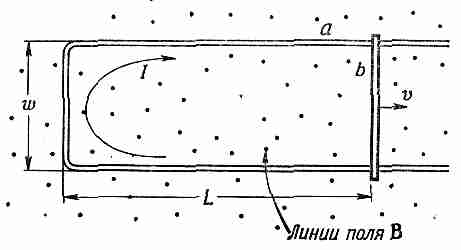
[**§ 8. Индукти****вность и магнитная энергия**](#a8)

**§ 1. Физика индукции**

В предыдущей главе мы описали множество явлений, которые показали, что эффекты индукции весьма сложны и интересны. Сейчас мы хотим обсудить основные законы, управ­ляющие этими эффектами. Мы уже определяли э. д. с. в проводящей цепи как полную силу, действующую на заряды, просуммированную по всей длине цепи. Более точно, это танген­циальная компонента силы на единичный заряд, проинтегрированная по всему проводу вдоль цепи. Следовательно, эта величина равна пол­ной работе, совершаемой над единичным заря­дом, когда он обходит один раз вокруг цепи.

Мы дали также «правило потока», которое утверждает, что э. д. с. равна скорости изме­нения магнитного потока сквозь такую цепь проводников. Давайте посмотрим, можем ли мы понять, почему это так. Прежде всего рассмотрим случай, когда поток меняется из-за того, что цепь движется в постоянном поле.

На фиг. 17.1 показана простая проволочная петля, размеры которой могут меняться. Петля состоит из двух частей — неподвижной U-образной части (а) и подвижной перемычки (b), которая может скользить вдоль двух плеч U. Цепь всегда замкнута, но площадь ее может меняться. Предположим, что мы помещаем эту петлю в однородное магнитное поле так, что плоскость U оказывается перпендикуляр­ной полю. Согласно правилу, при движении перемычки в петле должна возникать э. д. с., пропорциональная скорости изменения потока сквозь петлю. Эта э. д. с. будет порождать в петле ток. Мы предположим, что сопротивле­ние проволоки достаточно велико, так что токи малы.



*Фиг. 17.1. В рамке наводится э.д.с., если поток меняется за счет изменения площади рамки при перемещении перемычки b.*

Тогда магнитным полем от этого тока можно пре­небречь.

Поток через петлю равен *ωLB,* поэтому «правило потока» дало бы для э. д. с. (ее обозначим через *ξ)*

C:\1\pic\gray.jpg

где *v —* скорость смещения перемычки.

Нам следовало бы понимать этот результат и с другой точки зрения, отправляясь от магнитной силы vXB, действующей на заряды в движущейся перекладине. Эти заряды будут чув­ствовать силу, касательную к проволоке и равную *vB* для единичного заряда. Она постоянна вдоль длины *ω* перемычки и равна нулю в остальных местах, поэтому интеграл равен

***E= -ωvB,***

что в точности совпадает с результатом, полученным из ско­рости изменения потока.

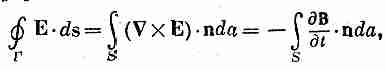
Приведенное доказательство можно распространить на лю­бой случай, когда магнитное поле постоянно и провода дви­жутся. Можно в общем виде доказать, что для любой цепи, части которой движутся в постоянном магнитном поле, э. д. с. равна производной потока по времени независимо от формы цепи.

Ну а что произойдет, если петля будет неподвижна, а маг­нитное поле изменится? На этот вопрос мы не можем ответить с помощью тех же аргументов. Фарадей открыл (поставив опыт), что «правило потока» остается справедливым независи­мо от того, почему меняется поток.

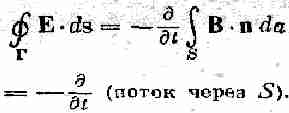
Сила, действующая на электрические заряды, в общем случае дается формулой F = *q*(E+vXB); новых особых «сил за счет изменения магнитного поля» не существует. Любые силы, действующие на покоящиеся заряды в неподвижной проволоке, возникают за счет Е. Наблюдения Фарадея при­вели к открытию нового закона о связи электрического и магнитного полей: в области, где магнитное поле меняется со временем, генерируются электрические поля. Именно это элек­трическое поле и гонит электроны по проволоке, и, таким обра­зом, оно-то и ответственно за появление э. д. с. в неподвиж­ной цепи, когда магнитный поток изменяется.

C:\1\pic\gray.jpgОбщий закон для электрического поля, связанного с изме­няющимся магнитным полем, такой:

(17.1)

Мы назовем его законом Фарадея. Он был открыт Фарадеем, но впервые в дифференциальной форме записан Максвеллом в качестве одного из его уравнений. Давайте посмотрим, как из этого уравнения получается «правило потока» для цепей. Используя теорему Стокса, этот закон можно записать в интегральной форме

(17.2)

где, как обычно, Г — произвольная замкнутая кривая, a *S —* любая поверхность, ограниченная этой кривой. Вспомним, что здесь Г — это *математическая* кривая, зафиксированная в про­странстве, a *S* — фиксированная поверхность. Тогда производ­ную по времени можно вынести за знак интеграла:

(17.3)

Применяя это соотношение к кривой Г, которая идет вдоль *неподвижной* цепи проводников, мы получаем снова «правило потока». Интеграл слева — это э. д. с., а в правой части с об­ратным знаком стоит скорость изменения потока, проходящего внутри контура. Итак, соотношение (17.1), примененное к не­подвижному контуру, эквивалентно «правилу потока».

Таким образом, «правило потока» согласно которому э. д. с. в контуре равна взятой с обратным знаком скорости, с которой меняется магнитный поток через контур, применимо, когда поток меняется за счет изменения поля или когда движется контур (или когда происходит и то, и другое). Две возмож­ности —«контур движется» или «поле меняется» — неразли­чимы в формулировке правила. Тем не менее для объяснения правила в этих двух случаях мы пользовались двумя совершенно разными законами: vXВ для «движущегося контура» и ∇XЕ = -*dB/dt* для «меняющегося поля».

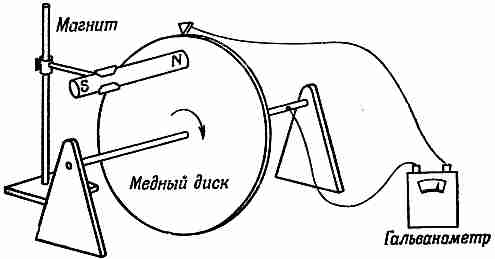
Мы не знаем в физике ни одного другого такого примера, когда бы простой и точный общий закон требовал для своего настоящего понимания анализа в *терминах двух разных явлений.* Обычно столь красивое обобщение оказывается исходящим из единого глубокого основополагающего принципа. Но в этом случае какого-либо особо глубокого принципа не видно. Мы должны воспринимать «правило» как совместный эффект двух совершенно различных явлений.

На «правило потока» мы должны посмотреть следующим образом. Вообще говоря, сила на единичный заряд равна *F/q* = Е+vXB. В движущихся проводниках сила возникает за счет v. Кроме того, возникает поле Е, если где-либо меняется магнитное поле. Эти эффекты независимы, но э. д. с. вокруг проволочной петли всегда равна скорости изменения магнитного потока сквозь петлю.

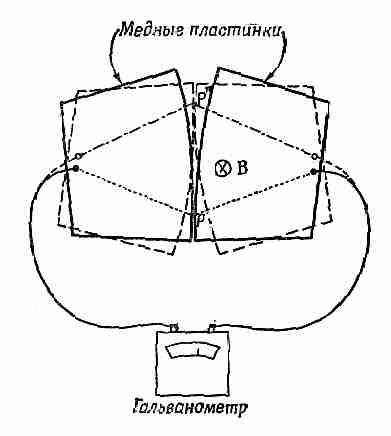
**§ 2. Исключения из «правила потока»**

Здесь мы приведем несколько примеров, частично известных Фарадею, которые показывают, как важно ясно понимать раз­ницу между двумя эффектами, ответственными за возникнове­ние наведенной э. д. с. Наши примеры включают те случаи, когда «правило потока» неприменимо либо потому, что вообще никаких проводов нет, либо потому, что *путь,* избираемый индуцированными токами, проходит внутри объема провод­ника.

Вначале сделаем важное замечание: та часть э. д. с., которая возникает за счет поля Е, не связана с существованием физиче­ской проволоки (в отличие от части vXВ). Поле Е может суще­ствовать в пустом пространстве, и контурный интеграл от него по любой воображаемой линии в пространстве есть скорость из­менения потока В через эту линию.



*Фиг. 17.2. При вращении диска слагаемое* vXB *порож­дает э.д.с., но поток сквозь цепь не меняется.*

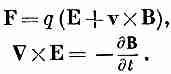


*Фиг. 17.3. При повороте пластинок в однородном маг­нитном поле поток может сильно меняться, но э.д.с. не возникает.*

(Заметьте, что это совсем непохоже на поле Е, создаваемое статическими зарядами, так как в электростатике контурный интеграл от Е по замкнутой петле всегда равен нулю.)

Теперь опишем случай, когда поток через контур не меняется, а э. д. с. тем не менее существует. На фиг. 17.2 пока­зан проводящий диск, помещенный в магнитное поле и который может вращаться на неподвижной оси. Один контакт приделан к оси, а другой трется о внешний край диска. Цепь замыкается через гальванометр. Когда диск вращается, «контур» (в смысле места в пространстве, где текут токи) всегда остается тем же самым. Но часть «контура» проходит в диске, в движущемся материале. Хотя поток по контуру постоянен, э. д. с. все же есть, в этом можно убедиться по отклонению гальванометра. Ясно, что здесь перед нами случай, когда за счет силы vXB в движущемся диске возникает э. д. с., которая не может быть равна изменению потока.

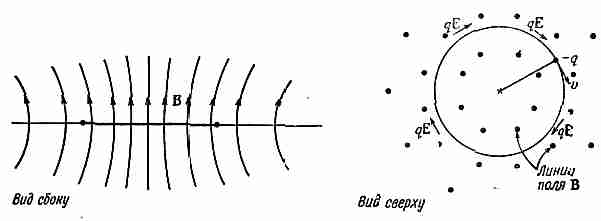
В качестве обратного примера мы сейчас рассмотрим не­сколько необычный случай, когда поток через «контур» (снова в смысле того места, где текут токи) изменяется, а э. д. с. *отсутствует.* Представим себе две металлические пластины со слегка изогнутыми краями (фиг. 17.3), помещенные в одно­родное магнитное поле, перпендикулярное их плоскости. Каж­дая пластина присоединена к одному из полюсов гальвано­метра, как показано на фигуре. Пластины образуют контакт в одной точке *Р,* так что цепь замкнута. Если теперь повернуть пластины на небольшой угол, точка контакта сдвинется в *Р'.*

Если мы вообразим, что «цепь» замкнута внутри пластин по пунктирной линии, то по мере поворота пластины взад и впе­ред магнитный поток через этот контур изменяется на большую величину. Но поворот может произойти от незначительного движения, тогда vXB очень мало и э. д. с. практически отсутствует. В этом случае «правило потока» бессильно. Оно спра­ведливо лишь для контуров, *материал* которых остается неизменным. Когда материал контура меняется, приходится обращаться снова к основным законам. *Правильное* физическое содержание всегда дается двумя основными законами:

**§ 3. Ускорение частицы в индуцированном электрическом поле; бетатрон**

Мы уже говорили, что э. д. с., созданная изменяющимся магнитным полем, может существовать даже в отсутствие проводников; т. е. магнитная индукция возможна без проводов. Мы можем представить себе э. д. с. вдоль произвольной мате­матической кривой в пространстве. Она определяется как тангенциальная компонента Е, проинтегрированная вдоль кривой. Закон Фарадея гласит, что этот контурный интеграл равен скорости изменения магнитного потока через замкнутую кривую [соотношение (17.3)].

В качестве примера действия такого индуцированного электрического поля мы сейчас рассмотрим движение электрона в из­меняющемся магнитном поле. Представим себе магнитное поле, которое всюду на плоскости направлено по вертикали (фиг. 17.4). Магнитное поле создается электромагнитом, но детали нас здесь интересовать не будут. В нашем примере мы предположим, что магнитное поле симметрично относительно некой оси, т. е. напряженность магнитного поля зависит только от расстояния до оси.



*Фиг. 17.4. Электрон ускоряется в аксиально-симметричном магнитном поле, зависящем от времени.*

Магнитное поле меняется также со време­нем. Представим теперь, что электрон в этом поле движется по круговой траектории постоянного радиуса с центром на оси поля. (Позже мы увидим, как можно создать такое движение.) Меняющееся магнитное поле создает электрическое поле Е, касательное к орбите электрона, которое будет двигать его по окружности. Вследствие симметрии это электрическое поле всюду на окружности принимает одну и ту же величину. Если орбита электрона имеет радиус r, то контурный интеграл от Е по орбите равен скорости изменения магнитного потока через окружность. Контурный интеграл от Е равен просто величине *Е,* умноженной на длину окружности 2πr. Магнитный поток, вообще говоря, дается интегралом. Обозначим через Bср — среднее магнитное поле внутри окружности; тогда поток равен этому среднему магнитному полю, умноженному на площадь круга. C:\1\pic\gray.jpgМы получим (отвлекаясь от знака)

C:\1\pic\gray.jpgПоскольку мы предположили, что r—величина постоянная, то *Е* пропорционально производной по времени от среднего поля:

(17.4)

Электрон будет чувствовать электрическую силу *qE* и будет ею ускоряться. Помня, что на основании точного релятивистского уравнения движения скорость изменения импульса пропорцио­нальна силе, имеем

C:\1\pic\gray.jpg

(17.5)

C:\1\pic\gray.jpgДля принятой нами круговой орбиты электрическая сила, действующая на электрон, всегда направлена по движению, поэтому полный импульс будет расти со скоростью, даваемой равенством (17.5). Комбинируя (17.5) и (17.4), можно связать скорость изменения импульса с изменением среднего магнитного поля:

(17.6)

C:\1\pic\gray.jpgИнтегрируя по *t,* получаем следующее выражение для им­пульса электрона:

(17.7)

где р0 — импульс, с которым электрон начинает двигаться, a ΔBcp — последующее изменение Bср. Работа *бетатрона —* машины, ускоряющей электроны до больших энергий, основана именно на этой идее.

Чтобы понять, как работает бетатрон, необходимо представ­лять себе принцип движения электрона по окружности. В гл. 11 (вып. 1) мы уже обсуждали этот принцип. Если на орбите элект­рона создать магнитное поле В, возникнет поперечная сила qvXB, которая при соответствующем выборе В может заставить электрон двигаться по предположенной орбите. В бетатроне эта поперечная сила вызывает движение электрона по круговой орбите постоянного радиуса. Мы можем определить, каким должно быть магнитное поле на орбите, опять с помощью ре­лятивистского уравнения движения, но на этот раз для попереч­ной компоненты силы. В бетатроне (см. фиг. 17.4) поле В пер­пендикулярно v, поэтому поперечная сила равна *qvB.* Таким образом, сила равна скорости изменения поперечной компо­ненты импульса *pt:*

C:\1\pic\gray.jpg

(17.8)

Когда частица движется *по окружности,* Скорость изменения поперечного импульса равна величине полного импульса, умноженной на ω — угловую скорость вращения (согласно аргу­ментам, приведенным в гл. 11, вып. 1):

C:\1\pic\gray.jpg

(17.9)

где, поскольку движение круговое,

C:\1\pic\gray.jpg

(17.10)

C:\1\pic\gray.jpgПолагая магнитную силу равной поперечному ускорению, имеем

(17.11)

где Ворб — поле при радиусе, равном r*.*

В приведенном в действие бетатроне импульс электрона, согласно выражению (17.7), растет пропорционально Bср, и чтобы электрон продолжал двигаться по собственной окруж­ности, равенство (17.11) должно по-прежнему выполняться вместе с ростом импульса электрона. Величина Bopб должна расти пропорционально импульсу р*.* Сравнивая (17.11) с (17.7), определяющим *р,* мы видим, что должно выполняться следую­щее соотношение между Вср *—* средним C:\1\pic\gray.jpgмагнитным полем *внутри* орбиты радиуса rи магнитным полем Вор6 на орбите:

(17.12)

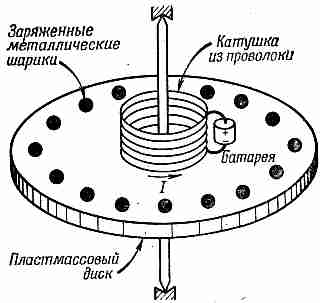
Для правильной работы бетатрона нужно, чтобы среднее магнитное поле внутри орбиты росло в два раза быстрее магнитного поля на самой орбите. При этих условиях с ростом энергии частицы, увеличивающейся за счет индуцированного электри­ческого поля, магнитное поле на орбите растет как раз со ско­ростью, нужной для удержания частицы на окружности.

Бетатрон используется для разгона электронов до энергий в десятки или даже в сотни миллионов электронвольт. Однако по ряду причин для ускорения электронов до энергий, много больших нескольких сот миллионов электронвольт, эта машина становится невыгодной. Одна из этих причин — трудность достижения на практике требуемой высокой величины среднего магнитного поля внутри орбиты, а вторая — несправедливость формулы (17.6) для очень больших энергий, так как в ней не учитывается потеря энергии частицей за счет излучения электро­магнитной энергии (так называемое синхротронное излучение, см. гл. 34, вып. 3). По этим причинам ускорение электронов до самых больших энергий — до многих миллиардов электрон-вольт — совершается посредством машины другого рода, назы­ваемой *синхротроном.*

**§ 4. Парадокс**

Теперь мы хотели бы предложить вам некий кажущийся парадокс. Парадокс возникает тогда, когда при одном способе рассуждений получается один ответ, а при другом способе — совсем другой, так что мы остаемся в неведении, что же собст­венно должно быть на самом деле. Разумеется, в физике никогда не бывает настоящих парадоксов, потому что существует только один правильный ответ; по крайней мере мы верим, что природа поступает только единственным способом (и именно этот спо­соб, конечно, *правильный).* Поэтому в физике парадокс — всего лишь путаница в нашем собственном понимании. Итак, вот наш : парадокс.

Представим, что мы конструируем прибор (фиг. 17.5), в котором имеется тонкий круглый пластмассовый диск, ук­репленный концентрически на оси с хорошими подшипниками, так что он совершенно свободно вращается. На диске имеется катушка из проволоки — короткий соленоид, концентричный по отношению к оси вращения. Через этот соленоид проходит постоянный ток / от маленькой батареи, также укрепленной на диске. Вблизи края диска по окружности на равном расстоянии размещены маленькие металлические шарики, изолированные друг от друга и от соленоида пластмассовым материалом диска. Каждый из этих проводящих шариков заряжен одинаковым зарядом *Q.* Вся картина стационарна, и диск неподвижен. Предположим, что случайно, а может и намеренно, ток в соленоиде прекратился, но, разумеется, без какого-либо вмешательства извне. Пока через соленоид шел ток, более или менее параллельно оси диска проходил магнитный поток.



*Фиг. 17.5. Повернется ли диск, если ток I прекратится?*

После того как ток прервался, поток этот должен уменьшиться до нуля. Поэтому должно возникать индуцированное электрическое поле, которое будет циркулировать по окружностям с центром на оси диска. Заряженные шарики на периферии диска будут все испытывать действие электрического поля, касательного к внеш­ней окружности диска. Эта электрическая сила направлена для всех зарядов одинаково и, следовательно, вызовет у диска вра­щающий момент. Из этих соображений можно ожидать, что, когда ток в соленоиде исчезнет, диск начнет вращаться. Если нам известны момент инерции диска, ток в соленоиде и заряд шариков, то можно вычислить результирующую угловую

скорость.

Но можно рассуждать и по-другому. Используя закон сох­ранения момента количества движения, мы могли бы сказать, что момент диска со всеми его пристройками вначале равен нулю, поэтому момент всей системы должен оставаться нуле­вым. Никакого вращения при остановке тока быть не должно. Какое из доказательств правильно? Повернется ли диск или нет? Мы предлагаем вам подумать над этим вопросом.

Хотелось бы предостеречь вас, что правильный ответ не за­висит от всяких несущественных факторов, таких, как несим­метричное положение батареи, например. В самом деле, вы можете представить себе, скажем, такой идеальный случай: соленоид сделан из сверхпроводящей проволоки, через которую проходит ток. После того как диск тщательно установлен неподвижным, температуру соленоида медленно начинают повышать. Когда температура проволоки достигнет переход­ного значения между сверхпроводимостью и нормальной прово­димостью, ток в соленоиде обратится в нуль вследствие сопро­тивления проволоки. Поток, как и раньше, упадет до нуля и вокруг оси возникнет электрическое поле. Мы хотели бы также предостеречь вас, что решение не простое, но это и не обман. Когда вы разберетесь в этом, вы обнаружите важный закон электромагнетизма.

**§ 5. Генератор переменного тока**

В оставшейся части этой главы мы применим принципы, из­ложенные в § 1 для анализа ряда явлений, обсуждавшихся в гл. 16. Сначала мы рассмотрим подробно генератор перемен­ного тока. Такой генератор в основном состоит из проволочной катушки, вращающейся в однородном магнитном поле. Тот же самый результат может быть достигнут с помощью неподвиж­ной катушки в магнитном поле, направление которого вращает­ся по способу, описанному в предыдущей главе. Мы рассмотрим лишь первый случай. Пусть имеется круглая катушка из про­волоки, которая может вращаться вокруг оси, проходящей вдоль одного из ее диаметров. И пусть эта катушка помещена в магнитное поле, перпендикулярное оси вращения (фиг. 17.6). Представим себе, что оба конца катушки выведены на внешнюю цепь с помощью каких-нибудь скользящих контактов.

Благодаря вращению катушки магнитный поток через нее будет меняться. Поэтому в цепи катушки появится э. д. с. Пусть *S* —- площадь катушки, а θ — угол между магнитным полем и нормалью к [плоскости катушки.](#п2) Тогда поток через катушку равен

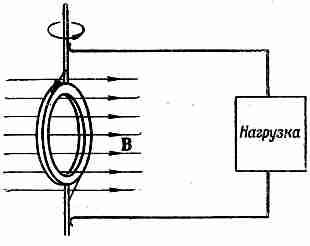
*BScosθ.* (17.13)

C:\1\pic\gray.jpgЕсли катушка вращается с постоянной угловой скоростью ω, то θ меняется со временем как ωt. Тогда э. д. с. *ξ* в ка­тушке равна

C:\1\pic\gray.jpgили

(17.14)

C:\1\pic\gray.jpgЕсли мы выведем провода из генератора на некоторое рас­стояние от вращающейся катушки, в место, где магнитное поле равно нулю или хотя бы не меняется со временем, то ротор от Е в этой области будет равен нулю, и мы сможем определить электрический потенциал. В самом деле, если ток не уходит из генератора, то разность потенциалов V между двумя прово­дами будет равна э. д. с. вращающейся катушки, т. е.



*Фиг. 17.6. Катушка из проволоки, вращающаяся в однородном маг­нитном поле,*— *основная идея ге­нератора переменного тока.*

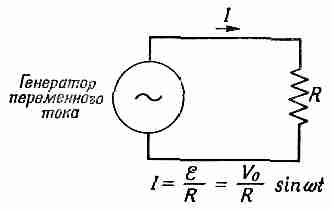
Разность потенциалов в проводах меняется как sinωt. Такая меняющаяся разность потенциалов называется *переменным напряжением.*

Поскольку между проводами имеется электрическое поле, они должны быть электрически заряжены. Ясно, что э. д. с. генератора выталкивает лишние заряды в провода, пока их электрическое поле не становится достаточно сильным, чтобы в точности уравновесить силу индукции. Если посмотреть на генератор со стороны, то покажется, будто два провода электро­статически заряжены до разности потенциалов *V,* а заряды как бы меняются со временем, создавая переменную разность потенциалов. Есть и еще одно отличие от того, что наблюдается в случае электростатики. Если присоединить генератор к внеш­ней цепи, по которой может проходить ток, мы обнаружим, что э. д. с. не позволяет проводам разряжаться, а продолжает подпитывать их зарядами, когда из них уходит ток, стремясь сохранить на проводах одну и ту же разность потенциалов. Если генератор подключен к цепи, полное сопротивление которой равно *R,* ток в цепи будет пропорционален э. д. с. генератора и обратно пропорционален *R.* Поскольку э. д. с. синусои­дально изменяется со временем, C:\1\pic\gray.jpgто и ток делает то же самое. Возникает переменный ток

Схема такой цепи приведена на фиг. 17.7.

Мы можем также заметить, что э. д. с. определяет коли­чество энергии, поставляемое генератором. Каждый заряд в проводе получает в единицу времени энергию, равную F•v, где F — сила, действующая на заряд, a v — его скорость. Пусть теперь количество движущихся зарядов на единице длины провода равно n*;* тогда мощность, выделяющаяся в эле­менте *ds* провода, равна

C:\1\pic\gray.jpg



*Фиг. 17.7. Цепь с генератором переменного тока и сопротивле­нием.*

В проводе скорость v всегда направлена вдоль *ds,* так что мощ­ность можно переписать в виде

C:\1\pic\gray.jpg

Полная мощность, выделяемая во всей цепи, есть интеграл от этого выражения по всей петле:

C:\1\pic\gray.jpg

(17.15)

Вспомним теперь, что *qnv —* это ток I и что э. д. с. определяется как интеграл от *F/q* по всей цепи. Мы получаем

C:\1\pic\gray.jpg

(17.16)

Когда в катушке генератора имеется ток, на нее непременно действуют механические силы. В самом деле, мы знаем, что вра­щающий момент, действующий на катушку, пропорционален ее магнитному моменту, напряженности магнитного поля *В* и синусу угла между ними. Магнитный момент есть ток катушки, умноженный на ее площадь. Поэтому вращающий момент равен

C:\1\pic\gray.jpg

(17.17)

Скорость, с которой должна совершаться механическая работа, чтобы поддерживать вращение катушки, есть угловая скорость ω, умноженная на вращающий момент силы:

C:\1\pic\gray.jpg

(17.18)

Сравнивая это выражение с (17.14), мы видим, что затраты механической работы в единицу времени, требуемые для вра­щения катушки против магнитных сил, в точности равны *εI* — электрической энергии, поставляемой

э. д. с. генератора в еди­ницу времени. Вся механическая энергия, расходуемая в гене­раторе, появляется в виде электрической энергии в цепи.

В качестве другого примера токов и сил, обусловленных индуцированной э. д. с., проанализируем, что же происходит в установке, показанной на фиг. 17.1. Имеются U-образная проволока и скользящая перемычка, расположенные в однородном магнитном поле, перпендикулярном плоскости парал­лельных проволок. Теперь предположим, что «дно» U (левая часть фиг. 17.1) сделано из проволоки с большим сопротивле­нием, тогда как две боковые проволоки сделаны из хорошего проводника вроде меди — в этом случае нам не надо беспо­коиться об изменении сопротивления цепи при движении пе­рекладины. Как и раньше,

э. д. с. цепи равна

C:\1\pic\gray.jpg

(17.19)

Ток в цепи пропорционален этой э. д. с. и обратно пропорционален сопротивлению цепи:

C:\1\pic\gray.jpg

(17.20)

Благодаря этому току на перемычку будет действовать маг­нитная сила, пропорциональная длине перемычки, току в ней и магнитному полю:

C:\1\pic\gray.jpg

(17.21)

C:\1\pic\gray.jpgПодставляя I из (17.20), получаем для силы

(17.22)

Мы видим, что сила пропорциональна скорости перемещения перемычки. Направление силы, как легко понять, противо­положно скорости. Такая «пропорциональная скорости» сила, похожая на силу вязкости, получается всякий раз, когда дви­жущиеся проводники создают индуцированные токи в магнит­ном поле. Вихревые токи, о которых мы говорили в предыду­щей главе, приводят также к силам, действующим на провод­ники и пропорциональным скорости проводника, хотя такие случаи в общем дают более сложные распределения токов, которые трудно анализировать.

При конструировании механических систем часто бывает удобно располагать тормозящими силами, пропорциональными скорости. Вихревые токи дают один из наиболее удобных способов получения таких зависящих от скорости сил.

Пример применения подобных сил можно найти в обычном домашнем счетчике — ваттметре. Там имеется тонкий алюми­ниевый диск, вращающийся между полюсами постоянного маг­нита. Этот диск приводится в движение маленьким электро­мотором, вращающий момент которого пропорционален мощ­ности, потребляемой в электросети квартиры. Вихревые токи в диске вызывают силу сопротивления, пропорциональную скорости. Следовательно, скорость диска устанавливается пропорциональной скорости потребления электроэнергии. С по­мощью счетчика, присоединенного к вращающемуся диску, подсчитывается число оборотов диска. Так определяется полная потребленная энергия, т. е. число использованных ватт-часов.

Согласно формуле (17.22), сила от индуцированных токов, т. е. всякая сила от вихревых токов, обратно пропорцио­нальна сопротивлению. Сила тем больше, чем лучше электро­проводность материала. Причина, разумеется, заключается в том, что при малом сопротивлении э. д. с. создает больший ток, а большие токи дают большие механические силы.

Из наших формул мы можем увидеть, как механическая энергия превращается в электрическую энергию. Как и раньше, электрическая энергия, выделяемая в сопротивлении цепи, есть произведение εI*,* Работа в единицу времени, совершаемая при движении перекладины, есть произведение силы, действующей на перекладину, на ее скорость. Используя для силы выраже­ние (17.21), получаем работу в единицу времени:

C:\1\pic\gray.jpg

Мы видим, что она действительно равна произведению *$I,* которое мы получаем из (17.19) и (17.20). Снова механическая работа появляется в виде электрической энергии.

**§ 6. Взаимная индукция**

Теперь нам нужно рассмотреть случай, когда проволочные катушки неподвижны, а меняются магнитные поля. Описывая образование магнитного поля токами, мы рассматривали только случай постоянных токов. Но если токи меняются медленно, магнитное поле в каждый момент будет примерно такое же, как магнитное поле постоянного тока. Мы будем считать в этом параграфе, что токи всегда меняются достаточно медленно, и можно сказать, что это утверждение справедливо.

На фиг. 17.8 показано устройство из двух катушек, с по­мощью которого можно продемонстрировать основные эффекты, ответственные за работу трансформатора. Катушка 1состоит из проводящей проволоки, свитой в виде длинного соленоида. Вокруг этой катушки и изолированно от нее навита катушка *2,* состоящая из нескольких витков проволоки. Если теперь по катушке *1* пропустить ток, то, как мы знаем, внутри нее по­явится магнитное поле. Это магнитное поле проходит также сквозь катушку *2.* Когда ток в катушке *1* меняется, магнитный поток тоже будет меняться, и в катушке *2* появится индуциро­ванная э.д.с. Эту индуцированную э.д.с. мы сейчас и вычислим.

C:\1\pic\gray.jpgВ гл. 13, § 5 (вып. 5) мы видели, что магнитное поле внутри длинного соленоида однородно и равно

(17.23)

где N1 — число витков в катушке 1, I1 — ток в ней, а l — её длина. Пусть поперечное сечение катушки 1 равно S, тогда поток поля В равен его величине, умноженной на S. Если в ка­тушке 2 имеется N2 витков, то поток проходит по катушке N2 раз. Поэтому э. д. с. в катушке 2 дается выражением

C:\1\pic\gray.jpg

.(17.24)

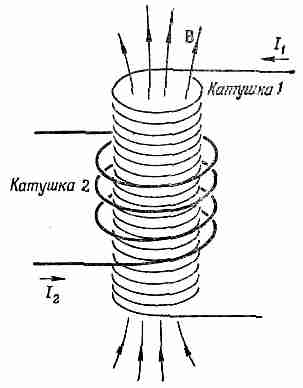
Единственная меняющаяся со временем величина в (17.23) есть I1. Поэтому э. д. с. дается выражением

C:\1\pic\gray.jpg

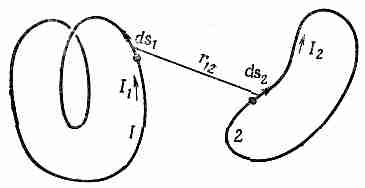
(17.25)

C:\1\pic\gray.jpgМы видим, что э. д. с. в катушке *2* пропорциональна скорости изменения тока в катушке *1.* Константа пропорциональности — по существу геометрический фактор двух катушек, называется коэффициентом *взаимной индукции* и обозначается обычно m21. Тогда (17.25) записывается уже в виде

(17.26)

Предположим теперь, что нам нужно было бы пропустить ток через катушку *2* и нас интересует, чему равна э. д. с. в ка­тушке *1.* Мы вычислили бы магнитное поле, которое повсюду пропорционально току I2. Поток сквозь катушку Iзависел бы от геометрии, но был бы пропорционален току I2. Поэтому

*Фиг. 17.8. Ток в катушке 1 соз­дает магнитное поле, проходящее через катушку 2.*



*Фиг. 17.9. Любые две катушки обладают взаимной индукцией m, пропорциональной инте­гралу от ds1•ds2• (1/r12).*

C:\1\pic\gray.jpgэ. д. с. в катушке *1* снова была бы пропорциональна *dI2/dt.* Мы можем записать

(17.27)

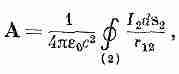
Вычисление m 12 было бы труднее, чем те вычисления, кото­рые мы проделали для m 21. Мы не будем сейчас им заниматься, потому что дальше в этой главе мы покажем, что m 12 обя­зательно равно m *21.*

Поскольку поле *любой* катушки пропорционально текущему в ней току, такой же результат получился бы и для любых двух катушек из проволоки. Выражения (17.26) и (17.27) при­обрели бы одинаковую форму, и только постоянные m 12 и m 21 были бы другие. Их значения будут зависеть от формы кату­шек и их относительного положения.

Предположим, нам нужно найти коэффициент взаимной ин­дукции между двумя произвольными катушками, например показанными на фиг. 17.9. Мы знаем, что общее выражение для э. д. с. в катушке *1* можно записать так:

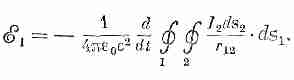
C:\1\pic\gray.jpg

C:\1\pic\gray.jpgгде В — магнитное поле, а интеграл берется по поверхности, ограниченной контуром 1*.* В гл. 14, § 1 (вып. 5) мы видели, что поверхностный интеграл от В можно свести к контурному ин­тегралу от векторного потенциала. В нашем случае

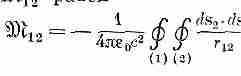
как контурный интеграл по контуру цепи *2:*

(17.29)

где I2 — ток в цепи *2,* а r12 — расстояние от элемента цепи *ds2 к* точке на контуре 1*,* в которой мы вычисляем векторный потенциал (см. фиг. 17.9). Комбинируя (17.28) и (17.29), можно выразить э. д. с. в цепи *1* как двойной контурный интеграл:



C:\1\pic\gray.jpgВ этом выражении все интегралы берутся по неподвижным кон­турам. Единственной переменной величиной является ток I2, который не зависит от переменных интегрирования. Поэтому его можно вынести за знак интеграла. Тогда э. д. с. можно записать как

где коэффициент m 12 равен

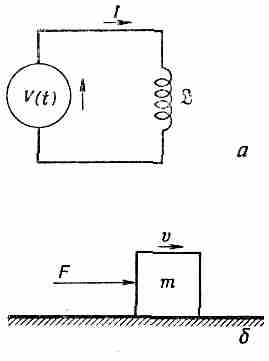
(17.30)

Из этого интеграла очевидно, что m 12 зависит только от гео­метрии цепей; он зависит от некоторого среднего расстояния между двумя цепями, причем в среднее с наибольшим весом входят параллельные отрезки проводников двух катушек. Нашу формулу можно использовать для вычисления коэффи­циента взаимной индукции любых двух цепей произвольной формы. Кроме того, она показывает, что интеграл для m 12 тождествен с интегралом для m 21. Таким образом, мы показали, что оба коэффициента одинаковы. Для системы только с двумя катушками коэффициенты m 12 и m 21 часто обозначают символом mбез значков и называют просто *коэффициентом взаимной индукции:*

m 12= m 21 = m.

**§ 7. Самоиндукция**

При обсуждении индуцированных э. д. с. в двух катушках на фиг. 17.8 и 17.9 мы рассмотрели лишь случай, когда ток проходит либо в одной катушке, либо в другой. Если токи име­ются одновременно в обеих катушках, то магнитный поток, пронизывающий каждую катушку, будет представлять сумму двух потоков, существующих и по отдельности, поскольку к магнитным полям применим принцип суперпозиции. Поэтому э. д. с. в каждой катушке будет пропорциональна не только изменению тока в другой катушке, но и изменению тока в ней самой.



*Фиг. 17.10. Цепь с источником напряжения и индуктивностью (а) и аналогичная ей механиче­ская система (б).*

C:\1\pic\gray.jpgТаким образом, полную э. д. с. в катушке *2* следует [за­писать в виде](#п3)

(17.31)

C:\1\pic\gray.jpg""Аналогично, э. д. с. в катушке *1* будет зависеть не только от изменяющегося тока в катушке *2,* но и от изменяющегося тока в ней самой:

(17.32)

C:\1\pic\gray.jpgКоэффициенты m 22 и m 11 всегда отрицательны. Обычно пишут

(17.33)

где ζ1 и ζ 2называют коэффициентами *самоиндукции* двух катушек (или индуктивностями).

Конечно, э. д. с. самоиндукции будет существовать даже для одной катушки. Любая катушка сама по себе обладает коэффициентом самоиндукции ζ и ее

э. д. с. будет пропорцио­нальна скорости изменения тока в катушке. Обычно считают, Что э. д. с. и ток одной катушки положительны, если они на­правлены одинаково. При этом условии для отдельной катушки

можно написать

C:\1\pic\gray.jpg

(17.34)

Знак минус указывает на то, что э. д. с. противодействует изменению тока, ее часто называют «обратной э. д. с.».

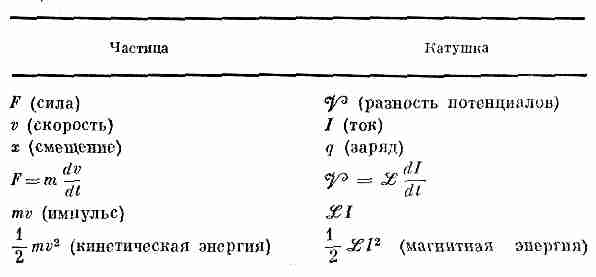
Поскольку любая катушка обладает самоиндукцией, проти­водействующей изменению тока, ток в катушке обладает своего рода инерцией. Действительно, если мы хотим изменить ток в катушке, мы должны преодолеть эту инерцию, присоединяя катушку к какому-то внешнему источнику, например батарее или генератору (фиг. 17.10, *а).* В такой цепи ток / связан с на­пряжением Vсоотношением

C:\1\pic\gray.jpg

(17.35)

Это соотношение имеет форму уравнения движения Ньютона для частицы в одном измерении. Поэтому мы можем исследо­вать его по принципу «одинаковые уравнения имеют одинако­вые решения». Таким образом, если поставить в соответствие напряжение Vот внешнего источника приложенной внешней силе *F,* а ток I в катушке скорости *v* частицы, то коэффициент индукции катушки ζбудет соответствовать массе *т* [частицы](#прим1) (фиг. 17,10, *б).*

*Таблица 17.1* • СОПОСТАВЛЕННЫЕ ВЕЛИЧИНЫ



**§ 8. Индуктивность и магнитная энергия**

Продолжая аналогию предыдущего параграфа, мы отметили в таблице, что в соответствии с механическим импульсом *p=mv* (скорость изменения которого равна приложенной силе) должна существовать аналогичная величина, равная

ζ I, ско­рость изменения которой V. Разумеется, мы не имеем права говорить, что ζ I — это настоящий импульс цепи; на самом деле это вовсе не так. Вся цепь может быть неподвижна и вооб­ще не иметь импульса. Просто ζ Iаналогично импульсу *mv* в смысле удовлетворения аналогичным уравнениям.

Точно так же кинетической энергии 1/2mv2 здесь соответствует анало­гичная величина 1/2ζ 2. Но здесь нас ждет сюрприз. Величина 1/2aζ I2 — действительно есть энергия и в электрическом случае. Так получается потому, что работа, совершаемая в единицу времени над индуктивностью, равна VI*,* а в механической систе­ме она равна *Fv —* соответствующей величине. Поэтому в слу­чае энергии величины не только соответствуют друг другу в математическом смысле, но имеют еще и одинаковое физиче­ское значение.

C:\1\pic\gray.jpgМы можем проследить это более подробно. В (17.16) мы наш­ли, что электрическая работа в единицу времени за счет сил индукции есть произведение э. д. с. и тока:

C:\1\pic\gray.jpgПодставляя вместо *ε* ее выражение через токи из (17.34), имеем

(17.38)

C:\1\pic\gray.jpgИнтегрируя это уравнение, находим, что энергия, которая требуется от внешнего источника, чтобы преодолеть э. д. с. самоиндукции и создать [ток](#прим2) (что должно равняться накоп­ленной энергии U), равна

(17.37)

Поэтому энергия, накопленная в индуктивности, равна 1/2ζ I2.Применяя те же рассуждения к паре катушек, изображен­ных на фиг. 17.8 или 17.9, мы можем показать, что полная электрическая энергия системы дается выражением

C:\1\pic\gray.jpg

(17.38)

В самом деле, начиная с тока I=0 в обеих катушках, можно вна­чале включить ток I1 в катушке *1,* оставляя I2=0. Совершен­ная работа как раз равна *l/2*ζ *1l12.* Но теперь, включая I2, мы совершаем не только работу 1/2ζ 2I22 против э. д. с. в цепи *2,* но еще и добавочное количество работы —mI1I2, которая есть интеграл

от э. д. с. m*(dIz/dt)* в цепи *1,* умноженный на теперь уже *постоянный* ток I1 в этой цепи.

C:\1\pic\gray.jpgПусть теперь нам нужно найти силу между любыми двумя катушками, по которым идут токи I1 и I2. Прежде всего мы мог­ли бы использовать принцип виртуальной работы, взяв вари­ацию от энергии (17.38). Мы должны помнить, конечно, что при изменении относительного положения катушек единственной меняющейся величиной является коэффициент взаимной индук­ции m. Тогда мы могли бы записать уравнение виртуальной работы в виде

C:\1\pic\gray.jpgЭто уравнение ошибочно, потому что, как мы видели раньше, в него включено только изменение энергии двух катушек и не включена энергия источников, которые поддерживают постоян­ными значения токов I*1* и I2. Мы понимаем теперь, что эти источники должны поставлять энергию для компенсации инду­цированных э. д. с. в катушках во время их движения. Если мы хотим правильно применить принцип виртуальной работы, то должны включить и эти энергии. Но мы видели, что можно сделать и короче — использовать принцип виртуальной рабо­ты, помня, что полная энергия — это взятая с обратным знаком энергия Uмех (то что мы называем «механической энергией»). Поэтому силу можно записать в виде

(17.39)

C:\1\pic\gray.jpgТогда сила между катушками дается выражением

Воспользуемся выражением (17.38) для энергии системы из двух катушек, чтобы показать, какое интересное неравенство существует между взаимной индукцией m и коэффициен­тами самоиндукции ζ 1 и ζ 2двух катушек. Ясно, что энергия двух катушек должна быть положительной. Если мы начинаем с нулевых токов в обеих катушках и увеличиваем эти токи до некоторых значений, то тем самым мы увеличиваем энергию всей системы. В противном случае токи самопроизвольно воз­растут и будут отдавать энергию остальному миру — вещь невероятная! Далее, наше выражение для энергии (17.38) можно с C:\1\pic\gray.jpgтаким же успехом записать в следующей форме:

(17.40)

Это просто алгебраическое преобразование. Эта величина долж­на быть всегда положительна при любых значениях I1 и I2. В частности, она должна быть положительна, когда I2 вдруг примет особое значение:

C:\1\pic\gray.jpg

(17.41)

C:\1\pic\gray.jpgНо при таком значении I2 первое слагаемое в (17.40) равно ну­лю. Если энергия положительна, то последнее слагаемое в (17.40) должно быть больше нуля. Мы получаем требование, что

C:\1\pic\gray.jpgТаким образом, мы доказали общее соотношение, что величина взаимной индукции m любых двух катушек обязательно меньше или равна геометрическому среднему двух коэффициен­тов самоиндукции (сам m может быть положителен или отри­цателен в зависимости от выбора знаков для токов It и I2):

(17.42)

C:\1\pic\gray.jpgСоотношение между mи коэффициентами самоиндукции обычно записывают в виде

(17.43)

Постоянную *k* называют *коэффициентом связи.* Если большая часть потока от одной катушки проходит через другую ка­тушку, то коэффициент связи близок к единице; мы говорим, что катушки «сильно связаны». Если катушки значительно удалены друг от друга или же все устроено так, что взаимное проникновение их потоков очень мало, коэффициент связи становится близок к нулю, а коэффициент взаимной индукции очень мал.

Для вычисления взаимной индукции двух катушек мы дали формулу (17.30), которая представляет собой двойной кон­турный интеграл по обеим цепям. Мы могли бы подумать, что та же формула применима и для вывода коэффициента самоин­дукции одной катушки, если оба контурных интегрирования проводить по одной и той же катушке. Однако это не так, пото­му что при интегрировании по двум катушкам знаменатель r12 под знаком интеграла стремится к нулю, когда два элемента длины находятся в одной точке. Коэффициент самоиндукции, получаемый из этой формулы, оказывается бесконечным. Про­исходит это потому, что формула наша — приближенная, и справедлива она только для поперечных сечений проводов в обеих цепях, малых по сравнению с расстоянием от одной цепи до другой. Ясно, что это приближение для отдельной катушки не годится. На самом деле оказывается, что индуктивность от­дельной катушки стремится логарифмически к бесконечности, когда диаметр ее проволоки становится все меньше и меньше.

C:\1\pic\gray.jpgЗначит, мы должны поискать другой способ вычисления коэффициента самоиндукции одной катушки. При этом надо учесть распределение токов внутри проводника, потому что его размеры — важный параметр. Но мы не будем считать полную индуктивность, а сосчитаем лишь ту ее часть, которая связана с *расположением* проводников, и не будем учитывать часть, связанную с распределением токов. Пожалуй, самый простой способ найти такую индуктивность — это использовать магнит­ную энергию. Ранее, в гл. 15, § 3, мы нашли выражение для магнитной энергии распределения стационарных токов:

(17.44)

C:\1\pic\gray.jpgЕсли известно распределение плотности тока j, то можно вы­числить векторный потенциал А, а затем, оценив интеграл (17.44), получить энергию. Эта энергия равна магнитной энер­гии самоиндукции, *l/2*ζ*I2.* Приравнивая их, получаем формулу для индуктивности:

(17.45)

Мы, конечно, ожидаем, что индуктивность есть число, зависящее только от геометрии цепи, а не от тока / в цепи. Формула (17.45) действительно приводит к такому результату, потому что ин­теграл в ней пропорционален квадрату тока — ток входит один раз от j и еще раз от векторного потенциала А. Интеграл, деленный на I2, зависит от геометрии цепи, но не от тока I.

Выражению (17.44) для энергии распределения токов можно придать совсем другую форму, иногда более удобную для вы­числений. Кроме того, как мы увидим позже, именно эта форма важна, потому что она справедлива в более общем случае. В формуле (17.44) и А и j можно связать с В, поэтому можно надеяться, что энергия выразится через магнитное поле — точно так же, как нам удалось связать электростатическую энергию с электрическим полем. Начнем с подстановки ε0c2∇XВ вместо j. Заменить А мы не можем с той же легкостью, потому что нельзя обратить B=∇XA, чтобы выразить А через В. Можно только C:\1\pic\gray.jpgзаписать

(17.46)

Любопытно, что при некоторых ограничениях этот интеграл можно превратить в

C:\1\pic\gray.jpg

(17.47)

C:\1\pic\gray.jpgЧтобы увидеть это, выпишем подробно типичный множитель. Предположим, что мы взяли множитель (∇XB)zAz, входящий в интеграл (17.46). Выписывая полностью компоненты, полу­чаем

(имеются, конечно, еще два интеграла того же сорта). Проинте­грируем теперь первый множитель по *х,* интегрируя по частям,

C:\1\pic\gray.jpg

Теперь предположим, что наша система (имея в виду источники и поля) — конечная, так что, когда мы уходим на большие рас­стояния, все поля стремятся к нулю. Тогда при интегрировании по всему пространству подстановка *ByAz* на пределах интеграла дает нуль. У нас остается только *В (дАг/дх);* это, очевидно, есть часть от *By(*∇X*A)y* и, значит, от В•(∇XA). Если вы вы­пишите остальные пять множителей, то увидите, что (17.47) на самом деле эквивалентно (17.46).

А теперь мы можем заменить (∇XA) на В и получить

C:\1\pic\gray.jpg

(17.48)

C:\1\pic\gray.jpgМы выразили энергию в магнитостатическом случае только через магнитное поле. Выражение тесно связано с формулой, которую мы нашли для электростатической энергии:

(17.49)

Эти две энергетические формулы выделены потому, что иногда ими удобнее пользоваться. Обычно есть и более важная причина: оказывается, что для динамических полей (когда Е и В меняются со временем) оба выражения (17.48) и (17.49) остаются справедливыми, тогда как другие данные нами фор­мулы для электрической и магнитной энергий перестают быть верными — они годятся лишь для статических полей.

C:\1\pic\gray.jpgЕсли нам известно магнитное поле В одной катушки, мы можем найти коэффициент самоиндукции, приравнивая выра­жение для энергии (17.48) и 1/2ζI2. Посмотрим, что получится в результате для индуктивности длинного соленоида. Раньше мы видели, что магнитное поле в соленоиде однородно и В снаружи равно нулю. Величина поля внутри равна В=nI/ε0с2*,* где n — число витков на единицу длины намотки, а I — ток. Если радиус катушки r*,* а длина ее *L* (мы считаем, что *L* очень велика, чтобы можно было пренебречь краевыми эффектами, т. е. *L >*>r), то внутренний объем равен πr2L. Следовательно, магнитная энергия равна

что равно 1/*2^I2.* Или

C:\1\pic\gray.jpg

(17.50)

***\* Кстати, это не единственный способ установления соответствия между механическими и электрическими величинами.***

***\* Мы пренебрегаем всеми тепловыми потерями энергии в сопротив­лении катушки. Эти потери требуют дополнительных затрат энергии источника, но не меняют энергии, которая тратится на индуктивность.***

***Глава* 18**

# УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

[**§ 1. Уравнения Макс****велла**](#a1)

[**§ 2. Что дает д****обавка**](#a2)

[**§ 3. Все о класси­****ческой физике**](#a3)

[**§ 4. Передвигаю­щ****ееся поле**](#a4)

[**§ 5. Скорость** **света**](#a5)

[**§ 6. Решение ура****внений Максвелла; потенциалы и волновое уравнение**](#a6)

**§ 1. Уравнения Максвелла**

В этой главе мы вернемся к полной системе из четырех уравнений Максвелла, которые мы приняли как отправной пункт в гл. 1 (вып. 5). , До сих пор мы изучали уравнения Максвелла не­большими частями, кусочками; теперь пора уже прибавить последнюю часть и соединить их все воедино. Тогда мы будем иметь полное и точное описание электромагнитных полей, которые могут изменяться со временем произвольным образом. Все сказанное в этой главе, если даже оно и будет противоречить чему-то сказанному ранее, правильно, а то, что говорилось ранее в этих случаях, неверно, потому что все высказанное ранее применялось к таким част­ным случаям, как, скажем, случаи постоянного тока или фиксированных зарядов. Хотя всякий раз, когда мы записывали уравнение, мы весьма старательно указывали ограничения, легко по­забыть все эти оговорки и слишком хорошо заучить ошибочные уравнения. Теперь мы можем изложить всю истину, без всяких ограни­чений (или почти без них).

Все уравнения Максвелла записаны в табл. 18.1 как словесно, так и в математических символах. Тот факт, что слова эквивалентны уравнениям, должен быть сейчас вам уже зна­ком — вы должны уметь переводить одну форму в другую и обратно.

Первое уравнение — дивергенция Е равна плотности заряда, деленной на εо,— правильно всегда. Закон Гаусса справедлив всегда как в динамических, так и в статических полях. Поток Е через любую замкнутую поверхность пропорционален заключенному внутри заряду. Третье уравнение — соответствующий общий закон для магнитных полей.

## Уравнения Максвелла

C:\1\pic\gray.jpg

(Поток Е через замкнутую поверх­ность) = (Заряд внутри нее)/ε0

C:\1\pic\gray.jpg

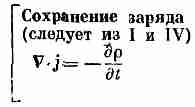
(Интеграл от Е по замкнутому кон­туру) = -d/dt(Поток В сквозь контур)

C:\1\pic\gray.jpg

(Поток В через замкнутую поверх­ность) = 0

C:\1\pic\gray.jpg

с2 (Интеграл от В по контуру)=(Ток в контуре) /ε0 + d/dt(Поток Е сквозь контур)



(Поток заряда через замкнутую по­верхность) =-d/dt(Заряд внутри нее)

### Закон силы

F = q(E+vXB)

**Закон движения**



(Закон Ньютона, исправлен­ный Эйнштейном}

#### C:\1\pic\gray.jpgГравитация

Поскольку магнитных зарядов нет, поток В через любую замкнутую поверхность всегда равен нулю. Второе уравнение ∇XE=-*dB/dt —* это закон Фарадея, и обсуждался он в последних двух главах. Он тоже верен в общем случае. Но последнее уравнение содержит нечто новое. Раньше мы встречались только с частью его, которая годится для постоянных токов. В этом случае мы говорили, что ротор В равен j/ε0c2, но правильное общее уравнение имеет новый член, который был открыт Максвеллом.

До появления работы Максвелла известные законы элек­тричества и магнетизма были такими же, как те, что мы изучали в гл. 3—14 (вып. 5) и гл. 15—17. В частности, урав­нение для магнитного поля постоянных токов было известно только в виде

C:\1\pic\gray.jpg

(18.1)

Максвелл начал с рассмотрения этих известных законов и вы­разил их в виде дифференциальных уравнений, так же как мы поступили здесь. (Хотя символ ∇ еще не был придуман, впер­вые, в основном благодаря Максвеллу, стала очевидной важ­ность таких комбинаций производных, которые мы сегодня называем ротором и дивергенцией.) Максвелл тогда заметил, что в уравнении (18.1) есть нечто странное. Если взять дивер­генцию от этого уравнения, то левая сторона обратится в нуль, потому что дивергенция ротора всегда равна нулю. Таким об­разом, это уравнение требует, чтобы дивергенция j также была равна нулю. Но если дивергенция j равна нулю, то полный ток через любую замкнутую поверхность тоже равен нулю.

C:\1\pic\gray.jpgПолный ток через замкнутую поверхность равен уменьше­нию заряда внутри этой поверхности. Он наверняка не может быть всегда равен нулю, так как мы знаем, что заряды могут перемещаться из одного места в другое. Уравнение

(18.2)

C:\1\pic\gray.jpgфактически есть наше определение j. Это уравнение выражает самый фундаментальный закон — сохранение электрического заряда: любой поток заряда должен поступать из какого-то запаса. Максвелл заметил эту трудность и, чтобы избежать ее, предложил добавить *dE/dt* в правую часть уравнения (18.1); тогда он и получил уравнение IV в табл. 18.1:

Во времена Максвелла еще не привыкли мыслить в терми­нах абстрактных полей. Максвелл обсуждал свои идеи с по­мощью модели, в которой вакуум был подобен упругому телу. Он пытался также объяснить смысл своего нового уравнения с помощью механической модели. Теория Максвелла принималась очень неохотно, во-первых, из-за модели, а, во-вторых, потому, что вначале не было экспериментального подтверждения. Сей­час мы лучше понимаем, что дело в самих уравнениях, а не в модели, с помощью которой они были получены. Мы можем только задать вопрос, правильны ли эти уравнения или они ошибочны. Ответ дает эксперимент. И уравнения Максвелла были подтверждены в бессчетных экспериментах. Если мы отбросим все строительные леса, которыми пользовался Мак­свелл, чтобы построить уравнения, мы придем к заключению, что прекрасное здание, созданное Максвеллом, держится само по себе. Он свел воедино все законы электричества и магне­тизма и создал законченную и прекрасную теорию.

Давайте покажем, что добавочный член имеет тот самый вид, который требуется, чтобы преодолеть обнаруженную Мак­свеллом трудность. Взяв дивергенцию его уравнения (IV в табл. 18.1), мы должны получить, что дивергенция правой части равна нулю:

C:\1\pic\gray.jpg

(18.3)

C:\1\pic\gray.jpgВо втором слагаемом можно переставить порядок дифферен­цирования по координатам и времени, так что уравнение может быть переписано в виде

(18.4)

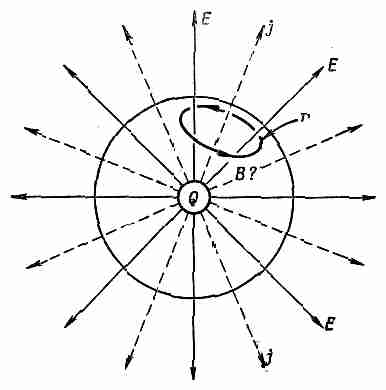
Но, согласно первому из уравнений Максвелла, дивергенция Е равна ρ/ε0. Подставляя это равенство в (18.4), мы придем к уравнению (18.2), которое, как мы знаем, правильно. И на­оборот, если мы принимаем уравнения Максвелла (а мы при­нимаем их потому, что никто никогда не обнаружил экспери­мента, который опроверг бы их), мы должны прийти к выводу, что заряд всегда сохраняется.

Законы физики не дают ответа на вопрос: «Что случится, если заряд внезапно возникнет в этой точке, какие будут при этом электромагнитные эффекты?». Ответ дать нельзя, потому что наши уравнения утверждают, что такого не происходит. Если бы это *случилось,* нам понадобились бы новые законы, но мы не можем сказать, какими бы они были. Нам не прихо­дилось наблюдать, как ведет себя мир без сохранения заряда. Согласно нашим уравнениям, если вы внезапно поместите за­ряд в некоторой точке, вы должны принести его туда откуда-то еще. В таком случае мы можем говорить о том, что произошло.

Когда мы добавили новый член в уравнение для ротора Е, мы обнаружили, что им описывается целый новый класс явле­ний. Мы увидим также, что небольшая добавка Максвелла к уравнению для ∇XB имеет далеко идущие последствия. Мы затронем лишь некоторые из них в этой главе.

**§ 2. Что дает добавка**

В качестве нашего первого примера рассмотрим, что про­исходит со сферически симметричным радиальным распределе­нием тока. Представим себе маленькую сферу с нанесенным на ней радиоактивным веществом. Это радиоактивное вещество испускает наружу заряженные частицы. (Мы можем представить также большой кусок желе с маленьким отверстием в центре, в которое с помощью шприца впрыскиваются какие-то заряды и из которого заряды медленно просачиваются.)



*Фuг18.1.* *Каково магнит­ное поле сферически сим­метричного тока?*

В любом случае мы имели бы ток, который повсюду направлен по радиусу на­ружу. Будем считать, что величина его одинакова во всех на­правлениях.

C:\1\pic\gray.jpgПусть полный заряд внутри сферы произвольного радиуса r есть *Q(r).* Если плотность радиального тока при таком же радиусе равна j(r), то уравнение (18.2) требует, чтобы *Q* уменьшалось со скоростью

(18.5)

Спросим теперь о магнитном поле, создаваемом токами в этом случае. Предположим, мы начертили какую-то петлю Г на сфере радиуса r(фиг. 18.1). Сквозь петлю проходит какой-то ток, поэтому можно ожидать, что магнитное поле циркулирует в направлении, указанном на фигуре.

И сразу возникает затруднение. Как может поле В иметь какое-то особое направление на сфере? При другом выборе петли Г мы бы заключили, что ее направление прямо противо­положно указанному. Поэтому *возможна ли* какая-либо цир­куляция В вокруг токов?

Нас спасают уравнения Максвелла. Циркуляция В зависит не только от полного *тока,* проходящего сквозь петлю Г, но и от скорости изменения со временем *электрического потока* через нее. Должно быть так, чтобы эти две части как раз погашались. Посмотрим, получается ли это.

C:\1\pic\gray.jpgЭлектрическое поле на расстоянии r должно быть равно Q(г)/4πε0r2, пока, как мы предположили, заряд распределен симметрично. Поле радиально, и скорость его изменения тогда равна

(18.6)

Сравнивая это с (18.5), мы видим, что для любого расстояния

C:\1\pic\gray.jpg

(18.7)

В уравнении IV (табл. 18.1) оба члена от источника погашаются и ротор В равен всегда нулю. Магнитного поля в нашем при­мере нет.

В качестве второго нашего примера рассмотрим магнитное поле провода, используемого для зарядки плоского конденсато­ра (фиг. 18.2). Если заряд *Q* на пластинах со временем изме­няется (но не слишком быстро), ток в проводах равен *dQ/dt.* Мы ожидаем, что этот ток создаст магнитное поле, которое окружает провод. Конечно, ток вблизи провода должен созда­вать обычное магнитное поле, оно не может зависеть от того, где идет ток.

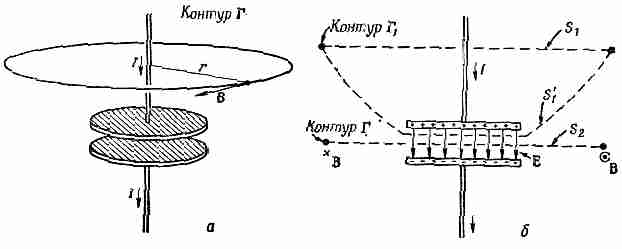
Предположим, мы выбрали петлю Г1 в виде окружности с радиусом r (фиг. 18.2, а). Контурный интеграл от магнитного поля будет равен току I, деленному на ε0с2. Мы имеем

C:\1\pic\gray.jpg

(18.8)

Все это мы получили бы для постоянного тока, но резуль­тат не изменится, если учесть добавку Максвелла, потому что для плоской поверхности *S* внутри окружности электрического поля нет (считая, что провод очень хороший проводник). Поверхностный интеграл от *dE/dt* равен нулю.

Предположим, однако, что теперь мы медленно продвигаем кривую Г1 вниз. Мы будем получать всегда тот же самый резуль­тат до тех пор, пока не нарисуем кривую вровень с пластинами конденсатора



*Фиг. 18.2. Магнитное поле вблизи заряжаемого конденсатора.*

Тогда ток I будет стремиться к нулю. Исчезнет ли при этом магнитное поле? Это было бы очень странно. Давайте поглядим, что говорит уравнение Максвелла для кривой Г, которая представляет собой окружность радиуса r, плоскость которой проходит между пластинами конденсатора (фиг. 18.2, *б).* Контурный интеграл от В вокруг Г есть *2πrB.* Он должен быть равен производной по времени потока Е, проходящего сквозь плоскую поверхность круга *S2.* Этот поток Е, как мы знаем из закона Гаусса, должен быть равен C:\1\pic\gray.jpgпроизведению 1/ε0 на заряд *Q* на одной из пластин конденсатора. Мы имеем

(18.9)

Это очень хорошо. Результат тот же, что мы нашли в (18.8). Интегрирование по меняющемуся электрическому полю 'дает то же магнитное поле, что и интегрирование по току в проводе. Конечно, как раз об этом и говорит уравнение Максвелла. Легко видеть, что так должно быть всегда, если применить наши рас­суждения к двум поверхностям *81* и *S'1,* ограниченным одной и той же окружностью Г1 на фиг. 18.2, *б.* Сквозь *S1* проходит ток /, но нет электрического потока. Сквозь *S1* нет тока, но есть электрический поток, меняющийся со скоростью I/ε0. То же поле В получится, если мы применим уравнение IV (табл. 18.1) к каждой поверхности.

Из нашего обсуждения добавки, введенной Максвеллом, у вас могло сложиться впечатление, что она добавляет немного — просто подправляет уравнения в согласии с тем, что мы уже ожидали. Это верно, пока мы рассматриваем уравнение IV *само по себе,* ничего особенно нового не появляется. Слова *само по себе,* однако, весьма важны. Небольшое изменение, введенное Максвеллом в уравнение IV *в сочетании с другими* уравнениями, на самом деле дает много нового и важного. Но прежде чем заняться этим вопросом, поговорим подробнее в табл. 18.1.

**§ 3. Все о классической физике**

В табл. 18.1 сведено все, что знала фундаментальная *клас­сическая,* физика, т. е. та физика, которая была известна до 1905 г. В одной этой таблице есть все. С помощью этих уравне­ний можно понять все достижения классической физики.

Прежде всего, мы имеем уравнения Максвелла, записанные как в расширенном виде, так и в короткой математической фор­ме. Затем есть сохранение заряда, которое даже записано в скобках, потому что сохранение заряда можно вывести из имеющихся полных уравнений Максвелла. Так что в таблице имеются даже небольшие излишки. Дальше мы записали закон для силы, поскольку все имеющиеся электрические и магнитные поля ничего не говорят нам до тех пор, пока мы не знаем, как они действуют на заряды. Однако, зная Е и В, мы можем найти силу, действующую на объект с зарядом q*,* который дви­жется со скоростью v. Наконец, имеющаяся сила ничего не говорит нам, пока мы не знаем, что происходит, когда сила ускоряет что-то; нам необходимо знать закон движения, кото­рый говорит, что сила равна скорости изменения импульса. {Помните? Об этом говорилось в начале курса.) Мы даже вклю­чили эффекты теории относительности, записав импульс в виде р=m0v√(1-v2/c2).

Но если мы действительно хотим законченности, нам сле­дует добавить еще один закон — закон тяготения Ньютона? и мы поставили его в конце.

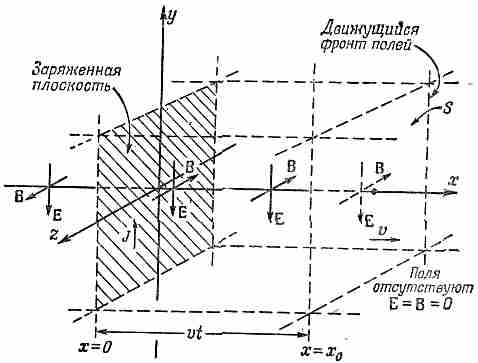
Итак, в одной небольшой таблице мы собрали все фундамен­тальные законы классической физики, даже хватило места выписать их словами и еще с некоторым излишком. Это вели­кий момент. Мы покорили большую высоту. Мы на вершине [К](#прим1)[-](#прим1)[2](#прим1), мы почти подготовлены покорить теперь Эверест, т. е. квантовую механику.

В основном мы пытались научиться понимать эти уравнения. А теперь, когда мы собрали их воедино, мы собираемся разо­браться, что означают эти уравнения, что нового скажут они о том, чего мы еще не поняли. Мы много потрудились, чтобы вскарабкаться к этой точке. Это потребовало больших усилий, а теперь мы собираемся начать приятное путешествие — спуск с горы в долину, там мы увидим все, чего мы достигли.

**§ 4. Передвигающееся поле**

А теперь о новых следствиях. Они возникают из сопоставле­ния всех уравнений Максвелла. Сначала давайте посмотрим, что произошло бы в особенно простом случае. Предположим, что изменяется только одна координата у всех величин, т. е. рассмотрим задачу одного измерения.

Случай этот показан на фиг. 18.3. Перед нами заряженный лист, помещенный на плоскости *yz.* Сначала он неподвижен, а затем мгновенно приобретает скорость *и* в направлении *у* и движется с этой постоянной скоростью. Вас может беспокоить присутствие такого «бесконечного» ускорения, но фактически это не имеет значения; просто представьте себе, что скорость достигает значения *и* очень быстро. Итак, мы внезапно полу­чаем поверхностный ток *J (J —* ток на единицу ширины в z-направлении). Чтобы упростить проблему, предположим, что имеется еще неподвижный лист, заряженный противоположно и наложенный на плоскость *yz,* так что электростатические эф­фекты отсутствуют.



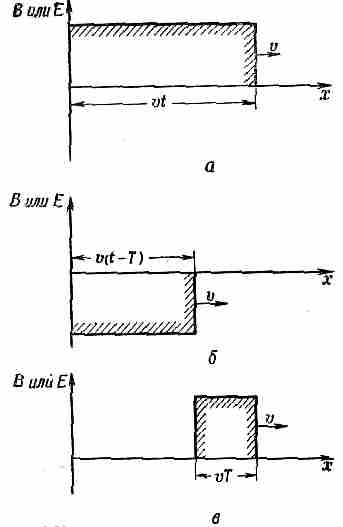
*Фиг. 18.3. Бесконечная заряженная плоскость неожи­данно приводится в поступательное движение.*

Возникают магнитное и электрическое поля, распространяю­щиеся от плоскости с постоянной скоростью.

Представим себе также (хотя на фигуре мы показали лишь то, что происходит в конечной области), что лист простирается до бесконечности в направлениях *±у* и *±z.* Другими словами, здесь мы имеем случай, когда тока нет, а затем внезапно появляется однородный лист с током. Что же произойдет?

Мы знаем, что, когда имеется лист с током в положительном y-направлении, возникнет магнитное поле, направленное в отрицательном z-направлении при *х*>0 и в положительном z-направлении при *х*<0. Мы могли бы найти величину В, используя тот факт, что контурный интеграл от магнитного поля будет равен току на ε0с2. Мы получили бы, что *В*-J/2ε0с2 (поскольку ток I в полосе шириной *w* равен *Jw,* а контурный интеграл от В есть *2Вw).*

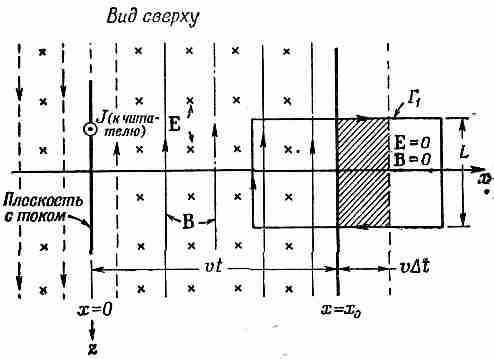
Так мы определяем поле вблизи листа для малых значений *х,* но, поскольку мы считаем лист бесконечным, хотелось бы получить с помощью тех же рассуждений магнитное поле подальше (для больших значений *х).* Однако это означало бы, что в момент, когда мы включаем ток, магнитное поле внезапно изменяется повсюду от нуля до конечной величины. Но погодите! При внезапном изменении магнитного поля возникают огром­ные электрические эффекты. *(Как бы оно ни менялось,* электри­ческие эффекты возникнут.) Так что в результате движения за­ряженного листа создается меняющееся магнитное поле и, следовательно, должны возникнуть электрические эффекты.



Ф*иг. 18.4. Зависимость вели­чины* В *(или E) от х. а — спустя время t после начала движения заряженной плоскости; б — поля от заряженной плоскости,* начавшей д*вигаться в момент t= Т в сторону отрицательных у; в* — *сумма* а и б.

Если электрические поля образовались, они должны начинаться с нуля и меняться к какому-то значению. Возникнет некая производная *dE/dt,* которая будет вносить вклад вместе с током J в создание магнитного поля. Так разные уравнения зацеп­ляются друг за друга, и мы должны попытаться найти решения для всех полей сразу.

Рассматривая уравнения Максвелла порознь, нелегко сразу получить решение. Поэтому сначала мы сообщим вам ответ, а затем уже проверим, действительно ли оно удовлетворяет уравнениям. *Ответ:* Поле В, которое мы вычислили, на самом деле создается прямо вблизи листа с током (для малых *х).* Так и должно быть, потому что если мы проведем крошечную петлю вокруг листа, то в ней не будет места для прохождения электрического потока. Но поле В подальше (для больших *х)* сначала равно нулю. Оно в течение некоторого времени остается нулевым, а затем внезапно включается. Короче говоря, мы включаем ток и не­медленно вблизи него включается магнитное поле с постоян­ным значением В; затем включенное поле В распространяется от области источника. Через некоторое время появляется одно­родное магнитное поле всюду, вплоть до некоторого значения *х,* а за ним оно равно нулю. Вследствие симметрии оно распространяется как в положительном, так и в отрицательном x-направлении.

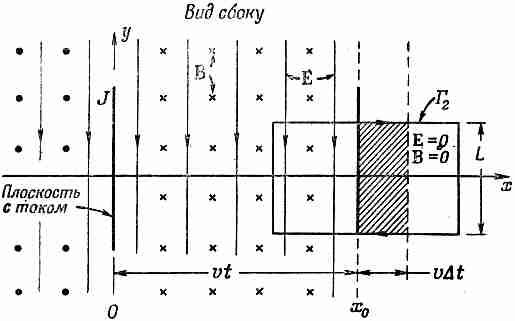


*Фиг.**18.5. То же, что на фиг. 18.3 (вид сверху).*

Поле Е делает то же самое. До момента t=0 (когда мы вклю­чаем ток) поле повсюду равно нулю. Затем, спустя время *t,* как Е, так и В постоянны вплоть до расстояния *х* = *vt, а* за ним равны нулю. Поля продвигаются вперед, подобно прилив­ной волне, причем фронт их движется с постоянной скоростью, которая оказывается равной *с,* но пока мы будем называть ее *v.* Изображение зависимости величины Е или В от *х* (как они ка­жутся в момент *t)* показано на фиг. 18.4, *а.* Если снова посмот­реть на фиг. 18.3 в момент *t,* то мы увидим, что область между *x*=±*vt* «занята» полями, но они еще не достигли области за ней. Мы снова подчеркиваем — мы предполагаем, что лист заряжен, а следовательно, поля Е и В простираются бесконечно далеко в *у-* и z-направлениях. (Мы не можем изобразить бес­конечный лист, поэтому мы показываем лишь то, что происхо­дит в конечной области.)

Теперь мы хотим проанализировать количественно то, что происходит. Чтобы сделать это, рассмотрим два поперечных разреза: вид сверху, если смотреть вниз вдоль оси *у* (фиг. 18.5), и вид сбоку, если смотреть назад вдоль оси *z* (фиг. 18.6). Начнем с вида сбоку. Мы видим заряженный лист, движущийся вверх; магнитное поле направлено внутрь страницы для +x и от стра­ницы для -*х,* а электрическое поле направлено вниз всюду, вплоть до *x=*± *vt.*

Посмотрим, согласуются ли такие поля с уравнениями Мак­свелла. Сначала нарисуем одну из тех петель, которыми мы пользовались для вычисления контурного интеграла, скажем прямоугольник Г2 на фиг. 18.6.



*Фиг. 18.6. То же, что на фиг. 18.3 (вид сбоку).*

Заметьте, что одна сторона прямоугольника проходит в области, где есть поля, а другая — в области, до которой поля еще не дошли. Через эту петлю проходит какой-то магнитный поток. Если он изменяется, должна появиться э. д. с. вдоль петли. Если волновой фронт движется, мы будем иметь меняющийся магнитный поток, поскольку поверхность, внутри которой существует поле В, непрерывно увеличивается со скоростью *v.* Поток внутри Г2 равен произведению В на ту часть поверхности внутри Г2) где есть магнитное поле. Скорость изменения потока (посколь­ку величина В постоянна) равна величине поля, умноженной на скорость изменения поверхности. Скорость изменения по­верхности найти легко. Если ширина прямоугольника Г2 равна *L,* то поверхность, в которой В существует, меняется как *Lv*Δ*t* за отрезок времени Δt (см. фиг. 18.6). Скорость изме­нения потока тогда равна *BLv.* По закону Фарадея она должна быть равна контурному интегралу от Е вокруг Г2, который есть просто *EL.* Мы получаем равенство

C:\1\pic\gray.jpg

(18.10)

C:\1\pic\gray.jpgТаким образом, если отношение *Е* к *В* равно *v,* то рассматри­ваемые нами поля будут удовлетворять уравнению Фарадея. Но это не единственное уравнение; у нас есть еще одно, связывающее Е и В:

(18.11)

Чтобы применить это уравнение, посмотрим на вид сверху, изображенный на фиг. 18.5. Мы уже видели, что это уравнение дает нам значение *В* вблизи заряженного листа. Кроме того, для любой петли, нарисованной вне листа, но позади волнового фронта, нет ни ротора В, ни j или меняющегося поля Е, так что уравнение там справедливо. А теперь посмотрим, что происходит в петле Г1, которая пересекает волновой фронт, как показано на фиг. 18.5. Здесь нет токов, поэтому уравнение (18.11) можно записать в интегральной форме так:

C:\1\pic\gray.jpg

(18.12)

Контурный интеграл от В есть просто произведение *В* на *L.* Скорость изменения потока Е возникает только благодаря продвигающемуся волновому фронту. Область внутри Г1, где Е не равно нулю, увеличивается со скоростью *vL.* Правая сто­рона (18.12) тогда равна *vLE.* Уравнение это приобретает вид

C:\1\pic\gray.jpg

(18.13)

C:\1\pic\gray.jpgМы имеем решение, когда поля В и Е постоянны за фрон­том, причем оба направлены под прямыми углами к направле­нию, в котором движется фронт, и под прямыми углами друг к другу. Уравнения Максвелла определяют отношение *Е* к *В.* Из (18.10) и (18.13) получаем

Но одну минутку! Мы нашли *два разных* выражения для отно­шения *Е/В.* Может ли такое поле, как мы описываем, дей­ствительно существовать? Имеется лишь одна скорость v*,* для которой оба уравнения могут быть справедливы, а именно *v* = *с.* Волновой фронт должен передвигаться со скоростью с. Вот пример, когда электрическое возмущение от тока распро­страняется с определенной конечной скоростью *с.*

А теперь спросим, что произойдет, если мы внезапно оста­новим заряженный лист, после того как он двигался в течение короткого времени Т? Увидеть, что случится, можно с помощью принципа суперпозиции. У нас был ток, равный нулю, а затем его внезапно включали. Мы знаем решение для этого случая. Теперь мы собираемся добавить другой ряд полей. Мы берем другой заряженный лист и внезапно начинаем его двигать в противоположном направлении с той же скоростью, только спустя время *Т* после начала движения первого листа. Полный ток от двух листов вместе сначала равен нулю, потом он вклю­чается в течение времени *Т,* затем выключается снова, потому что оба тока погашаются. Так мы получаем прямоугольный «импульс» тока.

Новый отрицательный ток создает такие же поля, как и по­ложительный, но с обратными знаками и, разумеется, с запаздыванием во времени *Т.* Волновой фронт по-прежнему движется со скоростью *с.* В момент времени *t* он достигает расстояния x=±c(t- *Т)* (см. фиг. 18.4, б). Итак, мы имеем два «куска» поля, перемещающихся со скоростью с (см. фиг. 18.4, а и б). Соединенные поля будут такими, как показано на фиг. 18.4, *в.* Для *х*>сt поля равны нулю, между *х=с(t-Т)* и *x=ct* они постоянны (со значениями, которые мы нашли выше), и для *x*<c*(t-Т)* они снова равны нулю.

Короче говоря, мы получаем маленький кусочек поля тол­щиной *сТ,* который покинул заряженный лист и передвигается через все пространство сам по себе. Поля «оторвались»; они распространяются свободно в пространстве и больше не связаны каким-то образом с источником. Куколка превратилась в бабочку!

Как же эти совокупности электрического и магнитного полей могут сохранять сами себя? *Ответ:* За счет сочетания эффектов из закона Фарадея ∇XE=-dВ/dt и нового члена, добавлен­ного Максвеллом c2∇X B=dE/dt. Они не могут не сохранять себя. Предположим, что магнитное поле исчезло бы. Тогда появилось бы меняющееся магнитное поле, которое создавало бы электрическое поле. Если бы это электрическое поле попы­талось исчезнуть, то изменяющееся электрическое поле создало бы магнитное поле снова. Следовательно, за счет непрерывного взаимодействия — перекачивания туда и обратно от одного поля к другому — они должны сохраняться вечно. Они не [могут исчезнуть.](#прим2) Они сохраняются, вовлеченные в общий танец — одно поле создает другое, а второе создает первое,— распространяясь все дальше и дальше в пространстве.

**§ 5. Скорость света**

У нас есть волна, которая уходит от материального источ­ника и движется со скоростью *с* (это скорость света). Вернемся немного назад. Исторически не было известно, что коэффициент *c* в уравнениях Максвелла тот же, что и скорость распростра­нения света. Это была просто константа в уравнениях. Мы на­звали ее с c самого начала, так как знали, что в конце концов должно получиться. Мы не думаем, что было бы разумнее сна­чала заставить вас выучить формулы с разными константами, а затем вернуться обратно и подставить *с* повсюду, где оно должно стоять. С точки зрения электричества и магнетизма, однако, мы прямо начинаем с двух констант ε0 и с2, которые появляются в уравнениях электростатики и магнитостатики:

C:\1\pic\gray.jpg

(18.14)

и

C:\1\pic\gray.jpg

(18.15)

Если взять любое *произвольное* определение единицы заряда, можно экспериментально определить постоянную ε0, входящую в уравнение (18.14), скажем, измеряя силу между двумя не­подвижными единичными зарядами по закону Кулона. Мы должны также определить экспериментально постоянную ε0с2, которая появляется в уравнении (18.15), что можно сделать, скажем, измерив силу между двумя единичными токами. (Еди­ничный ток означает единичный заряд в секунду.) Отношение этих двух экспериментальных постоянных есть с2 — как раз другая «электромагнитная постоянная».

Заметим теперь, что постоянная с2 получается одна и та же независимо от того, какова выбранная наша единица заряда. Если мы выберем «заряд» в два раза больше (скажем, удвоен­ный заряд протона), то в нашей «единице» заряда ε0 должна уменьшиться в четыре раза. Когда мы пропускаем два таких «единичных» тока по двум проводам, в каждом проводе будет в два раза больше «зарядов» в секунду, так что силы между двумя проводами будут в четыре раза больше. Постоянная ε0с2 должна уменьшиться в четыре раза. Но отношение ε0с2/ε0 не меняется.

Следовательно, непосредственно из экспериментов с заряда­ми и токами мы находим число с2, которое оказывается равным квадрату скорости распространения электромагнитных воз­буждений. Из статических измерений (измеряя силы между двумя единичными зарядами и между двумя единичными токами) мы находим, что с=3,00•108 *м/сек.* Когда Максвелл впервые проделал это вычисление со своими уравнениями, он сказал, что совокупность электрического и магнитного полей будет распространяться с этой скоростью. Он отметил также таин­ственное совпадение — эта скорость была равна скорости света. «Мы едва ли можем избежать заключения,— сказал Максвелл,— что свет — это поперечное волнообразное движение той же самой среды, которая вызывает электрические и магнит­ные явления».

Так Максвелл совершил одно из великих обобщений физики! До него был свет, было электричество и был магнетизм. Причем два последних явления были объединены экспериментальными работами Фарадея, Эрстеда и Ампера. Потом внезапно свет не стал уже больше «чем-то еще», а был электричеством и магнетизмом в новой форме, небольшими кусками электри­ческого и магнитного полей, которые распространяются в про­странстве самостоятельно.

Мы обращали ваше внимание на некоторые черты этого осо­бого решения, которые, однако, справедливы для *любой* элек­тромагнитной волны: магнитное поле перпендикулярно направ­лению движения фронта волны; электрическое поле также перпендикулярно направлению движения фронта волны; и два вектора Е и В перпендикулярны друг другу. Далее, величина электрического поля *Е* равна произведению *с* на величину маг­нитного поля *В.* Эти три факта — что оба поля поперечны на­правлению распространения, что В перпендикулярно Е и что *Е=сВ —* верны вообще для любой электромагнитной волны. Наш частный случай — хороший пример, он показывает все основные свойства электромагнитных волн.

**§ 6. Решение уравнений Максвелла; потенциалы и волновое уравнение**

Теперь стоило бы заняться немного математикой; мы запи­шем уравнения Максвелла в более простой форме. Вы, пожалуй, сочтете, что мы усложняем их, но если вы наберетесь терпения, то внезапно обнаружите их большую простоту. Хотя вы уже вполне привыкли к каждому из уравнений Максвелла, имеется все же много частей, которые стоит соединить воедино. Вот как раз этим мы и займемся.

Начнем с ∇•В=0 — простейшего из уравнений. Мы знаем, что оно подразумевает, что В — есть ротор чего-то. Поэтому, если вы записали

B = ∇XA, (18.16)

то считайте, что уже решили одно из уравнений Максвелла. (Между прочим, заметьте, что оно остается верно для другого вектора А', если A'=A+∇tψ, где ψ— любое скалярное поле, потому что ротор ∇ψ — нуль и В — по-прежнему то же самое. Мы говорили об этом раньше.)

Теперь разберем закон Фарадея ∇XE= -*dB/dt,* потому что он не содержит никаких токов или зарядов. Если мы за­пишем В как ∇XA и продифференцируем по *t,* то сможем пере­писать закон Фарадея в форме

∇XE = - d/dt∇XA.

Поскольку мы можем дифференцировать сначала либо по вре­мени, либо по координатам, то можно написать это уравнение также в виде

C:\1\pic\gray.jpg

(18.17)

Мы видим, что *Е+дА/дt —* это вектор, ротор которого равен нулю. Поэтому такой вектор есть градиент чего-то. Когда мы занимались электростатикой, у нас было ∇XE=0, и мы тогда решили, что Е — само градиент чего-то. Пусть это градиент от -ϕ (минус для технических удобств). То же самое сделаем и для E*+д*A/*дt*; мы полагаем

C:\1\pic\gray.jpg

(18.18)

C:\1\pic\gray.jpgМы используем то же обозначение ϕ, так что в электростатиче­ском случае, когда ничто не меняется со временем и *dA/dt* исчезает, Е будет нашим старым -∇ϕ. Итак, закон Фарадея можно представить в форме

(18.19)

Мы уже решили два из уравнений Максвелла и нашли, что для описания электромагнитных полей Е и В нужны четыре потенциальные функции: скалярный потенциал ϕ и векторный потенциал А, который, разумеется, представляет три функции.

C:\1\pic\gray.jpgИтак, А определяет часть Е, так же как и В. Что же про­изойдет, когда мы заменим А на A'=A+∇ψ? В общем, Е долж­но было бы измениться, если не принять особых мер. Мы можем, однако, допустить, что А изменяется так, чтобы не влиять на поля Е и В (т. е. не меняя физики), если будем всегда изменять А и ϕ *вместе* по правилам

(18.20)

Тогда ни В, ни Е, полученные из уравнения (18.19), не меня­ются.

Раньше мы выбирали ∇•А=0, чтобы как-то упростить уравнения статики. Теперь мы не собираемся так поступать; мы хотим сделать другой выбор. Но подождите немного, прежде чем мы скажем, какой это выбор, потому что позднее станет ясно, *почему* вообще делается выбор.

Сейчас мы вернемся к двум оставшимся уравнениям Максвел­ла, которые свяжут потенциалы и источники ρ и j. Раз мы можем определить А и ϕ из токов и зарядов, то можно всегда получить Е и В из уравнений (18.16) и (18.19) и мы будем иметь другую форму уравнений Максвелла.

Начнем с подстановки уравнения (18.19) в ∇•E=ρ/ε0; получаем

C:\1\pic\gray.jpg

это можно записать еще в виде

C:\1\pic\gray.jpg

(18.21)

C:\1\pic\gray.jpgТаково первое уравнение, связывающее ϕ и А с источниками, Наше последнее уравнение будет самым трудным. Мы начнем с того, что перепишем четвертое уравнение Максвелла:

а затем выразим В и Е через потенциалы, используя уравнения (18.16) и (18.19):

C:\1\pic\gray.jpg

C:\1\pic\gray.jpg**Первый** член можно переписать, используя алгебраическое тождество Vx (∇XA) = ∇ (∇•A)-∇2A; мы получаем

(18.22)

Не очень-то оно простое!

C:\1\pic\gray.jpgК счастью, теперь мы можем использовать нашу свободу в произвольном выборе дивергенции А. Сейчас мы собираемся сделать такой выбор, чтобы уравнения для А и для ϕ разделились, но имели одну и ту же форму. Мы можем сделать это, [выбирая](#прим3)

(18.23)

C:\1\pic\gray.jpgКогда мы поступаем так, то второе и третье слагаемые в уравнении (18.22) погашаются, и оно становится много проще:

(18.24)

C:\1\pic\gray.jpgИ. наше уравнение (18.21) для ϕ принимает такую же форму:

(18.25)

Какие красивые уравнения! Они великолепны прежде всего потому, что хорошо разделились — с плотностью заряда стоит ϕ, а с током стоит А. Далее, хотя левая сторона выглядит не­много нелепо — лапласиан вместе с *(d/dt)2,* когда мы раскроем ее, то обнаружим

C:\1\pic\gray.jpg

(18.26)

Это уравнение имеет приятную симметрию по *х, у, z, t;* здесь (-1/с2) нужно, конечно, потому, что время и координаты раз­личаются; у них разные единицы.

Уравнения Максвелла привели нас к нового типа уравнению для потенциалов ϕ и А, но с одной и той же математической формой для всех четырех функций ϕ, *Ах, Ау* и *Аг.* Раз мы научились решать эти уравнения, то можем получить В и Е из∇XЕ и-∇ϕ-*dA/dt.* Мы приходим к другой форме электро­магнитных законов, в точности эквивалентной уравнениям Максвелла; с ними во многих случаях обращаться гораздо проще.

Фактически мы уже решали уравнение, весьма похожее на (18.26). Когда мы изучали звук в гл. 47 (вып. 4), мы имели уравнение в форме

C:\1\pic\gray.jpg

и видели, что оно описывает распространение волн в x-направлении со скоростью *с.* Уравнение (18.26) это соответствующее волновое уравнение для трех измерений. Поэтому в области, где больше нет зарядов и токов, решение этих уравнений не означает, что ϕ и А — нули. (Хотя на самом деле нулевое решение есть одно из возможных решений.) Имеются решения, представляющие некоторую совокупность ϕ и А, которые ме­няются со временем, но всегда движутся со скоростью *с.* Поля передвигаются вперед через свободное пространство, как в нашем примере в начале главы.

С новым членом, добавленным Максвеллом в уравнение IV, мы смогли записать полевые уравнения в терминах А и ϕ в форме, которая проста и сразу же позволяет выявить существование электромагнитных волн. Для многих практических целей еще будет удобно использовать первоначальные урав­нения в терминах Е и В. Но они — по ту сторону горы, на ко­торую мы уже вскарабкались. Теперь мы можем посмотреть вокруг. Все будет выглядеть иначе, — нас ожидают новые, прекрасные пейзажи.

***\*Это не совсем так. Поля могут быть «поглощены», если попадут в область, в которой есть заряды.***

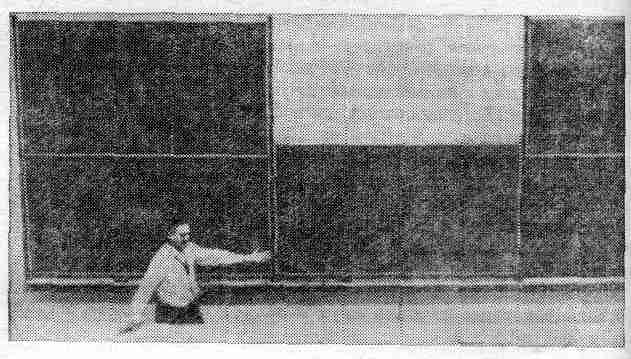
***Это значит, что где-то могут быть созданы другие поля, которые наложатся на эти поля и «погасят»их в результате деструктивной интерференции (см. гл. 31, вып. 3)***

***\* К-2— вторая по высоте вершина мира в северо-западных отрогах Гималаев, называемых Каракорум.—- Прим. ред.***

***\*Выбор значения ∇•А называется «выбором калибровки». Изменение А за счет добавления ∇ψ называется «калибровочным преобра­зованием». Выбор (18.23) называют «калибровкой Лоренца».***

***I'лавa 19***

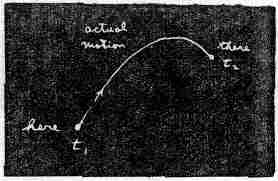
[**ПРИНЦИП НАИМЕНЬШЕГО** **ДЕЙСТВИ****Я**](#прим1)



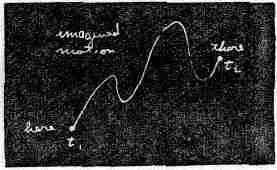
[**Добавление, сделан****ное после лекции**](#а1)

Когда я учился в школе, наш учитель фи­зики, по фамилии Бадер, однажды зазвал меня к себе после урока и сказал: «У тебя вид такой, как будто тебе все страшно надоело; послу­шай-ка об одной интересной вещи». И он рас­сказал мне нечто, что мне показалось поистине захватывающим. Даже сейчас, хотя с тех пор прошла уже уйма времени, это продолжает меня увлекать. И всякий раз, когда я вспоми­наю о сказанном, я вновь принимаюсь за ра­боту. И на этот раз, готовясь к лекции, я поймал себя на том, что вновь анализирую все то же самое. И, вместо того чтобы гото­виться к лекции, я взялся за решение новой задачи. Предмет, о котором я говорю,— это *принцип наименьшего действия.*

Вот что сказал мне тогда мой учитель Бадер: «Пусть, к примеру, у тебя имеется частица в поле тяжести; эта частица, выйдя откуда-то, свободно движется куда-то в другую точку. Ты подбросил ее, скажем, кверху, а она взлетела, а потом упала.



C:\1\pic\gray.jpg

C:\1\pic\gray.jpg

От исходного места к конеч­ному она прошла за какое-то время. Попробуй теперь какое-то другое движение. Пусть для того, чтобы перейти «отсюда сюда», она двигалась уже не так, как рань­ше, а вот так:

но все равно очутилась на нужном месте в тот же самый момент вре­мени, что и раньше».

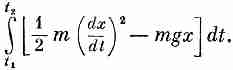
«И вот,— продолжал учитель,— если ты подсчитаешь кине­тическую энергию в каждый момент времени на пути частицы, вычтешь из нее потенциальную энергию и проинтегрируешь разность по всему тому времени, когда происходило движение, то увидишь, что число, которое получится, будет *больше,* чем при истинном движении частицы.

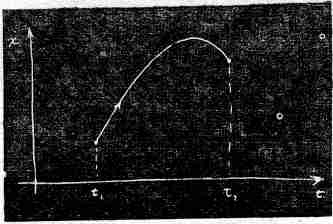
Иными словами, законы Ньютона можно сформулировать не в виде F=ma, а вот как: средняя кинетическая энергия минус средняя потенциальная энергия достигает своего самого наи­меньшего значения на той траектории, по которой предмет двигается в действительности от одного места к другому.

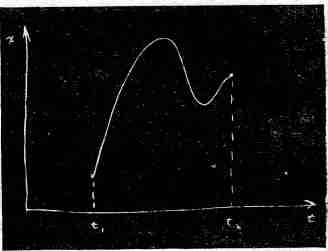
Попробую пояснить тебе это чуть понятнее.

Если взять поле тяготения и обозначить траекторию час­тицы *x(t),* где *х —* высота над землей (обойдемся пока одним измерением; пусть траектория пролегает только вверх и вниз, а не в стороны), то кинетическая энергия будет 1/*zm(dx/dt)2,* а потенциальная энергия в произвольный момент времени будет равна *mgx.*

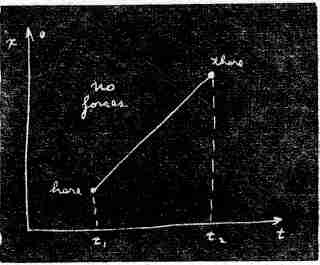
Теперь я для какого-то момента движения по траектории беру разность кинетической и потенциальной энергий и интегри­рую по всему времени от начала до конца. Пусть в начальный момент времени *tt* движение началось на какой-то высоте, а кончилосъ в момент t2 на дру­гой определенной высоте.

Тогда интеграл равен





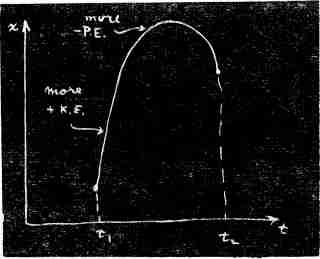
Можно подсчитать раз­ность потенциальной и кинетической энергий на таком пути... или на любом другом. И самое поразительное — что настоящий путь это тот, по которому этот интеграл наименьший.

Давай проверим это. Для начала разберем такой случай: у свободной частицы вовсе нет потенциальной энергии. Тогда правило говорит, что при переходе от одной точки к другой за заданное время интеграл от кинетической энергии должен оказаться наименьшим. А это значит, что частица обязана дви­гаться равномерно. (И это правильно, мы же с тобой знаем, что скорость в таком движении постоянна.) А почему равно­мерно? Разберемся в этом. Если бы было иначе, то временами скорость частицы превысила бы среднюю, а временами была бы ниже ее, а средняя скорость была бы одинаковой, потому что частице надо было бы дойти «отсюда сюда» за условленное время. Например, если тебе нужно попасть из дому в школу на своей машине за определенное время, то сделать это можно по-разному: ты можешь сперва гнать, как сумасшедший, а в кон­це притормозить, или ехать с одинаковой скоростью, или сна­чала можешь даже отправиться в обратную сторону, а уж потом повернуть к школе, и т. д. Во всех случаях средняя скорость, конечно, должна быть одной и той же — частное от деления расстояния от дома до школы на время. Но и при данной сред­ней скорости ты иногда двигался слишком быстро, а иногда чересчур медленно. А средний *квадрат* чего-то, что отклоняется от среднего, как известно, всегда больше квадрата среднего; значит, интеграл от кинетической энергии при колебаниях скорости движения всегда будет больше, нежели при движении с постоянной скоростью. Ты видишь, что интеграл достигнет минимума, когда скорость будет постоянной (при отсутствии сил). Правильный путь таков.

C:\1\pic\gray.jpg

Предмет же, подброшен­ный в поле тяжести вверх, сперва поднимается быстро, а потом все медленнее. Про­исходит это потому, что он обладает и потенциальной энергией, а наименьшего зна­чения должна достигать *раз­ность* между кинетической и потенциальной энергиями.

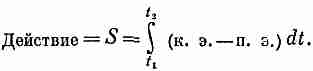
Раз потенциальная энергия возрастает по мере подъема, то меньшая *разность* получится, если как можно быстрее достичь тех высот, где потенциальная энергия велика. Тогда, вычтя из кинети­ческой энергии этот высокий потенциал, мы добьемся уменьшения среднего. Так что выгоднее такой путь, который идет вверх и постав­ляет добрый отрицательный кусок за счет потенциальной энергии.



C:\1\pic\gray.jpg

Но, с другой стороны, нельзя ни двигаться слишком быстро, ни подняться слишком высоко, потому что на это потребуется чересчур много кинетической энергии. Надо двигаться доста­точно быстро, чтобы подняться и спуститься за определенное время, имеющееся в твоем распоряжении. Так что не следует стараться взлететь слишком высоко, а просто надо достичь какого-то разумного уровня. В итоге оказывается, что решение есть своего рода равновесие между желанием раздобыть как можно больше потенциальной энергии и желанием как можно сильней уменьшить количество кинетической энергии — это стремление добиться максимального уменьшения разности ки­нетической и потенциальной энергий».

Вот и все, что сказал мне мой учитель, потому что он был очень хороший учитель и знал, когда пора остановиться. Сам я, увы, не таков. Мне трудно остановиться вовремя. И поэтому вместо того, чтобы просто разжечь в вас интерес своим рас­сказом, я хочу запугать вас, хочу, чтобы вам стало тошно от сложности жизни,— попробую доказать то, о чем я рассказал. Математическая задача, которую мы будем решать, очень трудна и своеобразна. Имеется некоторая величина *S,* назы­ваемая *действием.* Она равна кинетической энергии минус потенциальная, проинтегрированная по времени:



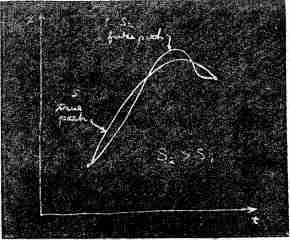
Не забудьте, что и п. э. и к. э.— обе функции времени. Для любого нового мыслимого пути это действие принимает свое определенное значение. Математическая задача состоит в том, чтобы определить, для какой кривой это число меньше, чем для других.

Вы скажете: «О, это просто обычный пример на максимум и минимум. Надо подсчитать действие, продифференцировать его и найти минимум».

Но погодите. Обычно у нас бывает функция какой-то пере­менной и нужно найти значение *переменной,* при котором функ­ция становится наименьшей или наибольшей. Скажем, имеется стержень, нагретый посредине. По нему растекается тепло и в каждой точке стержня устанавливается своя температура. Нужно найти точку, где она выше всего. Но у нас речь идет совсем об ином — *каждому пути в пространстве* отвечает свое число, и предполагается найти тот *путь,* для которого это число минимально. Это совсем другая область математики. Это не обычное исчисление, а *вариационное* (так его назы­вают).

В этой области математики имеется много своих задач. Скажем, окружность обычно определяют как геометрическое место точек, расстояния которых от данной точки одинаковы, но окружность можно определить и иначе: это та из кривых *данной длины,* которая ограничивает собою наибольшую пло­щадь. Любая другая кривая такого же периметра ограничивает площадь меньшую, чем окружность. Так что если поставить задачу: найти кривую данного периметра, ограничивающую наибольшую площадь, то перед нами будет задача из вариацион­ного исчисления, а не из того исчисления, к которому вы при­выкли.

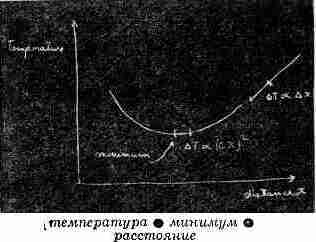
Итак, мы хотим взять интеграл по пути, пройденному телом. Сделаем это так. Все дело в том, чтобы вообразить себе, что су­ществует истинный путь и что любая другая кривая, которую мы проведем,— не настоящий путь, так что если подсчитать

для нее действие, то получится число, превышающее то, кото­рое мы получим для действия, соответствующего настоя­щему пути.

C:\1\pic\gray.jpg

Итак, задача: найти истин­ный путь. Где он пролегает? Один из способов, конечно, мог бы состоять в том, чтобы подсчитать действие для мил­лионов и миллионов путей и потом посмотреть, при каком пути это действие наименьшее. Вот тот путь, при котором действие минимально, и бу­дет настоящим.

Такой способ вполне возможен. Однако можно сделать проще. Если имеется величина, обладающая минимумом (из обычных функций, скажем, температура), то одно из свойств минимума состоит в том, что при удалении от него на расстояние *первого* порядка малости функция отклоняет­ся от минимального своего значения только на величину *второго* порядка. А в любом другом месте кривой сдвиг на малое расстояние изменяет значение функции тоже на величину первого порядка мало­сти. Но в минимуме легкие уходы в сторону в первом приближении не приводят к изменению функции.

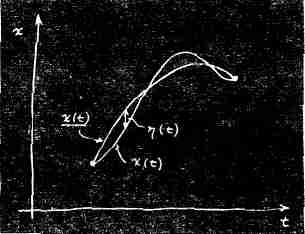


Это-то свойство мы и со­бираемся использовать для расчета настоящего пути.

Если путь правильный, то кривая, чуть-чуть отличная от него, не приведет в первом приближении к изменению в вели­чине действия. Все изменения, если это был действительно минимум, возникнут только во втором приближении.

Это легко доказать. Если при каком-то отклонении от кри­вой возникают изменения в первом порядке, то эти изменения в действии *пропорциональны* отклонению. Они, по всей вероятности, увеличат действие; иначе это не был бы минимум. Но раз изменения *пропорциональны* отклонению, то перемена знака отклонения уменьшит действие. Выходит, что при отклонении и одну сторону действие возрастает, а при отклонении в обрат­ную сторону — убывает. Единственная возможность того, что­бы это действительно был минимум,— это чтобы в первом при­ближении никаких изменений не происходило и изменения были бы пропорциональны квадрату отклонения от настоящего пути.

Итак, мы пойдем по следующему пути: обозначим через *x(t)* (с чертой внизу) истинный путь — тот, который мы хотим найти. Возьмем некоторый пробный путь *x(t),* отличаю­щийся от искомого на неболь­шую величину, которую мы обозначим η(t).



Идея состоит в том, что если мы подсчитаем действие *S* на пути *x(t),* то разность между этим *S* и тем дейст­вием, которое мы вычислили для пути *x(t)* (для простоты

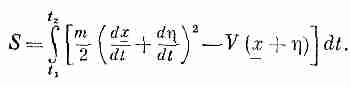
оно будет обозначено S), или разность между S и S, должна быть в первом приближении по ηнулем. Они могут отли­чаться во втором порядке, но в первом разность обязана быть нулем.

И это должно соблюдаться для любой η. Впрочем, не со­всем для любой. Метод требует принимать во внимание только те пути, которые все начинаются и кончаются в одной и той же паре точек, т. е. всякий путь должен начинаться в определен­ной точке в момент t1 и кончаться в другой определенной точке в момент *t2.* Эти точки и моменты фиксируются. Так что наша функция η(отклонение) должна быть равна нулю на обоих концах: η(t1)=0 и η(t2)=0. При этом условии наша математическая задача становится полностью опре­деленной.

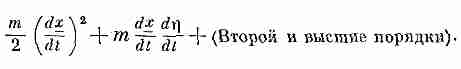
Если бы вы не знали дифференциального исчисления, вы могли бы проделать такую же вещь для отыскания минимума обычной функции *f(x).* Вы бы задумались над тем, что случится, если взять *f(x)* и прибавить к *х* малую величину *h,* и доказы­вали бы, что поправка к *f(x)* в первом порядке по *h* долж­на в минимуме быть равна нулю. Вы бы подставили *x+h* вместо *х* и разложили бы *f(x+h)* с точностью до первой сте­пени *h. . .,* словом, повторили бы все то, что мы намерены

C:\1\pic\gray.jpgИтак, идея наша заключается в том, что мы подставляем *x(t)=x(t)+-* η*(t)* в формулу для действия

где через *V(x)* обозначена потенциальная энергия. Производная *dx/dt —* это, естественно, производная от x*(t)* плюс производ­ная от η*(t),* так что для действия я получаю такое выражение:

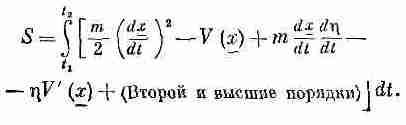


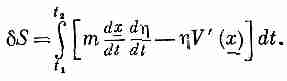
C:\1\pic\gray.jpgТеперь это нужно расписать подетальней. Для квадратич­ного слагаемого я получу

Но постойте-ка! Ведь мне не нужно заботиться о порядках выше первого. Я могу убрать все слагаемые, в которых есть η2 и высшие степени, и ссыпать их в ящик под названием «второй и высшие порядки». Из этого выражения туда попадет только одна вторая степень, но из чего-то другого могут войти и выс­шие. Итак, часть, связанная с кинетической энергией, такова:

C:\1\pic\gray.jpgДальше нам нужен потенциал *V* в точках x+η. Я считаю т) малой и могу разложить *V(x)* в ряд Тэйлора. Приближенно это будет *V(x);* в следующем приближении (из-за того, что здесь стоят обычные производные) поправка равна η*,* умноженной на скорость изменения *V* по отношению к x; и т. д.:

Для экономии места я обозначил через *V* производную F по *х.* Слагаемое с η2 и все, стоящие за ним, попадают в категорию «второй и высшие порядки». И о них больше нечего беспо­коиться. Объединим все, что осталось:



Если мы теперь внимательно взглянем на это, то увидим, что два первых написанных здесь члена отвечают тому действию *S,* которое я написал бы для искомого истинного пути *х.* Я хочу сосредоточить ваше внимание на изменении *S,* т. е. на разности между *S* и тем *S,* которое получилось бы для истинного пути. Эту разность мы будем записывать как δ*S* и назовем ее вариа­цией *S.* Отбрасывая «второй и высшие порядки», получаем для δS

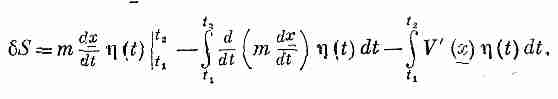
Теперь задача выглядит так. Вот передо мной некоторый интеграл. Я не знаю еще, каково это *х,* но я твердо знаю, что, какую η я ни возьму, этот интеграл должен быть равен нулю. «Ну что ж,— подумаете вы,— единственная возможность для этого — это чтобы множитель при η был равен нулю». Но как быть с первым слагаемым, где есть *d*η*/dt?* Вы скажете: «Если η обращается в ничто, то и ее производная такое же ничто; зна­чит, коэффициент при *d*η*/dt* должен тоже быть нулем». Ну это не совсем верно. Это не совсем верно потому, что между откло­нением η и его производной имеется связь; они не полностью независимы, потому что η (t) должно быть нулем и при *tt* и при *t2.*

При решении всех задач вариационного исчисления всегда пользуются одним и тем же общим принципом. Вы чуть сдви­гаете то, что хотите варьировать (подобно тому, как это сдела­ли мы, добавляя η), бросаете взгляд на члены первого порядка, *затем* расставляете все так, чтобы получился интеграл в таком виде: «сдвиг (η), умноженный на что получится», но чтобы в нем не было никаких производных от η(никаких *d*η*/dt).* Не­пременно нужно так все преобразовать, чтобы осталось «нечто», умноженное на η*.* Сейчас вы поймете, отчего это так важно. (Существуют формулы, которые подскажут вам, как в некоторых случаях можно это проделать без каких-либо выкладок; но они не так уж общи, чтобы стоило заучивать их; лучше всего проделывать выкладки так, как это делаем мы.)

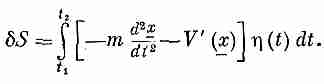
Как же я могу переделать член *d*η*/dt,* чтобы в нем появилось η? Я могу добиться этого, интегрируя по частям. Оказывается, что в вариационном исчислении весь фокус в том и состоит, чтобы расписать вариацию *S* и затем проинтегрировать по час­тям так, чтобы производные от η исчезли. Во всех задачах, в которых появляются производные, проделывается такой же фокус.

C:\1\pic\gray.jpgПрипомните общий принцип интегрирования по частям. Если у вас есть произвольная функция f, умноженная на *d*η*/dt* и проинтегрированная по *t,* то вы расписываете производную от η*f:*

C:\1\pic\gray.jpgВ интересующем вас интеграле стоит как раз последнее слага­емое, так что

В нашей формуле для δS за функцию f принимается произ­ведение *т* на *dx/dt;* поэтому я получаю для δ*S* выражение

В первый член должны быть подставлены пределы интегриро­вания t1и t2. Тогда я получу под интегралом член от интегри­рования по частям и последний член, оставшийся при преоб­разовании неизменным.

А теперь происходит то, что бывает всегда,— проинтегри­рованная часть исчезает. (А если не исчезает, то нужно переформулировать принцип, добавив условия, обеспечивающие такое исчезновение!) Мы уже говорили, что ηна концах пути должна быть равна нулю. Ведь в чем состоит наш принцип? В том, что действие минимально при условии, что варьируемая кривая начинается и кончается в избранных точках. Это зна­чит, что η(t1)=0 и η(t2)=0. Поэтому проинтегрированный член получается равным нулю. Мы собираем воедино остальные члены и пишем

Вариация *S* теперь приобрела такой вид, какой мы хотели ей придать: что-то стоит в скобках (обозначим его *F),* и все это умножено на η(t)и проинтегрировано от t1до t2*.*

У нас вышло, что интеграл от какого-то выражения, умно­женного на η(t), всегда равен нулю:

C:\1\pic\gray.jpg

Стоит какая-то функция от *t;* умножаю ее на η(t) и интегрирую ее от начала до конца. И какова бы ни была η, я получаю нуль. Это означает, что функция F(t)равна нулю. В общем-то это очевидно, но я на всякий случай покажу вам один из способов доказательства.

Пусть в качестве η *(t)* я выберу нечто, что равно нулю всюду, при всех *t,* кроме одного, заранее выбранного значения *t.* Оно

остается нулем, пока я не

дойду до этого *t,*

затем оно подскакивает на мгновение и сразу же оса­живает назад. Если вы берете интеграл от этой η*,* умно­женной на какую-то функ­цию *F,* то единственное место, в котором вы получите что-то ненулевое,— это там, где η *(t)* подскакивало; и у вас получится значение *F* в этом месте на интеграл по скачку. Сам по себе интеграл по скачку не равен нулю, но после умножения на *F* он должен дать нуль. Значит, функция в том месте, где был скачок, должна оказаться нулем. Но ведь скачок можно было сделать в любом месте; значит, *F* должна быть нулем всюду.

C:\1\pic\gray.jpgМы видим, что если наш интеграл равен нулю при какой угодно η, то коэффициент при ηдолжен обратиться в нуль. Интеграл действия достигает минимума на том пути, который будет удовлетворять такому сложному дифференциальному уравнению:

На самом деле оно не так уж сложно; вы его уже встречали прежде. Это просто F=ma. Первый член — это масса, умно­женная на ускорение; второй — это производная от потен­циальной энергии, т. е. сила.

Итак, мы показали (по крайней мере для консервативной системы), что принцип наименьшего действия приводит к пра­вильному ответу; он утверждает, что путь, "обладающий мини­мумом действия,— это путь, удовлетворяющий закону Ньютона.

Нужно сделать еще одно замечание. Я не доказал, что это *минимум.* Может быть, это максимум. На самом деле это и не обязательно должен быть минимум. Здесь все так же, как в «принципе кратчайшего времени», который мы обсуждали, изучая оптику. Там тоже мы сперва говорили о «кратчайшем» времени. Однако выяснилось, что бывают положения, в кото­рых это время не обязательно «кратчайшее». Фундаментальный принцип заключается в том, чтобы для любых *отклонений пер­вого порядка* от оптического пути *изменения* во времени были бы равны нулю; здесь та же самая история. Под «минимумом» мы на самом деде подразумеваем, что в первом порядке малости изменения величины *S* при отклонениях от пути должны быть равны нулю. И это не обязательно «минимум».

Теперь я хочу перейти к некоторым обобщениям. В первую очередь всю эту историю можно было бы проделать и в трех измерениях. Вместо простого x *я* тогда имел бы x*, у* и *z* как функции *t,* и действие выглядело бы посложнее. При трехмер­ном движении вы должны использовать полную кинетическую энергию: (m/2), умноженное на квадрат всей скорости. Иначе говоря

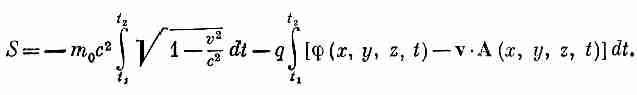
C:\1\pic\gray.jpg

Кроме того, потенциальная энергия теперь является функцией x*, у* и z. А что можно сказать о пути? Путь есть некоторая кривая общего вида в пространстве; ее не так легко начертить, но идея остается прежней. А как обстоит дело с η? Что ж, и η имеет три компоненты. Путь можно сдвигать и по x*,* и по *у,* и по z, или во всех трех направлениях одновременно. Так что ηтеперь вектор. От этого сильных усложнений не получается. Раз нулю должны быть равны лишь вариации *первого порядка,* то можно провести расчет последовательно с тремя сдвигами. Сперва можно сдвинуть η только в направлении xи сказать, что коэффициент должен обратиться в нуль. Получится одно уравнение. Потом мы сдвинем η в направлении *у* и получим второе. Затем сдвинем в направлении z и получим третье. Можно все, если угодно, проделать в другом порядке. Как бы то ни было, возникает тройка уравнений. Но ведь закон Ньюто­на — это тоже три уравнения в трех измерениях, по одному для каждой компоненты. Вам предоставляется самим убедить­ся, что это все действует и в трех измерениях (работы здесь не так много). Между прочим, можно взять какую угодно систему координат, полярную, любую, и сразу получить зако­ны Ньютона применительно к этой системе, рассматривая, что получится, когда произойдет сдвиг η вдоль радиуса или по углу, и т. д.

Метод может быть обобщен и на произвольное число частиц. Если, скажем, у вас есть две частицы и между ними действуют какие-то силы и имеется взаимная потенциальная энергия, то вы просто складываете их кинетические энергии и вычитаете из суммы потенциальную энергию взаимодействия. А что вы варьируете? Пути *обеих* частиц. Тогда для двух частиц, движу­щихся в трех измерениях, возникает шесть уравнений. Вы мо­жете варьировать положение частицы 1 в направлении x*,* в направлении *у* и в направлении z, и то *же* самое проделать с частицей 2, так что существует шесть уравнений. И так и должно быть. Три уравнения определяют ускорение частицы 1 через силу, действующую на нее, а три других — ускорение частицы 2 из-за силы, действующей на нее. Следуйте всегда тем же правилам игры, и вы получите закон Ньютона для про­извольного числа частиц.

Я сказал, что мы получим закон Ньютона. Это не совсем верно, потому что в закон Ньютона входят и неконсервативные силы, например трение. Ньютон утверждал, что *та* равно вся­кой F. Принцип же наименьшего действия справедлив только для *консервативных* систем, таких, где все силы могут быть получены из потенциальной функции. Но ведь вы знаете, что на микроскопическом уровне, т. е. на самом глубинном физи­ческом уровне, неконсервативных сил не существует. Некон­сервативные силы (такие, как трение) появляются только от того, что мы пренебрегаем микроскопическими сложными эф­фектами: просто слишком много частиц приходится анализировать. *Фундаментальные* же законы *могут* быть выражены в виде принципа наименьшего действия.

Позвольте перейти к дальнейшим обобщениям. Положим, нас интересует, что будет, когда частица движется релятивист­ски. Пока мы не получили правильного релятивистского уравнения движения; F=ma верно только в нерелятивистских дви­жениях. Встает вопрос: существует ли в релятивистском случае соответствующий принцип наименьшего действия? Да, су­ществует. Формула в релятивистском случае такова:

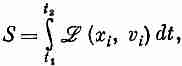


Первая часть интеграла действия — это произведение массы покоя m0 на с2 и на интеграл от функции скорости √(1-v2/c2). Затем вместо того, чтобы вычитать потенциальную энергию, мы имеем интегралы от скалярного потенциала ϕ и от вектор­ного потенциала А, умноженного на v*,* Конечно, здесь приняты во внимание только электромагнитные силы. Все электрические и магнитные поля выражены в терминах ϕ и А. Такая функция действия дает полную теорию релятивистского движения от­дельной частицы в электромагнитном поле.

Конечно, вы должны понимать, что всюду, где я написал v*,* прежде чем делать выкладки, следует подставить *dx/dt* вместо *vx* и т. д. Кроме того, там, где я писал просто *х, у, z,* вы должны представить себе точки в момент *t: x(t), y(t), z(t).* Собственно, только после таких подстановок и замен *v* у вас получится фор­мула для действия релятивистской частицы. Пусть самые уме­лые из вас попытаются доказать, что эта формула для дей­ствия действительно дает правильные уравнения движения теории относительности. Позвольте лишь посоветовать для начала отбросить А, т. е. обойтись пока без магнитных полей. Тогда вы должны будете получить компоненты уравнения движения *dp/dt=-q*∇ϕ, где, как вы, вероятно, помните, p=mv/√(l-v2/с2).

Включить в рассмотрение векторный потенциал А намного труднее. Вариации тогда становятся несравненно более слож­ными. Но в конце сила оказывается равной тому, чему следует: q(E+vXB). Но позабавьтесь с этим сами.

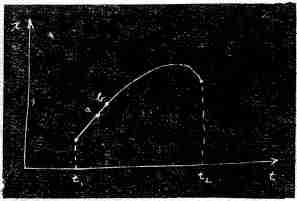
Мне хотелось бы подчеркнуть, что в общем случае (к при­меру, в релятивистской формуле) под интегралом в действии уже не стоит разность кинетической и потенциальной энергий. Это годилось только в нерелятивистском приближении. На­пример, член *m0c2*√(*1-v*2/с2) — это не то, что называют кине­тической энергией. Вопрос о том, каким должно быть действие для произвольного частного случая, может быть решен после некоторого числа проб и ошибок. Это задача того же типа, что и определение, каковы должны быть уравнения движения. Вы просто должны поиграть с известными вам уравнениями и посмотреть, можно ли их написать в виде принципа наимень­шего действия.

Еще одно замечание по поводу терминологии. Ту функцию, которую интегрируют по времени, чтобы получить действие *S,* называют *лагранжианом ζ.* Это функция, зависящая только от скоростей и положений частиц. Так что принцип наименьшего действия записывается также в виде

где под x*i* и *vi* подразумеваются все компоненты координат и скоростей. Если вы когда-нибудь услышите, что кто-то говорит о «лагранжиане», знайте, что речь идет о функции, применяемой для получения *S.* Для релятивистского движения в электро­магнитном поле

C:\1\pic\gray.jpg

Кроме того, я должен отметить, что самые дотошные и пе­дантичные люди не называют *S* действием. Его именуют «первой главной функцией Гамильтона». Но читать лекцию о «принципе наименьшей первой главной функции Гамильтона» было свыше моих сил. Я назвал это «действием». Да к тому же все больше и больше людей называют это «действием». Видите ли, истори­чески действием было названо нечто другое, не столь полезное для науки, но я думаю, что разумнее изменить определение. Теперь и вы начнете именовать новую функцию действием, а вскоре и все вообще станут называть ее этим простым именем.

Теперь я хочу сообщить вам по поводу нашей темы кое-что, похожее на те рассуждения, которые я вел по поводу принципа кратчайшего времени. Существует разница в самом существе закона, утверждающего, что некоторый интеграл, взятый от одной точки до другой, имеет минимум,— закона, который сообщает нам что-то обо всем пути сразу, и закона, который говорит, что когда вы двигаетесь, то, значит, есть сила, приво­дящая к ускорению. Второй подход докладывает вам о каждом вашем шаге, он прослеживает ваш путь пядь за пядью, а пер­вый выдает сразу какое-то общее утверждение обо всем прой­денном пути. Толкуя о свете, мы говорили о связи этих двух подходов. Теперь я хочу объяснить вам, отчего должны суще­ствовать дифференциальные законы, если имеется такой прин­цип — принцип наименьшего действия. Причина вот в чем: рассмотрим действительно пройденный в пространстве и вре­мени путь. Как и прежде, обойдемся одним измерением, так что можно будет начертить график зависимости xот *t.* Вдоль истинного пути *S* достигает минимума. Положим, что у нас есть этот путь и что он про­ходит через некоторую точку *а* пространства и времени и через другую соседнюю точку b*.*

Теперь, если весь интеграл от t1 до t2 достиг минимума, необ­ходимо, чтобы интеграл вдоль маленького участочка от а до b тоже был минимальным. Не может быть, чтобы часть от а до b хоть чуточку превосходила минимум. Иначе вы могли бы по­двигать туда-сюда кривую на этом участочке и снизить немного значение всего интеграла.

Значит, любая часть пути тоже должна давать минимум. И это справедливо для каких угодно маленьких долек пути. Поэтому тот принцип, что весь путь должен давать минимум, можно сформулировать, сказав, что бесконечно малая долька пути — это тоже такая кривая, на которой действие минималь­но. И если мы возьмем достаточно короткий отрезок пути — между очень близкими друг к другу точками а и b,— то уже неважно, как меняется потенциал от точки к точке вдали от этого места, потому что, проходя весь ваш коротенький отрезочек, вы почти не сходите с места. Единственное, что вам нужно учитывать,— это изменение первого порядка малости в потенциале. Ответ может зависеть только от производной по­тенциала, а не от потенциала в других местах. Так, утвержде­ние о свойстве всего пути в целом становится утверждением о том, что происходит на коротком участке пути, т. е. диф­ференциальным утверждением. И эта дифференциальная формулировка включает производные от потенциала, т. е. силу в данной точке. Таково качественное объяснение связи между законом в целом и дифференциальным законом.

Когда мы говорили о свете, то обсуждали также вопрос: как все-таки частица находит правильный путь? С дифферен­циальной точки зрения это понять легко. В каждый момент частица испытывает ускорение и знает только то, что ей поло­жено делать в это мгновение. Но все ваши инстинкты причин и следствий встают на дыбы, когда вы слышите, что частица «решает», какой ей выбрать путь, стремясь к минимуму дей­ствия. Уж не «обнюхивает» ли она соседние пути, прикидывая, к чему они приведут — к большему или к меньшему действию? Когда мы на пути света ставили экран так, чтобы фотоны не могли перепробовать все пути, мы выяснили, что они не могут решить, каким путем идти, и получили явление дифракции.

Но верно ли это и для механики? Правда ли, что частица не просто «идет верным путем», а пересматривает все другие мыслимые траектории? И что если, ставя преграды на ее пути, мы не дадим ей заглядывать вперед, то мы получим некий ана­лог явления дифракции? Самое чудесное во всем этом — то, что все действительно обстоит так. Именно это утверждают законы квантовой механики. Так что наш принцип наименьшего действия сформулирован не полностью. Он состоит не в том, что частица избирает путь наименьшего действия, а в том, что она «чует» все соседние пути и выбирает тот, вдоль которого действие минимально, и способ этого выбора сходен с тем, ка­ким свет отбирает кратчайшее время. Вы помните, что способ, каким свет отбирает кратчайшее время, таков: если свет пойдет по пути, требующему другого времени, то придет он с другой фазой. А полная амплитуда в некоторой точке есть сумма вкладов амплитуд для всех путей, по которым свет может ее достичь. Все те пути, у которых фазы резко различаются, ничего после сложения не дают. Но если вам удалось найти всю последовательность путей, фазы которых почти одинаковы, то мелкие вклады сложатся, и в точке прибытия полная ампли­туда получит заметное значение. Важнейшим путем становится тот, возле которого имеется множество близких путей, дающих ту же фазу.

В точности то же происходит и в квантовой механике. За­конченная квантовая механика (нерелятивистская и пренебре­гающая спином электрона) работает так: вероятность того, что частица, выйдя из точки *1* в момент *t1,* достигнет точки *2* в момент *t2,* равна квадрату амплитуды вероятности. Полная амплитуда может быть записана в виде суммы амплитуд для всех возможных путей — для любого пути прибытия. Для лю­бого *x(t),* которое могло бы возникнуть для любой мыслимой воображаемой траектории, нужно подсчитать амплитуду. Затем их все нужно сложить. Что же мы примем за амплитуду ве­роятности некоторого пути? Наш интеграл действия говорит нам, какой обязана быть амплитуда отдельного пути. Ампли­туда пропорциональна *eiS/h,* где *S —* действие на этом пути. Это значит, что если мы представим фазу амплитуды в виде комплексного числа, то фазовый угол будет равен *S/h,.* Действие *S* имеет размерность энергии на время, и у постоянной Планка размерность такая же. Это постоянная, которая определяет, когда нужна квантовая механика.

И вот как все это срабатывает. Пусть для всех путей дейст­вие *S* будет весьма большим по сравнению с числом h*.* Пусть какой-то путь привел к некоторой величине амплитуды. Фаза рядом проложенного пути окажется совершенно другой, потому что при огромном *S* даже незначительные изменения *S* резко меняют фазу (ведь hчрезвычайно мало). Значит, рядом лежащие пути при сложении обычно гасят свои вклады. И толь­ко в одной области это не так — в той, где и путь и его сосед— оба в первом приближении обладают одной и той же фазой (или, точнее, почти одним и тем же действием, меняющимся в пределах h*).* Только такие пути и принимаются в расчет. А в предельном случае, когда постоянная Планка hстремится к нулю, правильные квантовомеханические законы можно подытожить, сказав: «Забудьте обо всех этих амплитудах ве­роятностей. Частица и впрямь движется по особому пути — именно по тому, по которому S в первом приближении не ме­няется». Такова связь между принципом наименьшего действия и квантовой механикой. То обстоятельство, что таким способом можно сформулировать квантовую механику, было открыто в 1942 г. учеником того же самого учителя, мистера Бадера, о котором я вам рассказывал. [Первоначально квантовая меха­ника была сформулирована при помощи дифференциального уравнения для амплитуды (Шредингер), а также при помощи некоторой матричной математики (Гейзенберг).]

C:\1\pic\gray.jpgТеперь я хочу потолковать о других принципах минимума в физике. Есть очень много интересных принципов такого рода. Я не буду их все перечислять, а назову еще только один. Позже, когда мы доберемся до одного физического явления, для ко­торого существует превосходный принцип минимума, я рас­скажу вам о нем. А сейчас я хочу показать, что необязательно описывать электростатику при помощи дифференциального уравнения для поля; можно вместо этого потребовать, чтобы некоторый интеграл обладал максимумом или минимумом. Для начала возьмем случай, когда плотность зарядов известна повсюду, а нужно найти потенциал ϕ в любой точке простран­ства. Вы уже знаете, что ответ должен быть такой:

C:\1\pic\gray.jpgДругой способ утверждать то же самое заключается в следую­щем: надо вычислить интеграл *U\**

это объемный интеграл. Он берется по всему пространству. При правильном распределении потенциала ϕ(x, *у, z)* это выра­жение достигает минимума.

Мы можем показать, что оба эти утверждения относительно электростатики эквивалентны. Предположим, что мы выбрали произвольную функцию ϕ. Мы хотим показать, что когда в ка­честве ϕ мы возьмем правильное значение потенциала ϕ плюс малое отклонение f, то в первом порядке малости изменение в *U\** будет равно нулю. Так что мы пишем

C:\1\pic\gray.jpg

здесь ϕ — это то, что мы ищем; но мы проварьируем ϕ, чтобы увидеть, каким он должен быть для того, чтобы вариация U*\** оказалась первого порядка малости. В первом члене U\* нам нужно написать

C:\1\pic\gray.jpg

Единственный член первого порядка, который будет ме­няться, таков:

C:\1\pic\gray.jpg

Во втором члене U*\** подынтегральное выражение примет вид

C:\1\pic\gray.jpg

C:\1\pic\gray.jpgизменяющаяся часть здесь равна ρf. Оставляя только меняю­щиеся члены, получим интеграл

Дальше, руководствуясь нашим старым общим правилом, мы должны очистить интеграл от всех производных по f. По­смотрим, что это за производные. Скалярное произведение равно

C:\1\pic\gray.jpg

C:\1\pic\gray.jpgЭто нужно проинтегрировать по x*, у* и по z. И здесь напраши­вается тот же фокус: чтобы избавиться от *df/dx,* мы проинтегри­руем по *х* по частям. Это приведет к добавочному дифференци­рованию ϕ по *х.* Это та же основная идея, с помощью которой мы избавились от производных по *t.* Мы пользуемся равенством

Другой способ утверждать то же самое заключается в следую­щем: надо вычислить интеграл *U\**

C:\1\pic\gray.jpg

это объемный интеграл. Он берется по всему пространству. При правильном распределении потенциала ϕ(x, *у, z)* это выра­жение достигает минимума.

Мы можем показать, что оба эти утверждения относительно электростатики эквивалентны. Предположим, что мы выбрали произвольную функцию ϕ. Мы хотим показать, что когда в ка­честве ϕ мы возьмем правильное значение потенциала ϕ плюс малое отклонение f, то в первом порядке малости изменение в *U\** будет равно нулю. Так что мы пишем

C:\1\pic\gray.jpg

C:\1\pic\gray.jpgздесь ϕ — это то, что мы ищем; но мы проварьируем ϕ, чтобы увидеть, каким он должен быть для того, чтобы вариация U*\** оказалась первого порядка малости. В первом члене U\* нам нужно написать

Единственный член первого порядка, который будет ме­няться, таков:

C:\1\pic\gray.jpg

Во втором члене *U\** подынтегральное выражение примет вид

C:\1\pic\gray.jpg

изменяющаяся часть здесь равна ρf. Оставляя только меняю­щиеся члены, получим интеграл

C:\1\pic\gray.jpg

C:\1\pic\gray.jpgДальше, руководствуясь нашим старым общим правилом, мы должны очистить интеграл от всех производных по f. По­смотрим, что это за производные. Скалярное произведение равно

C:\1\pic\gray.jpgЭто нужно проинтегрировать по x*, у* и по z. И здесь напраши­вается тот же фокус: чтобы избавиться от *df/dx,* мы проинтегри­руем по xпо частям. Это приведет к добавочному дифференци­рованию ϕ по x*.* Это та же основная идея, с помощью которой мы избавились от производных по *t.* Мы пользуемся равенством

Проинтегрированный член равен нулю, так как мы считаем f равным нулю на бесконечности. (Это отвечает обращению η в нуль при *t1* и *t2.* Так что наш принцип более точно формули­руется следующим образом: *U\** для правильного ϕ меньше, чем для любого другого

C:\1\pic\gray.jpgϕ*(х, у,* z), обладающего теми же зна­чениями на бесконечности.) Затем мы проделаем то же с *у* и с z. Наш интеграл ΔU\* обратится в

C:\1\pic\gray.jpgЧтобы эта вариация была равна нулю при любом произволь­ном f, коэффициент при f должен быть равен нулю. Значит,

C:\1\pic\gray.jpgМы вернулись к нашему старому уравнению. Значит, наше «минимальное» предложение верно. Его можно обобщить, если слегка изменить выкладки. Вернемся назад и проинтегрируем по частям, не расписывая все покомпонентно. Начнем с того, что напишем следующее равенство:

C:\1\pic\gray.jpgПродифференцировав левую часть, я могу показать, что она в точности равна правой. Это уравнение подходит для того, чтобы провести интегрирование но частям. В нашем интеграле ΔU\* мы заменяем ∇ϕ•∇f на —f∇2ϕ+∇•(f∇ϕ) и затем интегри­руем это по объему. Член с дивергенцией после интегрирования по объему заменяется интегралом по поверхности:

А поскольку мы интегрируем по всему пространству, то по­верхность в этом интеграле лежит на бесконечности. Значит, f=0, и мы получаем прежний результат.

Только теперь мы начинаем понимать, как решать задачи, в которых мы *не знаем,* где расположены все заряды. Пусть мы имеем проводники, на которых как-то распределены заряды. Если потенциалы на всех проводниках зафиксированы, то наш принцип минимума все еще разрешается применять. Интегри­рование в *U\** мы проведем только по области, лежащей снаружи всех проводников. Но раз мы не можем на проводниках менять ϕ, то на их поверхности f=0, и поверхностный интеграл

C:\1\pic\gray.jpg

тоже равен нулю. Остающееся объемное интегрирование нужно проделывать только в промежутках между провод­никами.

C:\1\pic\gray.jpg

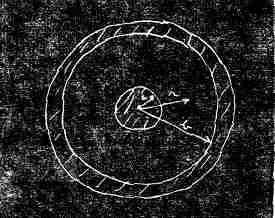
И мы, конечно, снова получаем уравнение Пуассона

C:\1\pic\gray.jpg

C:\1\pic\gray.jpgМы, стало быть, показали, что наш первоначальный интеграл *U\** достигает минимума и тогда, когда он вычисляется в про­странстве между проводниками, каждый из которых находится при фиксированном потенциале [это значит, что каждая проб­ная функция *ϕ(х, у, z)* должна равняться заданному потенциалу проводника, когда *(х, у, z) —* точки поверхности проводника]. Существует интересный частный случай, когда заряды рас­положены только на проводниках. Тогда

и наш принцип минимума говорит нам, что в случае, когда у каждого проводника есть свой заранее заданный потенциал, потенциалы в промежутках между ними пригоняются так, что интеграл *U\** оказывается как можно меньше. А что это за интеграл? Член ∇ϕ — это электрическое поле. Значит, интеграл — это электростатическая энергия. Правильное поле и есть то единственное, которое из всех полей, получаемых как градиент потенциала, отличается наименьшей полной энер­гией.

Я хотел бы воспользоваться этим результатом, чтобы решить какую-нибудь частную задачу и показать вам, что все эти вещи имеют реальное практическое зна­чение. Предположим, что я взял два проводника в форме цилин­дрического конденсатора.



У внутреннего проводника потен­циал равен, скажем, *V,* а у внеш­него— нулю. Пусть радиус внут­реннего проводника будет равен *а,* а внешнего — b*.* Теперь мы можем предположить, что распределение потенциалов между ними — *любое.*

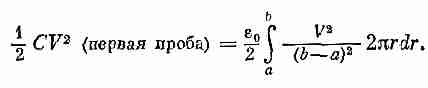
Но если мы возьмем *правильное* значение ϕ и вычислим

C:\1\pic\gray.jpg

, то должна получиться энергия системы 1/2CV2.

Так что с помощью нашего принципа можно подсчитать и емкость *С.* Если же мы возьмем неправильное распределение потенциала и попытаемся этим методом прикинуть емкость конденсатора, то придем к чересчур большому значению емкости при фикси­рованном *V.* Любой предполагаемый потенциал ϕ, не точно совпадающий с истинным его значением, приведет и к невер­ной величине *С,* большей, чем нужно. Но если неверно выбран­ный потенциал ϕ является еще грубым приближением, то ем­кость *С* получится уже с хорошей точностью, потому что по­грешность в С — величина второго порядка по сравнению с погрешностью в ϕ.

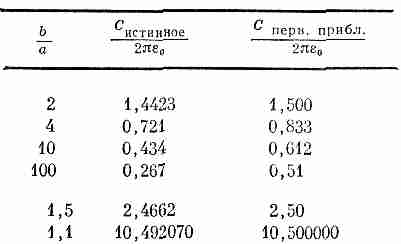
C:\1\pic\gray.jpgПредположим, что мне неизвестна емкость цилиндрического конденсатора. Тогда, чтобы узнать ее, я могу воспользоваться этим принципом. Я просто буду испытывать в качестве потен­циала разные функции ϕ до тех пор, пока не добьюсь наиниз­шего значения *С.* Допустим, к примеру, что я выбрал потен­циал, отвечающий постоянному полю. (Вы, конечно, знаете, что на самом деле поле здесь не постоянно; оно меняется как 1/r.) Если поле постоянно, то это означает, что потенциал ли­нейно зависит от расстояния. Чтобы напряжение на провод­никах было каким нужно, функция ϕ должна иметь вид

Эта функция равна *V* при r*=а,* нулю при r=b, а между ними имеется постоянный наклон, равный —*V/(b-а).* Значит, чтобы определить интеграл U\*, надо только помножить квадрат этого градиента на ε0/2 и проинтегрировать по всему объему. Проведем этот расчет для цилиндра единичной длины. Элемент объема при радиусе r равен *2πrdr.* Проводя интегрирование, я нахожу, что моя первая проба дает такую емкость:

Интеграл здесь просто равен

C:\1\pic\gray.jpg

C:\1\pic\gray.jpgТак я получаю формулу для емкости, которая хотя и непра­вильна, но является каким-то приближением:

Конечно, она отличается от правильного ответа C=2πε0/ln*(b/a),* но в общем-то, она не так уж плоха. Давайте попробуем срав­нить ее с правильным ответом для нескольких значений b*/а.* Вычисленные мною числа приведены в следующей таблице

Даже когда *b/a=2* (а это приводит уже к довольно большим отличиям между постоянным и линейным полем), я все еще получаю довольно сносное приближение. Ответ, конечно, как и ожидалось, чуть завышен. Но если тонкую проволочку по­местить внутри большого цилиндра, то все выглядит уже го­раздо хуже. Тогда поле изменяется очень сильно и замена его постоянным полем ни к чему хорошему не приводит. При b/а=100мы завышаем ответ почти вдвое. Для малых b*/а* поло­жение выглядит намного лучше. В противоположном пределе, когда промежуток между проводниками не очень широк (ска­жем, при b/а=1,1), постоянное поле оказывается весьма хорошим приближением, оно дает значение *С* с точностью до десятых процента.

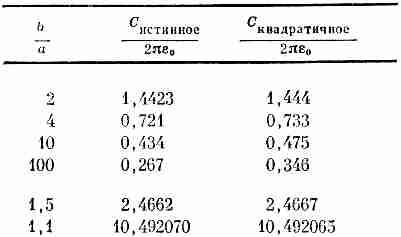
А теперь я расскажу вам, как усовершенствовать этот рас­чет. (Ответ для цилиндра вам, разумеется, *известен,* но тот же способ годится и для некоторых других необычных форм кон­денсаторов, для которых правильный ответ вам может быть и не известен.) Следующим шагом будет подыскание лучшего приближения для неизвестного нам истинного потенциала ϕ. Скажем, можно испытать константу плюс экспоненту ϕ и т. д. Но как вы узнаете, что у вас получилось лучшее приближение, если вы не знаете истинного ϕ? *Ответ:* Подсчитайте *С;* чем оно ниже, тем к истине ближе. Давайте проверим эту идею. Пусть потенциал будет не линейным, а, скажем, квадратичным по r, а электрическое поле не постоянным, а линейным. Самая *общая* квадратичная C:\1\pic\gray.jpgформа, которая обращается в ϕ =0 при r*=b* и в ϕ =V при r=а, такова:

C:\1\pic\gray.jpgгде α — постоянное число. Эта формула чуть сложнее прежней. В нее входит и квадратичный член, и линейный. Из нее очень легко получить поле. Оно равно просто

C:\1\pic\gray.jpgТеперь это нужно возвести в квадрат и проинтегрировать по объему. Но погодите минутку. Что же мне принять за α? За ϕ я могу принять параболу, но какую? Вот что я сделаю: подсчитаю емкость при *произвольном* α*.* Я получу

C:\1\pic\gray.jpgЭто выглядит малость запутанно, но так уж выходит после интегрирования квадрата поля. Теперь я могу выбирать себе а. Я знаю, что истина лежит ниже, чем все, что я собираюсь вычислить. Что бы я ни поставил вместо α, ответ все равно полу­чится слишком большим. Но если я продолжу свою игру с а и постараюсь добиться наинизшего возможного значения *С,* то это наинизшее значение будет ближе к правде, чем любое другое значение. Следовательно, мне теперь надо подобрать а так, чтобы значение *С* достигло своего минимума. Обращаясь к обычному дифференциальному исчислению, я убеждаюсь, что минимум *С* будет тогда, когда α=-*2b/(b+а).* Подставляя это значение в формулу, я получаю для наименьшей емкости

Я прикинул, что дает эта формула для *С* при различных значениях *b/а.* Эти числа я назвал *С* (квадратичные). Привожу таблицу, в которой сравниваются *С* (квадратичные) с *С* (истин­ными).



Например, когда отношение радиусов равно 2:1, я полу­чаю 1,444. Это очень хорошее приближение к правильному ответу, 1,4423. Даже при больших *b/а* приближение остается довольно хорошим — оно намного лучше первого приближения. Оно остается сносным (завышение только на 10%) даже при *b/а*=10:1. Большое расхождение наступает только при от­ношении 100:1. Я получаю *С* равным 0,346 вместо 0,267. С другой стороны, для отношения радиусов 1,5 совпадение превосходное, а при *b/a=1,1* ответ получается 10,492065 вместо положенного 10,492070. Там, где следует ожидать хорошего ответа, он оказывается очень и очень хорошим.

Я привел все эти примеры, во-первых, чтобы продемонстри­ровать теоретическую ценность принципа минимального дей­ствия и вообще всяких принципов минимума, и, во-вторых, чтобы показать вам их практическую полезность, а вовсе не для того, чтобы подсчитать емкость, которую мы и так велико­лепно знаем. Для любой другой формы вы можете испробовать приближенное поле с несколькими неизвестными параметрами (наподобие а) и подогнать их под минимум. Вы получите пре­восходные численные результаты в задачах, которые другим способом не решаются.

# Добавление, сделанное после лекции

Мне не хватило времени на лекции, чтобы сказать еще об одной вещи (всегда ведь готовишься рассказать больше, чем успеваешь). И я хочу сделать это сейчас. Я уже упоминал о том, что, готовясь к этой лекции, заинтересовался одной задачей. Мне хочется вам рассказать, что это за задача. Я заметил, что большая часть принципов минимума, о которых шла речь, в той или иной форме вытекает из принципа наименьшего действия механики и электродинамики. Но существует еще класс прин­ципов, оттуда не вытекающих. Вот пример. Если сделать так, чтобы токи протекали через массу вещества, удовлетворяющего закону Ома, то токи распределятся в этой массе так, чтобы скорость, с какой генерируется в ней тепло, была наименьшей. Можно также сказать иначе (если температура поддерживается постоянной): что скорость выделения энергии минимальна. Этот принцип, согласно классической теории, выполняется даже в распределении скоростей электронов внутри металла, по которому течет ток. Распределение скоростей не совсем рав­новесно [см. гл. 40 (вып. 4), уравнение (40.6)], потому что они медленно дрейфуют в стороны. Новое распределение можно найти из того принципа, что оно при данном токе должно быть таково, что развивающаяся в секунду за счет столкновений энтропия уменьшится настолько, насколько это возможно. Впрочем, правильное описание поведения электронов должно быть квантовомеханическим. Так вот в чем состоит вопрос: должен ли этот самый принцип минимума развивающейся энтро­пии соблюдаться и тогда, когда положение вещей описывается квантовой механикой? Пока мне не удалось это выяснить.

Вопрос этот интересен, конечно, и сам по себе. По­добные принципы возбуждают воображение, и всегда стоит попробовать выяснить, насколько они общи. Но мне *необхо­димо* это знать и по более практической причине. Вместе с несколькими коллегами я опубликовал работу, в которой с по­мощью квантовой механики мы примерно рассчитали электри­ческое сопротивление, испытываемое электроном, пробираю­щимся сквозь ионный кристалл, подобный NaCl. [Статья об этом была напечатана в Physical Review, 127,1004 (1962) и называется «Подвижность медленных электронов в полярных кристаллах».] Но если бы существовал принцип минимума, мы могли бы воспользоваться им, чтобы сделать результат на­много более точным, аналогично тому как принцип минимума емкости конденсатора позволил нам добиться столь высокой точности для емкости, хотя об электрическом поле наши сведе­ния были весьма неточными.

\* Эта лекция никак не связана со всем остальным. Она прочитана лишь для того, чтобы отвлечься от основной темы и немного передохнуть. (Перевод над­писей, сделанных на доске, приведен около рисунков, над стрелками.— Прим. ред.)

***Глава 20***

**РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА В ПУСТОМ ПРОСТРАНСТВЕ**

**[§ 1. Волны в пустом простр](#a1)****[анстве; плоские волны](#a1)**

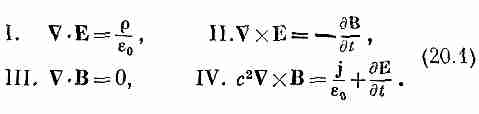
[**§ 2. Трехм****ерные волны**](#a2)

[**§ 3. Научно****е воображение**](#a3)

[**§ 4. Сфериче****ские волны**](#a4)

***Повторить:* гл. 47 (вып. 4) «Звук, Волновое уравнение»; гл. 28 (вып. 3) «Электромагнит­ное излучение»**

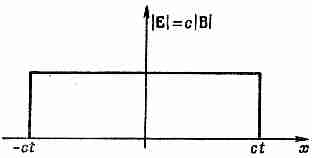
**§ 1. Волны в пустом пространстве; плоские волны**

В гл. 18 мы достигли того, что уравнения Максвелла появились в полном виде. Все, что есть в классической теории электрических и магнитных полей, вытекает из четырех уравне­ний:

C:\1\pic\gray.jpgКогда мы свели все эти уравнения воедино, мы обнаружили новое знаменательное явление: поля, создаваемые движущимися зарядами, мо­гут покинуть источник и отправиться путешест­вовать в пространстве. Мы рассмотрели частный случай, когда внезапно включается целая беско­нечная плоскость. После того как в течение вре­мени t шелток, возникают однородные электри­ческие и магнитные поля, простирающиеся от плоскости на *ct.* Предположим, что по плоскости *yz* течет ток в направлении +yс поверхностной плотностью J. Электрическое поле будет иметь только y-компоненту, а магнитное — только z-компоненту. Величина компонент поля будет равна

(20.2)

для положительных *x,* меньших *ct.* Для боль­ших *x* поля равны нулю. Равные по величине поля простираются на то же расстояние от плоскости в направлении отрицательных *y.* На фиг. 20.1 показан график зависимости ве­личины полей от x в момент *t.* С течением времени «волновой фронт» в *ct* распространяется вдоль *х* с постоянной скоростью *с.*

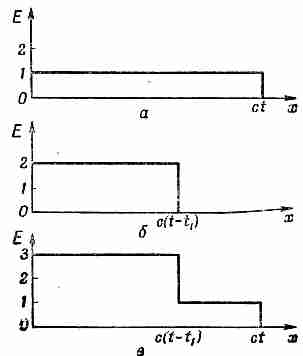


*Фиг. 20.1. Зависимость электри­ческого и магнитного полей от х через t сек после того, как была включена заряженная плоскость.*

Теперь представим себе такую последовательность событий. На мгновение мы включаем ток единичной силы, а затем вне­запно увеличиваем его силу втрое и поддерживаем его на этом уровне. Как же будут теперь выглядеть поля? Это можно узнать таким образом. Во-первых, надо представить ток с единичной силой, включенный при *t=0* и больше не менявшийся. Тогда поля при положительных *х* будут иметь вид, представленный на фиг. 20.2, *а.* Затем надо задать себе вопрос, что произойдет, если в момент t1 включить постоянный ток силой в две единицы?

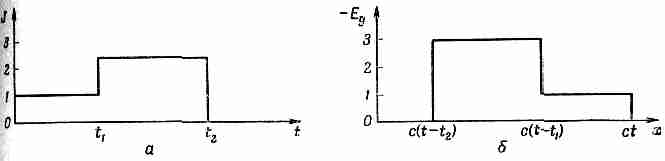
В этом случае поля станут вдвое больше, чем прежде, но отойдут по *х* только на промежуток *c(t-t1)* (фиг. 20.2, *б).* Складывая эти два решения (по принципу суперпозиции), мы получаем, что сумма источников — это ток силой в одну единицу с момента нуль до момента *t1* и ток в три единицы в более позд­ние моменты. В момент *t* поля меняются вдоль *х* так, как пока­зано на фиг. 20.2, *в.*

Возьмем теперь более сложную задачу. Рассмотрим ток, имевший сначала силу в одну единицу, а затем достигший силы в три единицы и выключенный. Каковы будут поля от такого тока? Решение можно получить точно так же, как и раньше,



*Фиг. 20.2. Электрическое поле плоскости с током.*

*а — одна единица тока включена в мо­мент* t=0; б—*две единицы тока вклю­чены в момент t=t1; в — суперпозиция а и б.*



*Фиг. 20.3. Если сила источника тока меняется так, как на рисунке (а), то в момент t электрическое поле как функция от х приобретает дру­гой вид (б).*

т. е. складывая решения трех разных задач. Сперва найдем поля постоянного тока единичной силы (эту задачу мы уже ре­шали). Потом узнаем поля от тока двойной силы. И, наконец, возьмем решение для полей токов с силой в *минус* три единицы. Сложив все три решения, мы получим ток силой в одну единицу от *t=0* до какого-то более позднего момента, скажем, до *t1,* затем ток силой в три единицы до момента *t2,* а потом ток, рав­ный нулю, т. е. выключенный. График зависимости тока от времени показан на фиг. 20.3, *а.* Складывая три решения для электрического поля, мы видим, что его изменения с рас­стоянием *х* в данный момент *t* подобны изображенным на фиг. 20.3, *б.* Поле в точности отображает собой ток. Распре­деление поля в пространстве есть точное отражение изменений тока со временем, но только нарисованное задом наперед. По мере того как проходит время, вся картина перемещается наружу со скоростью *с,* так что получается ломтик полей, который движется к положительным *х* и хранит в себе всю историю перемен тока. Если бы мы находились где-то на расстоянии многих километров, мы могли бы лишь по измене­нию электрического или магнитного поля безошибочно расска­зать, как менялся ток в источнике.

Заметьте также, что даже после того, как вся деятельность в источнике прекратилась и все заряды исчезли, а токи сошли на нет, наш ломтик полей продолжает свое путешествие через пространство. Получается распределение электрических и маг­нитных полей, которое существует независимо от токов и за­рядов. Это и есть тот новый эффект, который следует из полной системы уравнений Максвелла. Мы можем, если нужно, пред­ставить только что проделанный анализ в строго математиче­ской форме, написав, что электрическое поле в данном месте и в данное время пропорционально току в источнике, но не в *то же* время, а в более *ранний* период [t-(x/с)]. Можно написать

C:\1\pic\gray.jpg

Вас удивит, если я скажу, что мы уже выводили это урав­нение раньше (с другой точки зрения), когда говорили о теории показателя преломления. Тогда нам нужно было представить себе, какие поля создаст слой колеблющихся диполей в тонком плоском диэлектрике, если диполи приводятся в движение элек­трическим полем падающей электромагнитной волны. Задача наша состояла в расчете комбинированного поля начальной волны и волн, излучаемых колеблющимися диполями. Как же мы смогли тогда рассчитать поля, создаваемые движущимися зарядами, не зная уравнений Максвелла? Мы тогда приняли в качестве исходной (без вывода) формулу для полей излуче­ния, создаваемых на больших расстояниях от ускоряемого то­чечного заряда. Если вы заглянете в гл. 31 (вып. 3), то увидите, что выражение (31.10) — это как раз наше выражение (20.3), которое мы только что написали. Хотя прежний наш вывод относился только к большим расстояниям от источника, теперь мы видим, что тот же результат верен и вблизи источника.

Сейчас мы хотим взглянуть в общем виде на поведение элек­трических и магнитных полей в пустом пространстве вдалеке от источников, т. е. от токов и зарядов. Очень близко от них (так близко, что источники за время запаздывания передачи не успевают сильно измениться) поля очень похожи на те, которые получились у нас в электростатике или магнитостати­ке. Но если перейти к таким большим расстояниям, что запаз­дывание станет заметным, то природа полей может радикально отличаться от тех решений, которые мы нашли. Когда поля значительно удаляются ото всех источников, они начинают в некотором смысле приобретать свой собственный характер. Так что мы вправе приступить к обсуждению поведения полей в области, где нет ни токов, ни зарядов.

C:\1\pic\gray.jpgПредположим, что нас интересует род полей, которые могут существовать в областях, где и ρ и j равны нулю. В гл. 18 мы видели, что физику уравнений Максвелла можно также выразить на языке дифференциальных уравнений для скаляр­ного и векторного потенциалов:

C:\1\pic\gray.jpg(20.4)

(20.5)

Если ρ и j равны нулю, то эти уравнения упрощаются:

C:\1\pic\gray.jpg

C:\1\pic\gray.jpg(20.6)

(20.7)

Стало быть, в пустом пространстве и скалярный потенциал ϕ, и каждая компонента векторного потенциала А удовлетворяют одному и тому же математическому уравнению. Пусть буквой ψ (пси) мы обозначили любую из четырех величин ϕ, *Ах, Ау, Аг;* тогда нам нужно изучить общие решения уравнения

C:\1\pic\gray.jpg

(20.8)

C:\1\pic\gray.jpgЕго называют трехмерным волновым уравнением — трехмер­ным потому, что функция ψ может в общем случае зависеть от *х, у* и z и следует учитывать изменения по каждой из этих координат. Это становится ясным, если мы выпишем явно три члена оператора Лапласа:

(20.9)

C:\1\pic\gray.jpgВ пустом пространстве электрические и магнитные поля Е и В тоже удовлетворяют волновому уравнению. Так, поскольку B=∇XА, дифференциальное уравнение для В можно получить, взяв ротор от уравнения (20.7). Раз лапласиан — это скаляр­ный оператор, то порядок операций вычисления лапласиана и ротора можно переставлять:

Точно так же можно переставлять и вычисление rot и *d/dt:*

C:\1\pic\gray.jpg

Из этого мы получаем следующее дифференциальное уравнение

C:\1\pic\gray.jpgдля В:

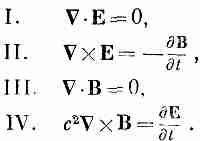
(20.10)

Тем самым выясняется, что компонента магнитного поля В удовлетворяет трехмерному волновому уравнению. Подобно этому, из того факта, что Е=-∇ϕ-*dAJdt,* следует, что электрическое поле Е в пустом пространстве удовлетворяет трех­мерному волновому уравнению

C:\1\pic\gray.jpg

(20.11)

Все наши электромагнитные поля подчиняются одному и тому же уравнению (20.8). Можно еще спросить: каково самое общее решение этого уравнения? Однако прежде, чем решать этот трудный вопрос, сначала посмотрим, что можно сказать в общем случае о тех решениях, в которых по *у* и по *z* ничего не меняется. (Всегда сначала беритесь за простые случаи, чтобы было видно, чего следует ожидать, а уж потом можете перехо­дить к случаям посложней.) Предположим, что величина полей зависит только от *х,* так что по *у* и по z поля *не меняются.* Мы, следовательно, опять рассматриваем плоские волны и должны ожидать, что получатся те же результаты, что и в пре­дыдущей главе. И мы действительно получим в точности те же самые ответы. Вы можете спросить: «Но зачем снова делать то же самое?» Это важно, во-первых, потому, что мы не доказа­ли, что найденные нами волны представляют собой самое общее решение для плоских волн, и, во-вторых, потому что наши поля произошли от источника тока особого вида. Сейчас мы хотели бы выяснить такой вопрос: каков самый общий вид одномер­ной волны в пустом пространстве? Мы не узнаем этого, если будем рассматривать тот или иной источник особого вида, нам нужна большая общность. Кроме того, на этот раз мы бу­дем работать не с интегральной формой уравнений, а с диффе­ренциальной. Хотя итог одинаков, это прекрасный случай поупражняться в выкладках и убедиться в том, что не имеет значения, каким путем идти. Вы должны уметь действовать любым путем, потому что, наткнувшись на трудную задачу, вы часто обнаруживаете, что годится лишь один из многих способов расчета.

Можно было бы прямо рассмотреть решение волнового урав­нения для какой-нибудь из электромагнитных величин. Вместо этого мы начнем прямо с начала, с уравнений Максвелла для пустого пространства, и вы убедитесь в их тесной связи с элек­тромагнитными волнами. Так что мы отправляемся от уравне­ний (20.1), полагая, что в них токи и заряды равны нулю. Они обращаются в

(20.12)

C:\1\pic\gray.jpgРаспишем первое уравнение покомпонентно:

(20.13)

Мы предположили, что по *у* и z поле не меняется, так что два последних члена равны нулю. Тогда, согласно (20.13),

C:\1\pic\gray.jpg

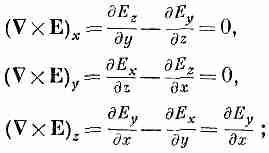
(20.14)

Решением его является постоянное в пространстве *Ех* (компо­нента электрического поля в направлении *х).* Взглянув на уравнение IV в (20.12) и полагая, что В тоже не изменяется вдоль y и z, вы убедитесь, что *Ех* постоянно и во времени. Таким по­лем может оказаться постоянное поле от какого-то заряженного конденсатора вдали от этого конденсатора. Нас сейчас не за­нимают такие неинтересные статические поля; мы интересуем­ся лишь динамически изменчивыми полями. А для *динамиче­ских* полей *Ех=0.*

Итак, мы пришли к важному результату о том, что при распространении плоских волн в произвольном направлении *электрическое поле должно располагаться поперек направления своего распространения.* Конечно, у него еще остается возмож­ность каким-то сложным образом изменяться по координате *х.*

Поперечное поле Е можно всегда разбить на две компонен­ты, скажем на *у* и *z.* Так что сначала разберем случай наличия у электрического ноля только одной поперечной компоненты. Для начала возьмем электрическое поле, направленное по *у,* т. е. с нулевой z-компонентой. Ясно, что, решив эту задачу, мы всегда сможем разобрать и тот случай, когда электрическое поле всюду направлено по z. Общее решение можно всегда представить в виде суперпозиции двух таких полей.

Какими простыми стали теперь наши уравнения! Теперь единственная ненулевая компонента электрического поля — это *Еу,* и все производные (кроме производных по *х)* тоже рав­ны нулю. Остатки уравнений Максвелла выглядят чрезвычайно просто.

Рассмотрим теперь второе из уравнений Максвелла [т. е. II из (20.12)]. Расписав компоненты rot E, получаем

здесь x-компонента ∇XE равна нулю, потому что равны нулю производные по *у* и z; y-компонента тоже равна нулю: первый член потому, что все производные по z равны нулю, а второй потому, что *Ez=0.* Единственная не равная нулю компонента rot E — это z-компонента, она равна *дЕу/дх.* Полагая, что три компоненты ∇XE равны соответствующим компонентам —*dB/dt,* мы заключаем, что

C:\1\pic\gray.jpg

C:\1\pic\gray.jpg(20.15)

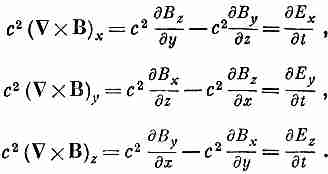
(20.16)

Поскольку временные производные как x-компоненты магнит­ного поля, так и

y-компоненты магнитного поля равны нулю, то обе эти компоненты суть попросту постоянные поля и отве­чают найденным раньше магнитостатическим решениям. Ведь кто-то мог оставить постоянный магнит возле того места, где распространяются волны. Мы будем игнорировать эти по­стоянные поля и положим *Вх* и *Вy* равными нулю.

Кстати, о равенстве нулю x-компонент поля В мы должны были бы заключить и по другой причине. Поскольку диверген­ция В равна нулю (по третьему уравнению Максвелла), то мы, прибегая при рассмотрении электрического поля к тем же доводам, что и выше, должны были бы прийти к выводу, что продольная компонента магнитного поля не может изменяться вдоль *х.* А раз мы такими однородными полями в наших вол­новых решениях пренебрегаем, то нам следовало бы положить *Вх* равным нулю. В плоских электромагнитных волнах поле В, равно как и поле Е, должно быть направлено поперек направ­ления распространения самих волн.

Равенство (20.16) дает нам добавочное утверждение о том, что если электрическое поле имеет только y-компоненту, то магнитное поле имеет только z-компоненту. Значит, Е и В *перпендикулярны* друг другу. Именно это и наблюдалось в той волне особого типа, которую мы уже рассмотрели.

Теперь мы готовы использовать последнее из уравнений Максвелла для пустого пространства [т. е. IV из (20.12)1. Рас­писывая покомпонентно, имеем

C:\1\pic\gray.jpg(20.17)

Из шести производных от компонент В только *dBz/dx* не равна нулю. Так что три уравнения просто дают

C:\1\pic\gray.jpg

(20.18)

C:\1\pic\gray.jpgИтог всей нашей деятельности состоит в том, что отличны от нуля только по одной компоненте электрического и магнит­ного полей и эти компоненты обязаны удовлетворять уравне­ниям (20.16) и (20.18). Эти два уравнения можно объединить в одно, если первое из них продифференцировать по *х, а* второе— по *t;* тогда левые стороны уравнений совпадут (с точностью до множителя с2). И мы обнаруживаем, что *Е* подчиняется урав­нению

(20.19)

Мы уже встречали это дифференциальное уравнение, когда изучали распространение звука. Это волновое уравнение для одномерных волн.

Заметьте, что в процессе вывода мы получили *больше,* чем содержится в (20.11). Уравнения Максвелла дали нам ин­формацию и о том, что у электромагнитных волн есть только компоненты поля, расположенные под прямым углом к направ­лению распространения волн.

C:\1\pic\gray.jpgВспомним все, что нам известно о решениях одномерного волнового уравнения. Если какая-то величина ψ удовлетво­ряет одномерному волновому уравнению

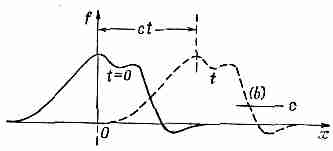
(20.20)

то одним из возможных решений является функция ψ *(x, t),*

C:\1\pic\gray.jpgимеющая вид

(20.21)

т. е. функция *одной-единственной* переменной *(x-ct).* Функция *i(x-ct)* представляет собой «жесткое» образование вдоль оси *х,* которое движется по направлению к положительным *х* со ско­ростью *с* (фиг. 20.4). Так, если максимум функции f приходится на нулевое значение аргумента, то при t=0 максимум ψ ока­зывается при x=0. В более поздний момент, скажем при t=10, максимум ψ окажется в точке *х=10 с.* Когда время движется, максимум тоже движется в сторону возрастания *х* со скоростью с. Порой удобнее считать, что решение одномерного волно­вого уравнения является функцией от *(t-х/с).* Однако в сущ­ности это одно и то же, потому что любая функция от *(t-х/с)—* это C:\1\pic\gray.jpgтакже функция от *(x-ct):*

Покажем, что *f(x-ct)* действительно есть решение волнового уравнения. Поскольку f зависит лишь от одной переменной — переменной *(x-ct),* то мы будем через f' обозначать производ­ную fпо этой переменной, а через f"— вторую производную.

*Фиг. 20.4. Функция f(x-ct) представляет неизменный* «кон*тур», движущийся в направлении возрастания х со скоростью с.*

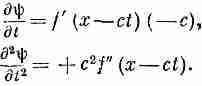
Дифференцируя (20.21) по *х,* получаем

C:\1\pic\gray.jpg

C:\1\pic\gray.jpgпотому что производная от *(x-ct)* no *x* равна единице. Вторая производная ψ no *x* равна

(20.22)

А производные ψ no *t* дают



(20.23)

Мы убеждаемся, что ψ действительно удовлетворяет одномер­ному волновому уравнению.

Вы недоумеваете: «Откуда же вы взяли, что решением вол­нового уравнения является f*(x-ct)?* Мне эта проверка задним числом совсем не нравится. Нет ли *прямого* пути отыскать ре­шение?» Хорошо, вот вам прямой путь: знать решение. Можно, конечно, «испечь» по всей науке прямые математические аргументы, тем более, что мы знаем, каким должно быть реше­ние, но с таким простым, как у нас, уравнением игра не стоит свеч. Со временем вы сами дойдете до того, что, как только; увидите уравнение (20.20), тут же будете представлять себе f(x-*ct)=*ψв качестве решения. (Подобно тому, как сейчас при виде интеграла от *x2dx* у вас сразу всплывает ответ x3/3.)

На самом деле вы должны представлять себе немножко больше. Решением является не только любая функция от *(x-ct),* но и функция от *(х+сt).* Из-за того, что в волновом урав­нении *с* встречается только в виде с2, изменение знака *с* ничего не меняет. И действительно, *самое общее* решение одномерного волнового уравнения — это сумма двух произвольных функций, одной от аргумента *(x-ct),* а другой от *(x+ct):*

C:\1\pic\gray.jpg

(20.24)

Первое слагаемое дает волну, движущуюся по направлению к положительным *х,* второе — произвольную волну, бегущую к отрицательным *х.* Общее решение получается наложением двух таких волн, существующих одновременно.

● ● ●

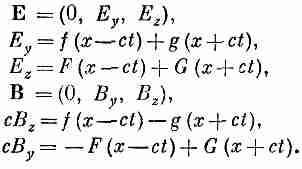
Следующий забавный вопрос решите сами. Возьмем функ­цию ψ в виде

ψ=coskxcoskct.

Эта функция не имеет вида f(x-*ct)* или *g(x+ct).* Но прямой подстановкой в (20.20) легко убедиться, что она удовлетворяет волновому уравнению. Но как же мы тогда смеем говорить, что общее решение имеет вид (20.24)?

● ● ●

Применяя эти выводы о решении волнового уравнения к y-компоненте электрического поля *Еу,* мы заключаем, что *Е* может меняться по *х* произвольным образом. Всякое поле, которое существует в самом деле, можно всегда рассматривать как сумму двух картин. Одна волна плывет через пространство в каком-то направлении со скоростью *с,* причем связанное с нею магнитное поле перпендикулярно к электрическому; другая волна бежит в противоположном направлении с той же скоростью. Такие волны отвечают хорошо нам известным элек­тромагнитным волнам — свету, радиоволнам, инфракрасному излучению, ультрафиолету, рентгеновским лучам и т. д. Мы уже изучали очень подробно излучение света. Так как все, чему мы тогда научились, применимо к любым электромагнит­ным волнам, то теперь нет нужды рассматривать подробно поведение этих волн.

Пожалуй, стоит лишь сделать несколько замечаний о поля­ризации электромагнитных волн. Раньше мы решили рассмот­реть частный случай электрического поля с одной только y-компонентой. Имеется, конечно, и другое решение для волн, бегущих в направлении +*х* или -*х,* т. е. решение, при котором электрическое поле обладает одной лишь z-компонентой. Так как уравнения Максвелла линейны, общее решение для одно­мерных волн, распространяющихся в направлении *х,* есть сумма волн *Еy* и волн *Еz.* Общее решение суммируется следующими формулами:

(20.25)

У подобных электромагнитных волн направление вектора Е не неизменно: оно как-то произвольно смещается по спирали в плоскости *yz.* Но в каждой точке магнитное поле всегда пер­пендикулярно к электрическому и к направлению распростра­нения.

Если присутствуют только волны, бегущие в одном направ­лении (скажем, в положительном направлении *х),* то имеется простое правило, говорящее об относительной ориентации элек­трического и магнитного полей. Правило состоит в том, что век­торное произведение ЕXВ (которое, как известно, является вектором, поперечным и к Е, и к В) указывает направление, куда бежит волна. Если Е совмещать с В правым по­воротом, то вектор поворота показывает направление вектора скорости волны. (Позже мы увидим, что вектор ЕXВ имеет особый физический смысл: это вектор, описывающий течение энергии в электромагнитном поле.)

**§ 2. Трехмерные волны**

C:\1\pic\gray.jpgА теперь обратимся к трехмерным волнам. Мы уже знаем, что вектор Е удовлетворяет волновому уравнению. К тому же выводу легко прийти, отправляясь прямо от уравнений Мак­свелла. Предположим, что мы исходим из уравнения

C:\1\pic\gray.jpgи берем ротор от обеих частей:

(20.26)

C:\1\pic\gray.jpgВы помните, что ротор от ротора любого вектора может быть записан в виде суммы двух членов, один из которых содержит дивергенцию, а другой — лапласиан:

C:\1\pic\gray.jpgНо в пустом пространстве дивергенция Е равна нулю, так что остается только член с лапласианом. Далее, из четвертого урав­нения Максвелла в пустом пространстве [см. (20.12)] производ­ная по времени от C2(∇XB) равна второй производной Е по t:

C:\1\pic\gray.jpgТогда (20.26) обращается в

C:\1\pic\gray.jpgЭто и есть трехмерное волновое уравнение. Расписанное во всей красе, оно выглядит так:

Как же нам найти общее решение этого уравнения? Ответ таков: все решения трехмерного волнового уравнения могут быть представлены в виде суперпозиции уже найденных нами одномерных решений. Мы получили уравнение для волн, бегущих в направлении *х,* предположив, что поле не зависит от *у* и z. Конечно, имеются и другие решения, в которых поля не зависят от x и z,— это волны, идущие в направлении *у.* Затем существуют решения, не зависящие от *х* и y; они представляют волны, движущиеся в направлении *z.* Или в общем случае, поскольку мы записали наши уравнения в векторной форме, трехмерное волновое уравнение может иметь решения, которые являются плоскими волнами, бегущими, вообще говоря, в лю­бом направлении. Кроме того, раз уравнения линейны, то одновременно может распространяться сколько угодно плос­ких волн, бегущих в каких угодно направлениях. Таким об­разом, самое общее решение трехмерного волнового уравнения является суперпозицией всех видов плоских волн, бегущих во всех возможных направлениях.

Попытайтесь представить себе, как выглядят сейчас элект­рические и магнитные поля в нашей аудитории. Прежде всего здесь имеется постоянное магнитное поле; оно возникло от токов внутри нашей Земли, от постоянного земного магнетизма. За­тем здесь имеются какие-то нерегулярные, почти статические электрические поля. Они скорей всего созданы электрическими зарядами, появляющимися из-за того, что кто-то ерзает на своем стуле или трется рукавами о стол (словом, в результате тре­ния). Кроме того, здесь есть еще и другие магнитные поля, вы­званные переменными токами в электропроводке,— поля, ко­торые меняются с частотой в 50 *гц* в такт с работой генератора на городской электростанции. Но еще больший интерес пред­ставляют электрические и магнитные поля, меняющиеся бы­стрее. К примеру, там, где свет падает из окна, освещая стены и пол, имеются небольшие колебания электрического и маг­нитного полей, перемещающиеся за секунду на 300 000 *км.* По комнате еще распространяются инфракрасные волны, иду­щие от ваших горячих голов к холодной доске с формулами. Да! Мы еще позабыли об ультрафиолетовом свете, о рентгеновских лучах и о радиоволнах, которые проносятся по комнате.

Через комнату скользят электромагнитные волны, которые несут в себе джазовую музыку. Проносятся и волны, модули­рованные серией импульсов, представляющих картины собы­тий, которые происходят сейчас в других местах света, или кар­тины воображаемых явлений, происходящих при растворении воображаемого аспирина в воображаемых желудках. Чтобы убедиться в реальности этих волн, достаточно просто включить электронную аппаратуру, которая превращает эти волны в изображения и звуки.

Если мы займемся дальнейшим анализом еще более слабых колебаний, то заметим мельчайшие электромагнитные волны, пришедшие в нашу комнату с огромных расстояний. В ней суще­ствуют мельчайшие колебания электрического поля, гребни которых отстоят друг от друга примерно на фут, а источник их удален отсюда на миллионы миль. Эти волны передаются на Землю с межпланетной станции Маринер II, которая как раз проходит сейчас где-то мимо Венеры. Ее сигналы несут сводку всей той информации, которую ей удалось ухватить у планеты (информации, полученной от электромагнитных волн, дошедших от Венеры к станции).

И есть здесь еще едва заметные колебания электрических и магнитных полей от волн, возникших в миллиардах световых лет отсюда, в галактиках, находящихся в удаленнейших уголках Вселенной. В том, что это действительно так, убедились, «за­полнив комнату проволокой», т. е. соорудив антенны величиной с эту комнату. Так были замечены радиоволны, дошедшие до нас из мест, находящихся за пределами досягаемости крупней­ших оптических телескопов. Кстати, даже эти оптические телескопы всего лишь простые собиратели электромагнитных волн. А то, что мы называем звездами, лишь заключения — заключе­ния, выведенные из единственной физической реальности, ко­торую мы до сих пор от них получали, из тщательного изучения бесконечно сложных волновых движений электрических и магнитных полей, достигающих Земли.

В аудитории имеются, конечно, еще другие разные поля — от молний, вспыхивающих где-то вдалеке отсюда, от заряженных частиц в космических лучах в тот момент, когда они проносятся сквозь комнату, и еще поля и еще... Представляете, какая слож­ная штука все эти электрические поля в пространстве вокруг нас! И все они подчиняются трехмерному волновому уравнению.

**§ 3. Научное воображение**

Я просил вас представить себе электрические и магнитные поля. Что вы для этого сделали? Знаете ли вы, как это нужно сделать? И как *я сам* представляю себе электрическое и магнит­ное поля? Что *я на самом деле* при этом вижу? Что требуется от научного воображения? Отличается ли оно чем-то от попытки представить себе комнату, полную невидимых ангелов? Нет, это не похоже на такую попытку.

Чтобы получить представление об электромагнитном поле, требуется более высокая степень воображения. Почему? Да потому что для того, чтобы невидимые ангелы стали доступны пониманию, мне нужно только *чуть-чуть* изменить их свой­ства — я делаю их слегка видимыми, и тогда я уже могу уви­деть и форму их крыльев, и их тела, и их нимбы. Как только мне удалось представить себе видимого ангела, то необходимая для дальнейшего абстракция (состоящая в том, чтобы почти неви­димых ангелов представить себе совершенно невидимыми) оказывается сравнительно легким делом.

Вы можете тоже сказать: «Профессор, дайте мне, пожалуй­ста, приближенное описание электромагнитных волн, пусть даже слегка неточное, но такое, чтобы я смог увидеть их так, как я могу увидеть почти невидимых ангелов. И я видоизменю эту картину до нужной абстракции».

Увы, я не могу этого сделать для вас. Я просто не знаю как. У меня нет картины этого электромагнитного поля, которая была бы хоть в какой-то степени точной. Я узнал об электро­магнитном поле давным-давно, 25 лет тому назад, когда я был на вашем месте, и у меня на 25 лет больше опыта размышлений об этих колеблющихся волнах. Когда я начинаю описывать магнитное поле, движущееся через пространство, то говорю о полях Е и В, делаю руками волнистые движения и вы можете подумать, что я способен их видеть. А на самом деле, что я при этом вижу? Вижу какие-то смутные, туманные, волнистые линии, на них там и сям надписано Е и В, а у других линий имеются словно какие-то стрелки, то здесь, то там на них есть стрелки, которые исчезают, едва в них вглядишься. Когда я рассказываю о полях, проносящихся сквозь пространство, в моей голове катастрофически перепутываются символы, нуж­ные для описания объектов, и сами объекты. Я не в состоянии дать картину, хотя бы приблизительно похожую на настоя­щие волны. Так что, если вы сталкиваетесь с такими же затруд­нениями при попытках представить поле, не терзайтесь, дело обычное.

Наша наука предъявляет воображению немыслимые требо­вания. Степень воображения, которая теперь требуется в науке, несравненно превосходит то, что требовалось для некоторых прежних идей. Нынешние идеи намного труднее вообразить себе. Правда, мы используем для этого множество средств. В ход пускаются математические уравнения и правила, рисуют­ся различные картинки. Вот сейчас я ясно осознаю, что всегда, когда я завожу речь об электромагнитном поле в пространстве, фактически перед моим взором встает своего рода суперпози­ция всех тех диаграмм на эту тему, которые я когда-либо виды­вал. Я не воображаю себе маленьких пучков линий поля, сную­щих туда и сюда; они не нравятся мне потому, что если бы я двигался с иной скоростью, то они бы исчезли. Я не всегда вижу и электрические, и магнитные поля, потому что временами мне кажется, что гораздо правильнее была бы картина, включаю­щая векторный и скалярный потенциалы, ибо последние, по­жалуй, имеют больший физический смысл, чем колебания полей.

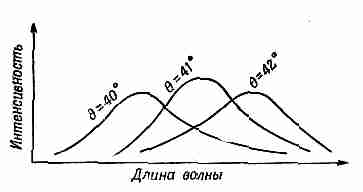
Быть может, вы считаете, что остается единственная надеж­да на математическую точку зрения. Но что такое математичес­кая точка зрения? С математической точки зрения в каждом месте пространства существует вектор электрического поля и вектор магнитного поля, т. е. с каждой точкой связаны шесть чисел. Способны ли вы вообразить шесть чисел, связанных с каждой точкой пространства? Это слишком трудно. А можете вы вообразить хотя бы одно число, связанное с каждой точкой пространства? Я лично не могу! Я способен себе представить такую вещь, как температура в каждой точке пространства. Но это, по-видимому, вообще вещь представимая: имеется теплота и холод, меняющиеся от места к месту. Но, честное слово, я не способен представить себе *число* в каждой точке.

Может быть, поэтому стоит поставить вопрос так: нельзя ли представить электрическое поле в виде чего-то сходного с температурой, скажем, похожего на смещения куска студня? Сначала вообразим себе, что мир наполнен тонкой студенистой массой, а поля представляют собой какие-то искривления (скажем, растяжения или повороты) этой массы. Вот тогда можно было бы себе мысленно вообразить поле. А после того, как мы «увидели», на что оно похоже, мы можем отвлечься от студня. Именно это многие и пытались делать довольно долгое время. Максвелл, Ампер, Фарадей и другие пробовали таким способом понять электромагнетизм. (Порой они называли абстрактный студень «эфиром».) Но оказалось, что попытки вообразить электромагнитное поле подобным образом на самом деле препятствуют прогрессу. К сожалению, наши способности к аб­стракциям, к применению приборов для обнаружения поля, к использованию математических символов для его описания и т. д. ограниченны. Однако поля в известном смысле — вещь вполне реальная, ибо, закончив возню с математическими урав­нениями (все равно, с иллюстрациями или без, с чертежами или без них, пытаясь представить поле въяве или не делая таких попыток), мы все же можем создать приборы, которые поймают сигналы с космической ракеты или обнаружат в миллиарде све­товых лет от нас галактику, и тому подобное.

Вопрос о воображении в науке наталкивается зачастую на непонимание у людей других специальностей. Они принимаются испытывать наше воображение следующим способом. Они говорят: «Вот перед вами изображены несколько людей в неко­торой ситуации. Как вы представляете, что с ними сейчас слу­чится?» Если вы ответите: «Не могу себе представить», они мо­гут счесть вас за человека со слабым воображением. Они про­глядят при этом тот факт, что все, что *допускается* воображать в науке, должно *согласовываться со всем прочим, что нам изве­стно:* что электрические поля и волны, о которых мы говорим, это не просто удачные мысли, которые мы вызываем в себе, если нам этого хочется, а идеи, которые обязаны согласовы­ваться со всеми известными законами физики. Недопустимо всерьез воображать себе то, что очевидным образом противо­речит известным законам природы. Так что наш род воображе­ния — весьма трудная игра. Надо иметь достаточно воображения, чтобы думать о чем-то никогда прежде не виденном, никогда прежде не слышанном. В то же время приходится, так сказать, надевать на мысли смирительную рубашку, ограничи­вать их условиями, вытекающими из наших знаний о том, ка­кому пути на самом деле следует природа. Проблема создания чего-то, что является совершенно новым и в то же время со­гласуется со всем, что мы видели раньше,— проблема чрезвы­чайно трудная.

Но раз уж зашла об этом речь, я хочу остановиться на том, в состоянии ли мы себе представить *красоту,* которую мы не можем *видеть.* Это интересный вопрос. Когда мы глядим на радугу, она нам кажется прекрасной. Каждый, увидав ее, воск­ликнет: «О радуга!». (Смотрите, как научно я подхожу к во­просу. Я остерегаюсь именовать что-то восхитительным, пока нет экспериментального способа определить это.) Ну, а как мы описывали бы радугу, если бы были слепыми? А ведь мы *слепы,* когда измеряем коэффициент отражения инфракрасных лучей от хлористого натрия или когда говорим о частоте волн, при­шедших от некоторой невидимой глазу галактики. Тогда мы чертим график, рисуем диаграмму. К примеру, для радуги по­добным графиком была бы зависимость интенсивности излуче­ния от длины волны, измеренная спектрофотометром под все­возможными углами к горизонту. Вообще говоря, подобные измерения должны были бы приводить к довольно пологим кривым. И вот в один прекрасный день кто-то обнаружил бы, что при какой-то определенной погоде, под некоторыми углами к горизонту спектр интенсивности как функция длины волны начал себя вести странно — у него появился пик. Если бы угол наклона прибора чуть-чуть изменился, максимум пика перешел бы от одной длины волны к другой. И вот через некоторое время в физическом журнале для слепых появилась бы техническая статья под названием «Интенсивность излучения как функция угла при некоторых метеоусловиях». В этой статье был бы график типа, показанного на фиг. 20.5. «Автор заметил,— го­ворилось бы, быть может, в статье,— что под большими углами основная часть радиации приходится на длинные волны, а под меньшими максимум излучения смещается к коротким волнам». (Ну, а мы бы сказали, что под углом 40° свет преиму­щественно зеленый, а под углом 42° — красный.)

Но находите ли вы график, приведенный на фиг. 20.5, вос­хитительным? В нем ведь содержится существенно больше раз­личных деталей, чем мы в состоянии постичь, когда видим ра­дугу: наши глаза не могут схватить доподлинную форму спектра. А вот глазам радуга все же кажется восхитительной. Хватает ли у вас воображения, чтобы в спектральных кривых увидеть всю ту красоту, которую мы видим, смотря на радугу? У меня — нет.



*Ф*и*г. 20.5. Зависимость интен­сивности электромагнитных волн от длины волны под тремя углами (отсчитываемыми от направления, противоположного направлению на Солнце).*

*Доступно наблюдению лишь в опре­деленных метеорологических усло­виях.*

Но представим себе, что у меня имеется график зависи­мости коэффициента отражения кристаллов хлористого натрия от длины волны в инфракрасном участке спектра и от угла. Я могу вообразить себе, как это представилось бы моим глазам, обладай они способностью видеть в инфракрасном свете. Должно быть, это был бы какой-то яркий, насыщенный «зеленый цвет», на который накладывались бы отражения от поверхностей «ме­таллически-красных» тонов. Это выглядело бы поистине вели­колепно, но я не знаю, способен ли я, взглянув на график коэф­фициента отражения NaCl, снятый на каком-то приборе, ска­зать, что он столь же прелестен.

Но, с другой стороны, хоть мы и не можем видеть красоту тех или иных частных измерений, мы *можем* утверждать, что постигаем своеобразную красоту уравнений, описывающих всеобщие физические законы. Например, в волновом уравне­нии (20.9) очень красива та правильность, с какой в нем распо­ложены *х, у, z* и *t.* И эта приятная симметрия появления *х,* у, z, *t* намекает на ту величественную красоту, которая таится в четырех равнозначных координатах, в возможности того, что у пространства есть четырехмерная симметрия, в возможности проанализировать ее и развить специальную теорию относи­тельности. Так что существует еще интеллектуальная красота, ассоциируемая с уравнениями.

**§ 4. Сферические волны**

Мы видели, что существуют решения волнового уравнения, отвечающие плоским волнам, и что любая электромагнитная волна может быть описана как суперпозиция многих плоских волн. В определенных случаях, однако, удобнее описывать волновое поле в другой математической форме. Я хотел бы сей­час разобрать теорию сферических волн — волн, которые соот­ветствуют сферическим поверхностям, расходящимся из неко­торого центра. Когда вы бросаете камень в пруд, то по водной глади побежит рябь в виде круговых волн — это двумерные волны. Сферические волны похожи на них, только распростра­няются они во всех трех измерениях.

Прежде чем начать описание сферических волн, немного зай­мемся математикой. Пусть имеется функция, зависящая только от радиального расстояния r точки от начала координат, иными словами, сферически симметричная функция. Обозначим ее ψ(r), где под rподразумевается

C:\1\pic\gray.jpg

C:\1\pic\gray.jpgт. е. расстояние от начала координат. Чтобы узнать, какие функ­ции ψ (r) удовлетворяют волновому уравнению, нам понадо­бится выражение для лапласиана ψ. Значит, нам нужно найти сумму вторых производных ψ по *х,* по *у* и по z. Через ψ'(r) мы обозначим первую производную i|) по r, а через ψ"(r) — вторую. Сначала найдем производные по *х.* Первая производная равна

Вторая производная по *х* равна

C:\1\pic\gray.jpg

C:\1\pic\gray.jpgЧастные производные r по x можно получить из

так что вторая производная ψ no *x* принимает вид

C:\1\pic\gray.jpg

(20.28)

Точно так же и

C:\1\pic\gray.jpg

C:\1\pic\gray.jpg(20.29)

(20.30)

Лапласиан равен сумме этих трех производных. Вспоминая,

что x2+y2+z2=r2, получаем

C:\1\pic\gray.jpg

(20.31)

Часто бывает удобнее записывать уравнение в следующей

форме:

C:\1\pic\gray.jpg

(20.32)

Проделав дифференцирование, указанное в (20.32), вы убеди­тесь, что правая часть здесь та же, что и в (20.31).

C:\1\pic\gray.jpgЕсли мы хотим рассматривать сферически симметричные поля, которые могут распространяться как сферические волны, то ве­личины, описывающие поля, должны быть функцией как r*,* так и *t.* Предположим, что нам нужно знать, какие функции ψ(r, *t)* являются решениями трехмерного волнового уравне­ния

(20.33)

C:\1\pic\gray.jpgПоскольку ψ(г, *t)* зависит от пространственных координат только через г, то в качестве лапласиана можно использовать выражение (20.32). Но для точности, поскольку ψ зависит также и от *t,* нужно дифференцирование по r записывать в виде частной производной. Волновое уравнение обращается в

C:\1\pic\gray.jpgЕго и предстоит нам решать. Оно выглядит сложнее, чем в случае плоских волн. Но заметьте, что если умножить это урав­нение на r, то получится

(20.34)

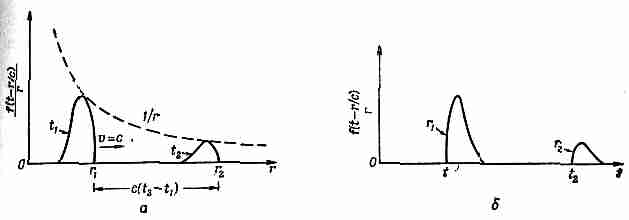
Это уравнение говорит нам, что функция rψ удовлетворяет одномерному волновому уравнению по переменной r. Исполь­зуя часто подчеркивавшийся нами общий принцип, что у одних и тех же уравнений и решения одни и те же, мы приходим к выводу, что если rψ окажется функцией одного только (r-*ct),* то оно явится решением уравнения (20.34). Итак, мы обнаружи­ваем, что сферические волны обязаны иметь вид

C:\1\pic\gray.jpg

C:\1\pic\gray.jpgИли, как мы видели раньше, можно в равной степени считать rψ имеющим форму

C:\1\pic\gray.jpgДеля на r, находим, что характеризующая поле величина ψ (чем бы она ни была) имеет вид

(20.35)

Такая функция представляет сферическую волну общего вида, распространяющуюся от начала координат со скоростью с. Если на минуту забыть об r в знаменателе, то амплитуда волны как функция расстояния от начала координат в каждый данный момент обладает определенной формой, которая рас­пространяется со скоростью *с.* Однако rв знаменателе говорит нам, что по мере того, как волна распространяется, ее амплиту­да убывает пропорционально 1/r. Иными словами, в отличие от плоской волны, амплитуда которой остается при движении все время одной и той же, амплитуда сферической волны бес­прерывно спадает (фиг. 20.6).

*Фиг. 20.6. Сферическая волна* ψ=f(t-r*/с)/r.*

*а — зависимость* ψ *от r* *при t=tl и* ma *же волна в более поздний момент времени t*2; *б — зависимость* ψ *от t при r*=r1 *и та же самая волна на расстоянии r*2.

Этот факт легко понять из про­стых физических соображений.

Мы знаем, что плотность энергии в волне зависит от квадрата амплитуды волны. По мере того как волна разбегается, ее энергия расплывается на все большую и большую площадь, пропорциональную квадрату радиуса волны. Если полная энер­гия сохраняется, плотность энергии должна убывать как 1/r2, а амплитуда — как 1/r. Поэтому формула (20.35) для сфери­ческой волны вполне «разумна».

C:\1\pic\gray.jpgМы игнорировали другое возможное решение одномерного волнового уравнения

C:\1\pic\gray.jpgили

Это тоже сферическая волна, но бегущая *внутрь,* от больших r к началу координат.

Тем самым мы делаем некоторое специальное предположе­ние. Мы утверждаем (без какого-либо доказательства), что волны, создаваемые источником, всегда бегут только *от* него. Поскольку мы знаем, что волны вызываются движением заря­дов, мы настраиваемся на то, что волны бегут от зарядов. Было бы довольно странно представлять, что прежде чем заряды были приведены в движение, сферическая волна уже вышла из бесконечности и прибыла к зарядам как раз в тот момент, когда они начали шевелиться. Такое решение возможно, но опыт по­казывает, что, когда заряды ускоряются, волны распростра­няются *от* зарядов, а не к ним. Хоть уравнения Максвелла предоставляют обеим волнам равные возможности, мы привле­каем *добавочный факт,* основанный на опыте, что «физическим смыслом» обладает только расходящаяся волна.

Нужно, однако, заметить, что из этого добавочного пред­положения вытекает интересное следствие: мы теряем при этом симметрию относительно времени, которая есть у уравнений Максвелла. Как исходные уравнения для Е и В, так и вытекающие из них волновые уравнения при изменении знака *t* не ме­няются. Эти уравнения утверждают, что любому решению, ко­торое отвечает волне, бегущей в одну сторону, отвечает столь же правильное решение для волны, бегущей в обратную сторону. И утверждая, что мы намерены брать в расчет только расходя­щиеся сферические волны, мы делаем тем самым важное допол­нительное предположение. (Очень тщательно изучалась такая электродинамика, в которой обходятся без этого дополнитель­ного предположения. Как это ни удивительно, но во многих обстоятельствах она *не приводит* к физически абсурдным ре­зультатам. Однако обсуждение этих идей теперь увлекло бы нас чересчур в сторону. Мы поговорим об этом подробнее в гл. 28.)

Нужно упомянуть еще об одном важном факте. В нашем решении для расходящейся волны (20.35) функция ψ в начале ко­ординат бесконечна. Это как-то необычно. Мы бы предпочли иметь такие волновые решения, которые гладки повсюду. Наше решение физически относится к такой ситуации, когда в начале координат располагается источник. Значит, мы нечаянно сде­лали одну ошибку: наша формула (20.35) не является решением свободного волнового уравнения (20.33) *повсюду;* уравнение (20.33) с нулем в правой части решено повсюду, кроме начала координат. Ошибка вкралась оттого, что некоторые действия при выводе уравнения при r=0 «незаконны».

C:\1\pic\gray.jpgПокажем, что ту же самую ошибку легко сделать и в элект­ростатике. Допустим, что нам нужно решить уравнение элек­тростатического потенциала в пустом пространстве ∇2ϕ=0. Лапласиан равен нулю, потому что мы предположили, что ни­каких зарядов нигде нет. Но как обстоит дело со сферически симметричным решением уравнения, т. е. с функцией ϕ, зависящей только от r? Используя для лапласиана формулу (20.32), получаем

Умножив это выражение на r, приходим к уже интегрировав­шемуся уравнению

C:\1\pic\gray.jpg

C:\1\pic\gray.jpgПроинтегрировав один раз по r*,* мы увидим, что первая про­изводная rϕ равна постоянной, которую мы обозначим через а;

C:\1\pic\gray.jpgЕще раз проинтегрировав, мы получим для rϕ формулу

C:\1\pic\gray.jpgгде b *—* другая постоянная интегрирования. Итак, мы обна­ружили, что решение для электростатического потенциала в пустом пространстве имеет вид

Что-то здесь явно не так. Мы же знаем решение для электро­статического потенциала в области, где нет электрических за­рядов: потенциал всюду постоянен. Это соответствует первому слагаемому в решении. Но имеется еще и второй член, подска­зывающий нам, что в потенциал дает вклад нечто, меняющееся как 1/r. Мы знаем, однако, что подобный потенциал соответ­ствует точечному заряду в начале координат. Стало быть, хоть мы и думали, что нашли решение для потенциала в пустом про­странстве, наше решение фактически дает нам также поле то­чечного источника в начале координат. Вы замечаете сходство между тем, что сейчас произошло, и тем, что произошло тогда, когда мы искали сферически симметричное решение волнового уравнения? Если бы в начале координат действительно не было ни зарядов, ни токов, то не возникли бы и сферически расходя­щиеся волны. Сферические волны должны вызываться источни­ками в начале координат. В следующей главе мы исследуем связь между излучаемыми электромагнитными волнами и вызы­вающими их токами и напряжениями.

***Глава 21***

**РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА С ТОКАМИ И ЗАРЯДАМИ**

[**§ 1. Свет и электро­м****агнитные волны**](#a1)

[**§ 2. Сферичес****кие вол­ны от точечного источника**](#a2)

[**§ 3. Общее решение ура****внений Максвелла**](#a3)

[**§ 4. Поля колеблю****щег****ося диполя**](#a4)

**[§ 5. Потенциа](#a5)****[лы дви­](#a5)****[жущегося заряда; общее реше­ние Льенара и](#a5)**

**[Вихерта](#a5)**

**[§ 6. Потенци](#a6)****[ал](#a6)****[ы заряда, движущегося с постоянной скоростью;](#a6)**

**[формула Лоренца](#a6)**

***Повторить:* гл. 28 (вып. 3) «Элект­ромагнитное излучение»; гл. 31 (вып. 3)**

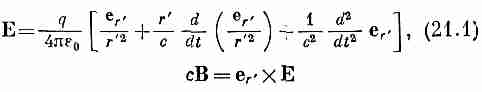
**«Как возникает показатель преломления»; гл. 34 (вып. 3)**

**«Релятивистские явления в излучении»**

**§ 1. Свет и электромагнитные волны**

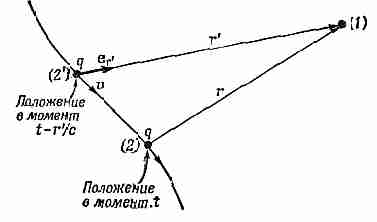
В предыдущей главе мы видели, что среди решений уравнений Максвелла есть электро­магнитные волны. Свету, радио, рентгеновским лучам и т. д. отвечают электромагнитные волны отличающиеся только длиной волны. Мы уже подробно изучали различные явления, связан­ные со светом. В этой главе мы хотим связать оба вопроса и показать, что уравнения Мак­свелла действительно могли служить основой для изучения свойств света.

Наше изучение света мы начали с того, что выписали уравнение для электрического поля, создаваемого зарядом, который мог как-то произвольно двигаться. Уравнение имело вид



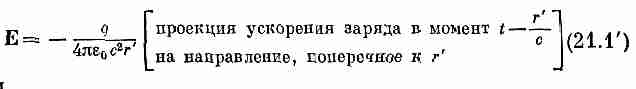
[см. гл. 28 (вып. 3), [выражение (28.3)](#прим1)].

Если заряд движется произвольным обра­зом, то электрическое поле, которое существует в некоторой точке, в *настоящий момент* за­висит только от положения и движения заряда в *более ранний* момент времени, отстающий на интервал, необходимый для того, чтобы свет, двигаясь со скоростью с, прошел расстояние r*'* от заряда до точки поля. Иными словами, если вам нужно знать электрическое поле в точке *(1)* в момент *t,* вы должны подсчитать положение *(2')* заряда и его движение в момент *(t-r'1с}* [где r*' —* расстояние до точки (1)] из положения заряда *(2')* в момент *(t—r/с).*



*Фиг. 21.1. Поля в точке (1) в момент t зависят от того положения (2'), которое заряд q занимал в момент (t — r'/с).*

Штрихи здесь напоминают вам, что r*' —* это так называемое «запаздывающее расстояние» от точки *(2')* к точке *(1),* а вовсе не теперешнее расстояние между точкой *(2) —* положением за­ряда в момент *t —* и точкой поля *(1)* (фиг. 21.1). Заметьте, что сейчас по-иному определяется *направление* единичного век­тора *еr.* В гл. 28 и 34 (вып. 3) мы уславливались, что r (и, стало быть, еr) будет показывать *на* источник. Теперь же мы следуем определению, используемому в формулировке закона Кулона, по которому r направлено *от* заряда [в точке *(2)] к* точке *(1)* поля. Единственное отличие в том, что новое r (и еr) противо­положно старому.

Мы видели также, что если скорость заряда *v* всегда много меньше *с* и если рассматриваются только точки, сильно удален­ные от заряда, так что в (21.1) существенно лишь последнее слагаемое, то поля можно также записать в виде

и

C:\1\pic\gray.jpg

Рассмотрим более детально, что дает полное уравнение (21.1). Вектор еr — это единичный вектор, направленный от «запаздывающей» точки *(2') к* точке *(1).* Тогда первое слагаемое дает то, чего следовало бы ожидать, если бы заряд в своем «запаздывающем» положении создавал кулоново поле,— это можно назвать «запаздывающим кулоновым полем». Электри­ческое поле обратно пропорционально квадрату расстояния и направлено *от* «запаздывающего» положения заряда (т. е. по вектору еr').

Но это только первое слагаемое. Остальные напоминают нам, что законы электричества *не* утверждают, что все поля, оста­ваясь, как и были, статическими, начинают просто запаздывать (а такое утверждение порой приходится слышать). К «запазды­вающему кулонову полю» надо добавить два других слагаемых.

Второе говорит, что к запаздывающему кулонову полю надо сделать «поправку», равную *быстроте изменения* запаздываю­щего кулонова поля, умноженной на r*'/с,* т. е. на само запазды­вание. Этот множитель как бы стремится скомпенсировать за­паздывание в первом. *Два* первых слагаемых соответствуют вы­числению «запаздывающего кулонова поля» и затем экстрапо­ляции его в будущее, на время r'/с, т. е. *как раз к моменту* t! Экстраполяция линейна, как если бы мы предположили, что «запаздывающее кулоново поле» будет по-прежнему изменяться со скоростью, рассчитанной для заряда в точке *(2').* Если поле меняется медленно, эффект запаздывания почти полностью сводится на нет поправочным слагаемым, и оба слагаемых вмес­те приводят к величине электрического поля, очень близкой к «мгновенному кулонову полю» заряда, находящегося в точ­ке *(2).*

Наконец, в формуле (21.1) имеется еще третье слагаемое — вторая производная единичного вектора еr'. Изучая явление света, мы по существу использовали тот факт, что вдали от за­ряда два первых слагаемых убывают как обратный квадрат расстояния и на больших расстояниях оказываются слишком слабыми по сравнению с третьим, которое убывает как 1/r. Поэтому мы сосредоточили наше внимание на последнем сла­гаемом и показали, что оно (опять-таки на больших расстоя­ниях) пропорционально компоненте ускорения заряда, попе­речной к линии зрения. (Кроме того, почти всюду ранее мы рас­сматривали только случай, когда заряды двигались нереляти­вистски. Релятивистские эффекты рассматривались только в гл. 34, вып. 3.)

Теперь нужно попробовать связать эти две вещи. У нас есть уравнения Максвелла и есть формула (21.1) для поля точечного заряда. Естественно спросить, эквивалентны ли они? Если мы сможем вывести (21.1) из уравнений Максвелла, то действи­тельно поймем связь света с электромагнетизмом. Вывод ее и есть главная цель этой главы.

Выясняется, что полного вывода мы сделать не можем — чересчур сложные математические детали не позволят нам выйти с поля боя без потерь. Но все же мы подойдем к цели до­статочно близко, так что вы легко поймете, как может быть установлена интересующая нас связь. Мы опустим лишь неко­торые математические детали. Математика этой главы может показаться некоторым из вас довольно сложной, и, возможно, вам даже станет скучно следить внимательно за выводом. Но мы все же считаем, что очень важно связать то, что вы учили раньше, с тем, что вы изучаете сейчас, или по крайней мере продемонстрировать, как эта связь может быть установлена. Если вы не забыли прежние главы, то обратите внимание на то, что всякий раз, как мы принимали некоторое высказывание за исходную точку обсуждения, мы заботливо объясняли, является ли это высказывание новым «допущением», т. е. отражает ли оно основной закон природы или же его можно в конечном счете вывести из каких-то других законов. Дух этих лекций обя­зывает нас обсудить связь менаду светом и уравнениями Мак­свелла. Может быть, вам будет кое-где и трудно — с этим уж ничего не поделаешь: другого пути не существует.

**§ 2. Сферические волны от точечного источника**

C:\1\pic\gray.jpgВ гл. 18 мы установили, что уравнения Максвелла можно решать подстановкой

(21.2)

и

C:\1\pic\gray.jpg

(21.3)

C:\1\pic\gray.jpgгде ϕ и А обязаны удовлетворять уравнениям

(21.4)

C:\1\pic\gray.jpgи

(21.5)

C:\1\pic\gray.jpgи, кроме того, условию

(21.6)

Найдем теперь решение уравнений (21.4) и (21.5). Для этого надо уметь решать уравнение

C:\1\pic\gray.jpg

(21.7)

где величина *s* (которая называется источником) известна. Ясно, что для уравнения (21.4) s соответствует ρ/ε0, a ψ—это ϕ, а для уравнения (21.5) *s* соответствует jx/ε0с2, если ψ — это *Ах,* и т. д. Но нас интересует чисто математическая задача решения (21.7) безотносительно к тому, каков физический смысл ψ и s. Там, где ρ и j равны нулю (это место называется «пустотой»), там потенциалы ϕ и *А* и поля Е и В удовлетворяют трехмерному волновому уравнению без источников; математическая форма этого уравнения такова:

C:\1\pic\gray.jpg

(21.8)

C:\1\pic\gray.jpgВ гл. 20 мы видели, что решения этого уравнения могут пред­ставлять волны разных сортов: плоские волны, бегущие в x-направлении я|;=f(t-x/с); плоские волны, бегущие вдоль *у* или вдоль *z* или в любом другом направлении; сферические

(21.9)

(Решения можно записать иначе — например в виде цилиндри­ческих волн, разбегающихся от оси.)

Мы тогда заметили, что физически формула (21.9) отно­сится не совсем к пустоте: в начале координат должны быть какие-то заряды, иначе расходящаяся волна не получилась бы. Иными словами, формула (21.9) есть решение уравнения (21.8) всюду, кроме непосредственной окрестности точки r=0, где (21.9) представляет собой решение полного уравнения (21.7), в правой части которого стоят источники. Давайте те­перь посмотрим, что это за уравнение, т. е. какого рода источ­ник s в уравнении (21.7) должен вызвать волну типа (21.9).

C:\1\pic\gray.jpgПредположим, что имеется сферическая волна (21.9) и по­глядим, во что она превращается при очень малых r. Тогда запаздыванием -r*/с* в *f(t-r*/с) можно пренебречь, и посколь­ку функция f плавная, ψ превращается в

(21.10)

C:\1\pic\gray.jpgИтак, ψ в точности похоже на кулоново поле заряда, располо­женного в начале координат. Мы знаем, что для небольшого сгустка заряда, ограниченного очень малой областью близ на­чала координат и имеющего плотность ρ,

C:\1\pic\gray.jpgгде Q=∫ρdV*.* Такой потенциал ϕ удовлетворяет уравнению

Следуя тем же расчетам, мы должны были бы сказать, что ψ из выражения (21.10) удовлетворяет уравнению

C:\1\pic\gray.jpg

(21.11)

где s связано с f формулой

C:\1\pic\gray.jpg

при

C:\1\pic\gray.jpg

Единственная разница в том, что в общем случае *s,* а, стало быть, и *S может* оказаться функцией времени.

Далее очень важно то, что если ψ удовлетворяет (21.11) при малых r*,* то оно удовлетворяет также и (21.7). По мере приближения к началу координат зависимость ψот r типа 1/r приводит к тому, что пространственные производные ста­новятся очень большими. А производные по времени остаются теми же. [Это просто производные *f(t)* по времени.] Так что, когда r стремится к нулю, множителем *d2ψ/dt2* в уравнении (21.7) по сравнению с ∇2ψ можно пренебречь, и (21.7) становится эквивалентным уравнению (21.11).

C:\1\pic\gray.jpgПодытоживая, можно сказать, что если функция источника *s(t)* из уравнения (21.7) сосредоточена в начале координат и ее общая величина равна

(21.12)

C:\1\pic\gray.jpgто решение уравнения (21.7) имеет вид

(21.13)

Влияние слагаемого с *d2ψ/dt2* в (21.7) сказывается лишь на появ­лении запаздывания *(t-r/с)* в потенциале кулонова типа.

**§ 3. Общее peшeниe уравнений Максвелла**

Мы нашли решение уравнения (21.7) для «точечного» источ­ника. Теперь встает новый вопрос: Каков вид решения для рас­средоточенного источника? Ну, это решить легко; всякий источ­ник *s(x, у, z, t)* можно считать состоящим из суммы многих «точечных» источников, расположенных поодиночке в каждом элементе объема *dV* и имеющих силу *s(x, у, z, t)dV.* Поскольку (21.7) линейно, суммарное поле представляет собой суперпози­цию полей от всех таких элементов источника.

C:\1\pic\gray.jpgИспользуя результаты предыдущего параграфа [см. (21.13)], мы получим, что в момент *t* поле dψв точке *(х1, y*1, z1) [или, короче, в точке (1)], создаваемое элементом источника *sdV* в точке *(х2> у2, z2)* [или, короче, в точке (2)],выражается форму­лой

C:\1\pic\gray.jpgгде r*12 —* расстояние от *(2)* до (1). Сложение вкладов от всех частей источника означает, конечно, интегрирование по всей области, где s≠0, так что мы имеем

(21.14)

Иначе говоря, поле в точке *(1)* в момент времени *t* представляет собой сумму всех сферических волн, испускаемых в момент *t-r*12/c всеми элементами источника, расположенного в точке *(2).* Выражение (21.14) является решением нашего волнового уравнения для любой системы источников.

C:\1\pic\gray.jpgТеперь мы видим, как получать общее решение уравнений Максвелла. Если подразумевать под ψскалярный потенциал ϕ, то функция источника s превращается в ρ/ε0. А можно считать, что ψ представляет одну из трех компонент векторного потен­циала А; тогда s означает соответствующую компоненту j/ε0c2. Стало быть, если во всех точках известна плотность нарядов ρ*(х, у, z, t)* и плотность тока j*(х, у, z, t),* то решения уравнении (21.4) и (21.5) можно выписать немедленно:

C:\1\pic\gray.jpg(21.15)

(21.16)

Поля Е и В получатся дифференцированием потенциалов [используются выражения (21.2) и (21.3)]. Кстати, можно про­верить явно, что ϕ и А, полученные из (21.15) и (21.16), дей­ствительно удовлетворяют равенству (21.6).

Мы решили уравнения Максвелла. В любых обстоятель­ствах, если только заданы токи и заряды, из этих интегралов можно определить потенциалы, а затем, продифференцировав их, получить поля. Тем самым с теорией Максвелла покончено. И это позволяет нам также замкнуть круг и вернуться к нашей теории света, потому что достаточно только подсчитать элек­трическое поле движущегося заряда, чтобы связать все это с нашей прежней теорией света. Все, что нам остается сделать,— это взять движущийся заряд, вычислить из этих интегралов его потенциал и затем из -∇ϕ-*dA/dt,* дифференцируя, найти Е. Мы должны получить формулу (21.1). Работы придется проде­лать много, но принцип ясен.

Итак, мы дошли до центра электромагнитной вселенной. У нас в руках полная теория электричества, магнетизма и света, полное описание полей, создаваемых движущимися зарядами, и многое, многое другое. Все сооружение, воздвигнутое Максвел­лом, во всей его полноте, красе и мощи сейчас перед нами. Это, пожалуй, одно из величайших свершений физики. И чтобы напомнить о его важности, мы переписываем все формулы вместе и обводим их красивой рамкой.



**§ 4. Поля колеблющегося диполя**

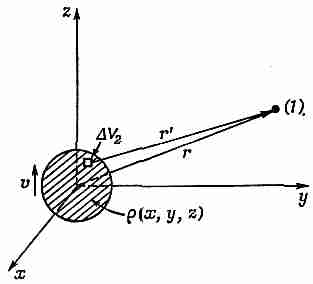
Мы пока еще не провели обещанного вывода формулы (21.1) для электрического поля движущегося точечного заряда. Даже зная то, что мы уже знаем, этот вывод все равно проделать не­легко. Нам не удалось обнаружить формулы (21.1) нигде, ни в каких книжках и статьях (кроме первых выпусков [этих лек­ций](#прим2)). Это свидетельствует о том, что вывод ее не прост. (Поля движущегося заряда записывались неоднократно и в других видах, которые все, конечно, эквивалентны.) Мы ограничимся поэтому здесь тем, что просто покажем на нескольких приме­рах, что (21.15) и (21.16) приводят к тем же результатам, что и (21.1). Первым делом мы покажем, что при том единственном условии, что движение заряженной частицы является нереля­тивистским, (21.1) приводит к правильной величине полей. (Уже этот частный случай покрывает 90% всего того, что было сказано о явлении света.)

Рассмотрим такую ситуацию, когда имеется сгусток заря­дов, каким-то образом перемещающийся в небольшой обла­сти; требуется найти создаваемые им где-то вдалеке от этого места поля.

C:\1\pic\gray.jpgМожно поставить вопрос и иначе: мы найдем поле на произвольном расстоянии от точечного заряда, который почти незаметно колеблется вверх и вниз. Поскольку свет обычно испускают такие нейтральные тела, как атомы, то мы будем считать, что наш колеблющийся заряд *q* расположен вблизи неподвижного, равного по величине, но противоположного по знаку заряда. Если расстояние между центрами зарядов рав­но d, то у зарядов появится дипольный момент **p=qd,** который мы будем считать функцией времени. Следует ожидать, что поблизости от зарядов запаздыванием поля можно будет прене­бречь; электрическое поле будет в точности таким же, как и то, которое получалось раньше для электростатического диполя [но, конечно, с мгновенным дипольным моментом *p(t)].* Однако при большом удалении в формуле для поля должно появиться добавочное слагаемое, которое меняется как 1/r и зависит от того, каково ускорение заряда в направлении, поперечном к лучу зрения. Посмотрим, получится ли у нас этот результат. Начнем с вычисления векторного потенциала А при помощи (2.16). Пусть плотность зарядов в сгустке есть ρ(х, *у, z)* и весь он движется все время со скоростью v. Тогда плотность тока *j(x, у,* z) равна vρ(x,y, *z).* Удобно систему координат располо­жить так, чтобы ось *z* была направлена по v; тогда геометрия нашей задачи изобразится так, как показано на фиг. 21.2. Нас интересует интеграл

(21.17)

Если размеры заряда-сгустка на самом деле намного мень­ше, чем r12, то r12 в знаменателе можно положить равным r (расстоянию от центра сгустка) и вынести rза знак интеграла. Кроме того, мы собираемся положить и в числителе r12=r, хотя это и не совсем верно. А неверно это потому, что на самом деле, скажем, полагается брать j в верхней части сгустка совсем не в тот момент, когда в нижней, а немного в другое время.



*Фиг. 21.2. Потенциалы в точке (1) даются интегралами от плот­ности заряда* ρ.

C:\1\pic\gray.jpgПо­лагая r12=r в *j(t-*r12/с), мы вычисляем плотность тока для всего сгустка в одно и то же время *(t-r/с).* Это приближение годится лишь тогда, когда скорость *v* заряда много меньше *с.* Мы, стало быть, ведем расчет в нерелятивистском случае. После замены j на ρv интеграл (21.17) превращается в

Раз скорость всех зарядов в сгустке одна и та же, этот инте­грал просто равен v/r, умноженному на общий заряд *q.* Но *qv —* это как раз *dp/dt* (скорость изменения дипольного момента), только надо ее, конечно, определять в более раннее время *(t-r/с).* Запишем эту величину так: *p(t-r/с).* Итак, мы полу­чаем для векторного потенциала

C:\1\pic\gray.jpg

Мы узнали, что ток в меняющемся диполе создает векторный потенциал в форме сферических волн, источник которых обла­дает силой р’/4πε0с2.

Теперь из B=∇XA можно получить магнитное поле. По­скольку р’ направлен по оси *z,* у А есть только z-компонента; в роторе остаются только две ненулевые производные. Значит, *Вх=дАг/ду* и *В*=—*дАz/дх.* Поглядим сперва на *Вх:*

C:\1\pic\gray.jpg

(21.19)

Чтобы продифференцировать, вспомним, что r=√(x:2+y2+z2), так что

C:\1\pic\gray.jpg

Но мы помним, что *дr/ду=y/r;* значит, первое слагаемое даст

C:\1\pic\gray.jpg

(21.21)

что убывает как 1/r2, т. е. как поле статического диполя (потому что в данном направлении *у/r* постоянно).

Второе слагаемое в (21.20) приводит к новому эффекту. Если провести в нем дифференцирование, то получится

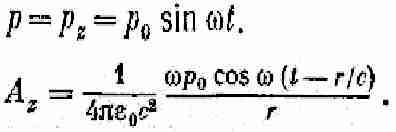
C:\1\pic\gray.jpg

(21.22)

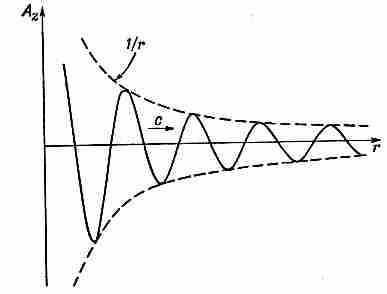
где *р” —* просто вторая производная *р* по *t.* Вот это-то получаю­щееся от дифференцирования числителя слагаемое и ответственно за излучение. Во-первых, оно описывает поле, убываю­щее на расстоянии как *i/r,* во-вторых, зависит от *ускорения* заряда. Теперь вам должно быть ясно, как мы собираемся по­лучить формулу типа (21.1'), описывающую световое излучение.

Явление это настолько интересно и важно, что стоит немного подробнее разобраться в том, откуда берется это «радиацион­ное» слагаемое. Мы начинали с выражения (21.18), зависящего от rкак 1*/r* и тем самым похожего на кулонов потенциал (если не обращать внимания на запаздывающий множитель в числи­теле). Почему же когда мы, желая получить поле, дифферен­цируем по пространственным координатам, то не получаем просто поля вида 1/r2 (конечно, с соответствующей временной задержкой)?

А вот почему. Представьте, что диполь приведен в колеба­тельное движение вверх и вниз. Тогда



Если начертить график зависимости *Аr* от rв каждый данный момент, то получится кривая, показанная на фиг. 21.3. Амплитуда в пиках убывает как 1/r, но, кроме того, еще имеются пространственные колебания, которые ограничены огибающей вида *1/r.* Пространственные производные в формуле пропор­циональны *наклону* кривой. Из фиг. 21.3 видно, что встречаются намного более крутые наклоны, чем наклон самой кривой 1/г. Очевидно, что при данной частоте наклоны в пиках пропорцио­нальны амплитуде волны, меняющейся как 1/r. Тем самым объяс­няется степень спадания радиационного слагаемого с расстоя­нием.

Все это получается оттого, *что временные* вариации в источ­нике превращаются в *пространственные* вариации, когда волны начинают разбегаться в стороны, магнитные же поля зависят от *пространственных* производных потенциала.

*Фиг. 21.3. Зависимость ве­личины* А *от r в момент t для сферической волны от колеблющегося диполя.*

C:\1\pic\gray.jpgТеперь возвратимся назад и закончим наши расчеты магнит­ного поля. Для *Вх* мы получили (21.21) и (21.22). Поэтому

(21.1')

С помощью точно таких же выкладок мы придем к

C:\1\pic\gray.jpg

C:\1\pic\gray.jpgИ все это можно объединить в одну красивую векторную фор­мулу:

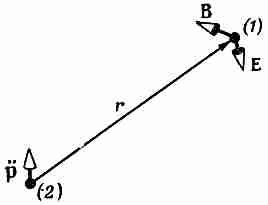
(21.23)

А теперь взгляните на нее. Прежде всего на больших удале­ниях (когда rвелико) следует принимать в расчет только р. Направление В дается вектором **pXr,** перпендикулярным и к радиусу r, и к ускорению (фиг. 21.4). Все сходится с тем, что получилось бы из формулы (21.1').

C:\1\pic\gray.jpgТеперь посмотрите (к этому мы не привыкли) на то, что про­исходит поблизости от заряда. В гл. 14, § 7 (вып. 5) мы вывели закон Био и Савара для магнитного поля элемента тока. Мы нашли, что элемент тока j*dV* привносит в магнитное поле сле­дующий вклад:

(21.24)

Вы видите, что эта формула с виду очень похожа на первое слагаемое в (21.23), если только вспомнить, что р — это ток. Но разница все же есть. В (21.23) ток надо подсчитывать в момент *(t-r/с),* а в (21.24) этого нет. На самом деле, однако, (21.24) для малых r все еще годится, потому что *второе* слагае­мое в (21.23) стремится уничтожить эффект запаздывания из первого слагаемого. *Вместе* оба они приводят при малых r *к* результату, очень близкому к (2124).



*Фиг. 21.4. Поля излучения* В *и* Е *колеблющегося диполя.*

C:\1\pic\gray.jpgВ этом можно убедиться следующим образом. Когда rмало, *(t-r/с)* не очень отличается от *t,* и в (21.23) скобки можно раз­ложить в ряд Тэйлора. Первый член разложения дает

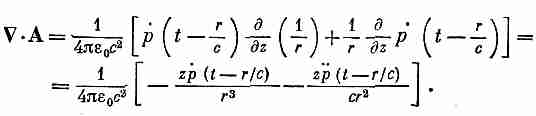
n в том же порядке по r*/с*

C:\1\pic\gray.jpg

Если их сложить, члены с р уничтожатся и слева останется *незапаздывающий* ток р, т. е. р(t) плюс члены порядка (r/с)2 и выше [например, 1/2(r/с)2Р"']. Эти члены при достаточно малых r (малых настолько, что за время r*/с* ток р заметно не меняется) будут очень малы.

Стало быть, (21.23) приводит к полям, очень похожим на те, которые дает теория с мгновенным действием, гораздо более по­хожим на них, чем на поля теории с мгновенным действием и с задержкой; эффекты задержки первого порядка компенсируют­ся вторым членом. Статические формулы очень точны, намного более точны, чем вам могло бы показаться. Конечно, компенса­ция чувствуется только вблизи от заряда. Для далеких точек эти поправки уже ничего не спасают, потому что временное за­паздывание приводит к очень большим эффектам и в конечном счете к важному члену *1/r —* к эффекту излучения.

Перед нами все еще стоит задача расчета электрического поля и доказательства того, что оно совпадает с (21.1'). Правда, уже чувствуется, что на больших расстояниях ответ получится такой, как надо. Мы знаем, что вдали от источников, где воз­никает распространяющаяся волна, Е перпендикулярно к В (и к r), как на фиг. 21.4, и что с В=Е. Значит, Е пропорциональ­но ускорению р", как и предсказывалось формулой (21.1').

Чтобы получить электрическое поле на всех возможных рас­стояниях, нужно найти электростатический потенциал. Когда мы подсчитывали интеграл токов для А, желая получить (21.18), то сделали приближение: мы пренебрегли малозамет­ным изменением r *в* члене с запаздыванием. Для электростати­ческого потенциала этого делать нельзя, потому что тогда у нас получилось бы *{/r,* умноженное на интеграл от плотности за­ряда, т. е. на константу. Такое приближение чересчур грубо. Надо обратиться к высшим порядкам. И вместо того, чтобы пу­таться в этих прямых расчетах высших приближений, можно поступить иначе — определить скалярный потенциал из равен­ства (21.6), используя уже найденное значение векторного по­тенциала. Дивергенция А в этом случае просто равна *dAJdz,* поскольку *Ах* и A*y* тождественно равны нулю. Дифференцируя точно так же, как это делалось выше при вычислении В, получаем

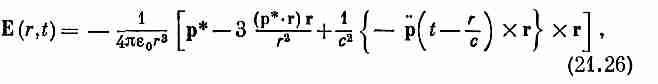
Или в векторных обозначениях

C:\1\pic\gray.jpg

C:\1\pic\gray.jpgИз равенства (21.6) получается уравнение для ϕ:

C:\1\pic\gray.jpgИнтегрирование по *t* просто убирает надо всеми *р* по одной точке:

C:\1\pic\gray.jpg(Постоянная интегрирования отвечала бы некому наложенному статическому полю, которое, конечно, может существовать, но мы считаем, что у выбранного нами колеблющегося диполя ста­тического поля нет.) Теперь мы можем из

найти электрическое поле Е. После утомительных (хоть и пря­мых) выкладок [при этом нужно помнить, что *p(t-r/с)* и его производные по времени зависят от *х, у* и *z* через запаздывание r*/с]* мы получаем

C:\1\pic\gray.jpgгде

(21.27)

Это выглядит довольно сложно, но интерпретируется просто. Вектор р\* — это дипольный момент с запаздыванием и с «по­правкой» на запаздывание, так что два члена с р\* в (21.26) при малых r дают просто статическое поле диполя [см. гл. 6 (вып. 5), выражение (6.14)]. Когда rвелико, то член с р преобладает над остальными, и электрическое поле пропорционально ускорению зарядов в направлении поперек r и само направлено вдоль

проекции р на плоскость, перпендикулярную к *r.*

Этот результат согласуется с тем, что мы получили бы, применяя формулу (21.1'). Конечно, эта формула — более об­щая; она годится для любого движения, а не только для мало­заметных движений, для которых запаздывание r*/с* в пределах всего источника можно считать постоянным [как (21.26)]. Во всяком случае, теперь мы укрепили столбами все наше преж­нее изложение свойств света, за исключением лишь некоторых вопросов из гл. 34 (вып. 3), которые связаны с последней частью выражения (21.26). Мы можем теперь перейти к получению поля быстродвижущихся зарядов. Это приведет нас к релятивист­ским эффектам [гл. 34 (вып. 3)].

**§5. Потенциалы движущегося заряда; общее решение Льенара и Вихерта**

В предыдущем параграфе мы пошли на упрощение при вы­числении интеграла для А, рассматривая только небольшие скорости. Но при этом мы шли таким путем, которым легко можно прийти и к новым выводам. Поэтому сейчас мы заново предпри­мем расчет потенциалов точечного заряда, движущегося уже, как ему захочется (даже с релятивистской скоростью). Как только мы получим этот результат, у нас в руках окажутся электромагнитные свойства электрических зарядов во всей их полноте. Даже формулу (21.1') можно будет тогда легко полу­чить, взяв только нужные производные. И наш рассказ удастся, наконец, довести до конца. Итак, запаситесь терпе­нием!

Попробуем подсчитать в точке *(х1, у1,* z1) скалярный по­тенциал ϕ(1), создаваемый *точечным* зарядом (вроде электро­на), движущимся любым, каким угодно образом. Под «точеч­ным» зарядом подразумевается очень маленький заряженный шарик, такой маленький, как только можно себе представить, с плотностью заряда *р(х, у, z).* Потенциал ϕ можно найти из (21.15):

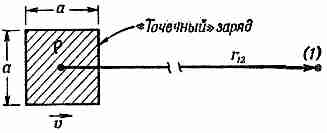
C:\1\pic\gray.jpg

(21.28)

На первый взгляд кажется (и почти все так и подумают), что ответ состоит в том, что интеграл от ρ по такому «точечному» заряду равен просто общему заряду *q,* т. е. что

C:\1\pic\gray.jpg

Через *r'12* здесь обозначен радиус-вектор от заряда в точке *(2)* к точке (7), измеренный в более раннее время *(t—r12/c).* Эта формула ошибочна.



*Фиг. 21.5. «Точечный» заряд (рассматриваемый как неболь­шое распределение зарядов в форме куба), движущийся со скоростью v к точке (1).*

Правильный ответ такой:

C:\1\pic\gray.jpg

(21.29)

где *vr' —* компонента скорости заряда, параллельная r12, т. е. направленная к точке *(1).* Сейчас я объясню, почему это так. Чтобы легче было следить за моими доводами, я сперва проведу расчет для «точечного» заряда в форме небольшого заряженного кубика, который движется к точке *(1)* со ско­ростью v(фиг. 21:5). Сторона куба будет а, это число пусть будет много меньше r12 [расстояния от центра заряда до точки *(1)].*

Чтобы оценить величину интеграла (21.28), мы вернемся к основному определению: запишем его в виде суммы

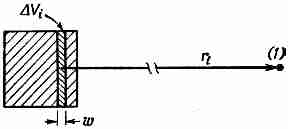
C:\1\pic\gray.jpg

(21.30)

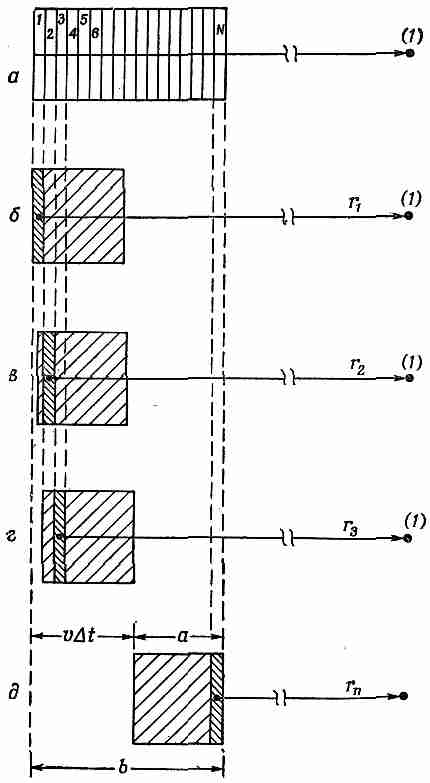
где *ri —* расстояние от точки *(1) к* i-му элементу объема ΔVi, а ρi-— плотность заряда в ΔVi в момент *ti=(t-ri/с).* Поскольку все ri>>*а,* удобно будет выбрать все ΔVi в виде тонких прямо­угольных ломтиков, перпендикулярных к r12 (фиг. 21.6).

Предположим, что мы начали с того, что взяли элементы объема ΔVi некоторой толщины *w,* много меньшей *а.*

Отдельные элементы объема будут выглядеть так, как по­казано на фиг. 21.7, *а.* Их нарисовано гораздо больше, чем нужно, чтобы закрыть весь заряд. А сам заряд *не показан,* и по весьма существенной причине. Где его нужно нарисовать? Ведь для каждого элемента объема ΔVi надо брать ρ в свой момент *t~(t-r/с).* Но раз заряд *движется,* то *для каждого элемента объема* ΔVi *он окажется в другом месте!*

Начнем, скажем, с элемента объема *1* на фиг. 21.7, *а,* выбранного так, чтобы в момент *tl = (t-r1/с)* «задняя» грань заряда пришлась на ΔVi (фиг, 21.7, б).

*Фиг. 21.6, Элемент объема* Δ*Vi, используемый для вычисления потенциалов.*



*Фиг. 21.7. Интегрирование ρ(t-r'/c)dV для движущегося заряда.*

Тогда, вычисляя ρ2ΔV2, нужно взять положение заряда в несколько более позд­нее время *t2=(t- r2/c)* и заряд к этому времени сместится в по­ложение, показанное на фиг. 21.7, *в.* Так же будет с ΔV3, ΔV4 и т. д. Вот теперь можно подсчитывать сумму.

Толщина каждого ΔVi- равна *w,* а объем wa2. Поэтому каж­дый элемент объема, накладывающийся на распределение заряда, содержит в себе заряд wa2ρ, где ρ — плотность заряда внутри куба (мы считаем ее однородной). Когда расстояние от заряда до точки *(1)* велико, то можно все ri в знаменателях по­ложить равными некоторому среднему значению, скажем, взятому с учетом запаздывания положению r*'* центра куба. Сумма (21.30) превращается в

где ΔVN—тот последний элемент ΔVi, который еще накла­дывается на распределение зарядов (см. фиг. 21.7, *д).* Сумма тем самым равна

C:\1\pic\gray.jpg

C:\1\pic\gray.jpgНо ρa3 — просто общий заряд *q, a Nw—*длина b*,* показанная на фиг. 21.7, *д.* Получается

(21.31)

C:\1\pic\gray.jpgА чему же равно b? Это длина куба зарядов, увеличенная на расстояние, пройденное зарядом за время от *t1=(t-r1/с)* до *tN=(t—rN*/с). Это расстояние, пройденное зарядом за время

C:\1\pic\gray.jpgА поскольку скорость заряда равна *v,* то пройденное рас­стояние равно *vΔt = vb/c.* Но длина b *—* само это расстояние плюс a:

Отсюда

C:\1\pic\gray.jpg

C:\1\pic\gray.jpgЗдесь, конечно, под *v* подразумевается скорость в «запазды­вающий» момент *t'* = *(t-r'/с);* это можно указать, записав [1—*v/c]зап;* тогда уравнение (21.23) для потенциала прини­мает вид

Это согласуется с тем, что было предположено в (21.29). Поя­вился поправочный множитель. Он появился потому, что в то время, как наш интеграл «проносится над зарядом», сам заряд движется. Когда заряд движется к точке *(1),* его вклад в ин­теграл увеличивается в b*/а* раз. Поэтому правильное значение интеграла равно *q/r',* умноженному на b*/а,* т.е. на 1/[1—v/c]зan.

C:\1\pic\gray.jpgЕсли скорость заряда направлена не к точке наблюдения *(1),* то легко видеть, что важна только *составляющая* его скорости в направлении к точке *(1).* Если обозначить эту составляющую скорости через *vr,* то поправочный множитель запишется в виде 1/[1-vr/с]зап. Кроме того, проделанный нами анализ в равной степени проходит для распределения заряда *любой* формы (это не обязательно должен быть куб). Наконец, поскольку «раз­мер» *а* заряда не вошел в окончательный итог, то тот же резуль­тат получится, если заряд стянется до любых размеров, вплоть до точки. Общий результат состоит в том, что скалярный потен­циал точечного заряда, движущегося с произвольной скоростью,

(21.32)

Это уравнение часто пишут в эквивалентном виде:

C:\1\pic\gray.jpg

(21.33)

где r — вектор, соединяющий заряд с той точкой *(1), в* кото­рой вычисляется потенциал ϕ, а все величины в скобках надо вычислять в «запаздывающий» момент времени *t'=(t—r'/c).*

То же самое получается и тогда, когда по (21.16) вычисляют А для точечного заряда. Плотность тока равна ρv, а интеграл от ρ — тот же, что и в ϕ. Векторный потенциал равен

C:\1\pic\gray.jpg

(21.34)

Потенциалы точечного заряда в этой форме были впервые получены Льенаром и Вихертом. Их так и называют: *потенциалы Льенара — Вихерта.*

Чтобы замкнуть круг и вернуться к формуле (21.1), теперь нужно только подсчитать Е и В из этих потенциалов (при помо­щи B=∇XA и Е=-∇ϕ-*dA/dt).* Теперь остается одна арифме­тика. Впрочем, арифметика эта довольно запутанна, так что мы не будем приводить здесь детали счета. Придется поверить мне на слово, что формула (21.1) эквивалентна выведенным нами потенциалам Льенара — Вихерта.

***\*Если у вас достаточно времени и вам не жаль бумаги, то попытай­тесь проделать это самостоятельно. Вот вам парочка советов: во-первых, не забывайте, что производные r' довольно запутанны, ведь они суть функции от t'! Во-вторых, не пытайтесь вывести формулу (21.1); лучше проделайте в ней все дифференцирования и затем сопоставьте то, что у вас получится, с выражением для Е, полученным из потенциалов (21.33) и (21.34).***

§ 6. Потенциалы заряда, движущегося с постоянной скоростью; формула Лоренца

Применим теперь потенциалы Льенара — Вихерта к случаю заряда, движущегося по прямой с постоянной скоростью, и вычислим поле этого заряда. Позже мы повторим этот вывод, используя уже принцип относительности. Мы знаем величину потенциалов в той системе, в которой заряд покоится. Когда заряд движется, то все получается простым релятивистским преобразованием от одной системы к другой. Но теория отно­сительности ведет свое начало от теории электричества и магне­тизма. Формулы преобразований Лоренца [см. гл. 15 (вып. 2)]— это открытия, сделанные Лоренцем при исследовании уравне­ний электричества и магнетизма. И для того чтобы вы понимали, откуда все пошло, я хочу показать вам, что уравнения Максвелла действительно приводят к преобразованиям Лоренца. Я начну с вычисления потенциала равномерно движущегося заряда прямо из электродинамики, из уравнений Максвелла. Мы уже показали, что уравнения Максвелла приводят к потен­циалу, полученному в предыдущем параграфе. Стало быть, пользуясь этими потенциалами, мы используем тем самым тео­рию Максвелла.

C:\1\pic\gray.jpgПусть имеется заряд, движущийся вдоль оси х со скоростью v (фиг. 21.8). Нас интересуют потенциалы в точке Р(х, у, z). Если (=0 — момент, в который заряд проходит через начало координат, то в момент t заряд окажется в точке x—vt, y=z=0. А нам нужно знать его положение с учетом запаздывания, т. е. положение в момент

(21.35)

где r' — расстояние от заряда до точки *Р* в этот *запаздываю­щий момент.* В это более раннее время *t'* заряд был в *x=vt',* так что

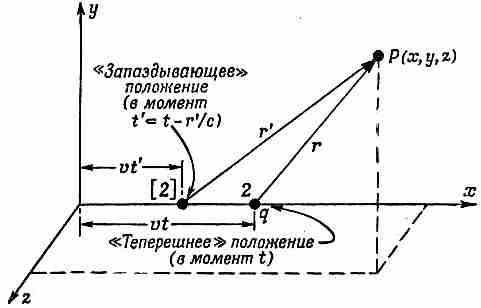
C:\1\pic\gray.jpg

(21.36)

Чтобы найти r' или *t',* это уравнение надо сопоставить с (21.35). Исключим сперва r', решив (21.35) относительно r*'* и подставив в (21.36). Возвысив затем обе части в квадрат,

C:\1\pic\gray.jpg

C:\1\pic\gray.jpgт. е. квадратное уравнение относительно t'*.* Раскрыв скобки и расположив члены по степеням *t',* получим



*Фиг. 21.8. Определение потенциала в точке Р заряда, движущегося равномерно вдоль оси х.*

Отсюда найдем

C:\1\pic\gray.jpg

Чтобы получить r', надо это t' подставить в

C:\1\pic\gray.jpg

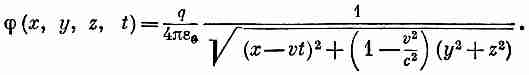
C:\1\pic\gray.jpgТеперь мы уже можем найти ϕ из выражения (21.33), имеющего вид

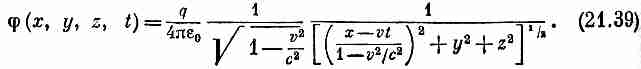
(21.38)

(ввиду того, что *v* постоянно).

Составляющая v в направлении r' равна *v(x-vt')/r',* так что v•r' просто равно *v(x-vt'),* а весь знаменатель равен

C:\1\pic\gray.jpg

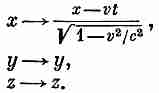
Подставляя (1-*v2/c2)t'* из (21.37), получаем

Это уравнение становится более понятным, если переписать его в виде

Векторный потенциал А — это такое же выражение, но с до­бавочным множителем v/c2:

C:\1\pic\gray.jpg

C:\1\pic\gray.jpgВ выражении (21.39) со всей ясностью предстает перед вами начало преобразований Лоренца. Если бы заряд находился в начале координат в своей собственной системе покоя, то его потенциал имел бы вид

А мы смотрим на него из движущейся системы координат, и нам кажется, что координаты следует преобразовать с помощью формул

Это обычное преобразование Лоренца. Лоренц вывел его тем же самым способом, каким пользовались и мы.

Но что можно сказать о добавочном множителе 1/√(1-v2/с2), который появился перед дробью в (21.39)? И кроме того, как появляется векторный потенциал А, если он в системе покоя частицы повсюду равен нулю? Мы вскоре покажем, что А и ϕ *вместе* составляют четырехвектор, подобно импульсу р и полной энергии *U* частицы. Добавка 1/√(1—v2/c2) в (21.39)—это тот самый множитель, который появляется всегда, когда пре­образуют компоненты четырехвектора, так же как плотность заряда ρ преобразуется в ρ/√(1-v2/c2). Собственно из формул (21.4) и (21.5) почти очевидно, что А и ϕ суть компоненты одного четырехвектора, потому что в гл. 13 (вып. 5) уже было пока­зано, что j и ρ — компоненты четырехвектора.

Позднее мы более подробно разберем относительность в электродинамике; здесь мы хотели только показать, как естест­венно уравнения Максвелла приводят к преобразованиям Лоренца. Поэтому не надо удивляться, узнав, что законы электричества и магнетизма уже вполне пригодны и для теории относительности Эйнштейна. Их не нужно даже как-то особо подгонять, как это приходилось делать с ньютоновой механи­кой.

***\* С обратным знаком. См. дальше.— Прим. ред.***

***\*Формула была выведена Р. Фейнманом в 1950 г. и приводится иног­да в лекциях как удобный способ расчета синхротронного излучения***.

***Глава 22***

**ЦЕПИ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА**

[**§ 1. Импе****дансы**](#a1)

[**§ 2. Генера****торы**](#a2)

[**§ 3. Сети** **идеальных элементов; правила Кирхгофа**](#a3)

[**S 4. Эквива****лентные контуры**](#a4)

[**§ 5. Эне****ргия**](#a5)

[**§ 6. Лестн****ичная сеть**](#a6)

[**§ 7. Фил****ьтры**](#a7)

[**§ 8. Други****е элементы цепи**](#a8)

**Повторить*:* гл.2 (вып. 2) «Алгебра»; гл. 23 (вып. 2) «Резонанс»;**

**гл. 25 (вып. 2) «Линейные системы и обзор»**

**§ 1. Импедансы**

В основном наши усилия при чтении этих лекций были направлены на то, чтобы по­лучить полные уравнения Максвелла. В преды­дущих двух главах мы обсудили следствия этих уравнений. Выяснилось, что они содержат объяснение всех статических явлений, которые мы изучали раньше, и явлений электромагнит­ных волн и света — вопроса, подробно изучав­шегося в самом начале нашего курса. Урав­нения Максвелла дают и то и другое, смотря по тому, где эти поля вычисляются: побли­зости от токов и зарядов или же вдали от них. Есть и промежуточная область, но о ней ничего интересного сказать нельзя; там никаких осо­бых явлений не происходит.

Но в электромагнетизме остается еще не­сколько вопросов, которые стоит осветить. Надо будет обсудить вопрос связи относитель­ности и уравнений Максвелла, т. е. выяснить, что произойдет, если на уравнения Максвелла посмотреть из движущейся системы координат. Важен еще и вопрос о сохранении энергии в электромагнитных системах. Кроме того, существует обширная область электромагнит­ных свойств материалов; до сих пор мы рас­сматривали только электромагнитные поля в пустом пространстве, если не считать изучения свойств диэлектриков. Да и при изучении света все еще оставалось несколько вопросов, которые хотелось бы рассмотреть еще раз с точки зре­ния уравнений поля.

В частности, надо бы еще раз вернуться к вопросу о показателе преломления (особенно у плотных веществ). Наконец, интересны яв­ления, связанные с волнами, заключенными внутри ограниченной области пространства. Мы кратко косну­лись этой проблемы, когда изучали звуковые волны. Но урав­нения Максвелла тоже приводят к решениям, которые пред­ставляют волны электрических и магнитных полей, замкнутые в некотором объеме. В одной из последующих глав мы рас­смотрим этот вопрос, имеющий важные технические примене­ния. И чтобы подойти к нему, мы начнем с того, что изложим свойства электрических цепей при низких частотах. После этого мы сможем сравнить такие системы, когда к уравнениям Максвелла применимо почти статическое приближение, и системы, в которых преобладают высокочастотные эффекты.

Итак, снизойдем с величественных и труднодоступных высот последних нескольких глав и обратим свой взор на сравнительно низменную задачу — задачу об электрических цепях. Впрочем, мы убедимся в том, что даже столь мирские дела оказываются весьма запутанными, если в них вникнуть достаточно глубоко.

В гл. 23 и 25 (вып. 2) мы уже обсуждали некоторые свойства электрических цепей (контуров). Теперь мы повторим часть из­ложенного там материала, но более подробно. Мы по-прежнему будем иметь дело с линейными системами и с напряжениями и токами, которые меняются синусоидально; поэтому мы можем представить все напряжения и токи в виде комплексных чисел, пользуясь экспоненциальными обозначениями, введенными в гл. 22 (вып. 2). Так, меняющееся во времени напряжение *V(t)* будет записываться в виде

(22.1)

где*—* комплексное число, не зависящее от *t.* При этом, ко­нечно, подразумевается, что настоящее переменное по времени напряжение *V(t)* представляется *действительной частью* комп­лексной функции в правой части уравнения.

Подобным же образом и все другие меняющиеся во времени величины будут считаться изменяющимися синусоидально с той же частотой ω. Мы будем писать

(22.2)

и т. д.

Большей частью мы будем писать уравнения, пользуясь обозначениями V, I, *ε, ...*

(вместо...), помня при этом, что они изменяются со временем всегда так, как в (22.2).

В прежних наших рассуждениях об электрических цепях мы полагали, что такие вещи, как индуктивность, емкость и со­противление, вам знакомы. Сейчас мы немного подробнее объясним, что понимают под этими идеализированными эле­ментами схем. Начнем с индуктивности.

*Фиг. 22.1. Индуктивность.*

Индуктивность — это навитая в несколько рядов проволока в форме катушки, два конца которой выведены к зажимам на некотором расстоянии от катушки (фиг. 22.1). Предположим, что магнитное поле, создаваемое токами в катушке, не очень рас­пространяется на все пространство и не воздействует на другие части цепи. Обычно этого добиваются, придав катушке форму лепешки или намотав ее на подходящий железный сердечник (это сжимает магнитное поле); можно еще поместить катушку внутрь металлической коробочки: схематически это показано на фиг. 22.1. В любом случае предполагается, что во внешней области у зажимов *а* и *b* магнитным полем можно пренебречь. Кроме того, мы будем считать, что электрическое сопротивление проводов в катушке можно не учитывать. И наконец, полагают, что можно пренебречь и электрическим зарядом, возникающим на поверхности провода, когда создаются электрические поля.

С учетом всех этих приближений и возникает то, что назы­вают «идеальной» индуктивностью. (Позже мы вернемся к этому пункту и поговорим о том, что бывает в реальных индуктивностях.) Про идеальную индуктивность говорят, что напряжение на ее зажимах равно *L(dl/dt).* Почему? Когда через индуктив­ность идет ток, то внутри катушки создается магнитное поле, пропорциональное силе тока. Если ток во времени меняется, то меняется и магнитное поле. Вообще говоря, ротор Е равен —*dB/dt*; можно сказать и по-другому: контурный интеграл от Е по любому замкнутому пути равен (с минусом) быстроте изме­нения потока В через контур. Представьте теперь себе следую­щий путь: начинается он на зажиме *а* и тянется вдоль катушки (оставаясь все время внутри провода) к зажиму b*;* затем воз­вращается от зажима b к а по воздуху в пространстве вне ка­тушки. Контурный интеграл от Е по этому замкнутому пути можно записать в виде суммы двух частей:

(22.3)

Как мы уже выяснили раньше, внутри идеального проводника электрических полей существовать не может. (Малейшие поля вызвали бы бесконечно большие токи.) Поэтому интеграл от зажима *а* до bчерез катушку равен нулю. Весь вклад в кон­турный интеграл от Е приходится на путь снаружи индуктив­ности, от зажима bк зажиму *а.* А так как было предположено, что в пространстве вне «коробки» нет никаких магнитных полей, то эта часть интеграла не зависит от выбора пути. Значит, можно определить понятие потенциала обоих зажимов. Разность этих двух потенциалов и есть то, что называют напряжением V, так что

C:\1\pic\gray.jpgПолный интеграл по контуру — это то, что мы раньше назы­вали э. д. с. ε*.* Он, естественно, равен скорости изменения магнитного поля в катушке. Мы уже знаем, что эта э. д. с. равна (со знаком минус) быстроте изменения тока, так что

где L *—* индуктивность катушки. Поскольку *dI/dt=iωI,* то мы имеем

C:\1\pic\gray.jpg

(22.4)

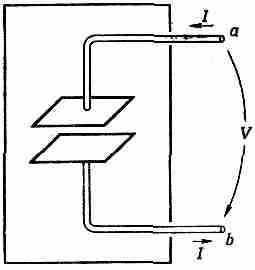
Тот способ, которым мы описали идеальную индуктивность, иллюстрирует общий подход к другим идеальным элементам цепи — обычно их называют «сосредоточенными» элементами. Свойства элемента полностью описываются на языке токов и напряжений, возникающих на его зажимах. Прибегнув к под­ходящим приближениям, можно игнорировать огромную слож­ность тех полей, которые возникают внутри объекта. То, что происходит внутри, отделяется от того, что происходит сна­ружи.

Для всех элементов цепи мы намерены сейчас найти соот­ношения, подобные формуле (22.4). В ней напряжение пропор­ционально силе тока с константой пропорциональности, кото­рая, вообще говоря, есть комплексное число. Этот комплексный коэффициент пропорциональности называется *импедансом,* и его привыкли обозначать через z (не следует путать с координатой z). В общем случае это функция частоты ω. Стало быть, для каж­дого сосредоточенного элемента мы напишем

C:\1\pic\gray.jpg

(22.5)

C:\1\pic\gray.jpgДля индуктивности мы имеем

(22.6)

*Фиг. 22.2. Емкость (или конденсатор).*

Рассмотрим с этой точки зрения [емкость](#прим1) . Она состоит из двух проводящих пластин (обкладок), от которых к нужным за­жимам отходят два провода. Пластины могут быть любой формы и часто отделяются друг от друга каким-нибудь диэлектриком. Это схематически изображено на фиг. 22.2. Мы снова делаем несколько упрощающих предположений. Мы считаем, что пла­стины и провода — идеальные проводники, а изоляция между пластинами тоже идеальна, так что через нее никакие заряды с пластины на пластину перейти не могут. Затем мы предпола­гаем, что проводники находятся близко друг от друга, но зато аначительно удалены ото всех остальных проводников, так что все линии поля, выйдя из одной пластины, непременно окан­чиваются на другой. И тогда заряды на пластинах всегда равны и противоположны друг другу, причем по величине намного превосходят величину заряда на поверхности проводов. И на­конец, мы считаем, что поблизости от конденсатора магнитных полей нет.

Рассмотрим теперь контурный интеграл от Е вдоль замкну­той петли, которая начинается на клемме а, проходит внутри провода до верхней обкладки конденсатора, перескакивает про­межуток между пластинами, проходит с нижней обкладки на клемму *b* и возвращается к клемме *а* по пространству снаружи конденсатора. Раз магнитного поля нет, контурный интеграл от Е по этому замкнутому пути равен нулю. Интеграл можно раз­бить на три части:



Интеграл вдоль проводов равен нулю, потому что внутри идеаль­ных проводников электрического поля не бывает. Интеграл от зажима *b* до а снаружи конденсатора равен разности потенциалов между клеммами со знаком минус. А поскольку мы считаем, что обкладки как-то изолированы от прочего мира, то общий заряд двух обкладок должен быть равен нулю; и если на верх­ней обкладке есть заряд *Q,* то на нижней имеется заряд —*Q.* Раньше мы уже видели, что если заряды двух проводников рав­ны и противоположны, +Q и -*Q,* то разность потенциалов между ними есть *Q/C,* где *С* — емкость этих проводников. Из (22.7) следует, что разность потенциалов между зажимами *а* и b равна разности потенциалов между обкладками. Поэтому

C:\1\pic\gray.jpgЭлектрический ток I, втекающий в конденсатор через клемму *а* (и покидающий его через клемму b*),* равен *dQ/dt —* быстроте изменения электрического заряда на обкладках. Записывая *dV/dt в* виде iωV, можно связь между током и напряжением для конденсатора дать в следующем виде:

C:\1\pic\gray.jpg

или

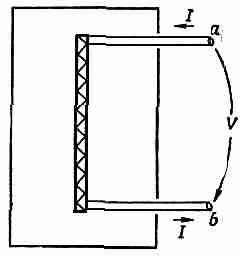
C:\1\pic\gray.jpg

(22.8)

Тогда импеданс z конденсатора равен

C:\1\pic\gray.jpg

(22.9)

Третий элемент, который нужно рассмотреть,— это сопро­тивление. Но, поскольку мы пока еще не рассматривали элек­трических свойств реальных веществ, мы не готовы обсуждать то, что творится внутри реального проводника. Придется просто принять как факт, что внутри реальных веществ могут суще­ствовать электрические ноля, что эти поля порождают поток электрического заряда (т. е. ток) и что этот ток пропорционален интегралу электрического поля от одного конца проводника до другого. Затем надо представить себе идеальное сопротивление, сделанное так, как показано на фиг. 22.3. Два провода, которые мы считаем идеальными проводниками, тянутся от клемм *а* и *b* к двум концам бруска, сделанного из материала, оказываю­щего сопротивление току. Следуя нашей обычной линии рас­суждений, приходим к выводу, что разность потенциалов между зажимами а и *b* равна контурному интегралу от внешнего элек­трического поля, равному также контурному интегралу от электрического поля по пути, проходящему через брусок.

*Фиг. 22.3. Сопротивление.*

От­сюда следует, что ток I через сопротивление пропорционален напряжению *V* на зажимах:

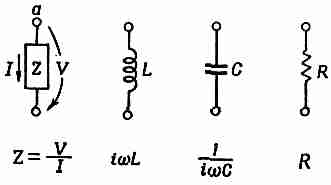
C:\1\pic\gray.jpg

где *R* называется сопротивлением. Позже мы убедимся, что связь между силой тока / и напряжением *V* для реальных про­водящих материалов только приближенно можно считать ли­нейной. Мы убедимся также, что считать эту приближенную пропорциональность не зависящей от частоты изменений тока и напряжения можно лишь тогда, когда частота не слишком высо­ка. И тогда для переменных токов напряжение на зажимах ока­зывается в фазе с током, а это значит, что сопротивление — число действительное:

C:\1\pic\gray.jpg

(22.10)

Результаты наших рассуждений о трех сосредоточенных эле­ментах цепи — индуктивности, емкости, сопротивлении — по­дытожены фиг. 22.4. На этом рисунке, как и на предыдущих, напряжение отмечено стрелкой, направленной от одной клеммы к другой. Если напряжение «положительно», т. е. если на клемме *а* потенциал *выше,* чем на клемме *b,* то стрелка указы­вает направление «падения напряжения».

Хотя мы сейчас говорим о переменных токах, конечно, можно включить сюда и особый случай цепей постоянного тока, если перейти к пределу, когда частота ω стремится к нулю.

*Фиг. 22.4. Идеальные сосредо­точенные элементы цепи (пассив­ные).*

При нуле­вой частоте, т. е. при постоянном токе, импеданс индуктивности стремится к нулю; между клеммами наступает короткое замыка­ние. Импеданс же емкости при постоянном токе стремится к бес­конечности; цепь между клеммами размыкается. Принимать в расчет при постоянных токах нужно только обычные сопротив­ления: они не зависят от частоты.

В описанных до сих пор элементах цепи ток и напряжение были пропорциональны друг другу. Если одно равно нулю, то и другое равно нулю. Обычно мы мыслим на таком языке: при­ложенное напряжение «ответственно» за ток или ток «создает» напряжение на клеммах. Элемент словно в некотором смысле «отвечает» на «приложенные» внешние условия. По этой причи­не такие элементы называются *пассивными.* Тем самым их можно противопоставить активным элементам, таким, как генераторы, которые мы рассмотрим в следующем параграфе и которые пред­ставляют собой *источники* колебаний токов или напряжений в цепи.

**§ 2. Генераторы**

Поговорим теперь об *активном* элементе цепи, источнике и токов и напряжений в ней, т. е. о *генераторе.*

Пусть у нас имеется катушка, наподобие катушки самоин­дукции, но только витков у нее немного и на магнитное поле ее собственного тока можно внимания не обращать. Эта катуш­ка, однако, находится в переменном магнитном поле, подобном тому, какое создается вращающимся магнитом (фиг. 22.5). (Мы уже видели ранее, что такое вращающееся магнитное поле мож­но также создать с помощью подходящей совокупности катушек с переменными токами.) Сделаем снова несколько упрощающих допущений. Это все те же допущения, которые мы делали, гово­ря об индуктивности. В частности, мы предполагаем, что меняю­щееся магнитное поле ограничено лишь небольшой областью поблизости от катушки и за пределами генератора, в простран­стве между клеммами, оно не чувствуется.

*Фиг. 22.5. Генератор, состоя­щий из закрепленной катушки и вращающегося магнитного поля.*

*Фиг. 22.6. Обозначение идеального генератора.*

Повторяя опять в точности тот же анализ, что и для индук­тивности, рассмотрим контурный интеграл от Е вдоль замкну­той петли, которая начинается на зажиме а, проходит по ка­тушке до зажима bи возвращается к началу по пространству между зажимами. Снова заключаем, что разность потенциалов между зажимами а и bравна всему интегралу от Е вдоль петли:

Этот контурный интеграл равен э.д.с. в цепи, и поэтому разность потенциалов *V* между выводами генератора тоже равна скорости изменения магнитного потока сквозь катушку:

(22.11)

Предполагается далее, что у идеального генератора магнитный поток через катушку определяется внешними условиями (таки­ми, как угловая скорость вращающегося магнитного поля) и что на него никак не влияют токи, текущие через генератор. Таким образом, генератор (по крайней мере рассматриваемый нами *идеальный)* — это не импеданс. Разность потенциалов на его зажимах определяется произвольно задаваемой э.д.с. *ε(t).* Такой идеальный генератор представляют символом, по­казанным на фиг. 22.6. Маленькая стрелка дает направление по­ложительной э.д.с. Положительная э.д.с. в генераторе, изобра­женном на фиг. 22.6, создает напряжение *V=ε* с более высоким потенциалом на зажиме *а.*

Можно сделать генератор и по-другому. Внутри он будет уст­роен совершенно иначе, но снаружи, на зажимах, он ничем не будет отличаться от только что описанного. Представим катуш­ку, которая вращается в *неподвижном* магнитном поле (фиг.22.7).

Мы изобразили магнитную палочку, чтобы показать наличие магнитного поля, но его можно, конечно, заменить любым дру­гим источником постоянного магнитного поля, скажем добавоч­ной катушкой, по которой течет постоянный ток. Как показано на рисунке, вращающаяся катушка связана с внешним миром скользящими контактами, или «кольцами». Нас опять интересу­ет разность потенциалов, которая появляется между клеммами *а* и b*,* т. е. интеграл от электрического поля между *а* и *b* по пути снаружи генератора.

Теперь в этой системе уже нет изменяющихся магнитных по­лей и на первый взгляд кажется удивительным, откуда на зажи­мах генератора берется напряжение. Действительно, ведь нигде же внутри генератора нет никаких электрических полей. Мы, как обычно, предполагаем для наших идеальных элементов, что внутри них провода сделаны из идеально проводящего материа­ла; а, как уже неоднократно повторялось, электрическое поле внутри идеального проводника равно нулю. Но это не всегда верно. Это неверно тогда, когда проводник движется в магнитном поле. Правильное утверждение таково: общая *сила,* действую­щая на произвольный заряд внутри идеального проводника, должна быть равна нулю. Иначе в нем возник бы бесконечный ток свободных зарядов. Так что надо брать сумму электрическо­го поля Е и векторного произведения скорости проводника v на магнитное поле В; это есть полная сила, действующая на еди­ничный заряд, и вот она-то всегда равна нулю:

F=E+vXB=0 (в идеальном проводнике). (22.12)

А наше прежнее утверждение о том, что внутри идеальных про­водников электрических полей не бывает, верно лишь тогда, когда скорость проводника v равна нулю; в противном случае справедливо выражение (22.12).

Вернемся к нашему генератору, показанному на фиг. 22.7. Теперь мы видим, что контурный интеграл от электрического поля Е между зажимами *а* и bпо проводящим путям генерато­ра должен быть равен контурному интегралу от vXB по тому же пути;

*Фиг. 22.7. Генератор, состоящий из катушки, вращающейся в неподвиж­ном магнитном поле.*

Однако по-прежнему остается верным, что контурный интеграл от Е по замкнутой петле, включая возвращение от зажима *b* к *а* вне генератора, должен быть равен нулю, потому что меняю­щиеся магнитные поля отсутствуют. Так что первый интеграл в (22.13) по-прежнему равен *V* — напряжению на зажимах. Ока­зывается, что интеграл в правой части (22.13) просто равен быст­роте изменения потока через катушку, а значит, по правилу по­тока, равен э.д.с. катушки. И опять получается, что разность потенциалов между зажимами равна э.д.с. цепи в согласии с уравнением (22.11). Так что все равно, какой у нас генератор: меняется ли в нем магнитное поле возле закрепленной катушки, вертится ли в закрепленном магнитном поле катушка,— внешние свойства генераторов одни и те же. На клеммах всегда сущест­вует напряжение V, которое не зависит от тока в цепи, а опреде­ляется только условиями внутри генератора, формируемыми по нашему произволу.

Поскольку мы пытаемся понять работу генератора, основы­ваясь на уравнениях Максвелла, может возникнуть вопрос об обычном химическом элементе, о батарейке для карманного фо­нарика. Это тоже генератор, т. е. источник напряжения, хотя и применяется он только в цепях постоянного тока. Проще всего разобраться в элементе, изображенном на фиг. 22.8. Представьте две металлические пластинки, погруженные в какой-то химиче­ский раствор. Пусть раствор содержит в себе положительные и отрицательные ионы. Мы предположим еще, что ионы одного сорта, ска­жем отрицательные, много массивнее ионов, имеющих противоположную полярность, так что их движение в растворе (диффузия) происходит намного медленнее.

*Фиг. 22.8. Химический элемент.*

Наконец, положим, что тем или иным способом удалось добиться изменения кон­центрации раствора от места к месту, так что число ионов обеих полярностей, скажем у нижней пластинки, становится намного больше концентрации ионов у верхней пластинки. Благодаря большей подвижности положительные ионы легче проникнут в область низких концентраций, так что будет наблюдаться легкий избыток положительных зарядов, достигающих верхней плас­тинки. Она зарядится положительно, а нижняя будет обладать избытком отрицательного заряда. По мере того как все боль­ше и больше зарядов диффундирует к верхней пластинке, по­тенциал ее будет расти, пока возникающее между пластинками электрическое поле не создаст силу, действующую на ионы, которая компенсирует их избыточную подвижность. Два элек­трода быстро достигают разности потенциалов, характерной для внутреннего устройства этого элемента.

Рассуждая так же, как это мы делали, когда говорили об идеальном конденсаторе, мы убедимся, что, если нет избытка диффузии ионов какого-либо знака, разность потенциалов меж­ду зажимами *а и b* равна просто контурному интегралу от элект­рического поля между электродами. Конечно, между конденса­тором и таким химическим элементом есть существенная разни­ца. Если на мгновение закоротить выводы конденсатора, он разрядится и разности потенциалов между выводами уже не будет. В случае же химического элемента ток с зажимов можно снимать непрерывно, никак не изменяя при этом э.д.с., пока, конечно, реактивы в элементе не израсходуются. Известно, что в реальном элементе разность потенциалов на зажимах убывает по мере возрастания снимаемого с него тока. Но при нашей идеализации задачи легко себе представить, что у нас есть идеальный элемент, в котором напряжение на электродах не зависит от силы тока. Тогда реальный элемент можно рассма­тривать как идеальный, соединенный последовательно с сопро­тивлением.

**§ 3. Сети идеальных элементов; правила Кирхгофа**

Как мы видели в предыдущем параграфе, очень просто опи­сывать идеальные элементы схем, говоря лишь о том, что про­исходит вне элемента. Ток и напряжение связаны линейно. Но очень сложно описать все то, что на самом деле происходит внутри элемента, и весьма трудно при этом пользоваться языком уравнений Максвелла. Представьте, что вам нужно точно опи­сать электрические и магнитные поля внутри радиоприемника, состоящего из сотен сопротивлений, емкостей и самоиндукций

*Фиг.* 22.9. *Сумма падений напряжения вдоль любого замкнутого пути равна нулю.*

Было бы непосильным делом проана­лизировать такую мешанину, поль­зуясь уравнениями Максвелла. Но, делая множество приближений, ко­торые мы описали в § 2, и переводя существенные черты реальных эле­ментов схем на язык идеализации, можно проанализировать электриче­скую цепь сравнительно просто. Сей­час мы покажем, как это делается. Пусть имеется цепь, которая со­стоит из генератора и нескольких импедансов, между собой так, как показано на фиг. 22.9. Согласно нашим приближениям, в областях между отдельными элементами цепи магнитного поля нет. Поэтому ин­теграл от Е вдоль любой кривой, которая не проходит ни через один из элементов, равен нулю. Рассмотрим кривую Г, показан­ную штрихом на фиг. 22.9, которая обходит по цепи кругом. Контурный интеграл от Е вдоль этой кривой состоит из несколь­ких частей. Каждая часть — это интеграл от одного зажима элемента цепи до следующего. Мы назвали этот контурный ин­теграл падением напряжения на элементе цепи. Тогда весь контурный интеграл равен просто сумме падений напряжения на всех элементах цепи порознь:

А поскольку контурный интеграл равен нулю, то получается, что сумма разностей потенциалов вдоль всего замкнутого кон­тура цепи равна нулю:

(22.14)

Этот результат следует из одного из уравнений Максвелла, ут­верждающего, что в области, где нет магнитных полей, криволи­нейный интеграл от Е по замкнутому контуру равен нулю. Теперь рассмотрим другую цепь (фиг. 22.10). Горизонталь­ная линия, соединяющая выводы *а, b, с* и *d,* нарисована для того, чтобы показать, что эти выводы все связаны менаду собой или что они соединяются проводами с ничтожным сопротивлением. Во всяком случае такой чертеж означает, что все выводы *а, b, с, d* находятся под одним потенциалом, а выводы *е, f*, *g* и *h —* тоже под одним. Тогда падение напряжения V на любом из четырех элементов одинаковое.

Но одна из наших идеализации состояла в том, что на вы­водах импедансов сосредоточиваются пренебрежимо малые количества электричества. Предположим теперь, что и электри­ческим зарядом, накапливаемым на соединительных проводах, тоже можно пренебречь. Тогда сохранение заряда требует, чтобы любой заряд, покинувший один из элементов цепи, не­медленно входил в какой-либо другой элемент цепи. Или, что то же самое, чтобы алгебраическая сумма токов, входящих в лю­бую из точек соединения, была равна нулю. Под точкой соеди­нения мы понимаем любую совокупность выводов, таких, как *а, b,* с, *d,* которые соединены друг с другом. Такая совокуп­ность соединенных между собой выводов обычно называется «узлом». Сохранение заряда, стало быть, требует, чтобы в цепи, показанной на фиг. 22.10, было

(22.15)

Сумма токов, входящих в узел, состоящий из четырех выводов *е, f*, *g, h,* тоже должна быть равна нулю:

(22.16)

Ясно, что это то же самое уравнение, что и (22.15). Оба эти уравнения не независимы. Общее правило гласит, что *сумма то­ков, втекающих в любой узел, обязана быть равна нулю:*

(22.17)

Наше прежнее заключение о том, что сумма падений напря­жений вдоль замкнутого контура равна нулю, должно выпол­няться для каждого контура сложной цепи. Точно так же наш результат, что сумма сил токов, втекающих в узел, равна нулю, тоже должен выполняться для любого узла. Эти два уравнения известны под названием *пра­вил Кирхгофа.*

*Фиг, 22.10. Сумма токов, вхо­дящих в любой узел, равна нулю.*

*Фиг. 22.11. Анализ цепи с помощью правил Кирхгофа.*

С их помощью можно найти силы токов и напряжения в какой угодно цепи.

Рассмотрим, например, цепь посложнее (фиг. 22.11). Как определить токи и напряжения в ней? Прямой путь решения таков. Рассмотрим каждый из четырех вспомогательных контуров цепи. (Скажем, один контур проходит через клеммы *а, b, е, d* и обратно к а.) Для каждого замкнутого контура напишем уравнение первого правила Кирхгофа — сумма падений напряжения вдоль вся­кого контура равна нулю. Нужно помнить, что падение напряжения считается положительным, если направление об­хода *совпадает* с направлением тока, и отрицательным, если на­правление обхода *противоположно* направлению тока; и надо еще помнить, что падение напряжения на генераторе равно *от­рицательному* значению э.д.с. в этом направлении. Так что для контура *abeda* получается

z1I1+ z3I3+z4I4-ε1=0.

Прилагая те же правила к остальным контурам, получим еще три сходных уравнения.

После этого нужно написать уравнения для токов в каждом узле цепи. Например, складывая все токи в узле b*,* получаем

I1-I3-I2=0.

Аналогично, в узле *е* уравнение для токов принимает вид

I3-I4+I8-I5=0.

В изображенной схеме таких уравнений для токов пять. Ока­зывается, однако, что любое из этих уравнений можно вывести из остальных четырех, поэтому независимых уравнений только четыре. Итого в нашем распоряжении восемь независимых ли­нейных уравнений: четыре для напряжений, четыре для токов. Из них можно получить восемь независимых токов. А если станут известны токи, то определится и вся цепь. Падение напряжения на любом элементе дается током через этот элемент, умноженным на его импеданс (а для источников напряжения они вообще известны заранее).

Мы видели, что одно из уравнений для тока зависит от ос­тальных. Вообще-то уравнений для напряжения тоже можно написать больше, чем нужно. Хотя в схеме фиг. 22.11 и рас­сматривалась только четверка самых маленьких контуров, но ничего не стоило взять другие контуры и выписать для них уравнения для напряжений. Можно было взять, скажем, путь *abcfeda.* Или сделать обход по пути *abcfehgda.* Вы видите, что контуров — множество. И, анализируя сложные схемы, ничего не стоит получить слишком много уравнений. Но хоть есть пра­вила, которые подсказывают, как надо поступать, чтобы вышло наименьшее количество уравнений, обычно и так бывает сразу понятно, как выписать нужное число простейших уравнений. Кроме того, одно-два лишних уравнения вреда не приносят. К неверному ответу они не приведут, разве только немного запу­тают выкладки.

В гл. 25 (вып. 2) мы показали, что, если два импеданса z*1* и z2 соединены *последовательно,* они эквивалентны одиночному импедансу zs, равному

zs = zl + z2. (22.18)

Кроме того, было показано, что, когда два импеданса соединены *параллельно,* они эквивалентны одиночному импедансу zp , равному

(22.19)

Если вы теперь оглянетесь назад, то увидите, что, выводя эти результаты, на самом деле вы пользовались правилами Кирх­гофа. Часто можно проанализировать сложную схему, повторно применяя формулы для последовательного и параллельного импедансов.

*Фиг. 22.12, Цепь, которую мож­но проанализировать с помощью последовательных и параллель­ных комбинаций.*

*Фиг. 22,13. Цепь, кото­рую нельзя проанализи­ровать с помощью последовательных и параллельных комбинаций.*

Скажем, таким способом можно проанализировать схему, показанную на фиг. 22.12. Импедансы z4 и z5 можно заменить их параллельным эквивалентом, то же можно сделать с импедансами z6 и z7. Затем импеданс z2 можно скомбинировать с параллельным эквивалентом z6 и z7, по правилу последова­тельного соединения импедансов. Так постепенно можно свести всю схему к генератору, последовательно соединенному с одним импедансом *Z.* И тогда ток через генератор просто равен *ε/Z.* А действуя в обратном порядке, можно найти токи в каждом импедансе.

Однако бывают совсем простые схемы, которые этим методом не проанализируешь. Например, схема фиг. 22.13. Чтобы проанализировать эту цепь, надо расписать уравнения для токов и напряжений по правилам Кирхгофа. Давайте проделаем это. Имеется только одно уравнение для токов:

I1 + I2 + I3=0, откуда

I3=-(I1+I2).

Выкладки можно сэкономить, если этот результат сразу же подставить в уравнения для напряжений. В этой схеме таких уравнений два:

*-El + I2z2-Ilzl=0* и *£2-(Il + I2)z3-I*2z2=0.

На два уравнения приходится два неизвестных тока. Решая их, получаем 11и I2:

(22.20)

и

(22.21)

А третий ток получается как сумма первых двух.

Вот еще пример цепи, которую по правилам параллель­ных и последовательных импедансов рассчитывать нельзя

*Фиг. 22.14. Мостиковая схема.*

(фиг. 22.14). Такую схему на­зывают «мостик». Она встре­чается во многих приборах, измеряющих импедансы. В таких схемах обычно инте­ресуются таким вопросом:

как должны соотноситься различные импедансы, чтобы ток че­рез импеданс *zs* был равен нулю? Вам предоставляется право найти те условия, при которых это действительно так,

**§ 4. Эквивалентные контуры**

Положим, мы подключили генератор *£* к цепи, в которой есть множество сложных переплетений импедансов (схематиче­ски это показано на фиг. 22.15, *а).* Все уравнения, вытекающие из правил Кирхгофа, линейны, и поэтому, вычислив из них ток I через генераторы, мы получим величину I, пропорциональную *ε.* Можно написать

где теперь zэфф— это некоторое комплексное число, алгебраиче­ская функция всех элементов цепи. (Если в цепи нет никаких

генераторов, кроме упомянутого, то в формуле не будет добавочной части, не зависящей от *ε.)* Но получившееся уравнение — это как раз то, которое нужно было бы написать для схемы фиг. 22.15, *б.* И покуда нас интересует только то, что происходит *слева* от за­жимов а и b*,* до тех пор обе схемы фиг. 22.15 *эквивалентны.*

*Фиг. 22.15. Любая сеть пассивных элементов* с *двумя выводами эквивалентна эффективному импедансу.*

*Фиг. 22.16. Любую сеть с двумя выводами можно заменить генератором, последовательно соединенным с импедансом.*

И поэтому можно сделать общее утверждение, что *любую* цепь пассивных элементов с двумя выводами можно заменить одним-единственным импедансом *zэфф* не изменив в остальной части цепи ни токов, ни напряжений. Утверждение это, естественно, всего лишь мелкое замечание о том, что следует из правил Кирхгофа, а в конечном счете — из ли­нейности уравнений Максвелла.

Идею эту можно обобщить на схемы, в которые входят как генераторы, так и импедансы. Представьте, что мы глядим на эту схему «с точки зрения» одного из импедансов, который мы обозначим zn (фиг. 22.16, *а).* Если бы решить уравнение для то­ка, мы бы увидели, что напряжение *Vn* между зажимами а и *b* есть линейная функция I, которую можно записать в виде

(22.22)

Здесь *А* и *В* зависят от генераторов и импедансов в цепи слева от зажимов. Например, в схеме, показанной на фиг. 22.13, мы находим *V1=I1zl .* Это можно переписать [используя (22.20)] в виде

(22.23)

Тогда полное решение мы получаем, комбинируя это урав­нение с уравнением для импеданса z1 т. е. с V1=I1z1, или в общем случае комбинируя (22.22) с

Если мы рассмотрим теперь случай, когда zn подключается к простой цепи из последовательно соединенных генератора и импеданса (см. фиг. 22.15, б), то уравнение, соответствующее (22.22), примет вид

что совпадает с (22.22), если принять Sэфф=A и zэфф=B. Значит, если нас интересует лишь то, что происходит направо от выводов а и b, то произвольную схему фиг. 22.16 можно всегда заменить эквивалентным сочетанием генератора, последовательно соеди­ненного с импедансом.

**§ 5. Энергия**

Мы видели, что для создания в индуктивности тока I надо из внешней цепи доставить энергию U=1/2LI2. Когда ток спадает до нуля, эта энергия уводится обратно во внешнюю цепь.

В идеальной индуктивности механизма потерь энергии нет. Когда через индуктивность течет переменный ток, энергия пере­текает то туда, то сюда — от индуктивности к остальной части цепи и обратно, но средняя скорость, с какой энергия передается в цепь, равна нулю. Мы говорим, что индуктивность — недиссипативный элемент, в ней не растрачивается (не «диссипирует») электрическая энергия.

Точно так же возвращается во внешнюю цепь и энергия кон­денсатора U=1/2СV2, когда он разряжается. Когда он стоит в цепи переменного тока, то энергия течет то в него, то из него, но полный поток энергии за каждый цикл равен нулю. Идеальный конденсатор — тоже недиссипативный элемент.

Мы знаем, что э. д. с.— это источник энергии. Когда ток I течет в направлении э.д.с., то энергия поставляется во внешнюю цепь со скоростью dU/dt=εI. Если электричество гонят против э.д.с. (с помощью других генераторов), то э. д. с. поглощает энергию со скоростью εI; поскольку I отрицательно, то и dU/dt отрицательно.

Если генератор подключен к сопротивлению R, то ток через сопротивление равен I=ε/R. Энергия, поставляемая генерато­ром со скоростью εI, поглощается сопротивлением. Эта энер­гия тратится на нагрев сопротивления и для электрической энергии цепи фактически уже потеряна. Мы говорим, что электрическая энергия рассеивается, диссипирует в сопротивлении. Скорость, с какой она рассеивается, равна dU/dt=RI2.

В цепи переменного тока средняя скорость потерь энергии в сопротивлении — это среднее значение RI2 за цикл. Поскольку I=I'eiωt (что, собственно, означает, что I меняется как cosωt), то среднее значение I2 за цикл равно |I'|2/2, потому что ток в максимуме — это |I'[, а среднее значение cos2 cat равно 1/2.

*Фиг. 22.17. Любой импеданс эквивалентен последовательному соединению чистого сопротивле­ния и чистого реактанса.*

А что можно сказать о потерях энергии, когда генератор подключен к произвольному импедансу z? (Под «потерями» мы, конечно, понимаем превращение электрической энергии в теп­ловую.) Всякий импеданс z может быть разбит на действитель­ную и мнимую части, т. е.

z = R + iX, (22.24)

где R и X — числа действительные. С точки зрения эквивалент­ных схем можно сказать, что всякий импеданс эквивалентен сопротивлению, последовательно соединенному с чисто мни­мым импедансом, называемым реактансом

(фиг. 22.17).

Мы уже видели раньше, что любая цепь, содержащая только L и C, обладает импедансом, выражаемым чисто мнимым числом. А раз в любом из L и С в среднем никаких потерь не бывает, то и в чистом реактансе, в котором имеются только L и С, по­терь энергии не бывает. Можно показать, что это должно быть верно для всякого реактанса.

Если генератор с э. д. с. ε подсоединен к импедансу z (см. фиг. 22.17), то его

э. д. с. должна быть связана с током I из генератора соотношением

ε = I(R + iX). (22.25)

Чтобы найти, с какой средней скоростью подводится энергия, нужно усреднить произведение εI. Но теперь следует быть ос­торожным. Оперируя с такими произведениями, надо иметь дело только с действительными величинами ε(t) и I(t). (Дейст­вительные части комплексных функций изображают настоящие физические величины только тогда, когда уравнения линейны; сейчас же речь идет о произведении, а это, несомненно, вещь нелинейная.)

Пусть мы начали отсчитывать t так, что амплитуда I' оказа­лась действительным числом, скажем I0; тогда истинное изме­нение I во времени дается формулой

I=I0cosωt.

.

Входящая в уравнение (22.25) э.д.с.— это действительная часть

или

(22.26)

Два слагаемых в (22.26) представляют падение напряжений на *R* и *X* (см. фиг. 22.17). Мы видим, что падение напряжения на сопротивлении находится *в фазе* с током, тогда как падение напряжения на чисто реактивной части находится с током *в противофазе.*

*Средняя скорость* потерь энергии <Р>ср, текущей от гене­ратора, есть интеграл от произведения εIза один цикл, делен­ный на период *Т;* иными словами,

Первый интеграл равен 1/2I20R, а второй равен нулю. Стало быть, средняя потеря энергии в импедансе *z—R+iX* зависит лишь от действительной части z и равна I20*R/2.* Это согласуется с нашим прежним выводом о потерях энергии в сопротивле­нии. В реактивной части потерь энергии не бывает.

**§ 6. Лестничная сеть**

А теперь мы рассмотрим интереснейшую цепь, которую можно выражать через параллельные и последовательные сочетания. Начнем с цепи, изображенной на фиг. 22.18, *а.* Сразу видно, что импеданс между зажимами *а* и bпросто равен z1+z2. Возьмем теперь цепь потруднее (фиг. 22.18, *б).* Ее можно проанализиро­вать с помощью правил Кирхгофа, но нетрудно обойтись и последовательными и параллельными комбинациями. Два импе­данса на правом конце можно заменить одним z3=z1+z2 (см. фиг. 22.18, в). Тогда два импеданса z2 и z3 можно заме­нить их эквивалентным параллельным импедансом z4 (фиг. 22.18, г). И наконец, *z*1и z4 эквивалентны одному импедан­су z5 (фиг. 22.18, *д).*

А теперь можно поставить забавный вопрос: что произой­дет, если к цепи, показанной на фиг. 22.18, *б, бесконечно* под­ключать все новые и новые звенья (штриховая линия на фиг. 22.19, а)? Можно ли решить задачу о такой бесконечной це­пи? Представьте, это совсем не трудно. Прежде всего мы замечаем, что такая бесконечная цепь не меняется, если новое звено под­ключить к «переднему» концу. Ведь если к бесконечной цепи добавляется одно звено, она остается все той же бесконечной цепью.

*Фиг. 22.18. Эффективный импеданс лестницы.*

Пусть мы обозначили импеданс между зажимами *а* и b бесконечной цепи через z0; тогда импеданс всего того, что справа от зажимов *с* и *d,* тоже равен z0. Поэтому если смотреть с перед­него конца, то вся цепь представляется в виде, показанном на фиг. 22.19, *б.* Заменяя два параллельных импеданса z2 и z0 одним и складывая его с z1? сразу же получаем импеданс всего сочетания

Но этот импеданс тоже равен z0. Получается уравнение

Найдем из него z0:

(22.27)

*Фиг. 22.19. Эффективный импеданс бесконечной лестницы.*

Таким образом, мы нашли решение для импеданса бесконечной лестницы повторяющихся параллельных и последовательных импедансов. Импеданс z*0* называется *характеристическим импе­дансом* такой бесконечной цепи.

Рассмотрим теперь частный пример, когда последовательный элемент — всегда индуктивность *L,* а шунтовой элемент — емкость *С* (фиг. 22.20, *а).* В этом случае импеданс бесконечной сети получается, если положить z1=iωL и *z2=1/i*ω*С.* Заметьте, что первое слагаемое z1/2 в (22.27) равно просто половине импе­данса первого элемента. Естественнее было бы поэтому (или по крайней мере проще) рисовать нашу бесконечную сеть так, как показано на фиг. 22.20, *б.* Глядя на бесконечную сеть из зажима a', мы бы увидали характеристический импеданс

(22.28)

Смотря по тому, какова частота ω, наблюдаются два интерес­ных случая. Если ω2 меньше 4/LC, то второе слагаемое под кор­нем меньше первого, и импеданс z0 станет действительным чис­лом. Если же ω2 больше 4/LС, то импеданс z0 станет чисто мни­мым числом и его можно записать в виде

Раньше мы сказали, что цепь, составленная из одних только мнимых импедансов, таких, как индуктивности и емкости, будет иметь чисто мнимый импеданс. Но как же тогда выходит, что в той цепи, которую мы сейчас рассматриваем (а в ней есть толь­ко одни *L* и *С),* импеданс при частотах ниже √4/LC представля­ет собой чистое сопротивление?

*Фиг. 22.20. Лестница L—C, изображенная двумя экви­валентными способами.*

Для высоких частот импеданс чисто мнимый, в полном согласии с нашим прежним утвержде­нием. Для низких же частот импеданс — чистое сопротивление и поэтому поглощает энергию. Но как может цепь, подобно со­противлению, непрерывно поглощать энергию, если она состав­лена только из индуктивностей и емкостей? Ответ состоит в том, что этих емкостей и самоиндукций бесконечное множество, и получается, что, когда источник соединен с цепью, он обязан сперва снабдить энергией первую индуктивность и емкость, за­тем вторую, третью и т. д. В цепях подобного рода энергия непрерывно и с постоянной скоростью отсасывается из генера­тора и безостановочно течет в цепь. Энергия запасается в индуктивностях и емкостях вдоль цепи.

Эта идея подсказывает интересную мысль 0 том, что факти­чески происходит внутри цепи. Следует ожидать, что если к переднему концу цепи подключить источник, то действие этого источника начнет распространяться вдоль по цепи к бесконечно­му концу. Распространение волн вдоль линии очень похоже на излучение от антенны, которая отбирает энергию от питающего ее источника; точнее, можно ожидать, что такое распростране­ние происходит, когда импеданс действителен, т. е. когда co меньше √4/LC*.* Но когда импеданс чисто мнимый, т. е. при co, больших √4/LC, то такого распространения ожидать не следует.

**§ 7. Фильтры**

В предыдущем параграфе мы видели, что бесконечная лест­ничная сеть (см. фиг. 22.20) непрерывно поглощает энергию, если эта энергия подводится с частотой, которая ниже некоторого критического значения √4/LC, называемого граничной часто­той ω0. У нас возникла мысль, что этот эффект можно понять, основываясь на представлении о непрерывном переносе энергии вдоль линии. С другой стороны, на высоких частотах (при ω >ω0) непрерывного поглощения энергии не бывает; тогда следует ожидать, что токи, видимо, не смогут «проникнуть» далеко вдоль линии. Поглядим, верны ли эти представления.

Пусть передний конец лестницы соединен с каким-то гене­ратором переменного тока, и нас интересует, как выглядит напряжение, скажем, в 754-м звене лестницы. Поскольку сеть бесконечна, при переходе от одного звена к другому происходит всегда одно и то же; так что можно просто посмотреть, что слу­чается, когда мы переходим от n-го звена к (n+1)-му. Токи In и напряжения Vn мы определим так, как показано на фиг. 22.21,*а.*

*Фиг. 22.21. Нахождение фактора распространения лестницы.*

Напряжение *Vn+1* можно получить из *Vn,* если вспомнить, что остаток лестницы (за n-м звеном) всегда можно заменить ее характеристическим импедансом z0; и тогда достаточно проана­лизировать только схему фиг. 22.21, б. Мы прежде всего заме­чаем, что каждое *Vn,* поскольку это напряжение на зажимах сопротивлеиия z0, должно быть равно *Inz0.* Кроме того, разность между *Vn* и *Vn+l* равна просто *Inz1:*

Получается отношение

которое можно назвать *фактором распространения* для одного звена лестницы; обозначим его α. Для всех звеньев

(22.29)

и напряжение за n*-м* звеном равно

Теперь ничего не стоит найти напряжение за 754-м звеном; оно просто равно произведению *ε* на 754-ю степень α.

Как выглядит α для лестницы *L—*С на фиг. 22.20, а? Взяв z0 из уравнения (22.27) и *г1 =iωL,* получим

Если частота на входе ниже граничной частоты *ω0=√4/LС,* то корень — число действительное, и модули комплексных чисел в числителе и знаменателе одинаковы. Поэтому значение α по модулю равно единице; можно написать

а это означает, что величина (модуль) напряжения в каждом звене одна и та же; меняется только фаза. Она меняется на число δ; оно на самом деле отрицательно и представляет собой «задерж­ку» напряжения по мере того, как последнее проходит по сети. А для частот выше граничной частоты ω0 лучше вынести в числителе и знаменателе (22.31) множитель *i* и переписать его в

(22.32)

Теперь фактор распространения α — число *действительное,* притом *меньшее единицы.* Это означает, что напряжение в неко­тором звене всегда меньше напряжения в предыдущем звене; множитель пропорциональности равен *а.* При частотах выше ω0 напряжение быстро спадает по мере движения вдоль сети. Кри­вая модуля α как функции частоты похожа на график, приведен­ный на фиг. 22.22.

Мы видим, что поведение а как выше, так и ниже ω0 согласу­ется с нашим представлением о том, что сеть передает энергию при ω<ω0 и задерживает ее при ω>ω0. Говорят, что сеть «про­пускает» низкие частоты и «отбрасывает», или «отфильтровыва­ет», высокие. Всякая сеть, устроенная так, чтобы ее характе­ристики менялись указанным образом, называется «фильтром». Мы проанализировали «фильтр низкого пропускания», или «низ­ких частот».

Вас может удивить — к чему все это обсуждение бесконечных сетей, если на самом деле они невозможны? Но вся хитрость в том и заключается, что те же характеристики вы обнаружите и в конечной сети, если заключите ее импедансом, совпадающим с характеристическим импедансом z0. Практически, конечно, не­возможно точно воспроизвести характеристический импеданс несколькими простыми элементами, такими, как R, *L* и *С.* Но в некоторой полосе частот нередко этого можно добиться в хоро­шем приближении. Этим способом можно сделать конечную фильтрующую сеть со свойствами, очень близкими к тем, кото­рые проявляются в бесконечном фильтре. Скажем, лестница *L—С* будет во многом вести себя так, как было описано, если на конце ее помещено чистое сопротивление *R*=√*L/C.*

А если в нашей лестнице *L—С* мы поменяем местами *L* и *С,* чтобы получилась лестница, показанная на фиг. 22.23,а, то получится фильтр, который пропускает *высокие* частоты и отбрасывает низкие.

*Фиг. 22.22. Фактор распростра­нения одного звена лестницы.*

*Фиг. 22.23. Высокочастотный фильтр (а) и его фактор распро­странения как функция 1/ω (б).*

Пользуясь уже полученными результатами, легко понять, что происходит в этой сети. Вы уже, наверно, за­метили, что всегда, когда *L* заменяется на С и наоборот, то и *in* заменяется на 1/iω и наоборот. Значит, все, что происходило раньше с ω, теперь будет происходить с 1/ω. В частности, можно узнать, как меняется а с частотой, взяв фиг. 22.22 и повсюду вместо со написав 1/ω (фиг. 22.23,6).

У описанных фильтров высоких и низких частот есть много­численные технические приложения. Фильтр L—*С* низких частот часто используется как «сглаживающий» фильтр в цепях по­стоянного тока. Если нам нужно получить постоянный ток от источника переменного тока, мы включаем выпрямитель, который позволяет течь току только в одну сторону. Из выпрямителя выходит пульсирующий ток, график которого выглядит как функция *V(t),* показанная на фиг. 22.24 Постоянство такого тока — никудышное: он шатается вверх и вниз, а нам нужен по­стоянный ток, чистенький, гладенький, как от батареи аккумуляторов. Этого можно добиться, включив фильтр низких частот между выпрямителем и нагрузкой.

Из гл. 50 (вып. 4) мы уже знаем, что временная функция на фиг. 22.24 может быть представлена в виде наложения постоянного напряжения на синусную волну плюс синусную волну большей частоты плюс еще более высокочастотную синусоиду и т. д., т. е. как ряд Фурье.

*Фиг. 22.24. Напряжение на вы­ходе всеволнового выпрямителя.*

Если наш фильтр — линейный (т. е. если, как мы предполагали, *L* и *С* при изменении токов или напряже­ний не меняются), то то, что выходит из фильтра, представляет собой тоже наложение выходов от каждой компоненты на входе. Если устроить так, чтобы граничная частота ω0 нашего фильтра была значительно ниже наинизшей из частот функции *V(t),* то постоянный ток (у которого ω=0) прекрасно пройдет через фильтр, а амплитуда первой гармоники будет крепко срезана; ну, а амплитуды высших гармоник — тем более. Значит, на выходе можно получить какую угодно гладкость, смотря по тому, на сколько звеньев фильтра у вас хватит денег.

Высокочастотный фильтр нужен тогда, когда необходимо срезать некоторые низкие частоты. Например, в граммофонном усилителе высокочастотный фильтр можно использовать, чтобы музыка не искажалась: он задержит низкочастотное громыхание моторчика и диска.

Можно еще делать и «полосовые» фильтры, отбрасывающие частоты ниже некоторой частоты ω*1* и частоты выше некоторой другой частоты ω2 (большей ω1), но зато пропускающие все частоты от ω1 до ω2. Это можно сделать просто, совместив высо­кочастотный и низкочастотный фильтры, но обычно делают лестничную схему, в которой импедансы z1 и z2 имеют более сложный вид — они сами суть комбинации *L* и *С.* У такого поло­сового фильтра постоянная распространения может выглядеть так, как на фиг. 22.25,а. Его можно использовать, скажем, что­бы отделять сигналы, которые занимают только некоторый ин­тервал частот, например каждый из каналов телефонной связи в высокочастотном телефонном кабеле или модулированную несу­щую частоту при радиопередаче.

В гл. 25 (вып. 2) мы видели, что такое фильтрование можно производить еще, используя избирательность обычной резонансной кривой (для сравнения она приведена на фиг. 22.25,6). Но резонансный фильтр для некоторых целей подходит хуже, чем полосовой. Вы помните (это было в гл. 48, вып. 4), когда не­сущая частота ωс модулирована «сигнальной» частотой ωs, то общий сигнал содержит не только несущую, но и две боковые частоты ωc+ωs и ωc-ωs. В резонансном фильтре эти боковые полосы всегда как-то ослабляются, и чем выше сигнальная час­тота, тем, как видно из рисунка, больше это ослабление. Поэто­му «отклик на частоту» здесь неважный. Высшие музыкальные тоны и вовсе не проходят. Но если взять полосовой фильтр, устроенный так, что ширина ω2-ω1по крайней мере вдвое больше наивысшей сигнальной частоты, то отклик на частоту будет для интересующих нас сигналов плоским.

Еще одно замечание о лестничном фильтре: лестница *L—С* на фиг. 22.20 — это также приближенное представление переда­ющей линии (фидера). Если имеется длинный проводник, распо­ложенный параллельно другому проводнику (скажем, провод, помещенный в коаксиальном кабеле или подвешенный над зем­лей), то между ними существует какая-то емкость и некоторая индуктивность (из-за магнитного поля между ними). Если пред­ставить эту линию составленной из небольших участков Δl, то каждый участок похож на одно звено лестницы *L — С с* последо­вательной индуктивностью ΔL и шунтирующей емкостью ΔС. Поэтому мы вправе применять здесь наши результаты для ле­стничного фильтра. Перейдя к пределу при Δl→0, мы получим хорошее описание передающей линии. Заметьте, что, когда Δl становится все меньше и меньше, уменьшаются и ΔL и Δ*С,* но они уменьшаются в одной и той же пропорции, так что отноше­ние ΔL/ΔC не падает. Поэтому, перейдя в уравнении (22.28) к пределу при ΔL, и ΔС, стремящихся к нулю, мы увидим, что характеристический импеданс z0 — это чистое сопротивление, величина которого равна √ΔL/ΔС. Отношение ΔL/ΔС можно записать также в виде L*0/С0,* где *L0* и С0— индуктивность и емкость единицы длины линии; тогда

(22.33)

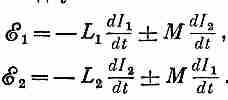
Заметьте еще, что, когда ΔL и ΔС стремятся к нулю, гранич­ная частота ω0=√4/LC уходит в бесконечность. У идеальной передающей линии нет граничной частоты.

**§ 8. Другие элементы цепи**

До сих пор мы определили только идеальные импедансы це­пи — индуктивность, емкость и сопротивление, а также идеаль­ный генератор напряжения. Теперь мы хотим показать, что дру­гие элементы, такие, как взаимоиндукция, или транзисторы, или радиолампы, можно описать, пользуясь теми же основными элемен­тами.

*Фиг. 22.26. Эквивалент­ная схема взаимной индук­ции.*

Пусть имеются две катушки, и пусть (это сделано нарочно или как-нибудь иначе) поток от одной из кату­шек пересекает другую (фиг. 22.26,а). Тогда возникает взаимная ин­дукция *М* двух ка­тушек, так что, когда ток в одной катушке меняется, в другой гене­рируется напряжение. Можно ли в наших эквивалентных контурах учесть такой эффект? Можно, поступив следующим образом. Мы видели, что наведенная в каждой из двух взаимодействующих катушек э. д. с. может быть пред­ставлена в виде суммы двух частей:

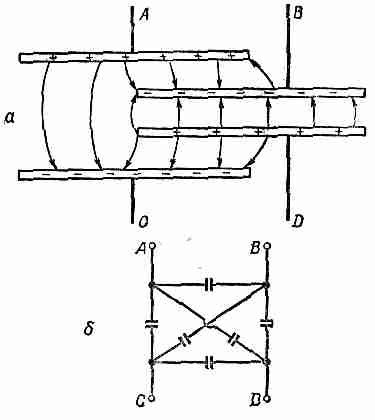


(22.34)

Первое слагаемое возникает из самоиндукции катушки, а второе — из ее взаимоиндукции с другой катушкой. Перед вторым слагаемым может стоять плюс или минус, смотря по тому, как поток от одной катушки пронизывает вторую. Делая те же приближения, как и тогда, когда мы описывали идеальную индуктивность, мы можем сказать, что разность потенциалов на зажимах каждой катушки равна э. д. с. катушки. И тогда оба уравнения (22.34) совпадут с теми, которые получились бы из цепи фиг. 22.26, *б,* если бы э. д. с. в каждом из двух начерченных контуров зависела от тока в противоположном контуре следую­щим образом:

C:\1\pic\gray.jpg

(22.35)

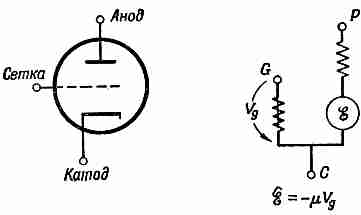


*Фиг. 22.27. Эквивалентная схема взаимной емкости.*

Значит, можно пред­ставить действие самоин­дукции нормальным обра­зом, а действие взаимной индукции заменить вспо­могательным идеальным генератором напряжения. Надо, конечно, иметь еще уравнение, связывающее эту з. д. с. с током в ка­кой-то другой части цепи; но, поскольку это урав­нение линейно, мы просто добавляем к нашим уравнениям цепи еще одно линейное уравнение, и все наши прежние выводы насчет эквивалентных схем и тому подобного все равно остаются правильными.

Кроме взаимной индукции, можно еще говорить и о вза­имной емкости. До сих пор, говоря о конденсаторах, мы всегда представляли, что у них только по два электрода, но во мно­гих случаях (скажем, в радиолампах) могут быть и по не­скольку электродов, расположенных вплотную друг к другу. Если на один из них поместить электрический заряд, то его электрическое поле наведет заряды на всех остальных электродах и повлияет на их потенциал. В качестве примера рассмотрим расположение четырех пластин (фиг. 22.27, а). Представим, что эти четыре пластины соединяются с внешней цепью провода­ми *А, В, С* и *D.* Так вот, пока нас интересуют только электро­статические эффекты, эквивалентную схему такого расположе­ния электродов можно считать такой, как на фиг. 22.27,6. Элект­ростатическое взаимодействие электродов (всякого со всяким) эквивалентно емкости между этой парой электродов.

И, наконец, посмотрим, как нужно представлять в цепях переменного тока такие сложные устройства, как транзисторы или радиолампы. Надо сначала подчеркнуть, что эти устройства часто действуют так, что связь между токами и напряжениями отнюдь не линейна. В этих случаях часть сделанных нами рань­ше утверждений, а именно те, которые зависят от линейности уравнений, естественно, перестают быть правильными. Но во многих приложениях рабочие характеристики в достаточной мере линейны — так что и транзисторы и лампы можно считать линейными устройствами.

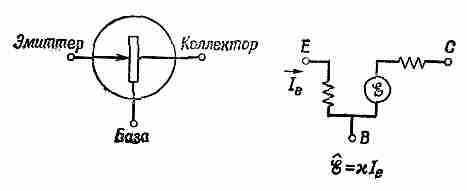


*Фиг. 22.28. Низкочастотная эквивалентная схема вакуум­ного триода.*

Под этим подразумевается, что пере­менные токи, скажем в анодной цепи радиолампы, прямо пропорциональны разности потенциалов на других электродах, например потенциала сетки и анодного потенциала. Когда же такие линейные соотношения существуют, то к устройствам мож­но применять представление об эквивалентных схемах.

Как и в случае взаимной индукции, это описание должно включать в себя добавочные генераторы напряжения, которые описывают влияние напряжений или токов в одной части уст­ройства на токи или напряжения в другой его части. К примеру, анодный контур триода, как правило, можно представить сопротивлением, последовательно соединенным с идеальным генера­тором напряжения, у которого сила источника пропорциональна напряжению на сетке. Получится эквивалентный контур, изо­браженный на фиг. [22.28](#прим2). Подобным же образом контур кол­лектора транзистора удобно представлять в виде сопротивления, последовательно соединенного с идеальным генератором напря­жения, сила источника которого пропорциональна силе тока, текущего от эмиттера к базе транзистора. Эквивалентный кон­тур тогда похож на изображенный на фиг. 22.29. До тех пор пока уравнения, описывающие их действие, остаются линейны­ми, мы имеем полное право пользоваться таким представлением для ламп или транзисторов. И тогда, даже если они входят в сложную сеть, все равно наше общее заключение об эквивалент­ном представлении любого произвольного соединения элементов остается верным.

Контур транзистора и радиолампы имеет одну замечатель­ную способность, которой лишены контуры, включающие одни импедансы: действительная часть эффективного импеданса *zэфф* может стать отрицательной. Мы видели, что действительная часть z представляет потери энергии.



*Фиг. 22.29. Низкочастотная эквивалентная схема транзистора.*

Но важная характеристи­ка транзисторов и радиоламп состоит в том, что они снабжают контур энергией. (Конечно, они ее не «вырабатывают»; они бе­рут энергию у цепи постоянного тока, у источника тока, и превращают ее в энергию переменного тока.) Стало быть, появ­ляется возможность получить контур с отрицательным сопро­тивлением. Такой контур имеет интересное свойство: если под­ключить его к импедансу с положительной действительной ча­стью, т. е. к положительному сопротивлению, и устроить все так, чтобы сумма двух действительных частей обратилась в нуль, то в этом объединенном контуре рассеяния энергии не будет. А раз нет потерь энергии, то любое переменное напряжение, стоит его однажды включить, никогда больше не исчезнет. Это основ­ная идея работы осциллятора или генератора сигналов, который можно использовать в качестве источника переменного тока какой угодно частоты.

***\* Кое-кто говорит, что предметы мы обязаны называть словами «катушка» и «конденсатор», а их свойства — соответственно «индуктивность» и «емкость». Но я предпочитаю пользоваться словами, какие слышу в лаборатории, где почти всегда и про физическую катушку, и про ее само­индукцию L говорят «индуктивность». Точно так же предпочитают гово­рить «емкость», «сопротивление», хотя часто можно услышать и слово «кон­денсатор».***

***\*Эта эквивалентная схема годится только для низких частот. На высокой частоте эквивалентная схема усложняется, в нее надо включить различные, так называемые «паразитические», емкости и индуктивности.***

***Глава 23***

# ПОЛЫЕ РЕЗОНАТОРЫ

[**§ 1. Реальные элем****е****нты цепи**](#а1)

[**§ 2. Конд****енсатор на больших частотах**](#а2)

[**§ 3. Резона****нсная полость**](#а3)

[**§ 4. Собственные ко****лебания полости**](#а4)

[**§ 5. Полости и**  **резонансные контуры**](#а5)

**Повторить; гл. 2. (вып. 2) «Резонанс»; гл. 49 (вып. 4)**

**«Собственные колебания».**

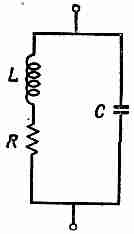
**§ 1. Реальные элементы цепи**

C:\1\pic\gray.jpgЕсли посмотреть на любую цепь, состоящую из идеальных импедансов и генераторов, со стороны какой-нибудь пары клемм, то при данной частоте она будет эквивалентна генера­тору *$,* последовательно соединенному с импе­дансом z. Если приложить к этим клеммам на­пряжение *V* и вычислить из уравнений силу тока, то между током и напряжением должна получиться линейная зависимость. Поскольку все уравнения линейны, то и *I* должно зави­сеть от *V* линейно и только линейно. А самое общее линейное выражение можно записать в виде

(23.1)

Вообще-то и z и εмогут как-то очень сложно за­висеть от частоты ω. Однако соотношение (23.1) — это то соотношение, которое получилось бы, если бы за клеммами находился просто генера­тор ε(ω), последовательно соединенный с им­педансом z(ω).

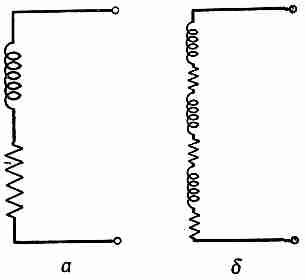
Можно поставить и обратный вопрос: имеет­ся какое-то электромагнитное устройство с двумя полюсами (выводами) и нам известна связь между I и V, т. е. известны εи z как функции частоты; можно ли всегда найти такую комбинацию идеальных элементов, которая даст эквивалентный внутренний импеданс z? Ответ на это таков: для любой разумной, т. е. физи­чески осмысленной функции z(ω), действительно *возможно построить* с любой степенью точности модель с помощью контура, составленного из конечного числа идеальных элементов. Мы не собираемся изучать общую задачу, а только посмотрим, основываясь на физических соображениях, чего можно ожидать в отдельных случаях.



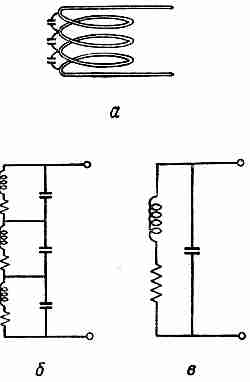
*Фиг. 23.1. Эквивалентная схема реального сопротивления.*

Известно, что ток, протекающий через реальное сопротивле­ние, создает магнитное поле. Значит, каждое реальное сопротив­ление должно обладать и некоторой индуктивностью. Далее, если к сопротивлению приложена некоторая разность потенциа­лов, то на его концах должны возникнуть заряды, создающие нужные электрические поля. При изменении напряжения про­порционально меняется и заряд, так что у сопротивления имеет­ся и какая-то емкость. Следует ожидать, что эквивалентная схе­ма реального сопротивления должна иметь такой вид, как на фиг. 23.1. Если сопротивление хорошее, то его так называемые «паразитические элементы» *L* и *С* малы, так что при тех часто­тах, для которых оно предназначено, ωL много меньше *R,* а l/ωC — много больше *R.* Поэтому «паразитическими» элемен­тами можно пренебречь. Когда же частота повышается, то не исключено, что значение этих элементов возрастет и сопротив­ление станет похожим на резонансный контур.

Реальная индуктивность также не совпадает с идеальной, импеданс которой равен iω*L.* У реальной проволочной катушки бывает какое-то сопротивление, и при низких частотах она фак­тически эквивалентна индуктивности, последовательно соеди­ненной с сопротивлением (фиг. 23.2,а). Вы можете подумать, что в реальной катушке сопротивление и индуктивность *объединены,* что сопротивление распределено вдоль всего провода и перемешано с его индуктивностью.



*Фиг. 23.2. Эквивалентная схема реальной индуктивности на ма­лых частотах.*



Фиг. 23.3. Эквивалентная схема реальной индуктивности на больших частотах.

Может быть, надо пользоваться контуром, смахиваю­щим скорее на фиг. 23.2,6, где по­следовательно расставлено несколько маленьких *R* и L? Однако общий

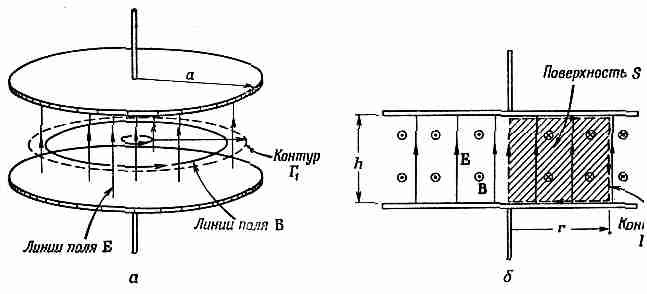
импеданс такого контура просто равен ΣR+ΣiωL, а это то же самое, что дает более простая диаграмма, изображенная на фиг. 23.2, *а.*

Когда же частота повышается, то уже нельзя представлять реальную катушку в виде индуктивности плюс сопротивление. Начинают играть роль заряды, которые возникают на проводах, чтобы создать напряжение. Дело выглядит так, как будто меж­ду витками провода нанизаны маленькие конденсаторчики (фиг. 23.3, *а).* Можно попробовать приближенно представить реальную катушку в виде схемы фиг. 23.3, *б.* На низких ча­стотах эту схему очень хорошо имитирует более простая (фиг. 23.3, *в);* это опять тот же резонансный контур, который давал нам высокочастотную модель сопротивления. Однако для бо­лее высоких частот более сложный контур фиг. 23.3, *б* подходит лучше. Так что чем точнее вы хотите представить истинный импеданс реальной физической индуктивности, тем больше надо взять идеальных элементов для построения искусственной мо­дели.

Посмотрим теперь повнимательнее на то, что происходит в реальной катушке. Импеданс индуктивности изменяется как ω*L,* значит, он на низких частотах обращается в нуль — «замы­кается накоротко», и мы замечаем только сопротивление прово­да. Если частота начинает расти, то ωL вскоре становится боль­ше *R* и катушка выглядит почти как идеальная индуктивность. А если подняться по частоте еще выше, то начнут играть роль и емкости. Их импеданс пропорционален 1/ωС; он велик на низких частотах. На достаточно низких частотах конденсатор выглядит как «разрыв в цепи», и если его с чем-нибудь запараллелить, то ток через него не пойдет. Но на высоких частотах ток предпочитает течь через емкости между витками, а не через индуктив­ность. Оттого-то ток в катушке прыгает с одного витка на дру­гой, вовсе не помышляя крутить петлю за петлей там, где ему приходится преодолевать э. д. с. Хоть нам, может быть, и *хоте­лось бы,* чтобы ток шел по виткам катушки, но сам-то он выби­рает путь полегче, переходя на дорогу наименьшего импеданса. Если это было бы нужно, то такой эффект можно было бы назвать «высокочастотным барьером» или чем-нибудь в этом роде. Похожие вещи происходят и в других науках. В аэродина­мике, скажем, если вы захотите заставить что-то двигаться бы­стрее звука, а движение рассчитано на малые скорости, то у вас ничего не выйдет. Это не значит, что возник какой-то непрохо­димый «барьер»; просто надо изменить конструкцию. Точно так же наша катушка, которую первоначально сконструировали как «индуктивность», на очень высоких частотах работает не как индуктивность, а как что-то другое. Для больших частот надо изобретать уже новое устройство.

**§ 2. Конденсатор на больших** **частотах**

А теперь обсудим подробнее поведение конденсатора — гео­метрически идеального конденсатора,—когда частота становится все выше и выше. Мы проследим за изменением его свойств. (Мы предпочли рассматривать конденсатор, а не индуктивность, по­тому что геометрия пары обкладок много проще геометрии ка­тушки.) Итак, вот конденсатор (фиг. 23.4, *а),* состоит он из двух параллельных круговых обкладок, соединенных с внешним ге­нератором парой проводов. Если зарядить конденсатор посто­янным током, то на одной из обкладок появится положительный заряд, на другой — отрицательный, а между обкладками будет однородное электрическое поле.



*Фиг. 23.4. Электрическое и магнитное поля между обкладками конденсатора.*

Представим теперь, что вместо постоянного тока к обкладкам приложено переменное напряжение низкой частоты. (После мы увидим, какая частота «низкая», а какая «высокая».) Конденса­тор, скажем, соединен с низкочастотным генератором. Когда напряжение меняется, то с верхней обкладки положительный заряд убирается и прикладывается отрицательный. В момент, когда это происходит, электрическое поле исчезает, а потом восстанавливается, но уже в обратную сторону. Заряд медленно плещется туда-сюда, и поле поспевает за ним. В каждый момент электрическое поле однородно (фиг. 23.4, *б);* есть, правда, не­большие краевые эффекты, но мы намерены ими пренебречь. Ве­личину электрического поля можно записать в виде

C:\1\pic\gray.jpg

(23.2)

C:\1\pic\gray.jpgгде *Е0*— постоянно. Но останется ли это справедливым, когда частота возрастет? Нет, потому что при движении электрического поля вверх и вниз через произвольную петлю Г1 проходит поток электрического поля (фиг. 23.4, а). А, как вам известно, изменяющееся элект­рическое поле создает магнитное. Согласно одному из уравнений Максвелла, при наличии изменяющегося электрического поля (как в нашем случае) обязан существовать и криволинейный ин­теграл от магнитного поля. Интеграл от магнитного поля по замкнутому кругу, умноженный на с2, равен скорости измене­ния во времени электрического потока через поверхность внутри круга (если нет никаких токов):

(23.3)

Итак, сколько же здесь этого магнитного поля? Это узнать не­трудно. Возьмем в качестве петли Г1 круг радиуса r. Из симмет­рии ясно, что магнитное поле идет так, как показано на рисун­ке. Тогда интеграл от В равен *2πrВ.* А поскольку электрическое поле однородно, то поток его равен просто *Е,* умноженному на πr2, на площадь круга:

C:\1\pic\gray.jpg

(23.4)

C:\1\pic\gray.jpgПроизводная *Е* по времени в нашем переменном поле равна *iωE0eiωt,* Значит, в нашем конденсаторе магнитное поле равно

(23.5)

Иными словами, магнитное поле тоже колеблется, а его величи­на пропорциональна ω и r.

К какому эффекту это приведет? Когда существует магнит­ное поле, которое меняется, то возникнут наведенные электри­ческие поля, и действие конденсатора станет слегка похоже на индуктивность. По мере роста частоты магнитное поле усилива­ется: оно пропорционально скорости изменения *Е,* т. е. ω. Им­педанс конденсатора больше не будет просто равен *1/i*ω*С.*

Будем увеличивать частоту и посмотрим повниматель­нее, что происходит. У нас есть магнитное поле, которое пле­щется то туда, то сюда. Но тогда и электрическое поле не может, как мы раньше предполагали, остаться однородным! Если имеет­ся изменяющееся магнитное поле, то по закону Фарадея должен существовать и контурный интеграл от электрического поля. Так что если существует заметное магнитное поле (а так и бы­вает на высоких частотах), то электрическое поле не может быть на всех расстояниях от центра одинаковым. Оно должно так меняться с r*,* чтобы криволинейный интеграл от него мог быть равен изменяющемуся потоку магнитного поля.

Посмотрим, сможем ли мы представить себе правильное электрическое поле. Это можно сделать, подсчитав «поправку» к тому, что было на низких частотах,— к однородному полю. Обозначим поле при низких частотах через *Е1,* и пусть оно по-прежнему равно *Е0еi*ω*t,* а правильное поле запишем в виде

*где E2—* поправка из-за изменения магнитного поля. При любых ω мы будем задавать поле в центре конденсатора в виде *E0ei*ω*t* (тем самым определяя *Е0),* так что в центре поправки не будет: E2=0 при r=0.

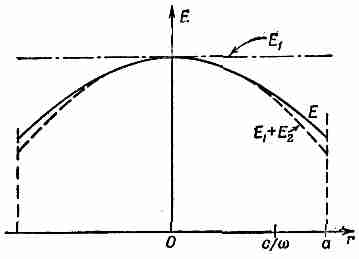
C:\1\pic\gray.jpgЧтобы найти *Е2,* можно использовать интегральную форму закона Фарадея

Интегралы берутся просто, если вычислять их вдоль линии Г2, показанной на фиг. 23.4,б и идущей сперва по оси, затем по радиусу вдоль верхней обкладки до расстояния r, потом вер­тикально вниз на нижнюю обкладку и обратно к оси по радиусу. Контурный интеграл от *Е1* вдоль этой кривой, конечно, равен нулю; значит, в интеграл дает вклад только *Е2,* и интеграл равен просто —*Ez(r)h,* где *h —* зазор между обкладками. (Мы считаем *Е* положительным, когда оно направлено вверх.) Это равно скорости изменения потока *В,* который получится, если вычислить интеграл по заштрихованной площади *S* внутри Г2 (фиг. 23.4,6). Поток через вертикальную полосу шириной *dr* равен *B(r)hdr,* а суммарный поток

C:\1\pic\gray.jpg

Полагая — *d/dt* от потока равным контурному интегралу от E2, получаем

C:\1\pic\gray.jpg



Фиг. 23.5. Электрическое по­ле между обкладками конден­сатора на высоких частотах. Краевыми аффектами пренебрегли.

Заметьте, что *h* выпало: поля не зависят от величины зазора между обкладками.

C:\1\pic\gray.jpgИспользуя для *В(r)* формулу (23.5), получаем

C:\1\pic\gray.jpg*Дифференцирование по времени даст нам просто еще один множитель iω:*

(23.7)

Как и ожидалось, наведенное поле стремится свести *на нет* первоначальное электрическое поле. Исправленное поле *Е = Е1+Е2* тогда равно

C:\1\pic\gray.jpg

(23.8)

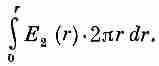
Электрическое поле в конденсаторе больше уже не однород­но; оно имеет параболическую форму (штриховая линия на фиг. 23.5). Вы видите, что наш простенький конденсатор уже слегка усложняется.

C:\1\pic\gray.jpgНаши результаты можно использовать для того, чтобы под­считать импеданс конденсатора на больших частотах. Зная электрическое поле, можно подсчитать заряд обкладок и узнать, как ток через конденсатор зависит от частоты оз. Но эта задача нас сейчас не интересует. Нас больше интересует другое: что станется, если частота будет продолжать повышаться, что про­изойдет на еще больших частотах? Но разве мы уже не кончили наш расчет? Нет, потому что раз мы исправили электрическое поле, то, значит, магнитное поле, которое мы раньше подсчи­тали, больше уже не годится. Приближенно магнитное поле (23.5) правильно, но только в первом приближении. Обозначим его В1, а (23.5) перепишем в виде

(23.9)

C:\1\pic\gray.jpgВспомните, что это поле появилось от изменения Е1 . А правиль­ное магнитное поле будет создаваться изменением суммарного электрического поля Е1+Е2 . Если магнитное поле представить в виде В=В1+В2 , то второе слагаемое — это просто добавочное поле, создаваемое полем Ег. Чтобы узнать В2 , надо повторить все те же рассуждения, которые приводились, когда подсчиты­вали В1: контурный интеграл от B2 вдоль кривой Г1 равен ско­рости изменения потока Е2 через Г1. Опять получится то же уравнение (23.4), но В в нем надо заменить на В2 , а Е — на E2:

Поскольку *Е2 с* радиусом меняется, то для получения его пото­ка надо интегрировать по круговой поверхности внутри Г1 . Беря в качестве элемента площади *2πrdr,* напишем этот интеграл в виде



C:\1\pic\gray.jpgЗначит, *В2(r)* выразится так:

(23.10)

C:\1\pic\gray.jpg*Подставляя сюда Е2(r) из (23.7), получаем интеграл от r3dr, который равен, очевидно, r4/4. Наша поправка к магнитному полю окажется равной*

(23.11)

C:\1\pic\gray.jpgНо мы еще не кончили! Раз магнитное поле В вовсе не такое, как мы сперва думали, то мы, значит, неверно подсчитывали Е2. Надо найти еще поправку к Е, вызываемую добавочным магнит­ным полем В2. Эту добавочную поправку к электрическому по­лю назовем Е3. Она связана с магнитным полем В2 так же, как E2 была связана с В1. Можно опять прибегнуть к тому же самому соотношению (23.6), изменив в нем только индексы:

(23.12)

*C:\1\pic\gray.jpg*Подставляя сюда наш новый результат (23.11), получаем новую поправку к электрическому полю:

(23.13)

*Если теперь наше дважды исправленное поле записать в виде Е=Е1+Е2+Е3 , то мы получим*

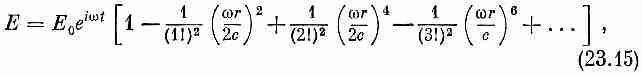
*C:\1\pic\gray.jpg*

(23.14)

Изменение электрического поля с радиусом происходит уже не по параболе, как было на фиг. 23.5; на больших радиусах значе­ние поля лежит чуть выше кривой (E1+E2).

Мы пока еще не дошли до конца. Новое электрическое поле вызовет новую поправку к магнитному полю, а заново под­правленное магнитное поле вызовет необходимость дальнейшей поправки к электрическому и т. д. и т. д. Но у нас уже есть все нужные формулы. Для *В3* можно использовать (23.10), изменив индексы при *В* и *Е* с 2 до 3.

C:\1\pic\gray.jpgОчередная поправка к электрическому полю равна

*С этой степенью точности все электрическое поле дается, стало быть, формулой*

где численные коэффициенты написаны в таком виде, что стано­вится ясно, как продолжить ряд.

C:\1\pic\gray.jpgОкончательно получается, что электрическое поле между обкладками конденсатора на любой частоте дается произведением E0eiωt на бесконечный ряд, который содержит только перемен­ную ωr/с. Можно, если мы захотим, определить специальную функцию, обозначив ее через J0(x), как бесконечный ряд в скоб­ках формулы (23.15):

C:\1\pic\gray.jpg*Тогда искомое решение есть произведение E0eiωt на эту функцию при x=ωr/c:*

(23.17)

*Мы обозначили нашу специальную функцию через J0 по­тому, что, естественно, не мы первые с вами занялись задачей колебаний в цилиндре. Функция эта появилась давным-давно, и ее уже привыкли обозначать J0. Она всегда возникает, когда вы решаете задачу о волнах, обладающих цилиндрической сим­метрией. Функция J0 по отношению к цилиндрическим волнам — это то же, что косинус по отношению к прямолинейным волнам. Итак, это очень важная функция. И изобретена она очень давно. Затем с нею связал свое имя математик Бессель. Индекс нуль означает, что Бессель изобрел целую кучу разных функций, а наша — самая первая из них.*

Другие функции Бесселя — J1? J2 и т. д.— относятся к цилиндрическим волнам, сила которых меняется при обходе вокруг оси цилиндра.

Полностью скорректированное электрическое поле между обкладками нашего кругового конденсатора, даваемое формулой (23.17), изображено на фиг. 23.5 сплошной линией. Для не очень больших частот нашего второго приближения вполне хватает. Третье приближение было бы еще лучше — настолько хорошо, что если его начертить, то вы бы не заметили разницы между ним и сплошной линией. В следующем параграфе вы уви­дите, однако, что может понадобиться и весь ряд, чтобы получи­лось аккуратное описание поля на больших радиусах или на больших частотах.

**§ 3. Резонансная полость**

Посмотрим теперь, что даст наше решение для электрическо­го поля между обкладками конденсатора, если продолжать увеличивать частоту все выше и выше. При больших ω параметр х=ωr/с тоже становится большим, и первые несколько слагае­мых ряда для J0 от х быстро возрастают. Это означает, что па­рабола, которую мы начертили на фиг. 23.5, на больших часто­тах изгибается книзу круче.

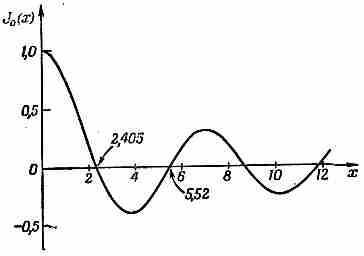
В самом деле, она выглядит так, как будто поле на высокой частоте все время старается обратиться в нуль где-то при с/ω, примерно равном половине а. Давайте посмотрим, действитель­но ли функция J0 проходит через нуль и становится отрицатель­ной. Сперва испытаем х=2:

C:\1\pic\gray.jpg

C:\1\pic\gray.jpg*Это еще не нуль; но попробуем число побольше, скажем x=2,5. Подстановка дает*

*В точке x=2,5 функция J0 уже перешла через нуль. Результаты при х=2 и при х=2,5 выглядят так, как будто J0 прошла через нуль на одной пятой пути от 2,5 до 2. Поэтому надо проверить число 2,4:*

C:\1\pic\gray.jpg



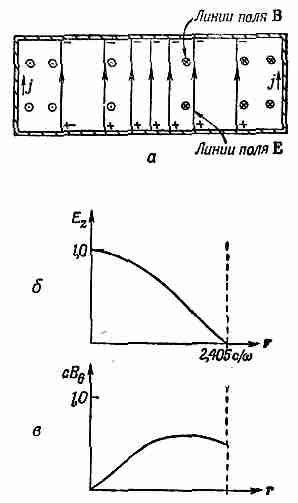
Фиг. 23.6. Функция Бесселя J0(x).

С точностью до двух знаков после запятой получился нуль. Если рассчитывать точнее (или, поскольку функция J0 извест­на, если разыскать ответ в книжке), то обнаружится, что J0 " проходит через нуль при x=2,405. Мы провели расчет собствен­норучно, чтобы показать вам, что вы тоже способны открывать подобные вещи, а не заимствовать их из книг.

А если уж вы посмотрели про J0 в книжке, то интересно выяс­нить, как она идет при больших значениях х; она напоми­нает кривую на фиг. 23.6. Когда х возрастает, J0(x) колеблется от положительных значений к отрицательным и обратно, по­степенно уменьшая размах колебаний.

Мы получили интересный результат: если достаточно увели­чить частоту, то электрические поля в центре конденсатора и у его края могут быть направлены в противоположные стороны. Например, пусть ω так велико, что x=ωr/с на внешнем краю кон­денсатора равно 4; тогда на фиг. 23.6 краю конденсатора отве­чает абсцисса x=4. Это означает, что наш конденсатор работает при частоте ω=4с/а. И на краю обкладок электрическое поле будет довольно велико, но направлено не туда, куда можно было ожидать, а в обратную сторону. Эта ужасная вещь может про­изойти с конденсатором на больших частотах. При переходе к очень большим частотам электрическое поле по мере удаления от центра конденсатора много раз меняет свое направление. Кроме того, имеется еще связанное с этими электрическими по­лями магнитное поле. Не удивительно, что наш конденсатор при высоких частотах уже не напоминает идеальной емко­сти. Можно даже задуматься над тем, на что похож он силь­нее: на емкость или на индуктивность. Надо к тому же под­черкнуть, что на краях конденсатора происходят и более сложные эффекты, которыми мы пренебрегли. Например, там проис­ходит еще излучение волн за края конденсатора, так что настоя­щие поля куда сложнее тех, которые мы рассчитали. Впрочем, мы не будем сейчас заниматься этими эффектами.

Можно было бы, конечно, попробовать представить себе для конденсатора эквивалентную цепь, но, вероятно, будет лучше, если мы просто примем, что тот конденсатор, который мы сконструировали для низко­частотных полей, больше не го­дится, когда частоты слишком велики.



Фиг. 23.7. Электрическое и магнит­ное поля в закрытой цилиндрической банке.

*И если мы хотим изу­чить, как действует такой объект на высоких частотах, нам нужно оставить те приближения к уравнениям Максвелла, которые мы делали, изучая цепи, и вер­нуться к полной системе уравне­ний, полностью описывающей поля в пространстве. Вместо того чтобы манипулировать о идеализированными элементами цепи, надо оперировать с реаль­ными проводниками, с такими, какие они есть на самом деле, учитывая все поля в пространстве между ними. Например, если нам нужен резонансный контур на высокие частоты, то не нужно пытаться его сконструировать с помощью одной катушки и плоского конденсатора.*

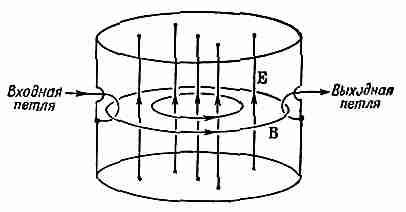
*Мы уже упомянули, что плоский конденсатор, который мы рассматривали, похож, с одной стороны, на емкость, а с другой— на индуктивность. От электрического поля возникают заряды на поверхностях обкладок, а от магнитного — обратные э.д.с. Не может ли оказаться, что перед нами уже готовый резонанс­ный контур? Оказывается, да. Представьте, что мы выбрали такую частоту, при которой картина электрического поля падает до нуля на каком-то расстоянии от края диска; иначе говоря, мы выбрали* ω*a/с большим, чем 2,405. Всюду на окружности, центр которой лежит на оси обкладок, электрическое поле об­ратится в нуль. Возьмем кусок жести и вырежем полоску такой ширины, чтобы она как раз поместилась между плоскими обкладками конденсатора. Затем изогнем ее в форме цилиндра та­кого радиуса, на котором электрическое поле равно нулю. Раз там нет электрического поля, то по вставленному в конден­сатор цилиндру никаких токов не потечет, и ни электрические, ни магнитные поля не изменятся. Мы, стало быть, смогли закоротить друг на друга обкладки конденсатора, ничего не из­менив в нем. И посмотрите, что получилось: вышла настоящая цилиндрическая банка с электрическим и магнитным полями внутри, причем никак не связанная с внешним миром. Поля внутри не изменятся, даже если отрезать выступающие края обкладок и провода, ведущие к конденсатору. Останется только закрытая банка с электрическим и магнитным полями внутри нее (фиг. 23.7,а). Электрические поля колеблются то вперед, то назад с частотой* ω*, которая, не забывайте, определила собою диаметр банки. Амплитуда колеблющегося поля Е меняется с расстоянием от оси банки так, как показано на фиг. 23.7,6. Кривая эта — просто первая дуга функции Бесселя нулевого порядка. В банке есть еще и круговое магнитное поле, которое колеблется во времени со сдвигом по фазе на 90° относительно электрического поля.*

Магнитное поле можно тоже разложить в ряд и изобразить на графике, как это сделано на фиг. 23.7,е.

C:\1\pic\gray.jpgНо как же это получается, что внутри банки могут существо­вать электрические и магнитные поля, не соединенные с внешним миром? Оттого, что электрическое и магнитное поля сами себя поддерживают: изменение Е создает В, а изменение В создает Е,— все в согласии с уравнениями Максвелла. Магнитное поле ответственно за индуктивность, электрическое — за емкость; вместе они создают нечто, похожее на резонансный контур. За­метьте, что описанные нами условия возникают лишь тогда, когда радиус банки в точности равен 2,405 с/ω. В банке задан­ного радиуса колеблющиеся электрическое и магнитное поля бу­дут поддерживать друг друга (описанным способом) лишь при этой определенной частоте. Итак, цилиндрическая банка радиу­са r резонирует при частоте

(23.18)

Мы сказали, что если банка совершенно закрыта, то поля продолжают колебаться так же, как и раньше. Это не совсем так. Это было бы так, если бы стенки банки были идеальными проводниками. В реальной банке, однако, колеблющиеся токи, текущие по стенкам, могут из-за сопротивления материала те­рять энергию. Колебания полей постепенно замрут. Из фиг. 23.7 ясно, что там должны существовать сильные токи, связанные с электрическими и магнитными полями внутри полости. Из-за того, что вертикальное электрическое поле внезапно исчезает на верхнем и нижнем торцах банки, у него возникает там силь­ная дивергенция; значит, на внутренней поверхности банки должны появляться положительные и отрицательные заряды (фиг. 23.7, а). Когда электрическое поле меняет направление на обратное, должны менять знак и заряды, так что между верхним и нижним торцами банки должен течь переменный ток.

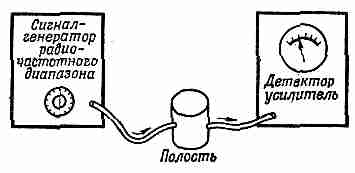


Фиг. 23.8. Подключение резонансной полости.

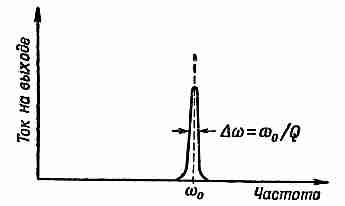
Он будет течь по боковой поверхности банки, как показано на рисунке. То, что по бокам банки должны течь токи, можно понять ещё, рассмотрев то, что происходит в магнитном поле. Кривая на фиг. 23.7, в сообщает нам, что магнитное поле на краю банки внезапно обращается в нуль. Такое внезапное изменение маг­нитного поля может произойти лишь оттого, что по стенке течет ток. Этот ток как раз и создает переменные электрические заря­ды на верхней и нижней обкладках банки.

Вас может удивить наше открытие — обнаружение токов на боковых сторонах банки. А как же с нашим прежним утвержде­нием, что ничего не изменится, если в области, где электриче­ское поле равно нулю, поставить эти боковые стенки? Вспомни­те, однако, что, когда мы впервые вставляли в конденсатор эти боковые стенки, верхняя и нижняя обкладки выступали за них, так что магнитные поля оказывались и снаружи нашей банки. И только когда мы отрезали выступающие за края банки части конденсатора, на внутренней части боковых стенок появи­лись какие-то токи.

Хоть электрические и магнитные поля в абсолютно закры­той банке из-за потерь энергии постепенно исчезнут, можно сделать так, чтобы этого не было. Для этого надо провертеть в банке сбоку дырочку и понемножку подбавлять энергию, чтобы возмещать потери. Надо взять проволочку, просунуть ее через дырочку в банке и припаять ее к внутренней части стенки, чтобы получилась петля (фиг. 23.8). Если подсоединить эту проволоч­ку к источнику высокочастотного переменного тока, то этот ток будет снабжать энергией электрическое и магнитное поля по­лости и поддерживать колебания. Это произойдет, конечно, лишь в том случае, если частота источника энергии совпадет с резонансной частотой банки.



Фиг. 23.9. Устройство для наблюдения резонанса в полости.



Фиг. 23.10. Кривая отклика, на частоту для резонансной полости.

Если частота у источника не та, то электрические и магнитные поля резонировать не будут и поля в банке окажутся слабенькими.

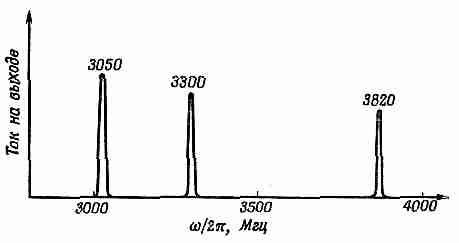
Резонансное поведение легко наблюдать, если в банке про­делать другую дырку и продеть в нее другую петлю (фиг. 23.8). Изменяющееся магнитное поле, проходящее через эту вто­рую петлю, будет генерировать в ней э. д. с. индукции. Если теперь эту петлю соединить с внешним измерительным контуром, то токи в нем будут пропорциональными напряженно­сти полей в полости. Представьте теперь, что входная петля на­шей полости соединена с радиочастотным сигнал-генератором (фиг. 23.9). Сигнал-генератор состоит из источника перемен­ного тока, частоту которого можно менять, поворачивая ручку на панели генератора. Соединим затем выходную петлю полости с «детектором» — прибором, измеряющим ток от выходной пет­ли. Отсчеты на его шкале пропорциональны этому току. Если затем измерить ток на выходе как функцию частоты сигнал-ге­нератора, то получится кривая, похожая на изображенную на фиг. 23.10. Ток на выходе невелик на всех частотах, кроме тех, которые близки к ω0— резонансной частоте полости. Резонанс­ная кривая очень похожа на ту, о которой говорилось в гл. 23 (вып. 2). Однако ширина резонанса меньше, нежели обычно по­лучается в резонансных контурах, составленных из индуктивностей и емкостей; иначе говоря, Q (добротность) полости очень высока. Зачастую встречаются даже Q порядка 100 000 и выше, особенно если внутренние стенки полости сделаны из очень хорошо проводящего материала, например из серебра.

**§ 4. Собственные колебания полости**

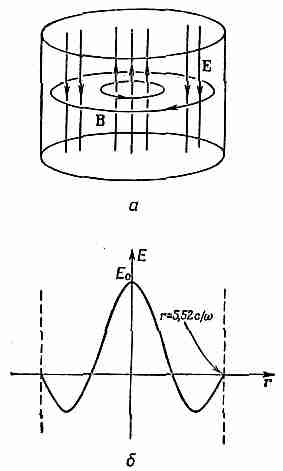
*Предположим, что мы пытаемся проверить свою теорию и де­лаем измерения с настоящей банкой. Мы берем банку в форме цилиндра диаметром 7,5 см и высотой около 6,3 см. К ней при­делываются входная и выходная петли (см. фиг. 23.8). Если рассчитать ожидаемую для этой банки резонансную частоту по формуле (23.18), то получится f0=ω0/2π=3010 Мгц. Мы берем сигнал-генератор с частотой около 3000 Мгц и начинаем слегка ее варьировать, пока не появляется резонанс; мы замечаем, что наибольший ток на выходе возникает, скажем, при частоте 3050 Мгц. Это очень близко к предсказанной резонансной час­тоте, но до конца не совпадает. Можно привести несколько мыс­лимых причин расхождения. Может быть, резонансная частота немного изменилась, потому что мы прорезали несколько дырок, чтобы вставить соединительные петли. Но это вряд ли: дырки должны были бы слегка понизить резонансную частоту, так что причина не в этом. Тогда, может быть, в калибровке частоты сигнал-генератора допущена небольшая ошибка или измерения диаметра полости недостаточно точны. Во всяком случае, согла­сие довольно хорошее.*

Но гораздо важнее то, что произойдет, когда частота нашего сигнал-генератора уже значительно удалится от 3000 Мгц. Тогда мы получим такой результат, как на фиг. 23.11. Если на­чать сильнее менять частоту, то получится, что, кроме ожидавшегося резонанса близ 3000 Мгц, имеется еще другой резонанс возле 3300 Мгц и третий возле 3820 Мгц. Что означают эти до­бавочные резонансы? Разгадку дает фиг. 23.6. Там мы предполо­жили, что на край банки приходится первый нуль функции Бес­селя. Но ведь не исключено, что краю банки отвечает второй нуль функции Бесселя, так что в промежутке от центра банки до ее края происходит одно полное колебание электрического поля (фиг. 23.12, а). Такой тип колебаний полей вполне допустим, и естественно ожидать, что банка начнет резонировать на такой частоте. Но заметьте: второй нуль функции Бесселя наблюдает­ся при x=5,52 (фиг. 23.12,6), т. е. более чем вдвое дальше, чем первый нуль. Значит, резонансная частота колебаний этого типа превышала бы 6000 Мгц. Ее, без сомнения, можно заметить, но это не объясняет нам резонанса при 3300 Мгц.

Все дело в том, что в своем анализе поведения резонансной полости мы рассмотрели лишь одно возможное геометрическое расположение электрических и магнитных полей. Мы считали,



Фиг. 23.11. Наблюдаемые резонансные частоты цилиндрической полости.

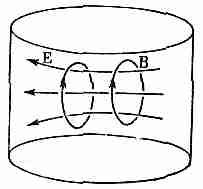


Фиг. 23.12. Более высокочастотный тип колебаний.

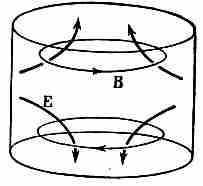
*что электрическое поле верти­кально, а магнитное расположено горизонтальными кругами. Но мыслимы и другие поля. От них требуется лишь, чтобы они удовле­творяли уравнениям Максвелла и чтобы электрическое поле входило в стенки под прямым углом к ним. Мы взяли случай, когда верх и низ банки плоские, но все не очень бы изменилось, если бы верх и низ были изогнутыми. Да и вообще, от­куда банке «знать», где у нее верх,*

где низ, а где бока? И действительно, можно доказать, что суще­ствует такой тип колебаний полей внутри банки, при котором электрическое поле идет более или менее вдоль ее диаметра (фиг. 23.13).

И не так уж трудно понять, почему собственная частота ко­лебаний этого типа не будет сильно отличаться от собственной частоты первого рассмотренного нами типа колебаний. Пред­ставьте, что вместо цилиндрической полости мы взяли бы полость в виде куба со стороной 7,5 см. Ясно, что у нее будет три разных типа колебаний, но с одной и той же частотой. Тип колебаний, при котором электрическое поле направлено примерно верти­кально, будет иметь ту же частоту, что и тип колебаний, при ко­тором электрическое поле направлено вправо и влево. Если те­перь этот куб переделать в цилиндр, то частоты как-то изменятся. Но все же можно ожидать, что изменение не будет большим, если размеры полости изменятся очень мало.



Фиг. 23.13. Поперечный тип колебаний цилиндрической поло­сти.

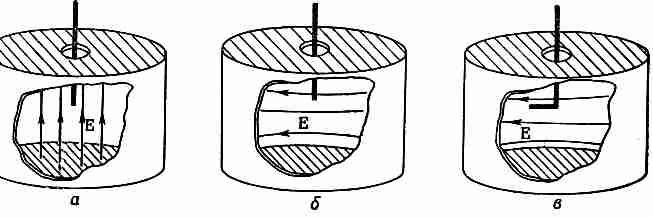


Фиг. 23.14. Еще один тип коле­баний цилиндрической полости.

Значит, частота того типа колебаний, что на фиг. 23.13, не должна сильно отличаться от частоты на фиг. 23.8. Можно было бы подробно рассчи­тать собственную частоту того типа колебаний, который показан на фиг. 23.13, но мы этого сейчас делать не будем. Если бы вы­числения были проделаны, мы обнаружили бы, что при предпо­ложенных размерах резонансная частота получается совсем близко от наблюденного резонанса при 3300 Мгц. С помощью подобных расчетов можно показать, что должен существовать еще другой тип колебаний при другой замеченной нами ре­зонансной частоте — 3800 Мгц. Электрические и магнитные поля, характерные для этого типа колебаний, показаны на фиг. 23.14. Электрическое поле здесь больше не пытается тя­нуться через всю полость. Оно направлено от боков к торцам.

Теперь, надеюсь, вы уже поверите мне, что при дальнейшем повышении частоты следует ожидать появления все новых и но­вых резонансов. Существует множество различных типов коле­баний; у каждого из них своя частота, отвечающая какому-то частному расположению электрических и магнитных полей. Каждое такое расположение полей называют собственным колебанием (или модой). Резонансную частоту каждого типа колеба­ний можно подсчитать, найдя из уравнений Максвелла электри­ческие и магнитные поля в полости.

Как можно узнать, наблюдая резонанс при некоторой опре­деленной частоте, что за тип колебаний при этом возбуждается? Один способ такой: надо в полость через отверстие просунуть проволочку.

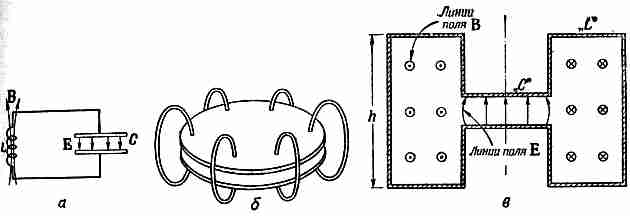


Фиг. 23.15. Небольшая проволочка, введенная в полость, если она парал­лельна к Е, сильней исказит ревонанс, чем та, которая расположена поперек Е.

Если электрическое поле направлено вдоль проволочки (фиг. 23.15, а), в ней возникнут сравнительно сильные то­ки. Они начнут сильно сосать энергию из полей, и резонанс бу­дет подавлен. Если же электрическое поле будет такое, как на фиг. 23.15,6, то проволочка создаст гораздо меньший эффект. В какую сторону в этом месте направлено поле при этом типе ко­лебаний, можно узнать, согнув проволочку так, как показано на фиг. 23.15,в. Поворачивая проволочку, вы увидите, что она сильно изменяет силу резонанса, когда ее конец параллелен Е, и мало влияет на резонанс, если он повернут поперек Е.

**§ 5. Полости и резонансные контуры**

Хотя описанная нами резонансная полость с виду очень не­похожа на обычный, состоящий из катушки и конденсатора резонансный контур, однако обе резонансные системы тесно между собой связаны. Обе они — члены одной семьи; это всего лишь два крайних примера электромагнитных резонаторов, и между ними можно поместить немало промежуточных стадий. Начнем, скажем, с того, что подключим конденсатор в параллель с индуктивностью и образуем резонансный контур (фиг. 23.16, а). Этот контур будет резонировать на частоту ω0=√LC. Если мы захотим поднять частоту в этом контуре, то этого можно дос­тичь, понизив индуктивность L, например уменьшив число вит­ков в катушке. Но далеко на таком пути мы не уйдем. Мы дой­дем до последнего витка и тогда останется просто кусок провода, соединяющий верх и низ конденсатора. Можно было бы продол­жать повышать резонансную частоту, уменьшая емкость; однако можно и дальше уменьшать индуктивность, запараллеливая рядом несколько индуктивностей. Две одновитковые индук­тивности, включенные в параллель друг у друга, приведут к половине индуктивности одного витка. Так что, даже доведя катушку до одного витка, можно продолжать повышать резо­нансную частоту, добавляя отдельные петли, соединяющие верхнюю обкладку конденсатора с нижней. На фиг. 23.16, б показаны обкладки конденсатора, соединенные шестью подоб­ными «одновитковыми индуктивностями». Продолжая прибав­лять новые куски провода, мы постепенно перейдем к совершен­но замкнутой резонансной системе. Такая система (вернее, ее осевое сечение) показана на фиг. 23.16,в. Теперь индуктивность— это пустотелый цилиндр, припаянный к краям обкладок конденсатора. Электрические и магнитные поля будут иметь направление, показанное на рисунке. Такой предмет — это, в сущности, уже резонансная полость. Ее называют «нагружен­ной» полостью. Но можно ее также все еще рассматривать как L—С-контур, в котором емкостная часть — область, где находится большая часть электрического поля, а индуктивная — где помещается большая часть магнитного поля.

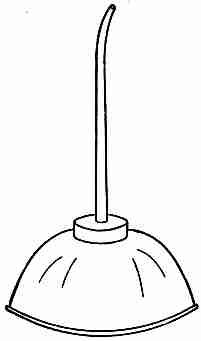


Фиг. 23.16. Резонаторы с возрастающей резонансной частотой.

Если мы захотим повысить частоту резонатора на фиг. 23.16,в сильнее, то надо еще уменьшить индуктивность L. Чтобы этого добиться, следует уменьшить геометрические размеры индук­тивной секции, скажем, уменьшить на чертеже высоту h. При уменьшении h резонансная частота растет. И в конце концов можно, конечно, дойти до такого положения, при котором высота h сравняется с промежутком между обкладками. Получится обычная цилиндрическая банка; наш резонансный контур пре­вратится в полый резонатор, показанный на фиг. 23.7.

*Заметьте теперь, что в первоначальном резонансном L—С-контуре (фиг. 23.16) электрические и магнитные поля были со­вершенно разделены. Когда мы постепенно видоизменяли резо­нансную систему, все повышая ее частоту, то магнитное поле теснее и теснее сближалось с электрическим, пока в полом резонаторе окончательно не перемешалось с ним.*

Хотя все полые резонаторы, о кото­рых в этой главе говорилось, были ци­линдрическими, ничего волшебного в самой цилиндрической форме нет. Банка любого вида все равно будет обладать резонансными частотами, отвечающими различным допустимым типам колеба­ний электрических и магнитных полей. К примеру, у «полости» на фиг. 23.17 будет своя личная совокупность резонансных частот, хотя их и трудно рас­считать.



*Фиг, 23.17. Еще одна резонансная полость.*

***Глава* 24**

**ВОЛНОВОДЫ**

[**§ 1. Передаю****щая линия**](#а1)

[**§ 2. Прямоуго****льный волновод**](#а2)

[**§ 3. Граничная** **частота**](#а3)

[**§ 4. Скорость в****олн в волноводе**](#а4)

[**§ 5. Как наблюд****ать волны в** **волноводе**](#а5)

[**§ 6. Сочленени****е волноводов**](#а6)

[**§ 7. Типы вол****н в волноводе**](#а7)

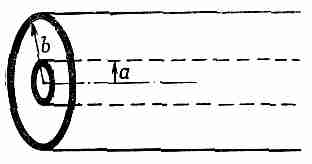
[**§ 8. Другой спос****об рассмотрения волн в волноводе**](#а8)

**§ 1. Передающая линия**

В предыдущей главе мы выяснили, что слу­чится с сосредоточенными элементами цепи, если на них подать очень высокую частоту. Мы пришли к выводу, что резонансный контур мож­но заменить полостью, внутри которой поля вступают друг с другом в резонанс. Но есть и другой интересный технический вопрос: как связать между собой два предмета, чтобы можно было передать электрическую энергию от одного к другому? В цепях низкой частоты эта связь осуществляется по проводам, но этот способ на высоких частотах не очень хорош, потому что энергия рассеивается во все стороны и трудно контролировать, куда она потечет. От проводов во все стороны разбегаются поля; к тому же то­ки и напряжения высокой частоты не очень хорошо «проводятся» проводами. В этой главе мы и хотим разобраться в том, как можно со­единять между собой предметы на большой частоте. Таков по крайней мере один подход к теме нашей лекции.

Но можно к ней подойти и по-другому, мож­но сказать, что мы пока обсуждали поведение волн в пустом пространстве, а теперь пришло время посмотреть, что случится, если колеблю­щиеся поля ограничить в одном или двух изме­рениях. Мы обнаружим новое интересное яв­ление: если поля ограничить в двух измерениях и дать им свободу в третьем, они распространя­ются в виде волн. «Волны в волноводе» и будут предметом нашей лекции.

Начнем с разработки общей теории линии передачи. Обычная линия электропередачи, ко­торая тянется от мачты к мачте по полям и ле­сам, тратит часть своей мощности на излучение, но частота здесь так мала (50—60 гц), что эти потери почти не­заметны.

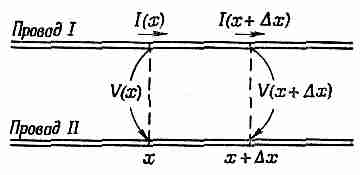


Фиг. 24.1. Коаксиальная передающая линия.

От излучения можно избавиться, поместив провод в металлическую трубу, но это непрактично, потому что при та­ких токах и напряжениях в сети без больших, тяжелых и доро­гих труб не обойтись. Так что в ходу обычно «открытые линии».

На частотах чуть повыше (порядка нескольких килогерц) излучение уже вполне заметно. Но его можно уменьшить, поль­зуясь «двухжильной» линией передачи, как это делается при те­лефонной связи на малые расстояния. Однако при дальнейшем повышении частоты излучение вскоре становится нетерпимо сильным либо за счет потерь энергии, либо из-за того, что энер­гия перетекает в другие контуры, где она совсем не нужна. На частоте от нескольких килогерц до нескольких тысяч мегагерц электромагнитные сигналы и электромагнитная энергия обычно передаются по коаксиальным линиям, т. е. по проводу, помещен­ному внутрь цилиндрического «внешнего проводника», или «за­щиты». Хотя дальнейшие рассуждения годятся для линии пере­дачи из двух параллельных проводников любого сечения, речь будет идти о коаксиальном кабеле.

Возьмем простейшую коаксиальную линию, состоящую из центрального проводника (пусть это будет тонкостенный полый цилиндр) и внешнего проводника — тоже тонкостенного цилин­дра, ось которого совпадает с осью внутреннего проводника (фиг. 24.1). Для начала представим себе, как примерно ведет себя эта линия при относительно низких частотах. Мы уже кое-что говорили о поведении при низких частотах, когда утверж­дали, что у двух таких проводников на каждую единицу длины приходится сколько-то там индуктивности и сколько-то емкости. И действительно, поведение любой передающей линии при низ­ких частотах можно описать, задав ее индуктивность на едини­цу длины L0 и ее емкость на единицу длины С0. Тогда линию можно было бы рассматривать как предельный случай фильтра L—С (см. гл. 22, § 7). Можно создать такой фильтр, который будет имитировать линию, если последовательно соединить меж­ду собой маленькие элементы индуктивности L0Ax и зашунтировать их маленькими емкостями С0Δx; (где Δx; — элемент длины линии). Применяя к бесконечному фильтру наши прежние ре­зультаты, мы бы увидали, что вдоль линии должны распростра­няться электрические сигналы. Но поступим иначе и вместо этого изучим свойства линии, опираясь на дифференциальные уравнения.



Фие. 24.2. Токи и напряже­ния в передающей линии.

C:\1\pic\gray.jpgПредположим, мы наблюдаем за происходящим в двух сосед­них точках передающей линии, скажем, на расстояниях х и х+Δх от начала линии. Обозначим напряжение между провод­никами через V(x), а ток в верхнем проводнике I(х} (фиг. 24.2). Если ток в линии меняется, то индуктивность вызовет падение напряжения вдоль небольшого участка линии от х до x+Δx

*Или, беря предел при Δx→0, получаем*

C:\1\pic\gray.jpg

(24.1)

Изменение тока приводит к перепаду напряжения.

C:\1\pic\gray.jpgТеперь еще раз взгляните на рисунок. Если напряжение в х меняется, то должны появляться заряды, которые на этом участке передаются емкости. Если взять небольшой участок ли­нии от х до x+Δx, то заряд на нем равен q = C0ΔxV. Скорость изменения этого заряда равна C0ΔxdV/dt, но заряд меняется только тогда, когда ток I(х), входящий в элемент, отличается от выходящего тока I(х+Δх), Обозначая разность через ΔI,

C:\1\pic\gray.jpgЕсли перейти к пределу при Δx→0, получается

(24.2)

*Так что сохранение заряда предполагает, что градиент тока про­порционален скорости изменения напряжения во времени. Уравнения (24.1) и (24.2) — это основные уравнения линии передачи. При желании их можно видоизменить так, чтобы они учитывали сопротивление проводников или утечку зарядов че­рез изоляцию между проводниками, но пока нам достаточно са­мого простого примера.*

C:\1\pic\gray.jpgОба уравнения передающей линии можно объединить, про­дифференцировав первое по t, а второе по x; и исключив V или I. Получится либо

(24.3)

C:\1\pic\gray.jpg*либо*

(24.4)

Мы снова узнаем волновое уравнение по х. В однородной передающей линии напряжение (и ток) распространяется вдоль линии как волна. Напряжение вдоль линии будет следовать за­кону V(x, t)=f(x-vt) или V(x, t)=g(x+vt) или их сумме. А что такое здесь v? Мы знаем, что коэффициент при d2/dt2 — это просто 1/v2. так что

C:\1\pic\gray.jpg

(24.5)

C:\1\pic\gray.jpgПокажите самостоятельно, что напряжение для каждой волны в линии пропорционально току этой волны и что коэффи­циент пропорциональности — это просто характеристический импеданс z0. Обозначив через V+ и I+ напряжение и ток для вол­ны, бегущей в направлении +x, вы должны будете получить

(24.6)

C:\1\pic\gray.jpgРавным образом, для волны, бегущей в направлении -х, полу­чится

Характеристический импеданс, как мы уже видели из наших уравнений для фильтра, дается выражением

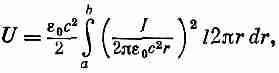
C:\1\pic\gray.jpg

(24.7)

и поэтому есть чистое сопротивление.

Чтобы найти скорость распространения *v* и характеристиче­ский импеданс z0 передающей линии, нужно знать индуктив­ность и емкость единицы длины линии. Для коаксиального ка­беля их легко подсчитать. Поглядим, как это делается. При рас­чете индуктивности мы будем следовать идеям, изложенным в гл. 17, § 8, и положим 1/2 *LI2* равным магнитной энергии, в свою очередь получаемой интегрированием ε0с2B2/2 по объему. Пусть по внутреннему проводнику течет ток I; тогда мы знаем, что B=I/2πε0с2r, где r — расстояние от оси. Беря в качестве эле­мента объема цилиндрический слой толщины *dr* и длины l*,*

получаем для магнитной энергии



C:\1\pic\gray.jpgгде а и b — радиусы внутреннего и внешнего проводников, Интегрируя, получаем

(24.8)

C:\1\pic\gray.jpgПриравниваем эту энергию к *1I2LI2* и находим

(24.9)

Как и следовало ожидать, *L* пропорционально длине l линии, поэтому *L0* (индуктивность на единицу длины) равна

C:\1\pic\gray.jpg

(24.10)

Мы уже рассчитывали заряд на цилиндрическом конден­саторе [гл. 12, § 2 (вып. 5)]. Деля теперь этот заряд на раз­ность потенциалов, получаем

C:\1\pic\gray.jpg

Емкость же на единицу длины *С0—* это *С/l.* Сопоставляя этот результат с (24.10), мы убеждаемся, что произведение *L0C0* равно просто 1/с2, т. е. *v=1√L0C0* равно *с.* Волна бежит по линии со скоростью света. Нужно подчеркнуть, что этот результат зави­сит от сделанных предположений: а) что в промежутке между проводниками нет ни диэлектриков, ни магнитных материалов; б) что все токи текут только по поверхности проводников (как это бывает в идеальных проводниках). Позже мы увидим, что на высоких частотах все токи распределяются на поверхности хоро­ших проводников, словно они идеальные проводники, так что это предположение правильно.

Любопытно, что в этих двух предположениях произведение *L0C0* равно 1*/с2* для *любой* параллельной пары проводников, да­же в том случае, если, скажем, внутренний шестигранный про­водник тянется как-то вдоль эллиптического внешнего. Пока сечение постоянно и между проводниками нет ничего, волны рас­пространяются со скоростью света.

Подобных общих утверждений по поводу характеристиче­ского импеданса сделать нельзя. Для коаксиальной линии он равен

C:\1\pic\gray.jpg

(24.11)

Множитель 1/e0c имеет размерность сопротивления и равен 120π ом. Геометрический фактор In(b/a) только логарифмически зависит от размеров, так что коаксиальная линия (и большинст­во других линий), как правило, обладает характеристическим импедансом порядка 50 ом или что-то около этого, до нескольких сот ом.

**§ 2. Прямоугольный волновод**

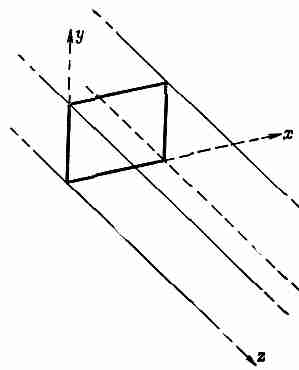
То, о чем мы сейчас будем говорить, на первый взгляд ка­жется поразительным явлением: если из коаксиального кабеля убрать внутреннюю жилу, он все равно будет проводить элект­ромагнитную энергию. Иными словами, на достаточно высокой частоте полая труба действует ничуть не хуже, чем труба, внут­ри которой имеется провод. Связано это с другим таинственным явлением, о котором мы уже знаем,— на высоких частотах ре­зонансный контур (конденсатор с катушкой) можно заменить простой банкой.

Это выглядит очень странно, если пользоваться представле­нием о передающей линии, как о распределенных индуктивности и емкости. Но ведь все мы знаем, что внутри пустой металличе­ской трубы могут распространяться электромагнитные волны. Если труба прямая, через нее все видно! Значит, электромаг­нитные волны через трубу бесспорно проходят. Но мы знаем также, что нет возможности передавать волны низкой частоты (переменный ток или телефонные сигналы) через одну-единственную металлическую трубу. Выходит, электромагнитные вол­ны проходят через нее только тогда, когда их длина волны дос­таточно мала. Поэтому мы рассмотрим предельный случай самых длинных волн (или самых низких частот), способных про­ходить через трубу данного размера. Эту трубу, служащую для прохождения волн, называют волноводом.

Начнем с прямоугольной трубы, ее проще всего анализи­ровать. Сперва изложим все математически, а потом еще раз вернемся назад и рассмотрим вопрос более элементарно. Но этот более элементарный подход легко применить лишь к прямо­угольным трубам. Основные же явления в любой трубе одни и те же, так что математические доводы звучат более основа­тельно.

Поставим перед собой следующий вопрос: какого типа волны могут существовать в прямоугольной трубе? Выберем сначала удобные оси координат: ось z направим вдоль трубы, а оси х и у — вдоль стенок (фиг. 24.3).

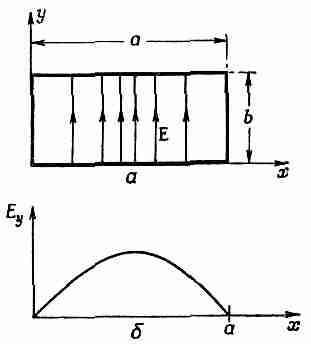
Известно, что когда волны света бегут по трубе, их электри­ческое поле поперечно; поэтому начнем с поиска таких решений, в которых Е перпендикулярно z, скажем решений с одной толь­ко y-компонентой Еy (фиг. 24.4,а). Это электрическое поле должно как-то меняться поперек волновода; действительно, ведь оно должно обратиться в нуль на сторонах, параллельных оси у: токи и заряды в проводнике устраиваются всегда так, чтобы на его поверхности не осталось никаких касательных составляющих электрического поля.



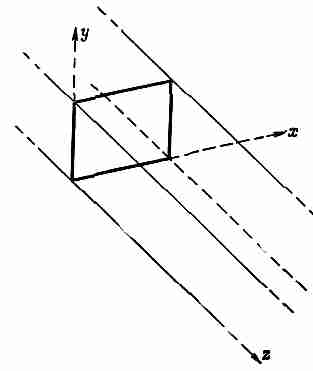
Фиг, 24.3. Выбор осей коорди­нат для прямоугольного волно­вода.

Значит, график Еy от х должен напоминать некоторую дугу (фиг. 24.4,6). Может быть, это найденная нами для полости функция Бесселя? Нет, функции Бесселя появляются только в задачах с цилиндрической сим­метрией. При прямоугольных сечениях волны — это обычные гармонические функции, что-нибудь вроде sinkxx.

Раз мы ищем волны, которые бегут вдоль трубы, то следует ожидать, что поле как функция z будет колебаться между по­ложительными и отрицательными значениями (фиг. 24.5) и что должно как-то меняться поперек волновода; действительно, ведь оно должно обратиться в нуль на сторонах, параллельных оси у: токи и заряды в проводнике устраиваются всегда так, чтобы на его поверхности не осталось никаких касательных составляющих электрического поля.



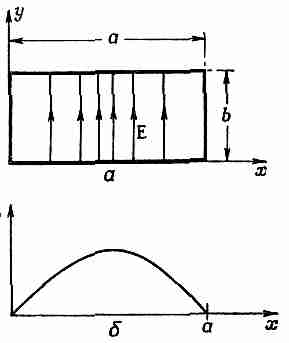
Фиг. 24.4. Электрическое поле в волноводе при некотором зна­чении z.



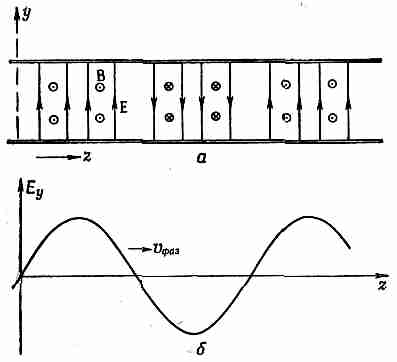
Фиг. 24.3. Выбор осей коорди­нат для прямоугольного волно­вода.

Значит, график Еy от х должен напоминать некоторую дугу (фиг. 24.4,6). Может быть, это найденная нами для полости функция Бесселя? Нет, функции Бесселя появляются только в задачах с цилиндрической сим­метрией. При прямоугольных сечениях волны — это обычные гармонические функции, что-нибудь вроде sinkxx.

Раз мы ищем волны, которые бегут вдоль трубы, то следует ожидать, что поле как функция z будет колебаться между по­ложительными и отрицательными значениями (фиг. 24.5) и что



*Фиг. 24,4. Электрическое поле в волноводе при некотором зна­чении z.*



Фиг. 24.5. Зависимость поля в волноводе от z.

эти колебания будут бежать вдоль трубы с какой-то скоростью v. Если имеются колебания с определенной частотой ω, то надо испытать, может ли волна меняться по z как cos(ωt—kzz) или, в более удобной математической форме, как еi(ωt-k2z). Такая зависимость от z представляет волну, бегущую со скоростью v=ω/kz [см. гл. 29 (вып. 3)].

C:\1\pic\gray.jpgЗначит, можно допустить, что волна в трубе имеет следую­щую математическую форму:

(24.12)

C:\1\pic\gray.jpgДавайте-ка поглядим, можно ли при таком допущении удов­летворить правильным уравнениям поля. Во-первых, электри­ческое поле не должно иметь составляющих, касательных к про­воднику. Для этого наше поле подходит; вверху и внизу оно на­правлено поперек стенок, а с боков равно нулю. Впрочем, для последнего необходимо, чтобы полволны sin kxx как раз укла­дывалось на всей ширине волновода, т. е. чтобы было

(24.13)

Это условие определяет *kx.* Есть и иные возможности, например *kxa=2π,* З*π*, ... или в общем случае

C:\1\pic\gray.jpg

(24.14)

где n — целое. Все они представляют различные сложные рас­положения полей, но мы дальше будем говорить о самом прос­том, когда kx=π/a, a *a* — внутренняя ширина трубы.

*Далее, дивергенция Е в пустом пространстве внутри трубы должна быть равна нулю, потому что в трубе нет зарядов. У нашего Е есть только y-компонента, но по у она не меняется, так что действительно V•Е=0.*

C:\1\pic\gray.jpgНаконец, наше электрическое поле должно согласовываться с остальными уравнениями Максвелла для пустого пространст­ва внутри трубы. Это все равно, что потребовать, чтобы оно удовлетворяло волновому уравнению

(24.15)

Нам надо проверить, подойдет ли сюда выбранная нами форма (24.12). Вторая производная Еy по х просто равна —k2хЕу. Вторая производная по у равна нулю, потому что от у ничего не зависит. Вторая производная по z есть —k2zEy, а вторая про­изводная по t это —ω2Еy . Тогда уравнение (24.15) утверждает, что

C:\1\pic\gray.jpg

C:\1\pic\gray.jpgЕсли *Еy* не обращается всюду в нуль (этот случай нас не очень интересует), то это уравнение выполняется всегда, если

(24.16)

C:\1\pic\gray.jpgЧисло *kx* мы уже закрепили, так что это уравнение говорит нам, что волны предположенного нами типа возможны лишь тогда, когда *kz* связано с частотой ω условием (24.16), т. е. когда

(24.17)

Волны, которые мы описали, распространяются в направлении z с таким значением *kz.*

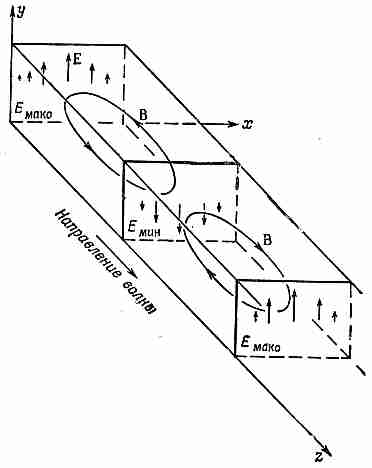
Волновое число kz, которое мы получили из (24.17), дает нам при данной частоте ω скорость, с которой бегут вдоль трубы узлы волны. Фазовая скорость равна

C:\1\pic\gray.jpg

(24.18)

C:\1\pic\gray.jpgВспомните теперь, что длина λ, бегущей волны дается форму­лой λ*=2πv/*ω*,* так что *kz*также равняется *2π/*λ*g,* где λg*—* длина волны осцилляции в направлении z — «длина волны в волново­де». Длина волны в волноводе, конечно, отличается от длины электромагнитных волн той же частоты, но в пустом простран­стве. Если длину волны в пустом пространстве обозначить λ0 (что равно 2*π*с/ω), то (24.17) можно переписать в таком виде:

(24.19)



*Фиг. 24.6. Магнитное по­ле в волноводе.*

Кроме электриче­ских полей, существуют и магнитные поля, кото­рые тоже движутся вол­нообразно. Мы не будем сейчас заниматься выво­дом выражений для них. Ведь c2∇XВ = *dE/dt,* и линии В циркулируют вокруг областей, где *dE/dt —* наибольшее, т. е. на полпути между максимумом и миниму­мом Е. Петли В лежат параллельно плоскости *xz* и между гребнями и впадинами Е (фиг. 24.6).

**§ 3. Граничная частота**

Уравнение (24.16) для kz на самом деле имеет два корня — один с плюсом, другой с минусом. Ответ следует писать так:

C:\1\pic\gray.jpg

(24.20)

Смысл этих двух знаков просто в том, что волны в волноводе мо­гут бежать и с отрицательной фазовой скоростью (в направлении —z), и с положительной. Волны, естественно, должны иметь возможность бежать в любую сторону. И раз одновременно мо­гут существовать оба типа волн, то решение в виде стоячих волн тоже возможно.

Наше уравнение для *kz* сообщает нам также, что высшие час­тоты приводят к большим значениям *kg,* т. е. к более коротким волнам, пока в пределе больших ω величина *k* не станет равной ω/с — тому значению, которое бывает, когда волна бежит в пусто­те. Свет, который мы «видим» сквозь трубу, все еще бежит со ско­ростью *с.* Но посмотрите зато, какая странная вещь получается, когда частота убывает. Сперва волны становятся все длиннее и длиннее. Но если частота ω станет чересчур малой, то под кор­нем в (24.20) внезапно появится отрицательное число. Это произойдет, когда ω перевалит через πс/а или когда λ0 станет боль­ше 2а. Иначе говоря, когда частота становится меньше некото­рой критической частоты ωc=πс/а, волновое число *kz* (а также λ*g)* становится мнимым и никакого решения у нас не остается. Или остается? Кто, собственно, сказал, что *kz* должно быть действи­тельным? Что случится, если оно станет мнимым? Уравнения-то поля по-прежнему ведь будут удовлетворяться. Может быть, и мнимые *kz* тоже представляют какую-то волну?

C:\1\pic\gray.jpgПредположим, что ω действительно меньше ωc; тогда можно написать

(24.21)

где *k' —* действительное положительное число

C:\1\pic\gray.jpg

(24.22)

C:\1\pic\gray.jpgЕсли теперь вернуться к нашей формуле (24.12) для *Еy* , то надо будет написать

(24.23)

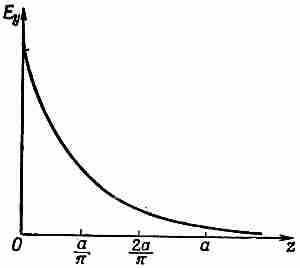
C:\1\pic\gray.jpgчто можно также представить в виде

(24.24)

Это выражение приводит к полю Е, которое во времени колеб­лется как *ei*ω*t,* a no *z* меняется как *e±k'z.* Оно плавно убывает или возрастает с z, как всякая действительная экспонента. В нашем выводе мы не думали о том, откуда взялись волны, где их источник, но, конечно, где-то в волноводе он должен быть. И знак, который стоит при *k',* должен быть таков, чтобы поле убывало при удалении от источника волн.

Итак, при частотах ниже ω*с—*π*с/а* волны вдоль трубы *не рас­пространяются;* осциллирующее поле проникает в трубу лишь на расстояние порядка *i/k'.* По этой причине частоту ω*с* назы­вают «граничной частотой» волновода. Глядя на (24.22), мы ви­дим, что для частот чуть пониже ωc число *k'* мало, и поля могут проникать в трубу довольно далеко. Но если со намного меньше ωс, коэффициент *k'* в экспоненте равняется π/а, и поле отмирает чрезвычайно быстро (фиг. 24.7). Поле убывает в *е* раз на расстоя­нии а/π, т. е. на трети ширины волновода. Поля проникают в волновод на очень малое расстояние от источника.

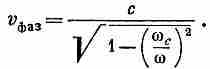
Мы хотим еще раз подчеркнуть эту характерную черту на­шего анализа прохождения волн по трубе — появление мнимого волнового числа *kz.* Когда, решая уравнение в физике, мы полу­чаем мнимое число, то это обычно ничего физического не озна­чает. Для *волн,* однако, мнимое волновое число *действительно* нечто означает. Волновое уравнение по-прежнему удовлетво­ряется; оно только означает, что решение приводит к экспоненциально убывающему полю вместо распространяющихся волн



*Фиг. 24.7. Изменение Еy с ро­стом z при* ω<<ωc.

Итак, если в любой задаче на волны *k* при какой-то частоте ста­новится мнимым, это означает, что форма волны меняется — синусоида переходит в экспоненту.

**§ 4. Скорость волн в волноводе**

Та скорость волн, о которой мы пока говорили,— это фа­зовая скорость, т. е. скорость узлов волны; она есть функция частоты. Если подставить (24.17) в (24.18), то можно написать

(24.25)

Для частот выше граничной (для которых бегущая волна суще­ствует) ωc/ω меньше единицы, vфаз— действительное число, *боль­шее* скорости света. Мы уже видели в гл. 48 (вып. 4), что *фазовые* скорости, большие скорости света, возможны, потому что это просто движутся узлы волн, а не энергия и не информация. Чтобы узнать, как быстро движутся *сигналы,* надо подсчитать быстроту всплесков или модуляций, вызываемых интерферен­цией волн одной частоты с одной или несколькими волнами слегка иных частот [см. гл. 48 (вып. 4)]. Скорость огибающей такой группы волн мы назвали волновой скоростью; это не ω/k, a *d*ω*/dk:*

C:\1\pic\gray.jpg

(24.26)

C:\1\pic\gray.jpgДифференцируя (24.17) поω и переворачивая, чтобы полу­чить *d*ω*/dk,* получаем

(24.27)

Это меньше скорости света.

Среднее геометрическое между *vфаз* и vгр в точности равно *с —* скорости света:

C:\1\pic\gray.jpg

(24.28)

C:\1\pic\gray.jpgЭто любопытно, ведь сходное соотношение мы встречали и в квантовой механике. У частицы с любой скоростью (даже у релятивистской) импульс *р* и энергия *U* связаны соот­ношением

(24.29)

Но в квантовой механике энергия — это hω, а импульс —это *h/λ’,* или h*k;* значит, (24.29) можно записать так:

C:\1\pic\gray.jpg

(24.30)

C:\1\pic\gray.jpgили

(24.31)

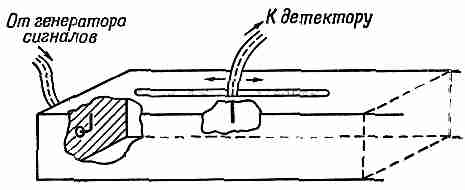
C:\1\pic\gray.jpgа это очень похоже на (24.17). . . Интересно, не правда ли? Групповая скорость волн — это также скорость, с какой энергия передается по трубе. Если вам нужно найти поток энер­гии сквозь волновод, надо умножить плотность энергии на груп­повую скорость. Если среднее квадратичное электрическое поле равно *Е0,* то средняя плотность электрической энергии равна *ε0Е20/2.* Кроме этого, часть энергии связана с магнитным полем. Мы не будем здесь это доказывать, но в любой полости или трубе магнитная и электрическая энергии равны между собой, так что полная плотность электромагнитной энергии равна *ε0Е20.* А мощность *dU/dt,* передаваемая волноводом, поэтому равна

(24.32)

(Позже мы рассмотрим другой, более общий способ вычисления потока энергии.)

**§ 5. Как наблюдать волны в волноводе**

Энергию в волновод можно ввести своего рода «антенной», воспользовавшись для этого, например, вертикальной прово­лочкой, или «штырем». В наличии волн в волноводе можно убедиться, отведя из него часть электромагнитной энергии с помо­щью приемной «антенки» — тоже какого-нибудь проволочного штыря или петельки. На фиг. 24.8 показан волновод, часть сте­нок на рисунке выхвачена, чтобы были видны входной штырь и приемный «пробник».



*Фиг. 24.8. Волновод с входным штырем и пробником.*

Входной штырь можно подключить через коаксиальный кабель к генератору сигналов, а приемный проб­ник таким же кабелем можно соединить с детектором. Обычно удобнее вводить пробник через длинную прорезь в стенке волно­вода. Тогда можно им водить вдоль волновода и замерять поле в разных местах.

Если подать с сигнал-генератора частоту ω, большую, чем граничная частота ωс, то по волноводу от штыря побегут волны. Если волновод бесконечной длины, то никаких волн, кроме этих, не будет (чтобы сделать его бесконечным, надо на конце его поставить тщательно сконструированный поглотитель, который не допустит отражения от этого конца). Тогда поскольку детектор измеряет поле близ пробника, усредненное по вре­мени, то он будет воспринимать сигнал, не зависящий от поло­жения в волноводе; на выходе будет регистрироваться величина, пропорциональная передаваемой мощности.

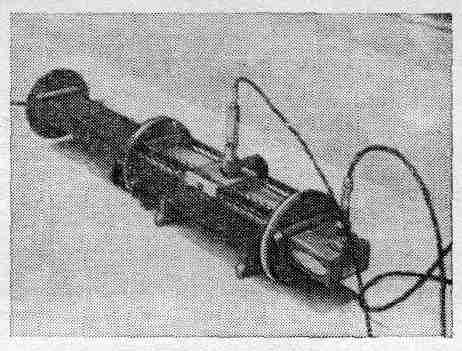
Если же сделать так, чтобы от дальнего конца волновода от­ражалась волна (предельный случай: если закрыть его металли­ческой пластинкой), то вдобавок к первоначальной волне по­явится отраженная. Эти две волны будут интерферировать и создадут в волноводе стоячую волну, похожую на стоячие волны в струне, о которых говорилось в гл. 49 (вып. 4). В этом случае, по мере того как пробник передвигается вдоль трубы, отсчеты детектора будут периодически повышаться и падать; максимум поля будет отмечать подъемы волны, а минимум — узлы. Рас­стояние между двумя последовательными узлами (или гребнями) равно λg/2. Это дает нам удобный способ измерять длину волны в волноводе. Если сдвигать частоту ближе к ωс, то расстоя­ние между узлами увеличится, показывая тем самым, что длина волны в волноводе изменяется по закону (24.19).

Пусть теперь наш сигнал-генератор включен на частоту, чуть-чуть меньшую, чем ωс. Тогда показания детектора будут постепенно падать по мере того, как пробник удаляется вдоль волновода. Если еще понизить частоту, напряженность поля начнет убывать быстрее, следуя кривой фиг. 24.7 и показывая, что волны не распространяются.

**§ 6. Сочленение волноводов**

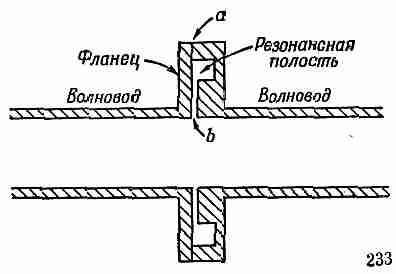
Важное практическое применение волноводов состоит в пере­даче высокочастотной мощности. Ими, например, соединяют высокочастотный осциллятор или выходной усилитель радио­локатора с антенной. Сама же антенна обычно состоит из пара­болического рефлектора, в фокус которого подается энергия от волновода, расширяющегося на конце в виде «рога», который излучает волны, приходящие по волноводу. Хотя высокую ча­стоту можно передавать и по коаксиальному кабелю, волновод все же лучше — по нему можно передавать большую мощность. Во-первых, передаваемая по кабелю мощность ограничена опас­ностью пробоя изоляции (твердой или газообразной) между проводниками. Напряженности полей в волноводе при данной мощности обычно не столь велики, как в кабеле, так что можно передавать большие мощности, не опасаясь пробоя. Во-вторых, потери мощности в коаксиальном кабеле обычно больше, чем в волноводе. В кабель приходится ставить изоляционный мате­риал, чтобы поддержать внутренний проводник, и в этом мате­риале возникают потери энергии, особенно при высоких часто­тах. Кроме того, плотности тока во внутреннем проводе весьма высоки, а поскольку потери пропорциональны *квадрату* плот­ности тока, то чем слабее ток в стенках волновода, тем меньше потери энергии. Чтобы свести эти потери к минимуму, внутрен­нюю поверхность волновода часто покрывают хорошо проводя­щим материалом, скажем серебром.

Проблема соединения «контуров» с волноводами резко отли­чается от аналогичной задачи при низких частотах. Ее часто называют микроволновым «сочленением». Для этой цели было придумано много приборов. Например, две секции волновода обычно связываются при помощи фланцев (фиг. 24.9), но такое соединение может повлечь за собой серьезные потери энергии, потому что через соединение потекут поверхностные токи, а их сопротивление довольно велико. Один из способов избежать по­терь — это сделать фланцы так, как показано на фиг. 24.10. Между соседними секциями волновода оставляют неболь­шой зазор, а на торце одного из фланцев делается желобок. Получается небольшая полость (ср. с фиг. 23.16,в), размеры ко­торой выбирают так, чтобы ее резонансная частота совпадала с частотой волн в волноводе. У такой резонансной полости «им­педанс» очень высок, поэтому через металлическое соединение (точка *а* на фиг. 24.10) идет сравнительно слабый ток. Сильные токи в волноводе попросту заряжают и разряжают «емкость» щели (в точке b*),* где энергия рассеивается слабо.

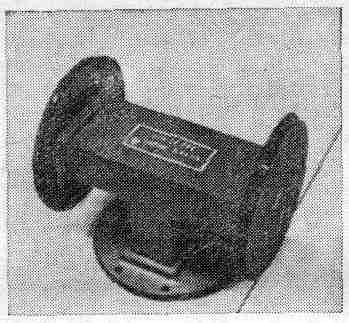
Теперь представьте, что вам нужно закрыть волновод так, чтобы не возникло никаких отраженных волн. Значит, надо в конце поставить что-нибудь такое, что сможет имитировать бесконечность волновода.

*Фиг. 24.9. Секции волновода, соединенные фланцами.*

Нужно такое «конечное» устройство, которое действовало бы на волновод так, как действует на пере­дающую линию ее характеристический импеданс — что-то, что только поглощает набегающие волны, но не отражает их. Тогда волновод будет действовать так, будто он бесконечный. Такие окончания получаются, если поставить внутрь трубы тщательно изготовленные клинья из проводящего материала. Они только поглощают энергию и почти не генерируют отраженных волн. Если вам нужно соединить между собой *три* элемента, ска­жем один источник и две антенны, то для этого годится устрой­ство в виде «Т», как показано на фиг. 24.11. Мощность, подво­димая центральной секцией этого «Т», расщепляется и расхо­дится по двум рукавам (здесь еще может произойти и отражение волн). Из схемы, представленной на фиг. 24.12, можно качест­венно увидеть, что поля на конце входной секции могут разой­тись и создать электрические поля, которые дадут начало вол­нам, разбегающимся по рукавам. Смотря по тому, перпендику­лярны ли электрические поля «верхушке» нашего «Т» или параллельны ей, поля в месте сочленения могут оказаться либо такими, как на фиг. 24.12, *а,* либо как на фиг. 24.12, *б.*

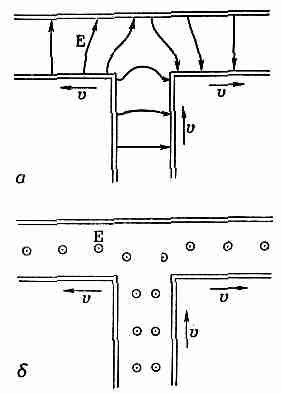


*Фиг. 24.10. Сочленение двух секций волновода, да­ющее малые потери.*

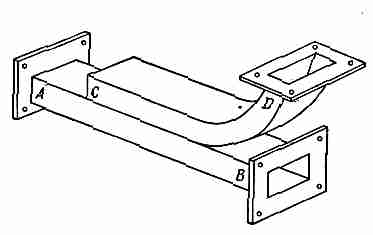


*Фиг. 24.11.**Волновод «Т». На фланцы надеты пластмассовые колпачки, предохраняющие внут­реннюю часть* «Т» *от загрязнения в неработающем состоянии.*

Наконец, хотелось бы описать прибор, именуемый «направ­ленным ответвителем». Это очень полезное устройство, когда нужно узнать, что получилось после того, как вы сочленили между собой какое-то сложное расположение волноводов. На­пример, нужно узнать, в какую сторону бегут волны в той или иной секции трубы; скажем, необходимо представить себе, на­сколько сильна в ней отраженная волна. Направленный ответвитель отбирает немножко мощности у волновода, если по нему бежит волна в одну сторону, и не отбирает ничего, если она бе­жит в другую. Подключив выход соединителя к детектору, можно измерить «одностороннюю» мощность в волноводе. Нап­равленный ответвитель (фиг. 24.13) — это кусок волновода *АВ, к* одной из сторон которого припаян другой кусок волновода *CD.* Труба *CD* отогнута в сторону так, чтобы поместился соединительный фланец. Прежде чем спаять трубы, через соседние их стенки насквозь просверлили пару (или несколько) отвер­стий, чтобы через них часть полей в главном волноводе *АВ* могла пройти во вторичный вол­новод *CD.* Каждое отверстие действует как антенна — генерирует волны во вторичном волно­воде.



*Фиг. 24.12. Электрические поля в волноводе* «Т» *при двух возможных ориентациях поля.*



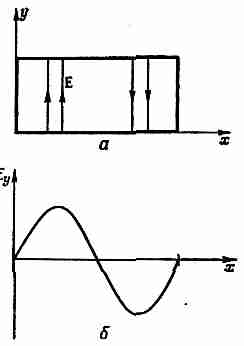
*Фиг. 24.13. Направленный ответвитель.*

Если бы отверстие было одно, то волны расходились бы в обе стороны и были бы одинаковы независимо от того, куда направлены волны в первичном волноводе. Но когда отверстий *два* и когда расстояние между ними равно четверти длины волны в волноводе, то они представляют собой два источника, сдви­нутые по фазе на 90°. А вы помните, мы рассматривали в гл. 29 (вып. 3) интерференцию волн от двух антенн, раздвинутых на Х/4 и возбуждаемых со сдвигом 90° по фазе? Мы установили тог­да, что в одном направлении волны вычитаются, а в другом скла­дываются. То же самое происходит и здесь. Волна, генерируе­мая в *CD,* будет бежать в ту же сторону, что и *АВ.*

И если волна в первичном волноводе бежит от *А к В,* то на выходе *D* вторичного волновода мы тоже заметим волну. Если же волна в первичном волноводе бежит от *В* к *А*, то во вто­ричном волноводе волна побежит к С. А на этом конце стоит такое окончание, что эта волна в нем поглотится и на выходе ответвителя волн вообще не будет.

**§ 7. Типы воли в волноводе**

Выбранная нами для анализа волна — всего лишь одно из решений уравнений поля. Их на самом деле куда больше. Каж­дое решение представляет собой свой «тип волны» в волноводе. Скажем, в нашей волне вдоль направления *х* укладывалось только полсинусоиды. Ничуть не хуже решение, в котором вдоль *х* укладывается вся синусоида; изменение *Еy с х* тогда показано на фиг. 24.14. У этого типа волн *kx* вдвое больше и граничная частота много выше. Кроме того, изученная нами волна Е име­ет лишь y-компоненту, но бывают и типы волн с более сложными электрическими полями. Если у электрического поля есть только *х-* и y-компоненты, так что оно всегда перпендикулярно к оси *z,* то такой тип волн называется «поперечным электриче­ским» (или сокращенно *ТЕ)* типом волн. Магнитное поле в вол­не такого типа всегда обладает z-компонентой. Далее, оказы­вается, что когда у Е есть z-компонента (вдоль направления рас­пространения), то у магнитного поля есть только поперечные



*Фиг. 24.14. Еще одна возмож­ная зависимость Еу от х.*

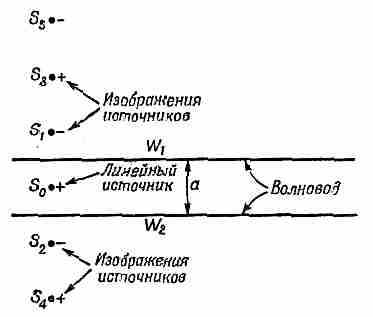
компоненты. Такие поля называются «поперечными магнитны­ми» (сокращенно *ТМ)* типами волн. В прямоугольном волно­воде все типы обладают более высокой граничной частотой, чем описанный нами простой TE-тип. Поэтому всегда возможно (и так обычно делают) использовать такой волновод, в котором частота немного превышает граничную частоту этого наиниз­шего типа колебаний, но находится ниже граничных частот всех других типов. В таком волноводе распространяется волна толь­ко одного типа. В противном случае поведение волн услож­няется и его трудно контролировать.

**§ 8. Другой способ рассмотрения волн в волноводе**

Теперь я хочу по-другому объяснить вам, почему волновод так сильно ослабляет поля, частота которых ниже граничной частоты ωс. Я хочу, чтобы вы получили более «физическое» пред­ставление о том, почему так резко меняется поведение волно­вода при низких и при высоких частотах. Для прямоугольного волновода это можно сделать, анализируя поля на языке отра­жений (или изображений) в стенках волновода. Такой подход годится, однако, только для прямоугольных волноводов; вот почему мы начали с математического анализа, который в прин­ципе годится для волноводов любой формы.

Для описанного нами типа колебаний вертикальные размеры (по *у)* не имели никакого значения, поэтому можно не обращать внимания на верх и низ волновода и представлять себе, что волновод в вертикальном направлении простирается бесконечно. Пусть он просто состоит из двух вертикальных пластин, удален­ных друг от друга на расстояние *а.*

Давайте возьмем в качестве источника полей вертикальный провод между пластинами; по нему течет ток, который меняется



*Фиг. 24.15, Линейный источ­ник S0 между проводящими плоскими стенками* W1 *и W2 . Стенки можно заменить бесконеч­ной последовательностью изобра­жений источников.*

с частотой ω. Если бы волновод не имел стенок, то от такого про­вода расходились бы цилиндрические волны.

Представим, что стенки волновода сделаны из идеального про­водника. Тогда, в точности как в электростатике, условия на поверхности будут выполнены, если к полю провода мы доба­вим поле одного или нескольких правильно подобранных его изображений. Представление об изображениях работает в элек­тродинамике ничуть не хуже, чем в электростатике, при усло­вии, конечно, что мы учитываем запаздывание. Мы знаем, что это так, потому что мы много раз видели в зеркале изображение источника света. А зеркало — это и есть «идеальный» проводник для электромагнитных волн оптической частоты.

Рассечем наш волновод горизонтально, как показано на фиг. 24.15, где *W1* и *W2 —* стенки волновода, a *S0  —* источник (провод). Обозначим направление тока в проводе знаком плюс. Будь у волновода лишь одна стенка, скажем *Wl, ,* ее можно было бы убрать, поместив изображение источника (с про­тивоположной полярностью) в точке S1 . Но при двух стенках по­явится также изображение *Su* в стенке *W2;* обозначим его S2. Этот источник также будет обладать своим изображением в W1; обозначим его *S3 .* Дальше, сами *S1* и *S3* изобразятся в *W2* точками S4 и *S6* и т. д. И для нашей пары плоских проводников с источником посредине поле между проводниками совпадет с нолем, генерируемым бесконечной цепочкой источников на рас­стоянии *а* друг от друга. (Это на самом деле как раз то, что вы *увидите,* посмотрев на провод, расположенный посредине между двумя параллельными зеркалами.) Чтобы поля обращались в нуль на стенках, полярности токов в изображениях должны меняться от одного изображения к следующему. Иначе говоря, их фаза меняется на 180°. Поле волновода — это просто суперпозиция полей всей этой бесконечной совокупности ли­нейных источников.

Известно, что вблизи от источников поле очень напоминает статические поля. В гл. 7, § 5 (вып. 5) мы рассматривали статиче­ское поле сетки линейных источников и нашли, что оно похоже на поле заряженной пластины, если не считать членов ряда, убывающих по мере удаления от сетки экспоненциально. У нас средняя сила источников равна нулю, потому что у каждой пары соседних источников знаки противоположны. Любые поля, су­ществующие здесь, должны с расстоянием убывать экспоненци­ально. Вплотную к источнику мы в основном воспринимаем поле этого ближайшего источника; на больших расстояниях уже воздействует несколько источников, и их суммарное влия­ние дает нуль. Мы теперь понимаем, отчего волновод ниже граничной частоты дает экспоненциально убывающее поле. При низких частотах годится статическое приближение, и оно предсказывает быстрое ослабление полей с расстоя­нием.

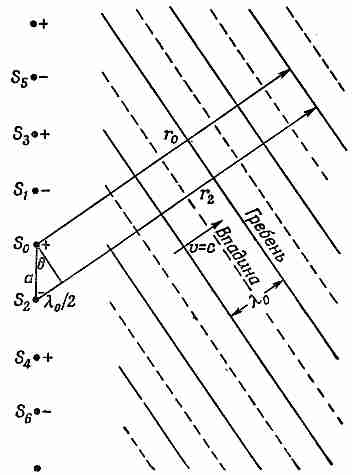
Теперь зато возникает противоположный вопрос: отчего же в таком случае волны вообще распространяются? Теперь уже *это* выглядит таинственно! А причина-то в том, что при высоких частотах запаздывание полей может внести в фазу добавочные изменения, которые могут привести к тому, что поля источников с противоположной фазой будут усиливать, а не гасить друг друга. В гл. 29 (вып. 3) мы уже изучали как раз для этой задачи поля, создаваемые системой антенн или оптической ре­шеткой. Тогда мы обнару­жили, что соответствующее

расположение нескольких радиоантенн может привести к такой интерференционной

^ картине, что в одном направ­лении сигнал будет очень сильный, а в других сигна­лов вообще не будет.

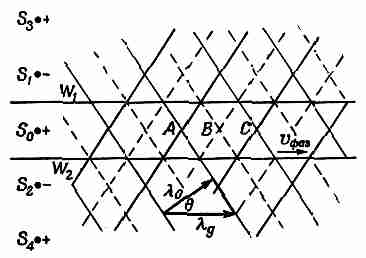
Вернемся к фиг. 24.15

и посмотрим на поля на большом расстоянии от линии изображений источников.



*Фиг. 24.16. Одна совокупность когерентных волн от вереницы*

*линейных источников.*



*Ф us. 24.17. Поле в волноводе можно рассматривать как на­ложение двух верениц плоских волн.*

C:\1\pic\gray.jpgПоля будут велики лишь в некоторых направлениях, зависящих от частоты, именно в тех направлениях, в каких поля всех источни­ков попадают в фазу друг к другу и складываются. На заметном расстоянии от источников поле в этих специальных направле­ниях распространяется как плоские волны. Мы изобразили та­кую волну на фиг. 24.16, где сплошными линиями даны гребни волн, а штрихом — впадины. Направление волны должно быть таким, чтобы разность запаздываний от двух соседних источни­ков до гребня волны отвечала полупериоду колебания. Иными словами, разность между r2 и r*0* на рисунке равна половине дли­ны волны в пустом пространстве:

Тогда угол θ дается условием

C:\1\pic\gray.jpg

(24.33)

Имеется, конечно, и другая совокупность волн, бегущих вниз под симметричным углом по отношению к линии источников. А полное поле в волноводе (не слишком близко к источнику) является суперпозицией этих двух совокупностей волн (фиг. 24.17). Конечно, в действительности картина истинных полей совпадает с изображенной лишь в пространстве между стенками волновода.

В таких точках, как *А к С,* гребни двух волновых картин совпадут, и у поля будет максимум; в точках же наподобие *В* пики обеих волн направлены в отрицательную сторону, и поле обладает минимумом (наименьшим отрицательным значением). С течением времени поле в волноводе будет двигаться вдоль него. Длина волны будет равна λ*g —* расстоянию от *A* go *С.* Она свя­зана с θ формулой

C:\1\pic\gray.jpg

(24.34)

C:\1\pic\gray.jpgПодставляя (24.33) вместо θ, получаем

(24.35)

что в точности совпадает с (24.19).

Теперь нам становится понятно, почему волны распростра­няются только выше граничной частоты ωс. Если длина волн в пустом пространстве больше *2а,* то не существует угла, под которым может появиться волна, показанная на фиг. 24.16. Необходимая для этого конструктивная интерференция возни­кает внезапно, едва X0 оказывается меньше *2а,* или, что то же самое, когда ω0=πс/а.

А если частота достаточно высока, то может появиться два

или больше возможных направления распространения волн.

2 В нашем случае это произойдет при λ*0 <2/3* *а.* Но вообще-то это может происходить и при λ0<а. Эти добавочные волны отве­чают высшим типам волн, о которых мы говорили.

После нашего анализа становится также ясно, отчего фазо­вая скорость волн, бегущих по трубе, превышает *с* и зависит от со. Когда ω меняется, меняется и угол на фиг. 24.16, под ко­торым в пустом пространстве распространяются волны, а вместе с этим меняется и скорость вдоль трубы.

Хотя мы описали волны в волноводе в виде суперпозиции по­лей бесконечной совокупности линейных источников, но можно убедиться в том, что тот же результат можно было бы получить, представив себе две совокупности волн в пустом пространстве, многократно отражаемых от двух идеальных зеркал вперед и назад, и вспоминая, что подобное отражение означает перемену знака фазы. Эти совокупности отражаемых волн гасили бы друг друга под всеми углами, кроме угла θ [см. (24.33)]. Одну и ту же вещь можно рассматривать многими способами.

***Глава* 25**

**ЭЛЕКТРОДИНАМИКА**

**В РЕЛЯТИВИСТСКИХ ОБОЗНАЧЕНИЯХ**

[**§ 1. Четырехв****екторы**](#a1)

[**§ 2. Скалярное** **произведение**](#a2)

[**§ 3. Четырех****мерный градиент**](#a3)

[**§ 4. Электродина****мика в четырехмерных обозначениях**](#a4)

[**§ 5. Четырехмерн****ый потенциал движущегося заряда**](#a5)

[**§ 6. Инвариантность** **уравнений электродинамики**](#a6)

**В этой главе с=1**

***Повторить:* гл. 15 (вып. 2) «Специ­альная теория от­носительности» ; гл. 16 (вып. 2) «Релятивистская энергия и им­пульс»;**

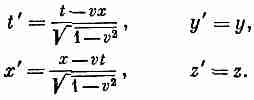
**гл. 17 (вып. 2} «Пространство - время»; гл. 13 (вып. 5) «Магнитостатика»**

**§ 1. Четырехвекторы**

В этой главе мы рассмотрим применение спе­циальной теории относительности к электроди­намике. Мы изучали теорию относительности довольно давно (гл. 15—17, вып. 2), поэтому я здесь коротко напомню основные идеи.

Экспериментально установлено, что законы физики при равномерном движении не изме­няются. Если вы находитесь внутри звездо­лета, летящего с постоянной скоростью по пря­мой линии, то не можете установить самого фак­та движения корабля: для этого надо выглянуть наружу или по крайней мере провести какие-то наблюдения, связанные с внешним миром. Лю­бой написанный нами истинный закон физики должен быть сформулирован так, чтобы этот факт природы был «встроен» в него.

Соотношение между пространством и време­нем в двух системах координат (одна из которых 6" равномерно движется относительно другой 5 в направлении оси *х* со скоростью *v)* опреде­ляется *преобразованиями Лоренца*



(25.1)

Законы физики должны быть таковы, чтобы после преобразований Лоренца они в новой фор­ме выглядели абсолютно так же, как и раньше. Это в точности напоминает принцип независи­мости законов физики от *ориентации* нашей системы координат. В гл. 11 (вып. 1) мы видели, что способом математического описания этой инвариантности относительно вращения являет­ся запись уравнений в *векторном* виде.

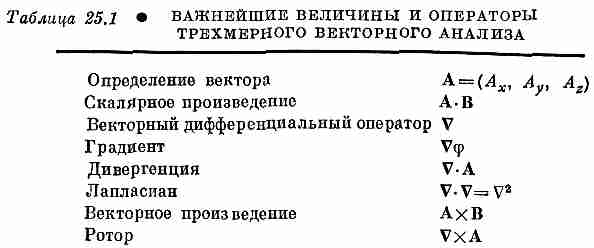
Там мы обнаружили, что если, скажем, взять два вектора

C:\1\pic\gray.jpg

то комбинация

C:\1\pic\gray.jpg

C:\1\pic\gray.jpgпри повороте системы координат не меняется. Таким образом, если с обеих сторон уравнения мы видим скалярное произведе­ние, подобное А•В, то уравнение будет иметь в точности ту же форму в любой повернутой системе координат. Кроме того, мы открыли оператор (см. гл. 2)

который, будучи применен к скалярной функции, дает три вели­чины, преобразующиеся в точности как вектор. С помощью это­го оператора был определен градиент, а в комбинации с дру­гими векторами — дивергенция и лапласиан. И, наконец, мы обнаружили, что, составляя суммы некоторых попарных произ­ведений компонент двух векторов, можно получить три вели­чины, которые ведут себя подобно новому вектору. Мы назвали это *векторным произведением* двух векторов. Используя затем векторное произведение с оператором V, мы определили ротор вектора. В дальнейшем нам часто придется ссылаться на то, что было нами сделано в векторном анализе, поэтому все важнейшие векторные операции в трехмерном пространстве, которые использовались в прошлом, мы собрали в табл. 25.1.

Пользуясь ею, можно так записать любое уравнение физики, что обе его части преобразуются при вращениях одинаковым образом. Если одна его часть — вектор, то вектором должна быть и другая часть, и обе они при вращении системы коор­динат изменяются в точности одинаково. Аналогично, если одна часть скаляр, то скаляром должна быть и другая часть, так что ни та, ни другая не изменяется при вращении системы координат и т. д.

В теории относительности пространство и время неразде­лимо связаны друг с другом, поэтому то же самое придется про­делать и для четырех измерений. Мы хотим, чтобы наши уравне­ния оставались неизменными не только при вращениях, но и при переходе в *любую* инерциальную систему. Это означает, что наши уравнения должны быть инвариантными относительно преобразований Лоренца (25.1). Цель настоящей главы — пока­зать, как этого можно добиться. Но прежде чем начать, примем соглашение, которое значительно облегчит нашу ра­боту (и к тому же поможет избежать путаницы). Заключается оно в таком выборе единиц измерения длины и времени, чтобы скорость света *с* оказалась равной единице. Вы можете считать, например, что в качестве единицы времени взят *интервал, за который свет проходит отрезок в один метр* (это составляет около 3•10-9 *сек).* Можно даже так и назвать эту единицу вре­мени: «один световой метр». Использование этой единицы еще ярче оттеняет симметрию пространства и времени. Кроме того, из наших релятивистских уравнений исчезнут все *с.* (Если это почему-либо вас смущает, то вы можете в любом уравнении вос­становить их или заменить каждое *t* на *ct,* а еще лучше вставить *с* повсюду, где это необходимо для правильной размерности уравнения.) Теперь, после такой подготовки, мы можем дви­нуться дальше.

Наша программа состоит в том, чтобы повторить в четырех­мерном пространстве-времени все то, что мы делали с векто­рами в трех измерениях. Дело это нехитрое — мы просто будем действовать аналогично. Единственное затруднение встретится только при обозначениях (символ вектора у нас уже занят трех­мерными векторами), и несколько изменятся знаки в скалярном произведении.

Прежде всего, по аналогии с векторами в трехмерном про­странстве, введем *четырехвектор* как набор четырех величин *at, ах, ау* и аz, которые при переходе в движущуюся систему коор­динат преобразуются подобно *t, x, у* и z. Для обозначения четырехвектора используется несколько различных способов. Мы же будем писать просто аμ, понимая под этим группу четырех ве­личин *(at, ax, ay, az);* другими словами, значок μ принимает ка­кое-либо из четырех «значений»: *t, x, у* и *г.* Иногда нам будет удобно обозначать три пространственные компоненты в виде трехмерного вектора, т. е. писать *a*μ*=(at ,* а).

Мы уже сталкивались с одним таким четырехвектором, со­стоящим из энергии и импульса частицы (см. гл. 17, вып. 2). В наших новых обозначениях он запишется так:

*p*μ*=(Е, p*), (25.2)

т. е. четырехвектор *p*μсостоит из энергии *Е* и трех компонент трехмерного импульса частицы р.

C:\1\pic\gray.jpgПохоже, что игра действительно оказывается нехитрой: единственное, что мы должны сделать,— это найти для каждого трехмерного вектора недостающую компоненту и получить четырехвектор. Однако все же эта задача потруднее, чем кажется на первый взгляд. Возьмем, например, вектор скорости с компонентами

Что будет его временной компонентой? Инстинкт подсказывает нам, что поскольку четырехвектор подобен *t, x*, *у, z,* то времен­ной компонентой как будто должно быть

C:\1\pic\gray.jpg

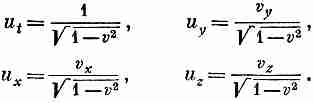
*Но это неверно.* Дело в том, что время *t* в каждом знаменателе не инвариантно при преобразованиях Лоренца. Числитель имеет правильное поведение, a *dt* в знаменателе портит все дело: оно не одинаково в двух различных системах.

Оказывается, что четыре компоненты «скорости», которые нам нужно выписать, превратятся в компоненты четырехвектора, если мы попросту поделим их на *√(1-v2).* В правильности этого можно убедиться, взяв C:\1\pic\gray.jpgчетырехвектор импульса

(25.3)

C:\1\pic\gray.jpgи поделив его на массу покоя, которая в *четырехмерном прост­ранстве* является скаляром. Мы получим при этом

(25.4)

что по-прежнему должно быть четырехвектором. (Деление на *скаляр* не изменяет трансформационных свойств.) Так что *четырехвектор скорости vμ* можно *определить* так:

(25.5)

Это очень полезная величина; мы можем теперь написать, например,

C:\1\pic\gray.jpg

(25.6)

Таков типичный вид, который должен иметь правильное реляти­вистское уравнение: каждая сторона его должна быть четырехвектором. (В правой части стоит произведение инварианта на четырехвектор, которое по-прежнему есть четырехвектор.)

**§ 2. Скалярное произведение**

То, что расстояние от некоторой точки до начала координат не изменяется при повороте, если хотите,— счастливая случай­ность. Математически это означает, что r2=x2+y2+z2 является инвариантом. Другими словами, после поворота r'2=r2 или

C:\1\pic\gray.jpg

C:\1\pic\gray.jpgВозникает вопрос: существует ли подобная величина, которая инвариантна при преобразованиях Лоренца? Да, существует. Из (25.1) вы видите, что

C:\1\pic\gray.jpgОна была бы всем хороша, если бы только не зависела от наше­го выбора оси *х.* Но этот недостаток легко исправить вычита­нием y/2 и z2. Тогда преобразование Лоренца *плюс* вращение оставляют ее неизменной. Таким образом, роль величины, ана­логичной трехмерному r2 в четырехмерном пространстве, играет комбинация

Она является инвариантом так называемой «полной группы Лоренца», которая включает как перемещения с постоянной скоростью, так и повороты.

C:\1\pic\gray.jpgДалее, поскольку эта инвариантность представляет собой алгебраическое свойство, зависящее только от правил преобра­зования (25.1) плюс вращение, то она справедлива для любого четырехвектора. (Все они, по определению, преобразуются оди­наковым образом.) Так что для любого четырехвектора аμ

Эту величину мы будем называть квадратом «длины» четырехвектора *ам.* (Будьте внимательны! Иногда берут обратные зна­ки у всех слагаемых и квадратом длины называют число *a2x+a2y+a2z -a2t)*

C:\1\pic\gray.jpgЕсли теперь у нас есть *два* вектора аμ и bμ*,* то их одноименные компоненты преобразуются одинаково, поэтому комбинация

также будет инвариантной (скалярной) величиной. (Фактически мы доказали это уже в гл. 17, вып. 2.) Получилась величина, совершенно аналогичная скалярному произведению векторов. Мы так и будем называть ее *скалярным произведением* двух четырехвекторов. Логично, казалось бы, и записывать его *аμ•bμ,* чтобы оно даже *выглядело похожим на* скалярное произведение. Но обычно, к сожалению, так не делают и пишут его без точки.

И мы тоже будем придерживаться этого порядка и записывать скалярное произведение просто *aμbμ* . Итак, *по определению,*

C:\1\pic\gray.jpg

(25.7)

C:\1\pic\gray.jpgПомните, что повсюду, где вы видите два одинаковых значка (вместо μ мы иногда будем пользоваться v или другими бук­вами), необходимо взять четыре произведения и сложить их, *не забывая при этом о знаке минус* перед произведениями про­странственных компонент. С учетом такого соглашения инва­риантность скалярного произведения при преобразованиях Ло­ренца можно записать как

C:\1\pic\gray.jpgПоскольку последние три слагаемых в формуле (25.7) пред­ставляют просто трехмерное скалярное произведение, то часто удобнее принять такую запись:

Очевидно, что введенную выше четырехмерную длину можно записать как аμаμ:

C:\1\pic\gray.jpg

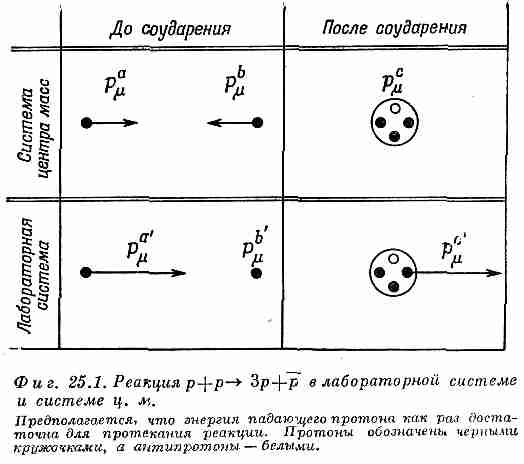
(25.8)

Но иногда удобно эту величину записать как *а2μ:*

C:\1\pic\gray.jpg

C:\1\pic\gray.jpgПродемонстрируем теперь плодотворность четырехмерного скалярного произведения. Антипротоны *(р')* получают на боль­ших ускорителях из реакции

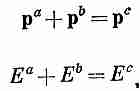
Иначе говоря, высокоэнергетический протон сталкивается с по­коящимся протоном (например, с помещенной в пучок водород­ной мишенью), и если падающий протон обладает достаточной энергией, то вдобавок к двум первоначальным протонам может родиться пара протон—[антипротон](#прим1).



Какой энергией должен обладать падающий протон, чтобы эта реакция стала энергетически возможной?

Ответ легче всего получить, рассмотрев эту реакцию в систе­ме центра масс (ц. м.) (фиг. 25.1). Назовем падающий протон протоном а, а его четырехимпульс обозначим через *рaμ.* Анало­гично, протон мишени назовем b*,* а его четырехимпульс обозна­чим через *рbμ.* Если энергии падающего протона *как раз* достаточ­но для реакции, то в конечном состоянии (т. е. в состоянии после соударения) образуется система, содержащая три протона и ан­типротон, покоящиеся в системе ц. м. Если энергия падающего протона будет несколько выше, то частицы в конечном состоя­нии вылетят с некоторой кинетической энергией и будут разле­таться в стороны; если же она немного ниже, то ее будет недо­статочно для образования четырех частиц.

Пусть *рсμ —* полный четырехимпульс всей системы в конеч­ном состоянии, тогда, согласно закону сохранения энергии и



C:\1\pic\gray.jpgа комбинируя эти два выражения, можно написать

(25.9)

C:\1\pic\gray.jpgТеперь еще одно важное обстоятельство: поскольку мы по­лучили уравнение для четырехвекторов, то оно должно выпол­няться в любой инерциальной системе. Этим фактом можно вос­пользоваться для упрощения вычислений. Напишем длины каждой из частей (25.9), которые, разумеется, тоже должны быть равны друг другу, т. е.

(25.10)

Так как *рс*μ *рс*μ *—* инвариант, то можно вычислить его в ка­кой-то одной системе координат. В системе ц. м. временная компонента рсμ равна энергии покоя четырех протонов, т. е. 4М, а пространственная часть р равна нулю, так что *рс*μ*=*(4М, 0). При этом мы воспользовались равенством масс протона и антипротона, обозначив их одной буквой *М.*

Таким образом, уравнение (25.10) принимает вид

C:\1\pic\gray.jpg

(25.11)

C:\1\pic\gray.jpgПроизведения раμраμ и pbμpbμ*,* вычисляются очень быстро: «дли­на» четырехвектора импульса любой частицы равна просто квадрату ее массы:

Это можно доказать прямыми вычислениями или, несколько бо­лее эффектно, простым замечанием, что в *системе покоя* ча­стицы *р*μ*=(М,* 0), а следовательно, *р*μ*р*μ=М2. А так как это инвариант, то он равен М2 в *любой* системе отсчета. Подставляя результаты в уравнение (25.11), мы получаем

C:\1\pic\gray.jpg

или

C:\1\pic\gray.jpg

(25.12)

Теперь можно вычислить раμрbμв лабораторной системе. В этой системе четырехвектор *рам* = *(Еа, ра),* а *рb*μ*=(М,* 0), ибо он описывает покоящийся протон. Итак, *ра*μ*рb*μдолжно быть рав­но *МЕа,* а мы знаем, что скалярное произведение — это инвари­ант, поэтому оно должно быть равно значению, найденному нами в (25.12). В результате получается

C:\1\pic\gray.jpg

*Полная* энергия падающего протона должна быть по мень­шей мере равна *1М* (что составляет около 6,6 *Гэв,* так как М=938 *Мэв)* или после вычитания массы покоя *М* получаем, что *кинетическая* энергия должна быть равна по меньшей мере 6М (около 5,6 *Гэв).* Именно с тем, чтобы иметь возможность производить антипротоны, бетатрон в Беркли проектировался на кинетическую энергию ускоренных протонов около 6.2 *Гэв.*

C:\1\pic\gray.jpgСкалярное произведение — инвариант, поэтому полезно знать его величину. Что, например, можно сказать о «длине» четырехвектора скорости uμuμ?

т. е. uμ *— единичный четырехвектор.*

**§ 3. Четырехмерный градиент**

Следующей величиной, которую нам следует обсудить, яв­ляется четырехмерный аналог градиента. Напомним (см. гл. 14, вып. 1), что три оператора дифференцирования *д/дх, д/ду, d/dz* преобразуются подобно трехмерному вектору и назы­ваются градиентом. Та же схема должна работать и в четырех измерениях; по простоте вы можете подумать, что четырехмер­ным градиентом должны быть *(d/dt, д/дх, д/ду d/dz), но это неверно.*

Чтобы обнаружить ошибку, рассмотрим скалярную функ­цию, которая зависит только от *х* и *t.* Приращение ϕ при малом изменении *t* на Δt и постоянном *х* равно

C:\1\pic\gray.jpg

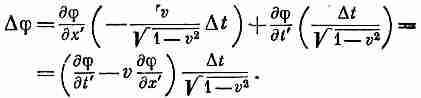
(25.13)

С другой стороны, с точки зрения движущегося наблюда­теля

C:\1\pic\gray.jpg

Используя уравнение (25.1), мы можем выразить Δ*х'* и Δ*t'* через Δ*t.* Вспоминая теперь, что величина *х* постоянна, так

C:\1\pic\gray.jpgчто Δx=0, мы пишем

Таким образом,

Сравнивая этот результат с (25.13), мы узнаем, что

C:\1\pic\gray.jpg

(25.14)

C:\1\pic\gray.jpgАналогичные вычисления дают

(25.15)

Теперь вы видите, что градиент получился довольно странным. Выражения для *х* и *t* через *х'* и *t'* [полученные решением уравнений (25.1)] имеют вид

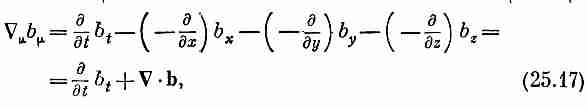
C:\1\pic\gray.jpg

Именно так должен преобразовываться четырехвектор. Но в уравнениях (25.14) и (25.15) знаки получились неправильными! Выход в том, что надо заменить неправильное определение четырехмерного оператора градиента *(d/dt,*∇) правильным:

C:\1\pic\gray.jpg

Мы его обозначим ∇μ . Для такого ∇μ трудности исчезают, и он ведет себя так, как подобает настоящему четырехвектору. (Ужасно неприятно наличие минусов, но так уж устроено в мире.) Разумеется, говоря, что ∇μ «ведет себя как четырехвектор», мы подразумеваем, что четырехмерный градиент ска­лярной функции есть четырехвектор. Если ϕ — настоящее ска­лярное (лоренц-инвариантное) поле, то ∇μϕ будет четырехвекторным полем.

Итак, все уладилось. Теперь у нас есть векторы, градиенты и скалярное произведение. Следующий на очереди — инвари­ант, аналогичный дивергенции в трехмерном векторном ана­лизе. Ясно, что аналогом его должно быть выражение ∇μbμ, где bμ *—* векторное поле, компоненты которого являются функ­циями пространства и времени. Мы *определим дивергенцию* четырехвектора *b*μ*=(bt ,* b) как скалярное произведение ∇μ на bμ:



где ∇•b — обычная трехмерная дивергенция вектора b. Не забы­вайте внимательно следить за знаками. Один знак минус свя­зан с определением скалярного произведения [формула (25.7)1, а другой возникает от пространственных компонент ∇μ [форму­ла (25.16)]. Дивергенция, определяемая формулой (25.7), есть инвариант, и для всех систем координат, отличающихся друг от друга преобразованием Лоренца, применение ее приводит к одинаковой величине.

Остановимся теперь на физическом примере, в котором появ­ляется четырехмерная дивергенция. Ею можно воспользоваться при решении задачи о полях вокруг движущегося проводника. Мы уже видели (гл. 13, § 7, вып. 5), что плотность электрического заряда ρ и плотность тока j образуют четырехвектор *j*μ*=(p, j*). Если незаряженный провод переносит ток j*x,* то в системе от­счета, движущейся относительно него со скоростью *v* (вдоль оси *х),* в проводнике наряду с током появится и заряд [который возникает согласно закону C:\1\pic\gray.jpgпреобразований Лоренца (25.1)1:

Но это как раз то, что мы нашли в гл. 13. Теперь нужно под­ставить эти источники в уравнение Максвелла в *движущейся системе* и найти поля.

C:\1\pic\gray.jpgЗакон сохранения заряда в четырехмерных обозначениях тоже принимает очень простой вид. Рассмотрим четырехмерную дивергенцию вектора jμ :

(25.18)

C:\1\pic\gray.jpgЗакон сохранения заряда утверждает, что утекание тока из еди­ницы объема должно быть равно отрицательной скорости уве­личения плотности заряда. Иными словами,

Подставляя это в (25.18), получаем очень простую форму за­кона сохранения заряда:

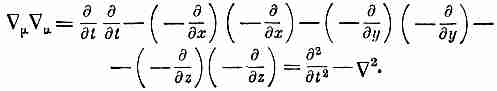
C:\1\pic\gray.jpg

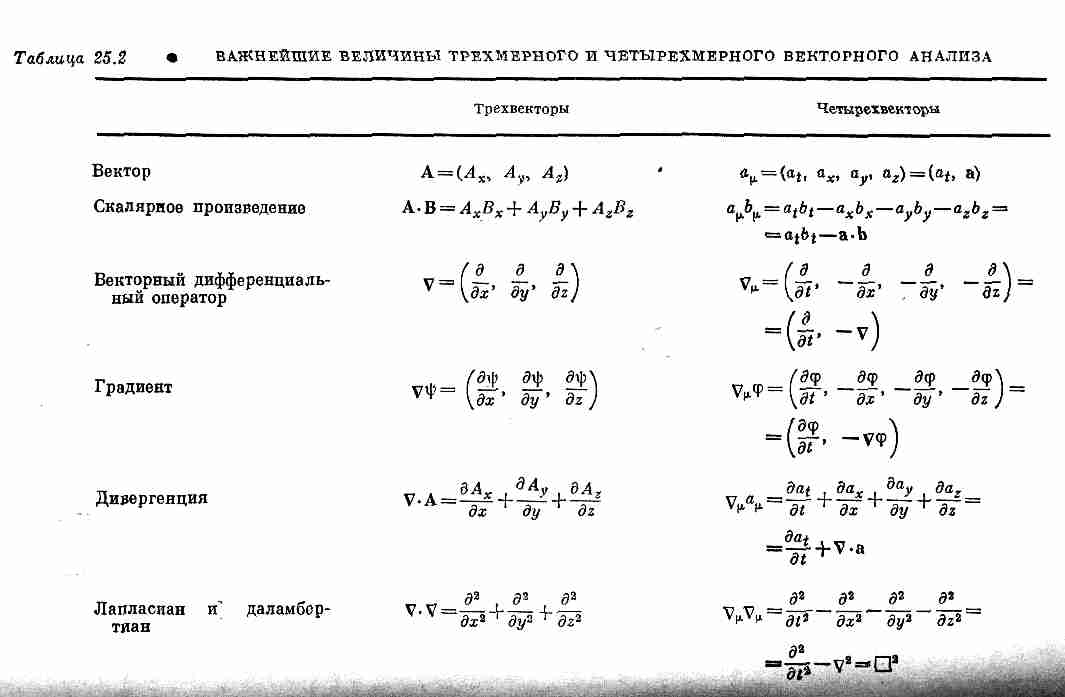
(25.19)

Благодаря тому, что ∇μjμ — инвариант, равенство его нулю в одной системе отсчета означает равенство нулю и во всех дру­гих. Таким образом, если заряд сохраняется в одной системе, он будет сохраняться и во всех других системах координат, дви­жущихся относительно нее с постоянной скоростью.

C:\1\pic\gray.jpgВ качестве последнего примера рассмотрим скалярное про­изведение оператора градиента ∇μ на себя. В трехмерном про­странстве такое произведение дает лапласиан

Что получится для четырех измерений? Вычислить это очень просто. Следуя нашему правилу скалярного произведения, на­ходим





Этот оператор, представляющий аналог трехмерного лапласиа­на, называется *даламбертианом* и обозначается специальным

C:\1\pic\gray.jpgсимволом

(25.20)

По построению он является скалярным оператором, т. е., если подействовать им, скажем, на четырехвекторное поле, возникает новое четырехвекторное поле. [Иногда даламбертиан определяется с противоположным по отношению к (25.20) зна­ком, так что при чтении литературы будьте внимательны!]

Итак, для большинства величин, перечисленных нами в табл. 25.1, мы нашли их четырехмерные эквиваленты. (У нас еще нет эквивалента векторного произведения, но его нахождение мы оставим до следующей главы.) А теперь соберем в одно место все важнейшие результаты и определения и составим еще одну таблицу (табл. 25.2); она поможет вам лучше запомнить, что во что переходит.

**§ 4. Электродинамика в четырехмерных обозначениях**

C:\1\pic\gray.jpgВ гл. 18, § 6, мы уже сталкивались с оператором Даламбера, хотя и не знали, что он так называется. Мы нашли там дифферен­циальное уравнение для потенциалов, которое в новых обозна­чениях выглядит так:

(25.21)

C:\1\pic\gray.jpgС правой стороны (25.21) стоят четыре величины ρ, *jx, j , jz,* поделенные на ε0 — универсальную постоянную, одинаковую во всех системах координат, если во всех системах для измере­ния заряда используется одна и та же единица. Таким обра­зом, четыре величины ρ/jе0, jх/ε0, jy/ε0, jz/ε0 тоже преобразуются как четырехвектор. Их можно записать в виде jz/е0. Оператор Даламбера не изменяется при переходе к другим системам коор­динат, так что четыре величины ϕ, *Ах, Ау* и *Az тоже должны преобразоваться* как четырехвектор, т. е. *должны быть* компо­нентами четырехвектора. Короче говоря, величина

есть четырехвектор. То, что мы называли скалярным и вектор­ным потенциалами, оказывается только разными частями от од­ной и той же физической величины. Они неотделимы друг от друга. А если это так, то релятивистская инвариантность мира очевидна. Вектор *Аμ* мы называем *четырехмерным потенциалом* (4-потенциалом).

В четырехмерных обозначениях (25.21) приобретает очень простой вид:

C:\1\pic\gray.jpg

(25.22)

Физика этого уравнения та же, что и уравнений Максвелла. Но есть своя прелесть в том, что можно переписывать их в столь элегантной форме. Впрочем, эта красивая форма содержит и кое-что более значительное — из нее непосредственно видна ин­вариантность электродинамики относительно преобразований Лоренца.

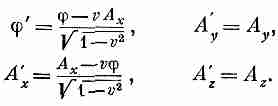
Напомним, что уравнение (25.21) можно получить из урав­нений Максвелла только тогда, когда наложено дополнитель­ное условие градиентной инвариантности:

C:\1\pic\gray.jpg

(25.23)

что означает просто ∇μAμ =0, т. е. условие градиентной инвари­антности говорит, что дивергенция четырехмерного вектора *А*μравна нулю. Это требование носит название *условия Лоренца.* Такая форма его записи очень удобна, ибо она инвариантна, а поэтому уравнения Максвелла во всех системах отсчета сохра­няют вид (25.22).

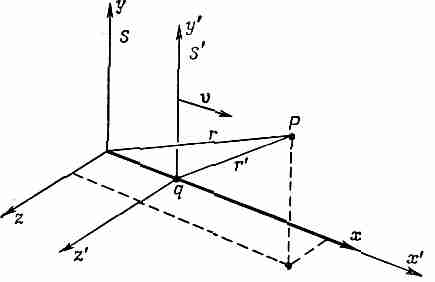
**§ 5. Четырехмерный потенциал движущегося заряда**

Теперь выпишем законы преобразования, выражающие ϕ и А в движущейся системе через ϕ и А в неподвижной, хотя неяв­но мы уже говорили о них. Поскольку *А*μ = (ϕ, А) является четырехвектором, это уравнение должно выглядеть подобно (25.1), за исключением того, что *t* нужно заменить на ϕ, а x — на А. Таким образом,

(25.24)

При этом предполагается, что штрихованная система координат движется по отношению к нештрихованной со скоростью *v* в направлении оси *х.*

Рассмотрим один пример плодотворности идеи 4-потенциала. Чему равны векторный и скалярный потенциалы заряда *q,* движущегося со скоростью *v* в направлении оси *х!* Задача очень упрощается в системе координат, движущейся вместе с заря­дом, ибо в этой системе заряд покоится. Пусть заряд находится в начале координат системы *S',* как это показано на фиг. 25.2.



*Фиг. 23.2. Система отсчета S' движется со ско­ростью v (в направлении оси х) по отношению* к *системе S.*

*Заряд, покоящийся в начале системы координат* S', *нахо­дится в системе S в точке x=vt. Потенциалы в точке Р могут быть найдены для любой системы отсчета.*

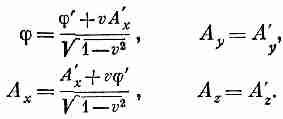
Скалярный потенциал в движущейся системе задается выраже­нием

C:\1\pic\gray.jpg

(25.25)

причем r' — расстояние от заряда *q* до точки в движущейся си­стеме, где производится измерение поля. Векторный же потен­циал А', разумеется, равен нулю.

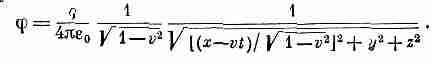
Теперь без особых хитростей можно найти потенциалы ϕ и А в неподвижной системе координат. Соотношениями, обрат­ными к уравнениям (25.24), будут



(25.26)

Используя далее выражение для ϕ'[см. (25.25)] и равенство А'=0, получаем

C:\1\pic\gray.jpg

Эта формула дает нам скалярный потенциал ϕ, который мы уви­дели бы в системе *S,* но он, к сожалению, записан через коорди­наты штрихованной системы. Впрочем, это дело легко попра­вимо; с помощью (25.1) можно выразить *t', х'*, *у', z'* через *t, x, у, z* и получить

(25.27)

Повторяя ту же процедуру для вектора А, вы можете показать,

что

А = vϕ. (25.28)

Это те же самые формулы, которые мы вывели в гл. 21, но там они были получены другим методом.

**§ 6. Инвариантность уравнений электродинамики**

C:\1\pic\gray.jpgИтак, потенциалы ϕ.и А, оказывается, образуют в совокупно­сти четырехвектор, который мы обозначили через *Аμ ,* а вол­новое уравнение (полное уравнение, выражающее *Аμ* через *jμ)* можно записать в виде (25.22). Это уравнение вместе с сохране­нием заряда (25.19) составляют фундаментальный закон электромагнитного поля:

(25.29)

И вот, пожалуйста, все уравнения Максвелла просто и красиво записываются всего в одной строке. Достигли ли мы чего-ни­будь, записав их в таком виде, кроме, разумеется, красоты и простоты? Прежде всего, есть ли здесь какое-нибудь отличие от того, что было раньше, когда мы выписывали их во всем разнообразии компонент? Можно ли из этих уравнений получить не­что, чего нельзя получить из волновых уравнений для потенциа­лов, содержащих заряды и токи? Ответ вполне определенный — конечно, нельзя. Единственное, что мы сделали — это изменили названия, т. е. использовали новые обозначения. Мы нарисо­вали квадратик для обозначения производных, но это по-преж­нему не более и не менее как вторая производная по *t* минус вторая производная по *х,* минус вторая производная по *у,* ми­нус вторая производная по z. А значок μ, говорит, что у нас есть четыре уравнения, по одному для каждого из значений μ*=t, х, у* или z. Какой же тогда смысл того, что уравнения можно записать в столь простой форме? С точки зрения получения чего-то нового — никакого. Хотя, возможно, про­стота уравнений и выражает определенную простоту природы. Сейчас я покажу вам нечто интересное, чему мы понемногу научились. Можно сказать, что *все законы физики описываются*

*одним уравнением:*

U=0. (25.30)

Не правда ли, удивительно простое уравнение! Конечно, нуж­но еще знать, что обозначает символ U. Это физическая ве­личина, которую мы будем называть «[несообразностью](#прим2)» ситуации. У нас даже есть для нее формула. Вот как вычисляется эта несообразность: вы берете все физические законы и записы­ваете их в особой форме. Например, вы взяли закон механики F=ma и записали его в виде F-ma=0.

C:\1\pic\gray.jpgТеперь вы можете ве­личину (F-mа), которая, разумеется, в нашем мире должна быть нулем, назвать «несообразностью» механики. Затем вы бе­рете *квадрат* этой несообразности, обозначаете его через U1 и называете ее «механической несообразностью». Другими сло­вами, вы берете

(25.31)

который можно назвать «гауссовой электрической несообраз­ностью». Продолжая этот процесс, вы можете ввести U3, U4 и т. д. для каждого из физических законов.

Наконец, *полной* несообразностью мира U вы называете сумму Ui,- для каждого из различных явлений, т. е. U=2Ui .

C:\1\pic\gray.jpgИ тогда «великий закон природы» гласит:

(25.32)

Этот «закон», разумеется, утверждает лишь, что сумма квад­ратов всех отдельных отклонений равна нулю, однако един­ственный способ сделать сумму квадратов множества членов равной нулю — это приравнять нулю каждое из ее слагаемых.

Таким образом, «удивительно простой закон» (25.32) экви­валентен целому ряду уравнений, которые вы писали первона­чально. Поэтому совершенно очевидно, что простые обозначе­ния, скрывающие сложности за определением символов,— это еще не истинная простота. *Это только трюк.* Так и в выражении (25.32) за кажущейся простотой скрывается несколько уравне­ний; это снова не более чем трюк. Развернув их, вы снова полу­чите то, что было раньше.

Однако закон электродинамики, написанный в форме урав­нения (25.29), содержит *нечто* большее, чем простую запись; в векторном анализе, кроме простоты записи, также есть нечто большее. Тот факт, что уравнения электромагнетизма можно за­писать в особых обозначениях, которые *специально приспособ­лены* для четырехмерной геометрии преобразований Лоренца, иначе говоря, как векторные уравнения в четырехмерном мире, означает, что они инвариантны относительно преобразований Лоренца. Именно потому, что уравнения Максвелла инвариантны относительно этих преобразований, их можно записать в столь красивом виде.

В том, что законы электродинамики можно записать в форме элегантного уравнения (25.29), нет ничего случайного. Теория относительности была развита именно потому, что *эксперимен­тально подтвердилась* неизменность предсказанных уравнением Максвелла явлений в любой инерциальной системе. Именно при изучении трансформационных свойств уравнений Максвелла Лоренц открыл свои преобразования как преобразования, ос­тавляющие инвариантными эти уравнения.

Однако есть и другая причина записывать уравнения в та­ком виде. Было обнаружено, что *все* законы физики должны быть инвариантными относительно преобразований Лоренца (первый об этом догадался Эйнштейн). Таково содержание прин­ципа относительности. Поэтому если вы изобрели обозначения, которые сразу же показывают, инвариантен ли выписанный нами закон, то можно гарантировать, что при попытке соз­дать новую теорию вы будете писать только уравнения, согла­сующиеся с принципом относительности.

В простоте уравнений Максвелла в этих частных обозначе­ниях никакого чуда нет. Обозначения специально были приду­маны именно для них. Самая интересная с физической точки зрения вещь состоит в том, что *любой физический закон* (будь то распространение мезонных волн, или поведение нейтрино в β-распаде, или что-то другое) должен иметь ту же самую инвариантность относительно тех же преобразований. Так что если ваш звездолет движется с постоянной скоростью, то все законы природы вместе преобразуются так, что никаких новых явлений не возникает. Именно благодаря тому, что принцип относитель­ности является законом природы, уравнения нашего мира в четырехмерных обозначениях должны выглядеть гораздо проще.

***\*Вас может удивить, почему же мы не пользуемся реакцией***

***C:\1\pic\gray2.jpgИли даже***

***C:\1\pic\gray.jpg***

***для которой, несомненно, требуется меньшая энергия? Все дело в прин­ципе, называемом сохранением барионного заряда, согласно которому вели­чина, равная числу протонов минус число антипротонов, не может изме­ниться. В левой стороне нашей реакции эта величина равна 2. Следова­тельно, если мы хотим справа иметь антипротон, то ему должны сопут­ствовать еще три протона (или других бариона).***

***\* В английском оригинале «unworldliness». — Прим. ред.***

***Глава 26***

**ЛОРЕНЦЕВЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПОЛЕЙ**

[**§ 1. Четырехмерный потенциал** **дви­жущегося заряда**](#а1)

[**§ 2. Поля точ****ечного заряда, движу­щегося с посто­янной скоростью**](#а2)

[**§ 3. Релятивист****ское преобразование полей**](#а3)

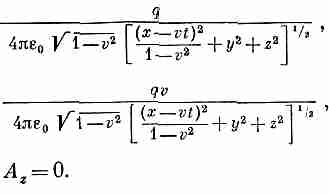
**[§ 4. Уравнение дв](#а4)****[ижения в релятивистских обозначениях](#а4)**

**[В этой главе c=1](#а4)**

**Повторить: гл. 20 «Решение урав­нений Максвелла в пустом пространстве»**

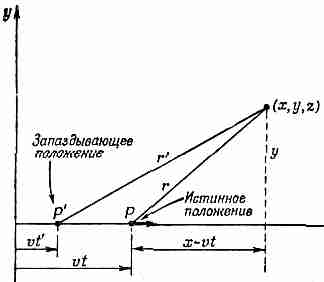
**§ 1. Четырехмерный потенциал движущегося заряда**

В предыдущей главе мы видели, что потен­циал Aμ =(ϕ, А) является четырехвектором. Его временной компонентой служит скалярный по­тенциал ϕ, а тремя пространственными компо­нентами— векторный потенциал А. Используя преобразования Лоренца, мы нашли также потенциал частицы, движущейся прямолинейно с постоянной скоростью. (В гл. 21 то же самое было сделано несколько иным методом.) Для точечного заряда, координаты которого в мо­мент *t* равны *(vt,* 0, 0), потенциалы в точке *(х, у, z)* имеют вид



(26.1)

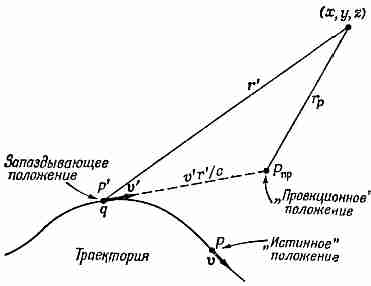
Уравнения (26.1) дают потенциалы в точке *х, у, z* в момент *t,* возникающие от движуще­гося заряда, «истинное» положение которого (имеется в виду положение *в момент времени t) x=vt.* Заметьте, что в уравнение входят координаты *(x-vt), у и z,* которые являются коор­динатами относительно *переменного положения Р* движущегося заряда (фиг. 26.1). Но, как вы знаете, истинное влияние распространяется на самом деле со скоростью с, так что поле в точке определяется на самом деле запаздывающим положением заряда *Р',* координата *х* которого равна *vt'* (где *t'=t-r'/с —* [«запаздывающее» время».](#прим1))



*Фиг. 26.1. Определение полей в точке P от заряда q, движущегося вдоль оси x с постоянной скоростью v. (Поле в точке (x, y, z) в «настоящий момент» можно выразить как через «истинное» положение P так и через «запаздывающее» положение P’ (т. е. положение в момент t’=t-r’/c).*

Нам, однако, известно, что заряд двигался с постоянной скоростью по прямой линии, поэтому естественно, что поведение в точке *Р'* непосредственно связано с переменным положением заряда. Фактически, если мы добавим предположение, что потен­циалы зависят только от положения и скорости в запаздывающий момент, тогда уравнение (26.1) будет представлять собой полную формулу для потенциалов заряда, движущегося любым обра­зом. Вот как все это работает. Пусть у вас имеется заряд, дви­жущийся каким-то произвольным образом, скажем, по траекто­рии, изображенной на фиг. 26.2, и вы пытаетесь найти потен­циал в точке *(х, у, z*). Прежде всего вы находите запаздывающее положение *Р'* и скорость v*'* в этой точке. Вообразите затем, что заряд сохраняет свое движение с этой скоростью на весь период запаздывания *(t'-t),* так что он появился бы затем в воображае­мом положении Рпр, которое мы будем называть «проекци­онным», причем двигаясь с той же скоростью *v'.* (На самом деле он, конечно, не делает этого; в момент *t* он находится в точке *Р.)* Тогда потенциалы в точке *(х, у, z)* будут как раз такими, кото­рые дали бы уравнения (26.1) для воображаемого заряда в про­екционном положении Рпр. Мы хотим здесь сказать, что, по­скольку потенциалы зависят только от того, что делает заряд в *запаздывающий* момент, они будут одинаковы, независимо от того, продолжает ли заряд свое движение с постоянной скоро­стью или изменяет его после момента t'*,* т. е. после того, как по­тенциалы, которые возникнут в момент *t* в точке *(х, у, z*), уже определены.

Вы понимаете, конечно, что в тот момент, когда получены формулы для потенциалов произвольно движущегося заряда, мы имеем полную электродинамику; из принципа суперпози­ции мы можем получить потенциалы для любого распределения зарядов.



*Фиг. 26.2. Движение за­ряда по произвольной тра­ектории.*

*Потенциалы в точке (х, у,* z) *в момент t определяются положением Р' и скоростью v' в за­паздывающий момент t'— t-r'* /с. *Их удобно выражать через коор­динаты относительно «проек­ционного» положения P*пр *(ис­тинным положением в момент t является точка* Р).

Следовательно, все явления электродинамики можно вывести либо из уравнений Максвелла, либо из следующего ряда замечаний. (Запомните их на случай, если вы вдруг очу­титесь на необитаемом острове. Исходя из них, можно восста­новить все. Преобразования Лоренца вы, конечно, помните. Не забывайте их ни на необитаемом острове, ни в каком-либо другом месте.)

*Во-первых, Аμ —* четырехвектор. *Во-вторых,* кулонов по­тенциал любого покоящегося заряда равен q/4πε0r. *В-тре­тьих,* потенциал, созданный зарядом, движущимся произволь­ным образом, зависит только от положения в запаздывающий момент времени. Из этих трех фактов вы можете получить все. Из того, что *Аμ ~* четырехвектор, мы преобразованием кулонова потенциала, который известен, получим потенциал за­ряда, движущегося с постоянной скоростью. Затем из послед­него утверждения, что потенциал зависит только от скорости в запаздывающий момент, мы, используя проекционное положе­ние, можем их найти. Правда, это не очень-то удобный способ рассмотрения, но интересно убедиться в том, что законы физики можно сформулировать множеством самых различных способов.

Иногда кое-кто безответственно заявляет, что вся электро­динамика может быть получена только из преобразований Ло­ренца и закона Кулона. Это, конечно, совершенно неверно. Мы прежде всего должны предположить, что у нас имеются скаляр­ный и векторный потенциалы, которые в совокупности образуют четырехвектор. Это говорит нам, как преобразуются потен­циалы. Затем, откуда нам известно, что необходимо учитывать только эффект в запаздывающий момент? Или, еще лучше, по­чему потенциал зависит только от положения и скорости и не зависит, например, от ускорения? Ведь *поля* Е и В *зависят* все-таки и от ускорения. Если вы попытаетесь применить те же рассуждения к ним, то будете вынуждены признать, что они за­висят только от положения и скорости в запаздывающий мо­мент. Но тогда поле ускоряющегося заряда было бы таким же, как и поле от заряда в проекционном положении, а это неверно. *Поля* зависят не только от положения и скорости вдоль траек­тории, но и от ускорения. Так что в «великом» утверждении, что все можно получить из преобразования Лоренца, содержится еще несколько неявных дополнительных предположений. (Всегда, когда вы слышите подобное эффектное утверждение, что нечто большое можно построить на основе малого числа предположений,— ищите ошибку. Обычно неявно принимается довольно много такого, что оказывается далеко не очевидным, " если посмотреть внимательнее.)

**§ 2. Поля точечного заряда, движущегося с постоянной скоростью**

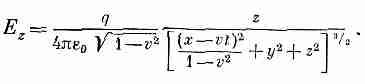
Итак, мы нашли потенциалы точечного заряда, движущегося с постоянной скоростью. Для практических целей нам нужно найти поля. Равномерно движущиеся заряды попадаются бук­вально на каждом шагу, скажем проходящие через камеру Вильсона космические лучи или даже медленно движущиеся электроны в проводнике. Так что давайте хотя бы посмотрим, как выглядят эти поля для любых скоростей заряда, даже для скоростей, близких к скорости света, но предположим при этом, что ускорение вообще отсутствует. Это очень интересный вопрос.

Поля мы будем находить по обычным правилам, исходя из потенциалов

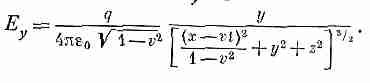
C:\1\pic\gray.jpg

C:\1\pic\gray.jpgВозьмем сначала *Ez:*

Но компонента *Az* равна нулю, а дифференцирование выра­жения (26.1) для ϕ дает

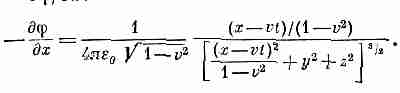


(26.2)

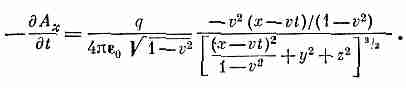
Аналогичная процедура для *Еу* приводит к

(26.3)

Немного больше работы с x-компонентой. Производная от ϕ более сложна, да и *Ах* не равна нулю. Давайте сначала вычислим —*д*ϕ*/дх:*

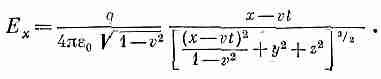


(26.4)

А затем продифференцируем *Ах* по *t:*

(26.5)

И, наконец, складывая их, получаем



(26.6)

C:\1\pic\gray.jpgБросим на минуту заниматься полем Е, а сначала найдем В. Для его z-компоненты мы имеем

Но, поскольку *Аy* равна нулю, у нас остается только одна производная. Заметьте, однако, что *Ах* просто равна vϕ, а производная *(d/dy)v*ϕравна —*vEy .* Так что

C:\1\pic\gray.jpg

(26.7)

Аналогично,

C:\1\pic\gray.jpg

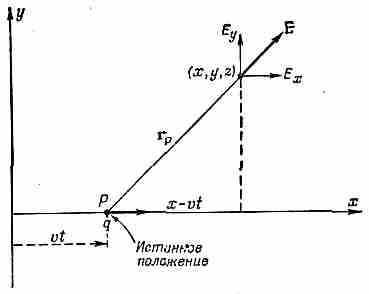
C:\1\pic\gray.jpgили

(26.8)

Наконец, компонента *Вх* равна нулю, поскольку равны нулю и *Ау* и *Аг.* Таким образом, магнитное поле можно запи­сать в виде

C:\1\pic\gray.jpg

(26.9)

Теперь посмотрим, как выглядят наши поля. Мы попытаемся нарисовать картину поля вокруг положения заряда в настоящий момент. Конечно, влияние заряда в каком-то смысле происхо­дит из запаздывающего положения, но, поскольку мы имеем дело со строго заданным движением, запаздывающее положение однозначно определяется положением в настоящий момент. При постоянной скорости заряда поля лучше связывать с теку­щими координатами, ибо компоненты поля в точке *х, у, z* за­висят только от *(х-vt), у* и z, которые являются компонентами вектора перемещения r*p* из постоянного положения заряда в точку *(х, у, z)* (фиг. 26.3).

*Фиг. 26.3. Электрическое поле заряда, движущегося с постоянной скоростью, направ­лено по радиусу от истинного положения заряда.*

Рассмотрим сначала точки, для которых z= 0. Поле Е в этих точках имеет только *х-* и y-компоненты. Из уравнений (26.3) и (26.6) видно, что отношение этих компонент как раз равно отно­шению *х-* и y-компонент вектора перемещения. Это означает, что направление Е *совпадает с направлением rp,* как это пока­зано на фиг. 26.3. Тот же результат остается справедливым и для трех измерений, поскольку *Ez* пропорционально z. Короче говоря, электрическое поле заряда радиально и силовые линии расходятся от заряда так же, как и в стационарном случае. Конечно, вследствие наличия дополнительного фактора (1-v*2)* поле не будет тем же самым, что в стационарном случае. Но здесь мы можем увидеть нечто очень интересное. Дело обстоит так, как будто вы пишете закон Кулона в особой системе коорди­нат, «сжатой» вдоль оси x множителем √(1-v2) Если вы сделаете это, то силовые линии впереди и позади заряда разойдутся, а по бокам сгустятся (фиг. 26.4).

Если мы связываем обычным образом напряженность поля Е с плотностью силовых линий, то видим, что поле впереди и по­зади заряда ослабевает, но зато по бокам становится сильнее, т. е. как раз то, о чем говорит нам уравнение. Когда вы изме­ряете напряженность поля под прямыми углами к линии дви­жения, т. е. при *(x-vt) = 0,* расстояние от заряда будет равно y2+z2, а полная напряженность √(*E2x+E2y)* в этих точках равна

C:\1\pic\gray.jpg

(26.10)

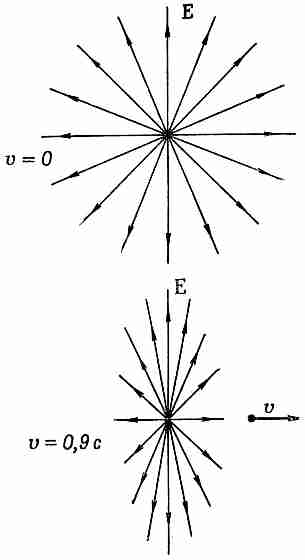
Она, как и в случае кулонова поля, пропорциональна квад­рату расстояния, но еще усиливается постоянным множителем 1/√(1-v2), который всегда больше единицы. Таким образом, *по бокам* движущегося заряда электрическое поле сильнее, чем это следует из закона Кулона. Фактически увеличение по срав­нению с кулоновым потенциалом равно отношению энергии частицы к ее массе покоя.

C:\1\pic\gray.jpgВпереди заряда (или позади него) *у* и z равны нулю, а поэ­тому

(26.11)

Снова поле обратно пропорционально расстоянию от заряда, но теперь оно *зарезается* множителем (1-*v2),* что согласуется с картиной силовых линий. Если *v/c* мало, то *v2/c2* еще меньше, и действие (1-v2) почти незаметно, поэтому мы снова возвра­щаемся к закону Кулона. Но если частица движется со скоро­стью, близкой к скорости света, то поле перед частицей сильно уменьшается, а поле сбоку чудовищно возрастает.

Наш результат, относящийся к электрическому полю заря­да, можно представить и так. Предположим, что вы на клочке бумаги нарисовали силовые линии покоящегося заряда, а за­тем эту картину запустили со скоростью v2. Тогда благодаря лоренцеву сокращению рисунок сожмется, т. е. частички гра­фита на бумаге будут казаться нам расположенными в других местах. Но чудо состоит в том, что в результате на про­летающем мимо листочке вы увидите точную картину си­ловых линий точечного дви­жущегося заряда. Лоренцево сокращение сблизит их по бокам, раздвинет перед заря­дом и позади него как раз настолько, чтобы получить нужную плотность. Мы уже отмечали, что силовые ли­нии — это не реальность, а лишь способ представить себе электрическое поле. Однако здесь они ведут себя как самые настоящие реальные линии. В этом частном случае, если вы и сделали ошибку, рассматривая силовые ли­нии как нечто реальное и преобразуя их как реальные линии в пространстве, поле в результате все равно получилось бы пра­вильным.



*Фиг****.*** *26.4. Электрическое поле заряда.*

*а — неподвижного, б* — *летящего с по­стоянной скоростью v*=0,9 с.

Однако от этого силовые линии не станут более реаль­ными. Вспомните об электрическом поле, создаваемом зарядом вместе с магнитом; когда магнит движется, он создает новое электрическое поле и разрушает всю нашу прекрасную кар­тину. Так что простая идея сокращающейся картинки, вообще говоря, не годится. Но все же это очень удобный способ запом­нить, как выглядит поле быстро движущегося заряда.

C:\1\pic\gray.jpgМагнитное поле [из уравнения (26.9)] равно vXE. Когда вы векторно помножите скорость на радиальное поле Е, то полу­чите поле В, силовые линии которого представляют окружности вокруг линии движения (фиг. 26.5). Если же теперь мы подста­вим обратно все *с,* то вы убедитесь, что результат получился тот же, что и для медленно движущихся зарядов. Хороший способ установить, куда должны войти *с, —* это вспомнить фор­мулу для силы:

C:\1\pic\gray.jpgВы видите, что произведение скорости на магнитное поле имеет ту *же* размерность, что и электрическое поле, так что в правой части (26.9) должен стоять множитель 1/с2, т. е.

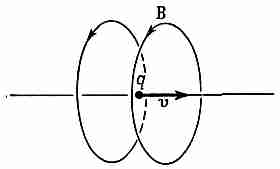
(26.12)

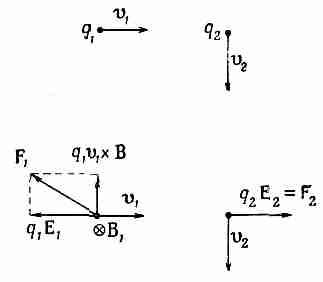
C:\1\pic\gray.jpgДля медленно движущегося заряда *(v* << с) поле можно считать кулоновым, и тогда

(26.13)

Эта формула в точности соответствует магнитному полю тока, которое было найдено в гл. 14 (вып. 5).

Попутно мне хотелось бы отметить кое-что весьма интерес­ное просто для того, чтобы вы об этом подумали. (К обсуждению этого мы еще вернемся, но несколько позже.) Представьте себе два электрона, скорости которых перпендикулярны, так что пути их пересекаются, однако электроны не сталкиваются; один из них успевает проскочить перед другим. В какой-то момент их относительное положение будет таким, как изображено на фиг. 26.6, *а.*



*Фиг. 26.5. Магнитное поле вблизи движущегося заряда равно* vXE *(ср. с фиг. 26.4).*

*Фиг. 26.6. Силы между двумя движущимися заря­дами не всегда равны и противоположны. «Действие», оказывается, не равно «противодействию».*

Рассмотрим теперь силы, с которыми *q2* дей­ствует на q1, и наоборот. На q2 со стороны q1 действует только электрическая сила, ибо q1на линии своего движения не соз­дает магнитного поля. Однако на q1кроме электрического поля, действует еще и магнитное, так что он движется и в магнитном поле, создаваемом зарядом q2. Все эти силы показаны на фиг. 26.6, *б.* Электрические силы, действующие на q1и q2, равны по величине и противоположны по направлению. Однако на q1еще действует и боковая (магнитная) сила, *которой и в помине нет у q*2. Равно ли здесь действие противодействию? Поломайте голову над этим вопросом.

**§ 3. Релятивистское преобразование полей**

В предыдущем параграфе мы вычисляли электрическое и маг­нитное поля, исходя из трансформационных свойств потенциа­лов. Но, несмотря на приведенные ранее аргументы в пользу физического смысла и реальности потенциалов, поля все же важ­нее. Они тоже реальны, и для многих задач было бы удобно иметь способ вычисления полей в движущейся системе, если поля в некоторой «покоящейся» системе уже известны. Мы име­ем законы преобразования для ϕ и А, поскольку *Аμ* представляет собой четырехвектор. Теперь нам хотелось бы найти законы преобразования Е и В. Пусть мы знаем векторы Е и В в одной системе отсчета. Как же они выглядят в другой системе, движущейся относительно первой? Здесь-то нам и понадобятся преобразования. Конечно, мы всегда можем сделать это через потенциал, но иногда удобно уметь преобразовывать поля непосредственно. Сейчас мы увидим, как это делается.

Как можно найти закон преобразования полей? Нам изве­стны законы преобразования ϕ и А, и мы знаем, как выражаются поля через ϕ и А, так что отсюда нетрудно найти преобра­зования для Е и В. (Вы можете подумать, что у каждого вектора есть нечто, дополняющее его до четырехвектора, так что, напри­мер, с вектором Е можно связать некую величину, которая сде­лает его четырехвектором. То же самое относится и к В. Увы, это не так. Все оказывается совершенно непохожим на то, что можно было бы ожидать.) Для начала возьмем магнитное поле В, которое, конечно, равно ∇XА. Теперь мы знаем, что *х -, у-* и *z*-компоненты векторного потенциала — это только одна часть, помимо них есть еще и t-компонента. Кроме того, мы знаем, что у аналога оператора ∇ наряду с производными по *х, у* и z есть также производная по *t.* Давайте же попытаемся найти, что получится, если мы произведем замену *у* на *t,* или *z* на *t,* или еще что-нибудь в этом духе.

C:\1\pic\gray.jpgПрежде всего обратите внимание на форму слагаемых, об­разующих компоненты В:

C:\1\pic\gray.jpgВ слагаемые, образующие x-компоненту *В,* входят только *z-* и y-компоненты *А.* Предположим, мы назвали эту комби­нацию производных и компонент «zy-штукой», или сокращенно *Fzy .* Мы просто имеем в виду, что

(26.15)

Подобной же «штуке» равна и компонента *В,* но на сей раз это будет «xz-штука», а *Вz,* разумеется, равна «yx-штуке». Таким образом,

C:\1\pic\gray.jpg

(26.16)

C:\1\pic\gray.jpgПосмотрим теперь, что получится, если мы попытаемся смастерить «штуки» типа *«t»,* т. е. *Fxt* или *Ftz* (ведь природа дол­жна быть красива и симметрична по *х, у, z* и *t).* Что такое, например, F*tz?* Разумеется, она равна

Но вспомните, ведь *At=*ϕ*,* поэтому предыдущее выражение равно

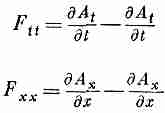
C:\1\pic\gray.jpg

C:\1\pic\gray.jpgТакое выражение нам уже встречалось раньше. Это почти z-компонента поля Е. Почти, за исключением неверного знака. Впрочем, мы забыли, что в четырехмерном градиенте произ­водная по *t* идет со знаком, противоположным производным по *х, у* и *z.* Так что на самом деле нам следует взять более умное обобщение, т. е. считать

(26.17)

C:\1\pic\gray.jpgТеперь она в точности равна — *Ег.* Так же можно построить *Ftx* и *Ftv* и получить три выражения:

А что, если оба индекса внизу будут t? Или оба будут *х?* Тогда мы получим выражения типа



т. е. просто нуль.

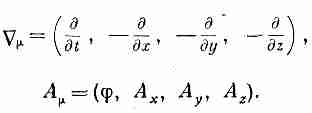
Итак, у нас есть шесть таких «F-штук». Кроме них, есть еще шесть полученных перестановкой индексов, но они не дают ни­чего нового, ибо

*Fxy= -Fyx*

и т. п. Таким образом, из шести возможных попарных комбина­ций четырех значений индексов мы получили шесть различных физических объектов, *которые представляют компоненты* В и Е.

Чтобы записать члены *F* в общем виде, мы воспользуемся обобщенными индексами μ и v, каждый из которых может быть 0, 1, 2 или 3, обозначающих соответственно (как и в обычных четырехвекторах) *t, x, у* или z. Кроме того, все будет прекрасно согласовываться с нашими четырехмерными обозначениями, если *F*μ*v* определить как

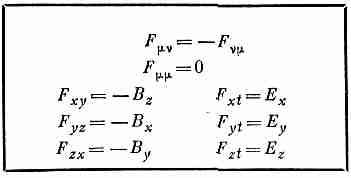
Fμv =∇μAv-∇vAμ, (26.19)

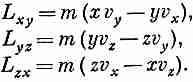
помня при этом, что

То, что мы нашли, можно сформулировать так: в природе су­ществуют шесть величин, которые представляют различные сто­роны чего-то одного. Электрическое и магнитное поля, кото­рые в нашем обычном медленно движущемся мире (где нас не беспокоит конечность скорости света) рассматривались как со­вершенно отдельные векторы, в четырехмерном пространстве уже не будут ими. Они — часть некоторой новой «штуки».

Наше физическое «поле» на самом деле шестикомпонентный объект *Fμv .* Вот как обстоит дело в теории относительности. По­лученные результаты для *Fμv* собраны в табл. 26.1.

*Таблица 26.1 •* компоненты *fμv*



Вы видите, что мы сделали фактически обобщение векторного произведения. Мы начали с ротора и с того факта, что его свой­ства преобразования в точности такие же, как свойства преобра­зования *двух* векторов — обычного трехмерного вектора А и оператора градиента, который, как нам известно, ведет себя подобно вектору. Возвратимся на минуту к обычному вектор­ному произведению в трехмерном пространстве, например к мо­менту количества движения частицы. При движении частицы в плоскости важной характеристикой оказывается комбина­ция *(xvy—yvx),* а при движении в трехмерном пространстве появляются три подобные величины, которые мы назвали мо­ментом количества движения:

Затем (хотя сейчас вы, может быть, об этом и забыли) мы сотво­рили в гл. 20 (вып. 2) чудо: эти три величины превратились в компоненты вектора. Чтобы сделать это, мы приняли искус­ственное соглашение: правило правой руки. Нам просто повезло. И повезло потому, что момент *Ltj (i* и j равны *х, у* или z) ока­зался антисимметричным объектом, т. е.

*Lij= - Lji , Lii=0.*

Из девяти возможных его величин независимы лишь три. И вот оказалось, что при изменении системы координат эти три опе­ратора преобразуются в точности, как компоненты вектора.

То же свойство позволяет записать в виде вектора и элемент поверхности. Элемент поверхности имеет две части, скажем *dx* и *dy,* которые можно представить вектором *da,* ортогональным к поверхности. Но мы не можем сделать этого же для четырех измерений. Что будет нормалью к элементу *dxdy?* Куда она направлена — по оси *z* или по *t?*

Короче говоря, для трех измерений оказывается, что ком­бинацию двух векторов типа *Lij,* к счастью, снова можно пред­ставить в виде вектора, поскольку возникают как раз три члена, которые, выходит, преобразуются подобно компонен­там вектора. Для четырех измерений это, очевидно, невоз­можно, поскольку независимых членов шесть, а шесть ве­личин вы никак не представите в виде четырех.

Однако даже в трехмерном пространстве можно составить такую комбинацию векторов, которую невозможно представить в виде вектора. Предположим, мы взяли какие-то два вектора a*=(ах, ay , az)* и b*=(bx, by, bz)* и составили всевозможные различ­ные комбинации компонент типа *axbx, axby* и т. д. Всего получается девять возможных величин:



Эти величины можно назвать *Т' ij .*

C:\1\pic\gray.jpgЕсли теперь перейти в повернутую систему координат (скажем, относительно оси z), то при этом компоненты а и b изменяются. В новой системе *ах* должно быть заменено на

C:\1\pic\gray.jpgАналогичные вещи происходят и с другими компонентами. Девять компонент изобретенной нами величины *T*ij., разу­меется, тоже изменяются. Например, *Txy =ахbу* переходит в

C:\1\pic\gray.jpgили

Каждая компонента *Tij —* это линейная комбинация ком­понент *tij.*

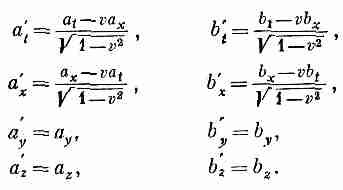
Итак, мы обнаружили, что из векторов можно сделать не только векторное произведение aXb, три компоненты которого преобразуют подобно вектору. Искусственно мы из двух векто­ров *tij .* можем сделать «произведение» другого сорта. *Девять* его компонент преобразуются при вращении по сложным правилам, которые можно выписать. Подобный объект, требующий для своего описания вместо одного индекса два, называется *тензо­ром.* Мы построили тензор «второго ранга», но так же можно поступить и с тремя векторами и получить тензор третьего ранга, а из четырех векторов — тензор четвертого ранга и т. д. Тензором первого ранга является вектор.

Суть всего этого разговора в том, что наше электромагнитное поле *Fμv* — тоже тензор второго ранга, так как у него два индек­са. Однако это уже тензор в четырехмерном пространстве. Он преобразуется специальным образом, и через минуту мы найдем его. Это просто произведение векторных преобразований. Если у тензора *F μ*v вы переставите индексы, то он изменит свой знак. Это особый вид тензора, и называется он *антисимметричным.* Иначе говоря, электрическое и магнитное поля являются частью антисимметричного тензора второго ранга в четырех­мерном пространстве.

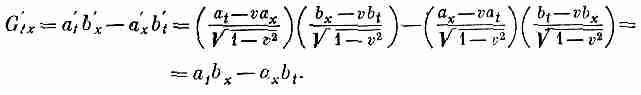
Вот какой мы прошли длинный путь. Помните, мы начали с определения, что такое скорость? А теперь мы уже рассуждаем о «тензоре второго ранга в четырехмерном пространстве».

Теперь нам нужно найти закон преобразования *Fμv.* Сделать это нетрудно — мороки только много,— шевелить мозгами особенно не нужно, а вот потрудиться все же придется. Един­ственное, что мы должны найти,— это преобразование Лоренца величины *∇μ Av*— *∇vAμ .* Так как *∇μ* — просто специальный слу­чай вектора, то мы будем работать с общей антисимметричной C:\1\pic\gray.jpgкомбинацией векторов, которую можно назвать *Gμv :*

(26.20)

(Для наших целей *ам* следует, в конце концов, заменить на *∇μ*, а b*μ* —на потенциал *Аμ .)* Компоненты а*μ* и b*μ* преобразуются по формулам Лоренца:

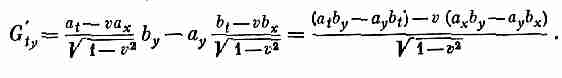
(26.21)

Теперь преобразуем компоненты G*μ* v . Начнем с *Gtx:*

Но ведь это просто *Gtx.* Таким образом, мы получили простой

результат G’*tx=Gtx .*

Возьмем еще одну компоненту:

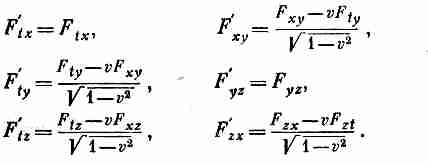


Итак, получается

C:\1\pic\gray.jpg

И, конечно, точно таким же образом

C:\1\pic\gray.jpg

А теперь ясно, как ведут себя все остальные компоненты. Давайте составим таблицу преобразований всех шести членов; только теперь мы будем все писать для величин *Fμv:*

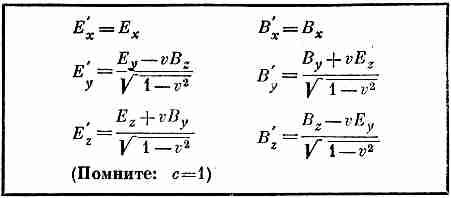
(26.22)

Разумеется, по-прежнему у нас *Fμv=—f'μv , a F'μμ*=0.

Итак, мы имеем преобразования электрических и магнитных полей. Единственное, что нам нужно сделать,— это заглянуть в табл. 26.1 и узнать, что означает для векторов Е и В преобра­зование, записанное для *Fмv.* Речь идет о простой подстановке. Чтобы можно было видеть, как это все выглядит в обычных сим­волах, перепишем наши преобразования компонент поля в виде табл. 26.2.

*Таблица 26.2* • ЛОРЕНЦЕВЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

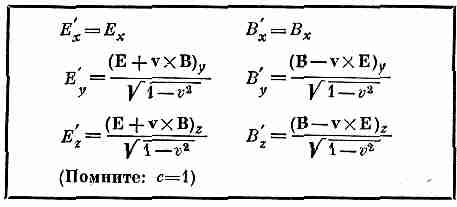
ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ



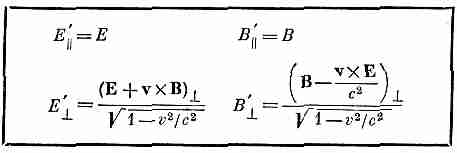
Уравнения в этой таблице говорят нам, как изменяются Е и В при переходе от одной инерциальной системы к другой. Если известны Е и В в одной системе, то мы можем найти, чему они равны в другой, движущейся относительно нее со скоростью *v.*

Можно переписать эти уравнения в форме, более легкой для запоминания. Для этого заметьте, что поскольку скорость *v* направлена по оси *х,* то все компоненты с *v* представляют собой векторные произведения vXE и vXB. Так что преобразования можно записать в виде табл. 26.3.

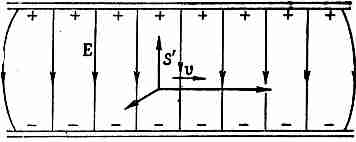
*Таблица 26.3* • ДРУГАЯ ФОРМА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПОЛЕЙ



Теперь легко запомнить, какая компонента куда идет. Фак­тически эти преобразования можно записать даже еще проще, если ввести компоненты поля, направленные по оси *х,* т. е. «параллельные» компоненты E║ и В║(которые параллельны относительной скорости систем *S* и S') и полные поперечные или «перпендикулярные» компоненты *Е┴ и В┴,* т. е. векторную сумму *у-* и z-компонент. В результате мы получим уравнения, сведенные в табл. 26.4. (Для полноты мы восстановили все *с.)*

*Таблица 26.4 •* ЕЩЕ ОДНА ФОРМА ЛОРЕНЦЕВЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПОЛЕЙ **Е** И **В**

Преобразования поля позволяют по-другому решить задачи, которыми мы занимались прежде, например найти поле дви­жущегося точечного заряда. Раньше мы вычисляли поля, диф­ференцируя потенциалы. Но теперь то же самое можно сделать, преобразуя кулоново поле. Если у нас в системе *S* находится покоящийся заряд, то он создает только простое радиальное поле Е. В системе *S',* движущейся относительно системы *S* со скоростью *v=*-u*,* точечный заряд будет казаться нам летя­щим со скоростью *и.* Покажите сами, что преобразования табл. 26.3 и 26.4 дают те же самые электрические и магнитные поля, которые мы получили в § 2.

Преобразования табл. 26.2 дают нам очень интересный и простой ответ на вопрос: что мы видим, если движемся мимо *любой* системы фиксированных зарядов?

*Фиг. 26.7. Система коор­динат S' движется в стати­ческом электрическом поле.*

Пусть нам хочется узнать поля в *нашей* системе *S',* если мы движемся между пла­стинами конденсатора вдоль него, как показано на фиг. 26.7. (Но, разумеется, все равно, если бы заряженный конденсатор двигался мимо *нас.)* Что же мы увидим? Преобразования в этом случае облегчаются тем, что в первоначальной системе поле В отсутствует. Предположим сначала, что наше движение пер­пендикулярно к направлению Е, при этом мы увидим поле Е'=Е/√(1-v2/с2), которое остается полностью поперечным. Но мы еще увидим и магнитное поле В'=-vXE'/c2. (He удивляй­тесь, что в этой формуле нет √(1-v2); ведь мы записали ее через Е', а не через Е; так тоже можно делать.) Итак, когда мы дви­жемся в направлении, перпендикулярном к статическому полю, то видим измененное Е и вдобавок еще поперечное поле В. Если наше движение не перпендикулярно вектору Е, то мы разбиваем Е на Е║ и Е┴. Параллельная часть остается неизмен­ной, е'║=е┴, а что происходит с перпендикулярной компонен­той, мы уже описали.

Давайте разберем противоположный случай и вообразим, что мы движемся через чисто статическое *магнитное* поле. На этот раз мы бы увидели *электрическое* поле Е', равное vXB', и магнитное поле, усиленное множителем 1/√(1-v2/с2)(предполагая, что оно поперечное). До тех пор, пока *v* много меньше *с,* изменением магнитного поля можно пренебречь, и основным эффектом будет появление электрического поля. В качестве примера этого эффекта рассмотрим некогда знаме­нитую проблему определения скорости самолета. Сейчас она уже больше не знаменита, поскольку для определения скорости можно использовать отражение от Земли сигналов радиолока­тора. Но раньше в плохую погоду скорость самолета было очень трудно определить. Ведь вы не видите Землю и не можете ска­зать куда вы летите. А знать, насколько быстро вы движетесь относительно Земли, было важно. Как же это можно сделать, не видя ее? Те, кому были знакомы уравнения преобразования, считали, что нужно использовать тот факт, что самолет движется в магнитном поле Земли. Предположим, что самолет летит там, где магнитное поле нам более или менее известно. Возьмем простейший случай, когда магнитное поле вертикально. Если мы летим через него с горизонтальной скоростью *v,* то в соот­ветствии с нашей формулой должны наблюдать электрическое поле vXB, т. е. перпендикулярное к направлению движения. Если поперек самолета подвесить изолированный провод, то электрическое поле на его концах будет индуцировать заряды. Ну в этом ничего нового нет. С точки зрения наблюдателя на Земле, мы просто передвигаем провод в магнитном поле, а сила *q(v*XB) заставляет заряд двигаться к концу провода. Уравнения преобразования говорят то же самое, но другими словами. (То, что одну и ту же вещь можно получить не одним, а несколькими способами, вовсе не означает, что один способ лучше другого. Мы овладели столькими методами и приемами, что один и тот же результат можем получать какими хотите способами!)

Итак, единственное, что мы должны сделать для определения скорости *v,—* это измерить напряжение между концами про­вода. Хотя для этой цели мы не можем воспользоваться вольт­метром, ибо то же самое поле будет действовать и на провода внутри вольтметра, способы измерения таких полей все же существуют. О некоторых из них мы уже говорили в гл. 9 (вып. 5), когда рассказывали об атмосферном электричестве. Так что измерить скорость самолета, казалось бы, можно.

Однако эта важная проблема не была решена таким методом. Дело в том, что величина электрического поля, которое при этом развивается,— порядка нескольких милливольт на метр. Измерить такие поля, конечно, можно, но вся беда в том, что они ничем не отличаются от любых других электрических полей. Поля, создаваемые движением через магнитное поле, нельзя отличить от электрических полей, возникающих в воздухе по каким-то другим причинам (скажем, от электростатических зарядов в воздухе или на облаках). В гл. 9 мы говорили, что обычно над поверхностью Земли существуют электрические поля с напряженностью около 100 *в/м,* но они совершенно нере­гулярные. Так что самолет во время полета будет наблюдать флуктуации атмосферных электрических полей, которые огром­ны по сравнению со слабенькими полями, возникающими из-за множителя vXB. Ввиду этих чисто практических причин изме­рить скорость самолета, используя его движение в магнитном поле Земли, невозможно.

**§ 4. Уравнения движения в релятивистских** [**обознач****е****ния****х**](#прим2)

Полученные из уравнений Максвелла электрические и маг­нитные поля сами по себе не представляют особой ценности, если мы не знаем, что эти поля могут делать, на что они способны.

Вы, вероятно, помните, что поля нужны для нахождения действующих на заряды сил и что именно эти силы определяют их движение. Так что связь движения зарядов с силами, разу­меется, тоже есть часть электродинамики.

## На отдельный заряд, находящийся в полях Е и В, действует

C:\1\pic\gray.jpg

(26.23)

C:\1\pic\gray.jpgПри небольших скоростях эта сила равна произведению массы на ускорение, но истинный закон, справедливый при любых скоростях, гласит: сила равна *dp/dt.* Подставляя *p=m0v/√(1-v*2/c2), находим релятивистское уравнение движения заряда:

(26.24)

Теперь мы хотим обсудить это уравнение с точки зрения тео­рии относительности. Поскольку уравнения Максвелла запи­саны у нас в релятивистской форме, интересно посмотреть, как в релятивистской же форме выглядят уравнения движения. Посмотрим, можно ли переписать уравнения движения в четы­рехмерных обозначениях.

Мы знаем, что импульс есть часть четырехмерного вектора pμ с энергией m0/√(1-*v*2/с2) в качестве временной компоненты, так что мы надеемся заменить левую часть уравнения (26.24) на *dp*μ*/dt.* Теперь нам нужно найти только четвертую компоненту силы F. Эта компонента должна быть равна скорости изменения энергии или скорости совершения работы, т. е. F•v. Так что правую часть уравнения (26.24) желательно было бы записать в виде четырехвектора типа (F•v, *Fx, Fy , Fz),* Однако эти вели­чины не составляют четырехвектора.

Производная четырехвектора *по времени* не будет больше четырехвектором, так как *d/dt* требует для измерения *t* неко­торой специальной системы отсчета. С этой трудностью мы уже сталкивались раньше, когда пытались сделать четырехвектор из скорости v. Тогда мы попытались считать, что роль временной компоненты скорости играет *cdt/dt=c.* Но на самом деле величины

C:\1\pic\gray.jpg

(26.25)

*не образуют* четырехвектора. После этого мы обнаружили, что их можно превратить в компоненты четырехвектора, если помножить каждую на 1

C:\1\pic\gray.jpg/√(1-v*2/с2).* «Четырехмерной ско­ростью» *uμ* оказался вектор

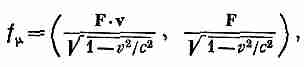
(26.26)

Вот в чем фокус! Нужно умножать производную *d/dt* на *1/√(1-v*2/с2), если мы хотим превратить ее компоненту в четырехвектор.

Итак, вторая гипотеза: четырехвектором должна быть ве­личина

C:\1\pic\gray.jpg

(26.27)

Но что такое v? Это уже скорость частицы, а не скорость системы координат! Таким образом, обобщением силы на четырехмерное пространство будет величина fμ:

(26.28)

которую мы назовем «4-силой». Она уже четырехвектор, и ее пространственными компонентами будут уже не F, а

F/√(1-v2/c2).

Почему же fμ четырехвектор? Неплохо бы понять, что это за таинственный множитель 1/√(1-v2/с2). Так как мы встре­чаемся с ним уже второй раз, то самое время посмотреть, почему производная *d/dt* всегда должна входить с одним и тем же

множителем. Ответ заключается вот в чем. Когда мы берем производную по времени некоторой функции *х,* то подсчитываем приращение *Δх* за малый интервал *Δt* переменной *t.* Но в другой

системе отсчета интервал *At* может соответствовать изменению как *t',* так и *х',* так что при изменении только *t'* изменение *х* будет другим. Для наших дифференцирований следовало бы найти такую переменную, которая была бы мерой «интервала» в *пространстве-времени* и оставалась бы той же самой во всех системах отсчета. Когда в качестве этого интервала мы принимаем приращение *Δх,* то оно будет тем же во всех системах отсчета. Когда частица «движется» в четырехмерном пространстве, то возникают приращения как *Δt,* так и *Δх, Δy, Δz.* Можно ли из них сделать интервал? Да, они образуют компоненты приращения четырехвектора *хμ=(сt, х, у, г),* так что, если определить величину *Δ*s через

C:\1\pic\gray.jpg

что представляет четырехмерное скалярное произведение, то в ней мы приобретаем настоящий скаляр и можем пользоваться им для измерения четырехмерного интервала. Исходя из вели­чины As или ее предела *ds,* мы можем определить параметр

C:\1\pic\gray.jpg

Хорошим четырехмерным оператором будет и производ­ная по *s, т.* е. *d/ds,* так как она инвариантна относительно пре­образований Лоренца.

C:\1\pic\gray.jpgДля движущейся частицы *ds* легко связывается с *dt.* Для точечной частицы

(26.30)

C:\1\pic\gray.jpgа

Таким образом, оператор

C:\1\pic\gray.jpg

есть *инвариантный оператор.* Если подействовать им на любой четырехвектор, то мы получим другой четырехвектор. Например, если мы действуем им на *(ct, x, у, z),* то получаем четырехвектор скорости

C:\1\pic\gray.jpg

Теперь мы видим, почему √(l-*v2/c2*)поправляет дело.

Инвариантная переменная s — очень полезная физическая величина. Ее называют «собственным временем» вдоль траекто­рии частицы, ибо в системе, в любой момент движущейся вместе с частицей, *ds* просто равно интервалу времени. (В этой системе Δx=Δy=Δz=0, a Δs=Δt.) Если вы представите себе часы, скорость хода которых не зависит от ускорения, то, двигаясь вместе с частицей, такие часы будут показывать время s.

Теперь можно вернуться назад и записать закон Ньютона (подправленный Эйнштейном) в изящной форме:

C:\1\pic\gray.jpg

(26.32)

где fμ определяется формулой (26.28). Импульс же *р*μможет быть записан в виде

C:\1\pic\gray.jpg

(26.33)

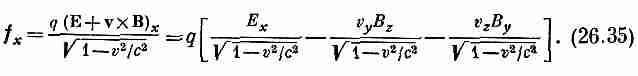
C:\1\pic\gray.jpgгде координаты *x*μ*=(ct, х, у, z)* описывают теперь траекторию частицы. Наконец, четырехмерные обозначения приводят нас к очень простой форме уравнений движения:

(26.34)

напоминающей уравнения F=ma. Важно отметить, что урав­нения (26.34) и F=ma — вещи разные, ибо четырехвекторная форма уравнения (26.34) содержит в себе релятивистскую ме­ханику, которая при больших скоростях отличается от механики Ньютона. Это абсолютно непохоже на случай уравнений Максвелла, где нам нужно был о переписать уравнения в реляти­вистской форме, *совершенно не изменяя их смысла,* а изменяя лишь обозначения.

Вернемся теперь к уравнению (26.24) и посмотрим, как в четырехвекторных обозначениях записывается правая часть.

Три компоненты F, поделенные на √(1-v2/c2), составляют про­странственные компоненты fμ , так что



Теперь мы должны подставить все величины в их релятивистских обозначениях. Прежде всего c/√(1-*v2/c2), vy/*√(*1*-*v2/c2)* и *vz/*√(*1-v2/c2)* представляют *t-, у-* и z-компоненты 4-скорости u*μ.* Компоненты же Е и В входят в электромагнитный тензор вто­рого ранга *Fμv.* Отыскав в табл. 26.1 компоненты *Fμv,* соответ­ствующие *Ех, Вг* и *Вv ,* получим

C:\1\pic\gray.jpg

C:\1\pic\gray.jpgздесь уже начинает вырисовываться что-то интересное. В каж­дом слагаемом есть индекс *х,* и это разумно, ибо мы находим х-компоненту силы. Все же остальные индексы появляются в парах *tt, yy, zz —* все, кроме слагаемого с *хх,* которое куда-то делось. Давайте просто вставим его и запишем

C:\1\pic\gray.jpgЭтим мы ничего не изменили, так как благодаря антисимметрии *Fμv* слагаемое *Fxx* равно нулю. Причиной же нашего желания восстановить его является возможность сокращенной записи уравнения (26.36):

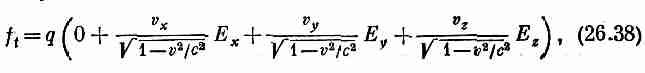
(26.37)

Это по-прежнему уравнение (26.36), если предварительно мы примем *соглашение:* когда какой-то индекс встречается в произ­ведении *дважды* (подобно v), нужно автоматически суммировать все слагаемые с одинаковыми значениями этого индекса точно так же, как и в скалярном произведении, т. е. *пользуясь тем же самым правилом знаков.*

Нетрудно поверить, что уравнение (26.37) так же хорошо работает и для μ=y, и для μ*=z.* Но как обстоит дело с μ=t? Посмотрим для забавы, что дает формула

C:\1\pic\gray.jpg

Теперь мы снова должны перейти к **Е** и **В**. После этого получается



или

C:\1\pic\gray.jpg

C:\1\pic\gray.jpgНо в (26.28) *ft* бралось равным

А это одно и то же, что (26.38), ибо v•(vXB) равно нулю. Так что все идет как нельзя лучше.

В результате наше уравнение движения записывается в элегантном виде:

C:\1\pic\gray.jpg

(26.39)

Как ни приятно видеть столь красиво записанное уравнение, форма эта не особенно полезна. При нахождении движения частицы обычно удобнее пользоваться первоначальным урав­нением (26.24), что мы и будем делать в дальнейшем.

***\*Штрих используется здесь для обозначения запаздывающего поло­жения и времени; не путайте его со штрихом в предыдущей главе, обозначавшим систему отсчета, подвергнутую преобразованиям Лоренца.***

***\*В этом параграфе мы не будем принимать с за единицу.***

***Глава 27***

**ЭНЕРГИЯ ПОЛЯ И ЕГО ИМПУЛЬС**

[**§ 1. Локальные з****аконы сохранения**](#a1)

[**§ 2. Сохранени****е энергии и электромагнитное поле**](#a2)

[**§ 3. Плотность** **энергии и поток энергии в электромагнитном поле**](#a3)

[**§ 4. Неопределе****н****ность** **энергии поля**](#a4)

[**§ 5. Пример****ы поток****ов энергии**](#a5)

[**§ 6. Импу****льс****поля**](#a6)

**§ 1. Локальные законы сохранения**

То, что энергия вещества не всегда сохра­няется, ясно как день. При излучении света объект теряет энергию. Однако потерянную энергию можно представить в какой-то другой форме, скажем, в форме энергии света. Поэтому закон сохранения энергии не полон, если не рассмотреть энергию, связанную со светом, в частности, и с электромагнитным полем вооб­ще. Сейчас мы подправим его, а заодно и закон сохранения импульса с учетом электромагнит­ного поля. Мы, разумеется, не можем обсуждать их порознь, ибо, согласно теории относитель­ности, это различные проявления одного и того же четырехвектора.

С сохранением энергии мы познакомились еще в начале нашего курса; тогда мы просто сказали, что полная энергия в мире остается постоянной. Теперь же мы хотим сделать очень важное обобщение идеи закона сохранения энергии, которое скажет нам нечто о *деталях* того, *как* это происходит. Новый закон будет говорить, что если энергия уходит из какой-то области, то это может происходить только за счет ее *вытекания* через границы рассматрива­емой области. Это утверждение сильнее, чем просто сохранение энергии без подобных огра­ничений.

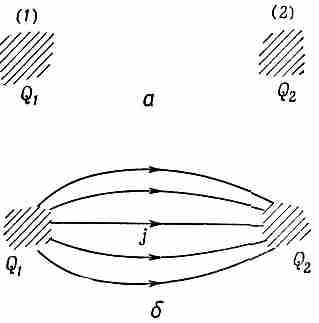
Чтобы легче понять смысл этого утверждения, посмотрим, как работает закон сохранения заряда. У нас есть плотность тока j и плотность заряда ρ, а сохранение заряда описывается тем, что если в каком-то месте заряд уменьшается, то оттуда должен происходить отток зарядов. Мы называем это сохранением заряда. Математически закон сохранения записывается в виде

C:\1\pic\gray.jpg

(27.1)

Как следствие этого закона полный заряд всего мира остается постоянным. Заряды никогда не рождались и не уничтожались; в мире как целом нет никакой чистой прибыли зарядов, как нет и никаких потерь. Однако полный заряд мира можно сде­лать постоянным и другим способом. Пусть вблизи точки *(1)* находится заряд Q1 , а вблизи точки *(2),* расположенной от нее на некотором расстоянии, никакого заряда нет (фиг. 27.1). Предположим теперь, что с течением времени заряд *Q1* посте­пенно исчезает, но что *одновременно с* уменьшением Q1 вблизи точки *(2)* появляется заряд *Q2,* причем так, что в любой момент сумма *Qt* и *Q2* остается постоянной. Другими словами, в любой промежуточный момент количество заряда, теряемое Q1 , при­бавляется к *Q2.* При этом в мире полное количество заряда сох­раняется. Хотя это тоже «всемирное» сохранение заряда, мы не будем его называть «локальным» сохранением, ибо для того, чтобы заряд перебрался из точки *(1)* в точку *(2),* ему не обяза­тельно появляться где-то в пространстве между этими точками. Локально заряд просто «теряется».

Однако такой «всемирный» закон сохранения встречает в теории относительности большие трудности. Понятие «одно­временно» для точек, разделенных расстоянием, неэквивалентно для разных систем. Два события, происходящие одновременно в одной системе, не будут одновременными в системе, движу­щейся относительно нее. Для «всемирного» сохранения только что описанного типа требуется только одно—чтобы заряд, те­ряемый Q1, *одновременно* появлялся в *Q2.* В противном случае будут такие моменты, когда заряд не сохраняется. По-видимому, способа сделать закон сохранения заряда релятивистски инвариантным, не делая его «локальным», не существует.



# Фиг. 27.1. Два способа описания сохранения заряда

C:\1\pic\gray.jpg

Суть в том, что требование лоренцевой инвариантности, как оказы­вается, удивительнейшим образом ограничивает возможные законы природы. В современной квантовой теории поля, на­пример, теоретики часто пытаются изменить теорию, допустив то, что мы называем «нелокальным» взаимодействием, когда нечто, находящееся *здесь,* непосредственно влияет на нечто, находящееся *там,* но мы всегда наталкиваемся на трудности, связанные с принципами относительности.

«Локальные» же законы сохранения основаны на другой идее. Они утверждают, что заряд может перейти из одного места в другое только при том условии, что нечто такое происходит в пространстве между ними. Чтобы описать такой закон, нам нужна не только плотность заряда ρ, но и величина другого сор­та, именно вектор j, задающий скорость потока заряда через поверхность. При этом поток связан со скоростью изменения заряда уравнением (27.1). Это более сильная формулировка закона сохранения. Она говорит, что заряд сохраняется особым образом, сохраняется «локально».

Сохранение энергии, оказывается, тоже *локальный* процесс. В мире существует не только плотность энергии в данной об­ласти, но и вектор, представляющий скорость потока энергии через поверхность. Например, когда источник излучает свет, мы можем найти энергию света, излучаемого им. Если мы вообра­зим некую математическую поверхность, окружающую источ­ник света, то потеря энергии этого источника равна потоку энергии через окружающую его поверхность.

**§ 2. Сохранение анергии и электромагнитное поле**

C:\1\pic\gray.jpgНам надо теперь описать сохранение энергии в электромаг­нитном поле количественно. Для этого нужно выяснить, сколько энергии находится в единице объема, а также какова скорость ее потока. Рассмотрим сначала энергию только электромагнит­ного поля. Пусть *и* обозначает *плотность энергии* поля, т. е. количество энергии в единице объема пространства, а вектор S — *поток энергии* поля (т. е. количество энергии, прошедшее в единицу времени через единичную поверхность, перпендику­лярную к потоку). Тогда, аналогично сохранению заряда (27.1), можно написать «локальный» закон сохранения энергии поля в виде

(27.2)

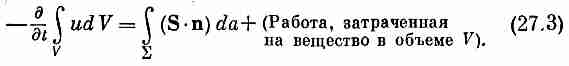
Конечно, этот закон, вообще говоря, не верен; энергия поля не сохраняется. Представьте, что вы находитесь в темной комнате, а затем поворачиваете выключатель. Комната внезапно наполняется светом, т. е. в ней оказывается энергия поля, ко­торой раньше не было. Уравнение (27.2) не составляет полного закона сохранения, ибо энергия *одного только поля* не сохра­няется, а существует еще энергия вещества; сохраняется лишь полная энергия во всем мире. Энергия поля будет изменяться, если оно производит работу над веществом или вещество произ­водит работу над полем.

Однако если внутри интересующего нас объема находится вещество, то мы знаем, сколько энергии оно несет в себе: энергия каждой частицы равна m0c2/√(l-v2/c2). Полная же энергия вещества равна просто сумме энергий всех частиц, а поток ее через поверхность равен просто сумме энергий, переносимой каждой частицей, пересекающей эту поверхность. Но сейчас мы будем иметь дело только с энергией электромагнитного поля: Так что мы должны написать уравнение, которое говорит, что Г полная энергия *поля* в данном объеме уменьшается *либо* в ре­зультате вытекания ее из объема, *либо* потому, что поле передает свою энергию веществу (или приобретает ее, что означает просто отрицательную потерю). Энергия поля в объеме *V* равна

C:\1\pic\gray.jpg

а скорость ее уменьшения равна производной этого интеграла по времени со знаком минус. Поток энергии поля из объема *V* равен интегралу от нормальной компоненты S по поверхности 2, ограничивающей объем V:

C:\1\pic\gray.jpg

Таким образом,

C:\1\pic\gray.jpgРаньше мы видели, что над каждой единицей объема вещества поле в единицу времени производит работу *Е•j.* [Сила, действу­ющая на частицу, равна F=q(E+vXB), а мощность равна F-v=qE*•*v. Если в единице объема содержится *N* частиц, то эта мощность в единице объема равна *NqE•*v, a *Nqv=j•I* Таким образом, величина Е*•*j должна быть равна энергии, теряемой *полем* в единице объема за единицу времени. Уравнение (27.3) при этом приобретает вид

(27.4)

C:\1\pic\gray.jpgВот как выглядит наш закон сохранения энергии в поле. Его можно записать как дифференциальное уравнение, подобное (27.2); для этого второе слагаемое нужно превратить в интеграл по объему, что легко делается с помощью теоремы Гаусса. По­верхностный интеграл от нормальной компоненты S равен интегралу от дивергенции S по объему, ограниченному этой поверхностью, так что уравнение (27.3) эквивалентно следую­щему:

C:\1\pic\gray.jpgгде производную по времени от первого слагаемого мы внесли под интеграл. Поскольку это уравнение верно для любого объема, то интегралы можно отбросить и получить уравнение для энергии электромагнитного поля:

(27.5)

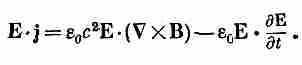
Однако это уравнение не даст нам ничего хорошего, пока мы не узнаем, что такое *u* и S. Быть может, мне следовало бы просто сказать вам, как они выражаются через Е и В, поскольку это единственное, что нам, собственно, нужно. Однако мне очень хочется изложить вам все те рассуждения, которыми в 1884 г. воспользовался Пойнтинг, чтобы получить формулы для S и u*, с* тем, чтобы вы понимали, откуда они взялись. (Для дальнейшей работы, впрочем, вам этот вывод не потребуется.)

**§ 3. Плотность энергии и поток энергии в электромагнитном поле**

C:\1\pic\gray.jpgИдея заключается в том, что должны существовать плот­ность энергии *u* и поток S, которые зависят только от полей Е и В. [В электростатике, например, плотность энергии, как мы знаем, можно записать в виде 1/2ε0(Е•Е).] Разумеется, *u* и S могут зависеть от потенциалов и чего-то другого, но давайте лучше посмотрим, что мы можем написать. Попытаемся перепи­сать величину Е•j в таком виде, чтобы она стала суммой двух слагаемых, одно из которых было бы производной по времени от некоторой величины, а второе — дивергенцией. Тогда первую величину мы бы назвали и, а вторую — S (разумеется, с надле­жащими знаками). Обе величины должны быть выражены только через поля, т. е. мы хотим записать наше равенство в виде

(27.6)

C:\1\pic\gray.jpgпричем левая часть уравнения должна выражаться только через поля. Как это сделать? Разумеется, нужно воспользоваться уравнениями Максвелла. Из уравнения для ротора В имеем

Подставляя это в (27.6), получаем выражение его только через **Е** и **В**:

(27.7)

Работа частично нами уже закончена. Последнее слагаемое есть производная по времени — это *(д/дt)(1/2ε0Е*•*Е).*

Итак, 1/2*ε*0Е•Е должно быть по крайней мере частью *u.* Такое же выражение получалось у нас и в электростатике. А теперь единственное, что нам остается сделать,— это превра­тить в дивергенцию чего-то второе слагаемое.

Заметьте, что первое слагаемое в правой части (27.7) пере­писывается в виде

C:\1\pic\gray.jpg

(27.8)

вы знаете из векторной алгебры, что (aXb)•c равно а•(bXc), поэтому первое слагаемое принимает вид

C:\1\pic\gray.jpg

(27.9)

C:\1\pic\gray.jpgт. е. получилась дивергенция «чего-то», к которой мы так стре­мились. Получилась, но только все это неверно! Я предупреждал вас, что оператор ∇ только «похож» на вектор, а на самом деле он не «настоящий» вектор. Вспомните, что в дифференциальном исчислении существует дополнительное *соглашение:* когда опе­ратор производной стоит перед произведением, он действует на все стоящее правее него. В уравнении (27.7) оператор ∇ дей­ствует только на В и не затрагивает Е. Но если бы мы записали его в форме уравнения (27.9), то общепринятое соглашение гово­рило бы, что ∇действует как на В, так и на Е. Так что это *не одно и то же.* В самом деле, если расписать ∇•(ВXЕ) по ком­понентам, то можно убедиться, что оно равно E• (∇XB) *плюс* какие-то другие слагаемые. Это напоминает взятие производной от произведения в обычном анализе. Например,

Вместо того чтобы выписать все компоненты **∇**• (**B**X**E**), мне бы хотелось показать вам один трюк, очень полезный в за­дачах такого рода. Он позволит вам всюду в выражениях, содер­жащих оператор ∇, пользоваться правилами векторной алгебры, не попадая впросак. Трюк состоит в отбрасывании (по крайней мере на время) правил дифференциального исчисления относи­тельно того, на что действует оператор производной. Вы знаете, что порядок сомножителей важен в *двух* различных случаях. Во-первых, в дифференциальном исчислении: *f(d/dx)g* не то же самое, что *g(d/dx)f;* и, во-вторых, в векторной алгебре: aXb отличается от bXа. Мы можем, если захотим, на минуту отка­заться от правил дифференциального исчисления. Вместо того чтобы говорить, что производная действует на все стоящее правее от нее, мы примем *новое* правило, избавляющее нас от порядка, в котором записаны сомножители. После этого мы можем крутить ими, как хотим, без всяких помех.

Вот наше новое правило: с помощью индекса мы будем ука­зывать, на что же именно действует дифференциальный опера­тор; при этом *порядок* сомножителей не имеет никакого значе­ния. Допустим, что оператор *д/дх* мы обозначили через *D.* Тогда символ *Df* говорит, что берется производная только функции

C:\1\pic\gray.jpg

Но если мы имеем выражение *Dffg,* то оно означает

C:\1\pic\gray.jpg

C:\1\pic\gray.jpgЗаметим теперь, что, согласно нашему новому правилу, *fDfg* означает то же самое. Одно и то же выражение можно записать любым из следующих способов:

Вы видите, что *Df* может стоять даже *после* всего. (Странно, почему такому удобному обозначению обычно не учат в книгах по математике и физике.)

Вы, пожалуй, удивитесь: а что, если я *хочу* написать произ­водную от *fg?* Если мне *нужна* производная от *обоих* членов? Это очень легко: вы пишете *Df(fg)+Dg(fg),*т.e.*g(df/dx)+f(dg/dx),* что в старых обозначениях как раз равно *d(fg)/dx.*

Вы сейчас увидите, как просто теперь получить новое выра­жение для ∇•(ВXЕ). Начнем с перехода к новому обозначению и напишем

C:\1\pic\gray.jpg

(27.10)

Как только мы сделали это, уже нет больше нужды придержи­ваться строгого порядка. Мы всегда знаем, что ∇E действует только на Е, a ∇B действует только на В. При этих обстоятель­ствах оператором ∇ можно пользоваться как обычным вектором. (Разумеется, после того как все будет окончено, нам захочется вернуться к «стандартным» обозначениям, которые обычно используются.) Таким образом, теперь мы можем делать различ­ные перестановки сомножителей. Так, средний сомножитель в уравнении (27.10) можно переписать как Е•(∇BXВ). [Надеюсь, вы помните, что a•(bXc) = b•(cXa).] А последний — как В•(EX∇E). Хотя это выглядит несколько странно, но тем не менее здесь все в порядке. Если же мы теперь попытаемся вер­нуться к старым обозначениям, то должны будем расположить операторы ∇ так, чтобы они действовали на свои «собственные» переменные. В первом из них все в порядке, так что мы можем просто опустить индекс у ∇. Второй же требует некоторой реорганизации, чтобы оператор ∇ поставить перед Е. Этого можно C:\1\pic\gray.jpgдобиться, переставляя сомножители в векторном произ­ведении и меняя знак:

Теперь все стоит на своем месте и можно вернуться к обычным обозначениям. Формула (27.10) эквивалентна следующему равенству:

C:\1\pic\gray.jpg

(В этом специальном случае быстрее было бы использовать ком­поненты, но, право же, стоило потратить время ради того, чтобы показать вам математический трюк. Может случиться, что вы больше нигде его не встретите, а он очень удобен тогда, когда в векторной алгебре нужно освободиться от правила порядка членов при дифференцировании.)

C:\1\pic\gray.jpgВернемся теперь к нашему закону сохранения энергии, при­чем для преобразования ∇XB в (27.7) мы используем новый результат — равенство (27.11). Вот что оно дает:

Теперь вы видите, что мы почти у цели. Одно из наших сла­гаемых — настоящая производная no *t,* ее мы используем при образовании *и,* а другое (превосходная дивергенция) войдет в S. К несчастью, справа в середине осталось еще одно слагаемое, ко­торое не является ни дивергенцией, ни производной по *t.* Так что пока еще не все закончено. После некоторых размышле­ний мы опять обращаемся к уравнениям Максвелла и, к счастью, обнаруживаем, что (∇XE) равно —*dB/dt.*

C:\1\pic\gray.jpgЭто позволяет превратить дополнительный член в чистую производную чего-то по времени:

Вот теперь у вас получилось то, что нужно. Уравнение для энергии переписывается в виде

C:\1\pic\gray.jpg

А это, если мы *определим u* и S как

C:\1\pic\gray.jpg

(27.14)

C:\1\pic\gray.jpgи

(27.15)

в точности напоминает уравнение (27.6). (Перестановкой со­множителей в векторном произведении мы добиваемся правиль­ного знака.)

Итак, наша программа успешно выполнена. Из выражения для плотности энергии мы видим, что она представляет сумму «электрической» и «магнитной» плотностей энергии, которые в точности равны выражениям, полученным нами в статике, *когда мы находили выражение для энергии через поля.* Кроме того, мы получили выражение для вектора потока энергии электромагнитного поля. Этот новый вектор S=ε0c2EXB по имени своего первооткрывателя называется «вектором Пойнтинга». Он говорит нам о скорости, с которой энергия движется в пространстве. Энергия, протекающая в секунду через малую поверхность *da,* равна S•*nda,* где n — вектор, перпендикуляр­ный к поверхности *da.* (Теперь, когда у нас есть формулы для *u* и S, можете, если хотите, забыть все выкладки.)

**§ 4. Неопределенность энергии поля**

Прежде чем заняться некоторыми приложениями формул Пойнтинга [т. е. выражений (27.14) и (27.15)], я хотел бы заме­тить, что на самом деле мы их не «доказали». Все, что мы сде­лали,— это нашли только *возможное u* и *возможное* S. Но откуда же нам известно, что, покрутив формулами, мы не придем к дру­гому выражению для *u* и другому выражению для S? Новое S и новое *и* будут отличаться от старых, но по-прежнему будут удовлетворять уравнению (27.6). Такое вполне может случиться. Однако в формулы, которые получаются при этом, всегда входят различные *производные* полей (причем это всегда члены второго порядка типа второй производной или квадрата первой произ­водной). Для *u* и S можно фактически написать бесконечное число различных выражений, и до сих пор никто не думал над экспериментальной проверкой того, которое же из них истинное. Люди полагают, что простейшее выражение, по-видимому, и должно быть истинным, но надо сознаться, что мы так и не знаем, как же на самом деле распределена энергия в электромагнитном поле. Пойдем по тому же легчайшему пути и постулируем, что энергия поля определяется выражением (27.14). При этом вектор потока S должен задаваться уравнением (27.15).

Самое интересное то, что единого способа избавиться от неопределенности энергии поля, по-видимому, вообще нет. Иног­да утверждают, что эту проблему можно разрешить, используя теорию гравитации; при этом приводятся такие доводы. В теории гравитации источником гравитационного притяжения является вся энергия. Поэтому если нам известно, какие гравитационные силы действуют на свет, то можно правильно определить плот­ность энергии электричества. До сих пор, однако, такими тон­кими экспериментами, которые позволили бы точно определить гравитационное влияние на электромагнитное поле, никто не занимался. Впрочем, установлено, что свет при прохождении около Солнца отклоняется, поэтому мы можем говорить, что Солнце притягивает к себе свет. Во всяком случае, найденные нами выражения для электромагнитной энергии и потока всегда всеми признавались. И хотя иногда результаты, полученные с их использованием, казались странными, никто никогда не обна­ружил в них чего-то невероятного, какого-то расхождения с экспериментом. Согласимся со всеми и будем считать, что, по-видимому, здесь все в порядке.

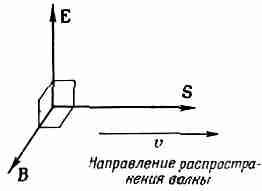
Мне хотелось бы сделать еще одно замечание о формуле для энергий. Прежде всего формула для энергии поля в единице объема очень проста — это сумма электрической и магнитной энергий, *если* электрическую энергию мы определим как *Е2,* а магнитную — как *В2.* Эти выражения были найдены нами как *возможные* выражения для энергии при рассмотрении статиче­ских задач. Кроме него, мы нашли для энергии электростати­ческого поля и несколько других выражений, например ϕ, которое в электростатическом случае *равно* интегралу от Е•Е. Однако в электродинамическом случае это равенство нарушает­ся, и нет критерия, позволяющего установить, которая из фор­мул правильна. Но теперь мы это знаем. Аналогично, мы нашли выражение для магнитной энергии, которое верно в самом общем случае.

**§ 5. Примеры потоков энергии**

Наша формула для вектора потока энергии S представляет нечто новое. Теперь следует посмотреть, насколько она годится в некоторых специальных случаях, а также проверить ее на том, что мы знали раньше. Первым нашим примером будет свет. В световой волне векторы Е и В направлены под прямым углом друг к другу и направлению распространения волны (фиг. 27.2). В электромагнитной волне величина В равна (1/с)Е, а поскольку они направлены под прямым углом, то величина (ЕXE) равна просто *Е2/с.* Таким образом, для света поток энергии в секунду через единичную поверхность равен

C:\1\pic\gray.jpg

(27.16)



*Фиг. 27.2. Векторы* Е, В *и* S *световой волны.*

В световой волне, где *E=E0cosω(t-х/с),* средняя скорость потока энергии через единичную площадь <S>ср, которая на­зывается «интенсивностью» света, равна среднему значению электрического поля, помноженному на *εас:*

C:\1\pic\gray.jpg

(27.17)

C:\1\pic\gray.jpgЭтот результат, как ни странно, мы уже получали в гл. 31, § 5 (вып. 3), когда изучали свет. Мы получили его совсем другим путем и поэтому можем сейчас в него поверить. Когда у нас есть пучок света, то плотность энергии в пространстве задается урав­нением (27.14). Воспользовавшись теперь тем, что в световой волне *сВ=Е,* получаем

C:\1\pic\gray.jpgОднако вектор Е изменяется в пространстве, поэтому средняя плотность энергии равна

(27.18)

C:\1\pic\gray.jpgДалее, свет распространяется со скоростью с, поэтому можно думать, что энергия, проходящая в секунду через квадратный метр, равна произведению с на количество энергии в кубическом метре, т. е.

Все в порядке. Мы снова получили выражение (27.17).

Возьмем теперь другой пример, на этот раз очень любопыт­ный. Рассмотрим поток энергии в медленно заряжающемся кон­денсаторе. (Мы не хотим сейчас иметь дело со столь высокими ча­стотами, при которых конденсатор становится похожим на резо­нансную полость, но нам не нужен и постоянный ток.) Возьмем обычный конденсатор с круглыми параллельными пластинами (фиг. 27.3). Между ними создается почти однородное электри­ческое поле, которое изменяется с течением времени. Полная электромагнитная энергия внутри конденсатора в любой момент равна произведению плотности энергии *и* на объем. Если радиус пластин равен *а,* а расстояние между ними *h,* то полная энергия, заключенная между пластинами, будет

C:\1\pic\gray.jpg

(27.19)

C:\1\pic\gray.jpgС изменением напряженности *Е* эта энергия тоже меняется. Когда конденсатор заряжается, внутренний объем приобретает энергию со скоростью

(27.20)

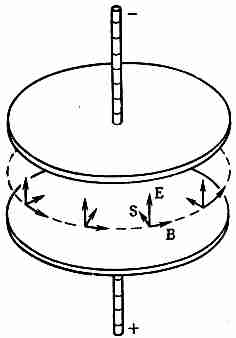
Так что должен существовать поток энергии, направленный откуда-то со стороны внутрь объема. Вы, конечно, думаете, что он идет от проводов, заряжающих конденсатор,— а вот и нет! Поток внутрь никоим образом не может идти с этой стороны, так как Е перпендикулярно к пластинам, а поэтому ЕXВ должно быть *параллельно* им.

C:\1\pic\gray.jpgВы, вероятно, помните, что при зарядке конденсатора воз­никает магнитное поле, которое направлено по окружности вокруг оси. Об этом говорилось в гл. 23. Воспользовавшись последним уравнением Максвелла, мы там нашли, что магнитное поле на краю конденсатора определяется выражением

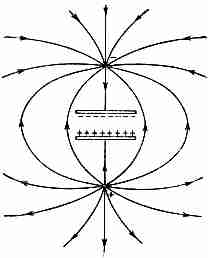
или

C:\1\pic\gray.jpg

Направление его показано на фиг. 27.3. Таким образом, на краях конденсатора, как видно из рисунка, возникает поток энергии, пропорциональный ЕXВ. Так что энергия на самом деле втекает в конденсатор не со стороны проводов, а со стороны окружаю­щего его пространства.



*Фиг. 27.3. Вблизи заряженного конденсатора вектор Пойнтинга* S *направлен внутрь него*



*Фиг. 27.4. Поле вне конденсатора, заряженного двумя очень удален­ными зарядами.*

Давайте проверим, согласуется ли полный поток через всю поверхность между краями пластин со скоростью изменения внутренней энергии. Для этого лучше всего повторить весь путь, проделанный нами при выводе выражения (27.15). Посмотрим, к чему он приведет. Площадь поверхности равна *2πah,* а абсолютная величина S=ε0c2(EXB) равна

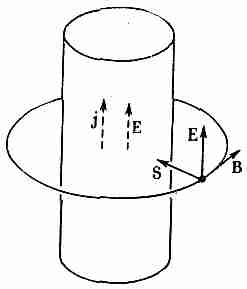
C:\1\pic\gray.jpg

C:\1\pic\gray.jpgтак что полный поток энергии будет

Это совпадает с уравнением (27.20). Удивительная вещь! Ока­зывается, при зарядке конденсатора энергия идет туда не через провода, а через зазор между краями пластин. Вот что говорит нам эта теория!

Как это может быть? Вопрос не из легких, но вот вам один из способов рассуждения. Предположим, у нас есть заряды, расположенные над и под конденсатором вдали от него. Когда такие заряды расположены вдалеке, то конденсатор окружает хотя и слабое, но необычайно протяженное поле (фиг. 27.4). Затем, когда заряды подходят все ближе и ближе, поле стано­вится все сильнее и сильнее и все теснее «обнимает» конденсатор. Так что энергия поля, которая вначале была далеко, движется «по направлению» к конденсатору и в конце концов входит в про­странство между пластинами.

В качестве следующего примера давайте посмотрим, что происходит с кусочком провода (с ненулевым сопротивлением), по которому течет ток. Поскольку провод обладает каким-то сопротивлением, то вдоль него действует электрическое поле, которое порождает ток, а в результате падения потенциала вдоль провода существует также параллельное его поверхности электрическое поле вне провода (фиг. 27.5). Кроме того, наличие тока порождает также магнитное поле, направленное по окружности вокруг провода.

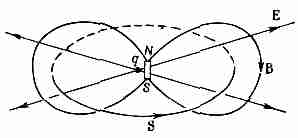


*Фиг. 27.5. Вектор Пойнтинга* S *вблизи провода с* током.

Векторы Е и В направлены под прямым углом, а поэтому вектор Пойнтинга направлен радиально, как это показано на рисунке. Внутрь проводника со всех сторон втекает энергия. Она, разумеется, должна быть равна энергии, теряемой проводником в виде тепла.

Таким образом, наша «сумасшедшая» теория говорит, что электроны получают свою энергию, растрачиваемую ими на создание теплоты извне, от потока энергии внешнего поля внутрь провода. Интуиция нам подсказывает, что электрон пополняет свою энергию за счет «давления», которое толкает его вдоль провода, так что энергия как будто должна течь вниз (или вверх) по проводу. А вот теория утверждает, что на самом деле на электрон действует электрическое поле, создаваемое очень да­лекими зарядами, и электроны теряют свою энергию, расходуе­мую на тепло именно из этих полей. Энергия отдаленных заря­дов каким-то образом растекается по большой области простран­ства и затем втекает внутрь провода.

Наконец, чтобы окончательно убедить вас в том, что это явно ненормальная теория, возьмем еще один пример, когда электрический заряд и магнит *покоятся —* сидят себе рядышком и не шевелятся. Представьте, что мы взяли точечный заряд, по­коящийся вблизи центра магнитного бруска (фиг. 27.6). Все находится в покое, так что энергия тоже не изменяется со вре­менем; Е и В постоянны. Но вектор Пойнтинга утверждает, что здесь есть поток энергии, так как ЕXВ не равно нулю. Если вы понаблюдаете за потоком энергии, то убедитесь, что он циркули­рует вокруг этой системы. Но никакого изменения энергии не происходит; все, что втекает в любой объем, снова вытекает из него.



*Фиг. 27.6. Заряд и магнит дают вектор Пойнтинга. циркулирую­щий по замкнутой петле.*

Это напоминает круговой поток несжимаемой воды. Итак, в такой, казалось бы, статической ситуации есть поток энергии. Выглядит, прямо скажем, абсурдно!

А, может быть, это все-таки не так уж удивительно, если вспомнить, что так называемый «статический» магнит представ­ляет на самом деле непрерывно циркулирующий ток. Внутри постоянного магнита электроны все время крутятся. Так что, может быть, циркуляция энергии не так уж удивительна.

У вас, без сомнения, начинает создаваться впечатление, что теория Пойнтинга, по крайней мере частично, опровергает вашу интуицию относительно того, где находится энергия электро­магнитного поля. Вам может показаться, что необходимо за­няться «починкой» своей интуиции, отработкой ее на множестве примеров. Однако в этом, по-видимому, никакой необходимости нет. Не думаю, чтобы вы оказались в большом затруднении, забыв на время, что энергия втекает внутрь провода извне, а не течет вдоль него. Не так уж важно, используя идею сохра­нения энергии, указать во всех деталях, какой путь избирает энергия. Циркуляция энергии вокруг магнита и заряда в боль­шинстве случаев, по-видимому, совершенно несущественна. Хотя это и не так уж важно, однако ясно, что повседневная интуиция нас обманывает.

**§ 6. Импульс поля**

C:\1\pic\gray.jpgТеперь мне бы хотелось поговорить об *импульсе* поля. Поле обладает энергией; точно так же в единице объема оно обладает каким-то импульсом. Обозначим плотность импульса через g. Импульс, разумеется, может иметь различные направления, по­этому g должно быть вектором. Временно мы будем говорить об одной компоненте и для начала возьмем x-компоненту. По­скольку любая компонента импульса сохраняется, то мы можем сразу написать закон примерно такого вида:

Левая часть тривиальна. Скорость изменения импульса веще­ства равна просто действующей на него силе. Для частиц F=q(E+vXB), а для распределенных зарядов на единицу объема действует сила F=(ρE+jXB). Однако слагаемое «поток импульса» несколько странно. Оно не может быть дивергенцией какого-то вектора, ибо это не скаляр, а скорее x-компонента некоторого вектора. Но как бы то ни было оно должно иметь вид

C:\1\pic\gray.jpg

поскольку x-компонента импульса должна течь в каком-либо из трех направлений. Во всяком случае, каковы бы ни были *а, b* и с, такая комбинация предполагается равной потоку x-ком­поненты импульса.

C:\1\pic\gray.jpgДальше по правилам той же самой игры напишем ρЕ+jXB только через Е и В, исключив плотность заряда ρ и плотность тока j и затем жонглируя слагаемыми и произведя подстановку, получаем

Сопоставляя затем разные слагаемые, мы должны найти выра­жения для *gx, a, b* и *с.* В общем, здесь масса работы, но мы не собираемся заниматься ею. Вместо этого мы найдем только выражение для плотности импульса g и притом совсем другим способом.

В механике есть очень важная теорема, которая говорит: каков бы ни был поток энергии любого вида (энергия поля или какой-то другой сорт энергии), произведение ее количества, прошедшего через единицу площади в единицу времени, на 1/с2 равно импульсу в единице объема пространства. В случае электродинамики эта теорема говорит, что g равно вектору Пойнтинга, поделенному на с2:

C:\1\pic\gray.jpg

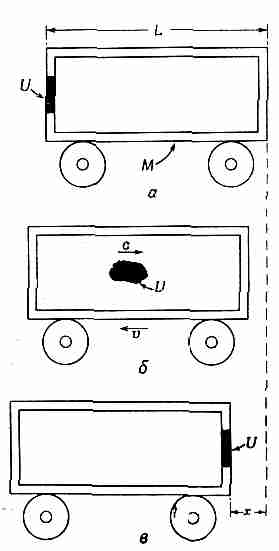
(27.21)

Так что вектор Пойнтинга дает нам не только поток энергии, но после деления на с2 и плотность импульса. Этот же результат получился бы из анализа, который мы только что предполагали проделать, однако более заманчиво воспользоваться общей теоремой. Сейчас мы рассмотрим несколько интересных приме­ров и рассуждений, призванных убедить вас в справедливости этой общей теоремы.

Первый пример: возьмем множество заключенных в ящик частиц. Пусть, скажем, их будет Nштук на кубический метр, и пусть они движутся вдоль ящика со скоростью v. Рассмотрим теперь воображаемую плоскость, перпендикулярную к v. Поток энергии через единицу площади этой плоскости в секунду равен *Nv* (т. е. числу частиц, пересекающих плоскость за се­кунду), умноженному на энергию каждой частицы. Энергия же каждой частицы будет m0c2/√(l-v2/c2). Так что поток энергии равен

C:\1\pic\gray.jpg

C:\1\pic\gray.jpgНо импульс каждой частицы равен *m0v*√(*1-v2/c2),* откуда *плотность* импульса будет



*Фиг. 27.7. Порция энергии U, двигаясь со скоростью с, несет импульс, равный U/c.*

что в полном согласии с теоремой как раз равно 1/с2 на поток энер­гии. Таким образом, для пучка частиц теорема оказывается вер­ной.

Верна она и для света. При изучении света (см. вып. 3) мы установили, что, когда происхо­дит поглощение света, поглоти­телю передается некоторое коли­чество импульса. Действительно, в гл. 34 (вып. 3) мы видели, что импульс равен поглощенной энер­гии, деленной на *с* [уравнение (34.24)]. Пусть *U0* будет энергией, падающей в секунду на единичную площадь, тогда переданный той же поверхности за то же время импульс равен *U0/c.* Но импульс распространяется со скоростью *с,* так что его плотность перед поглотителем должна быть равна U0/с2. Теорема снова справедлива.

Наконец, я приведу рассуждение Эйнштейна, которое еще раз продемонстрирует то же самое утверждение. Предположим, у нас есть вагон с какой-то большой массой *М,* который может без трения катиться по рельсам. В одном его конце расположено устройство, способное «выстреливать» какие-то частицы или световой импульс (совершенно безразлично, чем оно стреляет), которые ударяются о противоположный конец вагона. Следо­вательно, некоторое количество энергии, скажем *U,* находив­шееся первоначально на одном конце (фиг. 27.7,а), перелетает на противоположный конец (фиг. 27.7,в). Таким образом, энергия *U* перемещается на расстояние, равное длине вагона *L.* Этой энергии *U* соответствует масса U/с2, так что если вагон вначале стоял, то его центр масс должен передвинуться. Эйнштейну не понравилось заключение о том, что центр масс предмета можно переместить какими-то манипуляциями внутри него. Он считал, что никакие внутренние действия не могут изменить центр масс. Но если это так, то при перемещении энергии *U* с одного конца на другой сам вагон должен откатиться на расстояние *х*

(фиг. 27.7,*в).* В самом деле, нетрудно убедиться, что полная масса вагона, умноженная на *х,* должна быть равна произведе­нию перемещенной энергии *U/c2* на длину *L* (при условии, что U*/C2* много меньше *М), т.* е.

C:\1\pic\gray.jpg

(27.22)

Теперь рассмотрим конкретный случай, когда энергия пере­носится вспышкой света. (Все рассуждения можно повторить и для частиц, но мы будем следовать за Эйнштейном, который интересовался проблемами света.) Что заставляет вагон дви­гаться? Эйнштейн рассуждал так: при испускании света должна быть отдача, какая-то неизвестная отдача с импульсом *р.* Именно она заставляет вагон откатиться назад. Скорость ва­гона *v* при такой отдаче должна быть равна импульсу отдачи, поделенному на массу *М:*

C:\1\pic\gray.jpg

C:\1\pic\gray.jpgВагон движется с этой скоростью до тех пор, пока свет не достигнет противоположного конца. Ударяясь, свет отдает импульс вагону и останавливает его. Если *х* мало, то время, в течение которого вагон движется, равно *l/c,* так что мы

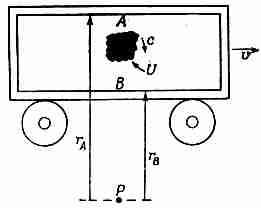
Подставляя *х* в (27.22), находим

C:\1\pic\gray.jpg

Снова получилось соотношение между энергией и импульсом света. Деля это на *с,* находим плотность импульса *g=p/c,* и опять

C:\1\pic\gray.jpg

(27.23)

Вас может удивить, так ли уж важна теорема о центре масс. Может быть, *она* нарушается? Возможно, но тогда вы теряете и закон сохранения момента количества движения. Предполо­жим, что наш вагончик движется по рельсам с некоторой ско­ростью *и,* и мы «выстреливаем» какое-то количество световой энергии от *потолка* к *полу,* например из точки *А* в точку *В* (фиг. 27.8). Посмотрим теперь на момент количества движения относительно точки *Р.* До того как порция энергии *U* покинула точку *А,* у нее была масса *m=U2/c* и скорость v*,* так что ее мо­мент количества движения был равен *mvra.* Когда же она приле­тела в точку В, масса ее остается прежней, и если *импульс* всего вагона не изменился, то она по-прежнему должна иметь скорость *v.*

*Фиг. 27.8. Для сохранения мо­мента количества движения отно­сительно точки Р порция энергии U должна нести импульс U/c.*

Однако момент количества движения относительно точки *Р* будет уже mvr*B.* Таким образом, если вагону при излу­чении света не передается никакого импульса, т. е. если свет не переносит импульса *U/c,* то момент количества движения должен измениться. Оказывается, что в теории относительности сохранение момента количества движения и теорема о центре масс тесно связаны между собой. И если неверна теорема, то нарушается и закон сохранения момента количества движения. Во всяком случае, общий закон должен быть справедлив и для электродинамики, так что им можно воспользоваться для полу­чения импульса поля.

Упомянем еще о двух примерах импульса в электромаг­нитном поле. В гл. 26, §2, мы говорили о нарушении закона дей­ствия и противодействия для двух заряженных частиц, движу­щихся перпендикулярно друг другу. Силы, действующие на эти частицы, не уравновешивают друг друга, так что действие и противодействие оказываются неравными, а полный импульс вещества поэтому должен изменяться. Он не сохраняется. Но в такой ситуации изменяется и импульс поля. Если вы рас­смотрите величину импульса, задаваемую вектором Пойнтинга, то она оказывается непостоянной. Однако изменение импульса частицы в точности компенсируется импульсом поля, так что полный импульс частиц и поля все же сохраняется.

Второй наш пример — система заряда и магнита, изобра­женная на фиг. 27.6. К своему огорчению, мы обнаружили, что в этом примере энергия «бегает по кругу», но, как нам теперь известно, поток энергии и импульса пропорциональны друг дру­гу, поэтому здесь мы имеем дело с циркуляцией импульса. Но *циркуляция* импульса означает наличие *момента количества движения.* Поле обладает *моментом количества движения.* Пом­ните парадокс с соленоидом и зарядами на диске, описанный в гл. 17, § 4? Казалось, что при включении тока весь диск должен начать крутиться.

Остается загадка, откуда возникает этот момент количества движения? Ответ на этот вопрос такой: если у вас есть магнитное поле и какие-то заряды, то поле имеет и момент количества движения. Он возник еще при создании самого поля. Когда же поле выключается, момент количества движения отдается обратно. Так что диск в этом парадоксе *начнет* крутиться. Таинственный циркулирующий поток энергии, который сна­чала кажется чем-то непонятным, на самом деле абсолютно необходим. Ведь существует реальный поток импульса. Он необходим для выполнения закона сохранения момента коли­чества движения в целом.

***Глава 28***

## ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ МАССА

[**§ 1. Энергия поля т****очечного заряда**](#a1)

[**§ 2. Импульс поля** **движущегося заряда**](#a2)

[**§ 3. Электромаг****нитная масса**](#a3)

[**§ 4. С какой силой э****лектрон действует сам на себя?**](#a4)

[**§ 5. Попытки изме­нен****ия теории Максвелла**](#a5)

[**§ 6. Поле яде****рных сил**](#a6)

**§ 1. Энергия поля точечного заряда**

Синтез теории относительности и уравне­ний Максвелла в основном завершает наше изу­чение теории электромагнетизма. Разумеется, по дороге мы перескочили через некоторые дета­ли и оставили незатронутой довольно большую область, к которой, однако, мы еще вернемся в будущем, когда займемся взаимодействием электромагнитного поля с веществом. И все же, если еще задержаться на минуту и посмотреть на фасад этого удивительного сооружения,

имевшего столь громадный успех в объяснении столь многих явлений, то можно обнаружить, что оно вот-вот завалится и рассыплется на куски.

•- Если вы поглубже вгрызетесь почти в любую из наших физических теорий, то обнаружите, что в конце концов попадаете в какую-нибудь неприятную историю. Сейчас нам предстоит обсудить серьезную трудность — несостоятель­ность классической электромагнитной теории. Может показаться, что это нарушение, естествен­но, связано с падением всей классической теории под ударами квантовомеханических эффектов. Возьмите классическую механику. Математи­чески это вполне самосогласованная теория, хотя она и отвергается опытом. Однако самое интересное, что классическая теория электро­магнетизма неудовлетворительна сама по себе. В ней до сих пор есть трудности, которые связаны с самими *идеями* теории Максвелла и которые не имеют непосредственного отношения к кван­товой механике. Вы можете подумать: «А зачем нам заранее беспокоиться об этих трудностях. Ведь квантовая механика все равно изменит законы электродинамики. Не лучше ли подо­ждать и посмотреть, во что превратятся эти трудности после изменений?» Однако трудности остаются и после соединения электродинамики с квантовой механикой, так что рассмотрение их сейчас не будет напрасной тратой вре­мени; вдобавок они очень важны с исторической точки зрения. Кроме того, если вы в силах столь глубоко проникнуть в теорию, чтобы увидеть в ней все, не исключая и трудностей, то это дает вам известное чувство завершенности.

Трудность, о которой я собираюсь говорить, связана с при­ложением понятий электромагнитного импульса и энергии к электрону или другой заряженной частице. Понятия простых заряженных частиц и электромагнитного поля как-то не согла­суются друг с другом. Описание этой трудности мы начнем с не­которых примеров вычисления энергии и импульса. Найдем сначала энергию заряженной частицы. Представьте, что мы взяли простейшую модель электрона, когда весь его заряд *q* равномерно распределен по поверхности сферы радиусом *а.* В специальном случае точечного заряда мы можем положить его равным нулю. Теперь вычислим энергию электромагнитного поля. Если заряд неподвижен, то никакого магнитного поля вокруг нет, и энергия в единице объема будет пропорциональна квадрату напряженности электрического поля. Величина же напряженности электрического поля равна q/4πε0r2, поэтому плотность энергии

C:\1\pic\gray.jpg

C:\1\pic\gray.jpgЧтобы получить полную энергию, нужно эту плотность проинтегрировать по всему пространству. Используя элемент объема 4πr2/dr, найдем полную энергию, которую мы обозначим через *Uэл:*

C:\1\pic\gray.jpgЭто выражение интегрируется очень просто. Нижний предел интегрирования равен а, а верхний — бесконечности, поэтому

(28.1)

Если вместо *q* подставить заряд электрона *qe* и обозначить сим­волом *e2* комбинацию qe2/4πε0, то получим

C:\1\pic\gray.jpg

(28.2)

Все идет хорошо до тех пор, пока мы не переходим к точечному заряду, т. е. пока мы не положим а = 0. Но как только мы пере­ходим к точечному заряду, начинаются все наши беды. И все потому, что энергия поля изменяется обратно пропорционально четвертой степени расстояния, интеграл по объему становится расходящимся, а количество энергии, окружающей точечный заряд, оказывается бесконечным.

Но чем, собственно, плоха бесконечная энергия? Есть ли какая-то реальная трудность в том, что энергия никуда не может уйти от заряда и обречена навсегда оставаться около него? Досадно, конечно, что величина оказалась бесконечной, но главный вопрос в том — есть ли здесь какой-нибудь *наблюдаемый* физический эффект? Чтобы ответить на него, нужно обратиться не к энергии, а к чему-то другому. Нас может, ска­жем, заинтересовать, как изменяется энергия, когда заряд *движется.* Если при этом окажется бесконечным *изменение,* то дело совсем плохо.

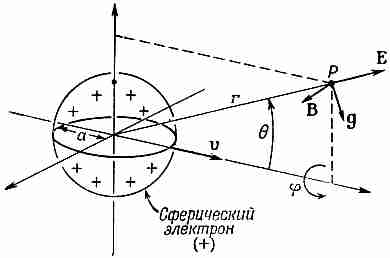
**§ 2. Импульс поля движущегося заряда**

Возьмем равномерно движущийся электрон и предположим на минуту, что скорость его мала по сравнению со скоростью света. С таким движущимся электроном всегда связан какой-то импульс — даже если у электрона до того, как он был заряжен, не было никакой массы — это импульс электромагнитного поля. Мы покажем, что для малых скоростей он пропорционален скорости v и совпадает с ней по направлению. В точке *Р,* нахо­дящейся на расстоянии rот центра заряда и под углом 6 к ли­нии его движения (фиг. 28.1), электрическое поле радиально, а магнитное, как мы видели, равно vXE/c2. Плотность же им­пульса, в соответствии с формулой (27.21), будет

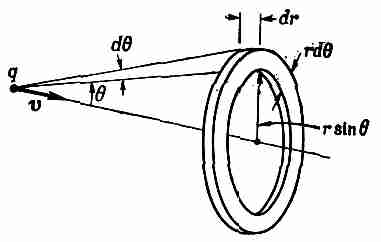
C:\1\pic\gray.jpg

C:\1\pic\gray.jpgОна обязательно направлена по линии движения, как это видно из рисунка, и по величине равна

Поле симметрично относительно линии движения заряда, по­этому поперечные компоненты дадут в сумме нуль, и полученный в результате импульс будет параллелен скорости v.



*Фиг. 28.1. Поля* ***Е*** *и* ***В*** *и плотность импульса* ***g*** *для положительного электрона.*

*Для отрицательного электрона поля Е и В повернуты в обратную сторону, но g остается тем же.*

*Фиг. 28.2. Элемент объема 2πr2sinθdθdr, используе­мый при вычислении импульса поля.*

Величину составляющей вектора g в этом направлении, равную *g*sinθ, нужно проинтегрировать по всему пространству. В качестве элемента объема возьмем кольцо, плоскость которого перпен­дикулярна v (фиг. 23.2). Объем его равен 2πr2sinθdθdr*.* Пол­ный импульс будет при этом

*C:\1\pic\gray.jpg*

Поскольку *Е* не зависит от угла θ (для *v<<c),* то по углу можно немедленно проинтегрировать:

C:\1\pic\gray.jpg

Интегрирование по θ ведется в пределах от 0 до *π,* так что этот интеграл дает просто множитель 4/3, т. е.

C:\1\pic\gray.jpg

C:\1\pic\gray.jpgА такой интеграл (для v<<с) мы только что вычисляли, чтобы найти энергию; он равен *q2/16π2ε02a,* так что

или

C:\1\pic\gray.jpg

(28.3)

Импульс поля, т. е. электромагнитный импульс, оказался пропорциональным v. В частности, тоже самое выражение полу­чилось бы для частицы с массой, равной коэффициенту пропор­циональности при v. Вот почему этот коэффициент пропорциональности мы можем назвать *электромагнитной массой mэм,* т. е. положить

**§ 3. Электромагнитная масса**

Откуда же вообще возникло понятие массы? В наших зако­нах механики мы предполагали, что любому предмету присуще некое свойство, называемое массой. Оно означает пропорцио­нальность импульса предмета его скорости. Теперь же мы обнаружили, что это свойство вполне понятно — заряженная частица несет импульс, который пропорционален ее скорости. Дело можно представить так, как будто масса — это просто электродинамический эффект. Ведь до сих пор причина возник­новения массы оставалась нераскрытой. И вот, наконец, в элект­родинамике нам представилась прекрасная возможность понять то, чего мы никогда не понимали раньше. Прямо как с неба (а точнее, от Максвелла и Пойнтинга) свалилось на нас объяс­нение пропорциональности импульса любой заряженной ча­стицы ее скорости через электромагнитные свойства.

Но давайте все-таки встанем на более консервативную точку зрения и будем говорить, по крайней мере временно, что имеется два сорта масс и что полный импульс предмета должен быть суммой механического и электромагнитного импульсов. Причем механический импульс равен произведению «механической» массы *m*мех на скорость v. В тех экспериментах, где масса частицы измеряется, например, определением импульса или «кручением на веревочке», мы находим ее полную массу. Им­пульс равен произведению именно полной массы *(mмех+mэм)* на скорость. Таким образом, наблюдаемая масса может состоять из двух (а может быть, и из большего числа, если мы учтем другие поля) частей: механической и электромагнитной. Мы знаем, что наверняка имеется электромагнитная часть; для нее у нас есть даже формула. А сейчас появилась увлекательная возможность выбросить механическую массу совсем и считать массу полностью электромагнитной.

Посмотрим, каков должен быть размер электрона, если «механическая» часть массы полностью отсутствует. Это можно выяснить, приравнивая электромагнитную массу (28.4) наблю­даемой массе электрона, т. е. *m*е*.* Получаем

C:\1\pic\gray.jpg

(28.5)

Величина

C:\1\pic\gray.jpg

(28.6)

называется «классическим радиусом электрона» и равна она 2,82X10=13 *см,*

т. е. одной стотысячной диаметра атома.

Почему радиусом электрона названа величина r0, а не а? Потому что мы можем провести те же самые расчеты с другим распределением заряда. Мы можем взять его равномерно размазанным по всему объему шара или наподобие пушистого шарика. Например, для заряда, равномерно распределенного по всему объему сферы, коэффициент 2/3 заменяется коэффициентом 4/5. Вместо того чтобы спорить, какое распределение правильно, а какое нет, было решено взять в качестве «номинального» ра­диуса величину r0. А разные теории приписывают к ней свой коэффициент.

Давайте продолжим наше обсуждение электромагнитной теории массы. Мы провели расчет для v<<с, а что произойдет при переходе к большим скоростям? Первые попытки вычисления привели к какой-то путанице, но позднее Лоренц понял, что при больших скоростях заряженная сфера должна сжиматься в эллипсоид, а поля должны изменяться согласно полученным нами для релятивистского случая в гл. 26 формулам (26.6) и (26.7). Если вы проделаете все вычисления для р в этом слу­чае, то получите, что для произвольной скорости v импульс умножается еще на 1/√(1-*v2/c2*)*,* т. е.

C:\1\pic\gray.jpg

(28.7)

Другими словами, электромагнитная масса возрастает с увеличением скорости обратно пропорционально √(1-v2/c2). Это открытие было сделано еще до создания теории относительности.

Тогда предлагались даже эксперименты по определению зависимости наблюдаемой массы от скорости, чтобы установить, какая часть ее электрическая по своему происхождению, а какая — механическая. В те времена считали, что электромаг­нитная часть массы *должна* зависеть от скорости, а ее механи­ческая часть — *нет.*

Но пока ставились эксперименты, теоретики тоже не дремали. И вскоре была развита теория относительности, которая дока­зала, что любая масса, независимо от своего происхождения, должна изменяться как m0/√(1-*v2/c2*)*.* Таким образом, уравнение (28.7) было началом теории, согласно которой масса зависит от скорости.

C:\1\pic\gray.jpgА теперь вернемся к нашим вычислениям энергии поля, которые привели к выводу выражения (28.2). Энергия *U* в соот­ветствии с теорией относительности эквивалентна массе U/*с2,* поэтому (28.2) говорит, что поле электрона должно обладать массой

(28.8)

C:\1\pic\gray.jpgкоторая не совпадает с электромагнитной массой m*эм,* опреде­ленной формулой (28.4). В самом деле, если бы мы просто скомбинировали выражения (28.2) и (28.4), то должны были бы написать

Эта формула была получена еще до теории относительности, и когда Эйнштейн и другие физики начали понимать, что *U* всегда должно быть равно mc2, то замешательство было очень велико.

**§ 4. С какой силой электрон действует сам на себя?**

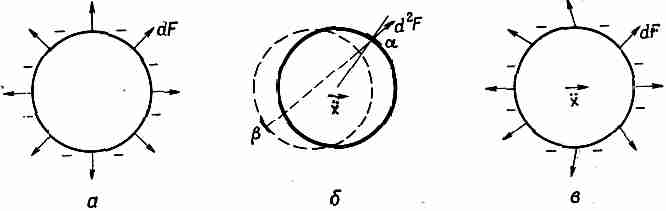
Разница между двумя формулами электромагнитной массы особенно обидна, потому что совсем недавно мы доказали согла­сованность электродинамики с принципами относительности. Кроме того, теория относительности неявно и неизбежно пред­полагает, что импульс должен быть равен произведению энергии на v/c2. Неприятная история! По-видимому, мы где-то допустили ошибку. Конечно, не алгебраическую ошибку в наших расчетах, а где-то проглядели что-то существенное.

При выводе наших уравнений для энергии и импульса мы предполагали справедливость законов сохранения. Мы считали, что учтены *все* силы, учтена любая работа и любой импульс, порождаемый другими «неэлектрическими» механизмами. Но если мы имеем дело с заряженной сферой, то, поскольку все электрические силы — это силы отталкивающие, электрон стремится разорваться. А раз в системе не учтены уравновеши­вающие силы, то в законах, связывающих импульс и энергию, возможны любые ошибки. Чтобы картина была *самосогласован­ной,* нужно предположить, что нечто удерживает электрон от разрыва. Заряды должны *удерживаться* на сфере чем-то вроде «резинок», которые препятствуют их стремлению разлететься в стороны. Пуанкаре первый заметил, что подобные «резинки» или нечто в этом роде, связывающие электрон, необходимо учи­тывать при вычислении энергии и импульса. По этой причине дополнительные неэлектрические силы известны под именем «напряжений Пуанкаре». Если включить их в расчет, то это сразу изменит массы, полученные в обоих случаях (характер изменения зависит от детальных предположений), и результат будет согласовываться с теорией относительности, т. е. масса, полученная из вычислений импульса, становится той же самой, что и масса, полученная из энергии. Однако теперь массы будут состоять из *двух* частей: электромагнитной и происходящей от «напряжений Пуанкаре». И только когда обе части складыва­ются вместе, мы получаем согласованную теорию.

Итак, наши надежды не оправдались, мы не можем всю массу сделать чисто электромагнитной. Теория, содержащая только электродинамику, незаконна. К ней необходимо приба­вить что-то еще. Как бы мы ни назвали это «что-то» — «резин­ками» или «напряжениями Пуанкаре» или как-то по-другому,— оно все равно должно порождать новые силы, обеспечивающие согласованность теории такого рода.

Но совершенно ясно, что, как только мы вынуждены поса­дить внутрь электрона посторонние силы, красота всей картины тотчас исчезает. Все становится слишком сложным. Сразу же возникает вопрос: насколько сильны эти напряжения? Что про­исходит с электроном? Осциллирует ли он или нет? Каковы все его внутренние свойства? И т. д. и т. п. Возможно, что какие-то внутренние свойства электрона все-таки очень сложны. И если мы начнем строить электрон, следуя этому рецепту, то придем к каким-нибудь странным свойствам наподобие собственных гармоник, которые, по-видимому, еще не наблюдались. Я сказал «по-видимому», ибо в природе мы наблюдаем множество стран­ных вещей, которым еще не можем придать никакого смысла. Возможно, что когда-нибудь в один прекрасный день окажется, что какое-то явление, из тех, что непонятны нам сегодня μ-ме­зон, например), можно на самом деле объяснить как осцилляции «напряжений Пуанкаре». Сейчас это не кажется правдоподоб­ным, но кто может гарантировать? Ведь мы еще столького не понимаем в мире элементарных частиц! Во всяком случае, сложная структура, предполагаемая этой теорией, весьма нежелательна, и попытка объяснить все массы только через электромагнетизм, по крайней мере описанным нами способом, завела в тупик.

Мне еще хотелось бы порассуждать немного о том, почему при пропорциональности импульса поля скорости мы говорили о массе. Очень просто! Ведь масса — это и есть коэффициент между импульсом и скоростью. Однако возможна и другая точка зрения. Можно говорить, что частица имеет массу, если для ускорения ее мы вынуждены прилагать какую-то силу. Посмот­рим повнимательней на то, откуда берутся силы; это может помочь нашему пониманию. Откуда мы узнаем, что здесь должно проявиться действие сил? Да просто потому, что мы доказали закон сохранения импульса для полей. Если у нас есть заряжен­ная частица и мы некоторое время «нажимаем» на нее, то у электромагнитного поля появится импульс. Каким-то образом он был передан электромагнитному полю. Следовательно, чтобы разогнать электрон, к нему нужно приложить силу, дополни­тельную к той, которая требуется механической инерцией, связанную с его электромагнитным взаимодействием. При этом должна возникнуть соответствующая обратная реакция со стороны «толкаемого» нами электрона. Но откуда берется эта сила? Картина примерно такова. Можно считать электрон за­ряженной сферой. Когда он покоится, то каждый его заряженный участок отталкивает любой другой, но все силы уравновешены попарно, так что *результирующая* равна нулю (фиг. 28. 3, а).



*Фиг 28.3. Сила действия ускоряющегося электрона благодаря запаздыванию не равна нулю.*

*Под dF мы подразумеваем силу, действующую на элемент поверхности da, а под d2F — силу, действующую на элемент поверхности* daα со *стороны заряда, расположенного на элементе поверхности* daβ .

Однако при ускорении электрона силы больше не уравновеши­ваются, так как, чтобы электромагнитное влияние дошло от одного места до другого, нужно некоторое время. Например, сила, действующая на участок *а* (фиг. 28.3, б) со стороны участ­ка β, расположенного на противоположной стороне, зависит от положения β в запаздывающий момент. И величина и направ­ление силы определяются движением заряда. Если он ускоряет­ся, то силы, действующие на разные части электрона, могут быть такими, как это показано на фиг. 28.3, *в.* Теперь при сло­жении всех этих сил они не сокращаются. Для постоянной ско­рости эти силы уравновешивались бы, хотя на первый взгляд кажется, что даже при равномерном движении запаздывание приведет к неуравновешенным силам. Тем не менее оказывается, что в тех случаях, когда электрон не ускоряется, равнодейст­вующая сила равна нулю. Если же мы рассмотрим силы между различными частями ускоряющегося электрона, то действие и противодействие не компенсируют в точности друг друга и электрон действует *сам на себя,* стараясь уменьшить ускорение. Он тянет сам себя «за шиворот» назад.

Можно, хотя и не легко, вычислить эту силу самодействия, однако здесь мы не будем заниматься такими трудоемкими рас­четами. Я просто скажу вам, что получается в специальном сравнительно простом случае движения в одном измерении, скажем вдоль оси *х.* Самодействие в этом случае можно записать в виде ряда. Первый член этого ряда зависит от ускорений *х,* следующий — пропорционален х и [т. д.](#прим1)

Так что в результате

C:\1\pic\gray.jpg

(28.9)

где α и γ — числовые коэффициенты порядка единицы. Коэффи­циент ос при слагаемом x зависит от предположенного распреде­ления зарядов; если заряды равномерно распределены по сфере, то α=2/3. Таким образом, слагаемое, пропорциональное ускоре­нию, изменяется обратно пропорционально радиусу электрона а, что в точности согласуется с величиной, полученной для m*эм* в (28.4). Если взять другое распределение, то *а* изменится, но в точности так же изменится и величина 2/3 в (28.4). Слагаемое *с х не зависит* ни от радиуса *а,* ни от предположенного распре­деления заряда; коэффициент при нем *всегда* равен 2/3. Следую­щее слагаемое пропорционально радиусу *а* и коэффициент γ при нем определяется распределением заряда. Обратите внима­ние, что если устремить радиус электрона к нулю, то последнее слагаемое (равно как и все высшие члены) обратится в нуль, второе остается постоянным, но первое — электромагнитная масса — становится бесконечным. Видно, что бесконечность возникает из-за действия одной части электрона на другую; по-видимому, мы допустили глупость — возможность «точеч­ного» электрона действовать на самого себя.

**§ 5. Попытки изменения теории Максвелла**

Теперь мне бы хотелось обсудить, как можно изменить электродинамику Максвелла, но изменить так, чтобы сохранить понятие простого точечного заряда. В этом направлении было сделано немало попыток, а некоторые теории сумели даже так представить дело, что вся масса электрона оказалась полностью электромагнитной. Однако ни одной из этих теорий не суждено было выжить. И все же интересно обсудить некоторые из пред­ложенных возможностей хотя бы для того, чтобы оценить борь­бу человеческого разума.

Наша теория электромагнетизма началась с разговоров о взаимодействии одного заряда с другим. Затем мы построили теорию этих взаимодействующих зарядов и закончили наше изу­чение теорией поля. Мы настолько уверовали в нее, что пытались с ее помощью определить, как одна часть электрона действует на другую. Все трудности, возможно, происходят из-за того, что электрон не действует сам на себя; экстраполяция закона вза­имодействия между отдельными электронами на взаимодействие электрона самого с собой, возможно, ничем не оправдана. По­этому некоторые из предложенных теорий совсем исключают возможность самодействия электрона. Из-за этого в них уже не возникает бесконечностей. И никакой электромагнитной массы при этом у частиц нет, а ее масса снова полностью механическая. Однако в такой теории возникают новые трудности.

Нужно сразу же вам сказать, что такие теории требуют из­менения и понятий электромагнитного поля. Как вы помните, мы говорили, что сила, действующая на частицу в любой точке, определяется просто двумя величинами: Е и В. Если мы отказываемся от идеи самодействия, то это утверждение становится уже несправедливым, ибо силы, действующие на электрон в некотором месте, больше не определяются полями Е и В, а только теми их частями, которые создаются *другими* зарядами. Так что мы всегда должны помнить о том, какие поля Е и В создает тот заряд, для которого вычисляется действующая сила, а какие — все остальные заряды. Это делает теорию гораздо более запутанной, хотя и позволяет избежать трудностей с бесконечностями.

Итак, *если нам очень хочется,* мы можем выбросить весь набор сил в уравнении (28.9), приговаривая при этом, что такое явление, как действие электрона на себя, отсутствует. Но вместе с водой мы выплескиваем и ребенка! Ведь второе-то слагаемое в (28.9), слагаемое с *х,* совершенно необходимо. Эта сила приво­дит к вполне определенному эффекту. Если вы ее выбросите — беды не миновать. Когда вы разгоняете заряд, он излучает элек­тромагнитные волны, т. е. теряет энергию. Поэтому ускорение заряда требует большей силы, чем ускорение нейтрального объекта той же массы; в противном случае энергия не будет со­храняться. Скорость, с которой мы затрачиваем работу на уско­рение заряда, должна быть равна скорости потери энергии на излучение. Мы уже говорили об этом эффекте; он был назван радиационным сопротивлением. Снова перед нами вопрос: от­куда берутся те дополнительные силы, на преодоление которых затрачивается эта работа? Когда излучает большая антенна, то эти силы возникают под влиянием токов одной ее части на токи в другой. Но у отдельного ускоряющегося электрона, излуча­ющего в пустое пространство, возможен только один источник таких сил — действие одной части электрона на другую.

В гл. 32 (вып. 3) мы обнаружили, что осциллирующий заряд излучает энергию со скоростью

C:\1\pic\gray.jpg

(28.10)

Давайте посмотрим, какая мощность необходима для преодоле­ния силы самодействия (28.9). Мощность, как известно, равна силе, умноженной на скорость, т. е. *Fx:*

C:\1\pic\gray.jpg

(28.11)

C:\1\pic\gray.jpgПервый член пропорционален *dx2/dt* и поэтому соответствует скорости изменения кинетической энергии 1/2mv2, связанной с электромагнитной массой. *А* второй соответствует излучению мощности (28.10). Однако он отличается от (28.10). Разница состоит в том, что (28.11) справедливо в общем случае, тогда как (28.10) верно только для *осциллирующего* заряда. Мы можем доказать, что эти два выражения для периодического движения заряда эквивалентны. Перепишем для этого второй член выра­жения (28.11) в виде

что будет просто алгебраическим преобразованием. Если дви­жение электрона периодическое, то величина *хх* периодически возвращается к одному и тому же значению. Так что если мы возьмем *среднее* значение ее производной по времени, то получим нуль. Однако второй член всегда положителен (как квадрат величины), так что его производная тоже положительна. Соот­ветствующая ему мощность как раз равна выражению (28.10).

Итак, слагаемое с x"'; в выражении для силы самодействия необходимо для сохранения энергии излучающей системы и не может быть выброшено. Это было одним из триумфов теории Лоренца, доказавшего возникновение такого слагаемого в результате воздействия электрона самого на себя. Мы вынуж­дены поверить в идею самодействия и *необходимость* слагаемого с *х"'.* Проблема в том, как сохранить его, избавившись при этом от первого слагаемого в выражении (28.9), которое портит все дело. Этого мы не знаем. Как видите, классическая теория электрона сама себя завела в тупик.

Были предприняты и другие попытки выправить положение. Один путь был предложен Борном и Инфельдом. Состоит он в очень сложном изменении уравнений Максвелла, так что они перестают быть линейными. При этом можно сделать так, чтобы энергия и импульс оказались конечными. Но предложенные ими законы предсказывают явления, которые никогда не на­блюдались. Их теория страдает еще и другим недостатком, к которому мы придем позднее и который присущ всем попыткам избежать описанную трудность.

Следующая интересная возможность была предложена Дира­ком. Он рассуждал так: давайте допустим, что действие электро­на на себя описывается не первым слагаемым выражения (28.9), а *вторым.* И тогда ему пришла заманчивая идея избавиться ог первого слагаемого, сохранив при этом второе. Смотрите — сказал он,— когда мы брали только *запаздывающие* решения уравнений Максвелла, это условие выступало как дополни­тельное предположение; если бы вместо запаздывающих мы взяли *опережающие* волны, то ответ получился бы несколько другим. Выражение для силы самодействия приобрело бы вид

C:\1\pic\gray.jpg

C:\1\pic\gray.jpgЭто выражение в точности такое же, как и (28.9), за исключе­нием знака перед вторым и некоторыми высшими членами ряда. [Замена запаздывающих волн опережающими означает просто смену *знака* запаздывания, что, как нетрудно видеть, эквива­лентно изменению знака *t.* В выражении (28.9) это приводит только к изменению знака всех нечетных производных.] Итак, Дирак предложил: давайте примем новое правило, что электрон действует на себя *полуразностью* создаваемых им запаздываю­щих и опережающих полей. Полуразность выражений (28.9) и (28.12) дает

Во всех высших членах радиус *а* входит в числитель в положи­тельной степени. Поэтому, когда мы переходим к пределу точеч­ного заряда, остается только один член — как раз тот, который нам нужен. Таким путем Дирак сохранил радиационное сопро­тивление и избавился от силы инерции. Электромагнитная мас­са исчезла, классическая теория спасена, но благополучие это достигнуто ценой насилия над самодействием электрона.

Произвол дополнительных предположений Дирака был устранен, по крайней мере до некоторой степени, Уилером и Фейнманом, которые предложили еще более странную теорию. Они предположили, что точечный заряд взаимодействует *только* с другими зарядами, но взаимодействие идет наполовину через запаздывающие, наполовину через опережающие волны. Самое удивительное, как оказалось, что в большинстве случаев вы не видите эффекта опережающих волн, но они дают как раз нужную силу радиационного сопротивления. Однако радиационное со­противление возникает *не* как самодействие электрона, а в ре­зультате следующего интересного эффекта. Когда электрон ускоряется в момент t, то он влияет на все другие заряды в мире в *поздний* момент *t'=t+r/c* (где r *—* расстояние до других зарядов) из-за *запаздывающих* волн. Но затем эти другие за­ряды действуют снова на первоначальный электрон с помощью *опережающих* волн, которые приходят к нему в момент t", равный *t' минус r/c,* что как раз равно *t.* (Они, конечно, воздей­ствуют и с помощью запаздывающих волн, но это просто соот­ветствует обычным «отраженным» волнам.) Комбинация опере­жающих и запаздывающих волн означает, что в тот момент, когда электрон ускоряется, осциллирующий заряд испытывает воздействие силы со стороны всех зарядов, которые «приготовились» поглотить излученные им волны. Вот в какой петле запутались физики, пытаясь спасти теорию электрона!

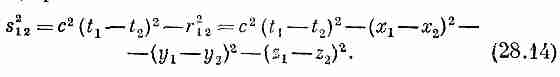
Я расскажу вам еще об одной теории, чтобы показать, до каких вещей додумываются люди, когда они увлечены. Это несколько другая модификация законов электродинамики, ко­торую предложил Бопп.

Вы понимаете, что, решившись изменить уравнения электро­магнетизма, можно делать это в любом месте. Вы можете изме­нить закон сил, действующих на электрон, или можете изме­нить уравнения Максвелла (как это будет сделано в теории, которую я собираюсь описать) или еще что-нибудь. Одна из возможностей — изменить формулы, определяющие потенциал через заряды и токи. Возьмем формулу, которая выражает по­тенциалы в некоторой точке через плотности токов (или зарядов) в любой другой точке в ранний момент времени. С помощью четырехвекторных обозначений для C:\1\pic\gray.jpgпотенциалов мы можем за­писать ее в виде

(28.13)

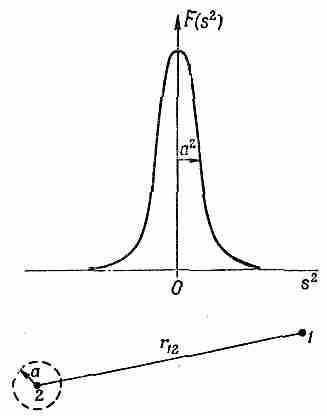
C:\1\pic\gray.jpgУдивительно простая идея Боппа заключается в следующем. Может быть, все зло происходит от множителя 1/r под интегра­лом. Предположим с самого начала, что потенциал в одной точке зависит от плотности зарядов в любой точке как *некоторая* функция расстояния между точками, скажем как f(r12). Тогда полный потенциал в точке 1 будет определяться интегралом по всему пространству от произведения jμ на эту функцию

Вот и все. Никаких дифференциальных уравнений, ничего больше. Есть только еще одно условие. Мы должны потребо­вать, чтобы результат был релятивистски инвариантным. Так что в качестве «расстояния» мы должны взять инвариантное «расстояние» между двумя точками в пространстве-времени. Квадрат этого расстояния (с точностью до знака, который несуществен) равен



C:\1\pic\gray.jpgТак что для релятивистской инвариантности теории функция должна зависеть от s12 или, что то же самое, от s212. Таким об­разом, в теории Боппа

(Интеграл, разумеется, должен браться по четырехмерному объему *dtzdxzdy2dz2.)*

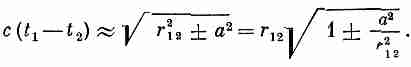


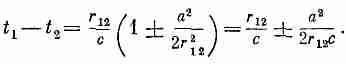
*Фиг. 28,4. Функция* F(s2), *ис­пользуемая в нелокальной теории Боппа.*

C:\1\pic\gray.jpgТеперь остается только выбрать подходящую функ­цию *F.* Относительно нее мы предполагаем только одно, что она повсюду мала, за исключением области аргу­мента вблизи нуля, т. е. что график *F* ведет себя подобно кривой, изображенной на фиг. 28.4. Это узкий пик в окрестности s2=0, шириной которого грубо можно считать величину а2. Если вычисляется потенциал в точке 1, то при­ближенно можно утверждать, что заметный вклад дают только те точки *2,* для которых s212 = с2(t2-t*1)2*-r212 отличается от нуля на ±a2. Это можно выразить, сказав, что *F* важно только для

(28.16)

Если понадобится, можно проделать все математически более строго, но идея вам уже ясна.

Предположим теперь, что *а* очень мало по сравнению с размерами обычных объектов типа электромоторов, генераторов и тому подобное, поэтому для обычных задач г12>>а. Тогда вы­ражение (28.16) говорит, что в интеграл (28.15) дают вклад только те токи, для которых t1-t2 очень мало:

Но поскольку а2/r212<<1, то квадратный корень приближенно равен 1 ±а2/2r212, так что

В чем здесь суть? Полученный результат говорит, что для *Аμ.* в момент t*1* важны только те *времена t*2, которые отличаются от него на запаздывание r12/c с пренебрежимо малой поправкой, ибо r12>>а. Другими словами, теория Боппа переходит в теорию Максвелла при удалении от зарядов в том смысле, что она при­водит к эффекту запаздывания.

Мы можем приближенно увидеть, к чему нас приведет инте­грал (28.15). Если, зафиксировав r12, провести интегрирование по t*2* в пределах от -∞ до +∞,то s212 тоже будет изменяться от -∞ до +∞. Но основной вклад даст участок по *t2* шириной At2=2•а2/2r12с с центром в момент t1-r12/c.Пусть функция *F*(s2) при s2=0 принимает значение *К,* тогда интегрирование по *t2* дает приблизительно KjμΔt2, или

C:\1\pic\gray.jpg

C:\1\pic\gray.jpgРазумеется, величину jμ следует взять в момент t2=t1-r12/c, так что (28.15) принимает вид

Если выбрать K=q2с/4πε0а2, то мы придем прямо к запаздыва­ющему решению уравнений Максвелла для потенциалов, при­чем автоматически возникает зависимость 1/r! И все это получи­лось из простого предположения, что потенциал в одной точке пространства-времени зависит от плотности токов во всех других точках пространства-времени с весовым множите­лем, в качестве которого взята некая функция четырехмерного расстояния между двумя точками. Эта теория тоже дает конеч­ную электромагнитную массу электрона, а соотношение между энергией и массой как раз такое, какое требуется в теории относительности. Ничего другого не могло и быть, ибо теория релятивистски инвариантна с самого начала.

Однако и этой теории и всем другим описанным нами тео­риям можно предъявить тяжкое обвинение. Все известные нам частицы подчиняются законам квантовой механики, поэтому необходима квантовомеханическая форма электродинамики. Свет ведет себя подобно фотонам. Это уже не

100-процентная теория Максвелла. Следовательно, электродинамика должна быть изменена. Мы уже говорили, что упорное старание испра­вить классическую теорию может оказаться напрасной тратой времени, ибо в квантовой электродинамике трудности могут исчезнуть или будут разрешены другим образом. Однако и в квантовой электродинамике трудности не исчезают. В этом кроется одна из причин, почему люди потратили столько времени, пытаясь преодолеть классические трудности и надеясь, что если они смогут преодолеть их, то после квантового обоб­щения уравнений Максвелла все будет в порядке. Однако и после такого обобщения трудности не исчезают.

Квантовые эффекты, правда, приводят к некоторым измене­ниям. Изменяется формула для масс, появляется постоянная Планка h*,* но ответ по-прежнему выходит бесконечным, если вы не обрезаете как-то интегрирование, подобно тому как мы обре­зали интеграл при r*=а* в классической теории. Ответ при этом зависит от характера обрезания. К сожалению, я не могу вам показать, что трудности в основном те же самые, ибо вы еще слишком мало знаете о квантовой механике, а о квантовой элек­тродинамике — и того меньше. Поэтому вам придется поверить мне на слово, что и квантовая электродинамика Максвелла при­водит к бесконечной массе точечного электрона.

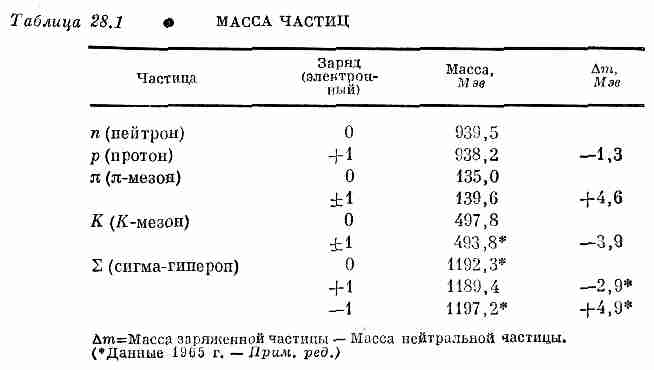
Оказывается, однако, что до сих пор никому не удалось даже приблизиться к *самосогласованному* квантовому обобще­нию на основе *любой* из модифицированных теорий. Идее Борна и Инфельда никогда не суждено было стать квантовой теорией. Не привели к удовлетворительной квантовой теории опережа­ющие и запаздывающие волны Дирака и Уилера — Фейнмана. Не привела к удовлетворительной квантовой теории и идея Боппа. Так что и до сего дня нам не известно решение этой проблемы. Мы не знаем, как с учетом квантовой механики по­строить самосогласованную теорию, которая не давала бы бес­конечной собственной энергии электрона или какого-то другого точечного заряда. И в то же время нет удовлетворительной тео­рии, которая описывала бы неточечный заряд. Так эта проблема и осталась нерешенной.

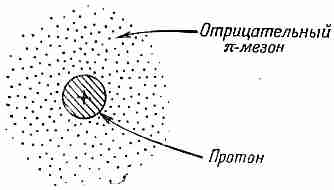
Если вы вздумаете попытать счастья и построить теорию, полностью удалив действие электрона на себя, так чтобы электромагнитная масса не имела смысла, а затем будете делать из нее квантовую теорию, то могу вас заверить — трудностей вы не избежите. Экспериментально доказано существование электромагнитной инерции и тот факт, что часть массы заряжен­ных частиц — электромагнитная по своему происхождению.

В старых книгах часто утверждалось, что поскольку при­рода не подарила нам двух одинаковых частиц, из которых одна нейтральная, а другая заряженная, то мы никогда не сможем сказать, какая доля массы является электромагнитной, а какая механической. Однако оказалось, что природа все же была достаточна щедра и *подарила* нам именно два таких объекта, так что, сравнивая наблюдаемую массу заряженной частицы с мас­сой нейтральной, мы можем сказать, существует ли электромаг­нитная масса. Возьмем, например, нейтрон и протон. Они взаи­модействуют с огромной силой — ядерной силой, детали происхождения которой нам неизвестны. Однако, как мы уже говорили, ядерные силы обладают одним замечательным свой­ством. По отношению к этим силам нейтрон и протон в точности одинаковы. Насколько мы сейчас можем судить, ядерные силы между двумя нейтронами, нейтроном и протоном и двумя протонами совершенно одинаковы. Отличаются эти частицы только сравнительно слабыми электромагнитными силами; по отноше­нию к ним протон и нейтрон отличаются, как день и ночь. Вот это нам как раз и нужно. Итак, мы имеем две частицы, одина­ковые с точки зрения сильных взаимодействий и различных с точки зрения электрических. И они имеют небольшую разницу в массах. Разница масс между протоном и нейтроном, выражен­ная в единицах энергии покоя mc*2,* составляет 1,3 *Мэв,* что со­ответствует 2,6 электронным массам. Классическая теория пред­сказывает для радиуса протона величину между 1/3 и *1/2* ра­диуса электрона, или около 10-13 *см.* Конечно, на самом деле следует пользоваться квантовой теорией, но по какой-то стран­ной случайности все константы, 2π, h*,* и т. д., комбинируются так, что приблизительно дают тот же самый результат, что и классическая теория. Одна беда: *знак* оказывается неверным! Нейтрон на самом деле *тяжелее* протона.

Природа дала нам еще несколько других пар и троек частиц, которые, за исключением электрического заряда, во всех осталь­ных отношениях оказываются в точности одинаковыми. Они взаимодействуют с протонами и нейтронами посредством так называемого «сильного» взаимодействия. В таких взаимодей­ствиях все частицы данного сорта, скажем π-мезон, ведут себя во всех отношениях как одна и та же частица, *за исключением* их электрического заряда.

В табл. 28.1 мы приводим список таких частиц вместе с их массами. Заряженные π-мезоны имеют массу 139,6 *Мзв,* а ней­тральный π0-мезон на 4,6 *Мэв* легче. Эту разность масс мы счи­таем электромагнитной. Она соответствовала бы частице с ра­диусом от 3 до 4•10-14 *см.* Вы видите из таблицы, что разницы масс других частиц того же масштаба.





Ф*иг. 28.5. В некоторые моменты нейтрон может представлять со­бой протон, окруженный облаком отрицательного π-мезона.*

Однако размеры этих частиц можно определить и другими методами, например по кажущемуся диаметру при высокоэнер­гетических соударениях. Таким образом, электромагнитная масса, по-видимому, находится в согласии с электромагнитной теорией, если мы обрезаем интеграл от энергии поля на радиусе, полученном этими другими методами. Вот почему мы верим, что разница все же обусловлена электромагнитной массой.

Вас, конечно, беспокоят разные знаки разности масс в таблице. Нетрудно понять, почему заряженная частица должна быть тяжелее нейтральной. Но что можно сказать о таких па­рах, как нейтрон и протон, где наблюдаемая разность масс оказывается совсем другой? Эти частицы оказываются довольно сложными, и вычисление их электромагнитной массы более хи­тро. Например, хотя нейтрон *в целом* нейтрален, у него все же *есть* внутреннее распределение заряда и равен нулю только *суммарный* заряд. Мы думаем, что нейтрон, по крайней мере в некоторые моменты времени, выглядит как протон, окруженный «облаком» отрицательного π-мезона (фиг. 28.5). И несмотря на то, что нейтрон «нейтрален», т. е. полный его заряд равен нулю, у него все же есть какая-то электромагнитная энергия (например, у него есть магнитный момент), так что без деталь­ной теории внутренней структуры судить о знаке электромаг­нитной разности масс нелегко.

Мне хотелось бы подчеркнуть лишь следующие особенности:

1. Электромагнитная теория предсказывает существование электромагнитной массы, но она тут же терпит фиаско, ибо оказывается несамосогласованной. Это в равной мере относится и к квантовым модификациям.

2. Существует экспериментальное подтверждение электро­магнитной массы.

3. Все разности масс по порядку величины такие же, как и масса электрона.

Итак, мы снова возвращаемся к первоначальной идее Ло­ренца, что масса электрона вполне может быть целиком электро­магнитной, т. е. все его 0,511 *Мэв* обусловлены электродинами­кой. Так это или нет? У нас нет теории и по сей день, поэтому мы ничего не можем сказать с уверенностью.

Мне хочется упомянуть еще об одном досадном обстоятель­стве. В природе существует еще одна частица, называемая *μ-мезоном,* или мюоном, которая, насколько нам известно се­годня, решительно ничем не отличается от электрона, за исклю­чением своей массы (равной 206,77 электронных масс). Она во всем ведет себя так же, как электрон: взаимодействует с нейт­рино и электромагнитным полем, но на нее не действуют ядер­ные силы. С ней не происходит ничего такого, чего не происхо­дит с электронами, по крайней мере ничего такого, чего нельзя было бы объяснить, как простое следствие большей массы. Поэтому, если в конце концов кому-то и удается объяснить массу электрона, для него остается загадкой, откуда же берет свою массу *μ*-мезон. Почему? Да потому, что все, что делает электрон, может делать и *μ*-мезон, так что массы их должны получиться одинаковыми. Есть люди, которые непоколебимо верят, что *μ*-мезон и электрон — это одна и та же частица, что в окончательной будущей теории масс формула, из которой они должны определяться, будет представлять собой квадратное уравнение с двумя корнями, один из которых даст массу *μ*-мезона, а другой — электрона. Есть и такие, которые полагают, что это будет трансцендентное уравнение с бесконечным числом корней; они занимаются гаданием, какими должны быть массы других частиц этого ряда и почему они не открыты до сих пор.

**§ 6. Поле ядерных сил**

Мне бы хотелось сделать еще несколько замечаний о неэлек­тромагнитной части массы ядерных частиц. Откуда берется большая доля их массы? Кроме электродинамических сил, су­ществуют еще силы другого рода — ядерные силы, у которых есть своя собственная теория поля, хотя никому неизвестно, правильна она или нет. Эта теория также предсказывает энер­гию поля, которая для ядерных частиц дает массу, аналогич­ную электромагнитной. Ее можно называть «π-мезополевой массой». Она, по-видимому, очень велика, так как ядерные силы чрезвычайно мощны, и возможно, что именно они являются при­чиной массы тяжелых частиц. Однако теории мезонных полей находятся в весьма зачаточном состоянии. Даже в сравнительно хорошо развитой теории электромагнетизма мы видели, что, кроме первоначальных намеков, невозможно получить объяс­нение массы электрона. В мезонных же теориях мы в этом месте тоже терпим неудачу.

C:\1\pic\gray.jpgОднако мезонная теория очень интересно связана с электро­динамикой, и поэтому стоит все же уделить некоторое время из­ложению ее основ. Поле в электродинамике можно описать четырехвектором потенциала, удовлетворяющим уравнению

Мы видели, что поле может быть излучено, после чего оно су­ществует независимо от источника. Это фотоны, и они описы­ваются дифференциальным уравнением без источника:

C:\1\pic\gray.jpg

Некоторые физики утверждают, что поле ядерных сил тоже должно иметь свои собственные «фотоны», роль которых, по-видимому, играют π-мезоны, и что они должны описываться аналогичным дифференциальным уравнением. (До чего же бес­силен человеческий разум! Мы не можем придумать чего-то действительно нового и беремся рассуждать только по аналогии с тем, что знаем.) Таким образом, возможным уравнением для мезонов будет

C:\1\pic\gray.jpg

C:\1\pic\gray.jpgгде ϕ может быть каким-то другим четырехвектором или, возможно, скаляром. Далее выяснилось, что у π-мезона никакой поляризации нет, поэтому ϕ должно быть скаляром. Согласно этому простому уравнению, мезонное поле должно изменяться с расстоянием от источника как 1/r2, т. е. в точности как элект­рическое. Однако мы знаем, что радиус действия ядерных сил гораздо меньше, чего не может обеспечить нам это простое урав­нение. Есть только один способ изменить положение вещей, не разрушая релятивистской инвариантности,— добавить или вы­честь из даламбертиана произведение константы на поле ϕ. Итак, Юкава предположил, что свободные кванты ядерных сил могут подчиняться уравнению

(28.17)

где μ2 — некоторая постоянная, т. е. какой-то скаляр. (Посколь­ку 2 является скалярным дифференциальным оператором, то инвариантность не нарушится, если мы добавим к нему дру­гой скаляр.)

C:\1\pic\gray.jpgДавайте посмотрим, что дает уравнение (28.17), когда ядер­ные силы не изменяются с течением времени. Мы хотим найти решение уравнения

которое было бы сферически симметрично относительно неко­торой точки, скажем относительно начала координат. Если ϕ зависит только от r, то мы знаем, что

C:\1\pic\gray.jpg

Таким образом, получается уравнение

C:\1\pic\gray.jpg

C:\1\pic\gray.jpgили

Рассматривая теперь произведение (rϕ) как новую функцию, мы имеем для нее уравнение, которое встречалось нам уже много раз. Решение ее имеет вид

C:\1\pic\gray.jpg

Ясно, что при больших r поле ϕ не может быть бесконеч­ным, поэтому нужно отбросить знак плюс в показателе экспо­ненты, после чего решение примет вид

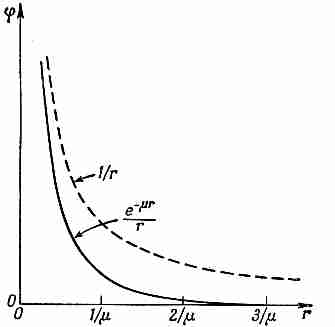
C:\1\pic\gray.jpg

(28.18)

Эта функция называется *потенциалом Юкавы.* Для сил притя­жения *К* должно быть отрицательным числом, величина которо­го подбирается так, чтобы удовлетворить экспериментально наблюдаемой величине ядерных сил.

Потенциал Юкавы благодаря экспоненциальному множителю угасает быстрее, чем 1/r. Как это видно из фиг. 28.6, для рас­стояний, превышающих 1/μ, потенциал, а следовательно, и ядерные силы приближаются к нулю гораздо быстрее, чем 1/r. Поэтому «радиус действия» ядерных сил гораздо меньше «радиуса действия» электростатических. Экспериментально дока­зано, что ядерные силы не простираются на расстояния свыше 10-13 *см,* поэтому

μ≈1015 *м-1.*



*Фиг. 28.6. Сравнение потенциала Юкавы. е-μr/r с кулоновым потен­циалом 1/r.*

C:\1\pic\gray.jpgИ, наконец, давайте рассмотрим волновое решение уравне­ния (28.17). Если мы подставим в него

C:\1\pic\gray.jpgто получим

Связывая теперь частоту с энергией, а волновое число с импуль­сом, как это делалось в конце гл. 34 (вып. 3), мы найдем соот­ношение

C:\1\pic\gray.jpg

которое говорит, что масса «фотона» Юкавы равна μ*h/с.* Если в качестве μ взять величину ~1015м-1, которую дает наблюдаемый радиус действия ядерных сил, то масса оказывается равной 3•10-25 г, или 170 Мэв, что приблизительно равно наблюдаемой массе π-мезона. Таким образом, по аналогии с электродинами­кой мы бы сказали, что π-мезон — это «фотон» поля ядерных сил. Однако теперь мы распространили идеи электродинамики в такую область, где они на самом деле могут оказаться и не­верными. Мы вышли далеко за рамки электродинамики и очутились перед проблемой ядерных сил.

***\* Мы пользуемся такими обозначениями x=dx/dt, x=d2x/dt2, x=d3x/dt3 и т. д.***

***Глава 29***

**ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯДОВ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ И МАГНИТНОМ ПОЛЯХ**

[**§ 1. Движение в однородны****х электрическом я магнитном полях**](#а1)

[**§ 2. Анали****затор импульсов**](#а2)

[**§ 3. Электро****статиче­ская линза**](#а3)

[**§ 4. Магнитная** **линза**](#а4)

[**§ 5. Электро****нный микроскоп**](#а5)

[**§ 6. Стабили****зирую­щие поля ускори­телей**](#а6)

[**§ 7. Фокусировк****а чередующимся градиентом**](#а7)

[**§ 8. Движение в скрещ****енных электрическом и магнитном полях**](#а8)

***Повторить:* гл. 30 (вып. 3) «Дифракция».**

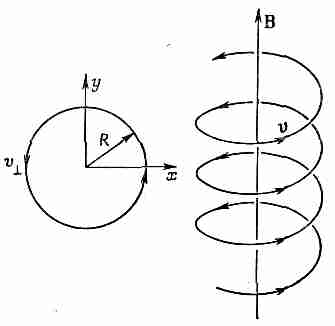
**§ 1. Движение в однородных электрическом и магнитном полях**

Мы теперь перейдем к описанию в общих чер­тах движения зарядов в различных условиях. Наиболее интересные явления возникают тогда, когда зарядов движется много и все они взаимо­действуют друг с другом. Так обстоит дело, когда электромагнитные волны проходят через кусок вещества или плазму; тогда легионы за­рядов взаимодействуют друг с другом. Но это очень сложная картина. Позднее мы поговорим и о таких проблемах; пока же мы обсудим не­сравненно более простую задачу о движении отдельного заряда в *заданном* поле. При этом можно пренебречь всеми другими зарядами, за исключением, разумеется, тех зарядов и токов, которые создают предполагаемое нами поле.

Начать, по-видимому, нужно с движения частицы в однородном электрическом поле. Движение при небольших скоростях не пред­ставляет особенного интереса — это просто рав­номерно ускоренное движение в направлении поля. А вот когда частица, набрав достаточно энергии, превращается в релятивистскую, дви­жение ее становится более сложным. Решение для этого случая я оставляю вам — потруди­тесь и отыщите его сами.

Мы же рассмотрим движение в однородном магнитном поле, когда электрического поля нет. Эту задачу мы уже решали. Одним из ре­шений было движение частиц по окружности. Магнитная сила

C:\1\pic\gray.jpg*qv* X В всегда действует под прямым углом к направлению движения, так что производная *dp/dt* перпендикулярна р и равна по величине *vp/R,* где *R —* радиус окружности, т. е.



*Фиг. 29.1. Движение частицы в однородном магнитном поле.*

Таким образом, радиус круговой орбиты равен

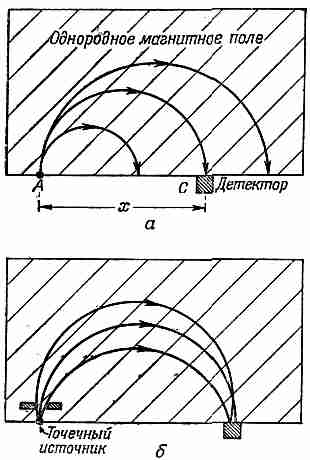
C:\1\pic\gray.jpg

(29.1)

Это одно из возможных движений. Если движущаяся час­тица имеет только одну составляющую в направлении поля, то она не изменяется, ибо у магнитной силы отсутствует компо­нента в направлении поля. Общее же движение частицы в од­нородном магнитном поле — это движение с постоянной ско­ростью в направлении В и круговое движение под прямым углом к В, т. е. движение по цилиндрической спирали (фиг. 29.1). Радиус спирали определяется равенством (29.1) с заменой *р* на *р┴ —* компоненту импульса, перпендикулярную к направ­лению поля.

**§ 2. Анализатор импульсов**

Однородное магнитное поле часто применяется в «анализа­торе», или «спектрометре импульсов» высокоэнергетических частиц. Предположим, что в точке *А* (фиг. 29.2, *а)* в однородное магнитное поле влетают заряженные частицы, причем магнит­ное поле перпендикулярно плоскости рисунка. При этом каж­дая частица будет лететь по круговой орбите, радиус которой пропорционален ее импульсу. Если все частицы влетают в поле перпендикулярно его краю, то они покидают его на расстоянии *х* от точки *А,* пропорциональном их импульсу *р.* Помещенный в некоторой точке *С* счетчик будет регистрировать только та­кие частицы, импульс которых находится где-то в интервале Δр величин *p=qBx/2.*



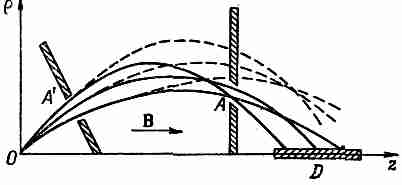
*Фиг. 29.2. 180-градусный спек­трометр импульсов с однородным магнитным полем.*

*а — траектории частиц* с *разными импульсами; 6* — *траектории частиц, влетающих под равными углами. Маг­нитное поле направлено перпендикулярно плоскости рисунка.*

Нет необходимости, разу­меется, чтобы перед регист­рацией частица поворачива­лась на 180°, но такой «180-градусный спектрометр» обладает особым свойством: для него совсем необяза­тельно, чтобы частицы вхо­дили под прямым углом к краю поля. На фиг. 29.2, *б* показаны траектории трех частиц с *одинаковым* импульсом, но входящих в поле под различными углами. Вы видите, что траектории у них разные, но все они покидают поле очень близко к точке *С.* В подобных случаях мы говорим о «фокусировке». Преимущество такого способа фо­кусировки в том, что она позволяет допускать в точку *А* частицы, летящие под большими углами, хотя обычно, как видно из рисунка, углы эти в какой-то степени ограничены. Большое угловое разрешение обычно означает регистрацию за данный промежуток времени большего числа частиц и сокращения, следовательно, времени измерения.

Изменяя магнитное поле, передвигая счетчик вдоль оси *х* или же покрывая с помощью многих счетчиков целую область по оси *х,* можно измерить «спектр» падающего пучка [«спектр» им­пульсов *f(p)* означает, что число частиц с импульсами в интер­вале между *р* и *(p+dp)* равно f(p)dp]*.* Такие измерения про­водятся, например, при определении распределения по энер­гиям в β-распаде различных ядер.

Имеется еще много других типов импульсных спектрометров, но я расскажу вам только об одном из них, характерном особен­но большим разрешением по *пространственному* углу. В основе его лежат винтовые орбиты в однородном поле, как это показано на фиг. 29.1. Представьте себе цилиндрическую систему коорди­нат ρ, θ, z, причем ось z выбрана по направлению магнитного поля. Если частица испускается из начала координат под углом

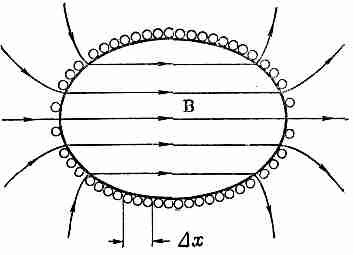


*Фиг. 29.3. Спектро­метр с аксиальным полем.*

а к направлению оси z, то она будет двигаться по спиральной линии, описываемой выражением

C:\1\pic\gray.jpg

входящие туда параметры а, bи *k* нетрудно выразить через *ρ, α* и магнитное ноле *В.* Если для данного импульса, но разных начальных углов отложить расстояние *ρ* от оси как функцию *z,* то мы получим кривые, подобные сплошным кривым на фиг. 29.3. (Вы помните — ведь это своего рода проекция винтовой траек­тории.) Когда угол между осью и начальным направлением велик, максимальное значение *ρ* тоже будет большим, а продоль­ная скорость при этом уменьшается, так что выходящие под раз­личными углами траектории стремятся собраться в своего рода фокус (точка *А* на рисунке). Если на расстоянии *А* поставить узкое кольцевое отверстие, то частицы, летящие в некоторой области углов, могут пройти через отверстие и достигнуть оси, где для их регистрации мы приготовим протяженный детектор *D.* Частицы, вылетающие из начала координат под тем же са­мым углом, но с большим импульсом, летят по пути, обозначен­ному нами пунктирной линией, и не могут пройти через отвер­стие *А.* Итак, прибор выбирает небольшой интервал импульса. Преимущество такого спектрометра по сравнению с описанным ранее состоит в том, что отверстия *А и А'* можно сделать коль­цевыми, так что могут быть зарегистрированы частицы в до­вольно большом телесном угле. Это преимущество особенно важно для слабых источников и при очень точных измерениях, когда необходимо использовать возможно большую долю испу­щенных источником частиц.

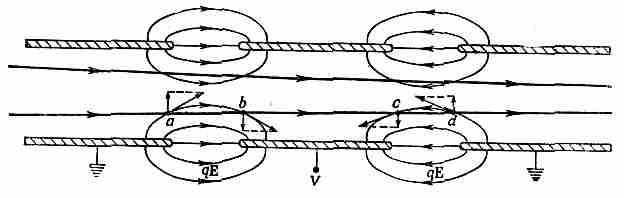


*Фиг. 29.4. Внутри эллип­соидальной катушки, ток которой на любом интер­вале оси Δx* *одинаков, воз­никает однородное поле.*

Но за это преимущество приходится расплачиваться, ибо метод требует большого объема однородного магнитного поля, и он практически пригоден только для частиц с небольшой энергией. Если вы помните, один из способов получения одно­родного поля — это намотать провод на сферу так, чтобы поверх­ностная плотность тока была пропорциональна синусу угла. Вы можете доказать, что то же самое справедливо и для эллипсо­ида вращения. Поэтому очень часто такой спектрометр изготов­ляют, просто наматывая эллипсоидальные витки на деревянный или алюминиевый каркас. Единственное, что при этом требует­ся,— это чтобы ток на любом интервале оси *Ах* (фиг. 29.4) был одним и тем же.

**§ 3. Электростатическая линза**

Фокусировка частицы имеет множество применений. Напри­мер, в телевизионной трубке электроны, вылетающие из катода, фокусируются на экране в маленькое пятнышко. Делается это для того, чтобы отобрать электроны одинаковой энергии, но летящие под различными углами, и собрать их в небольшую точ­ку. Эта задача напоминает фокусировку света с помощью линз, поэтому устройства, которые выполняют такие функции, тоже называются линзами.

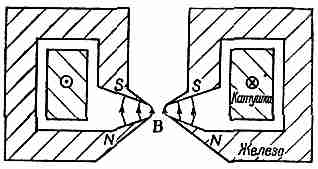
В качестве примера электронной линзы здесь приведена фиг. 29.5. Это «электростатическая» линза, действие которой зависит от электрического поля между двумя соседними электро­дами. Работу ее можно понять, проследив за тем, что она делает с входящим слева параллельным пучком частиц. Попав в об­ласть а, электроны испытывают действие силы с боковой ком­понентой, которая прижимает их к оси. В области bэлектроны, казалось бы, должны получить равный по величине, но проти­воположный по знаку импульс, однако это не так. К тому вре­мени, когда они достигнут области b*,* энергия их несколько увеличится, и поэтому на прохождение области bони *затратят меньше времени.*

*Фиг. 29.5. Электростатическая линза.* Показаны *силовые линии, т. е. линии вектора qE.*

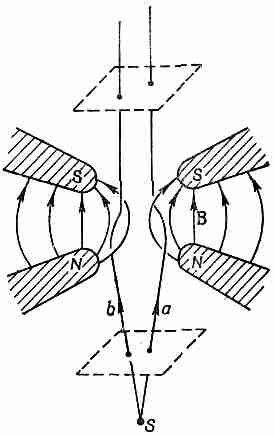
Силы-то те же самые, но время их действия меньше, поэтому и импульс будет меньше. А полный импульс силы при прохождении областей *а* и bнаправлен к оси, так что в результате электроны стягиваются к одной общей точке. По­кидая область высокого напряжения, частицы получают доба­вочный толчок по направлению к оси. В области с сила направ­лена от оси, а в области *d — к* оси, но во второй области час­тица остается дольше, так что снова полный импульс направлен к оси. Для небольших расстояний от оси полный импульс силы на протяжении всей линзы пропорционален расстоянию от оси (понимаете почему?), и это как раз основное условие, необхо­димое для обеспечения фокусировки линз такого типа.

С помощью этих же рассуждений вы можете убедиться, что фокусировка будет достигнута во всех случаях, когда потенциал в середине электрода по отношению к двум другим либо положи­телен, либо отрицателен. Электростатические линзы такого типа обычно используются в катоднолучевых трубках и некоторых электронных микроскопах.

**§ 4. Магнитная линза**

**: Есть еще один сорт линз — их часто можно встретить в электронных микроскопах — это магнитные линзы. Схемати­чески они изображены на фиг. 29.6. Цилиндрически симметрич­ный электромагнит с очень острыми кольцевыми наконечниками полюсов создает в малой области очень сильное неоднородное магнитное поле. Оно фокусирует электроны, летящие вертикаль­но через эту область. Механизм фокусировки нетрудно понять; посмотрите увеличенное изображение области вблизи наконеч­ников полюсов на фиг. 29.7. Вы видите два электрона *а* и b*,* которые покидают источник *S по*д некоторым углом по отноше­нию к оси. Как только электрон *а* достигнет начала поля, го­ризонтальная компонента поля отклонит его в направлении *от вас.* Он приобретет боковую скорость и, пролетая через сильное вертикальное поле, получит импульс в направлении к оси. Бо­ковое *же* движение убирается магнитной силой, когда электрон покидает поле, так что оконча­тельным эффектом будет им­пульс, направленный к оси, плюс «вращение» относительно нее.

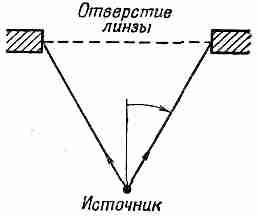
*Фиг. 29.6. Магнитная линза.*

**

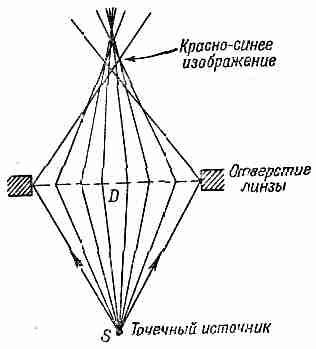
*Фиг. 29*.7. *Движение электрона в магнитной линзе.*

На частицу bдействуют те же силы, но в противоположном направлении, поэтому она тоже отклоняется по направлению к оси. На рисунке видно, как расходящиеся электроны соби­раются в параллельный пучок. Действие такого устройства подобно действию линзы на находящийся в ее фокусе объект. Если бы теперь вверху поставить еще одну такую же линзу, то она бы сфокусировала электроны снова в одну точку и по­лучилось бы изображение источника *S.*

**§ 5. Электронный микроскоп**

**Вы знаете, что в электронный микроскоп можно «увидеть» предметы, которые недоступно малы для оптического микроско­па. В гл. 30 (вып. 3) мы обсуждали общие ограничения любой оптической системы, вызываемые дифракцией на отверстии линзы. Если отверстие объектива видно из источника под углом 2θ (фиг. 29.8), то две соседние точки, расположенные около источника, будут неразличимы, если расстояние между ними

*Фиг. 29.8. Разрешение микроскопа ограничивается угловым размером объектива относительно фокуса.*

**

*Фиг. 29.9. Сферическая аберрация линзы.*

по порядку величины меньше

*C:\1\pic\gray.jpg*

где *λ —* длина волны света. Для лучших оптических микроско­пов угол 6 приближается к тео­ретическому пределу 90°, так что б приблизительно равно *λ*, или около 5000 Å.

Тe же самые ограничения применимы и к электронному ми­кроскопу, но только длина волн в нем, т, е. длина волны электро­нов с энергией 50 кв, составляет 0,05 Å. Если бы можно было использовать объектив с отверстием около 30°, то мы способны были бы различить объекты величиной в 1/5 А. Атомы в молекулах обычно расположены на расстоянии 1—2 Å, следователь­но, тогда вполне можно было бы получать фотографии молекул. Биология стала бы куда проще; мы бы могли сфотографировать структуру ДНК. Как это было бы замечательно! Ведь все сегод­няшние исследования в молекулярной биологии — это попытки определить структуру сложных органических молекул. Если бы мы были способны их видеть!

Но к несчастью, самая лучшая разрешающая способность электронных микроскопов приближается только к 20 Å. А все потому, что до сих пор никому не удалось построить линзу с большой светосилой. Все линзы страдают «сферической абер­рацией». Это означает вот что: лучи, идущие под большим углом к оси, и лучи, идущие близко к ней, фокусируются в раз­ных точках (фиг. 29.9). С помощью специальной технологии из­готовляются линзы для оптических микроскопов с пренебрежимо малой сферической аберрацией, но никому до сих пор не уда­лось получить электронную линзу, лишенную сферической абер­рации. Можно показать, что для любой электростатической или магнитной линзы описанных нами типов сферическая аберра­ция неизбежна. Наряду с дифракцией аберрация ограничивает разрешающую способность электронных микроскопов ее со­временным значением.

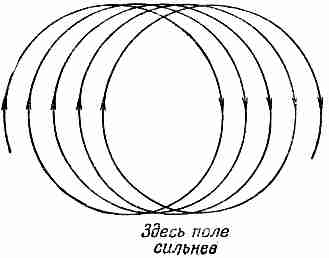
Ограничения, о которых мы упоминали, не относятся к электрическим и магнитным полям, не имеющим осевой симмет­рии или не постоянным во времени. Вполне возможно, что в

один прекрасный день кто-нибудь придумает новый тип электрон­ных линз, свободных от аберрации, присущей простым электрон­ным линзам. Тогда можно будет непосредственно фотографиро­вать атомы. Возможно, что когда-нибудь химические соедине­ния будут анализироваться просто визуальным наблюдением за расположением атомов, а не по цвету какого-то осадка!

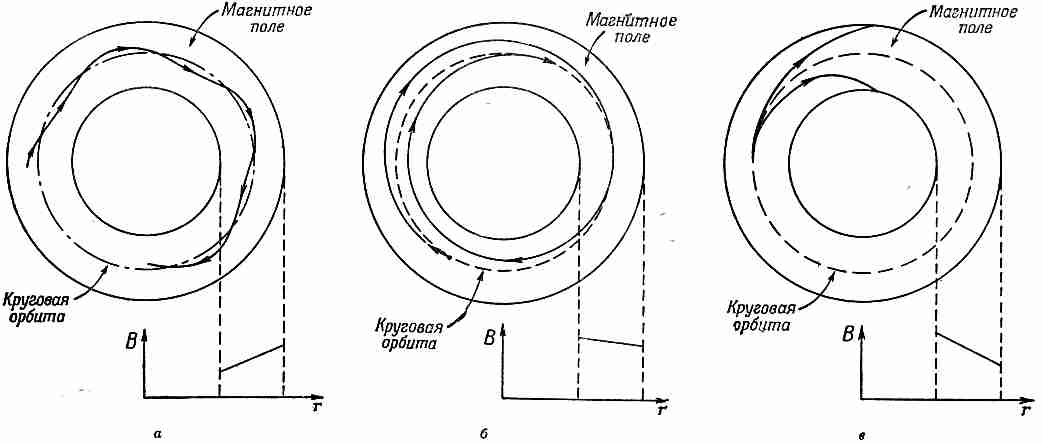
**§ 6. Стабилизирующие поля ускорителей**

Магнитные поля используются в высокоэнергетических уско­рителях еще для того, чтобы заставить частицу двигаться по нужной траектории. Такие устройства, как циклотрон и синхро­трон, ускоряют частицу до высоких энергий, заставляя ее много­кратно проходить через сильное электрическое поле. А на своей орбите частицу удерживает магнитное поле.

Мы видели, что путь частицы в однородном магнитном поле проходит по круговой орбите. Но это справедливо только для идеального магнитного поля. А представьте себе, что поле *В* в большой области только приблизительно однородно: в одной части оно немного сильнее, чем в другой. Если в такое поле мы запустим частицу с импульсом *р,* то она полетит по примерно круговой орбите с радиусом *R=p/qB.* Однако в области более сильного поля радиус кривизны будет несколько меньше. При этом орбита уже не будет замкнутой окружностью, а возникнет «дрейф», подобный изображенному на фиг. 29.10. Если угодно, можно считать, что небольшая «ошибка» в поле приводит к толчку, который сдвигает частицу на новую траекторию. В ускорителе же частица делает миллионы оборотов, поэто­му необходима своего рода «радиальная фокусировка», кото­рая удерживала бы траектории частиц на близкой к желаемой орбите.

Другая трудность, связанная с однородным полем, состоит в том, что частицы не остаются в одной плоскости. Если они начинают движение под небольшим углом или небольшой угол создается неточностью поля, то частицы идут по спираль­ному пути, который в конце концов приведет их либо на полюс магнита, либо на по­толок или пол вакуумной камеры.

*Фиг. 29.10. Движение частицы в слабо неоднородном поле.*



*Фиг. 29.11. Радиальное движение частицы в магнитном поле.*

*а —* с *большим положительным «наклоном»; б —* с *малым отрицательным «наклоном»; в —* с *большим отрицательным «наклоном».*

Чтобы избежать такого вертикального дрейфа, нужны какие-то устройства; магнитное поле должно обеспечивать как радиальную, так и «вертикальную» фокусировки.

Сразу же можно догадаться, что радиальную фокусировку обеспечивает созданное магнитное поле, которое увеличивается с ростом расстояния от центра проектируемого пути. Тогда, если частица выйдет на больший радиус, она окажется в более сильном поле, которое вернет ее назад на нужную орбиту. Если она перейдет на меньший радиус, то «загибание» будет меньше и она снова вернется назад на желаемый радиус. Если частица внезапно начала двигаться под углом к идеальной орбите, она начнет осциллировать относительно нее (фиг. 29.И, *а)* и радиаль­ная фокусировка будет удерживать частицу вблизи кругового пути.

Фактически радиальная фокусировка происходит даже при *противоположном* «наклоне». Это может происходить в тех слу­чаях, когда радиус кривизны траектории увеличивается не быстрее, чем расстояние частицы от центра поля. Орбиты частиц будут подобны изображенным на фиг. 29.11,6. Но если градиент поля слишком велик, то частицы не вернутся на желаемый ра­диус, а будут по спирали выходить из поля либо внутрь, либо наружу (фиг. 29.11,*в*).

C:\1\pic\gray.jpg«Наклон» поля мы обычно характеризуем «относительным градиентом», или *индексом поля n*

(29.2)

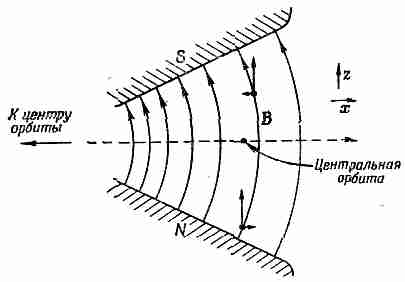
Направляющее поле создает радиальную фокусировку, если относительный градиент будет больше -1.

Радиальный градиент поля приведет также к *вертикальным* силам, действующим на частицу. Предположим, мы имеем поле, которое вблизи центра орбиты сильнее, а снаружи слабее. Вертикальное поперечное сечение магнита под прямым углом к орбите может иметь такой вид, как показано на фиг. 29.12. (Причем протоны летят на нас из страницы.) Если нам нужно, чтобы поле было сильнее слева и слабее справа, то магнитные силовые линии должны быть искривлены подобно изображен­ным на рисунке. То, что это должно быть так, можно уви­деть из закона равенства нулю циркуляции В в пустом прос­C:\1\pic\gray.jpgтранстве. Если выбрать систему координат, показанную на рисунке, то

или

C:\1\pic\gray.jpg

(29.3)



*Фиг. 29.12. Вертикаль­но фокусирующее поле.*

*Вид в поперечном сечении, перпендикулярном к орбите.*

Поскольку мы предполагаем, что *дВz/дх* отрицательно, то рав­ным ему и отрицательным должно быть и *дВх/дz. Если* «номиналь­ной» плоскостью орбиты является плоскость симметрии, где *Вх=0,* то радиальная компонента *Вх* будет отрицательной над плоскостью и положительной под ней. При этом линии должны быть искривлены так, как это изображено на рисунке.

Такое поле должно обладать вертикально фокусирующими свойствами. Представьте себе протон, летящий более или менее параллельно центральной орбите, но выше нее. Горизонтальная компонента В будет действовать на протон с силой, направлен­ной вниз. Если же протон находится ниже центральной орбиты, то сила изменит свое направление. Таким образом, возникает эффективная «восстанавливающая сила», направленная к центру орбиты. Из наших рассуждений получается, что при условии уменьшения *вертикального* поля с увеличением радиуса должна происходить вертикальная фокусировка. Однако если градиент поля положительный, то происходит «вертикальная дефоку­сировка». Таким образом, для вертикальной фокусировки индекс поля nдолжен быть меньше нуля. Выше мы нашли, что для ра­диальной фокусировки значение nдолжно быть больше -1. Комбинация этих двух условий требует для удержания частиц на стабильных орбитах, чтобы

-1<n<0.

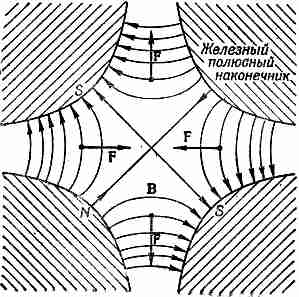
В циклотронах обычно используется величина n*,* приблизитель­но равная нулю, а в бетатронах и синхротронах типичной вели­чиной является n=-0,6.

**§ 7. Фокусировка чередующимся градиентом**

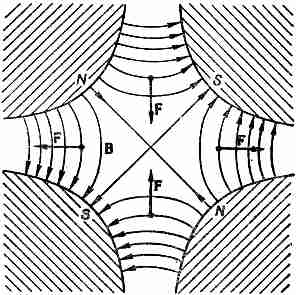
Столь малые величины nдают довольно «слабую» фокусиров­ку. Ясно, что гораздо большую радиальную фокусировку можно было бы получить для большого положительного градиента *(n>>1),* но при этом вертикальные силы будут сильно дефокусирующими. Подобным же образом большой отрицательный наклон (n<<-1) давал бы большие вертикальные силы, но при этом вызывал бы сильную радиальную дефокусировку. Однако примерно 10 лет назад было установлено, что чередующееся дей­ствие областей с сильной фокусировкой и область с сильной дефокусировкой *в целом* приводят к фокусирующему эффекту.

Чтобы объяснить, как работает *такая фокусировка,* разбе­рем сначала действие квадрупольной линзы, которая устроена по тому же принципу. Представьте себе, что к магнитному полю, изображенному на фиг. 29.12, добавлено однородное отрицатель­ное магнитное поле, сила которого подобрана так, чтобы поле на орбите было равно нулю. Результирующее поле при малых смещениях от нейтральной точки будет напоминать изображенное на фиг. 29.13. Такой четырехполюсный магнит называется «квадрупольной линзой». Положительная частица, которая вхо­дит (со стороны читателя) справа или слева от центра, снова втягивается в центр. Если же частица входит сверху или снизу от центра, то она *выталкивается* из него. Это горизонтально-фокусирующая линза. Если теперь обратить горизонтальный градиент, что может быть сделано переменой всех полюсов на противоположные, то знак всех сил изменится на обратный и мы получим вертикально-фокусирующую линзу (фиг. 29.14). Напряженность поля у таких линз, а следовательно, и фокуси­рующая сила возрастают линейно с удалением от оси линзы.

Представьте себе теперь, что мы поставили подряд две такие линзы. Если частица входит с некоторым горизонтальным сме­щением относительно оси (фиг. 29.15, *а),* то она отклонится по направлению к оси первой линзы. Когда же она подходит ко второй линзе, то оказывается ближе к оси, где выталкивающая сила меньше, поэтому меньшим будет и отклонение от оси.



*Фиг. 29.13. Горизонтально фокусирующая квадрупольная линза.*



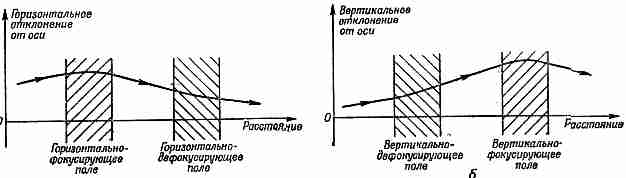
*Фиг. 29.14. Вертикально-фокусирующая квадрупольная линза.*

В ре­зультате же получится наклон к оси, т. е. *в среднем* их действие окажется горизонтально-фокусирующим. С другой стороны, если мы возьмем частицу, которая отклоняется от оси в верти­кальном направлении, то путь ее будет таким, как показано на фиг. 29.15, *б.* Частица сначала отклоняется *от оси, а* затем вхо­дит во вторую линзу с большим смещением, испытывая дейст­вие большей силы, в результате чего отклоняется к оси. В целом эффект снова будет фокусирующим. Таким образом, действие па­ры квадрупольных линз, действующих независимо в горизонталь­ном и вертикальном направлениях, очень напоминает действие оптической линзы. Квадрупольные линзы используются для формирования пучка частиц и контроля над ним в точности так же, как оптические линзы используются для светового пучка.

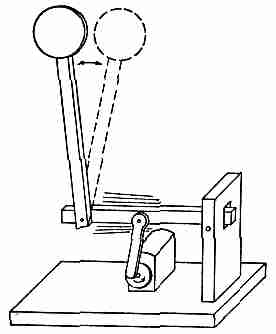
Нужно подчеркнуть, что переменно-градиентная система не всегда приводит к фокусировке. Если градиент слишком велик (по сравнению с импульсом частиц или с расстоянием между линзами), то результирующее действие будет дефокусирующим. Вы поймете, как это получается, если вообразите, что простран­ство между двумя линзами на фиг. 29.15 увеличилось в три или четыре раза.

А теперь вернемся к синхротронному направляющему маг­ниту. Можно считать, что он состоит из чередующейся последо­вательности «положительных» и «отрицательных» линз с нало­женным поверх них однородным полем. Однородное поле служит для удержания частиц в среднем на горизонтальной окружности (на вертикальное движение оно не влияет), а переменные линзы действуют на любую частицу, которая норовит сбиться с пути, подталкивая ее все время к центральной орбите (в среднем).

Существует очень хороший механический аналог, который демонстрирует, как переменная «фокусирующая и дефокусирующая» сила может привести в результате к «фокусирующему» эффекту. Представьте себе механический «маятник», состоящий из твердого стержня с грузиком, подвешенным на оси, которая с помощью кривошипа, связанного с мотором, может быстро



*Фиг. 29.15. Горизонтальная и вертикальная фокусировка парой квадрупольных линз.*

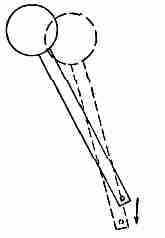


*Фиг. 29.16. Маятник с осциллирую­щей осью имеет устойчивое положение с грузиком, находящимся наверху.*

раскачиваться вверх и вниз. У такого маятника есть *два* поло­жения равновесия. Кроме нор­мального положения, когда маят­ник свешивается вниз, у него есть еще положение равновесия, когда он торчит кверху,— грузик при этом находится *над* точкой опоры (фиг. 29.16).

Простые рассуждения показывают, что вертикальное дви­жение стержня эквивалентно переменной фокусирующей силе. Когда стержень ускоряется вниз, грузик стремится двигаться по направлению к вертикали, как это показано на фиг. 29.17, а когда грузик ускоряется вверх,— все происходит в обратном порядке. Но несмотря на то, что сила все время изменяет свое направление, в среднем она действует к вертикали. Таким об­разом, маятник будет качаться туда и сюда около нейтрального положения, которое прямо противоположно нормальному.

Существует, конечно, более простой способ удержать маят­ник «вверх ногами» — например *сбалансировать* его на пальце. А вот попробуйте-ка так удержать *два независимых* маятника *на одном пальце.* Или даже один, но с закрытыми глазами. Балан­сирование означает внесение небольших поправок в то, что не­верно. А если одновременно неверны несколько параметров, то балансирование в большинстве случаев невозможно. Однако в синхротроне по орбите одновременно движутся миллиарды частиц, каждая из которых имеет свою собственную «ошибку», и тем не менее описанный нами способ фокусировки действует сразу на все эти частицы.



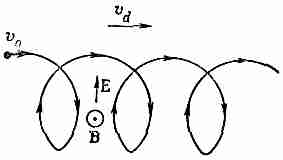
*Фиг. 29.17. Ускорение оси маятника вниз*

*приводит к движению его по направлению к вертикали.*

**§ 8. Движение в** **скрещенных электрическом и магнитном полях**

До сих пор мы говорили о частицах, находящихся только в электрическом или только в магнитном поле. Но есть интересные эффекты, возникающие при одновременном действии обоих по­лей. Пусть у нас имеется однородное магнитное поле В и направ­ленное к нему под прямым углом электрическое поле Е. Тогда частицы, влетающие перпендикулярно полю В, будут двигаться по кривой, подобной изображенной на фиг. 29.18. (Это *плоская* кривая, а *не* спираль.) Качественно это движение понять не­трудно. Если частица (которую мы считаем положительной) движется в направлении поля Е, то она набирает скорость, и магнитное поле загибает ее меньше. А когда частица движется против поля Е, то она теряет скорость и постепенно все больше и больше загибается магнитным полем. В результате же полу­чается «дрейф» в направлении (ЕXВ).

Мы можем показать, что такое движение есть по существу суперпозиция равномерного движения со скоростью *vd=E/B* и кругового, т. е. на фиг. 29.18 изображена просто циклоида. Представьте себе наблюдателя, который движется направо с постоянной скоростью. В его системе отсчета наше магнитное поле преобразуется в новое магнитное поле *плюс* электрическое поле, направленное вниз. Если его скорость подобрана так, что полное электрическое поле окажется равным нулю, то наблю­датель будет видеть электрон, движущийся по окружности. Таким образом, движение, которое *мы* видим, будет круговым движением плюс перенос со скоростью дрейфа *vd=E/B.* Движе­ние электронов в скрещенных электрическом и магнитном полях лежит в основе магнетронов, т. е. осцилляторов, применяемых при генерации микроволнового излучения.

Есть еще немало других интересных примеров движения частиц в электрическом и магнитном полях, например орбиты электронов или протонов, захваченных в радиационных поясах в верхних слоях стратосферы, но, к сожалению, у нас не хва­тает времени, чтобы заниматься сейчас еще и этими вопросами.

*Фиг. 29.18. Путь частицы в скрещенных электрическом и маг­нитном полях.*