***Глава 30***

[**ВНУТРЕННЯЯ ГЕОМЕ****ТРИЯ КРИСТАЛЛОВ**](#прим1)

[**§ 1. Внутренняя геометрия кри****сталлов**](#а1)

[**§ 2. Химические свя****зи в кристаллах**](#а2)

[**§ 3. Рост кри****сталлов**](#а3)

[**§ 4. Кристаллич****еские решетки**](#а4)

[**§ 5. Симметрии в дв****ух** **измерениях**](#а5)

[**§ 6. Симметрии в тр****ех** **измерениях**](#а6)

[**§ 7. Прочность** **металлов**](#а7)

[**§ 8. Дислокации и** **рост кристаллов**](#а8)

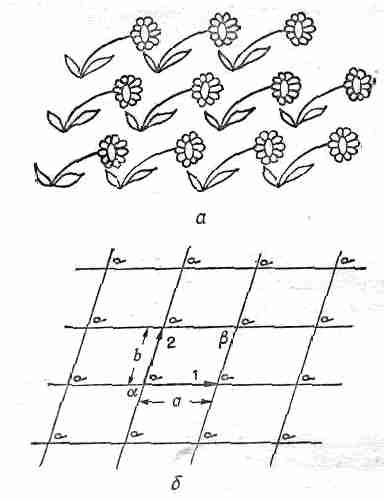
[**§ 9. Модель крист****ал****ла по Брэггу и Наю**](#а9)

**§ 1. Внутренняя геометрия кристаллов**

Мы закончили изучение основных законов электричества и магнетизма и теперь можем заняться электромагнитными свойствами ве­щества. Начнем с изучения твердых тел, точнее кристаллов. Если атомы в веществе движутся не слишком активно, они сцепляются и рас­полагаются в конфигурации с наименьшей возможной энергией. Если атомы где-то разместились так, что их расположения отве­чают самой низкой энергии, то в другом месте атомы создадут такое же расположение. По­этому в твердом веществе расположение ато­мов повторяется.

Иными словами, условия в кристалле тако­вы, что каждый атом окружен определенно расположенными другими атомами, и если посмотреть на атом такого же сорта в другом месте, где-нибудь подальше, то обнаружится, что окружение его и в новом месте точно та­кое же. Если вы выберете атом еще дальше, то еще раз найдете точно такие же условия. Порядок повторяется снова и снова и, конечно, во всех трех измерениях.

Представьте, что вам нужно создать рисунок на обоях или ткани или некий геометрический чертеж для плоской поверхности, в котором (как вы предполагаете) имеется элемент, повто­ряющийся непрерывно снова и снова, так что можно сделать эту поверхность настолько боль­шой, насколько вам захочется. Это двумерный аналог задачи, которая решается в кристалле в трех измерениях. На фиг. 30.1,а показан общий характер рисунка обоев. Один элемент повторяется регулярно, и это может продолжаться бесконечно.



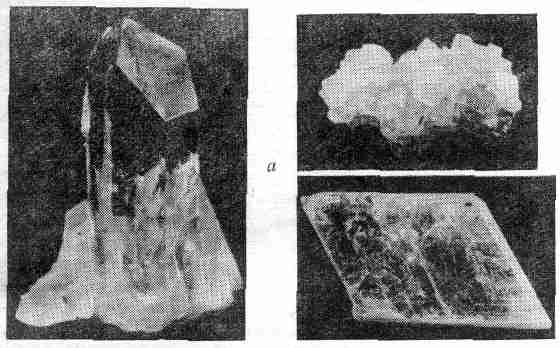
*Фиг. 30.1. Повторяющийся рисунок обоев в двух намере­ниях.*

Геометрические харак­теристики этого рисунка обоев, учитывающие толь­ко его свойства повторяе­мости и не касающиеся геометрии самого цветка или его художественных достоинств, показаны на фиг. 30.1,*б*. Если вы возьмете за отправную какую-то точку, то смо­жете найти *соответствующую* точку, сдвигаясь на расстоя­ние *а* в направлении, указанном стрелкой 1. Вы можете попасть в соответствующую точку, также сдвинувшись на рас­стояние *b* в направлении, указанном другой стрелкой. Конечно, имеется еще много других направлений. Так, вы можете из точки α отправиться в точку β и достигнуть соответствующего положения, но такой шаг можно рассматривать как комбина­цию шага в направлении 1 вслед за шагом в направлении 2. Одно из основных свойств ячейки состоит в том, что ее можно описывать двумя кратчайшими шагами к соседним эквивалент­ным расположениям. Под «эквивалентными» расположениями мы подразумеваем такие, что в каком бы из них вы ни находи­лись, поглядев вокруг себя, вы увидите точно то же самое, что и в любом другом положении. Это фундаментальное свойство кристаллов. Единственное различие в том, что кристалл имеет трехмерное, а не двумерное расположение и, естественно, каж­дый элемент решетки представляет не цветы, а какие-то образо­вания из атомов, например шести атомов водорода и двух ато­мов углерода, регулярно повторяющихся. Порядок расположе­ния атомов в кристалле можно исследовать экспериментально с помощью дифракции рентгеновских лучей. Мы кратко упоми­нали об этом методе раньше и не будем добавлять здесь к сказанному чего-либо, а отметим лишь, что точное расположе­ние атомов в пространстве установлено для большинства простых кристаллов, а также для многих довольно сложных кристаллов.

Внутреннее устройство кристалла проявляется по-раз­ному. Во-первых, связующая сила атомов в определенных нап­равлениях сильнее, чем в других направлениях. Это означает, что имеются определенные плоскости, по которым кристалл разбить легче, чем в других направлениях. Они называются *плоскостями спайности.* Если кристалл расколоть лезвием ножа, то скорее всего он расщепится именно вдоль такой пло­скости. Во-вторых, внутренняя структура часто проявляется в форме кристалла.

Представьте себе, что кристалл образуется из раствора. В растворе плавают атомы, которые в конце концов пристраи­ваются, когда находят положение, отвечающее наименьшей энергии. (Все происходит так, как если бы обои были созданы из цветов, плавающих в разных направлениях до тех пор, пока случайно один из цветков не зацепился бы накрепко за определенную точку, за ним другой и т. д., пока постепенно не образовался узор.) Вы, вероятно, догадываетесь, что в одних направлениях кристалл будет расти быстрее, чем в других, создавая по мере роста некоторую геометрическую форму. Именно поэтому внешняя поверхность многих кристаллов но­сит на себе отпечаток внутреннего расположения атомов.

В качестве примера на фиг. 30.2,*a* показана типичная форма кристалла кварца, ячейка которого гексагональна. Если вы внимательно посмотрите на этот кристалл, то обнаружите, что его внешние грани образуют не слишком хороший шестиуголь­ник, потому что не все стороны имеют одинаковую длину, а часто бывают даже совсем разными.



*Фиг.**30.2. Природный кристалл кварца* (а), *крупинки соли* (б) *и слюды (в).*

Но в одном отношении этот шестиугольник вполне правильный: *углы* между гранями составляют в точности 120°. Ясное дело, размер той или иной грани случайно складывается в процессе роста, но в *углах* проявляется геометрия внутреннего устройства. Поэтому все кристаллы кварца имеют разную форму, но в то же время углы между соответствующими гранями всегда одни и те же.

Внутреннее геометрическое устройство кристалла хлори­стого натрия также легко понять из его внешней формы.

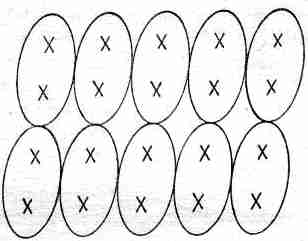
На фиг. 30.2, *б* показана типичная форма крупинки соли. Это опять не совершенный куб, но грани *действительно* перпендикулярны друг другу. Более сложный кристалл — это слюда, он имеет форму, изображенную на фиг 30.2, *в.* Этот кристалл в высшей степени анизотропен — он очень прочен в одном направлении (на рисунке — горизонтальном) и его трудно расколоть, а в другом направлении он легко расщепляется (в вертикальном). Обычно он используется для получения очень прочных, тонких листов. Слюда и кварц — примеры природных минералов, содержащих кремний. Третий минерал, содержащий кремний,— это асбест, обладающий тем интересным свойством, что его легко растянуть в двух направлениях, а в третьем он не поддается растягиванию. Создается впечатление, что он сделан из очень прочных *нитей.*

**§ 2. Химические связи в кристаллах**

Механические свойства кристаллов несомненно зависят от рода химических связей между атомами. Поражающая неоди­наковая прочность слюды по разным направлениям зависит от характера межатомной связи в этих направлениях. Вам на­верняка уже рассказывали на лекциях по химии о разных ти­пах химических связей. Прежде всего бывают ионные связи, мы уже говорили о них, когда толковали о хлористом натрии. Грубо говоря, атомы натрия теряют по одному электрону и ста­новятся положительными ионами; атомы хлора приобретают электрон и становятся отрицательными ионами. Положитель­ные и отрицательные ионы располагаются в трехмерном шах­матном порядке и удерживаются вместе электрическими си­лами.

Ковалентная связь (когда электроны принадлежат одновре­менно двум атомам) встречается чаще и обычно более прочна. Так, в алмазе атомы углерода связаны ковалентными связями с ближайшими соседями в четырех направлениях, поэтому-то кристалл такой твердый. Ковалентная связь имеется и в кри­сталле кварца между кремнием и кислородом, но там связь на самом деле только частично ковалентная. Поскольку там электроны распределяются неравномерно между двумя атомами, атомы частично заря­жены и кристалл до некоторой степени ионный. Природа не так проста, как мы пытаемся ее представить: существуют все­возможные градации между ковалентной и ионной свя­зями.

Кристалл сахара обладает другим типом связи. Он состоит из больших молекул, атомы которых сильно связаны ковалентной связью, так что молекула образует прочную структуру. Но так как сильные связи вполне насыщены, то между отдель­ными молекулами имеется относительно слабое притяжение. В таких *молекулярных* кристаллах молекулы сохраняют, так сказать, свою индивидуальность, и внутреннее устройство можно изобразить так, как на фиг. 30.3.



*Фиг. 30.3. Решетка молекуляр­ного кристалла.*

Поскольку молекулы не очень крепко держатся друг за друга, то кристалл легко можно расколоть. Такого рода кристаллы резко отличаются от кристаллов типа алмаза, который есть не что иное, как одна гигантская молекула, не поддающаяся разлому без того, чтобы не нарушить сильные ковалентные связи.

Другим примером молекулярного кристалла может служить парафин.

Предельным случаем молекулярного кристалла являются вещества типа твердого аргона. Там притяжение между ато­мами незначительно — каждый атом представляет собой вполне насыщенную одноатомную «молекулу». Но при очень низких температурах тепловое движение настолько слабо, что кро­шечные межатомные силы могут заставить атомы расположить­ся в правильном порядке, подобно картофелинам, тесно наби­тым в кастрюле.

Металлы образуют совсем особый класс веществ. Там связь имеет совершенно другой характер. В металле связь возникает не между соседними атомами, а является свойством всего кри­сталла. Валентные электроны принадлежат не одному-двум атомам, а всему кристаллу в целом. Каждый атом вкладывает свой электрон в общий запас электронов, и положительные атомные ионы как бы плавают в океане отрицательных электронов. Электронный океан, подобно клею, удерживает ионы вместе.

Поскольку в металлах нет особых связей в каком-то опре­деленном направлении, то там связь слабо зависит от направ­ления. Однако металлы — это еще кристаллические тела, по­тому что полная энергия принимает наименьшее значение, когда ионы образуют упорядоченную систему, хотя энергия наиболее выгодного расположения обычно ненамного ниже других возможных расположений. В первом приближении атомы многих металлов подобны маленьким шарикам, упако­ванным с максимальной плотностью.

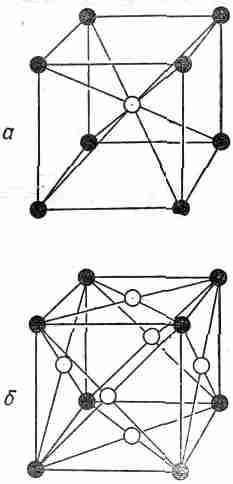
**§ 3. Рост кристаллов**

Попробуйте представить себе образование кристаллов на Земле в естественных условиях. В поверхностном слое Земли все сорта атомов перемешаны между собой. Вулканическая дея­тельность, ветер и вода постоянно их смешивают, и они то и дело взбалтываются и перемешиваются. Но, несмотря на это, каким-то чудом атомы кремния постепенно начинают отыскивать друг друга, а потом и атомы кислорода, чтобы образовать вместе кремнезем. К одним атомам поодиночке пристраиваются дру­гие, образуя кристалл, и смесь разделяется. А где-нибудь по со­седству атомы хлора и натрия находят друг друга и строят кристалл соли.

Как же получается, что кристалл, начав строиться, позво­ляет присоединяться к себе только определенному сорту ато­мов? Так происходит потому, что вся система в целом стремится к наименьшему возможному значению энергии. Растущий кри­сталл примет новый атом, если благодаря ему энергия станет наименьшей. Но откуда кристалл *знает,* что атом кремния (или кислорода), будучи поставлен в данное место, приведет к наи­меньшему значению энергии? Узнаёт он это методом проб и ошибок. В жидкости все атомы находятся в непрестанном дви­жении. Каждый атом ударяется о соседние примерно 1013 раз в секунду. Если он ударяется о подходящее место в растущем кристалле, вероятность того, что он улетит обратно, будет несколько меньше там, где меньше энергия. Продолжая так пробовать миллионы лет, с частотой 1013 проб в секунду, атомы постепенно оседают на тех местах, где находят для себя поло­жение с наименьшей энергией. В конце концов из них выра­стают большие кристаллы.

**§ 4. Кристаллические решетки**

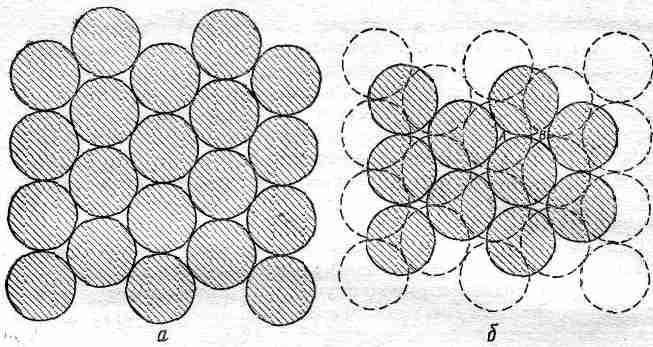
Расположение атомов в кристалле — кристаллическая *ре­шетка —* может принимать множество геометрических форм. Мы опишем сначала простейшие решетки, характерные для большинства металлов и инертных газов в твердом состоянии. Это кубические решетки, которые могут быть двух видов: объемноцентрированная кубическая (фиг. 30.4, *а)* и гранецентрированная кубическая (фиг. 30.4, *б).*



*Фиг. 30.4. Элементарная ячейка кубического кристалла, а — объемноцентрированная; б — гранецентрированная.*

Конечно, на рисунках показан только один «куб» решетки; вы должны мысленно пред­ставить, что все это повторяется в трех измерениях до беско­нечности. Для простоты на рисунке показаны только «центры» атомов. В настоящих кристаллах атомы скорее похожи на сопри­касающиеся друг с другом шарики. Темные и светлые шарики на приведенных рисунках могут, вообще говоря, означать либо разные, либо одинаковые сорта атомов. Так, железо имеет объемноцентрированную кубическую решетку при низких тем­пературах и гранецентрированную кубическую решетку при более высоких температурах. Физические свойства этих двух кристаллических форм совершенно различны.

Но как возникают такие формы? Представьте, что вы дол­жны как можно плотнее упаковать атомы — шарики. Можно было бы начать со слоя, где шарики уложены в «гексагональной плотной упаковке», как показано на фиг. 30.5, *а.*



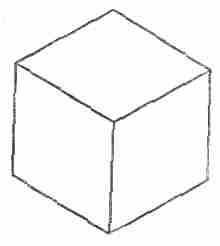
*Фиг. 30.5. Устройство гексагональной решетки с плотной упаковкой.*

Затем можно построить второй слой наподобие первого, но сместив его в го­ризонтальном направлении, как показано на фиг. 30.5, б. А потом можно наложить и третий слой. Вот тут — внимание! *Третий* слой можно наложить *двумя* разными способами. Если вы начнете класть третий слой, помещая атом в точку *А* на фиг. 30.5, *б,* то каждый атом в третьем слое окажется прямо над атомом первого нижнего слоя. Если же начать класть третий слой, поме­щая атом в точку *В,* то атомы треть­его слоя будут расположены как раз над центрами треугольников, обра­зованных тремя атомами нижнего слоя. Любая другая начальная точка эквивалентна *А* или *В,* так что су­ществует только два способа разме­щения третьего слоя.

Если третий слой имеет атом в точке *В,* кристаллическая решетка будет гранецентрированной кубической, но видно это под некоторым углом. Забавно, что, начав с шестиугольни­ков, можно прийти к кубической структуре. Но обратите вни­мание, что куб, рассматриваемый под определенным углом, имеет очертания шестиугольника. Например, фиг. 30.6 может изображать либо плоский шестиугольник, либо и куб в пер­спективе!

Если к фиг. 30.5, *б* добавляется третий слой, начиная с ато­ма в точке *А,* то кубической структуры не возникает и у ре­шетки будет только гексагональная симметрия. Ясно, что обе опи­санные нами возможности дают одинаковую плотную упаковку.

Некоторые металлы (например, серебро и медь) выбирают первую альтернативу — решетка у них гранецентрированная кубическая. Другие же (например, бериллий и магний) пред­почитают вторую возможность и образуют гексагональные кристаллы. Очевидно, появление той или иной решетки не может зависеть только от способа упаков­ки маленьких шариков, но должно еще определяться и другими факторами. В частности, оказывается существенной небольшая угловая зависимость межатомных сил (или в случае металлов от энергии электронного океана).

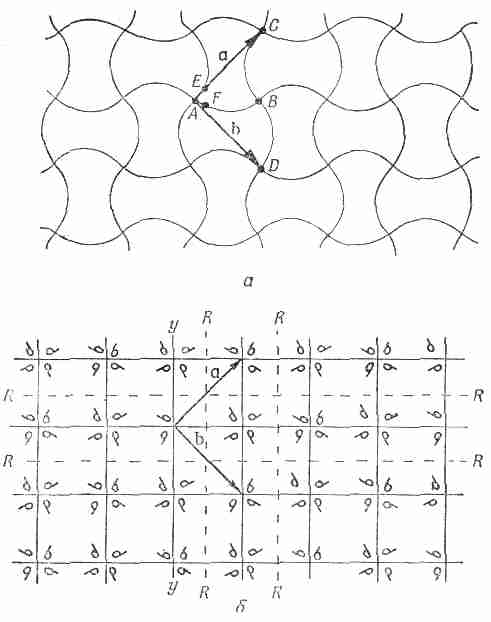


*Фиг. 30.6. Что это* — *шестиугольник или куб?*

Все эти вещи вы несомненно узнаете из курса химии.

**§ 5. Симметрии в двух измерениях**

Теперь мне хотелось бы обсудить некоторые свойства кри­сталлов с точки зрения их внутренних симметрии. Основное свойство кристалла состоит в том, что если вы сдвинетесь от одного атома на один период решетки к соответствующему ато­му, то попадете в точно такое же окружение. Это фундамен­тальное утверждение. Но если бы вы сами были атомом, то могли бы заметить другое передвижение, которое привело бы вас в точно такое же окружение, т. е. в другую возможную «симмет­рию». На фиг. 30.7, *а* показан еще один возможный узор обоев (хотя вы, наверно, такого никогда не видали).



*Фиг. 30.7. Узор обоев с высокой симметрией.*

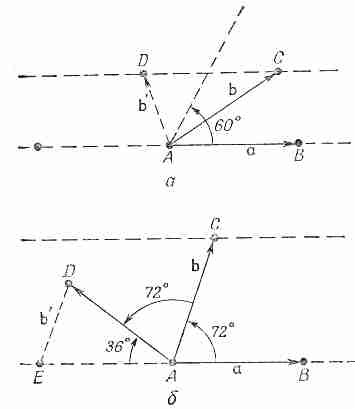
Предположим, что мы сравниваем окру­жения в точках *А* и *В.* Вы могли бы сперва подумать, что они одинаковы. Не совсем. Точки *С* и *D* экви­валентны *А,* но окружение *В* подобно *А,* только если все рядом обращать как будто в зеркале.

В этом узоре имеются еще и другие виды «эквивалентных» точек. Так, точки *Е* и *F* обладают «одинаковыми» окружениями, за тем исключением, что одно повернуто на 90° по отношению к другому. Узор особенный. Вращение на 90°, проделанное сколько угодно раз вокруг такой вершины, как A, снова дает тот же узор. Кристалл с такой структурой имел бы на поверхнос­ти прямые углы, но внутри он устроен сложнее, чем простой куб.

Теперь, когда мы описали ряд частных случаев, попытаемся вывести все возможные типы симметрии, какие может иметь кристалл. Прежде всего посмотрим, что получается в плоскости. *Плоская* решетка может быть определена с помощью двух так называемых *основных* векторов, которые идут от одной точки решетки к двум *ближайшим* эквивалентным точкам. Два вектора 1 и 2 суть основные векторы решетки на фиг. 30.1. Два век­тора а и b на фиг. 30.7, *а —* основные векторы для изображен­ного там узора. Мы могли бы, конечно, с тем же успехом заме­нить а на -а или **b** на -**b**. Раз **а** и **b** одинаковы по величине и перпендикулярны друг другу, то вращение на 90° переводит а в b и b в а и снова дает ту же решетку.

Итак, мы видим, что существуют решетки, обладающие «четырехсторонней» симметрией. А раньше мы описали плотную упаковку, основанную на шестиугольнике и обладающую шестисторонней симметрией. Вращение набора кружков на фиг. 30.5, а на угол 60° вокруг центра любого шарика пере­водит рисунок сам в себя.

Какие виды вращательной симметрии существуют еще? Может ли быть, например, вращательная симметрия пятого или восьмого порядка? Легко понять, *что* они невозможны. *Единственная симметрия, связанная с фигурой, имеющей более четырех сторон, есть симметрия шестого порядка.* Прежде всего покажем, что симметрия более чем шестого порядка невозмож­на. Попытаемся вообразить решетку с двумя равными основ­ными векторами, образующими угол менее 60° (фиг. 30.8, а).



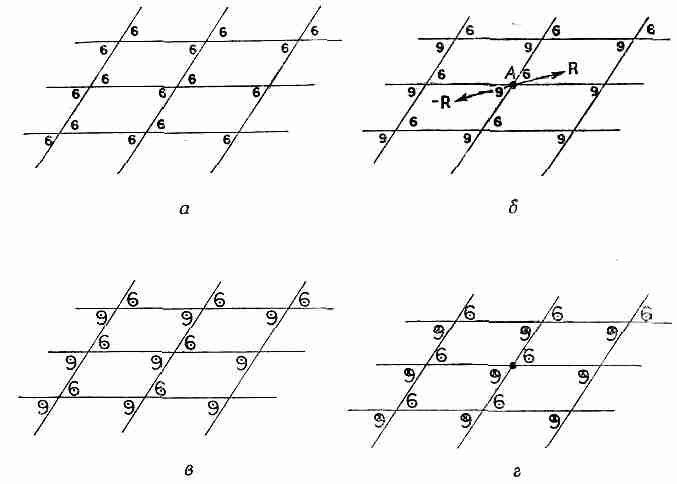
*Фиг. 30.8. Симметрия вра­щения выше шестого порядка невозможна (а); симметрия вращения пятого порядка невозможна (б).*

Мы должны предположить, что точки *В* и *С* эквивалентны *А* и что **а** и **b** — *наиболее короткие* векторы, проведенные из *А* до эквивалентных соседей. Но это, безусловно, неверно, потому что расстояние между *В и С* короче, чем от любого из них до *А.* Должна существовать соседняя точка *D,* эквивалентная *А,* ко­торая ближе к *А,* чем к *В* или *С.* Мы должны были бы выбрать b' в качестве одного из основных векторов. Поэтому угол между основными векторами должен быть равен 60° или еще больше. Октагональная симметрия невозможна.

А как быть с пятикратной симметрией? Если мы предполо­жим, что основные векторы **а** и **b** имеют одинаковую длину и образуют угол 2π/5=72° (фиг. 30.8, *б),* то должна существовать эквивалентная точка решетки в *D* под 72° к линии *АС.* Но век­тор **b**' от *Е* к *D* тогда короче **b**, и **b** уже не основной вектор. Пятикратной симметрии быть не может. Единственные воз­можности, не приводящие к подобным трудностям, это θ=60, 90 или 120°. Очевидно, допустимы также нуль и 180°. Можно еще так выразить полученный нами результат: рисунок может не меняться при повороте на полный оборот (ничего не изме­няется), полоборота, одну треть, одну четверть или одну ше­стую оборота. И этим исчерпываются все возможные вращатель­ные симметрии на плоскости — всего их пять. Если 8=2π/n, то мы говорим об «n-кратной» симметрии, или симметрии n-го порядка. Мы говорим, что узор, для которого nравно 4 или 6, обладает более «высокой симметрией», чем узор с n*,* равным 1 или 2.

Вернемся к фиг. 30.7, *а.* Мы видим, что узор там обладает четырехкратной вращательной симметрией. На фиг. 30.7, *б* мы нарисовали другое расположение, которое обладает теми же свойствами симметрии, что и фиг. 30.7, *а.* Маленькие фигурки, похожие на запятые,— это асимметричные объекты, которые служат для определения симметрии изображения внутри каж­дого квадратика. Заметьте, что запятые в соседних квадратиках перевернуты попеременно, так что элементарная ячейка боль­ше одного квадратика. Если бы запятых не было, рисунок по-прежнему обладал бы четырехкратной симметрией, но эле­ментарная ячейка была бы меньше. Посмотрим внимательно на фиг. 30.7; мы обнаружим, что они обладают еще и другими типами симметрии. Так, отражение относительно каждой пунк­тирной линии *R—R* воспроизводит рисунок без изменений. Но это еще не все. У них есть еще один тип симметрии. Если отразить рисунок относительно линии y*—y*, а затем сдвинуть на один квадратик вправо (или влево), то снова получится пер­воначальный рисунок. Линия *у—у* называется линией *сколь­жения.*

Этим исчерпываются все типы симметрии в пространстве двух измерений. Есть еще одна пространственная операция сим­метрии, которая на *плоскости* эквивалентна вращению на 180°, однако в трехмерном пространстве она не сводится к этому вра­щению, а есть совсем другая операция. Я говорю об *инверсии.* Под инверсией мы подразумеваем такую операцию, когда лю­бая точка, отвечающая вектору смещения из начала координат **R** (например, точка *А* на фиг. 30.9, *б),* переносится в точку —**R**.



*Фиг. 30.9. Операция симметрии, называемая инверсией.*

*а — рисунок меняется; б — рисунок не меняется при преобразовании* ***R*** *→ -****R****;*

*в — в трех измерениях рисунок не симметричен после операции инверсии;*

*г — рисунок симметричен в трех измерениях.*

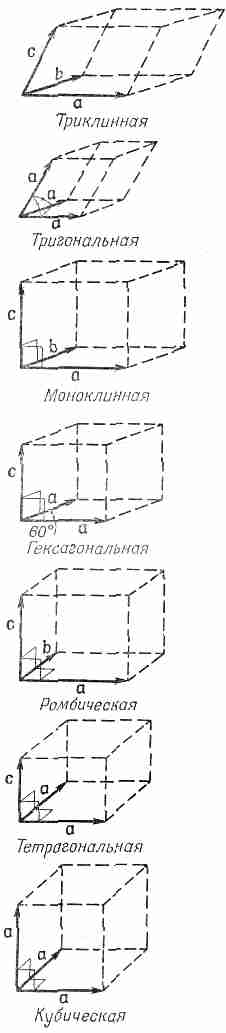
Инверсия рисунка *а* на фиг. 30.9 дает новый рисунок, а инверсия рисунка *б* приводит к такому же рисунку. На дву­мерном узоре (вы можете это видеть) инверсия рисунка *б* в точ­ке *А* эквивалентна повороту на 180° вокруг той же самой точки. Предположим, однако, что мы сделали узор на фиг. 30.9, *б* трехмерным, вообразив на маленьких шестерках и девятках «стрелочки», *смотрящие из страницы кверху.* В результате ин­версии в трехмерном пространстве все стрелочки перевернутся и направятся вниз, так что узор *не* воспроизведется. Если мы обозначим острия и хвосты стрелок точками и крестиками, то сможем образовать *трехмерный* рисунок (фиг. 30.9, в), который *несимметричен* относительно инверсии, или же мы можем получить рисунок, который такой симметрией *обладает* (фиг. 30.9, *г).* Заметьте, что трехмерную инверсию *нельзя* получить никакой комбинацией вращений.

Если мы будем характеризовать «симметрию» рисунка (или решетки) разного рода операциями симметрии, которые мы только что описали, то окажется, что в двумерном случае сущест­вуют 17 различных форм узоров. Узор с наинизшей возможной симметрией мы изобразили на фиг. 30.1, а узор с одной из наи­высших симметрии — на фиг. 30.7. Отыщите сами все 17 возможных форм рисунков.

Удивительно, как мало типов из этих 17 используется при изготовлении обоев и тканей! Всегда видишь одни и те же три или четыре основных типа. В чем здесь дело? Неужели так убо­га фантазия художников или, может быть, многие из возмож­ных типов рисунков не будут радовать глаз?

**§ 6. Симметрии в трех измерениях**

До сих пор мы говорили только об узорах в двух измерениях. На самом же деле нас интересуют способы размещения атомов в трех измерениях. Прежде всего очевидно, что трехмерный кристалл имеет *три* основных вектора. Если же мы поинтересу­емся возможными операциями симметрии в трех измерениях, то обнаружим, что существует 230 возможных типов симметрии! По некоторым соображениям, эти 230 типов можно разделить на семь классов, представленных на фиг. 30.10.



*Фиг. 30.10. Семь классов кристаллической решетки.*

Решетка с наи­меньшей симметрией называется *триклинной.* Ее элементар­ная ячейка представляет собой параллелепипед. Основные век­торы все имеют разную длину и нет ни одной одинаковой пары углов между ними. И никакой вращательной или зеркальной симметрии здесь нет. Однако есть еще одна операция: при ин­версии в узле элементарная ячейка может меняться, а может и не меняться. [Под инверсией в трех измерениях мы снова подра­зумеваем, что пространственное смещение **R** заменяется на -**R**, или, другими словами, точка с координатами *(х, у, z)* переходит в точку с координатами (-x*,-y*, -*z).* Поэтому симметрия триклинной решетки может быть только двух типов — с центром инверсии и без него.] Пока мы считали, что все векторы разные и расположены под произвольными углами. Если же все век­торы одинаковы и углы между ними равны, то получается *тригональная* решетка, изображенная на рисунке. Ячейка такой решетки может иметь добавочную симметрию; она может еще и не меняться при вращении вокруг наибольшей телесной диагонали.

Если один из основных векторов, скажем с, направлен под прямым уг­лом к двум остальным, то мы получаем *моноклинную* элементарную ячейку. Здесь возможна новая симметрия — вращение на 180° вокруг с. *Гексагональ­ная* решетка — это частный случай, когда векторы **а** и **b** равны и угол меж­ду ними составляет 60°, так что вра­щение на 60, 120 или 180° вокруг вектора с приводит к той же самой решетке (для определенных внутренних типов симметрии).

Если все три основных вектора пер­пендикулярны друг другу, но не равны по длине, получается *ромбическая* ячей­ка. Фигура симметрична относительно вращений на 180° вокруг трех осей. Типы симметрии более высокого поряд­ка возникают у *тетрагональной* ячей­ки, все углы которой прямые и два основных вектора равны. Наконец, имеется еще *кубическая* ячейка, самая симметричная из всех.

Основной смысл всего этого разго­вора о типах симметрии состоит в том, что внутренняя симметрия кристалла проявляется (иногда весьма тонким образом) в макроскопических физичес­ких свойствах кристалла. В гл. 31 мы увидим, например, что электрическая поляризуемость кристалла, вообще го­воря, представляет собой тензор. Если описывать тензор в терминах эллипсои­да поляризуемости, то мы должны дока­зать, что некоторые типы симметрии кристалла проявятся в этом эллипсоиде. Так, кубический кристалл симметричен по отношению к вращению на 90° вокруг любого из трех взаим­но перпендикулярных направлений. Единственный эллипсоид с таким свойством,—очевидно, сфера. *Кубический кристалл должен быть изотропным диэлектриком.*

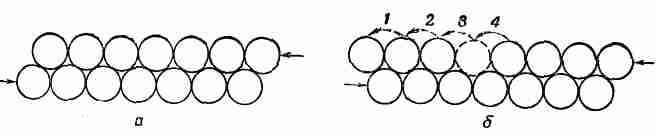
С другой стороны, тетрагональный кристалл обладает вра­щательной симметрией четвертого порядка. Две главные оси его эллипсоида должны быть равны, а третья должна быть па­раллельна оси кристалла. Аналогично, поскольку ромбический кристалл обладает вращательной симметрией второго порядка относительно трех перпендикулярных осей, его оси должны совпадать с осями эллипсоида поляризуемости. Точно так же *одна* из осей моноклинного кристалла должна быть параллельна *одной* из главных осей эллипсоида, хотя о других осях мы ни­чего сказать не можем. Триклинный кристалл не обладает вра­щательной симметрией, поэтому его эллипсоид может иметь любую ориентацию.

Как видите, мы можем с пользой провести время, придумы­вая всевозможные типы симметрии и связывая их со всевозмож­ными физическими тензорами. Мы рассмотрели только тензор поляризуемости, здесь дело было простое, а для других тен­зоров, например для тензора упругости, рассуждать будет труднее. Существует раздел математики, называемый «теорией групп», который занимается такими вещами, но обычно можно сообразить все, что нужно, опираясь лишь на здравый смысл.

**§ 7. Прочность металлов**

Мы говорили, что металлы обычно имеют простую кубиче­скую кристаллическую структуру; сейчас мы обсудим их меха­нические свойства, которые зависят от этой структуры. Вообще говоря, металлы очень «мягкие», потому что один слой кристал­ла легко заставить скользить над другим. Вы, наверное, поду­маете: «Ну, это дико — металлы ведь твердые». Нет, *монокри­сталл* металла легко деформируется.

Рассмотрим два слоя кристалла, подвергающихся действию силы сдвига (фиг. 30.11, а).



*Фиг. 30.11. Сдвиг плоскостей кристалла.*

Вероятно, вы сперва решите, что весь слой будет сопротивляться сдвигу, пока сила не станет до­статочно велика, чтобы сдвинуть весь слой «над горбами» на одно место влево. Хотя скольжение по некоторой плоскости возможно, все происходит совсем не так. (Иначе, согласно вы­числениям, получилось бы, что металл гораздо прочнее, чем он есть на самом деле.) В действительности же дело больше по­ходит на то, что атомы перескакивают поочередно: сначала прыгает первый атом слева, затем следующий и т. д., как по­казано на фиг. 30.11, *б.* В результате пустое место между дву­мя атомами быстро путешествует направо и весь второй ряд сдвигается на одно межатомное расстояние. Скольжение происходит таким образом, что на перекатывание атома через горб поодиночке требуется гораздо меньше энергии, чем на подня­тие всего ряда в целом. Как только сила возрастет до значения, достаточного для начала процесса, весь процесс протекает очень быстро.

Оказывается, что в реальном кристалле скольжение возни­кает поочередно: сначала в одной плоскости, затем заканчи­вается там и начинается в другом месте. Почему оно начинается и почему заканчивается — совершенно непонятно. В самом деле, очень странно, что последовательные области скольжения ча­сто расположены довольно редко. На фиг. 30.12 представлена фотография очень маленького и тонкого кристалла меди, кото­рый был растянут.



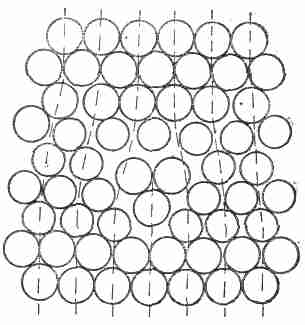
*Фиг. 30.12. Маленький кристалл меди после растяжения.*

Вы можете заметить разные плоскости, в ко­торых возникало скольжение.

Неожиданное соскальзывание отдельных кристаллических плоскостей легко заметить, если взять кусок оловянной проволоки, в которой содержатся большие крис­таллы, и растягивать ее, держа близко к уху. Вы ясно различите звуки «тик-тик», когда плос­кости защелкиваются в новых положениях, одна за другой.

Проблема «нехватки» атома в одном из ря­дов сложнее, чем может показаться при рассма­тривании фиг. 30.11.

Когда слоев больше, си­туация скорее походит на то, что изображено на фиг. 30.13.

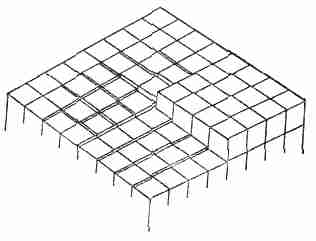


*Фиг. 30.13. Дислокация в кристалле.*

Подобный дефект в кристалле называют *дислокацией.* Считается, что такие дислокации возникают при образовании кри­сталла или же в результате царапины или трещины на его поверхности. Раз возникнув, они довольно свободно могут проходить сквозь кристалл. Большие на­рушения возникают из-за движения множества таких дислокаций.

Дислокации могут свободно передвигаться. Это значит, что для них требуется немного дополнительной энергии, если только весь остальной кристалл имеет совершенную решетку. Но они могут и «застыть», встретив какой-нибудь другой дефект в кристалле. Если для прохождения дефекта требуется много энергии, они остановятся. Это и есть тот механизм, который сообщает прочность *несовершенным* кристаллам металла. Кри­сталлы чистого железа совсем мягкие, но небольшая концент­рация атомов примесей может вызвать достаточное количество дефектов, чтобы противостоять дислокациям. Как вы знаете, сталь, состоящая в основном из железа, очень тверда. Чтобы получить сталь, при плавке к железу примешивают немного углерода; при быстром охлаждении расплавленной массы угле­род выделяется в виде маленьких зерен, образуя в решетке множество микроскопических нарушений. Дислокации уже не могут свободно передвигаться, и металл становится твердым.

Чистая медь очень мягкая, но ее можно «закалить» накле­пом. Это делается отбиванием или сгибанием ее в одну и другую стороны. В таком случае образуется много различных дисло­каций, которые взаимодействуют между собой и ограничивают подвижность друг друга. Быть может, вы видели фокус, когда берут кусочек «мягкой» меди и легко обвивают чье-нибудь запястье в виде браслета. В тот же момент медь становится закаленной и разогнуть ее становится очень трудно! «Закаленный» металл типа меди можно снова сделать мягким с помощью от­жига при высокой температуре. Тепловое движение атомов «размораживает» дислокации и вновь создает отдельные боль­шие кристаллы. О дислокациях можно рассказывать очень много. Так, до сих пор мы описывали только так называемые «дислокации скольжения» (краевые дислокации). Существует еще множество других видов, в частности *винтовая* дислокация, изображенная на фиг. 30.14.

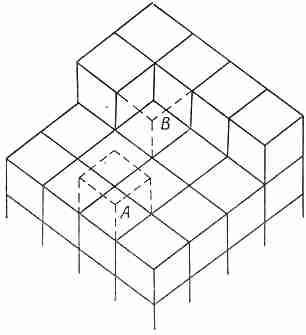


*Фиг. 30.14. Винтовая дислокация.*

Такие дислокации часто играют важную роль в росте кристаллов.

**§ 8. Дислокации** **и рост кристаллов**

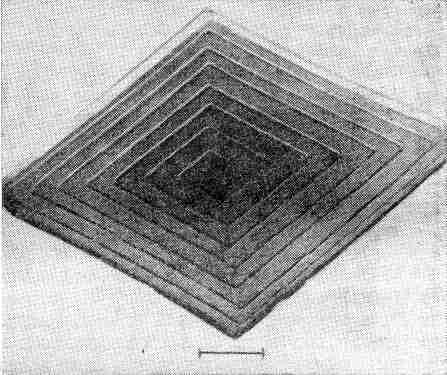
Одну из величайших загадок природы долгое время пред­ставлял процесс роста кристаллов. Мы уже описывали, как атом, многократно примериваясь, может определить, где ему лучше — в кристалле или снаружи. Но отсюда следует, что каждый атом должен найти положение с наименьшей энергией. Однако атом, попавший на новую поверхность, связан только одной-двумя связями с нижними атомами, и его энергия при этом не равна энергии того атома, который попал в угол, где он окружен атомами с трех сторон. Вообразим растущий кри­сталл как набор из кубиков (фиг. 30.15).



*Фиг. 30.15. Схематическое представление роста кристалла.*

Если мы поставим новый кубик, скажем, в положение *А,* он будет иметь только одного из тех шести соседей, какими он в конце концов будет окружен. А раз не хватает стольких связей, то и энергия его не будет очень низкой. Более выгодно положение *В,* где кри­сталл уже имеет половину своей доли связей. И действительно, кристаллы растут, присоединяя новые атомы к участкам типа *В.*

Но что произойдет, когда данный ряд завершится? Чтобы начать новый ряд, атом должен осесть, имея связь с двух сторон, а это опять же маловероятно. Даже если он осядет, что прои­зойдет, когда весь слой будет завершен? Как мог бы начаться новый слой? Один из возможных ответов — кристалл предпочи­тает расти по дислокации, например по винтовой дислокации, вроде той, что показана на фиг. 30.14. По мере прибавления кубиков к этому кристаллу всегда остается место, где можно получить три связи. Следовательно, кристалл предпочитает расти с встроенной внутрь дислокацией. Иллюстрацию такого спирального роста представляет собой фотография монокри­сталла парафина (фиг. 30.16).



*Фиг. 30.16. Кристалл парафина, выросший вокруг винтовой дислокации.*

**§ 9. Модель кристалла по Брэггу и Наю**

Мы, разумеется, не можем увидеть, что происходит с отдель­ными атомами в кристалле. Как вы теперь понимаете, существует еще множество сложных явлений, которые трудно описать ко­личественно. Лоуренс Брэгг и Дж. Най придумали модель ме­таллического кристалла, которая удивительным образом моде­лирует множество явлений, возникающих, по-видимому, в реаль­ном металле. Лучше всего прочесть эту работу самим; в ней описан и сам метод, и полученные с его помощью результаты [статья была напечатана в [Proceedings of the Royal Society](#прим2) of London, 190, 474 (1947)] .

***\* В сокращенном виде она помещена в*** [***конце*** ***этого выпуска***](file:///D:\_МАГИСТРАТУРА\_На%20отпарвку%20на%20flibusta.net\ПРИЛОЖЕНИЕ.doc)***, — Прим. ред.***

***\* Литература: Ch. Кittel, Introduction to Solid State Physics, 2nd ed., New York, 1956. (Имеется перевод: Ч.Киттель, Введение в физику твердого тела, Физматгиз, М., 1962.)***

***Глава 31***

**ТЕНЗОРЫ**

[**§1. Тензор поляр****изуем****ости**](#а1)

[**§2. Преобр****азов****ание компонент тензора**](#а2)

[**§3. Эллипс****оид эн****ергии**](#а3)

[**§4.Другие те****нзор****ы; тензор инерции**](#а4)

[**§5. Векторн****о****е произведение**](#а5)

[**§6. Тензор** **на****пряжений**](#а6)

[**§7. Тензоры в****ысш****их рангов**](#а7)

[**§8. Четырехме****рный тен****зор электро­магнитного импульса**](#а8)

*Повторить:* гл. 11 (вып. 1)

«Векторы»; гл. 20 (вып. 2)

«Вращение в пространстве»

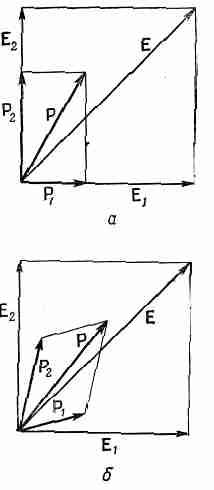
**§ 1. Тензор поляризуемости**

У физиков есть привычка брать простейший пример какого-то явления и называть его «фи­зикой», а примеры посложнее отдавать на рас­терзание других наук, скажем прикладной ма­тематики, электротехники, химии или кристал­лографии. Даже физика твердого тела для них только «полуфизика», ибо ее волнует слишком много специальных вопросов. По этой-то при­чине мы в наших лекциях откажемся от множе­ства интересных вещей. Например, одно из важнейших свойств кристаллов и вообще боль­шинства веществ — это то, что их электрическая поляризуемость различна в разных направле­ниях. Если вы в каком-либо направлении приложите электрическое поле, то атомные заряды слегка сдвинутся и возникнет дипольный момент; величина же этого момента зави­сит очень сильно от направления приложенного поля. А это, конечно, усложнение. Чтобы об­легчить себе жизнь, физики начинают разговор со специального случая, когда поляризуемость во всех направлениях одинакова. А другие случаи мы предоставляем другим наукам. По­этому для наших дальнейших рассмотрении нам совсем не понадобится то, о чем мы соби­раемся говорить в этой главе.

Математика тензоров особенно полезна для описания свойств веществ, которые изменяются с направлением, хотя это лишь один из приме­ров ее использования. Поскольку большин­ство из вас не собираются стать физиками, а намерены заниматься *реальным* миром, где зависимость от направления весьма сильная, то рано или поздно, но вам понадобится исполь­зовать тензор. Вот, чтобы у вас не было здесь пробела, я и собираюсь рассказать вам про тензоры, хотя и не очень подробно. Я хочу, чтобы ваше понимание физики было как можно более полным. Электродинамика, например, у нас вполне законченный курс; она столь же полна, как и любой курс электричества и магнетизма, даже институтский. А вот механика у нас не закончена, ибо, когда мы ее изучали, вы еще не были столь тверды в математике и мы не могли обсуждать такие разделы, как принцип наименьшего действия, лагран­жианы, гамильтонианы и т. п., которые представляют *наиболее элегантный способ* описания механики. Однако полный свод *законов* механики, за исключением теории относительности, у нас все же есть. В той же степени, как электричество и магне­тизм, у нас закончены многие разделы. Но вот квантовую ме­ханику мы так и не закончим; впрочем, нужно что-то оставить и на будущее! И все же, что такое тензор, вам все-таки следует знать уже сейчас.

В гл. 30 мы подчеркивали, что свойства кристаллического вещества в разных направлениях различны — мы говорим, что оно *анизотропно.* Изменение индуцированного дипольного мо­мента с изменением направления приложенного электрического поля — это только один пример, но именно его мы и возьмем в качестве примера тензора. Будем считать, что для заданного направления электрического поля индуцированный дипольный момент единицы объема **Р** пропорционален напряженности при­кладываемого поля Е. (Для многих веществ при не слишком больших **Е** это очень хорошее приближение.) Пусть [константа пропорциональности будет α](#прим1). Теперь мы хотим рассмотреть вещества, у которых а зависит от направления приложенного поля, например известный вам кристалл турмалина, дающий удвоенное изображение, когда вы смотрите через него.

Предположим, мы обнаружили, что для некоторого выбран­ного кристалла электрическое поле **Е1**; направленное по оси *х,* дает поляризацию **Р1**, направленную по той же оси, а *одина­ковое с ним по величине* электрическое поле **Е2**, направленное по оси *у,* приводит к какой-то другой поляризации **Р2,** тоже нап­равленной по оси *у.* А что получится, если электрическое поле приложить под углом 45°? Ну, поскольку оно будет просто суперпозицией двух полей, направленных вдоль осей *х* и y, то поляризация **Р** равна сумме векторов **P1** и **Р2**, как это пока­зано на фиг. 31.1, *а.*



*Фиг. 31.1. Сложение векторов поляризации в анизотропном кристалле.*

Поляризация уже не параллельна направ­лению электрического поля. Нетрудно понять, отчего так про­исходит. В кристалле есть заряды, которые легко сдвинуть вверх и вниз, но которые очень туго сдвигаются в стороны. Если же сила приложена под углом 45°, то эти заря­ды более охотно движутся вверх, чем в сторону. В результате такой асимметрии внутренних упругих сил перемещение идет не по направлению внешней силы. Разумеется, угол 45° ничем не выде­лен. То, что индуцированная поляри­зация *не* направлена по электрическо­му полю, справедливо и *в общем случае.* Перед этим нам просто «посчастливи­лось» выбрать такие оси *х* и *у,* для которых поляризация **Р** была направлена по полю Е. Если бы кристалл был повернут по отношению к осям координат, то электрическое поле **Е**2, направленное по оси y, вызвало бы поляризацию как по оси *у,* так и по оси *х.* Подобным же образом поляризация **Р**, вызван­ная полем, направленным вдоль оси *х,* тоже имела бы как *х-,* так и y-компоненты. Так что вместо фиг. 31.1, *а* мы получили бы нечто похожее на фиг. 31.1,6. Но несмотря на все это ус­ложнение, *величина* поляризации **Р** для любого поля **Е** по-преж­нему пропорциональна его величине.

Рассмотрим теперь общий случай произвольной ориентации кристалла по отношению к осям координат. Электрическое поле, направленное по оси *х,* дает поляризацию **Р** с компонентами по всем трем осям, поэтому мы можем написать

*Рx =αxxEx, Ру=αухЕх, Рz=αzxЕx.* (31.1)

Этим я хочу сказать лишь, что электрическое поле, направ­ленное по оси *х,* создает поляризацию не только в этом нап­равлении, оно приводит к трем компонентам поляризации *Рх, Рy* и *Pz,* каждая из которых пропорциональна *Ех.* Коэффициен­ты пропорциональности мы назвали α*хх, αух* и αzx (первый зна­чок говорит, о какой компоненте идет речь, а второй относится к направлению электрического поля).

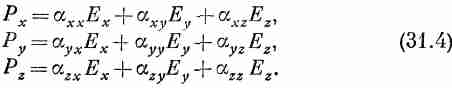
Аналогично, для поля, направленного по оси *у,* мы можем написать

*Рх=αхуЕy, Ру=αууЕу, Рz=αгуЕу,* (31.2)

а для поля в z-направлении

Px=*α*xzEz, *Py=αyzEz Pz=αzzEz.* (31,3)

Дальше мы говорим, что поляризация линейно зависит от поля; поэтому если у нас есть электрическое поле **Е** с компонентами *х* и *у,* то x-компонента поляризации **Р** будет суммой двух *Рх,* определенных уравнениями (31.1) и (31.2), ну а если **Е** имеет составляющие по всем трем направлениям *х, у* и z, то состав­ляющие поляризации **Р** должны быть суммой соответствующих слагаемых в уравнениях (31.1), (31.2) и (31.3). Другими словами, Р записывается в виде



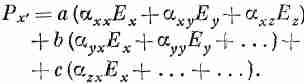
Диэлектрические свойства кристалла, таким образом, пол­ностью описываются девятью величинами *(αxx,, αxy,,αxz,αyz , ...*), которые можно записать в виде символа *α*ij. (Индексы *i* и j заменяют одну из трех букв: *х, у* или z.) Произвольное электри­ческое поле **Е** можно разложить на составляющие *Еx, Еy* и *Еz.* Зная их, можно воспользоваться коэффициентами *αij* и найти *Рх, Рy и Pz,* которые в совокупности дают полную поляризацию Р. Набор девяти коэффициентов *aij* называется *тензором —* в данном примере *тензором* [*поляризуе**мости*](#прим2)*.* Точно так же как три величины *(Ех, Еу, Еz)* «образуют вектор **Е**», и мы говорим, что девять величин (*αхх, αху, ...*)«образуют тензор *α*ij».

**§ 2. Преобразование компонент тензора**

Вы знаете, что при замене старых осей координат новыми *х', у'* и z' компоненты вектора *Ех', Еу', Ег'* тоже оказываются другими. То же самое происходит и с *компонентами* **Р**, так что для разных систем координат коэффициенты *αij* оказываются различными. Однако вполне можно выяснить, как должны изме­няться а при надлежащем изменении компонент **Е** и **Р**, ибо, если мы описываем *то же самое* электрическое поле, но в но­вой системе координат, мы должны получить ту же самую по­ляризацию Р. Для любой новой системы координат Px' будет линейной комбинацией *Рх, Рy' ,* и Рz':

*Рx’=аРх+bРу+сРz,*

и аналогично для других компонент. Если вместо *Рх, Рy* и *Рz* подставить их выражения через *Е* согласно (31.4), то получится



Теперь напишите, как выражается *Ех, Еy* и *Ez* через *Еx' , Еy'* и *Еz' ,* например,

*Ex = a'Ex'+b'Ey'+c'Ez' ,*

где числа *а'*, *b'* и *с'* связаны с числами *а, b* и *c,* но не равны им. Таким образом, у вас получилось выражение *Рх'* через компо­ненты *Ех', Еy'* и *Ez' ,* т. е. получились новые αij. Никаких хит­ростей здесь нет, хотя все это достаточно запутано.

Когда мы говорили о преобразовании осей, то считали, что положение самого кристалла фиксировано *в пространстве.* Если же *вместе* с осями поворачивать и кристалл, то α не изме­няются. И обратно, если по отношению к осям изменять ориен­тацию кристалла, то получится новый набор коэффициентов а. Но если они известны для *какой-то* одной ориентации кристал­ла, то с помощью только что описанного преобразования их можно найти и для любой другой ориентации. Иначе говоря, диэлектрические свойства кристалла *полностью* описываются заданием компонент тензора поляризуемости αij. в любой про­извольно выбранной системе координат. Точно так же как век­тор скорости v = (vx, *vy , vz)* можно связать с частицей, зная, что три его компоненты при замене осей координат будут изменять­ся некоторым определенным образом, тензор поляризуемости αij, девять компонент которого при изменении системы осей координат преобразуются вполне определенным образом, мож­но связать с кристаллом.

Связь между **Р** и **Е** в уравнении (31.4) можно записать в бо­лее компактном виде:



где под значком i понимается какая-то из трех букв *х, у* или z, а суммирование ведется по j*=x, у* и z. Для работы с тензорами было придумано много специальных обозначений, но каждое из них удобно для ограниченного класса проблем. Одно из та­ких общих соглашений состоит в том, что можно не писать знака суммы (Σ) в уравнении (31.5), понимая при этом, что когда один и тот же индекс встречается дважды (в нашем случае j*),* то нужно просуммировать по всем значениям этого индекса. Однако, поскольку работать с тензорами нам придется немного, давайте не будем осложнять себе жизнь введением каких-то специальных обозначений или соглашений.

**§ 3. Эллипсоид энергии**

Потренируемся теперь в обращении с тензорами. Рассмот­рим такой интересный вопрос: какая энергия требуется для поляризации кристалла (в дополнение к энергии электрического поля, которая, как известно, равна ε*0Е2/2* на единицу объема)? Представьте на минуту атомные заряды, которые должны быть перемещены. Работа, требуемая для перемещения одного такого заряда на расстояние *dx,* равна *qExdx,* а если таких зарядов в единице объема содержится *N* штук, то для перемещения их требуется работа *qExNdx.* Но *qNdx* равно изменению дипольного момента единицы объема *dPx.* Так что работа, затраченная на *единицу объема,* равна

*ExdPx.*

Складывая теперь работы всех трех компонент, найдем, ка­кой должна быть работа в единице объема:

**E**•*d***P***.*

Но поскольку величина **Р** пропорциональна **Е**, то работа, за­траченная на поляризацию единицы объема от 0 до Р, равна интегралу от **E***•d***P***.* Обозначая ее через *ир,* [можно написать](#прим3)

C:\Мои документы\gray.jpg

Теперь можно воспользоваться уравнением (31.5) и выра­зить **Р** через **E.** В результате получим

C:\Мои документы\gray.jpg

Плотность энергии *ир —* величина, не зависящая от выбора осей, т. е. скаляр. Таким образом, тензор обладает тем свойст­вом, что, будучи просуммирован по одному индексу (с векто­ром), он дает новый вектор, а будучи просуммирован по *обоим* индексам (с *двумя* векторами), дает скаляр.

Тензор αijна самом деле нужно называть «тензором вто­рого ранга», ибо у него два индекса. В этом смысле вектор, у которого всего *один* индекс, можно назвать «тензором первого ранга», а скаляр, у которого вообще нет индексов,— «тензором нулевого ранга». Итак, выходит, что электрическое поле **Е** будет тензором первого ранга, а плотность энергии u*p —* тензором нулевого ранга. Эту идею можно распространить на тензоры с тремя и более индексами и определить тензоры, ранг которых выше двух.

Индексы нашего тензора поляризуемости могут принимать три различных значения, т. е. это трехмерный тензор. Матема­тики рассматривают также тензоры размерности четыре, пять и больше. Кстати, четырехмерный тензор нам уже встречался при релятивистском описании электромагнитного поля (см. гл. 26, вып. 6) — это *Fμv .*

Тензор поляризуемости α*ij* обладает одним интересным свойством: он *симметричен,* т. е. αxy=αyx и т. п. для любой пары индексов. (Это свойство отражает *физические* качества ре­ального кристалла, и вовсе не обязательно у любого тензора.) Вы можете самостоятельно доказать это, подсчитав изменения энергии кристалла по следующей схеме:

1) включите электрическое поле в направления оси *х;*

2) включите поле в направлении оси *у;*

3) *выключите x*-поле;

4) выключите y-поле.

Теперь кристалл вернулся к прежнему положению и полная работа, затраченная на поляризацию, должна быть нулем. Но для этого, как вы можете убедиться, αxy должно быть равно *а.* Однако те же рассуждения можно провести и для α*xz* и т. д. Таким образом, тензор поляризуемости симметричен.

Это означает также, что тензор поляризуемости можно найти простым измерением энергии, необходимой для поляризации кристалла в различных направлениях. Предположим, мы сна­чала взяли электрическое поле **Е** с компонентами *х* и *у;* тогда, согласно уравнению (31.7),

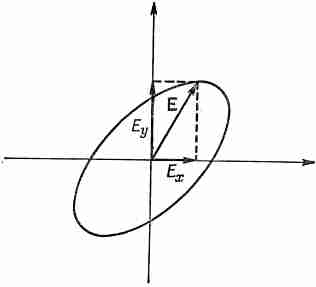
C:\Мои документы\gray.jpg

Если бы у нас была только одна компонента *Ех,* мы могли бы определить α*хх,* а с одной компонентой *Еy* можно определить αyy . Включив обе компоненты *Ех* и *Еy* , мы из-за присутствия члена *(αху+αух)* получим добавочную энергию, ну а поскольку αxy и αyx равны, то этот член превращается в 2αxy и мо­жет быть вычислен из добавочной энергии.

Выражение для энергии (31.8) имеет очень красивую геомет­рическую интерпретацию. Предположим, что нас интересует, какие поля *Ех* и *Еy* отвечают *данной* плотности энергии, скажем *u0.* Возникает чисто математическая задача решения уравне­ния

C:\Мои документы\gray.jpg

Это уравнение второй степени, так что, если мы отложим по осям величины *Ех* и *Еy ,* решением этого уравнения будут все точки эллипса (фиг. 31.2).

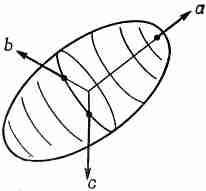


*Фиг. 31.2 Конец любого вектора* ***E****=(Ex, ev) , лежащего на этой кривой, дает одну и ту же анер­гию поляризации.*

(Это должен быть именно эллипс, а не парабола и не гипербола — ведь энергия поля всегда положительна и конечна.) А само **Е** с компонентами *Ех* и *Еy* представ­ляет вектор, идущий из начала координат до точки на эллипсе. Такой «энергетический эллипс» — хороший способ «увидеть» тензор поляризуемости.

Если теперь пустить в дело все три компоненты, то *любой* вектор **Е**, необходимый для создания единичной плотности энергии, задается точками, расположенными на эллипсоиде, подобно изображенному на фиг. 31.3. Форма этого эллипсоида постоянной энергии однозначно характеризует тензор поляри­зуемости.

Заметьте теперь, что эллипсоид имеет очень интересное свойство — его всегда можно описать простым заданием на­правления трех «главных осей» и диаметров эллипсоида по этим осям. Такими «главными осями» являются направления наи­меньшего и наибольшего диаметра и направление, перпендику­лярное к ним. На фиг. 31.3 они обозначены буквами *а, b* и *с.*



*Фиг. 31.3. Эллипсоид анергии для тензора поляризуемости.*

По отношению к этим осям уравнение эллипсоида имеет осо­бенно простую форму:

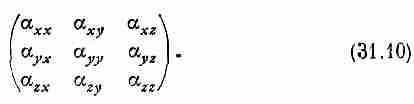
C:\Мои документы\gray.jpg

Итак, по отношению к главным осям у тензора поляризуе­мости останутся только три ненулевые компоненты α*аа, αbb* и α*сс.* Другими словами, сколь бы ни был сложен кристалл, всегда можно выбрать оси так (они не обязательно будут осями самого кристалла), что у тензора поляризуемости останется только три компоненты. Уравнение (31.4) для таких осей ста­новится особенно простым:

*Ра =*α*ааЕа,* Рb =αbbEb, *Рс =*α*ссЕс.* (31.9)

Иначе говоря, электрическое поле, направленное по любой одной из главных осей, дает поляризацию, направленную по той же оси, но, разумеется, для различных осей коэффициенты будут разными.

Тензор часто записывается в виде таблицы из девяти коэф­фициентов, взятых в скобки:



Для главных же осей *а, b* и *с* в таблице остаются только диаго­нальные члены, поэтому мы говорим, что тензор становится «диагональным», т. е.



Самое важное здесь то, что к такой форме подходящим выбором осей координат можно привести любой тензор поляризуемости (фактически *любой симметричный* тензор второго ранга какого угодно числа измерений).

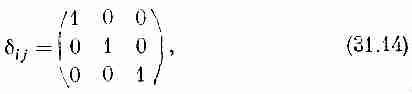
Если все три элемента тензора поляризуемости в диагональ­ной форме равны друг другу, т. е. если

C:\Мои документы\gray.jpg

то эллипсоид энергии превращается в сферу, поляризуемость во всех направлениях становится одинаковой, а материал изот­ропным. В тензорных обозначениях

C:\Мои документы\gray.jpg

где.δij—*единичный тензор:*



что, разумеется, означает



Тензор δijчасто называют также «символом Кронекера». Для забавы вы можете доказать, что тензор (31.14) после замены одной прямоугольной системы координат на другую будет иметь в точности ту же самую форму. Тензор поляризуемости типа (31.13) дает

C:\Мои документы\gray.jpg

т. е. получается наш старый результат для изотропного диэлек­трика:

Р=αЕ.

Форму и ориентацию эллипсоида поляризуемости иногда можно связать со свойствами симметрии кристалла. В гл. 30 мы уже говорили, что трехмерная решетка имеет 230 различных возможных внутренних симметрии и что для многих целей их удобно разбить на 7 классов в соответствии с формой элемен­тарной ячейки. Эллипсоид поляризуемости должен отражать геометрию внутренней симметрии кристалла. Например, триклинный кристалл имеет самую низкую симметрию; у него все три оси эллипсоида разные и направления их, вообще говоря, не совпадают с направлением осей кристалла. Более симмет­ричный моноклинный кристалл обладает той особенностью, что его свойства не меняются при повороте кристалла на 180° от­носительно одной оси, поэтому тензор поляризуемости при таком повороте должен остаться тем же самым. Отсюда следует, что эллипсоид поляризуемости при повороте на 180° должен перехо­дить сам в себя. Но такое может случиться только, когда одна из осей эллипсоида совпадет с направлением оси симметрии кристалла. В других же отношениях ориентация и размеры эллипсоида могут быть какими угодно.

Оси эллипсоида ромбического кристалла должны совпадать с кристаллическими осями, так как вращение такого кристалла на 180° вокруг любой оси повторяет ту же кристаллическую решетку. Если же взять тетрагональный кристалл, то эллип­соид тоже должен повторять его симметрию, т. е. два из его диаметров должны быть равны между собой. Наконец, для ку­бического кристалла равными должны быть все три диаметра эллипсоида — он превращается в сферу и поляризуемость кристалла одинакова во всех направлениях.

Существует очень серьезная игра, состоящая в выяснении всех возможных свойств тензоров для всех возможных симмет­рии кристалла. Она мудрено называется «теоретико-групповым анализом». Однако для простых случаев тензора поляризуемо­сти увидеть, какова должна быть эта связь, относительно легко.

**§ 4. Другие тензоры; тензор инерции**

В физике есть еще немало других примеров тензоров. В ме­талле, например, или каком-либо другом проводнике зачастую оказывается, что плотность тока **j** приблизительно пропорцио­нальна электрическому полю **Е**, причем константа пропорцио­нальности называется проводимостью σ

**j**=σ**Е**.

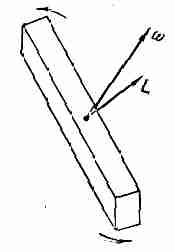
Однако для кристалла соотношение между **j** и **Е** более сложно, проводимость в различных направлениях не одинакова. Она становится тензором, поэтому мы пишем

C:\Мои документы\gray.jpg

Другим примером физического тензора является момент инерции. В гл. 18 (вып. *2)* мы видели, что момент количества движения L твердого тела, вращающегося относительно фикси­рованной оси, пропорционален угловой скорости ω, и коэффи­циент пропорциональности I мы назвали моментом инерции:

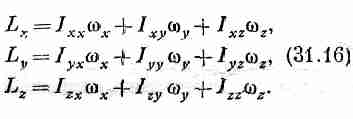
L = Iω.

Момент инерции тела произвольной формы зависит от его ориен­тации относительно оси вращения. Моменты инерции прямо­угольного бруска, например, относительно каждой из трех ортогональных осей будут разными. Но угловая скорость со и момент количества движения **L** — оба векторы. Для враще­ния относительно одной из осей симметрии они параллельны. Но если моменты инерции относительно каждой из трех главных осей различны, то направления to и L, вообще говоря, не сов­падают (фиг. 31.4).



*Фиг. 31.4. Момент количества движения* ***L*** *твер­дого предмета, вообще говоря, не параллелен векто­ру угловой скорости ω*.

Они связаны точно таким же образом, как **Е** и **Р**, т. е. мы должны писать:



Девять коэффициентов *Iij* называют тензором инерции. По ана­логии с поляризацией кинетическая энергия для любого мо­мента количества движения должна быть некоторой квадратич­ной формой компонент ωx, ωy и ωz:

C:\Мои документы\gray.jpg

Мы можем снова воспользоваться этим выражением для опре­деления эллипсоида инерции. Кроме того, снова можно восполь­зоваться энергетическими соображениями и показать, что этот тензор симметричен, т. е. *Iij=Iji.*

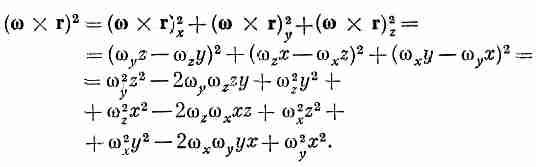
Тензор инерции твердого тела можно написать, если извест­на форма тела. Нам нужно только выписать полную кинетиче­скую энергию всех частиц тела. Частица с массой *m* и скоростью *v* обладает кинетической энергией 1*/2mv2,* а полная кинетиче­ская энергия равна просто сумме

Σ1/2mv2

по всем частицам тела. Но скорость v каждой частицы связана с угловой скоростью **ω**твердого тела. Предположим, что тело вращается относительно центра масс, который мы будем счи­тать покоящимся. Если при этом r — положение частицы отно­сительно центра масс, то ее скорость v задается выражением ωXr. Поэтому полная кинетическая энергия равна

к. э.=Σ1/2m(ωX г)2. (31.18)

Единственное, что нужно теперь сделать,— это переписать ωXr через компоненты ω*х, ωy* , ωz и координаты *х, у,* z, а за­тем сравнить результат с уравнением (31.17); приравнивая коэффициенты, найдем *Iij.* Проделывая всю эту алгебру, мы пишем:



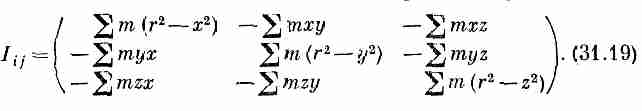
Умножая это уравнение на m/2, суммируя по всем частицам и сравнивая с уравнением (31.17), мы видим, что I*xx,* напри­мер, равно

C:\Мои документы\gray.jpg

Это и есть та формула для момента инерции тела относительно оси *х,* которую мы получали уже раньше (гл. 19, вып. 2).

Ну а поскольку r2 *=x2+y2+*z2, то эту же формулу можно написать в виде

*Ixx=Σm(r2-x2).* Выписав остальные члены тензора инерции, получим



Если хотите, его можно записать в «тензорных обозначе­ниях»:

C:\Мои документы\gray.jpg

где через ri обозначены компоненты *(х, у,* z) вектора положе­ния частицы, а 2 означает суммирование по всем частицам. Таким образом, момент инерции есть тензор второго ранга, элементы которого определяются свойствами тела и который связывает момент количества движения **L** с угловой ско­ростью **ω**:



Для любого тела независимо от его формы можно найти эл­липсоид энергии, а следовательно, и три главные оси. Относи­тельно этих осей тензор будет диагональным, так что для лю­бого объекта всегда есть три ортогональные оси, для которых момент количества движения и угловая скорость параллельны друг другу. Они называются главными осями инерции.

**§ 5. Векторное произведение**

Сами того не подозревая, вы пользуетесь тензором второго ранга уже начиная с гл. 20 (вып. 2). В самом деле, мы опреде­лили там «момент силы, действующий в плоскости», например τxy, следующим образом:

τ*xy=xFy-yFx.*

Обобщая это определение на три измерения, можно написать

τij=riFj-rjFi. (31.22)

Как видите, величина τij — это тензор второго ранга. Один из способов убедиться в этом — свернуть τij с каким-то век­тором, скажем с единичным вектором **е**, т. е. составить

C:\Мои документы\gray.jpg

Если эта величина окажется *вектором,* то τ*ij* должен преобра­зовываться как тензор — это просто наше определение тензора. Подставляя выражение для τij, получаем

C:\Мои документы\gray.jpg

Поскольку скалярные произведения, естественно, являются скалярами, то оба слагаемых в правой части — векторы, как и их разность. Так что τij-— действительно тензор.

Однако τijпринадлежит к особому сорту тензоров, он *антисимметричен,* т. е.

τij=-τji.

Поэтому у такого тензора есть только три разные и неравные нулю компоненты: τxy, τyz и τzz. В гл. 20 (вып. 2) нам удалось показать, что эти три члена почти «по счастливой случайности» преобразуются подобно трем компонентам вектора; поэтому мы могли тогда *определить* вектор

τ=(τx,. τy, τz) = (τyz, τzx, τxy).

Я сказал «по случайности» потому, что это происходит только в трехмерном пространстве. Например, для четырех измерений антисимметричный тензор второго ранга имеет *шесть* различных ненулевых членов, и его, разумеется, нельзя заменить векто­ром, у которого компонент только *четыре.*

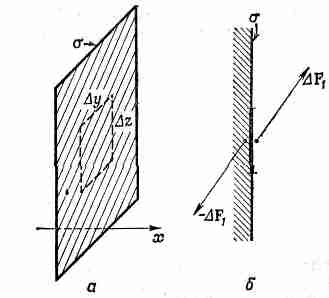
Точно так же как аксиальный вектор **τ**==**r**X**F** является тен­зором, по тем же соображениям тензором будет и любое век­торное произведение двух полярных векторов. К счастью, они тоже представимы в виде вектора (точнее, псевдовектора), что немного облегчает нам всю математику.

Вообще говоря, для любых двух векторов **а** и **b** девять ве­личин *aibj* образуют тензор (хотя для физических целей он не всегда может быть полезен). Таким образом, для вектора по­ложения r величины rirjявляются тензором, а поскольку δij. тоже тензор, то мы видим, что правая часть (31.20) действитель­но является тензором. Подобным же образом тензором будет и (31.22), так как оба члена в правой части — тензоры.

**§ 6. Тензор напряжений**

Встречавшиеся до сих пор симметричные тензоры возникали как коэффициенты, связывающие один вектор с другим. Сей­час я познакомлю вас с тензором, имеющим совершенно другой физический смысл,— это *тензор напряжений.* Предположим, что на твердое тело действуют различные внешние силы. Мы говорим, что внутри тела возникают различные «напряжения», имея при этом в виду внутренние силы между смежными частями материала. Мы уже гово­рили немного о подобных на­пряжениях в двумерном случае, когда рассматривали поверхностное натяжение напряженной диафрагмы (см. гл. 12, § 3, вып. 5). А теперь вы увидите, что внутренние силы в материале трехмерного тела записываются в виде тензора.

Рассмотрим тело из какого-то упругого материала, например брусок из желе. Если мы разрежем этот брусок, то материал на каждой стороне разреза будет, вообще говоря, претерпевать перемещение под действием внутренних сил. До того как был сделан разрез, между двумя этими частями должны были дейст­вовать силы, которые удерживали обе части в едином куске; мы можем выразить напряжение через эти силы. Представьте себе, что мы смотрим на воображаемую плоскость, перпендику­лярную оси *х,* подобную плоскости σ на фиг. 31.5, и интересуем­ся силами, действующими на маленькой площадке Δy/Δz, рас­положенной в этой плоскости.

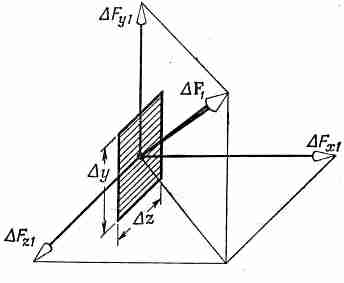


*Фиг. 31.5. Материал, находящийся слева от плоскости σ на площади Δy/Δz, действует на материал, нахо­дящийся справа, с силой Δ****F****1.*

Материал, находящийся слева от площадки, действует на материал с правой стороны с силой Δ**F**1 (фиг. 31.5, *б).* Есть, конечно, и обратная реакция, т.е. на материал слева от поверхности действует сила —Δ**F**1. Если площадка достаточно мала, то мы ожидаем, что сила Δ**F**1 про­порциональна площади Δy/Δz.

Вы уже знакомы с одним видом напряжений — статическим давлением жидкости. Там сила была равна давлению, умно­женному на площадь, и направлена под прямым углом к элементу поверхности. Для твердого тела, а также движущей­ся вязкой жидкости сила не обязательно перпендикулярна по­верхности: помимо давления (положительного или отрицатель­ного), появляется еще и *сдвигающая* сила. (Под «сдвигающей» силой мы подразумеваем *тангенциальные* компоненты сил, действующих на поверхности.) Для этого нужно учитывать все три компоненты силы. Заметьте еще, что если раз­рез мы сделаем по плоскости с какой-то другой ориента­цией, то действующие на ней силы тоже будут другими. Полное описание внутренних напряжений требует применения тензоров.

Определим тензор нап­ряжений следующим образом. Вообразите сначала разрез, перпендикулярный оси *х,* и разложите силу ΔF1, действующую на разрезе, на ее компо­ненты: ΔFx1, ΔFy1, ΔFz1 (фиг. 31.6).



*Фиг. 31.6. Сила* ΔF1, *дейст­вующая на элементе площади* ΔyΔz, *перпендикулярной оси х, разлагается на три компонен­ты:* ΔFx1, ΔF*у1 и* Δ*fz1.*

Отношение этих сил к площади Δy/Δz мы назовем *Sxx, Syx* и *Szx.* Например,

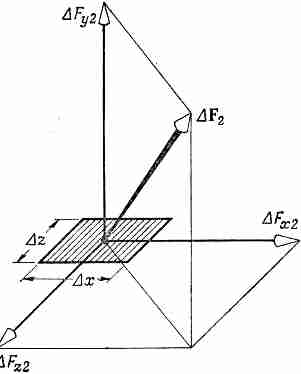
*Syx=*ΔF*у1/*ΔyΔz

Первый индекс *у* относится к направлению компоненты силы, а второй *х —* к направлению нормали к плоскости. Если угод­но, площадь ΔyΔz можно записать как Δ*ах,* имея в виду элемент площади, перпендикулярный оси *х,* т. е.

*Syx=*ΔF*у1/*Δ*ах*

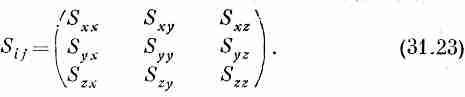
А теперь представьте себе разрез, перпендикулярный оси *у.* Пусть на маленькую площадку ΔxΔz действует сила Δ**F**2.

Разлагая снова эту силу на три компоненты, как показано на фиг. 31.7, мы опре­деляем три компоненты на­пряжения *Sxy, Syy, Szy* как силы, действующие на единичную площадь в этих трех направлениях.

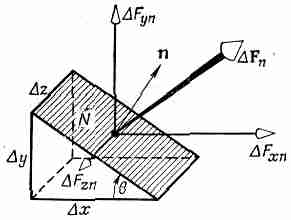


*Фиг. 31.7. Сила, действующая на элемент площади, перпенди­кулярной оси у, разлагается на три взаимно перпендикулярные компоненты.*

Наконец, проведем воображаемый раз­рез, перпендикулярный оси z, и определим три компоненты *Sxz, Syz* и *Szz.* Таким образом, получается девять чисел:



Я хочу теперь показать, что этих девяти величин достаточ­но, чтобы полностью описать внутреннее напряженное состоя­ние, и что *Sij-—*действительно тензор. Предположим, что мы хо­тим знать силу, действующую на поверхность, наклоненную под некоторым произвольным углом. Можно ли найти ее, ис­ходя из *Sij?* Можно, и это делается следующим образом. Вооб­разите маленькую призму, одна грань *N* которой наклонна, а другие — параллельны осям координат. Если окажется, что грань *N* параллельна оси *z,* то получается картина, изобра­женная на фиг. 31.8.



*Фиг. 31.8. Разложение на компо­ненты силы* **F**n, *действующей на грани N (с единичной нормалью* ***n***)**.**

(Это, конечно, частный случай, но он до­статочно хорошо иллюстрирует общий метод.) Дальше, напря­жения, действующие на эту призмочку, должны быть такими, чтобы она находилась в равновесии (по крайней мере в пределе бесконечно малого размера), так что действующая на нее пол­ная сила должна быть равна нулю. Силы, действующие на гра­ни, параллельные осям координат, известны нам непосред­ственно из тензора *Sij.* А их векторная сумма должна равняться силе, действующей на грань *N,* так что эту силу можно выра­зить через *Sij.*

Наше допущение, что *поверхностные* силы, действующие на малый объем, находятся в равновесии, предполагает отсутствие *объемных* сил, подобных силе тяжести или псевдосилам, которые тоже могут присутствовать, если наша система координат не инерциальна. Заметьте, однако, что такие объемные силы бу­дут пропорциональны *объему* призмочки и поэтому пропорцио­нальны Δx,Δy, Δz, тогда как поверхностные силы пропорцио­нальны ΔxΔy, ΔyΔz и т. п. Итак, если размер призмочки взять достаточно малым, то объемные силы будут пренебрежимо малы по сравнению с поверхностными.

А теперь сложим силы, действующие на нашу призмочку. Возьмемся сначала за х-компоненту, которая состоит из пяти частей, по одной от каждой грани. Но если Δz достаточно мало, то силы от треугольных граней (перпендикулярные оси z) будут равны друг другу и противоположны по направлению, поэтому о них можно забыть. На основание призмы действует x-компонента силы, равная

ΔFx2=SxyΔхΔz,

а x-компонента силы, действующей на вертикальную прямо­угольную грань, равна

Δ*Fx1=Sхx*Δ*z.*

Сумма этих двух сил должна быть равна x-компоненте силы, действующей *извне* на грань *N.* Обозначим через n единич­ный вектор нормали к грани *N,* а через **F**n — действующую на нее силу, тогда получим

Δ*Fxn=Sxx*Δ*y*Δ*z+Sxy*Δ*x*Δz.

Составляющая напряжения по оси *х (Sxn),* действующего в этой плоскости, равна силе ΔF*xn,* деленной на площадь, т. е. Δz√(Δx2+Δy2), или

C:\Мои документы\gray.jpg

Но, как видно из фиг. 31.8, отношение Δ*х/√(*Δ*x*2+Δy2) — это косинус угла θ между n и осью *у* и может быть записан как *пу,* т. е. y-компонента вектора **n**. Аналогично, Δy/√(Δx2+Δy2) равно sinθ=*nх.* Поэтому мы можем написать

*Sxn=Sxxnx+Sxyny*

рели теперь обобщить это на произвольный элемент поверхности, то мы получим

Sxn= Sxxnx+Sxyny+Sxznz,

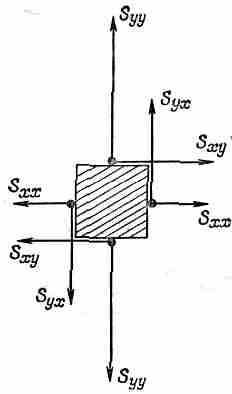
или в еще более общей форме:

C:\Мои документы\gray.jpg

Так что мы действительно *можем* выразить силу, действующую на произвольную площадь, через элементы *Sij* и полностью описать внутреннее напряжение.

Уравнение (31.24) говорит, что тензор Sij связывает силу **S**n с единичным вектором **n** точно так же, как αijсвязывает **Р** с **Е**. Но поскольку **n** и **S**n — векторы, то компоненты *Sij* при изменении осей координат должны преобразовываться как тензор. Так что *Sij* действительно тензор.

Можно также доказать, что *Sij симметричный* тензор. Для этого нужно обратить внимание на силы действующие на маленький кубик материале. Возьмем кубик, rpaни которого параллельны осям координат, и посмотрим на eго разрез (фиг. 31.9).



Фиг. 31.9. х- и у-компоненты сил, действующих на четыре грани маленького единичного кубика.

Если допустить что ребра куба равны единице, то х- и y-компоненты сил на гранях, перпендикулярных к осям *х* и *у,* должны быть такими, как показано на рисунке. Если взять достаточно маленький кубик, можно надеяться, что напряжение на его противоположных гранях будет отличаться ненамного, а поэтому компоненты сил должны быть равны и противоположны, как это показано на рисунке. Заметьте теперь, что на кубик не должен действовать никакой момент си иначе кубик начал бы вращаться. Но полный момент относительно центра равен произведению *(Syx-Sxy)* на единичную длину ребра куба, а поскольку полный момент равен нулю, то *S* должно быть равно Sxy, и тензор напряжений, таким образом, оказывается симметричным.

Благодаря этой симметрии тензора *Sij* его можно то; описывать эллипсоидом с тремя главными осями. Напряжение имеет особенно простой вид на площадках, нормальных к этим: осям: оно соответствует чистому сжатию или растяжению в направлении главных осей. Вдоль этих площадок нет никак сдвиговых сил, причем такие оси, для которых отсутствуют сдвиговые силы, можно выбрать для *любого* напряжения. Если эллипсоид превращается в сферу, то в *любом* направлении действуют только нормальные силы. Это соответствует гидростатическому давлению (положительному или отрицательном. Таким образом, для гидростатического давления тензор диагонален, причем все три компоненты его равны друг другу (фактически они просто равны давлению *р).* В этом случае мы можем написать

C:\Мои документы\gray.jpg (31.25)

Вообще говоря, тензор напряжений в куске твердого тела, а также его эллипсоид изменяются от точки к точке, поэтому для описания всего куска мы должны задать каждую компонен­ту *Sij* как функцию положения. Тензор напряжений, таким об­разом, является *полем.* Мы уже имели примеры *скалярных по­лей,* подобных температуре *Т(х, у,* z), и *векторных полей,* по­добных ***Е****(х, у, z),* которые в каждой точке задавались тремя числами. А теперь перед нами пример *тензорного поля,* задавае­мого в каждой точке пространства девятью числами, из кото­рых для симметричного тензора *Sij* реально остается только шесть. Полное описание внутренних сил в произвольном твер­дом теле требует знания шести функций координат *х, у* и z.

**§ 7. Тензоры высших рангов**

Тензор напряжений *Sij* описывает внутренние *силы* в веществе. Если при этом материал упругий, то внутренние *деформа­ции* удобно описывать с помощью другого тензора Tij— так называемого *тензора деформаций.* Для простого объекта, подоб­ного бруску из металла, изменение длины ΔL, как вы знаете, приблизительно пропорционально силе, т. е. он подчиняется закону Гука

ΔL=γF.

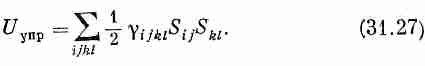
Для произвольных деформаций упругого твердого тела тензор деформаций *Tij* связан с тензором напряжений *Sij* системой линейных уравнений

C:\Мои документы\gray.jpg

Вы знаете также, что потенциальная энергия пружины (или бруска) равна

C:\Мои документы\gray.jpg

а обобщением *плотности* упругой энергии для твердого тела будет выражение



Полное описание упругих свойств кристалла должно задаваться коэффициентами γijkl. Это знакомит нас с новым зверем — тен­зором *четвертого* ранга. Поскольку каждый из индексов может принимать одно из трех значений — *х, у* или z, то всего ока­зывается 34=81 коэффициент. Но *различны* из них на самом де­ле только 21. Во-первых, поскольку тензор Sij симметричен, у него остается только шесть различных величин, и поэтому в уравнении (31.27) нужны только 36 *различных* коэффициен­тов. Затем, не изменяя энергии, мы можем переставить *Sij* и *Skl,* так что γijkl должно быть симметрично при перестановке пары индексов *ij* и *kl.* Это уменьшает число коэффициентов до 21. Итак, чтобы описать упругие свойства кристалла низшей воз­можной симметрии, требуется 21 упругая постоянная! Разу­меется, для кристаллов с более высокой симметрией число необходимых постоянных уменьшается. Так, кубический кри­сталл описывается всего тремя упругими постоянными, а для изотропного вещества хватит и двух.

В справедливости последнего утверждения можно убе­диться следующим образом. В случае изотропного материала компоненты γ*ijkl* не должны зависеть от поворота осей. Как это может быть? *Ответ:* они могут быть независимы, *только* когда выражаются через тензоры δij. Но существует лишь два воз­можных выражения, имеющих требуемую симметрию,— это δijδkl и δikδjl+δil+δjk, так что γijkl должно быть их линейной комбинацией. Таким образом, для изотропного материала

γijkl =*а*(δijδkl) + b(δikδjl+δilδjk);

следовательно, чтобы описать упругие свойства материала, тре­буются две постоянные: *а* и b*.* Я предоставляю вам самим до­казать, что для кубического кристалла требуются три такие постоянные.

И еще один последний пример (на этот раз пример тензора третьего ранга) дает нам пьезоэлектрический эффект. При на­пряженном состоянии в кристалле возникает электрическое поле, пропорциональное тензору напряжений. Общий закон пропорциональности имеет вид

C:\Мои документы\gray.jpg

где *ei—* электрическое поле, a *Pijk—* пьезоэлектрические коэф­фициенты (пьезомодули), составляющие тензор. Можете ли вы сами доказать, что если у кристалла есть центр инверсии (т. е. если он инвариантен относительно замены *х, у, z→-х,-y*,-z), то все его пьезоэлектрические коэффициенты равны нулю.

**§ 8. Четырехмерный тензор электро­магнитного импульса**

Все тензоры, с которыми мы сталкивались в этой главе, были связаны с трехмерным пространством; они определялись как величины, имеющие известные трансформационные свойства при пространственных поворотах. А вот в гл. 26 (вып. 6) мы имели возможность воспользоваться тензором в четырехмерном про­странстве-времени: это был тензор электромагнитного поля *F*μv. Компоненты такого четырехмерного тензора особым образом преобразуются при преобразованиях Лоренца. (Мы этого, прав­да, не делали, но могли бы рассматривать преобразования Ло­ренца как своего рода «вращение» в четырехмерном «простран­стве», называемом пространством Минковского; тогда аналогия с тем, что мы рассматривали здесь, была бы ярче.)

В качестве последнего примера мы хотим рассмотреть дру­гой тензор в четырех измерениях *(t, x, y, z)* теории относитель­ности. Когда мы говорили о тензоре напряжений, то опреде­ляли *Sij* как компоненту силы, действующую на единичную площадку. Но сила равна скорости изменения импульса со временем. Поэтому вместо того, чтобы говорить «Sxy — это *х-*компонента силы, действующей на единичную площадку, пер­пендикулярную оси *у»,* мы с равным правом могли бы сказать: «Sxy — это скорость потока x-компоненты импульса через еди­ничную площадку, перпендикулярную оси *у».* Другими словами, каждый член Sij представляет поток i-й компоненты импульса через единичную площадку, перпендикулярную оси j. Так обстоит дело с чисто пространственными компонентами, но они составляют только часть «большего» тензора *Sμv* в четырехмер­ном пространстве μ. и *v=t, x, у, z),* содержащего еще дополни­тельные компоненты *Stx, S yt, Stt* и т. п. Попытаемся теперь выяс­нить физический смысл этих дополнительных компонент.

Нам известно, что пространственные компоненты представ­ляют поток импульса. Чтобы найти ключ к распространению этого понятия на «временное направление», обратимся к «по­току» другого рода — потоку электрического заряда. Скорость потока *скалярной* величины, подобной заряду (через единичную площадь, перпендикулярную потоку), является пространствен­ным *вектором —* вектором плотности тока **j**. Мы видели, что временная компонента вектора потока — это плотность теку­щего вещества. Например, **j** можно скомбинировать с плотно­стью заряда jt=ρ и получить четырехвектор jμ=(ρ, **j**), т. е. значок μ у вектора jμ принимает четыре значения: *t, х, у, z.* Это означает «плотность», «скорость потока в x-направлении», «скорость потока в y-направлении» и «скорость потока в z-направлении» скалярного заряда.

Теперь по аналогии с нашим утверждением о временной ком­поненте потока скалярной величины можно ожидать, что вместе *c Sxx,Sxy* и *Sxz,* описывающими поток x-компоненты импульса, должна быть и временная компонента *Sxt ,* которая по идее дол­жна бы описывать плотность того, что течет, т. е. *Sxt* должна быть плотностью х-компоненты импульса. Таким образом, мы можем расширить наш тензор по горизонтали, включив в него t-компоненты, и в нашем распоряжении оказываются:

*Sxt —* плотность x-компоненты импульса,

*Sxx —* поток z-компоненты импульса в направлении оси *х,*

*Sxy —* поток y-компоненты импульса в направлении оси *у,*

*Sxz —* поток z-компоненты импульса в направлении оси z.

Аналогичная вещь происходит и с y-компонентой; у нас есть три компоненты потока: *Syx* , *Syy* и *Syz* , к которым нужно добавить четвертый член:

*Syt —* плотность y-компоненты импульса,

а к трем компонентам *Szx, Szy* и *Szz* мы добавляем

*Szt —* плотность z-компоненты импульса.

В четырехмерном пространстве у импульса существует также и t-компонента, которой, как мы знаем, является энер­гия. Так что тензор *Sij* следует продолжить по вертикали с включением в него *Stx, Sty* и *Stz,* причем

*Stx —* поток энергии в направлении оси *х, Sty —* поток энергии в направлении оси *у,* (31.28) *Stz —* поток энергии в направлении оси z,

т. е. *Stx*— это поток энергии в единицу времени через поверх­ность единичной площади, перпендикулярную оси *х,* и т. д. Наконец, чтобы пополнить наш тензор, нужна еще величина *Stt,* которая должна быть *плотностью энергии.* Итак, мы расширили наш трехмерный тензор напряжений до четырехмерного *тензора энергии-импульса Sμv.* Индекс μ может принимать четыре зна­чения: *t, х, у* и z, которые означают «плотность», «поток через единичную площадь в направлении оси *х»,* «поток через единич­ную площадь в направлении оси y» и «поток через единичную площадь в направлении оси z». Значок v тоже принимает четы­ре значения: *t, х, у, z,* которые говорят нам, *что же именно* течет: «энергия», x-компонента импульса», «y-компонента им­пульса» или же «z-компонента импульса».

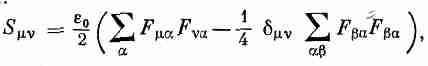
В качестве примера рассмотрим этот тензор не в веществе, а в пустом пространстве с электромагнитным полем. Вы знаете, что поток энергии электромагнитного поля описывается век­тором Пойнтинга **S**=ε0c2**E**X**В**. Так что *х-, у-* иz-компоненты вектора **S** с релятивистской точки зрения являются компонентами: *Six, Stн* и *Stz* нашего тензора энергии-импульса. Симметрия тензора *Sij* переносится и на временные компоненты, так что четы­рехмерный тензор Sμv тоже симметричен:

Sμv*=Svμ. .* (31.29)

Другими словами, компоненты *Sxt, Syt, Szt,* которые представ­ляют *плотности х-, у-* и z-компонент *импульса,* равны также *х-, у-* и z-компонентам вектора Пойнтинга **S**, или, как мы ви­дели раньше из других соображений, вектора *потока энергии.*

Оставшиеся компоненты тензора электромагнитного напря­жения *Sμv* тоже можно выразить через электрическое и магнит­ное поля **Е** и **В**. Иначе говоря, для электромагнитного поля в пустом пространстве мы должны допустить существование тензора напряжений, или, выражаясь менее таинственно, по­тока импульса электромагнитного поля. Мы уже обсуждали это в гл. 27 (вып. 6) в связи с уравнением (27.21), но тогда мы не входили в детали.

Тем из вас, кто хочет испытать свою удаль на четырехмер­ных тензорах, может понравиться выражение для тензора *Sμv* через поля:



где суммирование по α и β проводится по всем их значениям (т. е. *t, x, у* и *z*), но, как обычно в теории относительности, для суммы Σ и символа δ принимается специальное соглашение. В суммах слагаемые со значками *х, у, z* должны *вычитаться,* а δtt=+1, тогда как δxx.=δуу = δzz=-1 и δμv=0 для всех μ≠*v* (с=1). Сможете ли вы доказать, что эта формула приводит к плотности энергии *Stt=(*ε*0/2)(E2+B2)* и [вектору Пойнтинга](#прим) e0**Е**X**В**? Можете ли вы показать, что в электростатическом поле, когда **В**=0, главная ось напряжения направлена по электриче­скому полю и вдоль направления поля возникает *натяжение (*ε*0/2)E2* и равное ему *давление* в направлении, перпендикуляр­ном направлению поля?

***\* Если не полагать с=1, как это делается здесь, то плотность энергии в принятых в книге единицах будет равна (ε0/2)(E2+с2B2) или в единицах СИ 1/2[ε0E2+(l/μ0)B2]. — Прим. ред.***

***\* Эту работу, затраченную на создание поляризации электрическим полем, не нужно путать с потенциальной энергией —p0\*Е постоянного дипольного момента p0 в поле Е.***

***\* Обычно для коэффициентов пропорциональности между Р и Е пользуются термином тензор восприимчивости, оставляя термин поля­ризуемость для величин, относящихся к одной частице. Прим. ред.***

***\* В гл. 10, следуя общепринятому соглашению, мы писали Р=ε0χЕ и величину χ (хи) называли «восприимчивостью». Здесь же нам удобнее пользоваться одной буквой, так что вместо ε0χ мы будем писать α. Для изо­тропного диэлектрика α=(χ-1)ε0, где χ — диэлектрическая проницаемость (см. гл. 10 §4 вып.5)***

***Главa 32***

**ПОКАЗАТЕЛЬ ПРЕЛОМЛЕНИЯ ПЛОТНОГО ВЕЩЕСТВА**

[**§ 1. Поляризация вещест****ва**](#а1)

[**§ 2. Уравнения Максвелла в диэ****ле****ктрике**](#а2)

[**§ 3. Волны в диэлектр****ике**](#а3)

[**§ 4. Комплексный показатель прелом****ления**](#а4)

[**§ 5. Показатель преломлени****я смеси**](#а5)

[**§ 6. Волны в мета****ллах**](#а6)

**[§ 7.Низкочастотное и высокочастотное приближение глубин](#а7)****[а скин-слоя и плазменная частота](#а7)**

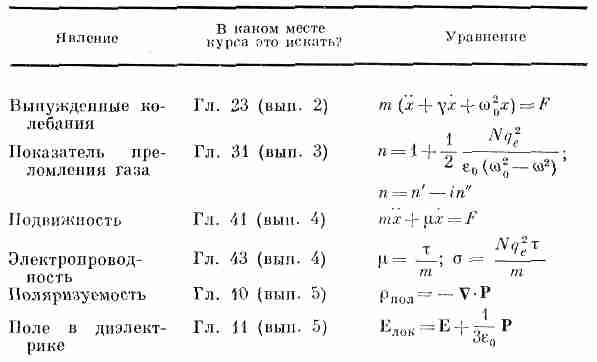
*Повторить:* всё что в табл. 32.

**§ 1. Поляризация вещества**

Здесь я хочу обсудить явления преломления света, ну и, разумеется, его поглощение плот­ным веществом. Теорию показателя преломле­ния мы уже рассматривали в гл. 31 (вып. 3), но тогда наши знания математики были весьма ограничены и мы остановились только на по­казателе преломления веществ с малой плотно­стью наподобие газов. Но физические принципы, приводящие к возникновению показателя пре­ломления, мы там все же выяснили. Электри­ческое поле световой волны поляризует мо­лекулы газа, создавая тем самым осцилли­рующие дипольные моменты, а ускорение ос­циллирующих зарядов приводит к излучению новых волн поля. Это новое поле, интерфери­руя со старым, изменяет его. Изменение поля эквивалентно тому, что происходит сдвиг фазы первоначальной волны. Из-за того что сдвиг фазы пропорционален толщине материала, эф­фект в целом оказывается эквивалентным из­менению фазовой скорости света в материале. Прежде, когда рассматривалось это явление, мы пренебрегали усложнениями, возникаю­щими от таких эффектов, как действие новой измененной волны на поле осциллирующего диполя. Мы предполагали, что силы, действую­щие на заряды атомов, определяются только *падающей* волной, тогда как на самом деле на осциллятор действует не только падающая волна, но и волны, излученные другими атомами. В то время нам еще было трудно учесть этот эф­фект, поэтому мы изучали только разреженные газы, где его можно считать несущественным.

Ну а теперь мы увидим, что эта задача с помощью дифференциальных уравнений решается совсем просто. Конечно, дифференциальные уравнения затуманивают физическую причину возникновения преломле­ния (как результата интерференции вновь излученных волн с первоначальными), но зато они упрощают теорию плотного материала. В этой главе сойдется вместе многое из того, что мы делали уже раньше. Практически мы уже получили все, что нам потребуется, так что по-настоящему новых идей в этой главе будет сравнительно немного. Поскольку вам может понадобиться освежить в памяти то, с чем мы здесь столкнемся, то в табл. 32.1 приводится список уравнений, которые я соби­раюсь использовать вместе со ссылкой на те места, где их можно найти. Во многих случаях из-за нехватки времени я не смогу снова останавливаться на физических аргументах, *а* сразу же буду браться за уравнения.

*Таблица 32.1* • ЧТО БУДЕТ ИСПОЛЬЗОВАНО В ЭТОЙ ГЛАВЕ



Начну с напоминания о механизме преломления в газе. Мы предполагаем, что в единице объема газа находится *N* ча­стиц и каждая из них ведет себя как гармонический осциллятор. Мы пользуемся моделью атома или молекулы, к которой элект­рон привязан силой, пропорциональной его перемещению (как будто он удерживается пружинкой). Отметим, что такая модель атома с *классической* точки зрения незаконна, однако позднее будет показано, что правильная квантовомеханическая теория дает (в простейших случаях) эквивалентный результат. В наших прежних рассмотрениях мы не учитывали «тормозящей» силы в атомном осцилляторе, а сейчас это будет сделано. Такая сила соответствует сопротивлению при движении, т. е. она пропор­циональна скорости электрона. Уравнением движения при этом будет

***F****=qe****E*** *=m(x+γx+ω20x),* (32.1)

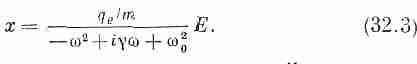
где *х —* перемещение, параллельное направлению поля Е. (Осциллятор предполагается *изотропным,* т. е. восстанавли­вающая сила одинакова во всех направлениях. Кроме того, на время мы ограничимся линейно поляризованной волной, так что поле **Е** не меняет своего направления.) Если действую­щее на атом электрическое поле изменяется со временем сину­соидально, то мы пишем.

E=E0eiωt. (32.2)

С той же самой частотой будет осциллировать и перемещение, поэтому можно считать

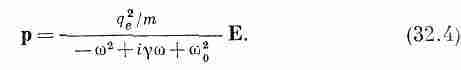
*х=х0еiωt .*

Подставляя *х=iωх* и *х=-ω*2х, можно выразить *х* через *Е:*



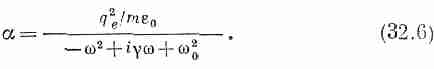
А зная перемещение, можно вычислить ускорение *х* и найти от­ветственную за преломление излученную волну. Именно таким способом в гл. 31 (вып. 3) мы подсчитывали показатель пре­ломления.

Теперь же мы пойдем другим путем. Индуцированный дипольный момент атома *р* равен *qex,* или в силу уравнения (32.3)



Так как **р** пропорционально **Е**, то мы пишем

**р**=ε0α(ω)**Е**, (32,5) где α — [*атомная поляризу**емость*](#прим1)*:*



Подобный же ответ для движения электронов в атоме дает и квантовая механика, но с учетом следующих особен­ностей. У атомов есть несколько собственных частот, каждая из которых имеет свою диссипативную постоянную γ. Кроме того, каждая гармоника имеет еще свою эффективную «силу», выражаемую в виде произведения поляризуемости при дан­ной частоте на постоянную связи *f*, которая, как ожидается, по порядку величины равна единице. Обозначая каждый из трех параметров ω0, γ и *f* для каждой из гармоник через ωok, γk и fk и суммируя по всем гармоникам, мы вместо (32.6) получаем

C:\Мои документы\gray.jpg

Если число атомов в единице объема вещества равно *N,* то поляризация **Р** будет просто *Np=ε0NαE,* т. е. пропорцио­нальна *Е:*

**Р**=ε0Nα(ω)**Е**. (32.8)

Другими словами, когда на материал действует синусоидальное электрическое поле, оно индуцирует пропорциональный себе дипольный момент, причем константа пропорциональности а, как мы уже отмечали, зависит от частоты. При очень больших частотах α мала: реакция материала слабая. А вот при низких частотах реакция может быть очень сильной. Константа про­порциональности, кроме того, еще оказывается комплексной, т. е. поляризация не следует точно за всеми изменениями элект­рического поля, а в какой-то степени может быть сдвинута по фазе. Во всяком случае, электрическое поле вызывает в мате­риале поляризацию, пропорциональную его напряженности.

**§ 2. Уравнения Максвелла в диэлектрике**

Наличие в веществе поляризации означает, что там возни­кают поляризационные заряды и токи, которые необходимо учитывать в полных уравнениях Максвелла при нахождении полей. Сейчас мы собираемся решать уравнения Максвелла для случая, когда заряды и токи не равны нулю, но неявно опреде­ляются вектором поляризации. Нашим первым шагом должно быть явное нахождение плотности зарядов ρ и плотности тока **j,** усредненных по тому же самому малому объему, который имел­ся в виду при определении вектора Р. Потом необходимые нам значения ρ и j могут быть определены из поляризации. В гл. 10 (вып. 5) мы видели, что когда поляризация **Р** меняется от точки к точке, то возникает плотность зарядов:

ρпол=-∇•**Р**. (32.9)

В то время мы имели дело со статическими полями, но эта же формула справедлива и для переменных полей. Но когда **Р** изменяется со временем, заряды движутся, так что появляется поляризационный *ток.* Каждый из осциллирующих зарядов вносит в ток свой вклад, равный произведению его заряда *qe* на скорость *v.* Когда же таких зарядов в единице объема *N* штук, то они создают плотность тока **j**:

***j****=Nqe****v****.*

Ну а поскольку известно, что *v=dx/dt,* то *j=Nqedx/dt,* что как раз

равно dP/dt.Следовательно, при переменной поляризации воз­никает плотность тока

**j**пол**=**d**P**/dt (32.10)

Наша задача стала теперь простой и понятной. Мы пишем уравнения Максвелла с плотностями заряда и тока, определяе­мыми поляризацией **Р** посредством уравнений (32.9) и (32.10). (Предполагается, что других зарядов и токов в веществе нет.) Затем мы свяжем **Р** с **Е** формулой (32.5) и будем разрешать их относительно **Е** и **В**, отыскивая при этом волновое решение.

Но прежде чем приступить к решению, мне бы хотелось сде­лать одно замечание исторического характера. Первоначально Максвелл писал свои уравнения в форме, отличающейся от той, в которой они используются нами. И именно потому, что урав­нения писались в другой форме в течение многих лет (да и сей­час многими пишутся так), я постараюсь объяснить вам разни­цу. В те дни механизм диэлектрической проницаемости не был понятен с ясностью и полнотой. Не была ясна ни природа ато­мов, ни существование поляризации в веществе. Поэтому тогда не понимали, что ∇•**P** дает дополнительный вклад в плотность заряда р. Были известны только заряды, не связанные в атомах (такие, как заряды, текущие по проводу или возникающие при трении).

Сегодня же мы предпочитаем обозначать через ρ *полную* плотность зарядов, включая в нее и заряды, связанные с инди­видуальными атомами. Если назвать эту часть зарядов ρпол, то можно написать

ρ=ρпол+ρдр,

где ρдр— плотность зарядов, учтенная Максвеллом и относя­щаяся к другим зарядам, не связанным с определенными атомами. При этом мы бы написали

C:\Мои документы\gray.jpg

После подстановки ρпол из (32.9) получаем

C:\Мои документы\gray.jpg

или

C:\Мои документы\gray.jpg

В плотность тока, фигурирующую в уравнениях Макс­велла для ∇X**B**, вообще говоря, тоже вносится вклад от связанных атомных электронных токов. Поэтому мы можем написать

**j**=**j**пол+**j**др,

причем уравнение Максвелла приобретает вид

C:\Мои документы\gray.jpg

Используя уравнение (32.10), получаем

C:\Мои документы\gray.jpg

Теперь вы видите, что если бы мы *определили* новый вектор **D**

**D**=ε0**E**+**P**, (32.14)

то два уравнения поля приняли бы вид

∇•**D**=ρдр (32.15)

и

C:\Мои документы\gray.jpg

Это и есть та форма уравнений, которую использовал Мак­свелл для диэлектриков. А вот и остальные два уравнения:

∇X**Е**=-*д***B**/*д*t

и

∇•**B**=0,

которые в точности совпадают с нашими.

Перед Максвеллом и другими учеными того времени вставала проблема магнетиков (за них мы вскоре примемся). Они ничего не знали о циркулирующих токах, ответственных за атомный магнетизм и поэтому, в плотности тока утеряли еще одну часть. Вместо уравнения (32.16) они на самом деле писали

C:\Мои документы\gray.jpg

где **Н** отличается от ε0с2**В**, так как последнее учитывает эффекты атомных токов. (При этом **j'** представляет то, что осталось от то­ков.) Таким образом, у Максвелла было *четыре* полевых век­тора: **Е**, **D,** **В** и **Н**, причем в **D** и **Н** скрывалось то, на что он не обратил внимания,— процессы, происходящие внутри вещест­ва. Уравнения, написанные в таком виде, вы встретите во мно­гих местах.

Чтобы решить их, необходимо как-то связать **D** и **Н** с дру­гими полями, поэтому зачастую писали

**D =εE**

и

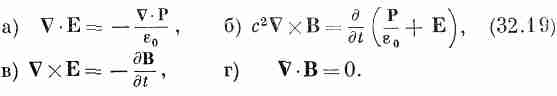
**В=μH.** (32.18)

Однако эти связи верны лишь приближенно для некоторых ве­ществ, и то лишь когда поля не изменяются слишком быстро со временем. (Для синусоидально изменяющихся полей зачастую *можно* писать уравнения таким способом, считая при этом ε и μкомплексными функциями частоты, но для произволь­ных изменений поля со временем это неверно.) На какие только ухищрения не пускаются ученые, чтобы решить уравнения! А мне кажется, что правильнее всего оставить уравнения запи­санными через фундаментальные величины, как мы понимаем их теперь, т. е. как раз то, что мы и проделали.

**§ 3. Волны в диэлектрике**

Теперь нам предстоит выяснить, какого сорта электро­магнитные волны могут существовать в диэлектрическом ве­ществе, где других зарядов, кроме тех, что связаны в атомах,

нет. Таким образом, мы возьмем ρ=-∇•**Р** и **j**=*д***P**/*д*t . При этом уравнения Максвелла примут такой вид:



Мы можем решить эти уравнения, как делали это прежде. Начнем с применения к уравнению (32.19в) операции ротора:

∇X(∇X**E**)=-(*д*/*д*t)∇X**B**.

Используя затем векторное тождество

∇X(∇X**E**) = ∇(∇•**E**)-∇2**E** и подставляя выражение для ∇X**B** из (32.19б), получаем

C:\Мои документы\gray.jpg

Используя уравнение (32.19а) для ∇•**Е**, находим

C:\Мои документы\gray.jpg

Таким образом, вместо волнового уравнения мы теперь полу­чили, что даламбертиан **Е** равен двум членам, содержащим по­ляризацию **Р**.

Однако **Р** зависит от **Е**, поэтому уравнение (32.20) все еще допускает волновые решения. Сейчас мы будем ограничиваться *изотропными* диэлектриками, т. е. **Р** всегда будет иметь то же направление, что и Е. Попробуем найти решение для волны, движущейся в направлении оси z. Электрическое поле при этом будет изменяться как еi(ωt-kz). Предположим также, что волна поляризована в направлении оси *х,* т. е. что электрическое поле имеет только x-компоненту. Все это записывается следую­щим образом:

Ex=E0ei(ωt-kz). (32.21)

Вы знаете, что любая функция от (z-*vt)* представляет вол­ну, бегущую со скоростью *v.* Показатель экспоненты в выраже­нии (32.21) можно переписать в виде

-ik[z-(ω/k)t],

так что выражение (32.21) представляет волну, фазовая ско­рость которой равна

vфаз=ω/k.

В гл. 31 (вып. 3) показатель преломления nопределялся нами из формулы

vфаз=c/n.

С учетом этой формулы (32.21) приобретает вид

*Ex=E0eiω(t-nz/c).*

Таким образом, показатель nможно определить, если мы най­дем ту величину k, которая необходима, чтобы выражение (32.21) удовлетворяло соответствующим уравнениям поля, и затем воспользуемся соотношением

*n=kc/ω.* (32.22)

В изотропном материале поляризация будет иметь только x-компоненту; кроме того, **Р** не изменяется с изменением коор­динаты *х,* поэтому ∇•**P**=0 и мы сразу же избавляемся от пер­вого члена в правой стороне уравнения (32.20). Вдобавок мы считаем наш диэлектрик «линейным», поэтому *Рх* будет изме­няться как *еiωt* и *d2Px/dt2= -ω*2Px. Лапласиан же в уравне­нии (32.20) превращается просто в *д*2*Ex/dz2=-k2Еx,* так что в результате получаем

C:\Мои документы\gray.jpg

Теперь на минуту предположим, что раз **Е** изменяется си­нусоидально, то **Р** можно считать пропорциональной **Е**, как в уравнении (32.5). (Позднее мы вернемся к этому предположе­нию и обсудим его.) Таким образом, пишем

*Px=ε0NαEx.*

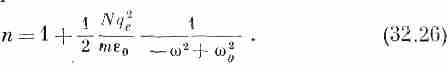
При этом *Ех* выпадает из уравнения (32.23), и мы находим

*k2=ω2/c2(1+Nα).* (32.24)

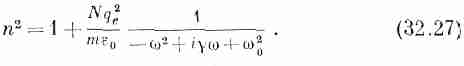
Мы получили, что волна вида (32.21) с волновым числом *k,* задаваемым уравнением (32.24), будет удовлетворять уравне­ниям поля. Использование же выражения (32.22) для показате­ля nдает

n2 = l+Nα. (32.25)

Сравним эту формулу с тем, что получилось у нас для пока­зателя преломления газа (гл. 31, вып. 3). Там мы нашли урав­нение (31.19), которое тогда имело вид



Формула (32.25) после подстановки ω из (32.6) дает



Что здесь нового? Во-первых, появился новый член iγω, возникший в результате учета поглощения энергии в осцилля­торах. Во-вторых, слева вместо n теперь стоит *n2* и, кроме того, отсутствует дополнительный множитель *1/2.* Но заметьте, что если значение N достаточно мало, так что *n* близок к единице (как это имеет место в газе), то выражение (32.27) говорит, что *n2* равен единице плюс некое малое число, т. е. n2=1+ε. При этом условии мы можем написать, что n=√(1+ε)≈l+ε/2, и оба выра­жения оказываются эквивалентными. Таким образом, наш но­вый метод дает для газа тот же самый, найденный нами ранее результат.

Теперь можно надеяться, что выражение (32.27) должно давать показатель преломления и для плотных материалов. Но по некоторым причинам оно нуждается в модификации. Во-первых, при выводе этого уравнения предполагалось, что поля­ризованное поле, действующее на каждый из атомов,— это поле *Ех.* Однако такое предположение *неверно,* поскольку в плотном материале существуют и другие поля, создаваемые соседними атомами, которые могут быть сравнимы с *Ех.* Анало­гичную задачу мы уже рассматривали при изучении статических полей в диэлектрике (см. гл. 11, вып. 5). Вы, вероятно, помните, что мы нашли поле, действующее на отдельный атом, представив его сидящим в сферической полости в окружающем диэлектрике. Поле в такой полости (мы назвали его *локальным)* увеличивается по сравнению со средним полем **Е** на величину **Р**/3ε0. (Не за­будьте, однако, что этот результат, строго говоря, справедлив только для изотропного материала, а также в случае куби­ческого кристалла.)

Те же рассуждения верны и для электрического поля в вол­не, но до тех пор, пока длина ее много больше расстояния между атомами. При таком ограничении

C:\Мои документы\gray.jpg

Именно это локальное поле следует использовать вместо **Е** в (32.8), т. е. это выражение должно быть переписано следую­щим образом:

**Р** =ε0Nα**Е**лок. (32.29)

Подставляя теперь **Е**лок из формулы (32.28), находим

C:\Мои документы\gray.jpg

или

C:\Мои документы\gray.jpg

Иными словами, **Р** для плотного материала все еще пропорцио­нальна **Е** (для синусоидального поля). Однако константа про­порциональности будет уже ε0/Nα/[1-(Nα/3)], а не ε*0Nallfa,* как раньше. Таким образом, нам нужно поправить формулу (32.25):

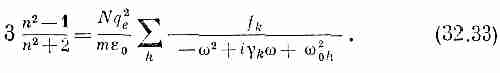
C:\Мои документы\gray.jpg

Более удобно переписать это в виде

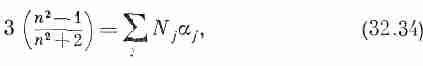
C:\Мои документы\gray.jpg

который алгебраически эквивалентен прежнему. Это и есть известная формула Клаузиуса — Моссотти.

В плотном материале возникает и другое усложнение. По­скольку атомы расположены слишком тесно, они сильно взаимо­действуют друг с другом. Поэтому внутренние гармоники осцил­ляции изменяются. Собственные частоты атомных осцилляций размазываются этими взаимодействиями и обычно весьма сильно подавляются ими, а коэффициент трения становится очень боль­шим. Таким образом, все ω0 и γ твердого вещества будут дру­гими, чем для свободных атомов. С этой оговоркой мы все-таки можем представлять *а,* по крайней мере приближенно, уравнением (32.7), так что



Наконец, последнее усложнение. Если плотный материал представляет собой смесь нескольких компонент, то каждая из них дает свой вклад в поляризацию. Полная α будет суммой вкладов различных компонент смеси [за исключением неточ­ности приближения локального поля в упорядоченных кри­сталлах, т. е. выражения (32.28) — эффекты, которые мы обсуж­дали при разборе сегнетоэлектриков]. Обозначая через *nj* число атомов каждой компоненты в единице объема, мы должны заменить формулу (32.32) следующей:



где каждая αj будет определяться выражением типа (32.7). Выражение (32.34) завершает нашу теорию показателя прелом­ления. Величина 3(n2-1)/(n2+2) задается комплексной функ­цией частоты, каковой является средняя атомная поляризуе­мость α(ω). Точное вычисление α(ω) (т. е. нахождение *fk, γk* и ω0k) для плотного вещества — одна из труднейших задач квантовой механики. Это было сделано только для нескольких особенно простых веществ.

**§ 4. Комплексный показатель преломления**

Обсудим теперь следствия нашего результата (32.33). Прежде всего обратите внимание на то, что α — комплексное число, так что показатель преломления *n* тоже оказывается комплексным. Что это означает? Давайте возьмем и запишем *n* в виде веществен­ной и мнимой частей:

C:\Мои документы\gray.jpg

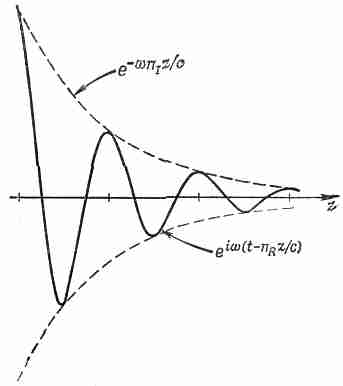
где *nR* и *nj —* вещественные функции ω. Мы написали *inj* с отрицательным знаком, так что n*j* для обычных оптических материалов будет положительной величиной. (Для обычных оптически неактивных материалов, которые не служат сами источниками света, как это происходит у лазеров, γ*—*положитель­ное число, а это делает мнимую часть *n* отрицательной.) Наша: плоская волна запишется теперь через *n* следующим образом:

*Ех=Е0е-iω(t-nz/c).*

Если подставить *n в* виде выражения (32.35), то мы получим

C:\Мои документы\gray.jpg

и с увеличением z она экспоненциально убывает. График напря­женности электрического поля как функции от z в некоторый момент времени и для *n*I≈ *nR/2π* показан на фиг. 32.1.



*Фиг. 32.1. График поля Ех в некоторый момент t при nI≈nR2/π*.

Мнимая часть показателя преломления из-за потерь энергии в атомных осцилляторах приводит к ослаблению волны. *Интенсивность* волны пропорциональна квадрату амплитуды, так что

Интенсивность ~е-2ωnIz/c.

Часто это записывается как

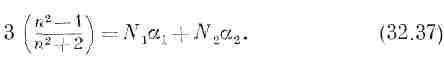
Интенсивность ~*е-βz,*

где β=2ωnI/с — *коэффициент поглощения.* Таким образом, в уравнении (32.33) содержится не только теория показателя преломления вещества, но и теория поглощения им света.

В тех материалах, которые мы обычно считаем прозрачными, величина c/ωnI, имеющая размерность длины, оказывается гораздо больше толщины материала.

**§ 5. Показатель преломления смеси**

В нашей теории показателя преломления имеется еще одно предсказание, которое можно проверить экспериментально. Предположим, что мы рассматриваем смесь двух материалов. Показатель преломления смеси не будет средним двух показа­телей, а определяется через сумму двух поляризуемостей, как в уравнении (32.34). Если, скажем, мы интересуемся показа­телем преломления раствора сахара, то полная поляризуемость будет суммой поляризуемостей воды и сахара. Но каждая из них, разумеется, должна подсчитываться исходя из данных о числе молекул *N* данного сорта в единице объема. Другими сло­вами, если в данном растворе содержится *N1* молекул воды, поляризуемость которой α1, и *N2* молекул сахарозы (C12H22O11), поляризуемость которой α2, то мы должны получить

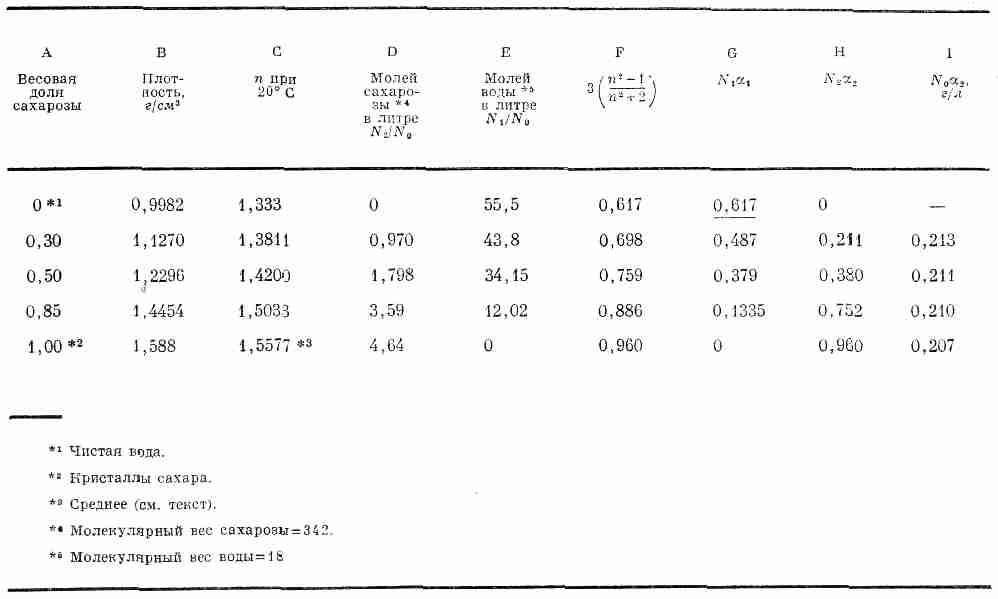


Этой формулой можно воспользоваться для экспериментальной проверки нашей теории — измерения показателя для различ­ных концентраций сахарозы в воде. Однако здесь мы должны сделать несколько допущений. Наша формула предполагает, что при растворении сахарозы никакой химической реакции не происходит и что возмущение индивидуальных осцилляторов при различных частотах отличается не слишком сильно. Поэ­тому наш результат, безусловно, будет только приближенным. Тем не менее давайте посмотрим, насколько он хорош.

Раствор сахара мы выбрали потому, что мы располагаем хорошими данными измерений [показателя преломления](#прим2) и, кроме того, сахар представляет собой молекулярный кристалл и переходит в раствор без ионизации и других изменений хими­ческого состояния.

В первых трех столбцах табл. 32.2 приведены данные из указанного справочника. В столбце А дан процент сахарозы по весу, в столбце В приведена измеренная плотность в *г/см3,* а в столбце С даны измерения показателя преломления света с длиной волны 589,3 *ммк.* В качестве показателя чистого сахара мы взяли результаты измерений для кристалла сахара. Эти кристаллы не изотропны, так что показатель преломления в разных направлениях различен.

***Таблица 32.2*** в ПОКАЗАТЕЛЬ ПРЕЛОМЛЕНИЯ РАСТВОРА САХАРА И СРАВНЕНИЕ С ПРЕДСКАЗАНИЕМ УРАВНЕНИЯ (32.37)



Справочник дает три вели­чины:

n1=1,5376, n2=1,5651, n3=1,5705.

Мы взяли среднее.

Попытаемся теперь подсчитать *n* для каждой концентрации, но мы не знаем, какие нужно взять значения α1 и α2. Проверим теорию таким способом: будем предполагать, что поляризуемость воды (α1) при всех концентрациях одна и та же, и подсчитаем поляризуемость сахарозы, используя экспериментальную ве­личину *n* и разрешая (32.37) относительно α2. Если теория верна, то мы для любой концентрации должны получить одно и то же значение α2.

Прежде всего нам нужно знать числа *N1* и *N2;* выразим их через число Авогадро *N0.* В качестве нашей единицы объема давайте возьмем один литр (1000 *см3).* Тогда отношение *Ni/N0* равно весу одного литра, поделенному на грамм-молекулу. А вес литра равен произведению плотности (умноженной на 1000, чтобы получить граммы) на весовую долю либо сахарозы, либо воды. Таким путем получаем *N2//N0* и *n1/n0,* записанные в столбцах D и Е нашей таблицы. В столбце F мы подсчитали 3(n2-1)/(n2+2), исходя из экспериментальных значений *n* (столбец С). Для чистой воды 3(n2-1)/(n2+2) равно 0,617, что как раз будет *N1α1.* Затем мы можем заполнить остальную часть колонки G, поскольку для каждой строки отношение G/E должно быть одной и той же величиной, именно 0,617:55,5. Вычитая столбец G из столбца F, находим вклад *N2α2,* вносимый сахарозой, который записан в столбце Н. А затем, поделив эти данные на величину *N2/N0* из столбца D, мы получаем величину N0α2, приведенную в столбце 1.

Из нашей теории мы ожидали, что все величины *N0α2* должны получиться одинаковыми. Они получились хотя и не точно равными, но довольно близкими друг к другу. Отсюда можно заключить, что наши идеи правильны. Более того, мы нашли, что поляризуемость молекул сахара, по-видимому, не зависит сильно от ее окружения: их поляризуемость приблизительно одна и та же как в разбавленном растворе, так и в кристалле.

**§ 6. Волны в металлах**

Теорию, которая в этой главе развивалась для твердых мате­риалов, после очень небольшой модификации вполне можно применить и к хорошим проводникам типа металлов. На неко­торые из электронов в металлах не действует сила, привязы­вающая их к какому-то частному атому; это так называемые «свободные» электроны, ответственные за проводимость. Там есть и другие электроны, которые связаны в атомах, и изложен­ная выше теория непосредственно приложима именно к ним. Однако их влияние обычно «забивается» эффектами электронов проводимости. Поэтому сейчас мы рассмотрим только эффекты

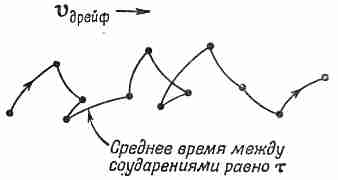
свободных электронов.

Если на электрон не действует никакая восстанавливающая сила, но сопротивление его движению все же остается, то урав­нение движения электрона отличается от (32.1) только отсут­ствием члена ω20*х.* Так что единственное, что нам нужно сделать,— это положить ω20=0 во всей остальной части наших выводов. Но есть еще одно отличие. В диэлектриках мы должны различать среднее и локальное поля и вот почему: в изоляторе каждый из диполей занимает фиксированное положение по отношению к другим диполям. Но в металле из-за того, что электроны проводимости движутся и меняют свое место, поле, действующее на них, *в среднем* как раз равно среднему полю **Е**. Так что по­правка, которую мы сделали к формуле (32.5), не годится, т. е. применение формулы (32.28) для электронов проводимости *недопустимо.* Следовательно, выражение для показателя пре­ломления в металле должно выглядеть подобно выражению (32.27), в котором следует положить ω0=0, именно:

C:\Мои документы\gray.jpg

Это только вклад от электронов проводимости, которые, как мы думаем, играют в металлах главную роль.

Но теперь мы даже знаем, какой нам взять величину γ, ибо она связана с проводимостью металла. В гл. 43 (вып. 4) мы обсудили связь проводимости металлов с диффузией свобод­ных электронов в кристалле. Электроны движутся по ломаному пути от одного соударения до другого, а между этими толчками они летят свободно, за исключением ускорения из-за какого-то среднего электрического поля (фиг. 32.2).



*Фиг. 32.2. Движение свободного электрона.*

Там же, в гл. 43 (вып. 4), мы нашли, что средняя скорость дрейфа равна просто произведению ускорения на среднее время между соударе­ниями τ. Ускорение равно *qeE/m,* так что

vдрейф=(qeE/m)τ. (32.39)

В этой формуле поле ***Е***считается постоянным, так что скорость vдрейф тоже постоянна. Поскольку в среднем ускорение отсут­ствует, сила торможения равна приложенной силе. Мы опреде­лили γ через силу торможения, равную γ*mv* [см. (32.1)], или *qeE,* поэтому получается, что

γ=1/τ (32.40)

Несмотря на то что мы не можем с легкостью измерять непо­средственно τ, можно определять его, измеряя проводимость металла. Экспериментально обнаружено, что электрическое поле **Е** порождает в металлах ток с плотностью **j**, пропорцио­нальной **Е** (для изотропного материала, конечно):

причем постоянная пропорциональности σ называется *прово­димостью.*

В точности то же самое мы ожидаем из выражения (32.39),

если положить

**j**=Nqevдрейф,

тогда

C:\Мои документы\gray.jpg

Таким образом, τ, а следовательно, и *γ* могут быть связаны с наблюдаемой электрической проводимостью. Используя (32.40] и (32.41), можно переписать нашу формулу (32.38) для по­казателя преломления в виде

C:\Мои документы\gray.jpg

где

C:\Мои документы\gray.jpg

Это и есть известная формула для показателя преломления в металлах.

**§ 7. Низкочастотное и высокочастотное приближения; глубина скин-слоя и плазменная частота**

Наш результат для показателя преломления в металлах —формула (32.42) — предсказывает для распространения волн с разными частотами совершенно различные характеристики. Прежде всего давайте посмотрим, что получается при *низких* частотах. Если величина ω достаточно мала, то (32.42) можно приближенно записать в виде

C:\Мои документы\gray.jpg

Возведением [в квадрат](#прим3) можно проверить, что

C:\Мои документы\gray.jpg

таким образом, для низких частот

C:\Мои документы\gray.jpg

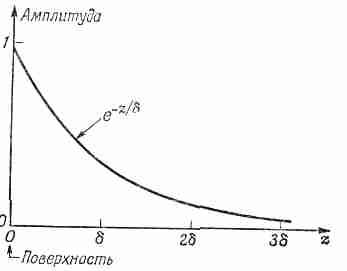
Вещественная и мнимая части *n* имеют одну и ту же величину. С такой большой мнимой частью *n* волны в металлах затухают очень быст­ро. В соответствии с выражением (32.36) амплитуда волны, идущей в направлении оси z, уменьшается как

C:\Мои документы\gray.jpg

Запишем это в виде

е-z/δ, (32.47)

где δ — это то расстояние, на котором амплитуда волны умень­шается в е=2,72 раза, т. е. приблизительно в 3 раза. Ампли­туда такой волны, как функция от *z,* показана на фиг. 32.3.



*Фиг. 32.3. Амплитуда попе­речной электромагнитной вол­ны в металле как функция расстояния.*

Поскольку электромагнитные волны проникают в глубь металла только на это расстояние, величина δ называется *глубиной скин-слоя* и определяется выражением

C:\Мои документы\gray.jpg

Но что все-таки мы понимаем под «низкими» частотами? Взглянув на уравнение (32.42), мы видим, что его можно приб­лиженно заменить уравнением (32.44), только когда ωτ много меньше единицы и *когда ωε*0/σ также много меньше единицы, т. е. наше низкочастотное приближение применимо при

ω<<1/τ

и

ω<<σ/ε0. (32.49)

Давайте посмотрим, какие частоты соответствуют этому приближению для такого типичного металла, как медь. Для вычисления τ воспользуемся уравнением (32.43), а для вычис­ления σ/ε0 — известными значениями σ и ε0. Справочник дает нам такие данные:

σ=5,76•107 (ом•м)-1,

Атомный вес = 63,5 г,

Плотность = 8,9 *г/см3,*

Число Авогадро=6,02•1023.

Если мы предположим, что на каждый атом приходится по од­ному свободному электрону, то число электронов в кубическом метре будет равно

N=8,5•1028 м*-3.*

Используя далее

qe=1,6•10-19 *кулон,*

*ε*0=8,85•10-12 *ф/м,*

*m*=9,11•10-31 *кг,*

получаем

τ=2,4•10-14 *сек,*

1/τ=4,l•1013 сек-1,

σ/ε0 = 6,5•1018 *сек-1.*

Таким образом, для частот, меньших чем приблизительно 1012 *гц,* медь будет иметь описанное нами «низкочастотное» пове­дение. (Это будут волны с длиной, большей 0,3 *мм,* т. е. *очень* короткие радиоволны!)

Для таких волн глубина скин-слоя равна

C:\Мои документы\gray.jpg

Для микроволн с частотой 10 000 *Мгц* (3-сантиметровые волны)

σ=6,7•10-4 *см,*

т. е. волны проникают на очень малое расстояние.

Теперь вы видите, почему при изучении полостей (и волно­водов) нам нужно беспокоиться только о полях внутри полости, а не о волнах в металле или вне полости. Кроме того, мы видим, почему серебрение или золочение полости уменьшает потери в ней. Ведь потери происходят благодаря токам, которые ощу­тимы только в тонком слое, равном глубине скин-слоя.

Рассмотрим теперь показатель преломления в металле типа меди при высоких частотах. Для очень высоких частот сот много больше единицы, и уравнение (32.42) очень хорошо аппрокси­мируется следующим:

C:\Мои документы\gray.jpg

Для высокочастотных волн показатель преломления в метал­лах становится чисто вещественным и меньшим единицы! Это следует также из выражения (32.38), если пренебречь диссипативным членом с 7, что может быть сделано при очень боль­ших значениях ω. Выражение (32.38) дает при этом

C:\Мои документы\gray.jpg

что, разумеется, эквивалентно уравнению (32.50). Раньше нам

уже встречалась величина *(Nq2e/ε0m)1/2,* которую мы назвали

плазменной частотой (см. гл. 7, § 3, вып. 5);

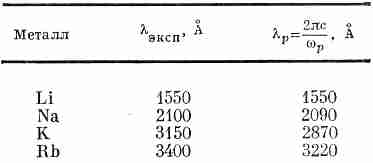
C:\Мои документы\gray.jpg

Таким образом, (32.50) или (32.51) можно переписать в виде

C:\Мои документы\gray.jpg

Эта плазменная частота является своего рода «критической». Для ω<ωр показатель преломления металла имеет мнимую часть и происходит поглощение волн, но при ω>>ωp показатель становится вещественным, а металл — прозрачным. Вы знаете, конечно, что металлы в достаточной мере прозрачны для рент­геновских лучей. Но некоторые металлы прозрачны даже для ультрафиолета. В табл. 32.3 мы приводим для некоторых ме­таллов экспериментально наблюдаемые длины волн, при кото­рых эти металлы начинают становиться прозрачными. Во второй колонке дана вычисленная критическая длина волны λp =2πc/ωp . Учитывая, что экспериментальная длина волны определена не очень хорошо, согласие с теорией следует приз­нать замечательным.

*Таблица 32.3* • длины волн, при ко­торых МЕТАЛЛ СТАНО­ВИТСЯ ПРОЗРАЧНЫМ



Вас может удивить, почему плазменная частота ωр должна иметь отношение к распространению волн в металлах. Плаз­менная частота появилась у нас в гл. 7 (вып. 5) как собственная частота колебаний *плотности* свободных электронов. (Электри­ческое расталкивание группы электронов и их инерция приво­дят к колебаниям плотности.) *Продольные* волны плазмы резо­нируют при частоте ω. Но сейчас мы говорим о *поперечных* вол­нах, и мы уже нашли, что при частотах, меньших ω*р,* происхо­дит их поглощение. (Это очень интересное и отнюдь *не случайное* совпадение.)

Хотя мы все время говорили о распространении волн в ме­таллах, вы одновременно, должно быть, почувствовали универ­сальность явлений физики: нет никакой разницы в том, находят­ся ли свободные электроны в металле, в плазме, в ионосфере Земли или в атмосфере звезд. Чтобы понять распространение радиоволн в ионосфере, можно воспользоваться тем же выраже­нием, разумеется, при надлежащих значениях величин *N* и τ. Теперь мы можем видеть, почему длинные радиоволны погло­щаются или отражаются ионосферой, тогда как короткие сво­бодно проходят через нее. (Поэтому для связи с искусственными спутниками Земли должны применяться короткие волны.)

Мы говорили о распространении предельных высоко- и низ­кочастотных волн в металлах. Для промежуточных же частот необходимо использовать «полновесное» уравнение (32.42). В общем случае показатель преломления будет иметь веществен­ную и мнимую части, и при распространении волн в металлах происходит их поглощение. Очень тонкие слои металла про­зрачны даже для обычных оптических частот. В качестве примера приведем специальные защитные очки для рабочих, работаю­щих около высокотемпературных печей. Эти очки изготавли­ваются напылением на стекло очень тонкого слоя золота; стекло это достаточно прозрачно для видимого света и на просвет выглядит как зеленое, но инфракрасные лучи сильно поглощает.

И, наконец, от читателя невозможно скрыть тот факт, что многие из этих формул в некотором отношении напоминают формулы для диэлектрической проницаемости χ*,* рассмотренные в гл. 10 (вып. 5). Диэлектрической проницаемостью χ измеряется реакция материала на статическое электрическое поле, т. е. когда ω=0. Если вы посмотрите повнимательнее на определе­ние *n* и *χ,* то обнаружите, что *χ* есть не что иное, как предел n2 при ω→0. В самом деле, положив в уравнениях этой главы ω=0 и n2=χ*,* мы воспроизведем уравнения теории диэлектри­ческой проницаемости гл. 11 (вып. 5).

***\* Или записав — i=е-iπ/2; √-i=e-iπ/4 = соsπ/4- isinπ/4, что приводит к тому же результату.***

***\* Взяты из справочника «Handbook of Physics and Chemistry».***

***\* Всюду в этой главе мы будем пользоваться обозначениями, приня­тыми в гл. 31 (вып. 3); пусть α — атомная поляризуемость, как это опреде­лено здесь. В предыдущей главе мы пользовались буквой α для обозначе­ния объемной поляризуемости, т. е. отношения Р к Е. Но в обозначениях этой главы P=Nαε0E [см. выражение (32.8)].***

***Глава 33***

**ОТРАЖЕНИЕ ОТ ПОВЕРХНОСТИ**

[**§1. Отра****ж****ение и преломле****ние света**](#а1)

[**§2. Волны в** **плотных мат****ериалах**](#а2)

[**§3. Гранич****ные усло****вия**](#а3)

[**§4. Отраженн****ая и п****реломленная волны**](#а4)

[**§5. Отраже****ние** **от металлов**](#а5)

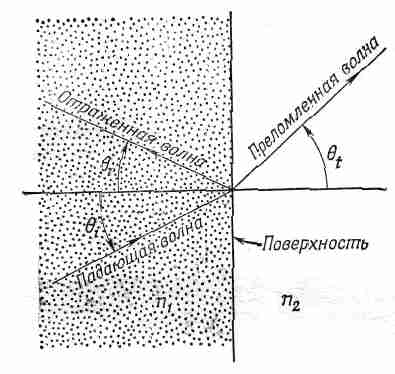
[**§6. Полное** **внутре****ннее отражение**](#а6)

*Повторить:* гл. 33 (вып. 3) « Поляризация »

**§ 1. Отражение и преломление света**

Предметом обсуждения в этой главе будет пре­ломление и отражение света и электромагнит­ных волн вообще от поверхности. О законах отражения и преломления света мы говорили уже в вып. 3. Вот что мы там выяснили:

1. Угол отражения равен углу падения. Причем углы определяются, как это показано на фиг. 33.1:



*Фиг. 33.1. Отражение и преломление волн на поверх­ности.*

*Направления распространения волн перпендикулярны их греб­ням.*

θr=θi. (33.1)

2. Произведение *n*sinθ одинаково как для падающего луча, так и для преломленного (закон Снелла):

*n1*sinθ=n2sinθt. (33.2)

3. Интенсивность отраженного света зави­сит как от угла падения, так и от направления поляризации. Для вектора **Е**, перпендикуляр­ного плоскости падения, коэффициент отраже­ния R┴ равен

C:\Мои документы\gray.jpg

Для вектора **Е**, параллельного плоскости паде­ния, коэффициент отражения R║ равен

C:\Мои документы\gray.jpg

4. Для перпендикулярно падающего луча (разумеется, при любой поляризации!)

C:\Мои документы\gray.jpg

(Мы использовали индекс *i* для обозначения величин в падающем луче, *t —* в преломленном, а r — в отраженном.)

Наши прежние рас­суждения практически достаточно полны для обычной работы, но мы собираемся применить здесь другой способ. Вы хотите знать почему? Причина заключается в том, что раньше мы считали показатель преломления вещественным (т. е. что никакого поглощения в материале не происходит). Однако есть и другая причина: вам следует уметь обращаться с волнами на поверхности с точки зрения уравнений Максвелла. Ответы, конечно, получатся одинаковые, но теперь уже путем непосред­ственного решения волновой задачи, а не с помощью правдо­подобных рассуждений.

Я хочу подчеркнуть, что амплитуда отраженной от поверх­ности волны не определяется такими свойствами *материала,* как показатель преломления. Она зависит от чисто «поверхно­стных свойств», которые, строго говоря, определяются тем, как обработана поверхность. Тонкий слой посторонней примеси на границе между двумя материалами с показателями n1 и n2 обычно изменяет отражение. (Имеются всяческие виды интер­ференции, примером которой могут служить разноцветные масляные пленки на воде. Подбором толщины можно свести амплитуду отражения данной частоты к нулю. Именно так и делаются просветленные линзы.) Формулы, которые мы полу­чим, будут верны, только когда показатель преломления резко изменится на расстояниях, малых по сравнению с длиной волны. Длина волны света, например, составляет около 5000 Å, так*,* что под «гладкой» поверхностью мы понимаем поверхность, на которой условия изменяются всего на протяжении нескольких атомов (или на расстоянии нескольких ангстрем). Так что для света наши формулы будут работать только на хорошо отполированной поверхности. Вообще же если показатель преломления постепенно меняется на расстоянии нескольких длин волн, то отражение будет незначительным.

**§ 2. Волны в плотных материалах**

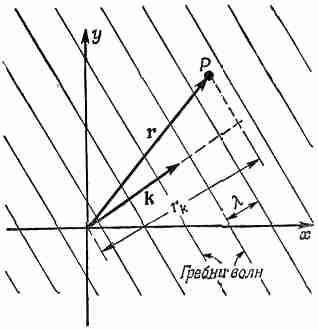
Прежде всего я напомню вам об удобном способе описания синусоидальных плоских волн, которым мы пользовались в гл. 36 (вып. 3). Любая *компонента* поля в волне (возьмем, на­пример, *Е)* может быть записана в форме

E=E0ei(ωt-k•r), (33.6)

где *Е —* амплитуда поля в точке г (относительно начала коор­динат) в момент *t.* Вектор **k** указывает направление распростра­нения волны, а его величина |**k**|=k=2πλ равна волновому числу. Фазовая скорость волны vфаз=ω/k для света в материале с показателем *n* будет равна c/n, поэтому

*k=ωn/c.* (33.7)

Предположим, что вектор **k** направлен по оси z; тогда **k•r** будет просто хорошо знакомым нам *kz.* Для вектора **k** в любом другом направлении z следует заменить на *rk —* расстояние от начала в направлении вектора **k**, т. е. *kz* мы должны заменить на *krk,* что как раз равно **k•r** (фиг. 33.2).



*Фиг. 33.2. Фаза волны в точке Р, распространяющейся в направ­лении k, равна (ωt-****k*•*r****).*

Таким образом, запись (33.6) является удобным представлением волны, идущей в любом направлении.

Разумеется, при этом мы должны помнить, что

***k*•*r****=kxx+kyy+k:zz,*

где *kx, ky* и *kz —* компоненты вектора **k** по трем осям. Мы уже отмечали однажды, что на самом деле величины (ω, *kx, ky, kz)* образуют четырехвектор и что его скалярное произведение на *(t, x, у, z)* является инвариантом. Таким образом, *фаза* волны есть инвариант и формулу (33.6) можно записать в виде

C:\Мои документы\gray.jpg

Однако сейчас нам такие хитрости не понадобятся.

Для синусоидального по­ля *Е,* подобного выражению (33.6), производная *dE/дt —* это то же самое, что и *iωE,* a *дЕ/дх —* то же, что и *ikx****E****,* и аналогично для остальных компо­нент. Вы видите, чем удобна форма (33.6): когда мы работаем с дифференциальными уравнениями, то дифференцирование заменяется простым умножением. Другое полезное качество состоит в том, что операция ∇*=(д/дx), (д/ду), (д/дz)* заменяется тремя умножениями (-*ikx,-iky , -ikz).* Но эти три множителя преобразуются как компоненты вектора **k**, так что оператор ∇ заменяется умножением на

C:\Мои документы\gray.jpg

Правило остается справедливым для операции ∇ в любой ком­бинации, будь то градиент, дивергенция или ротор. Например, z-компонента ∇X**Е** равна

C:\Мои документы\gray.jpg

Если и *Еу* и *Ех* изменяются как e-i**k•r**, то мы получаем

*-ikxEy+ikyEx,*

что представляет, как вы видите, z-компоненту —i**k**X**Е**.

Таким образом, мы получили очень полезный общий закон, что в любом случае, когда вам нужно взять градиент от вектора, который изменяется, как волна в трехмерном пространстве (а они в физике играют важную роль), эту операцию вы можете проделать быстро и почти без всяких раздумий, если вспомните, что оператор ∇ эквивалентен умножению на —i**k**.

Например, уравнение Фарадея

∇X**Е**=*д***B**/*д*t

превращается для волны в

— i**k**X**Е**=-iω**B**. Оно говорит, что

**В**=**k**X**E**/ω. (33.9)

Это соответствует результату, найденному ранее для волн в пу­стом пространстве, т. е. что вектор **В** в волне направлен под прямым углом к вектору **Е** и направлению распространения волны. (В пустом пространстве ω/k=с.) Знак в уравнении (33.9) вы можете проверить, исходя из того, что **k** является на­правлением вектора Пойнтинга **S**=ε0c2(**E**X**В**).

Если вы примените то же самое правило к другим уравне­ниям Максвелла, то снова получите результаты последней главы, в частности

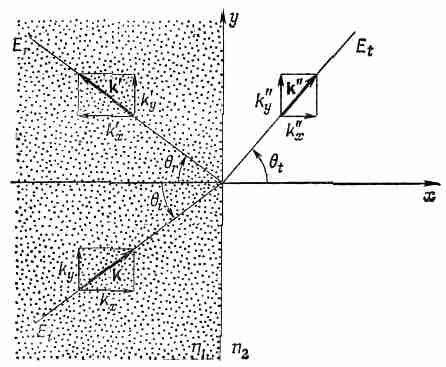
C:\Мои документы\gray.jpg

Но раз уже это известно нам, давайте не будем проделывать все сначала.

Если вы хотите поразвлечься, можете попытаться решить та­кую устрашающую задачу (в 1890 г. она предлагалась студен­там на выпускных экзаменах): решите уравнения Максвелла для плоской волны в *анизотропном* кристалле, т. е. когда поля­ризация **Р** связана с электрическим полем **Е** через тензор поля­ризуемости. Конечно, в качестве ваших осей вы выберете глав­ные оси тензора, так что связи при этом упростятся (тогда *Рх=αaЕх, Ру=αbЕу,* a *Pz=αcEz),* но направление волны и ее поляризация пусть останутся произвольными. Вы должны найти соотношение между **Е** и **В** и определить, как изменяется **k** с направлением распространения волны и ее поляризацией. После этого вам будет понятна оптика анизотропного кристалла. Лучше начать с более легкого случая дважды лучепреломляющего кристалла, подобного турмалину, для которого два коэффи­циента поляризуемости равны между собой (например, *αb=αc),* и попытаться понять, почему, когда мы смотрим через такой кристалл, мы видим два изображения. Если это вам удастся, тогда испытайте свои силы на более трудном случае, когда все три а различны. После этого вам уже будет ясен уровень ваших знаний — знаете ли вы столько же, сколько студент, заканчи­вавший университет в 1890 г. Но мы с вами в этой главе будем рассматривать только изотропные вещества.

Из опыта вам известно, что когда на границу раздела двух материалов, скажем воздуха и стекла или воды и бензина, попадает плоская волна, то возникают как отраженная, так и преломленная волны.

Предположим, что, кроме этого факта, нам больше ничего неизвестно, и посмотрим, что можно из него вывести. Выберем наши оси так, чтобы плоскость *yz* совпадала с поверхностью раздела, а плоскость *ху* была перпендикулярна фронту волны (фиг. 33.3).



*Фиг. 33.3. Векторы, распространения* k, k' *и* k" *для падающей, отраженной и прелом­ленной волн.*

Электрический вектор в падающей волне может быть записан в виде

C:\Мои документы\gray.jpg

Поскольку вектор **k** перпендикулярен оси z, то

**k•r***=kxx+kyy.* (33.12) Отраженную волну мы запишем как

C:\Мои документы\gray.jpg

так что ее частота равна ω', волновое число **k',** а амплитуда **Е'**0. (Мы, конечно, знаем, что частота и величина вектора **k** в отра­женной волне те же, что и в падающей волне, но не хотим пред­полагать даже это. Пусть это все получится само собой из мате­матического аппарата.) Наконец, запишем преломленную волну:

C:\Мои документы\gray.jpg

Вы знаете, что одно из уравнений Максвелла дает соотноше­ние (33.9), так что для каждой из волн

C:\Мои документы\gray.jpg

Кроме того, если показатели преломления двух сред мы обозна­чим через *n1* и *n*2, то из уравнения (33.10) получится

C:\Мои документы\gray.jpg

Поскольку отраженная волна находится в том же ма­териале, то

C:\Мои документы\gray.jpg

в то время как для преломленной волны

C:\Мои документы\gray.jpg

**§ 3. Граничные условия**

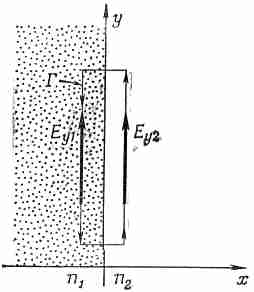
Все что мы делали до сих пор, было описанием трех волн; теперь нам предстоит выразить параметры отраженной и пре­ломленной волн через параметры падающей. Как это сделать?

Три описанные нами волны удов­летворяют уравнениям Максвелла в однородном материале, но, кро­ме того, уравнения Максвелла должны удовлетворяться и *на* границе между двумя материалами. Так что нам нужно сейчас посмотреть — что же происходит *на самой* границе. Мы най­дем, что уравнения Максвелла требуют, чтобы три волны опре­деленным образом согласовывались друг с другом.

Вот один из примеров того, что мы имеем в виду. Составляю­щая по оси *у* электрического поля **Е** должна быть *одинакова* по обеим сторонам границы. Это требуется законом Фарадея:

*∇*X**E**=*д***B**/*д*t, (33.19)

в чем нетрудно убедиться. Рассмотрим для этого маленькую петлю Г, которая с обеих сторон охватывает границу (фиг. 33.4).



*Фиг. 33.4. Граничное условие Ey2=Ey1, полученное из равенства C:\Мои документы\gray.jpg*

Согласно уравнению (33.19), криволинейный интеграл от **Е** по петле Г равен скорости изменения потока **В** через эту петлю:

C:\Мои документы\gray.jpg

Вообразите теперь, что прямоугольник очень узок, так что он замыкается в бесконечно малой области. Если при этом поле В остается конечным (нет никаких причин ему быть бесконечным!), то поток через эту область будет равен нулю. Таким образом, контурный интеграл от **Е** должен быть нулем. Если y-компоненты поля на двух сторонах границы равны *Е*y1и *Е*y2, а длина прямоугольника равна *l,* то мы получаем

*Ey1l-Ey2l=0*

или

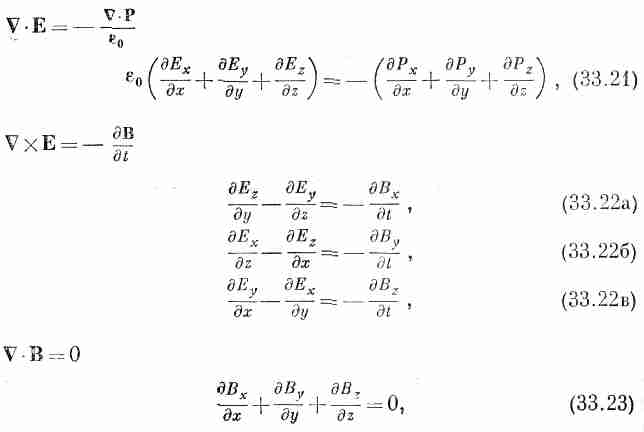
*Еу1=Еу2,* (33.20)

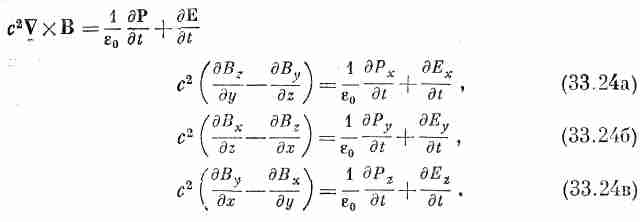
как мы и ожидали. Это условие дает нам одно соотношение между полями в трех волнах.

Процедура нахождения следствий уравнений Максвелла на границе называется «определением граничных условий». Обычно она заключается в нахождении стольких уравнений типа (33.20), сколько возможно, и выполняется она с помощью рассмотрении маленьких прямоугольников, подобных Г на фиг. 33.4, или маленьких гауссовых поверхностей, охватываю­щих границу с двух сторон. Хотя это совершенно правильный способ рассуждений, он создает впечатление, что в различных физических задачах с границами нужно обращаться по-разному.

Как, например, в задаче о тепловом потоке через поверх­ность определить температуру на обеих прилежащих к ней сторонах? Конечно, вы вправе утверждать, что тепло, *прите­кающее к границе* с одной стороны, должно быть равно теплу, *утекающему от нее* с другой. Обычно это возможно и, вообще говоря, очень полезно находить граничные условия из такого рода физических рассуждений. Однако могут встретиться случаи, когда при работе над какой-то проблемой вам известны лишь уравнения и вы не можете непосредственно увидеть, какие же физические аргументы можно использовать. Так что, хотя в данный момент мы заинтересованы только в электромаг­нитных явлениях, где можно привести физические аргументы, я хочу научить вас методу, который можно применить в любой задаче: *общему* методу нахождения непосредственно из диффе­ренциальных уравнений того, что происходит на границе.

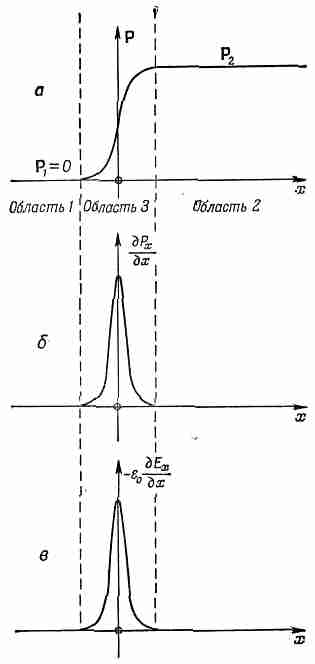
Начнем с выписывания всех уравнений Максвелла для ди­электрика, но на этот раз скрупулезно выписывая все компо­ненты:





Эти уравнения должны быть справедливы как в области 1 (слева от границы), так и в области 2 (справа от нее). Мы уже выписывали решения в областях 1 и 2. Они должны удовлет­воряться и на самой границе, которую мы можем назвать об­ластью 3. Хотя обычно мы считаем границу чем-то абсолютно резким, на самом деле таких границ не бывает. Физические свойства, правда, изменяются очень быстро, но все же не беско­нечно быстро. Во всяком случае, мы можем считать, что между областями 1 и 2 изменение показателя преломления хотя и очень быстрое, но *непрерывное.* Это небольшое расстояние, на котором оно происходит, мы можем назвать областью 3. Подобный же переход в области 3 будут претерпевать и другие характери­стики поля, такие, как *Рх* или *Еy* и т. п. Однако дифферен­циальные уравнения должны удовлетворяться; именно следуя за дифференциальными уравнениями в этой области, мы придем к необходимым «граничным условиям».

Предположим, например, что у нас есть граница между вакуумом (область 1) и стеклом (область 2). В вакууме нечему поляризоваться, так что **P**1=0. А поляризация в стекле пусть равна **Р2.** Между вакуумом и стеклом существует гладкий, но быстрый переход. Если мы проследим за какой-то компонентой **Р**, скажем *Рх,* то она может изменяться так, как это показано на фиг. 33.5, *а.*



*Фиг. 33.5. Поля в переходной об­ласти 3 между двумя различными материалами в областях 1 и 2.*

Предположим теперь, что мы взяли первое из наших уравнений — уравнение (33.21). В него входит производ­ная от компонент **Р** по переменным *х, у* и z. Производные по *у* и *r* не очень интересны — в этих направлениях не происходит ничего замечательного. Но производная от *Рх* по *х* в области 3 из-за быстрого изменения *Рх* будет громадна. Производная *дРх/дх,* как показано на фиг. 33.5,б, имеет на границе очень резкий пик. Если вы представите, что граница сжимается до еще более тонкой области, пик вырастет еще больше. Если для интересующих нас волн граница действительно резкая, то ве­личина *дP/дx* в области 3 будет больше, много больше любого вклада, который может получиться из-за изменения ***Р***в сто­роне от границы, так что мы пренебрегаем любыми другими изменениями, за исключением происходящих на границе.

Но как теперь можно удов­летворить уравнению (33.21), если с правой стороны у нас возвышается огромный пик? Только если существует рав­ный ему громадный пик с другой стороны. Что-то и с левой стороны должно быть большим. Единственная воз­можность — это *дЕх/дх,* пос­кольку изменения в направ­лениях *у* и z в тех волнах, о которых мы только что упо­мянули, дают лишь малый эффект. Таким образом, -ε*0(дЕх/дх)* должно быть, как это показано на фиг. 33.5,в, точной копией *дP/дx.* Получается

C:\Мои документы\gray.jpg

Если это уравнение проинтегрировать по *х* по всей области 3, то мы придем к заключению, что

*ε0(Еx2-Еx1)=-(Рx2-Рx1).* (33.25)

Другими словами, скачок ε*0Ех* при переходе от области 1 к об­ласти 2 должен быть равен скачку —*Рх.*

Уравнение (33.25) можно переписать в виде

ε0Ex2+Рx2=ε0Ex1+Рx1; (33.26)

оно гласит, что величина (ε0Ex+Рx) имеет равные значения как в области 2, так и в области 1. В таких случаях люди гово­рят, что величина *(*ε*0Еx+Рх) непрерывна* на границе. Таким образом, мы получили одно из наших граничных условий.

Хотя в качестве иллюстрации мы взяли случай, когда зна­чение **Р**1 равно нулю, ибо в области 1 у нас был вакуум, ясно, что те же аргументы приложимы для любого материала в этих двух областях, так что уравнение (33.26) верно в общем случае. Давайте перейдем к остальным уравнениям Максвелла и по­смотрим, что скажет нам каждое из них. Следующим мы возьмем уравнение (33.22а). У него нет производной по *х,* так что оно ничего нам не говорит. (Вспомните, что на границе *сами* поля не особенно велики. Только их производные по *х* могут стать столь огромными, что будут доминировать в уравнении.) Взгля­нем теперь на уравнение (33.22.б). Смотрите! Именно здесь у нас есть производная по *х!* С левой стороны имеется *дEz/дx.* Пред­положим, что эта производная громадна. Но минуточку терпе­ния! С правой стороны нет ничего, способного потягаться с ней, поэтому *Еz не может* иметь скачка при переходе из области 1 к области 2. [Если бы это было так, то с левой стороны уравне­ния (33.22а) мы бы получили скачок, а с правой — его не было бы, и уравнение оказалось бы неверным.] Итак, мы получили новое условие:

*Eя2=Eя1.* (33.27)

После тех же самых рассуждений уравнение (33.22в) дает

*Ey2=Ey1.* (33.28)

Последний результат в точности совпадает с полученным с по­мощью контурного интеграла условием (33.20).

Перейдем к уравнению (33.23). Единственное, что может дать пик,— это *дВх/дх.* Но справа опять нет ничего, способного противостоять ему; в результате мы заключаем, что

*Bx2=Bx1.* (33.29)

И, наконец, последнее из уравнений Максвелла! Уравнение (33.24а) ничего не дает, ибо там нет производных по *х.* В урав­нении (33.236) — одна производная: — *с2(дВz/дх),* но ей снова нечего противопоставить с другой стороны равенства, поэтому мы получаем

*Bz1=Bz2.* (33.30)

Совершенно аналогично второе уравнение, которое дает

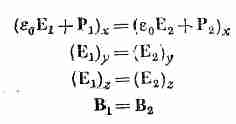
*By1=By2.* (33.31)

Итак, последние три условия говорят нам, что **В2=В1.**

Хочу здесь подчеркнуть, что такой результат получен только потому, что по обеим сторонам границы мы взяли немагнитный материал, вернее, потому, что магнитным эффектом этих мате­риалов мы можем пренебречь. Обычно это вполне допустимо для большинства материалов, за исключением ферромагнетиков. (Магнитные свойства материалов мы будем рассматривать в по­следующих главах.).

Наша программа привела нас к шести соотношениям между полями в областях 1 и 2. Все они выписаны в табл. 33.1. Их можно использовать для согласования волн в двух областях.

*Таблица 33.1 •* граничные условия на поверхности ДИЭЛЕКТРИКА

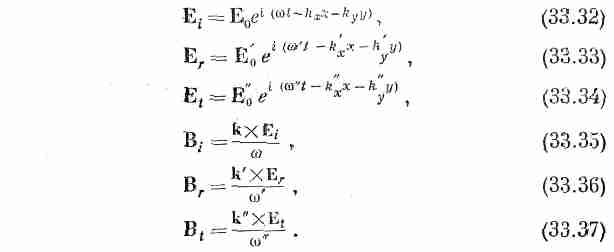


(Поверхность расположена в плоскости yz.)

Однако я хочу отметить, что идея, которую мы только что использовали, будет работать в *любой* физической ситуации, где у вас есть дифференциальные уравнения и требуется найти решение в области, пересекаемой резкой границей, по обе стороны которой некоторые из физических свойств различны. Для наших теперешних целей было бы легче получить те же самые уравнения с помощью рассуждений о потоках и циркуляциях на границе. (Проверьте, можно ли подобным путем по­лучить те же самые результаты.) Однако теперь вы знаете метод, который будет хорош, даже когда вы попали в затруднительное положение и не видите простых физических соображений от­носительно того, что происходит на границе. Вы можете просто воспользоваться дифференциальными уравнениями.

**§ 4. Отраженная и преломленная волны**

Теперь мы готовы применить наши граничные условия к вол­нам, перечисленным в § 2, где мы получили:

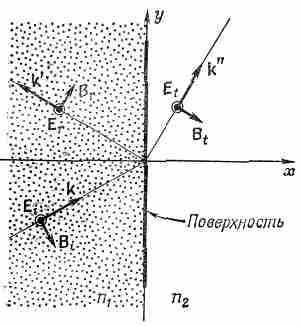


Нами получены еще кое-какие сведения: вектор **Е** перпендику­лярен для каждой волны вектору распространения **k**.

Полученный результат будет зависеть от направления век­тора **Е** («поляризации») в падающей волне. Анализ сильно упро­стится, если мы рассмотрим отдельно случай, когда вектор **Е** *параллелен* «плоскости падения» (т. е. плоскости *ху),* и случай, когда он *перпендикулярен* к ней. Волна с любой другой поляри­зацией будет просто линейной комбинацией этих волн. Другими словами, отраженные и преломленные интенсивности для различных поляризаций будут разными и легче всего отобрать два простейших случая и отдельно рассмотреть их.

Я подробно проанализирую случай падающей волны, пер­пендикулярной к плоскости падения, а потом просто опишу вам, что получается в других случаях. Я немного жульничаю, рас­сматривая простейший пример, однако в обоих случаях прин­цип один и тот же. Итак, мы считаем, что вектор **Еi** имеет только z-компоненту, а поскольку все векторы **Е** смотрят в одном и том же направлении, векторный значок можно опустить.

Оба материала изотропны, поэтому вынужденные колеба­ния зарядов в материале будут происходить в направлении оси *z* и у полей **Е** в преломленной и отраженной волнах тоже будет только одна z-компонента. Таким образом, для всех волн *Ех* и *Еy , Рх* и *Рy* равны нулю. Направления векторов **Е** и **В** в этих волнах показаны на фиг. 33.6.



*Фиг. 33.6. Поляризации отражен­ной и преломленной волн, когда поле* Е *в падающей волне перпендикулярно к плоскости падения.*

(Здесь мы изменили нашему пер­воначальному намерению все получить из уравнений. Этот результат также можно было бы получить из граничных усло­вий, однако, используя физические аргументы, мы избежали больших алгебраических выкладок. Когда у вас будет свобод­ное время, посмотрите, можно ли его действительно вывести из уравнений. Он, разумеется, согласуется с уравнениями; просто мы не доказали, что отсутствуют *другие* возможности.)

Теперь наши граничные условия [уравнения (33.26) — (33.31)] должны дать соотношения между компонентами **Е** и **В** в областях 1 и 2. В области 2 у нас есть только одна преломлен­ная волна, а вот в области 1 — их *две.* Какую же из них нам взять? Поля в области 1 будут, разумеется, суперпозицией полей падающей и отраженной волн. (Поскольку каждое удовлетворяет уравнениям Максвелла, то им удовлетворяет и сумма.) Поэтому, когда мы используем граничные условия, нужно помнить, что

E1=Ei+Er, E2=Et

я аналогично для В.

Для поляризаций, которыми мы сейчас занимаемся, уравне­ния (33.26) и (33.28) не дают никакой новой информации, и только уравнение (33.27) поможет нам. Оно говорит, что *на границе, т.* е. при *х=0:*

*Ei+Er=Et.*

Таким образом, мы получаем уравнение

C:\Мои документы\gray.jpg

которое должно выполняться для *любого t* и *любого у.* Возьмем сначала y=0. Для этого значения уравнение (33.38) превра­щается в

C:\Мои документы\gray.jpg

согласно которому два осциллирующих члена равны третьему. Это может произойти, только когда частоты всех осцилляции одинаковы. (Невозможно, сложив три или какое-то другое число подобных членов с различными частотами, получить для любого момента времени в результате нуль.) Итак,

ω"=ω'=ω, (33.39)

как это и было нам всегда известно, т. е. частоты преломленной и отраженной волн те же самые, что и падающей.

Если бы мы предположили это с самого начала, то несом­ненно избежали бы многих трудностей, но мне хотелось пока­зать вам, что тот же самый результат можно получить и из урав­нений. А вот когда перед вами будет стоять реальная задача, лучше всего пускать в оборот сразу все, что вы знаете. Это избавит вас от лишних хлопот.

По определению *абсолютная величина k* задается равенством k2=n2ω2/с2, поэтому



А теперь обратимся к уравнению (33.38) для *t*=0. Используя снова те же рассуждения, что и прежде, но на сей раз основы­ваясь на том, что уравнения должны быть справедливы при всех значениях *у,* мы получаем

k"y=k'y=ky. (33.41)

Из формулы (33.40) k'2=k2, так что

k'2x+k'2y =k2x+k2y. Комбинируя это с (33.41), находим

k'2x=k2x , или *k'x=+kx.* Знак плюс не имеет никакого смысла; он не дает нам никакой *отраженной* волны, а лишь другую *падающую* волну, и с самого начала мы говорили, что будем решать задачу с единственной падающей волной, так что

*k'x=-kx.* (33.42)

Два соотношения (33.41) и (33.42) говорят нам, что угол отра­жения равен углу падения, как это и ожидалось (см. фиг. 33.3). Итак, в отраженной волне

C:\Мои документы\gray.jpg

Для преломленной волны мы уже получали



Их можно решить и в результате получить

C:\Мои документы\gray.jpg

Предположим на мгновение, что n*1* и n2 — вещественные числа (т. е. что мнимая часть показателей очень мала). Тогда все *k* тоже будут вещественными и из фиг. 33.3 мы видим, что

ky/k =sinθi, ky/k"=sinθt. (33.46)

Но ввиду уравнения (33.44) мы получаем

n2sinθ*t=ni*sinθi;, (33.47)

т. е. уже известный нам закон Снелла для преломления. Если же показатель преломления не вещественный, то волновые числа оказываются комплексными и нам следует воспользоваться

(33.45). [Конечно, мы могли бы *определить* углы θi. и θt из

(33.46), и тогда закон Снелла (33.47) был бы верен и в общем случае. Однако при этом углы тоже стали бы комплексными числами и, следовательно, потеряли бы свою геометрическую интерпретацию как углы. Уж лучше описывать поведение волн соответствующими комплексными величинами kx или *k"x..*]

До сих пор мы не обнаружили ничего нового. Мы доставили себе только простенькое развлечение, выводя очевидные вещи из сложного математического механизма. А сейчас мы готовы найти амплитуды волн, которые нам еще не известны. Используя результаты для всех ω и *k,* мы можем сократить экспоненциаль­ный множитель в (33.38) и получить

*е0+е'0=е"0.* (33.48)

Но поскольку мы не знаем ни *Е'0,* ни *Е"9,* то необходимо еще одно соотношение. Нужно использовать еще одно граничное условие. Уравнения для *Ех* и *Еy* не помогут, ибо все **Е** имеют только одну z-компоненту. Так что мы должны воспользоваться условием на В. Попробуем взять (33.29):

Bx2 =Bx1. Согласно условиям (33.35)—(33.37),

C:\Мои документы\gray.jpg

Вспоминая, что ω" =ω'= ω и *k"y=k'y=ky* , получаем

*е0+е'0 =е"0.*

Но это снова уравнение (33.48)! Мы напрасно потратили время и получили то, что уже давно нам известно.

Можно было бы обратиться к (33.30) B*z2=Вz1,* но у вектора В отсутствует z-компонента! Осталось только одно условие — (33.31) *Ву2=Ву1.* Для наших трех волн

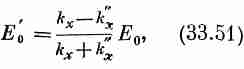
C:\Мои документы\gray.jpg

Подставляя вместо *Ei,Er* и *Et* волновые выражения при x=0 (ибо дело происходит на границе), мы получаем следующее граничное условие:

C:\Мои документы\gray.jpg

Учитывая равенство всех ω и *ky ,* снова приходим к условию *kxE0 + k'xE'0=k"xE"0.* (33.50)

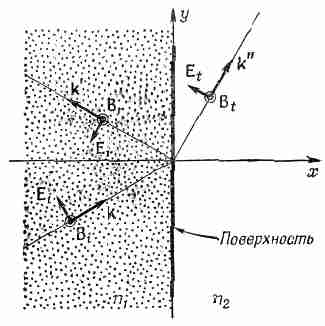
Это дает нам уравнение для величины *Е,* отличное от (33.48). Получившиеся два уравнения можно решить относительно E'0 и *Е"0.* Вспоминая, что k’x=-*kx,* получаем





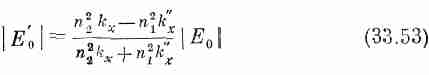
Вместе с (33.45) или (33.46) для *k”x* эти формулы дают нам все, что мы хотели узнать. Следствия полученного результата мы обсудим в следующем параграфе.

Если взять поляризованную волну с вектором **Е**, *параллель­ным* плоскости падения, то **Е**, как это видно из фиг. 33.7, будет иметь как x-, так и y-компоненту. Вся алгебра при этом будет менее хитрая, но более сложная. (Можно, правда, несколько уменьшить работу в этом случае, выражая все через *магнитное* поле, которое целиком направлено по оси z.)

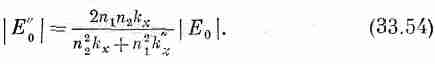


*Фиг. 33.7. Поляризации волн, когда поле* ***Е*** *в падающей волне па­раллельно плоскости падения.*

При этом мы найдем



и



Давайте посмотрим, будет ли наш результат согласовываться с тем, что мы получали раньше. Выражение (33.3) мы вывели в вып. 3, когда находили отношение интенсивностей отражен­ной и падающей волн. Однако тогда мы рассматривали только *вещественный* показатель преломления. Для вещественного показателя (или вещественных *k)* можно записать:

*kx=k*cosθi=(ωn1/c)cosθi,

k"x=k"cosθt=(ωn2/c)cosθt.

Подставляя это в уравнение (33.51), получаем

C:\Мои документы\gray.jpg

что нисколько не похоже на уравнение (33.3). Если, однако, мы воспользуемся законом Снелла и избавимся от всех *n,* то сход­ство будет восстановлено. Подставляя n2=n1(sinθi/sinθt) и умножая числитель и знаменатель на sinθt, получаем

C:\Мои документы\gray.jpg

Обратите внимание, что в числителе и знаменателе стоят просто синусы (θi-θt) и (θi+θt), поэтому

C:\Мои документы\gray.jpg

Поскольку амплитуды E'0 и E0 измеряются в том же самом мате­риале, интенсивности пропорциональны квадратам электри­ческих полей и мы получаем тот же результат, что и раньше. Подобным же образом формула (33.53) тоже аналогична форму­ле (33.4).

Для волн, падающих перпендикулярно, θi=0 и θt=0. Формула (33.56) выглядит как 0/0, от чего нам пользы мало. Однако мы можем вернуться назад к формуле (33.55), согласно которой

C:\Мои документы\gray.jpg

Этот результат, естественно, применим для «любой» поляриза­ции, поскольку для перпендикулярного луча нет никакой особой «плоскости падения».

**§ 5. Отражение от металлов**

Теперь мы можем использовать наши результаты для пони­мания интересного явления — отражения от металлов. Почему металлы блестят? В предыдущей главе мы видели, что показа­тель преломления металлов для некоторых частот имеет очень большую мнимую часть. Давайте посмотрим, какова будет интен­сивность отраженной волны, когда свет падает из воздуха (с по­казателем *n=1)* на материал с n=- *inI.* При этом условии уравнение (33.55) дает (для нормального падения)

C:\Мои документы\gray.jpg

Для *интенсивности* отраженной волны нам нужны квадраты абсолютных величин *Е'0* и *Е0:*

C:\Мои документы\gray.jpg

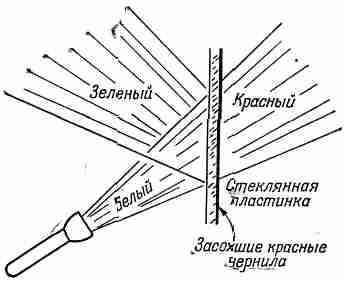
или

C:\Мои документы\gray.jpg

Для материала с чисто мнимым показателем преломления по­лучается стопроцентное отражение!

Металлы не отражают 100% света, но все же многие из них хорошо отражают видимый свет. Другими словами, мнимая часть их показателя очень велика. Однако мы видели, что боль­шая мнимая часть показателя означает сильное поглощение. Итак, имеется общее правило: если *какой-то* материал оказы­вается *очень* хорошим поглотителем при какой-то частоте, то отражение волн от его поверхности очень велико и очень мало волн попадает внутрь. Этот эффект вы можете наблюдать на сильных красителях. Чистые кристаллы самых сильных кра­сителей имеют «металлический» блеск. Вероятно, вы замечали, что на краях бутылки с фиолетовыми чернилами засохший краситель имеет золотистый металлический блеск, а засохшие красные чернила имеют иногда зеленоватый металлический оттенок. Красные чернила поглощают из *проходящего* света зеленые лучи, так что, если концентрация чернил очень велика, они будут давать сильное поверхностное *отражение* при частоте зеленого света.

Вы можете очень эффектно продемонстрировать это. Намажь­те стеклянную пластинку красными чернилами и дайте им вы­сохнуть. Если вы направите пучок белого света на обратную сторону пластинки (фиг. 33.8), то сможете наблюдать проходя­щий красный свет и отраженный зеленый свет.



*Фиг. 33.8. Материал, кото­рый сильно поглощает свет с частотой ω*, *отражает его с той же частотой.*

**§ 6**. **Полное** **внутреннее отражение**

Если свет идет из материала, подобного стеклу, с веществен­ным показателем преломления *n,* большим единицы, в воздух с показателем n2, равным единице, то, согласно закону Снелла,

sinθt=*n*sinθi.

Угол θt преломленной волны становится равным 90° при угле падения θ*i* равном некоторому «критическому углу» θc, опре­деляемому равенством nsinθc= l. (33.59)

Что происходит при θi, большем, чем критический угол? Вы уже знаете, что здесь возникает полное внутреннее отражение. Но откуда оно все-таки берется?

Вернемся назад к уравнению (33.45), которое дает волновое число *k"x* для преломленной волны. Из него получилось

C:\Мои документы\gray.jpg

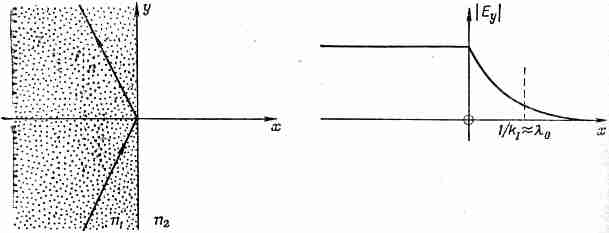
Но так как *ky=k*sinθi, a *k*=ωn/с, то

C:\Мои документы\gray.jpg

Если *n*sinθi больше единицы, то k"2х становится *отрицатель­ным,* a *k"x —* чисто мнимым, скажем *±ik.* Однако теперь вы знаете, что это значит! «Прелом­ленная» волна при этом будет иметь вид [см. (33.34)]

C:\Мои документы\gray.jpg

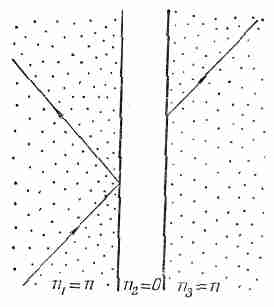
т. е. с увеличением *х* амплитуда волны будет либо экспоненци­ально расти, либо падать, но сейчас, разумеется, нам нужен только отрицательный знак. При этом *амплитуда* волны справа от границы будет вести себя, как показано на фиг. 33.9.



*Фиг. ЗЗ.9. Полное внутреннее отражение.*

Обратите внимание, что *k1* по порядку величины равно а/с, т. е. λ0 равна длине волны света в пустоте. Когда свет пол­ностью отражается от внутренней поверхности стекло — воз­дух, то в воздухе возникают поля, но они не выходят за пределы расстояний, равных по порядку величины длине волны света.

Теперь нам ясно, как нужно отвечать на такой вопрос: если световая волна в стекле падает на поверхность под достаточно большим углом, то она полностью отражается; если же придви­нуть к поверхности другой кусок стекла (так что «поверхность» фактически исчезает), то свет будет проходить. В какой точно момент происходит этот переход? Ведь наверняка должен суще­ствовать непрерывный переход от полного отражения к полному его отсутствию! Ответ, разумеется, состоит в том, что если про­слойка воздуха настолько мала, что экспоненциальный «хвост» волны в воздухе имеет еще ощутимую величину во втором куске стекла, то он будет «трясти» электроны и порождать новую волну (фиг. 33.10).

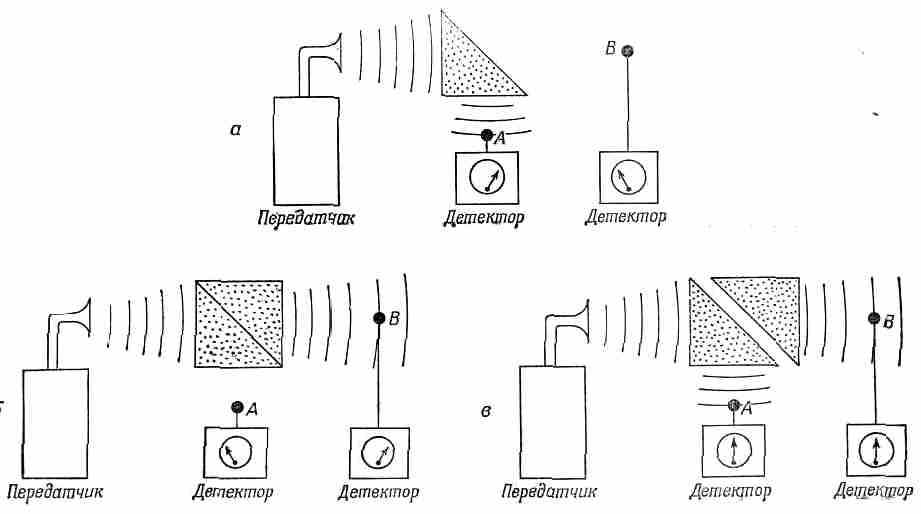


*Фиг. 33.10. Для очень маленькой щели внутреннее отражение не будет «пол­ным», за щелью появляется прошедшая волна.*

Некоторое количество света будет проходить через систему. (Конечно, наше решение неполно; нам следовало бы заново решить все уравнения для случая тонкого слоя воздуха между двумя областями стекла.)

Для обычного света этот эффект прохождения можно наб­людать, только если щель очень мала (порядка длины волны, т. е. 10-5 *см), но* для 3-сантиметровых волн он демонстрируется очень легко. Для таких волн экспоненциально затухающие поля распространяются на расстояние нескольких сантиметров.

Микроволновая аппаратура, с помощью которой демонстрируют этот эффект, изображена на фиг. 33.11.



*Фиг. 33.11. Проникновение волн внутреннего отражения.*

Волны из маленького передатчика 3-сантиметровых волн направляются на парафи­новую призму, имеющую сечение в форме равнобедренного пря­моугольного треугольника. Показатель преломления парафина для этих частот равен 1,50, поэтому критический угол будет 41,5°. Таким образом, волны полностью отражаются от поверх­ности, наклоненной под 45°, и принимаются детектором *А* (фиг.33.11, а). Если к первой призме плотно приложить вторую парафиновую призму (фиг. 33.11, *б),* то волны проходят прямо сквозь них и регистрируются детектором *В.* Если же между призмами оставить щель в несколько сантиметров (фиг.33.11, в), то мы получим как отраженную, так и проходящую волны. Поместив детектор *В* в нескольких сантиметрах от наклоненной под 45° поверхности призмы, можно увидеть и электрическое поле вблизи нее.

# Глава 34

**МАГНЕТИЗМ ВЕЩЕСТВА**

[**§ 1. Диамагнет****изм и парамагнетизм**](#а1)

[**§ 2. Магнитные мом****енты и момент количества движения**](#а2)

[**§ 3. Прецессия ат****омных магнитиков**](#а3)

[**§ 4. Диамагне****тизм**](#а4)

[**§ 5. Теорема Ла****рмора**](#а5)

[**§ 6. В классической физике нет н****и диамагнетизма, ни парамarнетизма**](#а6)

[**§7. Момент количества дв****ижения в квантовой механике**](#а7)

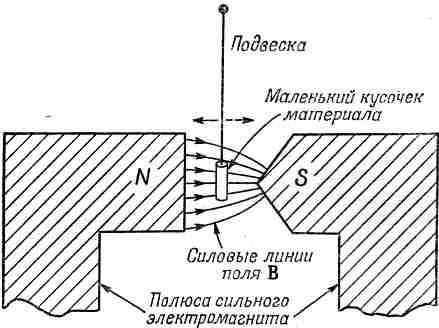
[**§ 8. Магнитная эн****ергия атомов**](#а8)

*Повторить: гл. 15* (вып. 6) «Векторный потенциал»

**§ 1. Диамагнетизм и парамагнетизм**

В этой главе я начну рассказывать о маг­нитных свойствах материалов. Материал, обла­дающий наиболее сильными магнитными свой­ствами, разумеется,— железо. Подобными же магнитными свойствами обладают еще такие элементы, как никель, кобальт и (при доста­точно низких температурах, ниже 16° С) га­долиний и другие редкоземельные металлы, а также некоторые особые сплавы. Такой вид магнетизма называется *ферромагнетизмом.* Это достаточно сложное и удивительное явление, и ему мы посвятим специальную главу. Но и все обычные вещества тоже имеют некоторые магнитные свойства, хотя и не столь ярко выраженные, а много слабее — в тысячи и мил­лион раз меньше, чем эффекты в ферромагнит­ных материалах. Здесь мы собираемся описать обычный магнетизм, т. е. магнетизм неферро­магнитных веществ.

Этот слабый магнетизм бывает двух сортов. Некоторые материалы *притягиваются* магнит­ным полем, другие же *отталкиваются* им. В отличие от электрического эффекта в веще­стве, который всегда приводит к притяжению диэлектриков, магнитный эффект имеет два знака. Наличие этих двух знаков легко про­демонстрировать с помощью сильного электро­магнита, один из полюсных наконечников ко­торого заострен, а другой — плоский (фиг. 34.1).



*Фиг. 34.1. Небольшой висмутовый цилиндр сла­бо отталкивается заостренным полюсом; кусочек алюминия будет притягиваться.*

Магнитное поле у заостренного полюса намного сильнее, нежели у плоского. Если небольшой кусочек материала, подвешенный на длинной струне, поместить между полюсами такого магнита, то на него, вообще говоря, действует очень слабенькая сила. Действие этой силы можно обнаружить по незначительному смещению подвешенного кусочка материала при повороте магнита. Оказывается, что ферромагнитные материалы сильно притягиваются заостренным полюсом, а все остальные — очень слабо. А есть и такие, которые не притягиваются заостренным полюсом, а слабо отталкиваются.

Этот эффект легче всего наблюдать на маленьком цилиндре из висмута, который *выталкивается,* из области сильного поля. Вещества, которые отталкиваются, подобно висмуту, называ­ются *диамагнетиками.* Висмут — один из сильнейших диамагнетиков, но даже и его магнитный эффект очень слаб. Диамаг­нетизм всегда очень слаб. Если между полюсами подвесить ку­сочек алюминия, то на него все же будет действовать слабенькая сила, но направленная *в сторону* заостренного полюса. Веще­ства, подобные алюминию, называются *парамагнетиками.* (В таких экспериментах при включении и выключении магнита из-за вихревых токов возникают силы, которые могут дать сильный толчок. Поэтому нужно быть очень внимательным и смотреть только на чистое перемещение после того, как подве­шенный предмет успокоился.)

Сейчас я коротко опишу механизм этих двух эффектов. Прежде всего атомы многих веществ не имеют постоянных магнитных моментов, или, вернее, все магнитные моменты внутри каждого атома уравновешены так, что суммарный маг­нитный момент атома равен нулю. Спиновые и орбитальные мо­менты электронов сбалансированы так, что у каждого данного атома никакого среднего магнитного момента нет. Если при этих обстоятельствах вы включаете магнитное поле, то внутри атома по индукции генерируются слабые дополнительные токи.

В соответствии с законом Ленца эти токи действуют так, чтобы сопротивляться увеличивающемуся магнитному полю. Таким образом, наведенный магнитный момент атомов направлен *противоположно* магнитному полю. Это и есть механизм диа­магнетизма.

Однако существуют такие вещества, атомы которых все же обладают магнитным моментом, т. е. электронные спины и ор­биты которых имеют ненулевой полный циркулирующий ток. Таким образом, кроме диамагнитного эффекта (а он всегда при­сутствует), существует еще возможность «выстраивания» инди­видуальных атомных моментов в одном направлении. Магнит­ные моменты в этом случае стараются выстроиться *по направ­лению* магнитного поля (точно так же, как постоянные диполи в диэлектрике выстраиваются в электрическом поле) и наведен­ный магнетизм стремится усилить магнитное поле. Это и есть парамагнитные вещества. Парамагнетизм, вообще говоря, до­вольно слаб, потому что выстраивающие силы относительно малы по сравнению с силами теплового движения, которые ста­раются разрушить упорядочивание. Отсюда также следует, что парамагнетизм обычно чувствителен к температуре. (Исключе­ние составляет парамагнетизм, обусловленный спинами элект­ронов, ответственных за проводимость металлов. Но мы не будем обсуждать здесь это явление.) Для обычного парамагне­тизма эффект тем сильнее, чем ниже температура. При низких температурах атомы выстраиваются в большей степени, по­скольку разупорядочивание вследствие тепловых колебаний (соударений) будет меньше. Но, с другой стороны, диамагнетизм более или менее не зависит от температуры. У любого вещества с выстроенными магнитными моментами есть как диамагнит­ный, так и парамагнитный эффекты, причем парамагнитный эффект обычно доминирует.

В гл. 11 (вып. 5) мы описывали *сегнетоэлектрические* ма­териалы, все электрические диполи которых выстраиваются в результате взаимного действия атомов друг на друга своими электрическими полями. Можно представить себе магнитный аналог сегнетоэлектричества, в котором все атомные моменты, действуя друг на друга, выстраивают сами себя. Если бы вы попытались вычислить, как это должно происходить, то обнару­жили бы, что из-за того, что магнитные силы гораздо слабее электрических, тепловое движение должно расстраивать упо­рядочивание даже при столь низких температурах, как 10° К. Так что при комнатных температурах любое постоянное вы­страивание магнитных моментов казалось бы невозможно.

Но, с другой стороны, именно это явление происходит в же­лезе: там магнитные моменты все-таки выстраиваются. Между магнитными моментами различных атомов железа действуют эффективные силы, которые во много-много раз больше *прямого магнитного* взаимодействия. Это косвенный эффект, кото­рый можно объяснить только с помощью квантовой механики. Он примерно в десять тысяч раз сильнее прямого магнитного взаимодействия, и именно он выстраивает магнитные моменты в ферромагнитных материалах. Об этом особом взаимодействии мы будем говорить в дальнейшем.

Я попытался дать вам качественные объяснения диамагне­тизма и парамагнетизма, однако хочу тут же внести поправку и сказать, что с точки зрения классической механики честным путем понять магнитные эффекты *невозможно.* Подобные маг­нитные эффекты — *явления целиком квантовомеханические.* Тем не менее привести некоторые «правдоподобные» классические рассуждения и дать вам представление о том, как здесь все происходит, все-таки небесполезно.

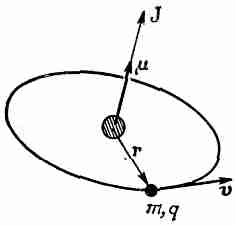
Попробуем встать на этот путь. Можно приводить разные фи­зические аргументы и строить догадки о том, что происходит с веществом, однако все эти аргументы будут в той или иной степени «незаконными», так как в любом из магнитных явлений весьма существенную роль играет квантовая механика. С другой стороны, бывают такие системы, подобные плазме или скопле­нию множества свободных электронов, где электроны все же живут по законам классической механики. При таких обстоя­тельствах некоторые из теорем классического магнетизма будут очень полезны. Кроме того, классические рассуждения полезны еще и по историческим причинам: ведь пока люди еще не могли понять глубокий смысл и поведение магнитных материалов, они пользовались классическими аргументами. Так что клас­сическая механика все же способна дать нам полезные сведения. И только если стремиться быть совсем честным, то надо отложить изучение магнетизма до тех пор, пока вы не пройдете квантовую механику.

А мне все-таки не хочется ждать так долго ради того, чтобы понять такую простую вещь, как диамагнетизм. Для целого ряда полуобъяснений происходящего можно ограничиться клас­сической механикой, сознавая, однако, что наши доводы на самом деле нуждаются в квантовомеханическом подкреплении.

**§ 2. Магнитные моменты и момент количества движения**

Первая теорема, которую мы хотим доказать в классической механике, гласит: если электрон движется по круговой орбите (например, крутится вокруг ядра под действием центральных сил), то менаду магнитным моментом и моментом количества движения существует определенное соотношение. Обозначим через **J** момент количества движения, а через μ — магнитный момент электрона на орбите. Величина момента количества движения равна произведению массы электрона на скорость и на радиус (фиг. 34.2). Он направлен перпендикулярно плоскости орбиты:

***J****=mvr.* (34.1)



*Фиг. 34.2. Для любой круговой орбиты магнитный момент* ***μ*** *равен произведению q!2m на момент количества движения* ***J****.*

(Хотя эта формула и нерелятивистская, но для атома она должна быть достаточно хороша, ибо у захваченного на орбиту элект­рона отношение v*/c* в общем случае равно по порядку величины е2/hc=1/137, или около 1%.)

Магнитный момент той же самой орбиты равен произведению тока на площадь (см. гл. 14, § 5, вып. 5). Ток равен положи­тельному заряду, проходящему в единицу времени через любую точку на орбите, т. е. произведению заряда *q* на частоту вра­щения. А частота равна скорости, поделенной на периметр орбиты, так что

I=q(v/2πr). Так как площадь равна πr2, то магнитный момент будет

**μ**=qvr/2 (34.2)

Он тоже направлен перпендикулярно плоскости орбиты. Таким образом, **J** и **μ**имеют одинаковое направление:

***μ****=(q/2m)****J***(орбиты). (34.3)

Их отношение не зависит ни от скорости, ни от радиуса. Для любой частицы, движущейся по круговой орбите, магнитный момент равен произведению q*/2m* на момент количества движе­ния. Для электрона, заряд которого отрицателен (обозначим его через -*qe),*

***μ****=-(qe/2m)****J***(для электрона на орбите). (34.4)

Вот что получается в классической физике, и совершенно удивительно, что то же самое справедливо и в квантовой меха­нике. Это один из правильных выводов. Однако если развивать его дальше по пути классической физики, то вы натолкнетесь на такие места, где он даст неправильные ответы; разобраться же потом, какие результаты верны, а какие неверны, — целое дело. Уж лучше я сразу скажу, что в квантовой механике верно *в общем случае.* Прежде всего соотношение (34.4) остается вер­ным для *орбитального движения;* однако это не единственное место, где мы встречаемся с магнетизмом. Электрон, кроме того, совершает еще вращение вокруг собственной оси (подобное вращению Земли вокруг ее оси), и в результате этого вращения у него возникает момент количества движения и магнитный мо­мент. Но по чисто квантовомеханическим причинам (классиче­ское объяснение этого совершенно отсутствует) отношение **μ** к **J** для собственного вращения (спина) электрона в два раза больше, чем для орбитального движения крутящегося элект­рона:

**μ**=-(qe/m)**J** (спин электрона). (34.5)

В любом атоме, вообще говоря, имеется несколько электро­нов, и его полный момент количества движения и полный маг­нитный момент представляют некоторую комбинацию спиновых и орбитальных моментов. И без каких-либо на то классических оснований в квантовой механике (для изолированного атома) направление магнитного момента *всегда* противоположно на­правлению момента количества движения. Отношение их не обязательно должно быть -*qe/m* или -*qe/2m;* оно расположено где-то между ними, ибо здесь «перемешиваются» вклады от спинов и орбит. Можно записать

'**μ**=-g(qe/2m)**J** (34.6)

где множитель *g* характеризует состояние атома. Для чисто орбитальных моментов он равен единице, для чисто спиновых равен 2, а для сложной системы, подобной атому, он расположен где-то между ними. Конечно, пользы от этой формулы не очень много. Она только говорит, что магнитный момент *параллелен* моменту количества движения, но может иметь любую величину. Тем не менее форма уравнения (34.6) все же удобна, ибо вели­чина *g,* называемая «фактором Ланде», есть безразмерная по­стоянная порядка единицы. Одна из задач квантовой меха­ники — предсказание фактора *g* для разных атомных состояний. Быть может, вам интересно знать, что происходит в ядрах атомов. Протоны и нейтроны в ядре движутся по своего рода орбитам и в то же время, подобно электронам, имеют спин. Маг­нитный момент снова параллелен моменту количества движе­ния. Только теперь порядок величины отношения магнитного момента к моменту количества движения для каждой из этих частиц будет таким, как можно было ожидать для *протона,* движущегося по кругу; при этом массу *m* в уравнении (34.3) нужно взять равной массе *протона.*

Поэтому для ядер обычно пишут (в скобках положительная величина)

***μ****=g(qe/2mp)****J*** (34.7)

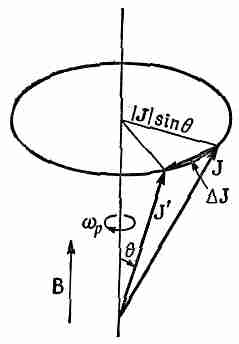
где *mp—* масса протона, а постоянная *g,* называемая *ядерным* g-фактором,— число порядка единицы, которое должно опре­деляться отдельно для каждого сорта ядер.

Другое важное отличие в случае ядер состоит в том, что g-фактор *спинового* магнитного момента протона *не* равен 2, как у электрона. Для протона g=2•(2,79). Крайне удивительно, что спиновый магнитный момент есть и у *нейтрона* и отношение этого магнитного момента к моменту количества движения равно 2•(-1,93). Другими словами, нейтрон в магнитном смысле не будет в точности «нейтральным». Он напоминает маленький маг­нитик и имеет такой же магнитный момент, как и вращающийся отрицательный заряд.

**§ 3. Прецессия атомных магнитиков**

Одно из следствий пропорциональности магнитного момента моменту количества движения заключается в том, что атомные магнитики, помещенные в магнитное поле, будут *прецессироватъ.* Обсудим это сначала с точки зрения классической физики. Пусть у нас имеется магнитный момент **μ***,* свободно висящий в однородном магнитном поле. Он испытывает действие момента силы τ, равного **μ**X**B**, пытающегося повернуть его в том же направлении, что и поле. Но атомный магнит — ведь это гиро­скоп, у него есть момент количества движения **J**. Поэтому момент силы от магнитного поля не вызовет поворота в направлении поля. Вместо этого магнит, **как** мы видели, когда говорили о гироскопе в гл. 20 (вып. 2), начнет *првцессироватъ.* Момент количества движения, а вместе с ним и магнитный момент прецессируют вокруг оси, параллельной магнитному полю. Скорость прецессии можно найти тем же мето­дом, что и в гл. 20 (вып. 2).

Предположим, что за малый промежуток времени Δt момент количества движения меняется от **J** до **J**' (фиг. 34.3), оставаясь при этом всегда под одним и тем же углом θ к направлению маг­нитного поля В.



*Фиг. 34.3. Объект в моментом количества движения* **J** *и параллельным ему магнитным моментом* ***μ*** *в магнитном поле* **В** *прецессирует с угловой скоростью ωp,.*

Обозначим через ωp угловую скорость прецес­сии, так что за промежуток времени Δt угол *прецессии* будет равен ωpΔt. Из геометрии рисунка мы видим, что изменение момента количества движения за время Δt равно

ΔJ=(Jsinθ)(ωpΔt), а скорость изменения момента количества движения

dJ/dt=ωp**J**sinθ (34.8)

что должно равняться моменту силы

τ=μBsinθ. (34.9)

Угловая скорость прецессии будет равна

C:\Мои документы\gray.jpg

Подставляя из уравнения (34.6) отношение **μ**/**J**, мы видим, что для атомной системы

ωp=g(qe/2m)B (34.11)

т. е. частота прецессии пропорциональна *В.* Полезно запом­нить, что для атома (или электрона)

C:\Мои документы\gray.jpg

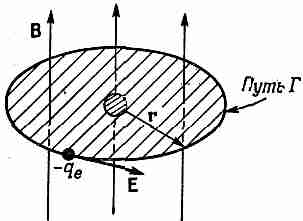
а для ядра

C:\Мои документы\gray.jpg

(Формулы для атомов и ядер различны только благодаря раз­личным соглашениям относительно g в этих двух случаях.) Итак, в соответствии с *классической* теорией электронные ор­биты и спины в атоме должны прецессировать в магнитном поле. Верно ли это и в квантовой механике? В сущности это верно, однако смысл «прецессии» здесь совсем иной. В квантовой механике нельзя говорить о *направлении* момента количества движения в том же смысле, как это делается классически; тем не менее аналогия здесь очень близкая, настолько близкая, что мы продолжаем пользоваться термином «прецессия». Мы еще обсудим это позднее, когда будем говорить о квантовомеханической точке зрения.

**§ 4. Диамагнетизм**

Рассмотрим теперь с классической точки зрения диамагнетизм. К этому можно подойти несколькими путями, но один из лучших такой. Предположим, что по соседству с атомом мед­ленно включается магнитное поле. При изменении магнитного поля благодаря магнитной индукции будет генерироваться *электрическое* поле. По закону Фарадея контурный интеграл от **Е** по замкнутому контуру равен скорости изменения магнит­ного потока через этот контур. Предположим, что в качестве контура Г мы выбрали окружность радиусом r, центр которой совпадает с центром атома (фиг. 34.4).



*Фиг. 34.4. Индуцированные элект­рические силы, действующие на элект­роны в атоме.*

Среднее тангенциальное электрическое поле *Е* на этом контуре определяется выраже­нием

C:\Мои документы\gray.jpg

т. е. возникает циркулирующее электрическое поле, напряжен­ность которого равна

C:\Мои документы\gray.jpg

Индуцированное электрическое поле, действуя на атомный электрон, создает момент силы, равный -qeEr*,* который дол­жен быть равен скорости изменения момента количества дви­жения *dJ/dt:*

C:\Мои документы\gray.jpg

Интегрируя теперь по времени, начиная с нулевого поля, мы находим, что изменение момента количества движения из-за включения поля будет равно

C:\Мои документы\gray.jpg

Это и есть тот дополнительный момент количества движения, который сообщается электрону за время включения поля.

Такой добавочный момент количества движения приводит к добавочному магнитному моменту, который благодаря тому, что это *орбитальное* движение, равен просто произведению -*qe/2m* на момент количества движения. Наведенный диамаг­нитный момент

C:\Мои документы\gray.jpg

Знак минус (как можно убедиться непосредственно из закона Ленца) означает, что направление добавочного момента проти­воположно магнитному полю.

Мне бы хотелось написать выражение (34.16) несколько по-иному. Появившаяся у нас величина r2 представляет собой рас­стояние от оси, проходящей через атом и параллельной полю *В,* так что если поле *В* направлено по оси z, то оно равно x2+y2. Если мы рассмотрим сферически симметричные атомы (или усредним по атомам, естественные оси которых могут распола­гаться во всех направлениях), то среднее от z2+y2 равно 2/3 среднего квадрата истинного радиального расстояния от *центра* атома. Поэтому уравнение (34.16) обычно более удобно записы­вать в виде

C:\Мои документы\gray.jpg

Во всяком случае, мы нашли, что индуцированный атомный момент пропорционален магнитному полю *В* и противоположен ему по направлению. Это и есть диамагнетизм вещества. Именно этот магнитный эффект ответствен за малые силы, действующие на кусочек висмута в неоднородном магнитном поле.(Вы можете определить величину этой силы, воспользовавшись выражением для энергии наведенного момента в поле и результатами изме­рений изменения энергии при движении образца в область сильного поля или из нее.)

Но перед нами все еще стоит такая проблема: чему равен средний квадратичный радиус <r2>ср? Классическая механика не может дать нам ответа. Мы должны вернуться назад и, во­оружившись квантовой механикой, начать все снова. Мы не можем знать, где именно находится электрон в атоме, а знаем лишь, что имеется вероятность его обнаружить в некотором месте. Если мы будем интерпретировать <r2>ср как среднее значение квадрата расстояния от центра для данной вероят­ности распределения, то диамагнитный момент, даваемый квантовой механикой, определяется тем же самым выражением (34.17). Оно, разумеется, дает нам момент одного электрона. Полный же момент будет суммой по всем электронам в атоме. Удивительно, что и классические рассуждения и квантовая механика дают тот же ответ, хотя, как мы увидим дальше, «классические» рассуждения, которые приводят к (34.17), на самом деле несостоятельны в рамках самой классической ме­ханики.

Такой же диамагнитный эффект будет наблюдаться даже у атомов с постоянным магнитным моментом. При этом система тоже будет прецессировать в магнитном поле. Во время прецес­сии атома в целом он набирает небольшую дополнительную угловую скорость, а подобное медленное вращение приводит к маленькому току, который дает поправку к магнитному моменту. Это тот же диамагнитный эффект, но поданный по-другому. Однако на самом деле, когда мы говорим о парамагнетизме, нам не нужно заботиться об этой добавке. Если мы сначала подсчи­тали диамагнитный эффект, как это было сделано здесь, нас не должен беспокоить небольшой дополнительный ток, про­исходящий из-за прецессии. Он уже включен нами в диамаг­нитный член.

**§ 5. Теорема Лармора**

Теперь уже из наших результатов можно сделать кое-какие заключения. Прежде всего в классической теории момент μ всегда пропорционален **J**, причем для каждого вида атомов со своей константой пропорциональности. В классической теории у электрона нет никакого спина и константа пропорционально­сти всегда равна -*qe/2m,* иначе говоря, мы должны в (34.6) положить *g=1.* Отношение **μ** *к* ***J***не зависело от внутреннего движения электронов. Таким образом, в соответствии с класси­ческой теорией все системы электронов должны были прецессировать *с одной и той же* угловой скоростью. (В квантовой механике это *неверно.)* Этот результат связан с одной теоремой классической механики, которую мне бы хотелось сейчас дока­зать. Предположим, что имеется группа электронов, которые удерживаются вместе притяжением к центральной точке, по­добно электронам, притягиваемым ядром. Эти электроны будут также взаимодействовать друг с другом, и движение их, вообще говоря, довольно сложно. Пусть вы нашли их движение в *отсутствие* магнитного поля и хотите знать, каково будет движение *в слабом магнитном поле.* Теорема утверждает, что движение в слабом магнитном поле всегда будет таким же, как и движение без поля с добавочным вращением относительно оси поля с угловой скоростью ω*L=qeB/2m.* (Это то же самое, что и ωp при g=1.) Разумеется, возможных движений может быть много. Все дело в том, что каждому движению без магнитного поля соответствует движение в поле, которое состоит из пер­воначального движения плюс равномерное вращение. Это и есть теорема Лармора, а частота ωL называется *ларморовой частотой.*

Мне бы хотелось показать вам, как можно доказать эту теорему, но детали доказательства я предоставлю вам самим.

Возьмем сначала электрон в центральном силовом поле. На него просто действует направленная к центру сила *F(r).* Если теперь включить однородное магнитное поле, то появится до­полнительная сила q**v**X**В**, так что полная сила будет равна

**F**(r)+q**v**XB. (34.18)

Посмотрим теперь на те же самые электроны из системы коор­динат, вращающейся с угловой скоростью ω относительно оси, проходящей через центр силы и параллельной полю **В**. Она уже не будет инерциальной системой, а посему нам нужно доба­вить надлежащие псевдосилы: центробежные силы и силы Кориолиса, о которых мы говорили в гл. 19 (вып. 2). Там мы обна­ружили, что в системе отсчета, вращающейся с угловой ско­ростью ω, действуют кажущиеся *тангенциальные* силы, пропор­циональные *vr* — радиальной компоненте скорости:

*Ft = -2mωvr.* (34.19) Кроме того, там действует кажущаяся радиальная сила

*Fr=mω2r+2mωvt,* (34.20)

где *vt —* тангенциальная компонента скорости, измеряемая *во* вращающейся системе отсчета. (Радиальная компонента *vr* одна и та же как для вращающихся, так и для инерциальных систем.)

Теперь для достаточно малых угловых скоростей (т. е. когда *(ωr<<vt)* первым (центробежным) слагаемым в уравнении (34.20) можно пренебречь по сравнению со вторым (кориолисовым). После этого уравнения (34.19) и (34.20) можно записать вместе как

**F**=-(2mωXv). (34.21)

Если же теперь *скомбинировать* вращение и магнитное поле, то мы должны к силе (34.18) добавить силу (34.21). Полная сила получится такой:

F(r)+q**v**X**B**+2m**v**X**ω**. (34.22)

[В последнем слагаемом по сравнению с (34.21) мы переставили сомножители в векторном произведении и изменили знак.] Взглянув теперь на полученный результат, мы видим, что если

2m**ω**=-q**B***,*

то последние два члена сократятся, и единственной силой в дви­жущейся системе будет сила **F**(r). Движение электрона будет таким же, как и в отсутствие магнитного поля, но добавится, разумеется, вращение. Мы доказали теорему Лармора для одного электрона. Поскольку при доказательстве мы предполагали со малым, то это означает, что теорема верна только для слабых магнитных полей. Единственно, что я прошу вас рассмотреть самостоятельно,— это случай многих электронов, взаимодей­ствующих друг с другом в том же самом центральном поле. Дока­жите теорему для такого случая. Таким образом, каким бы сложным ни был атом, если его поле центральное,— теорема будет верна. Но это уже конец классической механики, ибо то, что система прецессирует таким образом, неверно. Частота пре­цессии ωp в уравнении (34.11) только тогда равна ωL., когда g=1.

**§ 6. В классической физике пет ни диамагнетизма, ни парамагнетизма**

Сейчас я хочу показать вам, что в соответствии с классиче­ской механикой не получается ни диамагнетизма, ни парамагне­тизма. На первый взгляд это звучит дико — ведь только что мы доказали, что там есть и диамагнетизм, и парамагнетизм, и прецессирующие орбиты и т. п., а теперь собираемся доказывать, что все это ложь. Увы, так оно и есть! Я собираюсь доказать, что *если* достаточно долго следовать за классической механи­кой, то никаких магнитных эффектов не получится: *они исчезнут все до единого.* Если вы начнете с классических рассуждений, но вовремя остановитесь, то получите желаемый результат. И только законные и последовательные доказательства показы­вают, что никаких магнитных эффектов нет.

Вот одно из следствий классической механики. Если у вас есть какая-то заключенная в ящик система, скажем электронный или протонный газ или что-то в этом роде, не способная вращать­ся как нечто целое, то никакого магнитного эффекта возник­нуть не может. Магнитный эффект может получиться лишь при наличии изолированной системы, удерживаемой от разлетания своими собственными силами подобно звезде, которая, будучи помещена в магнитное поле, может начать вращаться. Но если ваш кусок материала удерживается в одном положении и не может начать крутиться, то никакого магнитного эффекта не будет. Более точно мы понимаем под этим следующее: мы пред­полагаем, что при данной температуре существует только *одно состояние* теплового равновесия. Тогда теорема утверждает, что если вы включите магнитное поле и выждете, пока система не придет в тепловое равновесие, то никакого наведенного маг­нитного эффекта не появится — ни диамагнетизма, ни пара­магнетизма. *Доказательство:* Согласно статистической меха­нике, вероятность того, что система имеет заданное состояние движения, пропорциональна *e-U/kT,* где *U —* энергия этого движения. Но что такое энергия движения? Для частиц в по­стоянном магнитном поле она равна обычной потенциальной энергии плюс *mv2/2* без какой бы то ни было добавки от маг­нитного поля. [Вы знаете, что сила, действующая со стороны электромагнитного поля, равна q(**E**+**v**X**B**), а мощность **F**•**v** будет просто q**E**•**v**, т. е. никакого влияния магнитного поля нет и в помине.] Итак, энергия системы независимо от того, находится ли она в магнитном поле или нет, всегда будет суммой только кинетической и потенциальной энергий. А поскольку вероятность любого движения зависит только от энергии, т. е. от скорости и положения, то для нее безразлично, включено ли магнитное поле или нет. Следовательно, на *тепловое* равновесие магнитное поле не оказывает никакого влияния. Если мы возь­мем сначала одну систему, заключенную в первом ящике, а затем другую — во втором ящике, но на этот раз в магнитном поле, то вероятность какого-то определенного значения ско­рости в некоторой точке в первом ящике будет той же самой, что и во втором. Если в первом ящике отсутствуют средние цир­кулирующие токи (которых не должно быть, если система нахо­дится в равновесии со стационарными стенками), то там нет никакого магнитного момента. А поскольку все движения во втором ящике такие же, как и в первом, у него тоже нет ника­кого магнитного момента. Следовательно, если температура поддерживается постоянной, то после включения поля и вос­становления теплового равновесия никакого наведенного маг­нитного момента в соответствии с классической механикой быть не должно. Удовлетворительное объяснение магнитных явле­ний можно получить только в квантовой механике.

К сожалению, я не уверен в вашем полном понимании кван­товой механики, поэтому обсуждать эти вопросы здесь вряд ли уместно. Но, с другой стороны, не всегда следует начинать изу­чение чего-то с выписывания правил и применения их в различ­ных обстоятельствах. Почти каждый предмет, с которым мы имели дело в нашем курсе, начинался по-разному. Для электро­динамики, например, мы на первой же странице выписали урав­нения Максвелла, а уж затем выводили из них все следствия. Это один способ. Однако сейчас я не собираюсь начать новую «первую страницу» выписыванием уравнений квантовой меха­ники и получением следствий из них. Я просто расскажу вам о некоторых результатах квантовой механики до того еще, как вы узнали, откуда они берутся. Итак, за дело.

**§ 7. Момент количества движения в квантовой механике**

Я уже приводил вам соотношение между магнитным момен­том и моментом количества движения. Очень хорошо. Но что *означает* магнитный момент и момент количества движения в Квантовой механике? Оказывается, что для полной уверенности в том, что они означают в квантовой механике, лучше опреде­лять вещи, подобные магнитному моменту, через другие понятия, такие, как энергия. Магнитный момент легко определить через энергию, ибо энергия магнитного момента в магнитном поле равна в классической теории—**μ**•**В**. Следовательно, в кван­товой механике необходимо принять следующее определение. Если мы вычисляем энергию системы в магнитном поле и видим, что она пропорциональна напряженности (для малых полей), то коэффициент пропорциональности мы будем называть маг­нитным моментом в направлении поля. (Нам сейчас в нашей работе не требуется особой элегантности и мы можем продол­жать думать о магнитном моменте в обычном, т. е. в каком-то отношении классическом смысле.)

Теперь мне бы хотелось обсудить понятие момента количе­ства движения в квантовой механике, или, вернее, характери­стики того, что в квантовой механике называется моментом количества движения. Видите ли, при переходе к законам но­вого рода нельзя предполагать, что каждое слово будет в точ­ности означать то же, что и раньше. Подумав, вы можете ска­зать: «Постойте, а ведь я знаю, что такое момент количества движения. Это штука, которую измеряет момент силы». Но что такое момент силы? В квантовой механике у нас должно быть новое определение старых величин. Поэтому законно было бы назвать ее каким-то другим именем, вроде «углоквантового мо­мента», или чем-то в этом духе, и уж это был бы момент количе­ства движения «по-квантовомеханически». Однако если в кван­товой механике мы можем найти величину, которая, когда си­стема становится достаточно большой, идентична нашему ста­рому понятию момента количества движения, то никакой пользы от изобретения новых слов нет. Ее тоже можно называть момен­том количества движения. В этом понимании та странная вещь, которую мы собираемся описать, и есть момент количества движения. Это характеристика, в которой мы для больших систем узнаем момент количества движения классической механики.

Прежде всего возьмем систему с сохраняющимся моментом количества движения наподобие атома в пустом пространстве. Такая система (подобно Земле, вращающейся вокруг собствен­ной оси) может крутиться вокруг любой оси, какую бы нам ни вздумалось выбрать. Для данной величины спина возможно много различных «состояний» с одной и той же энергией, при­чем каждое из них соответствует какому-то направлению оси момента количества движения. Таким образом, в классической механике с данным моментом количества движения связано бесконечное число возможных состояний с одной и той же энер­гией.

Однако в квантовой механике, как оказывается, происходит несколько странных вещей. Во-первых, число состояний, в ко­торых *может находиться,* такая система, ограниченно — их можно перечислить. Для маленькой системы это число довольно мало, но если система велика, конечное число становится очень и очень большим. Во-вторых, мы *не можем* описывать «состоя­ния» заданием *направления* момента количества движения, а можем только задавать его *компоненту* в некотором направлении, скажем в направлении оси z. Классически объект с данным пол­ным моментом количества движения **J** может в качестве z-компоненты иметь любую величину между -J и +J. Но в кванто­вой механике z-компонента момента количества движения может принимать только определенные дискретные значения. Любая данная система, в частности атом или ядро или что-то другое, с заданной энергией имеет характерное число j, а ее z-компо­нента момента количества движения может принимать только одно из значений:

C:\Мои документы\gray.jpg

Наибольшая величина z-компоненты равна произведению j на *h,* следующая на hменьше и т. д. до — jh. Число j называется «спином системы». (Некоторые называют его «квантовым чис­лом полного момента количества движения», а мы будем назы­вать его попросту «спином».)

Вас, вероятно, волнует, не будет ли все сказанное нами верно только для некоторой особой оси z? Это не так. Для си­стемы со спином j компонента момента количества движения по *любой* оси может принимать только одно из значений (34.23). Хотя все это выглядит довольно невероятно, я еще раз прошу вас мне поверить. Позднее мы еще вернемся к этому пункту и обсудим его. Вам, наверно, будет приятно услышать, что z-компонента пробегает набор значений от некоторого числа до минус *то же самое число,* так что нам, к счастью, не приходится гадать, какое же направление оси z положительное. (Конечно, если бы я сказал, что он пробегает значения от +j до минус какое-то другое число, это было бы крайне подозрительно, ибо тогда мы были бы лишены возможности направить ось z в дру­гую сторону.)

Но если z-компонента момента количества движения изме­няется на целое число от +j до -j*,* то не должно ли само j тоже быть целым числом? Нет! Не совсем так, целым должно быть удвоенное j, т. е. 2j. Иначе говоря, целым должна быть лишь *разность* между +j и -j. Таким образом, спин j', вообще говоря, может быть либо целым, либо полуцелым в зависимости от того, будет ли 2/ нечетным или четным. Возьмем, к примеру, ядро типа лития, спин которого равен j=3/2. При этом момент количества движения относительно оси z принимает в еди­ницах h одно из следующих значений:

C:\Мои документы\gray.jpg

Так что если ядро находится в пустом пространстве в отсутствие внешних полей, то у него имеются четыре возможных состоя­ния, каждое с одной и той же энергией. Для системы со спином 2 z-компонента момента количества движения принимает в еди­ницах hтолько следующие значения:

2; 1; 0; -1; -2.

Если вы подсчитаете, сколько возможно состояний для данного спина j, то их получится (2j+1). Другими словами, если вы скажете мне, какова энергия системы и ее спин *j,* то число сос­тояний с этой же энергией в точности будет равно (2j+1), причем каждое из них соответствует одной из различных вели­чин z-компоненты момента количества движения.

Мне хотелось бы прибавить еще один факт. Если вы слу­чайно выберете некоторый атом с известным j и измерите его s-компоненту момента количества движения, то сможете полу­чить какое-то одно из возможных значений, причем каждое из них *равновероятно.* Любое состояние может характеризоваться только одним из возможных значений, но каждое из них столь же хорошо, как и любое другое. Каждое из них имеет в мире один и тот же вес (мы предполагаем, что никакой предвари­тельной «сортировки» не было).

Кстати, этот факт имеет простой классический аналог. Представьте, что тот же самый вопрос вас интересует с класси­ческой точки зрения: какова вероятность какого-то определен­ного значения z-компоненты момента количества движения, если из набора систем, имеющих один и тот же момент количе­ства движения, вы наугад выбрали одну? *Ответ:* любое из значений от максимального до минимального равновероятно (в чем вы можете легко убедиться сами). Этот классический результат соответствует равной вероятности любой из (2j+1) возможностей в квантовой механике.

Из того, что у нас было до сих пор, можно получить другое интересное и в каком-то смысле удивительное заключение. В некоторых классических расчетах в окончательном резуль­тате появлялась величина, равная *квадрату* момента коли­чества движения **J**, другими словами, **J**•**J**. И вот оказывается, что правильную квантовомеханическую формулу можно *уга­дать с* помощью классических вычислений и следующего прос­того правила: замените J2 = **J**•**J** на j(j+1)h2. Этим прави­лом часто пользуются, и обычно оно дает верный результат, однако *не всегда.* Чтобы показать вам, почему это правило может хорошо работать, я приведу следующее рассуждение.

Скалярное произведение **J**•**J** можно записать как

***J***•***J****=J2x+J2y+J2z*

Поскольку это скаляр, то он должен оставаться одним и тем же для любой ориентации спина. Предположим, что мы случай­но выбрали образец какой-либо атомной системы и произвели измерения либо величины *J2x,* либо J2y, либо *J2z —* среднее

значение любой из них должно быть тем же самым. (Ни одно из направлений не имеет особого преимущества перед любым другим.) Следовательно, среднее значение **J**•**J** равно просто утроенной средней величине любой компоненты, скажем *J2z :*

**<J**•**J>**cp**=3<J**2z**>.**

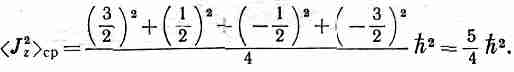
Но поскольку **J**•**J** при любой ориентации одно и то же, его среднее, разумеется, будет постоянной величиной

**J**•**J** = 3<J2z>cp. (34.24)

Если же мы теперь скажем, что то же самое уравнение будет использоваться и в квантовой механике, то можем легко найти <J2z>ср. Нам просто нужно взять сумму (2j+1) возможных значений J2zи поделить ее на число всех значений:

C:\Мои документы\gray.jpg

Вот что получается для системы со спином 3/2:



Отсюда мы заключаем, что

C:\Мои документы\gray.jpg

На вашу долю остается доказать, что соотношение (34.25) вместе с (34.24) дает в результате

C:\Мои документы\gray.jpg

Хотя в рамках классической физики мы бы думали, что наи­большее возможное значение z-компоненты **J** равно просто абсолютной величине **J**, именно √(**J**•**J**), в квантовой механике максимальное значение *Jz* всегда немного меньше его, ибо *jh* всегда меньше √[j(j+1)]h. Момент количества движения ни­когда не направлен «полностью вдоль оси z».

**§ 8. Магнитная энергия атомов**

Теперь я снова хочу поговорить о магнитном моменте. Я уже говорил, что в квантовой механике магнитный момент атомной системы может быть связан с моментом количества движения соотношением (34.6):

C:\Мои документы\gray.jpg

где -*qe—*заряд, а *m —* масса электрона.

Атомные магнитики, будучи помещены во внешнее магнит­ное поле, приобретут дополнительную магнитную энергию, которая зависит от компоненты их магнитного момента в на­правлении поля. Мы знаем, что

Uмаг**=-μ•В.** (34.28) Выбирая ось *z* вдоль направления поля В, получаем

*U*маг*=μzВ.* (34.29) А используя уравнение (34.27), находим

C:\Мои документы\gray.jpg

Согласно квантовой механике, величина *Jz* может принимать только такие значения: jh, (j-1)h,...,- jh. Поэтому магнитная энергия атомной системы не произвольна, допустимы только некоторые ее значения. Например, максимальная величина энергии равна

C:\Мои документы\gray.jpg

Величину *qeh/2m* обычно называют «магнетоном Бора» и обоз­начают через μ*B:*

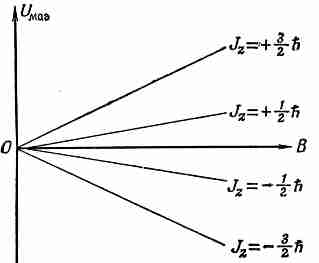
C:\Мои документы\gray.jpg

Возможные значения магнитной энергии будут следующими:

C:\Мои документы\gray.jpg

где *Jz/h* принимает одно из следующих значений: j, (j-1), (j-2), ..., (-j+1), -j.

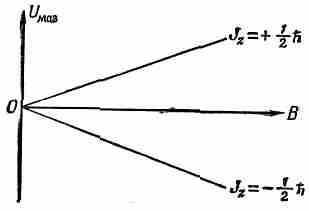
Другими словами, энергия атомной системы, помещенной в магнитное поле, изменяется на величину, пропорциональную полю и компоненте *Jг.* Мы говорим, что энергия атомной маг­нитной системы «расщепляется магнитным полем на 2j+1 уровня». Например, атомы со спином *j=3/2,* энергия которых вне магнитного поля равна U0, в магнитном поле будут иметь четыре возможных значения энергии. Эти энергии можно изобра­зить на диаграмме энергетических уровней наподобие фиг. 34.5.



*Фиг. 34.5. Возможные магнит­ные энергии атомной системы со спином* 3/2 *в магнитном поле В.*

Однако энергия каждого атома в данном поле *В* принимает только одно из четырех возможных значений. Именно это гово­рит квантовая механика о поведении атомной системы в маг­нитном поле.

Простейшая «атомная» система — отдельный электрон. Спин электрона равен J/2, поэтому у него возможны два состояния: Jz=h/2 и Jz=-h*/2.* Для спинового магнитного момента от­дельного покоящегося электрона (у которого отсутствует орбитальное движение) g=2, так что магнитная энергия будет ±μBB. На фиг. 34.6 показаны возможные энергии электрона в магнитном поле.



*Фиг. 34.6. Два возможных энергетических состояния электрона в магнитном поле* В.

Грубо говоря, спин электрона направлен либо «вверх» (по магнитному полю), либо «вниз» (против поля).

У системы с более высоким спином число состояний тоже больше. Поэтому мы можем в зависимости от величины *Jz* говорить о спине, направленном «вверх» или «вниз» или под некоторым «углом».

Эти результаты квантовой механики мы будем использо­вать при обсуждении магнитных свойств материалов в следую­щей главе.

# Глава 35

**ПАРАМАГНЕТИЗМ И МАГНИТНЫЙ РЕЗОНАНС**

[**§ 1. Квантованные ма****гнитные состояния**](#а1)

[**§ 2. Опыт Штерна —** **Герлаха**](#а2)

[**§ 3. Метод молекулярн****ых пучков Раби**](#а3)

[**§ 4. Пар****амагнетизм**](#а4)

[**§ 5. Охлаждение адиабатич****еским разм****агничива­нием**](#а5)

[**§ 6. Ядерный магнитный** **резонанс**](#а6)

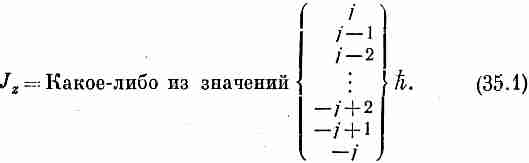
***Повторить:* гл. 1 (вып. 5)** «Внутреннееустройство диэлектрика

**§ 1. Квантованные магнитные состояния**

В предыдущей главе мы говорили, что в квантовой механике момент количества движе­ния системы не может иметь произвольного направления, а его компоненты вдоль данной оси могут принимать только определенные дискретные эквидистантные значения. Это по­разительная, но характерная особенность кван­товой механики. Вам может показаться, что еще слишком рано влезать в такие вещи, что надо подождать, пока вы хоть немного не привыкнете к ним и не будете готовы воспри­нимать подобные идеи. Но дело в том, что при­выкнуть к ним вы никогда не сможете. Вы никогда не сможете легко их воспринимать. Это, пожалуй, самое сложное из всего, что я рассказывал вам до сих пор и, главное, нет способа описать это как-то более вразумительно и не так хитроумно и сложно по форме. Поведе­ние вещества в малых масштабах, как я уже говорил много раз, отличается от всего того, к чему вы привыкли, и поистине весьма странно. Вы, конечно, согласитесь, что было бы неплохо попытаться поближе познакомиться с явлени­ями в малом масштабе, продолжая одновремен­но использовать классическую физику, и приобрести поначалу хоть какой-то опыт, пусть даже не понимая всего достаточно глубоко. Понимание этих вещей приходит очень медлен­но, если оно приходит вообще. Конечно, по­немногу начинаешь чувствовать, что может и что не может произойти в данной квантовомеханической ситуации, а это, возможно, и называ­ется «пониманием», но добиться приятного чувства «естественности» квантовомеханических правил здесь невозможно. Они-то, конечно, естественны, но с точки зрения нашего повседневного опыта на привычном уровне остаются очень уж необыч­ными. Мне бы хотелось объяснить вам, что позиция, которую мы собираемся занять по отношению к этому правилу о дискрет­ности значений момента количества движения, совершенно отлична от отношения ко многим другим вещам, о которых шла речь. Я даже не буду пытаться «объяснять» его, но должен хоть *рассказать* вам, что получается. Было бы нечестно с моей стороны, описывая магнитные свойства материалов, не указать, что классическое объяснение магнетизма, т. е. момента коли­чества движения и магнитного момента, несостоятельно.

Одно из наиболее необычных следствий квантовой механики состоит в том, что момент количества движения вдоль любой оси всегда оказывается равным целой или полуцелой доле h, причем какую бы ось вы ни взяли, это всегда будет так. Пара­доксальность здесь заключается в следующем любопытном фак­те: если вы возьмете любую другую ось, то окажется, что ком­поненты относительно этой оси тоже будут взяты из того же самого набора значений. Однако оставим рассуждения до того времени, когда у вас наберется достаточно опыта и вы сможете насладиться тем, как этот кажущийся парадокс в конце концов разрешится.

Сейчас просто примите на веру, что у каждой атомной сис­темы есть число j, называемое *спином* системы (оно может быть либо целым, либо полуцелым), и что компоненты момента коли­чества движения относительно любой данной оси всегда при­нимают одно из значений между +jhи -*jh:*



Мы упомянули также, что магнитный момент любой простой атомной системы имеет то же самое направление, что и ее момент количества движения. Это справедливо не только для атомов или ядер, но и для элементарных частиц. Каждая элементарная частица обладает характерной для нее величиной j и своим собственным магнитным моментом. (Для некоторых частиц обе они равны нулю.) Мы понимаем под «магнитным моментом системы», что ее энергия в направленном по оси z магнитном поле для слабых полей может быть записана как — μz*В.* Мы должны условиться не брать слишком больших полей, ибо они будут возмущать внутренние движения системы и энергия не будет мерой магнитного момента, который система имела до включения магнитного поля. Но если поле достаточно слабо, то оно изменяет энергию на величину

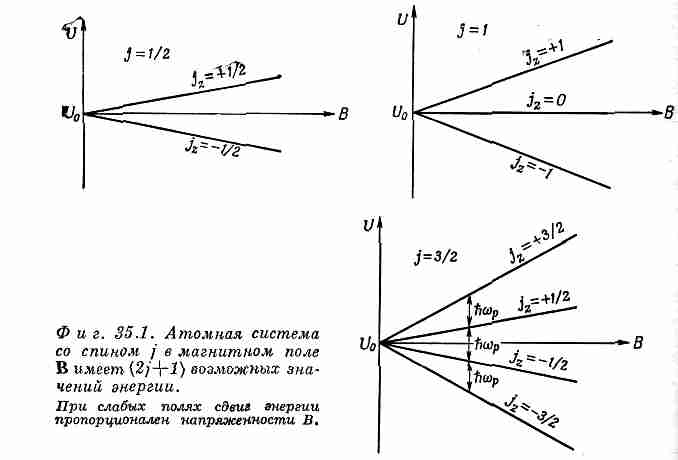
ΔU=-μzB, (35.2)

с тем условием, что в этом выражении мы должны сделать под­становку

C:\Мои документы\gray.jpg

причем *Jz* равно одному из значений (35.1).

Предположим, что мы взяли систему со спином j=3/2 В отсутствие магнитного поля у системы было бы четыре раз­личных возможных состояния, соответствующих различным значениям *Jz с* одной и той же энергией. Но в тот момент, когда мы включаем магнитное поле, появляется дополнительная энергия взаимодействия, которая разделяет эти состояния на четыре состояния, слабо различающиеся по энергии, или, как говорят, первоначальный *энергетический уровень* расщепился; на четыре новых уровня. Эти уровни определяются энергией, пропорциональной произведению *В* на h*,* и на 3/2, 1/2 , -1/2 или -3/2 в зависимости от величины *Jг.* Расщепление энерге­тических уровней в атомной системе со спинами 1/2, 1 и 3/2 показаны на фиг. 35.1.



(Вспомните, что для любого расположе­ния электронов магнитный момент всегда направлен противо­положно моменту количества движения.)

Обратите внимание, что «центр тяжести» энергетических уровней на фиг. 35.1 один и тот же как в присутствии магнит­ного поля, так и без него. Заметьте также, что все расстояния от одного уровня до следующего для данной частицы в данном магнитном поле равны между собой. Расстояние между уровнями для данного магнитного поля *В* мы будем записывать как hωp, что является просто определением ωp . Воспользовавшись (35.2) и (35.3), получим

hωp=g(qe/2m)hB.

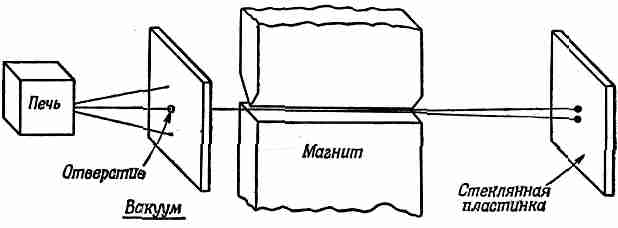
или

ωp=g(qe/2m)B.(35.4)

Величина *g(qe/2m)* равна просто отношению магнитного момента к моменту количества движения и характеризует свойства частицы. Формула (35.4) в точности совпадает с формулой, полу­ченной нами в гл. 34 для угловой скорости прецессии гироскопа с магнитным моментом (**μ** и моментом количества движения **J** в магнитном поле.

**§ 2. Опыт Штерна — Герлаха**

Факт квантования момента количества движения — вещь настолько удивительная, что мы поговорим немного об ее истории. Ученый мир был буквально потрясен, когда было сделано это открытие (даже несмотря на то, что это ожидалось теоретически). Первыми экспериментально наблюдали этот факт Штерн и Герлах в 1922 г. Если хотите, опыт Штерна и Герлаха можно рассматривать как прямое подтверждение кван­тования момента количества движения. Штерн и Герлах по­ставили эксперимент по измерению магнитного момента отдель­ных атомов серебра. Испаряя серебро в горячей печи и пропуская пары серебра через систему маленьких отверстий, они получа­ли пучок атомов серебра. Этот пучок направлялся между полюсными наконечниками специального магнита (фиг. 35.2).



*Фиг. 35.2. Опыт Штерна и Герлаха.*

Идея заключалась в следующем. Если магнитный момент ато­мов серебра равен μ, то в магнитном поле В, направленном по оси *z,* они приобретут добавочную энергию -μ*zB.* В класси­ческой теории μг равно произведению магнитного момента на косинус угла между моментом и магнитным полем, так что до­полнительная энергия в поле была бы равна

*ΔU=-μB*cosθ. (35.5)

Разумеется, когда атомы вылетают из печи, их магнитные мо­менты имеют любые направления, поэтому возможны все зна­чения угла 0. Но если магнитное поле быстро изменяется с изменением z, т. е. если есть большой градиент, магнитная энер­гия с изменением положения тоже меняется, а поэтому на маг­нитные моменты действует сила, направление которой зависит от того, будет ли косинус положительным или отрицательным. Атомы при этом должны отклоняться вверх или вниз силой, пропорциональной производной магнитной энергии; из прин­ципа виртуальной работы

Fz=-*д*U/*д*z=μcosθ(*д*B/*д*z). (35.6)

Чтобы получить очень быстрое изменение магнитного поля, Штерн и Герлах сделали один из полюсных наконечников сво­его магнита очень острым. Пучок атомов серебра направлялся прямо вдоль этого острого края, так что на атомы в таком не­однородном поле должна была действовать вертикальная сила. Атомы серебра с горизонтально направленными магнитными моментами не чувствовали бы никакой силы и проходили бы через магнит без отклонения. На атомы, магнитный момент которых направлен в точности вертикально, действовала бы максимальная сила по направлению к острому краю магнита. А атомы с магнитным моментом, направленным вниз, чувство­вали бы силу, тянущую их вниз. Следовательно, покинув маг­нит, атомы должны были «расползтись» в соответствии с вер­тикальными компонентами своих магнитных моментов. В клас­сической теории возможны любые углы, так что после осаждения пучка на стеклянной пластинке следовало ожидать «размазы­вания» его по вертикальной линии. Высота линии при этом должна была быть пропорциональной величине магнитного момента. Однако когда Штерн и Герлах увидели, что получается на самом деле, то полное поражение классических понятий ста­ло явным. На стеклянной пластинке они обнаружили два от­дельных пятнышка. Пучок атомов серебра распался на два пучка.

Самое удивительное, что пучок атомов, спины которых, ка­залось бы, должны были быть направлены совершенно случайно, расщепился на два отдельных пучка. Откуда магнитный момент может знать, что ему полагается иметь определенные компоненты вдоль направления магнитного поля? Этот вопрос и послужил началом открытия квантования момента количества движения, и я не буду сейчас даже пытаться дать вам теорети­ческое объяснение, а просто призову вас поверить в результаты этого эксперимента так же, как физики тех дней были вынуж­дены их признать. То, что энергия атома в магнитном поле мо­жет принимать только какой-то набор дискретных значений,— *экспериментальный факт.* Для каждого из этих значений энер­гия пропорциональна напряженности поля. Так что в той об­ласти, где поле изменяется, принцип виртуальной работы гово­рит нам, что возможные магнитные силы, действующие на ато­мы, могут принимать только дискретные значения: для каждого состояния силы оказываются различными и пучок атомов рас­щепляется на небольшое число отдельных пучков. Измеряя отклонение пучка, можно найти величину магнитного момента.

**§ 3. Метод молекулярных пучков Раби**

Теперь мне бы хотелось описать улучшенную аппаратуру для измерения магнитных моментов, разработанную И. Раби и его сотрудниками. В экспериментах Штерна — Герлаха от­клонение атомов было очень небольшим и измерения магнитных моментов не очень точными. А техника Раби позволяет добиться фантастической точности при измерении магнитных моментов. Метод основан на том факте, что в магнитном поле первоначаль­ная энергия атомов расщепляется на конечное число энергети­ческих уровней. Тот факт, что энергия атома может иметь толь­ко определенные дискретные значения, на самом деле не более удивителен, чем то, что атом *вообще* имеет дискретные энерге­тические уровни; об этом мы часто говорили в начале курса. Почему бы этого *не могло* происходить и с атомами в магнитном поле? Так именно все и происходит. Однако когда пытаются связать расщепление с идеей *ориентированных магнитных моментов,* то в квантовой механике появляются некоторые странные выводы.

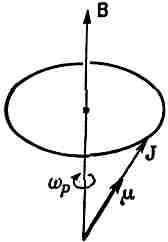
Когда атом имеет два уровня, отличающихся по энергии на величину ΔU, это может вызвать переход с верхнего уровня на нижний с излучением кванта света

hω=ΔU, (35.7)

где ω — частота.

То же самое может произойти и с атомами в магнитном поле. Но только разность энергий настолько мала, что частота ее соответствует не свету, а микроволнам или радиочастотам. Переход с нижнего энергетического уровня на верхний может также происходить с поглощением света или (в случае атомов в магнитном поле) микроволновой энергии. Итак, если у нас есть атом в магнитном поле, то, прикладывая дополнительное электромагнитное поле надлежащей частоты, мы можем вызвать переход из одного состояния в другое. Другими словами, если у нас есть атом в сильном магнитном поле и мы будем «щеко­тать» его слабым переменным электромагнитным полем, то име­ется некоторая вероятность «выбить» его на другой уровень, когда частота поля близка к ω, определяемой соотношением (35.7). Для атома в магнитном поле эта частота в точности равна частоте, названной нами ω*р* и зависящей от магнитного поля, согласно формуле (35.4). Если атом «щекотать» с другой час­тотой, то вероятность перехода станет очень мала. Таким образом, вероятность перехода при частоте ω*р* имеет резкий *резо­нанс.* Измеряя частоту этого резонанса в известном магнитном поле *В,* можно измерить величину *g(q/2m),* а следовательно, и g-фактор, причем с огромной точностью.

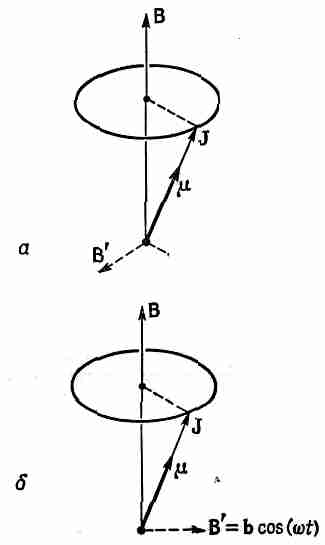
Интересно, что к такому же заключению можно прийти и с классической точки зрения. В соответствии с классической картиной, когда мы помещаем гироскоп, обладающий магнит­ным моментом μ, и моментом количества движения *3,* во внешнее магнитное поле, гироскоп начнет прецессировать вокруг оси, параллельной этому полю (фиг. 35.3).



*Фиг. 35.3. Классическая прецессия атома с магнитным моментом* ***μ*** *и моментом количества движения* ***J***,

Предположим, нас инте­ресует, как можно изменить угол классического гироскопа по отношению к магнитному полю, т. е. по отношению к оси z? Магнитное поле создает момент силы относительно *горизон­тальной* оси. На первый взгляд кажется, что такой момент силы *старается* выстроить магниты в направлении поля, но он вызывает только прецессию. Если же мы хотим изменить угол гироскопа по отношению к оси z, то должны приложить момент силы *относительно оси z.* Если мы приложим момент силы, действующий в том же направлении, что и прецессия, угол гироскопа изменится и это приведет к уменьшению компоненты **J** в направлении оси z. Угол между направлением **J** и осью z на фиг. 35.3 должен увеличиться. Если мы попытаемся воспре­пятствовать прецессии, вектор **J** будет двигаться по направле­нию к вертикали.

Но каким образом к наше­му прецессирующему атому можно приложить нужный момент силы? *Ответ:* с по­мощью слабого магнитного поля, направленного в сто­рону. На первый взгляд вам может показаться, что нап­равление этого магнитного поля должно крутиться вмес­те с прецессией магнитного момента, так чтобы поле всегда было направлено к нему под прямым углом, как это показано на фиг. 35.4, *а с* помощью поля *В'.*



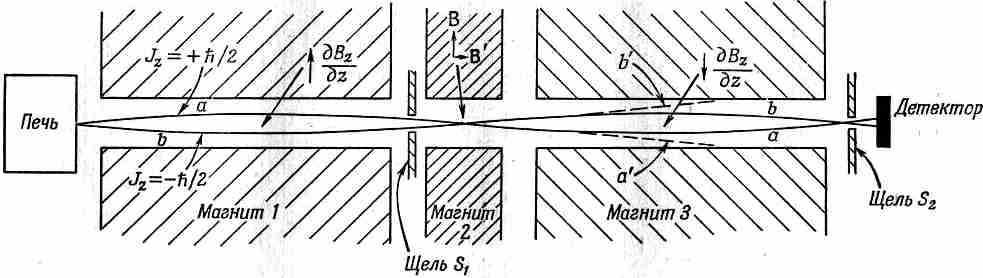
*Фиг. 35.4. Угол прецессии атом­ного магнитика можно изменить двумя путями:*

*а — горизонтальным магнитным полем, направленным всегда под прямым уг­лом к μ*; б—*осциллирующим полем.*

Такое поле работает очень хорошо, однако нисколько не хуже действует и *переменное* горизонтальное поле. Если у нас есть горизонтальное поле *В',* которое всегда направлено по оси *х* (в положительную или отрицательную сторону) и которое ос­циллирует с частотой ωp, тогда через каждые полпериода дей­ствующая на магнитный момент пара сил переворачивается, так что получается суммарный эффект, который почти столь же эффективен, как и вращающееся магнитное поле. С точки зрения классической физики мы бы ожидали при этом измене­ния компоненты магнитного момента вдоль оси z, если у нас есть очень слабое магнитное поле, осциллирующее с частотой, в точности равной ωp. Разумеется, по классической физике μ*г* должно изменяться непрерывно, но в квантовой механике z-компонента магнитного момента не может быть непрерывной. Она должна неожиданно «прыгать» от одного значения до дру­гого. Я сравнивал следствия классической и квантовой меха­ники, чтобы дать вам понятие о том, что может происходить классически, и как это связано с тем, что происходит на самом деле в квантовой механике. Обратите внимание, между прочим, что в обоих случаях ожидаемая резонансная частота одна и та же.

Еще одно дополнительное замечание. Из того, что мы гово­рили о квантовой механике, не видно, почему переходы не могут происходить при частоте *2ωр.* Оказывается, что в классическом случае этому совершенно нет никакого аналога, но в квантовой механике такие переходы невозможны, по крайней мере в описанном нами способе вынужденных переходов. При гори­зонтальном осциллирующем магнитном поле вероятность того, что частота 2ωp вызовет скачок сразу на два шага, равна нулю. Все переходы, будь то переход вверх или вниз, предпочитают происходить только при частоте ω*р.*

Вот теперь мы готовы к описанию метода Раби. Здесь мы опишем только, как этот метод измерения магнитных моментов работает в случае частиц со спином 1/2. Схема аппаратуры пока­зана на фиг. 35.5.



*Фиг. 35.5. Схема установки Раби в опытах с молекулярными пучками.*

Вы видите здесь печь, которая создает поток нейтральных атомов, летящих по прямому пути через три магнита. Магнит *1 —* такой же, как и на фиг. 35.2, он создает поле; с большим, скажем положительным, градиентом *dBz/dz.* Если атомы обладают магнитным моментом, то они будут отклоняться вниз при Jz=+h/2 или вверх приJz =-h/2 (поскольку для электронов μ направлен противоположно **J**). Если мы будем рассматривать только те атомы, которые могут проходить через щель *S1,* то, как это показано на фиг. 35.5, возможны две траектории. Чтобы попасть в щель, атомы с Jz=+h/2 долж­ны лететь по кривой *а,* а атомы с Jz=-h/2 — по кривой *b.* Атомы, вылетающие из печи в другом направлении, вообще не попадут в щель.

Магнит *2* создает однородное поле. В этой области на атомы никакие силы не действуют, поэтому они просто пролетают через нее и попадают в магнит *3.* Этот магнит представляет собой копию магнита *1,* но с *перевернутым* полем, так что у него, *dBz/dz* имеет отрицательный знак. Атомы с Jz=+h/2 (будем говорить «со спином, направленным вверх»), которые в магните *1* отклонялись *вниз,* в магните *3* будут отклоняться *вверх;* они продолжат свой полет по траектории *а* и через щель *S2* попадут в детектор. Атомы с Jz=-h*/2* («со спином, направленным вниз») в магнитах *1* и *3* тоже будут испытывать действие противоположных сил и полетят по траектории *b,* которая через щель S*2* тоже приведет их в детектор.

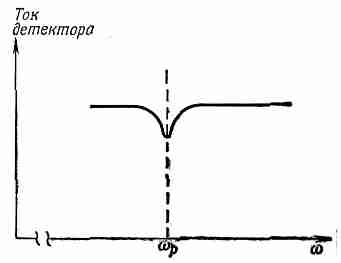
Детектор можно сделать разными способами в зависимости от измеряемых атомов. Так, для щелочных металлов, подобных натрию, детектором может служить тонкая раскаленная вольфрамовая нить, подсоединенная к чувствительному гальванометру. Атомы натрия, оседая на этой нити, испаряются в виде ионов Na+ и оставляют на ней электрон. Возникает ток, про­порциональный числу осевших в 1 *сек* атомов натрия.

В щели магнита *2* находится набор катушек, которые созда­ют небольшое горизонтальное магнитное поле **В'.** Эти катушки питаются током, осциллирую­щим с переменной частотой ω, так что между полюсами магнита *2* создается сильное вертикальное магнитное поле **В**0 и слабое осциллирующее гори­зонтальное магнитное поле **В'.**

Предположим теперь, что частота со осциллирующего поля подобрана равной ωp — частоте «прецессии» атомов в поле В. Переменное поле вызовет у некоторых из пролетающих атомов переход от одного значения *Jz* к другому. Атомы, спины которых были первоначально направлены вверх (Jг=+h/2), могут перевернуться вниз (Jz=-h/2). Теперь магнитный момент этих атомов перевернут, так что в магните *3* они будут чувство­вать силу, направленную *вниз,* и полетят по траектории а', как показано на фиг. 35.5. Теперь они уже не смогут пройти через щель S2 и попасть в детектор. Точно так же некоторые из атомов, спин которых был первоначально направлен вниз

(Jz=-h/2), перевернутся при прохождении через магнит *2* вверх (Jz=+h/2). После этого они полетят по траектории *b'* и не попадут в детектор.

Если частота осциллирующего поля **В'** значительно отли­чается от ωp оно не сможет вызвать переворачивания спина и атомы по своим «невозмущенным» орбитам пройдут прямо к детектору. Итак, как видите, можно найти частоту «прецессии» атомов ωp в поле **В0,** подбирая частоту со магнитного поля **В**', пока не получим уменьшения тока атомов, приходящих в де­тектор. Уменьшение тока будет происходить тогда, когда ω попадет «в резонанс» с ω*p.* График зависимости тока в детекторе от со может напоминать кривую, изображенную на фиг. 35.6.



*Фиг. 35.6. Количество атомов в пучке при ω=ωp уменьшается.*

Зная ω , можно найти величину *g* для данного атома.

Такой резонансный эксперимент с атомными или, как их часто называют, «молекулярными» пучками представляет очень красивый и точный способ измерения магнитных свойств атом­ных объектов. Резонансную частоту ωp можно определить с очень большой точностью, по сути дела значительно точнее, нежели мы способны измерить поле **В0,** необходимое при на­хождении *g.*

**§ 4. Парамагнетизм**

Теперь мне бы хотелось описать явление парамагнетизма вещества. Предположим, имеется вещество, в составе которого имеются атомы, обладающие постоянным магнитным моментом, например кристаллы медного купороса. В этих кристаллах содержатся ионы меди, у которых электроны на внутренних оболочках имеют суммарный момент количества движения и магнитный момент, не равные нулю. Таким образом, ионы меди будут источником постоянного магнитного момента молекул купороса. Буквально несколько слов о том, какие атомы имеют постоянный магнитный момент, а какие — нет. Любой атом, у которого число электронов *нечетно,* подобно натрию, напри­мер, будет иметь магнитный момент. На незаполненной оболочке натрия имеется один электрон. Этот электрон и определяет спин и магнитный момент атома. Однако обычно при образовании соединения этот дополнительный электрон на внешней оболочке спаривается с другим электроном, направление спина которого в точности противоположно, так что все моменты количества движения и магнитные моменты валентных электронов в точности компенсируют друг друга. Вот почему молекулы, вообще го­воря, не обладают магнитным моментом. Конечно, если у вас есть газ атомов натрия, то там такой компенсации [не происхо­дит](#прим1). Точно так же если у вас есть то, что в химии называется «свободным радикалом», т. е. объект с нечетным числом валент­ных электронов, то связи оказываются неполностью насыщен­ными и появляется ненулевой момент количества движения.

У подавляющего большинства материалов полный магнитный момент появляется только тогда, когда там присутствуют атомы с незаполненной *внутренней* электронной оболочкой. Благода­ря этому они могут иметь суммарный момент количества дви­жения и магнитный момент. Такие атомы принадлежат к «пере­ходным элементам» периодической таблицы Менделеева, на­пример: хром, марганец, железо, никель, кобальт, палладий и платина — элементы как раз такого сорта. Кроме того, все редкоземельные элементы имеют незаполненную внутреннюю оболочку, а следовательно, и постоянные магнитные моменты. Правда, встречаются еще странные вещества (к числу их отно­сятся жидкий кислород и окись азота), которые, оказывается, тоже обладают магнитным моментом, но объяснить причины этих странностей я предоставляю химикам.

Предположим теперь, что у нас есть ящик, наполненный молекулами или атомами с постоянным магнитным моментом, скажем газ, жидкость или кристалл. Нам хочется знать, что получится, если мы поместим его во внешнее магнитное поле. В *отсутствие* магнитного поля атомы сбиваются тепловым движением и их магнитные моменты распределяются по всем направлениям. Но когда действует магнитное поле, оно выстра­ивает эти маленькие магнитики, так что магнитных моментов, направленных по полю, становится больше, чем направленных против него. Материал «намагничивается».

*Намагниченность* **М** материала мы определяем как полный магнитный момент единицы объема, под которым мы понимаем векторную сумму всех атомных магнитных моментов единицы объема. Если среднее число атомов в единице объема равно *N,* а их *средний* момент равен <**μ**>cp, то **М** можно записать как про­изведение *N* на средний магнитный момент:

**м** = n<**μ**>cp. (35.8)

Это определение **М** аналогично определению электрической поляризации **Р**, данному в гл. 10 (вып. 5).

Классическая теория парамагнетизма, как вы уже убедились в гл. 10 (вып. 5), в точности аналогична теории диэлектрической проницаемости. Предполагается, что магнитный момент μ каждого из атомов всегда имеет одну и ту же величину, но может быть направлен в любую сторону. Магнитная энергия в поле В равна -**μ•B**=-μBcosθ, где θ — угол между моментом и полем. Согласно статистической физике, относительная вероят­ность угла равна e-энергия/kT так что угол 0° более вероятен, чем угол π. Следуя в точности по пути, проделанному нами в гл. 11, § 3 (вып. 5), мы обнаружим, что для слабых магнитных полей **М** направлена параллельно **В** и имеет величину

C:\Мои документы\gray.jpg

[См. выражение (11.20), вып. 5.] Эта приближенная формула верна, только когда отношение μ*B/kT* много меньше единицы.

Мы нашли, что намагниченность, т. е. магнитный момент единицы объема, пропорциональна магнитному полю. Это яв­ление и называется парамагнетизмом. Вы увидите, что эффект сильнее проявляется при низких температурах и слабее при высоких. При помещении вещества в магнитное поле возникаю­щий в нем магнитный момент в случае слабых полей пропор­ционален величине поля. Отношение *М к В* (для слабых полей) называется магнитной *восприимчивостью.*

Рассмотрим теперь парамагнетизм с точки зрения квантовой механики. Обратимся сначала к атомам со спином *1/2.* Если в отсутствие магнитного поля атомы обладают вполне определенной энергией, то в магнитном поле энергия изменится; возможны два значения энергии для разных значений Jz. Для Jz=+h/2

магнитное поле изменяет энергию на величину

C:\Мои документы\gray.jpg

(Для атомов сдвиг энергии ΔU положителен, ибо заряд элек­трона отрицателен.) Для Jг =-*h/2* энергия изменяется на величину

C:\Мои документы\gray.jpg

Для сокращения записи обозначим

C:\Мои документы\gray.jpg

тогда

*ΔU = ±μ0В.* (35.13)

Совершенно ясен и смысл μ0; — μ*0* равно z-компоненте маг­нитного момента для спина, направленного вверх, а + μ0 равно z-компоненте магнитного момента в случае спина, на­правленного вниз.

Статистическая механика говорит нам, что вероятность нахождения атома в каком-то состоянии пропорциональна

*g-*(энергия состояния)/kT.

В отсутствие магнитного поля энергия обоих состояний одна и та же, поэтому в случае равновесия в магнитном поле ве­роятности пропорциональны

*е-ΔU/kT,* (35.14)

Число же атомов в единице объема со спином, направленным вверх, равно

C:\Мои документы\gray.jpg

а со спином, направленным вниз,

C:\Мои документы\gray.jpg

Постоянная *а* должна определяться из условия

Nвверх+Nвниз=N (35.17)

т.е. равна полному числу атомов в единице объема. Таким образом, мы получаем

C:\Мои документы\gray.jpg

Однако нас интересует *средний* магнитный момент в на­правлении оси *z.* Каждый атом со спином, направленным вверх, дает в этот момент вклад, равный -μ0, а со спином, направленным вниз, + μ0, так что средний момент будет

C:\Мои документы\gray.jpg

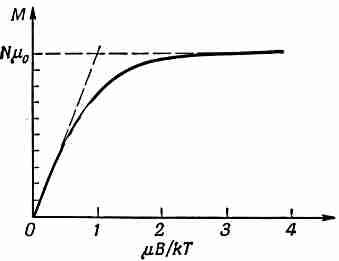
Тогда *М* — магнитный момент единицы объема — будет равен N<μ>ср. Воспользовавшись выражениями (35.15)—(35.17), по­лучим

C:\Мои документы\gray.jpg

Это и есть квантовомеханическая формула для *М* в случае атомов со спином j=1/2. К счастью, ее можно записать более коротко через гиперболический тангенс:

C:\Мои документы\gray.jpg

График зависимости *М он В* приведен на фиг. 35.7.



*Фиг. 35.7. Изменение намаг­ниченности парамагнетика при изменении напряженности магнитного поля В*.

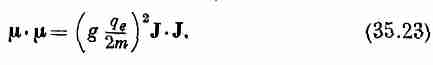
Когда поле В становится очень большим, гиперболический тангенс приближается к единице, *а М —* к своему предельному зна­чению Nμ0. Таким образом, при сильных полях происходит *насыщение.* Нетрудно понять, почему так получается — ведь при достаточно больших полях все магнитные моменты выстраи­ваются в одном и том же направлении. Другими словами, при насыщении все атомы находятся в состоянии со спинами, направленными вниз, и каждый из них дает вклад в магнитный момент, равный μ0.

Обычно при комнатной температуре и полях, которые можно получить (порядка 10000 *гс),* отношение μ*0B/kT* равно при­близительно 0,02. Чтобы наблюдать насыщение, необходимо спуститься до очень низких температур. Для комнатной и более высоких температур обычно можно *thx* заменить на x и написать

C:\Мои документы\gray.jpg

Точно так же, как и в классической теории, намагничен­ность *М* оказывается пропорциональной полю *В.* Даже формула оказывается той же самой, за исключением того, что в ней, по-видимому, где-то потерян множитель *1/3.* Но нам еще нужно связать μ*0* в квантовомеханической формуле с величиной μ*,* которая появилась в классическом результате, в выражении (35.9).

В классической формуле у нас появилось μ**2=μ•μ** — квадрат вектора магнитного момента, или



В предыдущей главе я уже говорил, что очень часто правильный ответ можно получить из классических вычислений с заменой **J•J** на j*(j+1)h2.* В нашем частном примере j=1/2, так что

j(j+1)h2=3/4h2.

Подставляя этот результат вместо **J•J** в (35.23), получаем

C:\Мои документы\gray.jpg

или, вводя величину μ*0,* определенную соотношением (35.12), получаем

**μ•μ**=3μ20.

Подставляя это вместо μ2 в классическое выражение (35.9), мы действительно воспроизведем истинный квантовомеханический результат — формулу (35.22).

Квантовая теория парамагнетизма легко распространяется на атомы с любым спином j. При этом для намагниченности в слабом поле получим

C:\Мои документы\gray.jpg

где

C:\Мои документы\gray.jpg

представляет комбинацию постоянных с размерностью магнит­ного момента. Моменты большинства атомов приблизительно равны этой величине. Она называется *магнетоном Бора.* Спи­новый магнитный момент электрона почти в точности равен

**§ 5. Охлаждение адиабатическим размагничиванием**

Парамагнетизм имеет одно весьма интересное применение. При очень низкой температуре и в сильном магнитном поле атомные магнитики выстраиваются. При этом с помощью про­цесса, называемого *адиабатическим размагничиванием,* можно получить самые низкие температуры. Возьмем какую-то пара­магнитную соль, содержащую некоторое число редкоземель­ных атомов (например, аммиачный нитрат празеодима), и начнем охлаждать ее жидким гелием до 1—2° К в сильном магнитном поле. Тогда показатель μ*В/kT* будет больше единицы, скажем 2 или 3. Большинство спинов направлено вверх, и намагни­ченность почти достигает насыщения. Для облегчения давайте считать, что поле настолько велико, а температура так низка, что все атомы смотрят в одном направлении. Теплоизолируйте затем соль (удалив, например, жидкий гелий и создав вакуум) и выключите магнитное поле. При этом температура соли падает.

Если бы это поле вы выключили *внезапно,* то раскачивание и сотрясение атомов кристаллической решетки постепенно перепутало бы все спины. Некоторые из них остались бы на­правленными вверх, а другие повернулись бы вниз. Если ника­кого поля нет (и если не учитывать взаимодействия между атом­ными магнитами, которое привносит только небольшую ошибку), то на переворачивание магнитиков энергии не потребуется. Поэтому случайное распределение спинов установится без какого-либо изменения температуры.

Предположим, однако, что в то время как спины перевора­чиваются, магнитное поле еще не вполне исчезло. Тогда для переворачивания спинов против поля требуется некоторая работа, *она должна затрачиваться на преодоление поля.* Этот процесс отбирает энергию у теплового движения и понижает температуру. Таким образом, если сильное магнитное поле выключается не слишком быстро, температура соли будет уменьшаться. Размагничиваясь, она охлаждается. С точки зрения квантовой механики, когда поле сильно, все атомы находятся в наинизшем состоянии, так как слишком много шансов против того, чтобы они находились в высшем состоянии. Но как только напряженность поля понижается, тепловые флуктуации со все большей и большей вероятностью будут «выталкивать» атомы на высшее состояние, и когда это происходит, атом поглощает энергию ΔU=μ0B. Таким образом, если магнитное поле выключается медленно, магнитные переходы могут отбирать энергию у тепловых колебаний кристалла, тем самым охлаждая его. Таким способом можно понизить температуру от нескольких градусов до температуры в несколько тысячных долей градуса от абсолютного нуля.

А если нам захочется охладить что-то еще сильнее? Оказы­вается, что здесь природа тоже была очень предусмотрительной. Я уже упоминал, что магнитные моменты есть и у атомных ядер. Наши формулы для парамагнетизма работают и в случае ядер, только надо иметь в виду, что моменты ядер приблизительно в *тысячу раз меньше.* (По порядку величины они равны *qh/2mp* , где *mp —* масса протона, так что они меньше в число раз, равное отношению масс протона и электрона.) Для таких магнитных моментов даже при температуре 2° К показатель μ*B/kT* со­ставляет всего несколько тысячных. Но если мы используем парамагнитное размагничивание и достигнем температуры не­скольких тысячных градуса, то μ*B/kT* становится порядка единицы; при столь низких температурах мы уже можем гово­рить о насыщении ядерного магнетизма. Это очень кстати, ибо теперь, воспользовавшись адиабатическим размагничиванием *системы магнитных ядер,* можно достичь еще более низких температур. Таким образом, в магнитном охлаждении возмож­ны две стадии. Сначала мы используем диамагнитное размагни­чивание парамагнитных ионов и спускаемся до нескольких тысячных долей градуса. Затем мы применяем холодную пара­магнитную соль для охлаждения некоторых материалов, обла­дающих сильным ядерным магнетизмом. И, наконец, когда мы выключаем магнитное поле, температура материалов дохо­дит до *миллионных* долей градуса от абсолютного нуля, если, конечно, все было проделано достаточно тщательно.

**§ 6. Ядерный магнитный резонанс**

Я уже говорил, что атомный парамагнетизм очень слаб и что ядерный магнетизм в тысячу раз слабее его. Но все же с помощью явления, называемого «ядерным магнитным резонан­сом», наблюдать его относительно легко. Предположим, что мы взяли такое вещество, как вода, у которого все электронные спины в точности компенсируют друг друга, так что их полный магнитный момент равен нулю. У таких молекул все же оста­нется очень-очень слабый магнитный момент благодаря наличию магнитного момента у ядер водорода. Предположим, что мы по­местили небольшой образец воды в магнитное поле В. Поскольку спин протонов (входящих в атом водорода) равен *1/2,* то у них возможны два энергетических состояния. Если вода находится в тепловом равновесии, то протонов в нижнем энергетическом состоянии, моменты которых направлены параллельно полю, будет немного больше. Поэтому каждая единица объема обла­дает очень маленьким магнитным моментом. А поскольку про­тонный момент составляет только одну тысячную долю атомного момента, то намагниченность, которая ведет себя как μ2 [см. уравнение (35.22)], будет в миллион раз слабее обычной атомной парамагнитной намагниченности. (Вот почему мы должны вы­бирать материал, у которого отсутствует атомный парамагне­тизм.) После того как мы подставим все величины, окажется, что разность между числом протонов со спином, направленным вверх, и спином, направленным вниз, составляет всего несколь­ко единиц на 108, так что эффект и в самом деле очень мал! Однако его можно наблюдать следующим образом.

Предположим, что мы поместили ампулу с водой внутрь не­большой катушки, которая создает слабое горизонтальное осциллирующее магнитное поле. Если это поле осциллирует с частотой ωp, то оно вызовет переходы между двумя энергетичес­кими состояниями точно так же, как это было в опытах Раби, которые мы описывали в § 3. Когда протон «сваливается» с верхнего энергетического состояния на нижнее, он отдает энер­гию μz*B,* которая, как мы видели, равна hω*p.* Если же он пере­ходит с нижнего состояния на верхнее, то будет *отбирать* энер­гию hω*p* у катушки. А поскольку в нижнем состоянии имеется немного больше протонов, чем в верхнем, то из катушки будет *поглощаться* энергия. И хотя эффект весьма мал, с помощью чувствительного электронного усилителя можно наблюдать даже столь малое поглощение энергии.

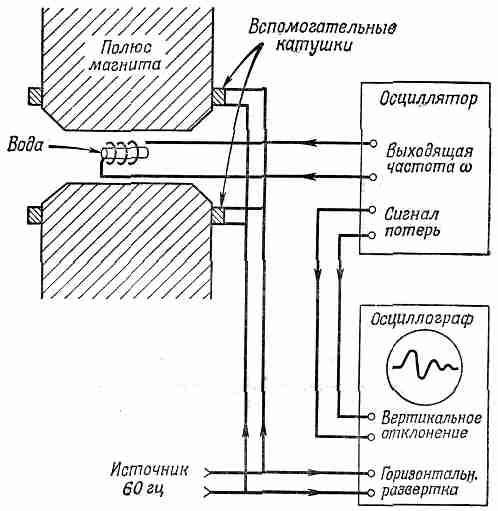
Как и в эксперименте Раби с молекулярными пучками, поглощение энергии будет заметно только тогда, когда ос­циллирующее поле находится в резонансе, т. е. когда

C:\Мои документы\gray.jpg

Часто удобнее искать резонанс, изменяя *В* и оставляя посто­янной ω. Очевидно, что поглощение энергии происходит, когда

C:\Мои документы\gray.jpg

Типичная установка, применяемая при изучении ядерного магнитного резонанса, показана на фиг. 35.8.



*Фиг. 35.8. Схема аппаратуры для изучения ядерного магнитного резонанса.*

Между полюсами большого электромагнита помещена небольшая катушка, пи­таемая высокочастотным генератором. Вокруг наконечников полюсов магнитов намотаны две вспомогательные катушки, питаемые током с частотой 60 *гц,* так что магнитное поле не­много «колеблется» вокруг своего среднего значения. Для при­мера скажу вам, что ток главного магнита создает поле в 5000 *гс,* а вспомогательные катушки изменяют его на ±1 *гс.* Если гене­ратор настроен на частоту 21,2 *Мгц,* то протонный резонанс будет происходить всякий раз, когда поле проходит через 5000 *гс* [используйте соотношение (34.13) для протона с вели­чиной g=5,58].

Схема генератора устроена так, что дает на выход дополни­тельный сигнал, пропорциональный *изменению* мощности, поглощенной из генератора, а этот сигнал подается после усиления на вертикально отклоняющие пластины осциллографа. В го­ризонтальном направлении луч пробегает один раз за каждый период изменения дополнительного вспомогательного поля. (Впрочем, чаще горизонтальная развертка делается пропор­циональной частоте вспомогательного поля.)

До того как внутрь высокочастотной катушки мы поместим ампулу с водой, мощность, отдаваемая генератором, имеет какую-то величину. (Она не изменяется с изменением магнит­ного поля.) Но как только внутрь катушки мы поместим не­большую ампулу с водой, на экране осциллографа появляется сигнал (см. фиг. 35.8). Мы непосредственно видим график мощности, поглощаемой протонами!

На практике трудно установить, когда основной магнит создает поле точно 5000 *гс.* Ток в главном магните обычно под­бирают, изменяя его постепенно до тех пор, пока на экране не появится резонансный сигнал. Оказывается, на сегодняшний день это наиболее удобный способ точного измерения напря­женности магнитного поля, Разумеется, *кто-то* должен был когда-то точно измерить магнитное поле и частоту и определить величину *g* для протона. Однако сейчас, после того как это уже сделано, протонную резонансную аппаратуру типа той, что изображена на рисунке, можно использовать как «протонный резонансный магнитометр».

Несколько слов о форме сигнала. Если бы мы очень медленно изменяли магнитное поле, то можно было бы ожидать, что мы увидим нормальную резонансную кривую. Поглощение энер­гии достигло бы максимума, когда частота генератора была бы в точности равна ω*p.* Небольшое поглощение происходило бы, конечно, и при близлежащих частотах, так как не все протоны находятся в точности в одинаковом поле, а различные поля означают несколько отличные резонансные частоты.

Но так ли все это? Должны ли мы на самом деле видеть при резонансной частоте какой-то сигнал? Не следует ли ожидать, что высокочастотное поле выравнивает населенность обоих состояний, так что, за исключением первого момента, никакого сигнала не будет, когда вода помещается внутрь поля? Не сов­сем так, поскольку хотя мы и *стараемся* выровнять обе населен­ности, тепловое движение со своей стороны старается сохранить равновесные значения, присущие данной температуре *Т.* Если мы находимся точно в резонансе, то мощность, поглощенная ядрами, в точности равна мощности, теряемой на тепловое движение. Однако «тепловой контакт» между системой протон­ных магнитных моментов и атомным движением довольно сла­бый. Каждый протон относительно изолирован в центре элект­ронного облака. Таким образом, чистая вода дает слишком слабый резонансный сигнал, чтобы его можно было заметить. Для увеличения поглощения необходимо улучшить «тепло­вой контакт». Это обычно делается путем добавления в воду небольшого количества окиси железа. Атомы железа — совсем как маленькие магнитики, и когда они прыгают туда и сюда в своем «тепловом танце», то создают слабенькое прыгающее маг­нитное поле, которое действует на протоны. Эти изменяющиеся доля «связывают» протонные магнитные моменты с атомными колебаниями и стремятся восстановить тепловое равновесие. Именно из-за этого взаимодействия протоны в состояниях с большой энергией теряют свою энергию и снова становятся способными к поглощению энергии генератора.

На практике *же* сигнал на выходе ядерной резонансной аппаратуры не похож на обычную резонансную кривую. Обыч­но это более сложный сигнал с осцилляциями, похожими на те, что изображены на фиг. 35.8. Такая форма сигнала обусловлена изменяющимися полями. Объяснять ее следовало бы с точки зрения квантовой механики, однако можно показать, что объ­яснение таких экспериментов при помощи представлений клас­сической физики, как мы их использовали выше, тоже дает правильный ответ. С точки зрения классической физики мы бы сказали, что когда мы попадаем в резонанс, то синхронно начинаем раскачивать множество прецессирующих ядерных магнитиков. В результате мы их заставляем прецессировать *все вместе.* А вращаясь все вместе, эти маленькие магнитики создают в катушке индуцированную э.д.с. с частотой, равной ωp . Но поскольку со временем магнитное поле увеличивается, то увеличивается и частота прецессии, поэтому наведенное напряжение вскоре приобретает частоту, большую, чем частота генератора. Так как при этом наведенная э.д.с. попеременно попадает то в фазу, то в противофазу с переменным внешним полем, «поглощенная» мощность становится попеременно то положительной, то отрицательной. Таким образом, на экране мы видим запись биений между частотой протона и частотой генератора. Из-за того что частоты не всех протонов в точности одинаковы (разные протоны находятся в нескольких различных полях), а возможно, и в результате возмущений, вносимых атомами железа, находящимися в воде, свободно прецессирующие моменты скоро выбиваются из фазы и сигналы биений исче­зают.

Эти явления магнитного резонанса используются во многих методах как орудие выяснения новых свойств вещества — осо­бенно в химии и в физике. Я не говорю уже о том, что число магнитных моментов ядра говорит нам кое-что и о его структуре. В химии многое можно узнать из структуры (или формы) резонансов. Благодаря магнитным полям, создаваемым близлежа­щими ядрами, точная частота ядерного резонанса для данного частного атома немного сдвигается; величина этого сдвига зависит от окружения, в котором он находится. Измерение этих сдвигов помогает определить, какой атом находится рядом с каким, и проливает свет на детали структуры молекул. Столь же важен и электронный спиновый резонанс свободных ради­калов. Такие радикалы, обычно крайне неустойчивые, часто появляются на промежуточных этапах ряда химических реак­ций. Измерение электронного спинового резонанса служит очень чувствительным индикатором при обнаружении свободных радикалов и часто дает ключ к пониманию механизма некоторых химических реакций.

***\* Обычные пары натрия в основном моноатомны, хотя изредка там и встречаются молекулы Na2.***

***Глава 36***

# ФЕРРОМАГНЕТИЗМ

[**§ 1.Токи нама****гни****чивания**](#а1)

[**§ 2.Пол****е Н**](#а2)

[**§ 3. Кри****ва****я**  **намагннчивання**](#а3)

[**§ 4.Индукти****вно****сть с железным сердечником**](#а4)

[**§ 5.Электро****м****агниты**](#а5)

[**§ 6.Спонтанн****ая нам****агниченность**](#а6)

*Повторить:* гл. 10 (вып. 5)«Диэлектрики»

гл. 17 (вып. 6) «Законы индукции»

**§ 1. Токи намагничивания**

В этой главе мы поговорим о некоторых материалах, в которых полный эффект магнит­ных моментов проявляется во много раз силь­нее, чем в случае парамагнетизма или диамагне­тизма. Это явление называется *ферромагне­тизмом.* В парамагнитных и диамагнитных материалах при помещении их во внешнее магнитное поле возникает обычно настолько слабый наведенный индуцированный магнитный момент, что нам не приходится думать о доба­вочных магнитных полях, создаваемых этими магнитными моментами. Другое дело магнит­ные моменты *ферромагнитных* материалов, ко­торые создаются приложенным магнитным по­лем. Они очень велики и оказывают существен­ное воздействие на сами поля. Эти индуцирован­ные магнитные моменты так огромны, что они вносят главный вклад в наблюдаемые поля. Поэтому нам следует позаботиться о матема­тической теории больших индуцированных маг­нитных моментов. Это, разумеется, чисто фор­мальный вопрос. Физическая проблема состоит в том, почему магнитные моменты столь велики и как они «устроены». Но к этому вопросу мы подойдем немного позже.

Нахождение магнитных полей в ферромаг­нитных материалах несколько напоминает за­дачу о нахождении электрических полей в диэлектриках. Помните, сначала мы описывали внутренние свойства диэлектрика через век­торное поле **Р** — дипольный момент единицы объема. Затем мы сообразили, что эффект этой поляризации эквивалентен плотности заряда ρпол, определяемой дивергенцией **Р**;

ρпол= -**∇**•**Р**. (36.1)

Полный же заряд в лю­бой ситуации можно запи­сать в виде суммы этого поляризационного заряда и всех [других зарядов](#прим1), плотность которых мы обозначим через ρдр. Тогда уравнения Максвелла, ко­торые связывают дивергенцию **Е** с плотностью заря­дов, примут вид:

C:\Мои документы\gray.jpg

или

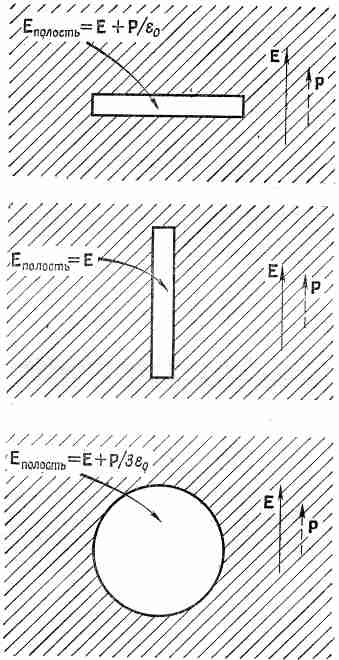
C:\Мои документы\gray.jpg

Затем мы можем пере­бросить поляризационную часть заряда в левую сторону уравнения и получить

**∇**• (ε0**Е**+**Р**)=ρдр. (36.2)

Этот новый закон говорит, что дивергенция величины (ε0 **Е**+**Р**) равна плотности других зарядов.

Совместная запись **Е** и **Р**, как это сделано в уравнении (36.2), полезна, разумеется, только когда мы знаем какие-то соотношения между ними. Мы видели, что теория, связываю­щая наведенный электрический дипольный момент с полем,— вещь довольно сложная и ее на самом деле можно применять только в относительно простых случаях, но и то только как приближение. Я хочу напомнить вам об одном приближении.



*Фиг. 36.1. Электрическое по­ле в полости в диэлектрике за­висит от формы полости.*

Чтобы найти наведенный дипольный момент атома внутри диэлектрика, необходимо знать электрическое поле, которое действует на отдельный атом. В свое время мы использовали приближение, пригодное во многих случаях; было предполо­жено, что на атом действует поле, которое было бы в центре небольшой полости, оставшейся после удаления этого атома (считая, что дипольные моменты всех других соседних атомов при этом не изменяются). Вспомните также, что электрическое поле в полости внутри поляризованного диэлектрика зависит от формы этой полости. Эти результаты мы подытожили на фиг. 36.1. В тонкой дискообразной полости, перпендикулярной направлению поляризации, электрическое поле, как было пока­зано с помощью закона Гаусса, имеет вид

**Е**полость=**Е**диэл+**P**/ε0 (дискообразная полость). С другой стороны, используя равенство нулю ротора, мы нашли, что электрическое поле внутри и вне иглообразной полости одно и то же:

**Е**полость= **Е**диэл (иглообразная полость).

Наконец, мы обнаружили, что величина электрического поля внутри сферической полости лежит между этими двумя значе­ниями:

**Е**полость=**Е**диэл+1/3**P**/ε0 (сферическая полость). (36.3)

Это и было то поле, которым мы пользовались, рассуждая о том, что происходит с атомами внутри поляризованного диэлект­рика.

Попробуем обсудить аналогичную задачу в случае магне­тизма. Легче всего и короче просто сказать, что **М** — магнит­ный момент единицы объема (намагниченность) — в точности аналогичен **Р** — электрическому дипольному моменту единицы объема (поляризация) и что, следовательно, отрицательная дивергенция **М** эквивалентна «плотности магнитных зарядов» ρm, что бы это ни означало. Но беда в том, что в физическом мире не существует такой штуки, как «магнитный заряд». Как мы знаем, дивергенция В всегда равна нулю. Это, однако, не поме­шает нам провести искусственную *аналогию* и написать

**∇M**=-ρm, (38.4)

но нужно понимать, что ρm— величина чисто математическая. Затем мы можем все делать полностью аналогично электроста­тике и использовать все старые электростатические уравнения. К этому часто прибегают. Когда-то такая аналогия считалась даже правильной. Ученые верили, что ρ*m* представляет плотность «магнитных полюсов». Однако сейчас нам известно, что намаг­ничивание материала происходит за счет токов, циркулирую­щих внутри атомов, т. е. либо вращения электронов, либо движения их в атоме. Следовательно, с физической точки зре­ния лучше описывать намагничивание только при помощи реальных атомных токов, а не вводить плотность каких-то мистических «магнитных зарядов». Эти токи иногда называ­ются еще «амперовскими», ибо Ампер первый предположил, что магнетизм вещества происходит за счет циркуляции атом­ных токов.

Микроскопические плотности токов в намагниченном ве­ществе, разумеется, очень сложны. Их величина зависит от местоположения в атоме: в некоторых местах они велики, в других — малы, в одной части они текут в одну сторону, а в другой — в противоположную (точно так же, как микроскопи­ческое электрическое поле, которое внутри диэлектрика в выс­шей степени неоднородно). Однако во многих практических задачах нас интересуют только поля вне вещества или *средние* магнитные поля внутри него, причем под средним мы имеем в виду усреднение по очень многим атомам. В таких *макро­скопических* задачах магнитное состояние вещества удобно описывать через намагниченность **М** — средний магнитный момент единицы объема. Я расскажу сейчас, как атомные токи в намагниченном веществе вырастают до макроскопических токов, которые связаны с М.

Разобьем плотность тока **j**, которая является реальным источником магнитных полей, на разные части; одна из них описывает циркулирующие токи атомных магнитиков, а ос­тальные — другие возможные токи. Обычно удобнее делить токи на три части. В гл. 32 мы делали различие между токами, свободно текущими по проводникам, и токами, обусловленными движением связанных зарядов в диэлектрике то туда, то сюда. В гл. 32, §2, мы писали

**j=j**пол**+ j**др**,**

причем величина **j**пол представляла токи от движения связанных зарядов в диэлектриках, a **j**дp — все другие токи. Пойдем дальше. Я хочу из **j**р выделить часть **j**мar, которая описывает усредненные токи внутри намагниченных материалов, и до­полнительный член, который мы будем называть **j**npов и который будет описывать все остальное. Он, вообще говоря, относится к токам в проводниках, но может описывать и другие токи, например токи зарядов, движущихся свободно через пустое пространство. Таким образом, полную плотность тока мы будем писать в виде

**j** =**j**пол+**j**мaг+**j**npoв. (36.5)

Разумеется, именно этот ток входит в уравнение Максвелла с ротором В;

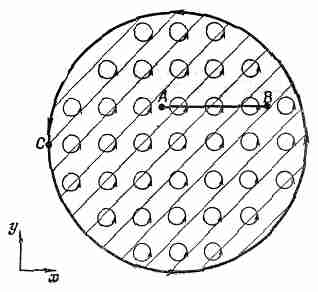


Теперь мы должны связать ток **j**мaг с величиной вектора на­магниченности М. Чтобы вы представляли, к чему мы стре­мимся, скажу, что должен получиться такой результат:

**j**мaг=**∇**X**M**. (36.7)

Если в магнитном материале нам всюду задан вектор намагни­ченности **М**, то плотность циркуляционного тока определяется ротором М. Посмотрим, можно ли понять, почему так проис­ходит.

Сначала возьмем цилиндрический стержень, равномерно намагниченный параллельно его оси. Мы знаем, что физически такая равномерная намагниченность означает на самом деле однородную повсюду внутри материала плотность атомных циркулирующих токов. Попытаемся представить себе, как вы­глядят эти реальные токи в поперечном сечении стержня. Мы ожидаем увидеть токи, напоминающие изображенные на фиг.36.2.



*Фиг.**36.2. Схематическая диаг­рамма циркулирующих атомных токов в поперечном сечении желез­ного стержня, намагниченного в направлении оси* z.

Каждый атомный ток течет по кругу, образуя крохотную цепь, причем все циркулирующие токи текут в одном и том же направлении. Каким же тогда будет эффективный ток? В боль­шей части стержня он, конечно, не дает вообще никакого эф­фекта, ибо рядом с каждым током есть другой ток, текущий в противоположном направлении. Если представить себе неболь­шую поверхность, показанную на фиг. 36.2 линией *АВ,* которая, однако, чуть-чуть толще отдельного атома, то полный ток через такую поверхность должен быть равен нулю. Внутри материала никакого тока нет. Однако обратите внимание, что на поверх­ности материала атомные токи не компенсируются соседними токами, текущими в другом направлении. Поэтому по поверхности все время в одном направлении вокруг стержня течет ток. Теперь вам понятно, почему я утверждал, что равномерно намагниченный стер­жень эквивалентен соленоиду с текущим по нему электрическим током.

Как же эта точка зрения согласуется с выражением (36.7)? Прежде всего намагниченность **М** внутри материала постоянна, так что все ее производные равны нулю. Это согласуется с на­шей геометрической картиной. Однако **М** на поверхности на самом деле не постоянна, она постоянна вплоть до поверхности, а затем неожиданно падает до нуля. Таким образом, непосред­ственно на поверхности возникает громадный градиент, который в соответствии с выражением (36.7) даст огромную плотность тока. Предположим, что мы наблюдаем за тем, что происходит вблизи точки *С* на фиг. 36.2. Если выбрать направления осей *х* и *у* так, как это показано на фигуре, то намагниченность **М** будет направлена по оси z. Выписывая компоненты уравнения (36.7), мы получаем



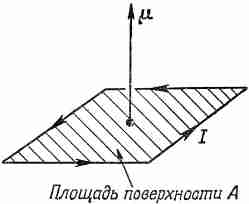
Хотя производная *dMz/dy* в точке *С* равна нулю, производная *dMz/dx* будет большой и положительной. Выражение (36.7) говорит, что в отрицательном направлении оси *у* течет ток огромной плотности. Это согласуется с нашим представлением о поверхностном токе, текущем вокруг цилиндра.

Теперь мы можем найти плотность тока в более сложном случае, когда намагниченность в материале меняется от точки к точке. Качественно нетрудно понять, что если в двух сосед­них областях намагниченность различная, то полной компен­сации циркулирующих токов не происходит, поэтому полный ток внутри материала не равен нулю. Именно этот эффект мы и хотим получить количественно.

Прежде всего вспомните, что в гл. 14, § 5 (вып. 5), мы вы­яснили, что циркулирующий ток *I* создает магнитный момент

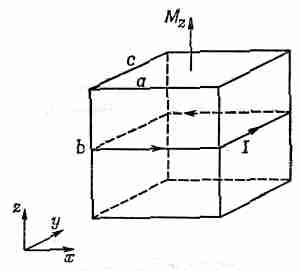
*μ=IА,* (36.9)

где *А—* площадь, ограниченная контуром тока (фиг. 36.3).



*Фиг. 36.3. Дипольный момент μ* *кон тура тока равен IA.*

Рассмотрим маленький прямо­угольный кубик внутри намаг­ниченного материала (фиг. 36.4).



*Фиг. 36.4. Небольшой намагничен­ный кубик эквивалентен циркули­рующему поверхностному току.*

Пусть кубик будет так мал, что намагниченность внутри него можно считать однородной. Если компонента намагниченности этого кубика в направлении оси z равна *Мz, то* полный эффект будет таким, как будто по вертикальным граням течет поверх­ностный ток. Величину этого тока мы можем найти из ра­венства (36.9). Полный магнитный момент кубика равен про­изведению намагниченности на объем:

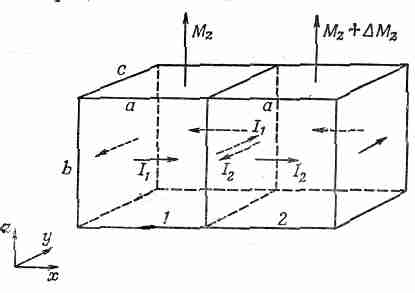
*μ=Mz(abc),*

откуда, вспоминая, что площадь равна *ас,* получаем

*I=Мzb.*

Другими словами, на каждой из вертикальных поверхностей величина тока на единицу длины по вертикали равна *Мz.*

Представьте теперь два таких маленьких кубика, располо­женных рядом друг с другом (фиг. 36.5).



*Фиг. 36.5. Если на­магниченность двух соседних кубиков раз­лична, то на их гра­нице течет поверх­ностный ток.*

Кубик *2* несколько смещен по отношению к кубику *1,* поэтому его вертикальная компонента намагниченности будет немного другой, скажем Mz+ΔМz. Теперь полный ток на поверхности между этими двумя кубиками будет слагаться из двух частей. По кубику *1* в положительном направлении по оси *у* течет ток I1, а по кубику *2* в отрицательном направлении течет ток I2. Полный поверхностный ток в положительном направлении оси *у* будет равен сумме

I=I1-I2=*Мzb-(Мz+Δ*Мz)*b*=-ΔMzb.

Величину Δ*Мг* можно записать в виде произведения произ­водной от *Mz* по *х* на смещение кубика *2* относительно кубика *1,* которое как раз равно *а:*

ΔMz=(*д*Mz /*д*x)а. Тогда ток, текущий между двумя кубиками, будет равен

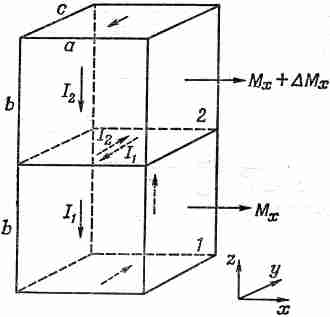
I=(-*д*Mz/*д*x)ab.

Чтобы связать ток I со средней объемной плотностью тока **j**, необходимо понять, что этот ток на самом деле размазан по некоторой области поперечного сечения. Если мы вообразим, что такими маленькими кубиками заполнен весь объем мате­риала, то за такое сечение (перпендикулярное оси *х)* может быть выбрана боковая грань одного [из кубиков](#прим2). Теперь вы видите, что площадь, связанная с током, как раз равна площади *ab* одной из фронтальных граней. В результате получаем

C:\Мои документы\gray.jpg

Наконец-то у нас начинает получаться ротор М.

Но в выражении для *jy* должно быть еще одно слагаемое, связанное с изменением x-компоненты намагниченности с изме­нением z. Этот вклад в **j** происходит от поверхности между двумя маленькими кубиками, поставленными друг на друга (фиг. 36.6).



*Фиг. 36.6. Два кубика, распо­ложенных один над другим, то­же могут давать вклад в jy.*

Воспользовавшись только что проведенными рассуждениями, мы можем показать, что эта поверхность будет давать в величину jy вклад, равный *dMx/dz.* Только эти поверх­ности и будут давать вклад в y-компоненту тока, так что пол­ная плотность тока в направлении оси *у* получается равной

C:\Мои документы\gray.jpg

Определяя токи на остальных гранях куба или используя тот факт, что направление оси *z* было выбрано совершенно произ­вольно, мы можем прийти к заключению, что вектор плотности тока действительно определяется выражением .

**j**=**∇**X**M**.

Итак, если вы решили описывать магнитное состояние ве­щества через средний магнитный момент единицы объема **М**, то оказывается, что циркулирующие атомные токи эквивалент­ны средней плотности тока в веществе, определяемой выраже­нием (36.7). Если же материал обладает вдобавок еще диэлект­рическими свойствами, то в нем может возникнуть и поляри­зационный ток ***j****пол=d****P****/dt.* А если материал к тому же и про­водник, то в нем может течь и ток проводимости **j**пров. Таким образом, полный ток можно записать как

J = Jпрoв+**∇**XM+*д****P***/*д*t; (36.10)

**§ 2. Поле Н**

Теперь можно подставить выражение для тока (36.10) в уравнение Максвелла. Мы получаем

C:\Мои документы\gray.jpg

Слагаемое с **М** можно перенести в левую часть:C:\Мои документы\gray.jpg

Как мы уже отмечали в гл. 32, иногда удобно записывать (**Е**+**Р**/ε0) как новое векторное поле **D**/ε0. Точно так же удобно (**В-М**/ε0с2) записывать в виде единого векторного поля. Такое поле *мы* обозначим через **Н**, т. е.

**H**=**В**-**M**/(ε0c2). (36.12)

После этого уравнение (36.11) принимает вид

ε0c2**∇**X**H**=**j**npов+*д*D/*д*t. (36.13)

Выглядит оно просто, но вся его сложность теперь скрыта в буквах **D** и **Н**.

Хочу предостеречь вас. Большинство людей, которые при­меняют систему СИ, пользуются другим определением **Н**. На­зывая *свое* поле через **Н'** (они, конечно, не пишут штриха), они определяют его как

**Н'**=ε0с2**В**-**М**. (36.14)

(Кроме того, величину ε0с2 они обычно записывают в виде l/μ0, так что появляется еще одна постоянная, за которой все время нужно следить!) При таком определении уравнение (36.13) будет выглядеть еще проще:

**∇**X**H**' = **j**npoв+*д***D**/*д*t. (36.15)

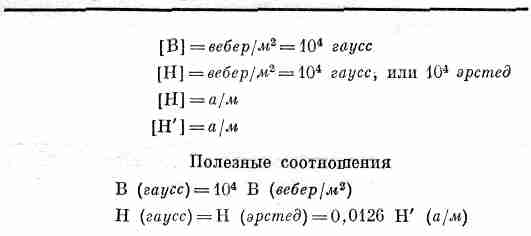
Но трудность здесь заключается в том, что такое определение, во-первых, не согласуется с определением, принятым теми, кто не пользуется системой СИ, и, во-вторых, поля **Н'** и **В** изме­ряются в различных единицах. Я думаю, что **Н** удобнее изме­рять в тех же единицах, что и **В**, а не в единицах **М**, как **Н**'. Но если вы собираетесь стать инженером и проектировать транс­форматоры, магниты и т. п., то будьте внимательны. Вы столк­нетесь со множеством книг, где в качестве определения **Н** используется уравнение (36.14), а не (36.12), а в других книгах, особенно в справочниках о магнитных материалах, связь между **В** и **Н** такая же, как и у нас. Нужно быть внимательным и по­нимать, какое где использовано [соглашение](#прим3).

Одна из примет, указывающих нам на соглашение,— это единицы измерения. Напомним, что в системе СИ величина В, а следовательно, и *наше* **Н** измеряются в единицах *вб/м2* (1 *вб/м2=10* 000 *гс).* Магнитный же момент (т. е. произведение тока на площадь) в той же системе СИ измеряется в единицах *а*•*м2.* Тогда намагниченность **М** имеет размерность *а/м.* Размерность **Н'** та же, что и размерность **М**. Нетрудно видеть, что это согла­суется с уравнением (36.15), поскольку у имеет размерность обратной длины.

Те, кто работает с электромагнитами, привыкли измерять поле **Н** (определенное как **Н**') в *ампер-витках/метр,* имея при этом в виду витки провода в обмотке. Но «виток» ведь фактически величина безразмерная, и она не должна вас смущать. Посколь­ку наше *Н* равно *H'/ε0c2,* то, если вы пользуетесь системой СИ, *Н* (в *вб/м)* равно произведению 4π•10-7 на *Н'(в а/м).* Может быть, более удобно помнить, что *Н* (в *гс)* равно 0,0126 H*'* (в *а/м).*

Здесь есть еще одна ужасная вещь. Многие люди, исполь­зующие *наше* определение **Н**, решили назвать единицы измере­ния **Н** и **В** *по-разному!* И даже несмотря на одинаковую размер­ность, они называют единицу В *гауссом,* а единицу **Н** — *эрсте­дом* (конечно, в честь Гаусса и Эрстеда). Таким образом, во многих книгах вы найдете графики зависимости В в гауссах от **Н** в эрстедах. На самом деле это одна и та же единица, равная 10-4 единиц СИ. Эту неразбериху в магнитных единицах мы увековечили в табл. 36.1.

***Таблица 36.1*** • ЕДИНИЦЫ МАГНИТНЫХ ВЕЛИЧИН



**§ 3. Кривая намагничивания**

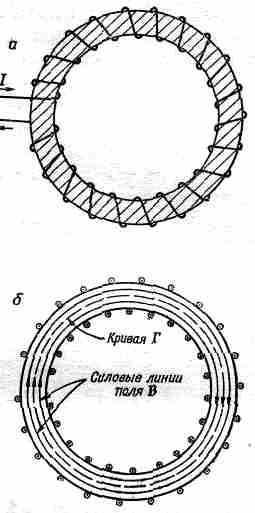
Рассмотрим теперь некоторые простые случаи, когда маг­нитное поле остается постоянным или изменения поля настолько медленны, что можно пренебречь *d****D****/dt* по сравнению с **j**npoв. В этом случае поля подчиняются уравнениям

**∇**X**B**=0, (36.16)

**∇**X**H**=jпров/ε0c2, (36.17)

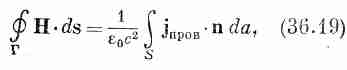
**H**=**B**-**M**/ε0c2. (36.18)

Предположим, что у нас есть железный тор с намотанной на него медной проволокой, как это показано на фиг. 36.7, а.



*Фиг. 36.7. Железный тор, обмотанный витками изолированного провода* (а), *и его поперечное сечение (б). Показаны силовые линии.*

Пусть по проводу течет ток I. Каково при этом магнитное поле? Оно будет сосредоточено главным образом внутри железа, причем там (см. фиг. 36.7, *б)* силовые линии должны быть круговыми. Вследствие постоянства потока В его дивергенция равна нулю, и уравнение (36.16) удовлетворяется автоматически. Запишем затем уравнение (36.17) в другой форме, проинтегрировав его по замкнутому контуру Г, показанному на фиг. 36.7, *б.* Из теоремы Стокса мы получаем



где интеграл от **j** берется по поверхности *S,* ограниченной кон­туром Г. Каждый виток обмотки пересекает эту поверхность один раз, поэтому каждый виток дает в интеграл вклад, равный *I*, а пос­кольку всего витков *N* штук, то интеграл будет равен *NI.* Из симметрии нашей задачи видно, что В одинаково на всем контуре Г, если, конечно, намагниченность, а следовательно, и поле **Н** тоже постоянны на контуре Г. Уравнение (36.19) при таких условиях принимает вид

C:\Мои документы\gray.jpg

где *l*—длина кривой Г. Таким образом,

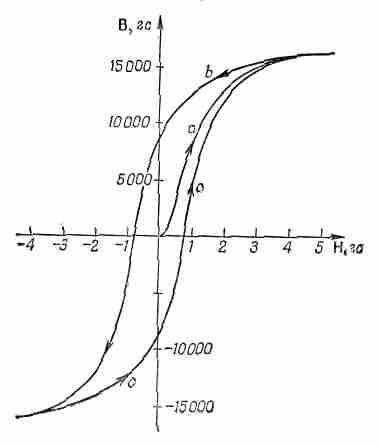
C:\Мои документы\gray.jpg

Именно из-за того что в задачах подобного типа поле **Н** прямо пропорционально намагничивающему току, оно иногда назы­вается *намагничивающим.*

Единственное, что нам теперь требуется,— это уравнение, связывающее **Н** с **В**. Однако такого уравнения просто не суще­ствует! У нас есть, конечно, уравнение (36.18), но от него мало проку, ибо в ферромагнитных материалах типа железа оно не дает прямой связи между **М** и **В**. Намагниченность М зависит от всей предыдущей истории данного образца железа, а не толь­ко от того, каково поле В в данный момент и как оно изменялось раньше.

Впрочем, еще не все потеряно. В некоторых простых слу­чаях мы все же можем найти решение. Если взять ненамагни­ченное железо, скажем, отожженное при высокой температуре, то для такого простого тела, как тор, магнитная предыстория всего железа будет одной и той же. Затем из экспериментальных измерений мы можем кое-что сказать относительно **М**, а следо­вательно, и о связи между **В** и **Н**. Из уравнения (36.20) видно, что поле **В** внутри тора равно произведению некоторой посто­янной на величину тока в обмотке I. А поле **В** можно измерить интегрированием по времени э.д.с. в намагничивающей обмотке, изображенной на рисунке (или в дополнительной обмотке, на­мотанной поверх нее). Эта э.д.с. равна скорости изменения по­тока **В**, так что интеграл от э.д.с. по времени равен произведе­нию **В** на площадь поперечного сечения тора.

На фиг. 36.8 показано соотношение между **В** и **Н**, наблюда­емое в сердечнике из мягкого железа.



*Фиг. 36.8. Типичная кривая намагничивания и петля гис­терезиса мягкого железа.*

Когда ток включается в первый раз, увеличение **В** с **Н** происходит по кривой *а.* Обра­тите внимание на различие масштабов по осям **В** и **Н**; вначале, чтобы получить большое В, необходимо относительно малое **Н**. Почему же в случае железа поле В намного больше, чем было бы без него? Да потому, что возникает большая намагниченность **М**, эквивалентная большому поверхностному току в железе, а поле определяется суммой этого тока и тока проводимости в обмотке. А почему намагниченность **М** оказывается такой боль­шой, мы обсудим позднее.

При больших значениях **Н** кривая намагничивания «вырав­нивается». Мы говорим, что железо *насыщается.* В масштабах нашей фигуры кривая становится горизонталь­ной, на самом же деле намагниченность продол­жает слабо расти: для больших полей **В** становит­ся равным **Н** и намагни­ченность **М** уже не увели­чивается. Кстати, если бы сердечник был сделан из немагнитного материала, то намагниченность **М** была бы равна нулю, а В было бы равно для всех полей Н.

Прежде всего заметим, что кривая *а* на фиг. 36.8, так назы­ваемая *кривая намагничивания,—* в высшей степени нелинейна. Впрочем, положение здесь гораздо сложнее. Если после до­стижения насыщения мы уменьшим ток в катушке и вернем **Н** снова к нулю, магнитное поле В будет падать по кривой *b.* Когда **Н** достигнет нуля, В еще не будет нулем. Даже после выключения намагничивающего тока магнитное поле в железе остается: железо становится постоянно намагниченным. Если теперь включить в катушке ток в *обратном направлении,* то кривая **В**—**Н** пойдет дальше по ветви *b* до тех пор, пока же­лезо не намагнитится до насыщения в противоположном нап­равлении. При дальнейшем уменьшении тока до нуля В пойдет по кривой *с.* Когда мы меняем ток от большой положительной до большой отрицательной величины, кривая **В**—**Н** будет идти вверх и вниз очень близко к ветвям *b* и *c*. Если же, однако, **Н** менять каким-то произвольным образом, то возникнут более сложные кривые, которые, вообще говоря, будут лежать между кривыми *b* и *c*. Кривая, полученная повторными изменениями полей, называется *петлей гистерезиса.*

Вы видите, что невозможно написать функциональное со­отношение типа В=*f*(**Н**), так как **В** в любой момент зависит не только от **Н** в тот же момент, но и от всей предыстории мате­риала. Естественно, что намагниченность и петли гистерезиса для разных веществ различны. Форма кривых критически зави­сит от химического состава материала, а также от деталей тех­нологии его приготовления и последующей физической обра­ботки. В следующей главе мы обсудим физическое объяснение некоторых из этих сложностей.

**§ 4. Индуктивность с железным сердечником**

Одно из наиболее важных применений магнитные материа­лы находят в электрических устройствах, например трансфор­маторах, электрических моторах и т. п. Объясняется это преж­де всего тем, что с помощью железа можно контролировать по­ведение магнитного поля, а также при данном электрическом токе получать значительно большие поля. Например, типичное «тороидальное» индуктивное устройство во многом напоминает то, что изображено на фиг. 36.7. При большой индуктивности мы можем сделать устройство гораздо меньшего объема и затратить намного меньше меди, чем в эквивалентном устройстве с «воз­душным сердечником». Поэтому при большой индуктивности мы добиваемся гораздо меньшего сопротивления обмотки, так что устройство более близко к «идеальному», особенно при низ­ких частотах. Нетрудно качественно проследить, как работает такое устройство. Если в обмотке течет ток *I*, то создаваемое внутри поле *Н,* как это видно из уравнения (36.20), пропор­ционально току *I*. Напряжение V на выводах связано с магнит­ным полем *В.* Если пренебречь сопротивлением обмотки, то напряжение Vбудет пропорционально *dB/dt.* Индуктивность L, которая равна отношению Vк *dI/dt* (см. гл. 17, § 7, вып. 6), зависит, таким образом, от связи между *В* и *Н в* железе. По­скольку *В* гораздо больше *Н, то* это во много раз увеличивает индуктивность, как будто малый ток в катушке, который обыч­но дает слабое магнитное поле, заставляет выстраиваться маленькие магнитики, сидящие в железе, и создает «магнитный» ток, который в огромное число раз больше внешнего тока в обмотке. Все происходит так, как будто в катушке возникает ток, намного больший, чем на самом деле. Когда мы меняем направление тока, все маленькие магнитики переворачиваются, внутренние токи потекут в другом направлении и наведенная э.д.с. получается гораздо больше, чем без железа. Если мы хо­тим вычислить индуктивность, то это можно сделать, вычисляя энергию наподобие того, как описано в гл. 17, § 8. *Скорость, с* которой энергия отдается источником тока, равна IV*.* Напря­жение V равно площади поперечного сечения сердечника *А,* умноженной на *N* и на *dB/dt.* А согласно выражению (36.20), *I*=*(ε0c2l/N)****H****.* Таким образом,

C:\Мои документы\gray.jpg

Интегрируя по времени, получаем

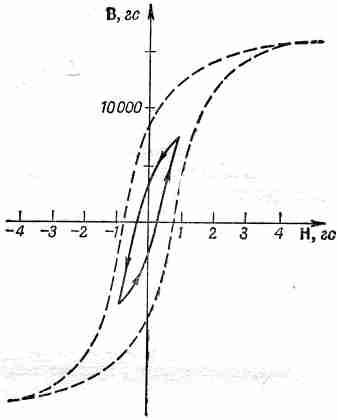
C:\Мои документы\gray.jpg

Заметьте, что *1А* равно объему тора, поэтому плотность энергии *и=U/(Объем магнитного материала), как* мы показали, равна

C:\Мои документы\gray.jpg

Здесь выявляется одно интересное обстоятельство. Когда в обмотке течет переменный ток, то *В* в железе «ходит» по петле гистерезиса. А поскольку *В —* неоднозначная функция Я,

то интеграл ∫*HdB* по замкнутому циклу равен не нулю, а площади, заключенной внутри петли гистерезиса. Таким об­разом, за каждый цикл источник тока отдает некоторую энер­гию, равную площади петли гистерезиса. Это есть потери из электромагнитного цикла; энергия уходит на нагревание желе­за. Такие *потери* называются *гистерезисными.* Чтобы они были поменьше, петлю гистерезиса желательно сделать как можно уже. Один из способов уменьшить площадь петли — это мак­симально уменьшить поле в каждом цикле. Для меньших мак­симальных полей мы получаем гистерезисную кривую, подобную изображенной на фиг. 36.9.



*Фиг. 36.9. Петля гистерезиса, не достигающая насыщения.*

Кроме того, применяются особые мате­риалы с очень узкой пет­лей. Чтобы получить это свойство, специально соз­дано так называемое *трансформаторное желе­зо,* которое представляет сплав железа с небольшой примесью кремния.

Когда петля гистерезиса очень мала, соотношение *В* и *Н* приближенно можно представлять в виде линейного урав­нения. Обычно пишут

*В=μН.* (36.23)

Здесь постоянная μвовсе *не* магнитный момент, с которым мы встречались раньше. Она называется *магнитной проницае­мостью.* (Иногда ее называют также *относительной проница­емостью.)* Типичная проницаемость обычных сортов железа равна нескольким тысячам. Однако существуют специальные сплавы, типа так называемого «супермаллоя», проницаемость которых может быть порядка миллиона.

Если в уравнении (36.21) мы воспользуемся приближением *В=μН,* то энергию индуктивности, имеющей форму тора, мож­но записать как

C:\Мои документы\gray.jpg

так что плотность энергии приближенно равна

C:\Мои документы\gray.jpg

Теперь мы можем выражение для энергии (36.24) положить равным энергии индуктивности LI2/2 и найти L. Получается

C:\Мои документы\gray.jpg

А воспользовавшись выражением (36.20) для отношения *H/I*, находим

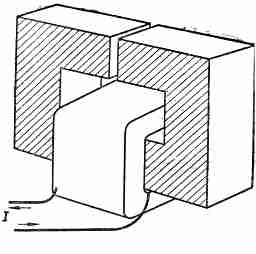
C:\Мои документы\gray.jpg

Таким образом, индуктивность пропорциональна μ. Если вам нужна индуктивность для таких устройств, как звуковые уси­лители, то желательно иметь материал, у которого связь между *В* и *Н* достаточно линейна. [Вы, должно быть, помните, что в гл. 50 (вып. 4) мы говорили о генерации гармоник в нелинейных системах.] Для таких задач уравнение (36.23) будет очень хорошим приближением. С другой стороны, если *нужно* гене­рировать гармоники, то используют индуктивности, ведущие себя в высшей степени нелинейно. При этом вы должны поль­зоваться сложной кривой *Н—В* и применять при вычислениях графические или численные методы.

В обычных «трансформаторах» на одном и том же торе, или *сердечнике,* из магнитного материала намотаны две катушки. (В больших трансформаторах сердечник для удобства делается прямоугольным.) При этом изменение тока в «первичной» обмотке вызывает изменение поля в сердечнике, которое инду­цируется э.д.с. во «вторичной» обмотке. Поскольку поток через *каждый виток* обеих обмоток один и тот же, то величина отно­шения э.д.с. в этих двух обмотках такая же, как отношение числа витков в каждой из них. Напряжение, приложенное к первичной обмотке, преобразуется во вторичной в напряжение другой величины. А поскольку для создания требуемых изме­нений магнитного поля необходим определенный *полный* ток, то *алгебраическая* сумма токов в двух обмотках должна оста­ваться постоянной и равной требуемому «намагничивающему» току. При изменении напряжения изменяется и сила тока в обмотках, т. е. вместе с преобразованием напряжения про­исходит и *преобразование* тока.

**§ 5. Электромагниты**

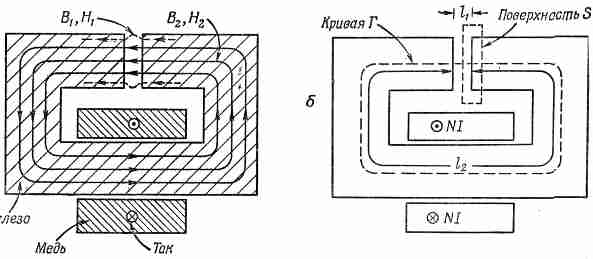
Поговорим теперь о практической стороне дела, которая немного более сложна. Предположим, что мы имеем электро­магнит стандартной формы, изображенный на фиг. 36.10.



*Фиг. 36.10. Электромагнит.*

Он состоит из С-образного железного ярма, на которое намотано много витков провода. Чему равно магнитное поле В в зазоре?

Если ширина зазора мала по сравнению со всеми другими размерами, то в качестве первого приближения мы можем счи­тать, что линии В образуют замкнутые кривые так же, как это происходит и в обычном торе. Они выглядят примерно так, как показано на фиг. 36.11,а.



*Фиг. 36.11. Поперечное сечение электромагнита.*

Они стремятся вылезть из зазора, но если он узок, то эффект этот очень мал. Предположение о постоянст­ве потока В через любое попереч­ное сечение ярма будет довольно хорошим приближением. Если поперечное сечение ярма ме­няется равномерно и если мы пренебрежем любыми краевыми эффектами на зазоре или на углах, то можно говорить, что по всей окружности ярма В однородно.

Поле В в зазоре будет по величине тем же самым. Это следу­ет из уравнений (36.16). Представьте себе замкнутую поверх­ность *S* (см. фиг. 36.11,б), одна грань которой находится в зазоре, а другая — в железе. Полный поток поля В через эту поверхность должен быть равен нулю. Обозначая через *В1* величину поля в зазоре, а через B2 — величину поля в железе, мы видим, что

*B1A1-В2А2=0,*

а поскольку *А1=А2,* то отсюда следует, что *В1=В2.*

Посмотрим теперь на *Н.* Мы снова можем воспользоваться уравнением (36.19), взяв криволинейный интеграл по контуру Г (см. фиг. 36.11,6). Как и прежде, правая часть равна *NI*— произведению числа витков на ток. Однако теперь *Н* в железе и в воздухе будет различным. Обозначая через *Н2* поле в железе, а через *l*2 — Длину пути по окружности ярма, мы видим, что эта часть кривой дает вклад в интеграл *H2l2*. Если же поле в зазоре равно *Н1,* а ширина его *l1,* то вклад зазора оказывается равным *H1l1.* Таким образом, получаем

C:\Мои документы\gray.jpg

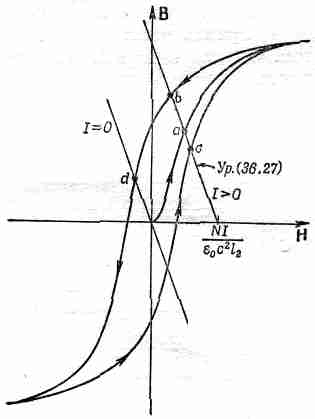
Но это еще не все. Нам известно еще, что намагниченность в воздушной щели пренебрежимо мала, так что *B1=H1.* А так как B1=B2, то уравнение (36.26) принимает вид

C:\Мои документы\gray.jpg

Остаются еще два неизвестных. Чтобы найти *В2* и H2*,* необхо­димо еще одно соотношение, которое связывает *В* с *H* в железе.

Если можно приближенно считать, что B2=μH2, то уравнение разрешается алгебраически. Рассмотрим более общий случай, для которого кривая намагничивания железа имеет вид, изоб­раженный на фиг. 36.8. Единственное, что нам нужно,— это найти совместное решение этого функционального соотношения с уравнением (36.27). Его можно найти, строя зависимость (36.27) на одном графике с кривой намагничивания, как это сделано на фиг. 36.12. Точки, где эти кривые пересекутся, и будут нашими решениями.

Для данного тока *I* уравнение (36.27) описывается прямой линией, обозначенной *I*>0 на фиг. 36.12. Эта линия пересекает ось *Н* (B2=0) в точке *H2=NI/ε0c2l2* и имеет наклон -*l2/l1* Различные величины токов приводят просто к горизонтальному сдвигу этой линии. Из фиг. 36.12 мы видим, что при данном токе существует нес­колько различных решений, зависящих от того, каким об­разом вы получили их.



*Фиг. 36.12. Определение поля в электромагните.*

Если вы только что построили маг­нит и включили ток /, то поле B2 (которое равно B1) будет иметь величину, определяе­мую точкой *а.* Если вы сначала увеличили ток до очень большой величины, а затем пони­зили до *I*, то значение поля будет определяться точкой *b.* А если, увеличивая ток от большого отрицательного значения, вы *до­шли* до /, то поле определяется точкой *с.* Поле в зазоре зависит от того, как вы поступали в прошлом.

Если ток в магните равен нулю, то соотношение между *В2* и *H2* в уравнении (36.27) изображается кривой, обозначенной *I*=0 на фиг. 36.12. Здесь опять возможны различные решения. Если вы первоначально «насытили» железо, то в магните может сохраниться значительное остаточное поле, определяемое точ­кой *d.* Вы можете снять обмотку и получить постоянный маг­нит. Нетрудно понять, что для хорошего постоянного магнита необходим материал с *широкой* петлей гистерезиса. Такую очень широкую петлю имеют специальные сплавы, подобные Алнико V.

**§ 6. Спонтанная намагниченность**

Обратимся теперь к вопросу, почему в ферромагнитных мате­риалах даже малые магнитные поля приводят к такой большой намагниченности. Намагниченность ферромагнитных материа­лов типа железа или никеля образуется благодаря магнитным моментам электронов одной из внутренних оболочек атома. Магнитный момент μкаждого электрона равен произведению *q/2m* на g-фактор и момент количества движения J. Для отдель­ного электрона при отсутствии чисто орбитального движения g=2, а компонента **J** в любом направлении, скажем, в направ­лении оси z, равна ±h/2, так что компонента μ в направлении оси *z* будет

μz=gh/2m=0,928•10-23 *а/м*2. (36.28)

В атоме железа вклад в ферромагнетизм фактически дают толь­ко два электрона, так что для упрощения рассуждений мы будем говорить об атоме никеля, который является ферромагнетиком, подобно железу, но имеет на той же внутренней оболочке только один «ферромагнитный» электрон. (Все рассуждения нетрудно затем распространить и на железо.)

Все дело в том, что точно так же, как и в описанных нами парамагнитных материалах, атомные магнитики в присутствии внешнего магнитного поля В стремятся выстроиться по полю, но их сбивает тепловое движение. В предыдущей главе мы вы­яснили, что равновесие между силами магнитного поля, стара­ющимися выстроить атомные магнитики, и действием теплового движения, стремящегося их сбить, приводит к тому, что сред­ний магнитный момент единицы объема в направлении **В** оказывается равным

C:\Мои документы\gray.jpg

где под *Ва* мы подразумеваем поле, действующее на атом, а под *kT —* тепловую (больцмановскую) энергию. В теории парамаг­нетизма мы в качестве *Ва* использовали само поле В, пренебре­гая при этом частью поля, действующего на каждый атом со стороны соседнего. Но в случае ферромагнетиков возникает усложнение. Мы уже не можем в качестве поля *Ва,* действующе­го на индивидуальный атом, брать среднее поле в железе. Вмес­то этого нам следует поступить так же, как это делалось в случае диэлектрика: нам нужно найти *локальное* поле, действующее на отдельный атом. При точном решении нам следовало бы сло­жить вклады всех полей от других атомов кристаллической решетки, действующих на рассматриваемый нами атом. Но по­добно тому как мы поступали в случае диэлектрика, сделаем приближение, состоящее в том, что поле, действующее на атом, будет таким же, как и в маленькой сферической полости внутри материала (предполагая при этом, как и раньше, что моменты соседних атомов не изменяются из-за наличия полости).

Следуя рассуждениям гл. 11 (вып. 5), мы можем надеяться, что должна получиться формула

C:\Мои документы\gray.jpg

похожая на формулу (11.25). Но это будет неправильно. Однако мы все же можем использовать полученные там результаты, если тщательно сравним уравнения из гл. 11 с уравнениями ферромагнетизма, которые мы напишем сейчас. Сопоставим сначала соответствующие исходные уравнения. Для областей, в которых токи проводимости и заряды отсутствуют, мы имеем:



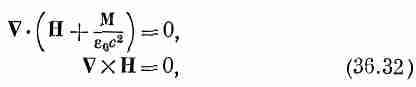
Эти два набора уравнений можно считать аналогичными, если мы *чисто математически* сопоставим

C:\Мои документы\gray.jpg

Это то же самое, что и

C:\Мои документы\gray.jpg

Другими словами, если уравнения ферромагнетизма записать как



то они будут *похожи* на уравнения электростатики.

В прошлом это чисто алгебраическое соответствие доста­вило нам некоторые неприятности. Многие начинали думать, что *именно* **Н** и есть магнитное поле. Но, как мы уже убеди­лись, физически фундаментальными полями являются **Е** и **В**, а поле **Н** — понятие производное. Таким образом, хотя *уравне­ния* и аналогичны, *физика* их совершенно различна. Однако это не может заставить нас отказаться от принципа, что одина­ковые уравнения имеют одинаковые решения.

Теперь можно воспользоваться нашими предыдущими ре­зультатами о полях внутри полости различной формы в диэлект­риках, которые приведены на фиг. 36.1, для нахождения поля Н. Зная **Н**, можно определить и **В**. Например, поле **Н** внутри иглообразной полости, параллельной **М** (согласно результату, приведенному в § 1), будет тем же самым, что и поле **Н** внутри материала:

C:\Мои документы\gray.jpg

Но поскольку в нашей полости **М** равна нулю, то мы полу­чаем

C:\Мои документы\gray.jpg

С другой стороны, для дискообразной полости, перпендику­лярной **М**,

C:\Мои документы\gray.jpg

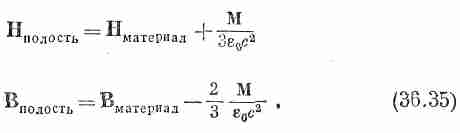
что в нашем случае превращается в

C:\Мои документы\gray.jpg

или в величинах В:

C:\Мои документы\gray.jpg

Наконец, для сферической полости аналогия с уравнением (36.3) дала бы



Результаты для магнитного поля, как видите, отличаются от тех, которые мы имели для электрического поля.

Конечно, их можно получить и более физически, непосред­ственно используя уравнения Максвелла. Например, уравне­ние (36.34) непосредственно следует из уравнения ∇•B=0. (Возьмите гауссову поверхность, которая наполовину находит­ся в материале, а наполовину — вне его.) Подобным же обра­зом вы можете получить уравнение (36.33), воспользовавшись контурным интегралом по пути, который туда идет по полости, а назад возвращается через материал. Физически поле в полос­ти уменьшается благодаря поверхностным токам, определяемым как V X М. На вашу долю остается показать, что уравнение (36.35) можно получить, рассматривая эффекты поверхностных токов на границе сферической полости.

При нахождении равновесной намагниченности из уравне­ния (36.29) удобнее, оказывается, иметь дело с **Н**, поэтому мы пишем

C:\Мои документы\gray.jpg

В приближении сферической полости коэффициент Я следует взять равным *1/3,* но, как вы увидите позже, нам придется пользоваться несколько другим его значением, а пока оставим его как подгоночный параметр. Кроме того, все поля мы возь­мем в одном и том же направлении, чтобы нам не нужно было заботиться о направлении векторов. Если бы теперь мы под­ставили уравнение (36.36) в (36.29), то получили бы уравнение, которое связывает намагниченность *М с* намагничивающим полем *Н:*

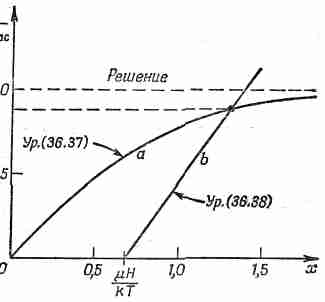
C:\Мои документы\gray.jpg

Однако это уравнение невозможно решить точно, так что мы будем делать это графически.

Сформулируем задачу в более общей форме, записывая уравнение (36.29) в виде

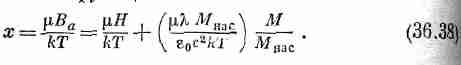
C:\Мои документы\gray.jpg

где Мнас — намагниченность насыщения, т. е. *Nμ,* a *x —* вели­чина μ*Ba/kT.* Зависимость *М/Мнас* от *х* показана на фиг. 36.13 (кривая а).



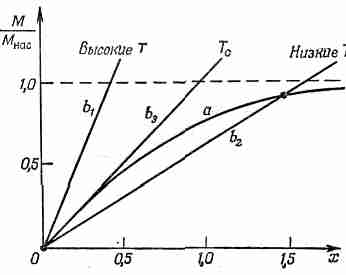
*Фиг. 36.13. Графическое реше­ние уравнений (36.37) и (36.38),*

Воспользовавшись еще уравнением (36.36) для *Ва,* можно записать *х* как функцию от *М:*

**

Эта формула определяет линейную зависимость между *М/Мнас* и *х* при любой величине *Н.* Прямая пересекается с осью *х* в точке *x=μH/kT,* и наклон ее равен ε*0с2kT/μλКМнас.* Для любого частного зна­чения *Н* это будет пря­мая, подобная прямой *b* на фиг. 36.13. Пересечение кривых *а* и о дает нам решение для М/Мнас. Итак, задача решена.

Посмотрим теперь, годны ли эти решения при различных обстоятельствах. Начнем с *H*=0. Здесь представляются две возможности, показанные кривыми *b1* и *b2* на фиг. 36.14.



*Фиг. 36.14. Определение намагниченности при Н=0.*

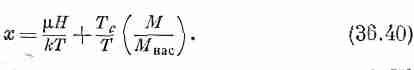
Обра­тите внимание, что наклон прямой (36.38) пропорционален аб­солютной температуре *Т.* Таким образом, при *высоких темпера­турах* получится прямая, подобная *b1* Решением будет только М/Мнас=0. Иначе говоря, когда намагничивающее поле Я равно нулю, намагниченность тоже равна нулю. При *низких температурах* мы получили бы линию типа b2 и стали возможны *два решения* для М/Мнас: одно М/Мнас=0, а другое М/Мнас порядка единицы. Оказывается, что только второе решение устойчиво, в чем можно убедиться, рассматривая малые вариа­ции в окрестности указанных решений.

В соответствии с этим при достаточно низких температурах магнитные материалы должны намагничиваться *спонтанно.* Короче говоря, когда тепловое движение достаточно мало, то взаимодействие между атомными магнитиками заставляет их выстраиваться параллельно друг другу, получается постоянно намагниченный материал, аналогичный пос­тоянно поляризованным сегнетоэлектрикам, о которых мы говорили в гл. 11 (вып. 5).

Если мы отправимся от высоких температур и начнем дви­гаться вниз, то при некой критической температуре, называемой температурой Кюри *Тc,* неожиданно проявляется ферромагнит­ное поведение. Эта температура соответствует на фиг. 36.14 линии *b3,* касательной к кривой *а,* наклон которой равен еди­нице. Так что температура Кюри определяется из равенства

C:\Мои документы\gray.jpg

При желании уравнение (36.38) можно записать в более прос­том виде через *Тc:*



Что же получается для малых намагничивающих полей *Н?* Из фиг. 36.14 нетрудно понять, что получится, если нашу пря­мую линию сдвинуть немного направо. В случае низкой темпе­ратуры точка пересечения немного сдвинется направо по слабо наклоненной части кривой *а* и изменения *М* будут сравнительно невелики. Однако в случае высокой температуры точка пересе­чения побежит по крутой части кривой *а* и изменения *М* станут относительно быстрыми. Эту часть кривой мы фактически мо­жем приближенно заменить прямой линией *а* с единичным наклоном и написать

C:\Мои документы\gray.jpg

Теперь можно разрешить уравнение относительно *М/Мнас:*

C:\Мои документы\gray.jpg

Мы получаем закон, несколько напоминающий закон для па­рамагнетизма:



Отличие состоит, в частности, в том, что мы получили намагни­ченность как функцию *Н, с* учетом взаимодействия атомных магнитиков, однако главное то, что намагниченность обратно пропорциональна *разности* температур *Т* и *Тс,* а не просто абсолютной температуре *Т.* Пренебрежение взаимодействием между соседними атомами соответствует λ=0, что, согласно уравнению (36.39), означает *Тс=*0. Результат при этом полу­чится в точности таким же, как и в гл. 35.

Нашу теоретическую картину можно сверить с эксперимен­тальными данными для никеля. На опыте обнаружено, что ферромагнитные свойства никеля исчезают, когда температура поднимается выше 631° К. Это значение можно сравнить со значением *Тс,* вычисленным из равенства (36.39). Вспоминая, что Mнас=μ*N,* мы получаем

C:\Мои документы\gray.jpg

Из плотности и атомного веса никеля находим

N=9,1•1028м-3. А вычисление μ, из уравнения (36.28) и подстановка λ=1/3 дает

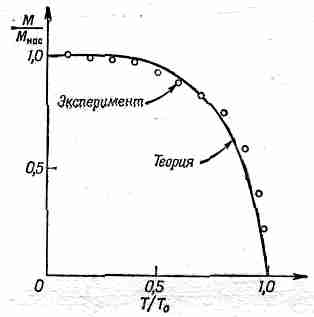
*Tс=0,24°K.*

Различие с экспериментом примерно в 2600 раз! Наша теория ферромагнетизма полностью провалилась!

Можно попытаться «подправить» нашу теорию, как это сде­лал Вейсс, предположив, что по каким-то неизвестным причи­нам *К* равно не 1/3, а (2600) •1/3, т. е. около 900. Оказывается, что подобная величина получается и для других ферромагнит­ных материалов типа железа. Вернемся к уравнению (36.36) и попробуем понять, что это может означать? Мы видим, что большая величина Я означает, что *Ва* (локальное поле, дейст­вующее на атом) должно быть больше, много больше, чем мы думали. Фактически, записывая *Н = В-M/ε0c2,* мы получили

C:\Мои документы\gray.jpg

В соответствии с нашей первоначальной идеей, когда мы при­нимали λ=1/3, локальная намагниченность *М уменьшает* эффективное поле *Ва* на величину — *2М/Зε0.* Даже если бы наша модель сферической полости была не очень хороша, мы все равно ожидали бы *некоторого* уменьшения. Вместо того чтобы объяснить явление ферромагнетизма, мы вынуждены считать, что намагниченность *увеличивает* локальное поле в огромное число раз: в тысячу и даже больше. По-видимому, не существует какого-то разумного способа для создания действующего на атом поля такой ужасной величины, ни даже поля нужного знака! Ясно, что наша «магнитная» теория ферромагнетизма потерпела досадный провал. Мы вынуждены заключить, что в ферромагнетизме мы имеем дело с какими-то не*магнитными* взаимодействиями между вращающимися электронами соседних атомов. Это взаимодействие должно порождать у соседних спинов сильную тенденцию к выстраиванию в одном направлении. Мы увидим позднее, что это взаимодействие связано с квантовой механикой и принципом запрета Паули. И, наконец, посмотрим, что происходит при низких темпе­ратурах, когда *Т<Tс.* Мы видели, что даже при *Н=0* в этом случае должна существовать спонтанная намагниченность, определяемая пересечением кривых *а* и b2 на фиг. 36.14. Если мы, изменяя наклон линии b2, будем находить *М* для различ­ных температур, то получим теоретическую кривую, пока­занную на фиг. 36.15.



*Фиг. 36.15. Зависимость спонтан­ной намагниченности никеля от тем­пературы.*

Для всех ферромагнитных материалов, атомные моменты которых обусловлены одним электроном, эта кривая должна быть одной и той же. Для других материалов подобные кривые могут отличаться лишь немного.

В пределе, когда *Т* стремится к абсолютному нулю, *М* стре­мится к Mнac. При увеличении температуры намагниченность уменьшается, падая до нуля при температуре Кюри. Точками на фиг. 36.15 показаны экспериментальные данные для никеля. Они довольно хорошо ложатся на теоретическую кривую. Хотя мы и не понимаем лежащего в основе механизма, но общие свойства теории, по-видимому, все же правильны.

Но в нашей попытке понять ферромагнетизм есть еще одна неприятная несогласованность, которая должна нас заботить. Мы нашли, что выше некоторой температуры материал должен вести себя как парамагнитное вещество, намагниченность кото­рого пропорциональна *Н* (или *В),* а ниже этой температуры должна возникать спонтанная намагниченность. Но при пост­роении кривой намагничивания для железа мы этого как раз и не обнаружили. Железо становится постоянно намагниченным только *после* того, как мы его «намагнитим». А в соответствии с только что высказанными идеями оно должно намагничиваться само! Что же неверно? Оказывается, что если вы рассмотрите *достаточно маленький* кристалл железа или никеля, то увидите что он и впрямь полностью намагничен! А большой кусок железа состоит из массы таких маленьких областей, или «доменов», которые намагничены в различных направлениях, так что *средняя* намагниченность в большом масштабе оказывается равной нулю. Однако в каждом маленьком домене железо все *же* намагничивает само себя, причем *М* приблизительно равно Mнac. Как следствие этой доменной структуры свойства боль­шого куска материала должны быть совершенно отличны от микроскопических, как это и оказывается на самом деле.

***\* В системе, которой пользуется здесь автор, В=Н+1/ε0c2 М, но***

***D=ε0E+P. В старой, доброй системе единиц писали В=μ0Н=(1/ε0c2)Н и***

***D=ε0Е или В=(Н+4πМ) и D=Е+4πР. Надо быть очень внима­тельным, когда формулы для магнетиков пишутся по аналогии с формулами для диэлектриков (ср. § 6).— Прим. ред.***

***\* Или, если хотите, ток I на каждой грани может быть поровну; распределен на кубиках с двух сторон.***

***\* Если бы все «другие» заряды находились на проводниках, то ρдр было бы тем же самым, что и ρсвоб в гл. 10 (вып. 5).***

***Глава* 37**

[**МАГНИТНЫЕ МАТЕРИА****ЛЫ**](#прим1)

[**§ 1.Сущность ферромагнети****зма**](#a1)

[**§ 2.Термодинамические сво****йства**](#a2)

[**§ 3. Петля гистерез****иса**](#a3)

[**§ 4.Ферромагнитные мате****риалы**](#a4)

[**§ 5.Необычные магнитные матери****алы**](#a5)

**§ 1. Сущность ферромагнетизма**

В этой главе мы поговорим об особенностях и поведении ферромагнетиков и некоторых дру­гих необычных магнитных материалов. Но перед тем как приступить к этой теме, я сделаю ма­ленький обзор некоторых вопросов общей тео­рии магнитов, которые мы изучали в предыду­щей главе.

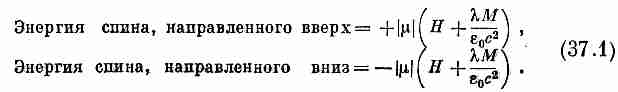
Мы сначала представили себе «магнитные» токи, текущие внутри материала и порождаю­щие магнетизм, а затем стали их описывать через объемную плотность токов **j**мar=**∇**X**M**. Заметьте, что эти токи *нереальные.* Даже когда намагниченность вещества однородна, токи в нем *на самом деле* не исчезают полностью: кру­говые токи электрона в одном атоме и круговые токи электрона в другом атоме, перекрываясь, не дают в сумме точно нуль. Даже внутри каждого отдельного атома распределение магне­тизма *не очень гладкое.* В атоме железа, напри­мер, намагниченность распределена более или менее по сферической поверхности не слишком близко к ядру, но и не слишком далеко от него. Таким образом, магнетизм в веществе — вещь довольно сложная в своих деталях и весьма нерегулярная. Но сейчас мы должны об этих сложностях забыть и рассматривать явление, пользуясь более грубой усредненной моделью. Только тогда становится верным утверждение о равенстве нулю *среднего* тока при **М**=0 в ог­раниченной внутренней области, большой по сравнению с размерами атома. Таким образом, под магнитным моментом единицы объема (намагниченностью) и под **j**маг и т. п. на нашем теперешнем уровне рассмотрения мы понимаем среднее по областям, большим по сравнению с пространст­вом, занимаемым отдельным атомом.

В предыдущей главе мы обнаружили, что ферромагнитные материалы обладают следующим интересным свойством: при температурах выше некоторой их магнитные свойства проявля­ются слабо и лишь ниже этой температуры они становятся сильными магнетиками. Этот факт легко продемонстрировать. Кусок никелевого провода при комнатной температуре притя­гивается магнитом. Но если мы его нагреем в пламени газовой горелки выше температуры Кюри, то он станет практически немагнитным и не будет притягиваться к магниту, даже если мы поднесем его совсем близко. Если же оставить его остывать возле магнита, то в тот момент, когда его температура упадет ниже критической, он внезапно снова притянется к магниту!

В общей теории магнетизма, которой мы пользуемся, пред­полагается, что за намагниченность ответствен спин электрона. Спин электрона равен 1/2 и сопровождается магнитным момен­том, равным одному магнетону Бора: (μ=μ*b=qeh/2m.* Спин электрона может быть направлен либо вверх, либо вниз. Поскольку заряд электрона отрицателен, то магнитный момент его *направлен вниз,* когда спин направлен вверх, и *направлен вверх,* когда спин направлен вниз. В соответствии с нашим обычным соглашением магнитный момент электрона (А — число отрицательное. Мы нашли, что потенциальная энергия магнит­ного диполя в заданном приложенном поле **В** равна—**μ**•**B**. Энергия вращающегося электрона зависит также и от распо­ложения соседних спинов. Если в железе момент соседнего атома направлен вверх, то момент следующего атома имеет сильную тенденцию тоже направиться вверх. Именно это делает железо, кобальт и никель такими сильными магнети­ками — все моменты атомов в них стремятся быть параллель­ными. И вот первый вопрос, который мы должны обсудить, — *почему* так происходит?

Вскоре после развития квантовой механики было замечено, что существуют чрезвычайно мощные *кажущиеся* силы (однако не магнитные и не другие известные силы), которые стараются выстроить спины соседних электронов *противоположно* один другому. Эти силы тесно связаны с силами химической валент­ности. В квантовой механике есть так называемый *принцип запрета,* который говорит, что два электрона не могут зани­мать в точности одно и то же состояние, т. е. они не могут нахо­диться в тех же самых условиях в смысле положения и ориен­тации спина. Если два электрона находятся в одном и том же месте, то единственной возможностью им различаться будет только противоположное направление их спинов. Таким об­разом, если между атомами имеется область пространства, где скапливаются электроны(так происходит при химической связи), и если на сидящий уже там электрон нам захочется посадить другой, то единственный способ это сделать — направить спин второго электрона противоположно спину первого. Параллель­ность спинов противоречит принципу запрета, если, конечно, электроны расположены в одной точке. В результате пара близ­ких друг к другу электронов с параллельными спинами обла­дает гораздо большей энергией, нежели пара электронов с про­тивоположными спинами; в целом же эффект будет таким, как будто действует сила, старающаяся развернуть спины противо­положно друг другу. Иногда такие «спин-вращающие» силы на­зываются *обменными,* но это название только увеличивает таин­ственность, так что термин этот не слишком удачен. Стремление электронов иметь противоположные спины обязано просто принципу запрета. Но фактически это объясняет *отсутствие* магнетизма почти у всех веществ! Спины свободных электронов на окраине атомов стремятся уравновешиваться в противопо­ложных направлениях. Проблема заключается в том, чтобы объяснить, почему же материалы, подобные железу, ведут себя совсем не так, как ожидается.

Предполагаемый эффект выстраивания мы учитывали добав­лением в выражение для энергии подходящего слагаемого, приговаривая, что если соседние электронные магнитики дают среднюю намагниченность *М,* то магнитный момент электрона имеет сильную тенденцию смотреть в том же самом направлении, что и средняя намагниченность соседних атомов. Таким обра­зом, для двух возможных ориентации спинов [можно написать](#прим2):



Когда стало ясно, что квантовая механика может объяснить нам огромные спин-ориентирующие силы, пусть даже с очевид­но неправильным знаком, то было предложено, что ферромаг­нетизм возникает именно за счет этих сил, но что вследствие сложности железа и большого числа участвующих в игре элект­ронов знак энергии электронов получается обратным. Как толь­ко это стало ясно, т. е. примерно с 1927 г., когда была понята квантовая механика, многие исследователи стали делать разные оценки, прикидки, полуподсчеты, стремясь получить тео­ретически величину *К.* Но все равно наиболее поздние вычисле­ния энергии взаимодействия между двумя электронными спи­нами в железе, предполагавшие прямое взаимодействие между двумя электронами в соседних атомах, дали *неправильный знак.* Сейчас, описывая это явление, говорят, что за все как-то ответ­ственна сложность ситуации и что есть надежда, что кому-то, кто сумеет проделать вычисления для более сложного случая, удастся получить правильный ответ!

Полагают, что направленный вверх спин одного из электро­нов внутренней оболочки, который ответствен за магнетизм, стремится заставить спины электронов проводимости, витаю­щих вокруг него, повернуться в противоположную сторону. Можно надеяться, что это ему вполне удастся, ибо электроны проводимости движутся в той же самой области, что и «магнит­ные» электроны. А поскольку они движутся то туда, то сюда, то могут передать свой приказ перевернуться «вверх ногами» спинам электронов других атомов; таким образом, «магнитный» электрон заставляет электрон проводимости направить спин в противоположную сторону, а тот в свою очередь заставляет следующий «магнитный» электрон направить свой спин проти­воположно *его* спину. Это двойное взаимодействие эквивалентно взаимодействию, стремящемуся выстроить два «магнитных» электрона в одном направлении. Иными словами, тенденция соседних спинов быть параллельными есть результат действия промежуточной среды, которая в некотором смысле стремится быть противоположной им обоим. Этот механизм не требует, чтобы все электроны проводимости были повернуты «вверх ногами». Достаточно, чтобы они лишь слегка стремились по­вернуться вниз, и шансы «магнитных» электронов повернуться вверх перевесят. Как полагают те исследователи, которые рабо­тали с этими вещами, это и есть тот механизм, который ответ­ствен за ферромагнетизм. Но должен отметить, что вплоть до сегодняшнего дня никто не может вычислить величину λ мате­риала, зная просто, что в периодической системе элементов этот материал стоит, скажем, под номером 26. Короче говоря, мы все еще не можем понять явление до конца.

Теперь же продолжим рассуждения о нашей теории, а потом вернемся снова назад и обсудим некоторые ошибки избранного нами пути. Если магнитный момент какого-то электрона на­правлен вверх, то его энергия частично обусловлена внешним полем, а частично связана с тенденцией спинов быть параллель­ными. Поскольку при параллельных спинах энергия меньше, то эффект получается таким же, как и от «внешнего эффектив­ного поля». Но помните, что обязано это не *истинным магнит­ным* силам, а более сложному взаимодействию. Во всяком слу­чае, в качестве выражений для энергии двух спиновых состояний «магнитного» электрона мы примем уравнения (37.1). От­носительная вероятность этих двух состояний при температуре *Т* пропорциональна exp[-энергия/kT], что можно записать как *е±х,* где *х=*|*μ*|(H+λM/ε0с2)/kT. Если затем мы вычислим среднюю величину магнитного момента, то найдем (как и в предыдущей главе), что она равна

*M=N* |*μ*|th*x.* (37.2)

Теперь я могу подсчитать внутреннюю энергию материала. Отметим, что энергия электрона в точности пропорциональна магнитному моменту, так что все равно, вычислять ли средний момент или среднюю энергию. Среднее значение энергии будет при этом

C:\Мои документы\gray.jpg

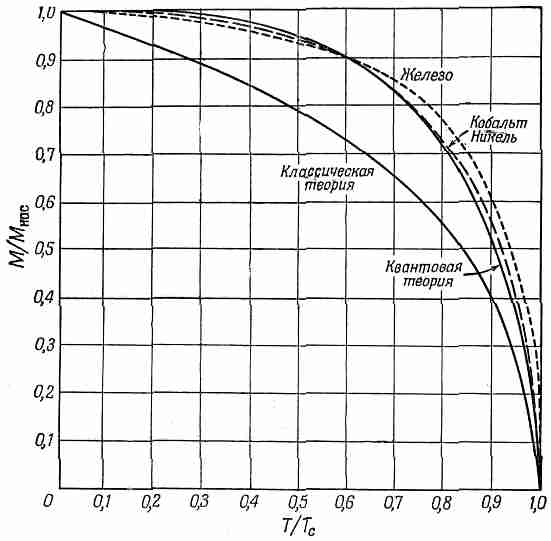
Но это не совсем верно. Выражение λM/ε0c2 представляет взаимодействие всех возможных *пар* атомов, а мы должны пом­нить, что каждую пару следует учитывать только *один раз.* (Ког­да мы учитываем энергию одного электрона в поле остальных, а затем энергию второго электрона в поле остальных, то мы еще раз учитываем часть первой энергии.) Поэтому *выражение взаи­модействия* мы должны разделить на 2 и наша формула для энергии приобретет вид

C:\Мои документы\gray.jpg

В предыдущей главе мы обнаружили одну очень интересную особенность: для каждого материала ниже определенной темпе­ратуры существует такое решение уравнений, при котором маг­нитный момент *не равен нулю* даже в отсутствие внешнего на­магничивающего поля. Если в уравнении (37.2) мы положим *Н=0,* то найдем

C:\Мои документы\gray.jpg

где Мнас=N|μ| и *Tc=*|μ|λM*нас./kε0c2.* Решив это уравнение (графи­чески или каким-то другим способом), мы найдем, что отноше­ние *М/Мнас* как функция от *T/Tc* представляет кривую, наз­ванную на фиг. 37.1 «квантовая теория».



Фиг. 37.1. Зависимость спонтанной намагниченности (Н=0) ферромагнитных кристаллов от температуры.

Пунктирная кривая «Кобальт, Никель» — это полученная экспериментально кри­вая для кристаллов этих элементов. Теория и эксперимент находятся в разумном согласии. Там же представлены резуль­таты классической теории, в которой вычисления проводились в предположении, что атомные магнитики могут иметь всевоз­можные ориентации в пространстве.

Можете убедиться, что это предположение приводит к предсказаниям, которые весьма далеки от экспериментальных данных.

Даже квантовая теория недостаточно хорошо описывает наблюдаемое поведение при высоких и низких температурах. Причина этого отклонения заключена в принятом нами доволь­но грубом приближении: мы предполагали, что энергия атома зависит лишь от *средней* намагниченности соседних с ним ато­мов. Другими словами, каждый атом со спином, направленным вверх, находящийся по соседству с данным атомом, из-за квантовомеханического эффекта выстраивания вносит свой вклад в энергию. А сколько таких атомов? В среднем это из­меряется величиной намагниченности, но это только *в сред­нем.* Может оказаться, что для какого-то одного атома спины *всех* его соседей направлены вверх. Тогда его энергия будет выше средней. У другого же спины некоторых соседей направ­лены вверх, а некоторых — вниз, а среднее может быть нулем, и тогда никакого вклада в энергию вообще не будет и т. д. Из-за того что атомы в разных местах имеют различное окружение с различным числом направленных вверх и вниз спинов, нам следовало бы воспользоваться более сложным способом усред­нения. Вместо того чтобы брать один атом, подверженный сред­нему влиянию, нам следовало бы взять каждый атом в его реаль­ной обстановке, подсчитать его энергию, а затем найти *среднюю энергию.* Но как же все-таки определить, сколько соседей ато­мов направлено вверх, а сколько — вниз? Это как раз и нужно вычислить, но здесь мы сталкиваемся с очень сложной задачей внутренних корреляций,— задачей, которую никому еще не уда­валось решить. Эта животрепещущая и интригующая проблема в течение многих лет волновала умы физиков; по этому вопросу писалось множество статей крупнейшими учеными, но и они не могли найти полного решения.

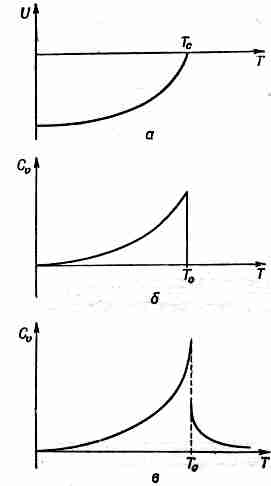
Оказывается, что при низких температурах, когда почти все атомные магниты направлены вверх и лишь некоторые направ­лены вниз, задача решается довольно легко; то же самое можно сказать и о высоких температурах, значительно превышаю­щих температуру Кюри *Тс,* когда почти все они направлены совершенно случайно. Часто легко вычислить небольшие откло­нения от некоторой простой идеализированной теории, и до­вольно ясно, почему такие отклонения имеются при низких температурах. Физически понятно, что по статистическим при­чинам намагниченность при высоких температурах *должна* исчезать. Но точное поведение вблизи точки Кюри никогда во всех подробностях не было установлено. Это очень интересная задача, над которой стоит потрудиться, если когда-нибудь вам вздумается взяться за еще не решенную проблему.

**§ 2. Термодинамические свойства**

В предыдущей главе мы заложили основу, необходимую для вычисления термодинамических свойств ферромагнитных ма­териалов. Они, естественно, связаны с внутренней энергией кристалла, которая обусловлена взаимодействием между раз­личными спинами и определяется формулой (37.3). Для нахож­дения энергии, связанной со спонтанной намагниченностью (ни­же точки Кюри), мы можем в уравнении (37.3) положить *Н=0* и, заметив, что thx=М/Мнас, найти, что средняя энергия про­порциональна *М2:*

C:\Мои документы\gray.jpg

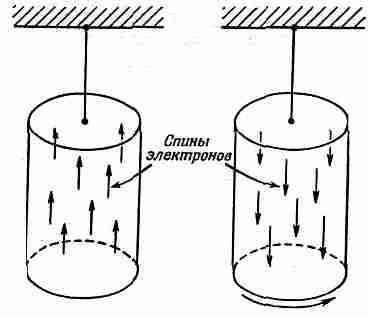
Если мы теперь построим график зависимости намагниченности от температуры, то получим кривую, которая описывается от­рицательным квадратом функции (37.1) и представлена на фиг. 37.2, *а.* Если бы мы измеряли *удельную теплоемкость* такого материала, то получили бы кривую (фиг. 37.2, б), ко­торая представляет производную кривой, изображенной на фиг. 37.2, *а.*



Фиг. 37.2. Энергия в единице объема и удельная теплоемкость ферромагнитного материала.

С увеличением тем­пературы эта кривая медленно растет, но затем при *Т = Тс* нео­жиданно падает до нуля. Резкое падение вызвано изменением на­клона кривой магнитной энер­гии, и кривая ее производной попадает прямо в точку Кюри. Таким образом, совершенно без магнитных измерений, лишь наб­людая за термодинамическими свойствами, мы бы смогли уста­новить, что внутри железа или никеля что-то происходит. Однако как из эксперимента, так и из улучшенной теории (с учетом внутренних флуктуации) следует, что эти простые кривые неправильны и что истинная картина на самом деле бо­лее сложна. Пик этих кривых поднят выше, а падение до нуля происходит несколько медленнее. Даже если температура до­статочно велика, так что спины в *среднем* распределены совер­шенно случайно, все равно попадаются области с определенным значением намагниченности, и спины в этих областях продол­жают давать небольшую дополнительную энергию взаимодей­ствия, которая медленно уменьшается с ростом температуры и увеличением беспорядка. Так что реальная кривая выглядит так, как показано на фиг. 37.2, *в.* Одна из целей физики сегод­няшнего дня — найти точное теоретическое описание удельной теплоемкости вблизи точки перехода Кюри — захватывающая проблема, не решенная до сих пор. Естественно, что эта пробле­ма очень тесно связана с формой кривой намагничивания в той же самой области.

Опишем теперь некоторые эксперименты, отнюдь не термоди­намического характера, которые показывают, что мы все же в каком-то смысле *правы* в нашей интерпретации магнетизма. Когда материал при достаточно низких температурах намагни­чен до насыщения, то *М* очень близка к Мнас, т. е. почти все спины, равно как и магнитные моменты, параллельны. Это можно проверить экспериментально. Предположим, что мы подвесили магнитную па­лочку на тонкой струне, а затем окружили ее катушкой, так что мо­жем менять магнитное поле, не притрагиваясь к магниту и не прикладывая к нему никакого момента сил. Это очень трудный эксперимент, ибо магнитные силы столь велики, что любая нерегулярность, любой перекос или несо­вершенство в железе могут дать случайный момент. Однако такой эксперимент был выполнен со всей необходимой аккурат­ностью и роль случайных моментов была сведена до минимума. С помощью магнитного поля катушки, которая окружает па­лочку, мы сразу можем перевернуть все магнитные моменты. Когда мы это проделаем, то заодно «сверху вниз» перевернутся и все моменты количества движения, связанные со спином (фиг. 37.3).

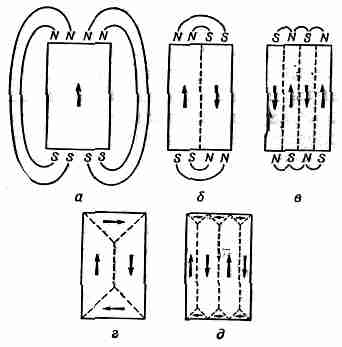


Фиг. 37.3. При перемагничивании железного бруска он приобретает некоторую угловую скорость.

Но поскольку момент количества движения должен сохраняться, то, когда все спины перевернулись, момент количе­ства движения палочки должен измениться в противоположную сторону. Весь магнит должен начать вращаться. Это произошло на самом деле. Когда опыт был проделан, то было обнаружено слабое вращение магнита. Мы можем измерить полный момент количества движения, переданный всему магниту, который про­сто равен произведению *N* на h и на изменение момента количе­ства движения каждого спина. Оказалось, что измеренное этим способом отношение момента количества движения к магнит­ному с 10%-ной точностью совпадает с нашими вычислениями. На самом деле в наших вычислениях мы исходили из того, что атомный магнетизм целиком обязан электронным спинам, од­нако в большинстве материалов есть еще и орбитальное движе­ние. Орбитальное движение связано с решеткой, но она дает в магнетизм вклад не более нескольких процентов. Действительно, если взять *Mнас=Nμ* и для плотности железа взять значение 7,9, а для μ—момент электрона, связанный с его спином, то для магнитного поля получим насыщение около 20 000 *гс.* Однако опыт показывает, что на самом деле оно имеет значение вблизи 21500 *гс.* Ошибка в 5 или 10% возникает как раз из-за того, что мы пренебрегли вкладами орбитальных моментов. Таким образом, небольшое расхождение с гиромагнитными измерения­ми совершенно понятно.

**§ 3. Петля гистерезиса**

Из нашего теоретического анализа мы заключили, что маг­нитные материалы ниже некоторой температуры должны ста­новиться спонтанно намагниченными, так что все магнитики в них должны смотреть в одном и том же направлении. Однако для обычного куска *ненамагниченного* железа это, как мы знаем, неверно. Почему железо не намагничивается все целиком? С помощью фиг. 37.4 я могу объяснить вам это. Допустим, что все железо было бы одним большим кристаллом такой формы, как показано на фиг. 37.4, а, и этот кристалл целиком намаг­нитился бы в одном направлении.



Фиг. 37.4. Образование доме­нов в монокристалле железа.

При этом создалось бы зна­чительное внешнее магнитное поле, содержащее в себе огромную энергию. Мы можем уменьшить эту энергию поля, если распо­ложим атомы так, чтобы одна часть кубика была намагничена вверх, а другая — вниз, как показано на фиг. 37.4, *б.* При этом, разумеется, поле вне железа будет занимать меньший объем и будет нести в себе меньше энергии.

Постойте, постойте! В слое между двумя областями рядом с электронами со спином, направленным вверх, сидят электро­ны со спином, направленным вниз. Но ферромагнетизм появ­ляется только в тех материалах, для которых энергия *умень­шается,* когда спины *параллельны,* а не *противоположны.* Так что вдоль пунктирной линии на фиг. 37.4, *б* возникает некоторая добавочная энергия. Эта энергия иногда называется *энергией стенки.* Область, имеющая только одно направление намагниченности, называется *доменом.* На каждой единице площади разделяющей по­верхности между двумя доменами у стенки доме­на, с противоположных сторон которой у нас расположены атомы, чьи магнитные моменты направлены противоположно, сосредоточена энергия. Конечно, нельзя говорить строго, что на границе моменты двух сосед­них атомов в точности противоположны, природа-то сделала этот переход более постепенным. Но сейчас нам не стоит ин­тересоваться такими тонкими деталями.

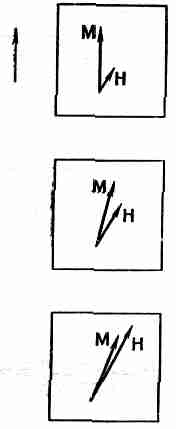
Главный же вопрос теперь заключается вот в чем: выгодны такие стенки или нет? Ответ на него зависит от *размеров* доме­нов. Предположим, что мы увеличили размеры так, что все стало вдвое больше. При этом объем внешнего пространства, заполненного магнитным полем данной силы, станет в *восемь* раз больше, а энергия магнитного поля, которая пропорцио­нальна объему, тоже возрастет в восемь раз. Но площадь *границы* между двумя доменами, на которой сосредоточена энергия стенки, возрастет только в *четыре* раза. Следователь­но, если кусок железа достаточно велик, ему выгодно расще­питься на некое число доменов. Вот почему лишь очень малень­кие кристаллы могут состоять только из одного домена. Любой большой объект, размер которого больше приблизительно од­ной тысячной миллиметра, будет иметь по крайней мере одну междоменную стенку, а обычный «сантиметровый» объект расщепляется, как это показано на рисунке, на множество до­менов. Расщепление на домены будет происходить *до тех пор, пока энергия, необходимая на установление еще одной допол­нительной стенки, не сравняется с уменьшением энергии маг­нитного поля вне кристалла.*

Природа же нашла еще один способ понижения энергии. Полю нет никакой необходимости [выходить наружу](#прим3), если, как это показано на фиг. 37.4, г, взять маленькие треугольные области с *направленной в сторону* намагниченностью. При та­ком расположении, как на фиг. 37.4, г, внешнее поле полностью отсутствует, а площадь доменных стенок лишь незначительно больше.

Но это приводит к новой проблеме. Оказывается, что если намагнитить отдельный кристалл железа, то он изменяет свою длину в направлении намагничивания; так что «идеальный» куб с намагниченностью «вверх» уже не будет безупречным ку­бом. Его «вертикальный» размер будет отличаться от «горизон­тального».Этот эффект называется *магнитострикцией.* В ре­зультате таких геометрических изменений небольшой треугольный кусочек, показанный на фиг. 37.4, *г,* не сможет больше, так сказать, «умещаться» в отведенном ему пространстве: в одном направлении кристалл становится слишком длинным, а в другом — слишком коротким. Фактически-то он, конечно, умещается, но только немного сплющивается, что приводит к некоторым механическим напряжениям. Отсюда возникает и дополнительная энергия. Полный баланс вкладов в энергию и определяет сложный вид расположения доменов в куске нена­магниченного железа.

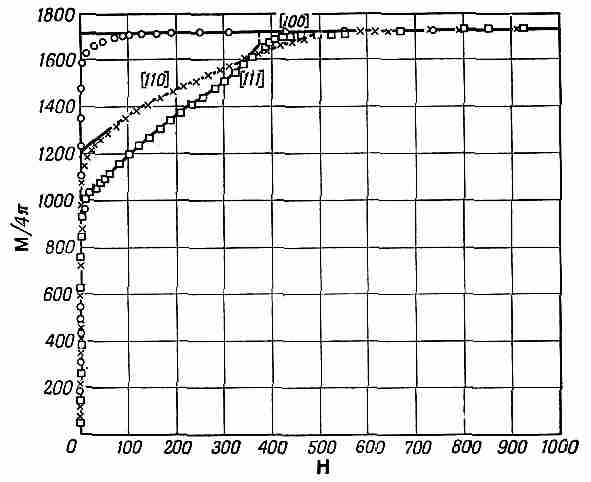
А что получится, если мы приложим внешнее магнитное по­ле? В качестве простого примера рассмотрим кристалл, домены которого показаны на фиг. 37.4, *д.* Если мы приложим магнит­ное поле, направленное вверх, то как будет происходить намагничивание кристалла? Прежде всего средняя доменная стен­ка может *передвинуться в сторону* (направо) и уменьшить энер­гию. Она перемещается таким образом, чтобы область направления «вверх» стала больше области направления «вниз», Элементарных магнитиков, направленных по полю, становится больше, а это приводит к понижению энергии. Таким образом, в куске железа в слабых магнитных полях с самого начала на­магничивания доменная стенка начнет двигаться и «съедать» области, намагниченные противоположно полю. По мере того как поле продолжает увеличиваться, весь кристалл постепенно превращается в один большой домен, в котором внешнее поле помогает сохранять направление «вверх». В сильном магнит­ном поле кристаллы намагничиваются в одну сторону *как раз потому,* что их энергия в приложенном поле уменьшается. Внешнее магнитное поле кристаллов теперь уже не так сущест­венно.

А что если геометрия кристалла не так проста? Что если какая-то ось кристалла и его спонтанная намагниченность нап­равлены в одну сторону, а мы прилагаем поле, *направленное в другую,* скажем под углом 45°? Можно думать, что домены по­вернутся так, чтобы их намагниченность стала параллельной полю, а затем они, как и прежде, смогут слиться в один домен. Но сделать это для железа нелегко, *ибо энергия, необходимая для намагничивания кристалла, зависит от направления намаг­ничивающего поля относительно кристаллической оси.* Намаг­нитить железо в направлении, параллельном кристаллической оси, относительно легко, но для того чтобы намагнитить его в каком-то другом направлении, скажем под углом 45° к на­правлению оси, энергии требуется *больше.* Следовательно, если в таком направлении приложить магнитное поле, то сначала происходит рост доменов, намагниченных в одном из избран­ных направлений, *близких* к направлению приложенного поля, пока в эту сторону не будет направлена намагниченность всех областей. Затем *при гораздо больших полях* общая намагниченность постепенно поворачивается к направ­лению поля, как это показано на фиг. 37.5.



*Фиг. 37.5. Намагничивающее поле* **Н**, *направленное под некоторым углом к кристаллической оси, посте­пенно изменяет направление намагниченности* **М**, *не изменяя ее величины.*

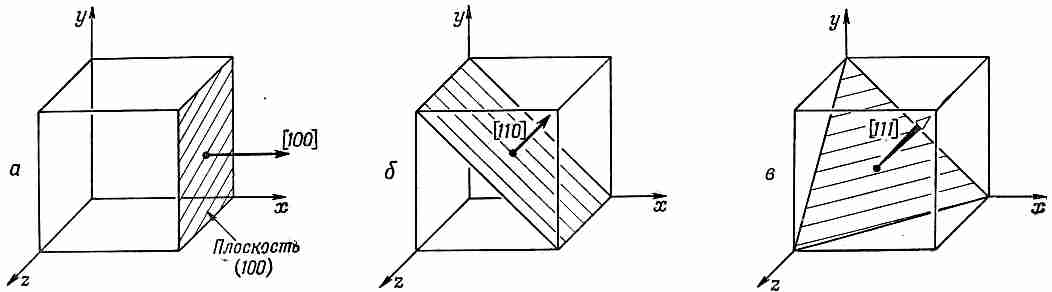
На фиг. 37.6 показаны полученные из опыта кривые намагничивания монокристал­лов железа.



*Фиг. 37.6. График компоненты* **М**, *параллельной полю* **Н**, *при раз­личных направлениях* **Н** *(по отношению к осям кристалла).*

Чтобы вы поняли их, я пред­варительно должен объяснить кое-какие обозначения, используемые для описания направлений в кристалле. Существует мно­го способов расслоения кристалла на плос­кости, в которых расположены атомы.

Каждый из вас, кто в прошлом работал или бывал *в* саду или на винограднике, знаком с этим любопытным зрелищем. Посмотрев в одну сторону, вы видите линию деревьев, а если посмотрите в другую,— вам откроется совсем другой ряд и т. д. Так и в кристалле — там есть определенные семейства плоскостей, содержащие много атомов; у таких плоскостей есть важная особенность (для простоты рассмотрим кубический кристалл). Если мы отметим, где эти плоскости пересекаются с тремя осями координат, то окажется, что *обратные величины* расстояний трех точек пересечения от начала относятся как целые числа. Эти три целых числа и принимаются для обозначения плоскостей. На фиг. 37.7, *а,* например, показана плоскость, параллельная плоскости *yz.* Она называется плос­костью (100), так как обратные величины отрезков, отсекае­мых этой плоскостью по осям *у* и z, равны нулю.



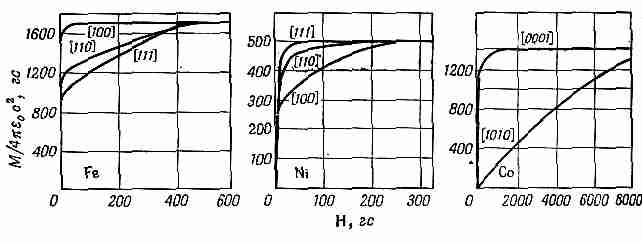
Фиг. 37.7. Способы обозначения кристаллических плоскостей.

Направление, перпендикулярное этой плоскости (в кубическом кристалле), задается тем же самым набором чисел, но записывается в квад­ратных скобках: [100]. Основную идею в случае кубического кристалла понять очень легко, ибо символ [100] обозначает вектор, который имеет единичную компоненту в направлении оси *х* и нулевые в направлениях осей *у* и*. z.* Комбинация [110] обозначает направление под 45° к осям x и y, как показано на фиг. 37.7, б, а [111] — направление диагонали куба (фиг. 37.7,в).

Вернемся теперь к фиг. 37.6. На ней мы видим кривые на­магничивания монокристалла в различных направлениях. Прежде всего заметьте, что для очень слабых полей, столь сла­бых, что в нашем масштабе их трудно изобразить, намагничен­ность чрезвычайно быстро возрастает до весьма больших зна­чений. Если приложить поле в направлении [100], т. е. в одном из направлений легкого намагничивания, то кривая идет вверх до еще большего значения, затем несколько закругляется и наступает насыщение. Происходит это потому, что домены, которые уже там есть, ликвидируются очень легко. Чтобы пе­редвинуть доменные стенки и «проглотить» все «неправильные» домены, требуется совсем слабое поле. Монокристаллы железа обладают огромной проницаемостью (в магнитном смысле), гораздо большей, чем поликристаллическое железо. Совер­шенный кристалл намагничивается очень легко. Почему же его кривая все же закругляется? Почему она не идет прямо до на­сыщения? Точно не известно. Быть может, вам когда-нибудь удастся изучить это явление. Мы понимаем, почему при боль­ших полях она плоская. Когда весь кубик становится единым доменом, то добавочное магнитное поле не может создать боль­шей намагниченности, она уже равна Mнас— значит, спины всех электронов направлены вверх.

Что получится, если мы попытаемся повторить то же самое для направления [110], которое лежит в плоскости *ху* под уг­лом 45° к оси х? Мы включаем небольшое поле, и намагничен­ность за счет роста домена резко увеличивается. Если затем мы продолжаем увеличивать поле, то выясняется, что для достиже­ния насыщения поле должно быть довольно большим, ибо век­тор намагниченности нужно *повернуть в сторону* от направле­ния легкого намагничивания. Если это объяснение правильно, то при экстраполяции кривой [110] точка пересечения с верти­кальной осью должна будет давать значение намагниченно­сти, составляющее 1/√2от намагниченности насыщения. Ока­зывается, что так оно на самом деле и происходит. Это отношение очень-очень близко к 1/√2. Аналогично для направ­ления [111], которое идет по диагонали куба, мы находим, как и ожидали, что при экстраполяции кривая пересекает вер­тикальную ось на расстоянии, составляющем 1/√2 от значе­ния, соответствующего насыщению.

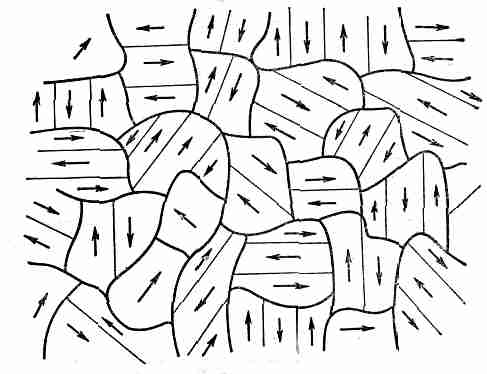
На фиг. 37.8 показано соответствующее поведение двух других ферромагнетиков: никеля и кобальта.



*Фиг. 37.8. Кривые намагничивания для монокристаллов железа, никеля и кобальта.*

Никель отличает­ся от железа. Оказывается, что направлением легкого намаг­ничивания у него будет направление [111]. Кобальт имеет гек­сагональную кристаллическую структуру; для этого случая система обозначений была изменена. Здесь в основании шестиугольника располагают три оси и еще одну ось, перпендикуляр­ную к ним, так что здесь используется четыре числа. Направ­ление [0001] — это направление гексагональной оси, а [1010]— направление, перпендикулярное к этой оси. Вы видите, что кристаллы различных металлов устроены по-разному.

Теперь мы рассмотрим такой поликристаллический материал, как обычный кусок железа. Внутри него содержится огромное множество маленьких кристалликов, кристаллические оси которых направлены во все стороны. Но *это не то же самое, что домены.* Вспомните, все домены были частью *одного кристалла,* а в куске железа, как видно из фиг. 37.9, содержится множество *различных кристаллов* с разной ориентацией.



*Фиг. 37.9. Микроструктура ненамагниченного поли­кристаллического ферромагнитного материала.*

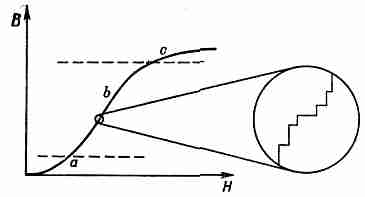
*Каждый кристаллик имеет направление легкого намагничивания и разбивается на домены, которые обычно спонтанно намагни­чены в атом направлении.*

В каждом из этих кристаллов, вообще говоря, содержится несколько доменов. Когда к куску поликристаллического материала мы прилагаем слабое магнитное поле, доменные барьеры в кристалликах на­чинают смещаться, и домены, направление намагниченности которых совпадает с направлением легкого намагничивания, растут все больше и больше. До тех пор пока поле остается очень малым, этот рост обратим; если мы выключим поле, намаг­ниченность снова вернется к нулю. Этот участок кривой намаг­ничивания обозначен на фиг. 37.10 буквой *а.*

Для больших полей в области, обозначенной буквой b*,* все становится гораздо более сложным. В каждом маленьком кри­сталле материала встречаются напряжения и дислокации, там есть примеси, грязь и дефекты. И при всех полях, за исключе­нием лишь очень слабых, стенки доменов при своем движении наталкиваются на них. Между доменной стенкой и дислокацией (или границей зерна или примесью) возникают взаимодействия. В результате, когда стенка наталкивается на препятствие, она как бы приклеивается и держится там, пока поле не достигнет определенной величины. Затем, когда поле несколько подрастет, стенка внезапно срывается. Таким образом, движение доменной стенки оказывается отнюдь не плавным, как в идеальном кри­сталле: она движется скачкообразно, то и дело останавливаясь на мгновение. Если бы мы рассмотрели кривую намагничивания в микроскопическом масштабе, то увидели бы нечто подобное изображенному на вставке фиг. 37.10.

Но самое важное заключается в том, что эти прыжки намаг­ничивания могут вызвать потерю энергии. Прежде всего, когда стенка домена проскакивает наконец через препятствие, она очень быстро движется к следующему. Быстрое движение вле­чет за собой и быстрое изменение магнитного поля, которое в свою очередь создает в кристалле вихревые токи. Последние растрачивают энергию на нагревание металла. Другой эффект состоит в том, что, когда домен неожиданно изменяется, часть кристаллов из-за магнитострикции изменяет свои размеры. Каж­дый неожиданный сдвиг доменной стенки создает небольшую звуковую волну, которая тоже уносит энергию. Благодаря та­ким эффектам эта часть кривой намагничивания *необратима:* происходит *потеря энергии.* В этом и заключается причина гистерезисного эффекта, ибо движение скачками вперед — од­но, а движение назад — уже другое и в оба конца затрачивается энергия. Это похоже на езду по ухабистой дороге.

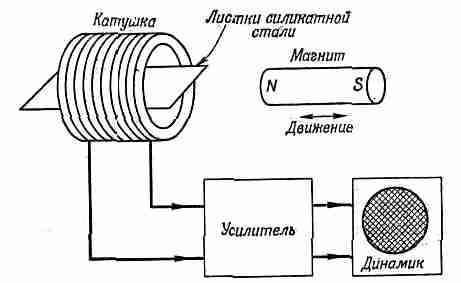
В конечном счете при достаточно сильных полях, когда все доменные стенки сдвинуты и намагниченность каждого кристал­лика направлена по ближайшей к полю оси легкого намагни­чивания, остаются еще некоторые кристаллики, у которых ось легкого намагничивания далека от направления внешнего магнитного поля. Чтобы повернуть эти магнитные моменты, требуется еще дополнительное поле. Таким образом, в сильных полях именно в области, обозначенной на фиг. 37.10 буквой с, намагниченность возрастает медленно, но гладко.



*Фиг. 37.10. Кривая намагни­чивания поликристаллического железа.*

Намагничен­ность не сразу достигает своего насыщения, ибо в этой послед­ней части кривой происходит *доворачивание* атомных магнити­ков в сильном поле. Таким образом, мы видим, почему кривая намагничивания поликристаллического материала обычно име­ет вид, изображенный на фиг. 37.10: сначала она немного воз­растает и это возрастание *обратимо,* затем возрастает быстро, но уже необратимо, а потом медленно загибается. Разумеется, между этими тремя областями никакого резкого перехода нет— они плавно переходят одна в другую.

Нетрудно убедиться в том, что процесс намагничивания в средней части кривой носит скачкообразный характер, что доменные стенки при сдвиге прыгают и даже щелкают. Для этого нам нужна только катушка со многими тысячами витков провода, связанная через усилитель с громкоговорителем (фиг. 37.11).



*Фиг. 37.11. Скачкообразные изменения намагничен­ности листков кремнистой стали сопровождаются щелчками в громкоговорителе.*

Если внутрь катушки поместить несколько листков кремнистой стали (такого же сорта, как и в трансформаторах) и медленно подносить к этой пачке постоянный магнит, то скач­кообразные изменения намагниченности будут создавать в ка­тушке импульсы э. д. с., которые в громкоговорителе будут слы­шны как отдельные щелчки. По мере приближения магнита к железу на вас обрушится целый град щелчков, напоминаю­щий шум, создаваемый падающими друг на друга песчинками, высыпающимися из наклоненной жестянки. Это прыгают, покачиваются и щелкают доменные стенки по мере увеличения магнитного поля. Это явление называется *эффектом Баркгаузена.*

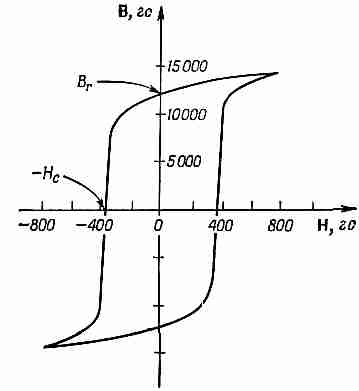
По мере приближения магнита к железным листикам шум некоторое время будет все возрастать, но когда магнит окажется совсем близко, шум начинает затихать. Почему? Да потому, что все доменные стенки передвинулись уже насколько возмож­но и теперь любое увеличение поля просто *поворачивает* век­торы намагниченности в каждом из доменов, а это уже вполне плавный процесс.

Если вы теперь будете плавно отодвигать магнит так, чтобы вернуться назад по нижней петле гистерезиса, то все домены будут тоже стремиться вернуться назад в положение низшей энергии и вы снова услышите град щелчков. Обратите внимание, что если вы отодвинете магнит до какого-то определенного по­ложения, а затем начнете немного двигать магнит взад и вперед, звук будет относительно слабым. Это снова напоминает пове­дение наклоненной жестянки с песком: когда песчинки «осели» на свое место, небольшой наклон жестянки уже не потревожит их. Небольшое изменение магнитного поля в железе неспособно заставить доменную стенку перескочить через «горб».

**§ 4. Ферромагнитные материалы**

Сейчас было бы хорошо рассказать о различных сортах маг­нитных материалов, применяемых в технике, и о некоторых проблемах, связанных с созданием магнитных материалов для разных целей. Прежде всего о самом термине «магнитные свой­ства железа», который часто приходится слышать. Он, строго говоря, не имеет смысла и способен ввести в заблуждение: «же­лезо» как строго определенный материал не существует. Свой­ства железа существенно зависят от количества примесей, а также от *способа* его приготовления. Вы понимаете, что магнит­ные свойства будут зависеть от того, насколько легко движутся доменные стенки, именно это свойство будет *определяющим,* а совсем не то, как ведут себя отдельные атомы. Так что практи­чески ферромагнетизм не является свойством *атомов* железа: это свойство *куска железа в определенном состоянии.* Железо, например, может находиться в двух различных кристаллических формах. Обычная форма имеет объемноцентрированную куби­ческую решетку, но может еще иметь и гранецентрированную решетку, которая, однако, стабильна только при температурах выше 1100°С. При этих температурах, разумеется, железо уже прошло точку Кюри. Однако, сплавляя с железом хром и ни­кель (один из возможных составов содержит 18% хрома и 8% никеля), мы можем получить то, что называется нержавеющей сталью; хотя она и состоит главным образом из железа, но сох­раняет гранецентрированную решетку даже при низких тем­пературах. Благодаря своей кристаллической структуре этот материал обладает совершенно другими магнитными свойст­вами. Обычно нержавеющая сталь немагнитна в сколько-нибудь заметной степени, хотя есть сорта с другим составом сплава, которые в какой-то степени магнитны. Хотя такой сплав, как любое вещество, является магнетиком, он не *ферро*магнетик, как обычное железо, несмотря на то, что в основном он все же состоит из железа.

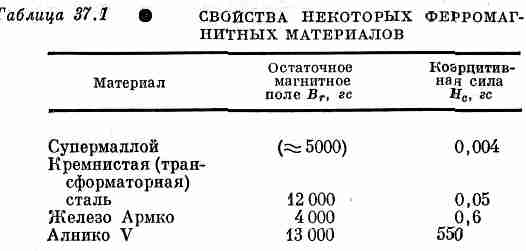
Существуют специальные материалы, которые были приду­маны для получения особых магнитных свойств. О некоторых из них я хочу рассказать. Если нужно сделать *постоянный* магнит, то требуется найти материал с необычно *широкой* пет­лей гистерезиса, чтобы при выключении тока, когда мы спу­стимся к нулевому намагничивающему полю, намагниченность все же осталась большой. Для таких материалов границы до­менов должны быть «заморожены» на месте как можно крепче. Одним из таких материалов является замечательный сплав АлникоV (51% Fe, 8% Аl, 14% Ni, 24% Со, 3% Cu). Доволь­но сложный состав этого сплава говорит о том кропотливом труде, который надо было затратить, чтоб создать хороший магнит. Сколько терпения потребовалось для того, чтобы, смешивая по-разному пять компонент, проверять раз­ные составы их до тех пор, пока не был найден идеальный сплав! Когда АлникоV затвердевает, у него появляется «вторая фаза», которая, осаждаясь, образует множество ма­леньких зерен и вызывает очень большие внутренние напряжения. Движение доменных стенок в этом материале очень затруднено. А чтобы получить вдобавок нужное строение, Алнико V механически «обрабаты­вается» так, чтобы кристаллы выстраивались в форме продол­говатых зерен в направлении будущей намагниченности. При этом намагниченность, естественно, стремится смотреть в нуж­ном направлении и противостоять эффектам анизотропии. Бо­лее того, в процессе приготовления материал даже охлаждается во внешнем магнитном поле, так что зерна растут с правильной ориентацией кристаллов. Петля гистерезиса АлникоV приве­дена на фиг. 37.12.



*Фиг. 37.12. Петля гистере­зиса сплава АлникоV.*

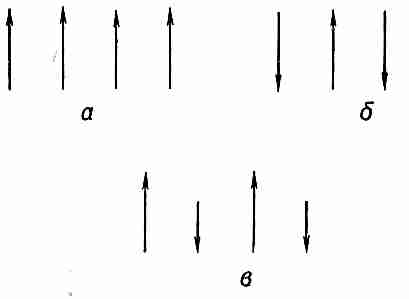
Видите, она в 500 раз шире петли гистерезиса мягкого железа, которую я вам показывал (см.фиг.36.8, стр.146). Обратимся теперь к другим сортам материалов. Для изготов­ления трансформаторов и моторов необходим материал, который был бы «мягким» в магнитном отношении, т. е. такой, намагни­ченность которого могла бы легко изменяться, так что даже очень малое приложенное поле приводило бы к очень большой намагниченности. Для этого нужны чистые, хорошо отожжен­ные материалы с очень малым количеством дислокаций и при­месей, так чтобы доменные стенки могли легко двигаться. Ани­зотропию желательно сделать как можно меньше. Тогда если даже зерна материала расположены под «неправильным» углом по отношению к полю, материал все равно будет легко намаг­ничиваться. Мы говорили, что железо предпочитает намагничи­ваться в направлении [100], тогда как никель предпочитает направление [111], так что если мы будем в различных пропор­циях смешивать железо и никель, то можно надеяться найти такую их пропорцию, когда сплав не будет иметь *никакого* предпочтительного направления, т. е. направления [100] и [111] будут эквивалентны. Оказывается, что это достигается при смешивании 70% никеля и 30% железа. Вдобавок (вероят­но, по счастливой случайности, а быть может, по какой-то фи­зической взаимосвязи между анизотропией и магнитострикционными эффектами) оказалось, что константы *магнитострик­ции* железа и никеля имеют противоположные знаки. Для сплава этих двух металлов магнитострикция исчезает при со­держании никеля около 80%. Так что при содержании никеля где-то между 70 и 80% у нас получаются очень «мягкие» маг­нитные материалы — сплавы, которые очень легко намагничи­ваются. Они называются *пермаллоями.* Пермаллои используют­ся в высококачественных трансформаторах (при низких уров­нях сигналов), но совершенно не годятся для постоянных маг­нитов. Приготовлять пермаллои и работать с ними нужно очень осторожно. Магнитные свойства пермаллоя в корне меняются, если его деформировать выше предела его упругости, так что этот материал никоим образом нельзя сгибать. Иначе в резуль­тате возникновения дислокаций, поверхностей скольжения и других механических деформаций проницаемость его умень­шается и границы доменов уже будут двигаться не так легко. Впрочем, былую высокую проницаемость можно восстановить отжигом при высокой температуре.

Полезно для характеристики различных магнитных мате­риалов оперировать какими-то числами. Двумя такими харак­теристиками являются значения *В* и *Н* в точках пересече­ния петли гистерезиса с осями координат (фиг. 37.12). Эти значения называются *остаточным магнитным полем Вr* и *коэрцитивной силой Нс.* В табл. 37.1 приведены эти характе­ристики для некоторых материалов.



**§ 5. Необычные магнитные материалы**

Здесь мне бы хотелось рассказать о некоторых более экзо­тических магнитных материалах. В периодической таблице есть немало элементов, имеющих незаполненные внутренние электронные оболочки, а следовательно, и атомные магнит­ные моменты. Так, сразу вслед за ферромагнитными элемента­ми — железом, никелем и кобальтом — вы найдете хром и мар­ганец. Почему же *они* не ферромагнитны? Ответ заключается в том, что в выражении (37.1) член с *К* для этих элементов имеет *противоположный знак.* В решетке хрома, например, направле­ния магнитных моментов атомов чередуются *друг за другом* (фиг. 37.13, *б).*

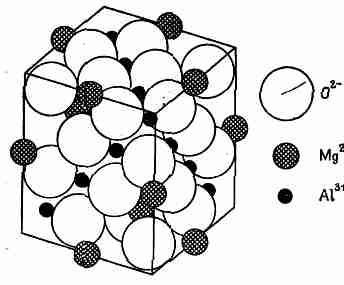


*Фиг. 37.13. Относительная ориентация элек­тронных спинов в различных материалах:*

*а — ферромагнетик;, б — антиферромагнетик; в — феррит.*

Так что со своей точки зрения хром *все же* «магнетик», но с точки зрения технических применений это не пред­ставляет интереса, так как не дает *внешнего* магнитного эффекта. Таким образом, хром — пример материала, в котором кванто-вомеханический эффект вызывает чередование направлений спинов. Такой материал называется *антиферромагнетиком.* Упорядочивание магнитных моментов в антиферромагнитных материалах зависит и от температуры. Ниже критической тем­пературы все спины выстраиваются в чередующейся последо­вательности, но если материал нагрет выше определенной тем­пературы, которая по-прежнему называется температурой Кюри, направления спинов внезапно становятся случайными. Этот рез­кий внутренний переход можно наблюдать на кривой удельной теплоемкости. Он проявляется еще в некоторых особых «маг­нитных» эффектах. Например, существование чередующихся спинов можно проверить по рассеянию нейтронов на кристалле хрома. Нейтрон сам по себе имеет спин (и магнитный момент), поэтому амплитуда его рассеяния различна в зависимости от того, параллелен ли его спин спину рассеивателя или противо­положен. В результате нейтронная интерференционная карти­на для чередующихся спинов отлична от картины при случай­ном их распределении.

Существует еще один сорт веществ, у которых квантово-механический эффект приводит к чередующимся спинам элект­ронов, но которые тем не менее являются *ферромагнетиками,* т. е. их кристаллы имеют постоянную результирующую намаг­ниченность. Идея, лежащая в основе объяснения свойств таких материалов, иллюстрируется схемой на фиг. 37.14.



Фиг. *37.14. Кристаллическая структура минерала шпинель* (MgOAl2O3).

*Ионы* Mg2+ *занимают тетраэдрические места, и каждый из них ок­ружен четырьмя ионами кислорода; ионы* А13+ *занимают октаэдрические места, и каждый окружен шестью ионами кислорода.*

На схеме показана кристаллическая структура минерала, известного под названием шпинели (MgOAl2O3), который, как это показано, не является магнетиком. Этот минерал содержит два сорта ме­таллических атомов — магний и алюминий. Если теперь заме­нить магний и алюминий магнитными элементами типа железа, т. е. вместо немагнитных атомов вставить *магнитные,* то полу­чится преинтереснейший эффект. Давайте назовем один сорт атомов металла *а,* а другой сорт — b*;* необходимо рассмотреть разные комбинации сил! Существует взаимодействие а—b*,* которое старается направить спины атома *а* и атома bпротиво­положно, ибо квантовая механика всегда требует, чтобы спи­ны были противоположны (за исключением таинственных кри­сталлов железа, никеля и кобальта). Затем существует взаимо­действие *а—а,* которое старается направить противоположно спины атомов *а;* кроме того, есть еще взаимодействие b—b,ко­торое старается направить противоположно спины атомов b. Конечно, сделать все противоположным всему (а противополож­но b и а противоположно а и b противоположно b*)* невозможно. По-видимому, благодаря удаленности атомов *а* и присутствию атомов кислорода (с достоверностью мы не знаем, почему) ока­зывается, что взаимодействие *а—b* сильнее взаимодействий *а—а* и *b—b.* Словом, природа в этом случае воспользовалась ре­шением, в котором спины всех атомов b *параллельны друг другу,* а все атомы *а тоже параллельны друг другу,* но между собой эти две системы спинов *противоположны.* Такой распорядок благо­даря более сильному взаимодействию *а—b* соответствует наи­низшей энергии. В результате спины всех атомов *а* направлены вверх, а спины всех атомов *b —* вниз (может быть, конечно, и наоборот). Но если *магнитные моменты* атомов *а* и атомов *b не равны друг другу,* то создается картина, показанная на фиг. 37.13, *в:* материал может оказаться спонтанно намагни­ченным. При этом он будет ферромагнетиком, хотя и несколько слабее настоящего. Такие материалы называются *ферритами.* У них по очевидным причинам намагниченность насыщения не столь велика, как у железа, поэтому они полезны только при слабых магнитных полях. Но они обладают очень важным пре­имуществом — это изоляторы, т. е. ферриты являются *ферро­магнитными изоляторами.* Вихревые токи, создаваемые в них высокочастотными полями, очень малы, поэтому ферриты мож­но использовать, скажем, в микроволновых системах. Микро­волновые поля способны проникать внутрь таких непроводя­щих материалов, тогда как в проводниках типа железа этому препятствуют вихревые токи.

Существует еще один вид магнитных материалов, открытых совсем недавно,— это члены семейства со структурой ортосиликатов, называемых *гранатами.* Это тоже кристаллы, в ре­шетке которых содержатся два сорта металлических атомов; здесь мы снова сталкиваемся с ситуацией, когда оба сорта ато­мов можно заменять почти по желанию. Среди множества ин­тересующих нас составов есть один, который обладает ферромаг­нетизмом. В структуре граната он содержит атомы иттрия и железа и причина его ферромагнетизма весьма любопытна. Здесь снова по квантовой механике соседние спины противо­положны, так что это опять замкнутая система спинов, в ко­торой электронные спины ионов железа направлены в одну сторону, а электронные спины ионов иттрия — в противопо­ложную. Но атомы иттрия очень сложны. В их магнитный мо­мент большой вклад вносит *орбитальное* движение электронов. Вклад орбитального движения для иттрия *противоположен* вкладу спина, и, кроме того, он больше его. Таким образом, хотя квантовая механика, опираясь на свой принцип запрета, стремится направить *спины* ионов иттрия противоположно спинам ионов железа, результирующий магнитный момент ит­трия в результате орбитального эффекта оказывается *парал­лельным* спинам ионов железа. И соединение работает как на­стоящий ферромагнетик.

Другой интересный пример ферромагнетизма дают некото­рые редкоземельные элементы. Здесь мы встречаемся с еще боль­шими странностями в расположении спинов. Эти металлы не ферромагнетики в том смысле, что все спины в них параллель­ны, и не антиферромагнетики в том смысле, что спины сосед­них атомов противоположны. В этих кристаллах все спины *в одном слое* параллельны и лежат в плоскости слоя. В следую­щем слое все спины снова параллельны друг другу, но смотрят уже в несколько ином направлении. В следующем слое они тоже направлены в другую сторону и т. д. В результате вектор локального намагничивания (в слоях) меняется по спирали: магнитные моменты последовательных слоев поворачиваются при движении вокруг линии, перпендикулярной слоям. Инте­ресно попытаться проанализировать, что получается, когда к такой спирали прилагается поле, найти все скручивания и повороты, которые должны происходить со всеми этими атом­ными магнитиками. (Некоторые люди просто увлечены теориями подобных вещей!) В природе встречаются не только «плоские» спирали, но существуют еще случаи, когда направления маг­нитных моментов последовательных слоев образуют конус, так что у них есть не только спиральная компонента, но и одно­родная ферромагнитная компонента в том же направлении!

Магнитные свойства материалов на более высоком уровне, чем занимались мы с вами, очаровывают многих физиков. Пре­жде всего этим увлекаются люди практического склада, кото­рые любят придумывать способы улучшать разные вещи; им нравится изобретать более совершенные и интересные магнит­ные материалы. Открытие таких материалов, как ферриты, или их применение немедленно привело в восторг тех, кто выиски­вает новые хитрые пути сделать вещи совершеннее. Но есть еще люди, которые находят очарование в той ужасной сложности, которую природа создает на основе лишь нескольких фунда­ментальных законов. На основе одной и той же общей идеи природа от ферромагнетизма железа и его доменов дошла до антиферромагнетизма хрома, магнетизма ферритов и гранатов, до спиральной структуры редкоземельных элементов и шагает все дальше и дальше. До чего же приятно экспериментально открывать все эти странные явления, упрятанные в подобных особых веществах! А физикам-теоретикам ферромагнетизм по­дарил целый ряд интереснейших еще не решенных красивых проблем. Одна из них: почему вообще существует ферромагне­тизм? Другая — вывести статистику взаимодействующих спи­нов в идеальной решетке. Даже если пренебречь дополнитель­ными усложнениями, эти проблемы до сих пор не поддаются полному пониманию. Причина, по которой они так интересны,— удивительная простота постановки задачи: в правильной ре­шетке задано множество электронных спинов, взаимодействую­щих по такому-то и такому-то закону; что с ними в конце концов происходит? Поставить-то задачу было легко, а вот пол­ному анализу она не поддавалась многие годы. И хотя для тем­ператур, не слишком близких к точке Кюри, она была проана­лизирована довольно тщательно, теория внезапного перехода в точке Кюри до сих пор еще ждет своего решения.

Наконец, задача о поведении систем атомных магнитиков: и ферромагнетизм, и парамагнетизм, и ядерный магнетизм — исключительно полезные вещи для студентов-физиков старших курсов. Внешним магнитным полем на систему спинов можно воздействовать и так и сяк, поэтому можно придумать множе­ство фокусов с резонансами, процессами релаксации, спиновым эхом и другими эффектами. Эта задача служит прототипом мно­гих сложных термодинамических систем, с тем преимуществом, что в парамагнитных материалах положение обычно гораздо проще и исследователи с удовольствием ставят здесь экспери­менты и объясняют явления теоретически.

Мы заканчиваем наше изучение электричества и магнетизма. В гл. 1 (вып. 5) мы говорили о великом пути, пройденном со времен, когда древние греки наблюдали странное поведение янтаря и магнитного железняка. Но еще нигде в наших длин­ных и запутанных рассуждениях мы не объяснили, *почему, когда мы натираем кусок янтаря, на нем возникает заряд,* не объяснили мы и того, почему *намагничен природный магнит­ный железняк!* Вы можете возразить: «Нам просто не удалось получить правильного знака». Нет, дело обстоит гораздо хуже. Если бы мы *все-таки* получили правильный знак, по-прежнему остался бы вопрос: почему кусок магнитного железняка в земле оказался намагниченным? Конечно, существует магнитное поле Земли, но *откуда взялось это магнитное поле Земли?* Вот это­го-то на самом деле никто и не знает, и приходится довольство­ваться только некоторыми правдоподобными догадками. Так что, как видите, наша хваленая современная физика — сплош­ное надувательство: начали мы с магнитного железняка и ян­таря, а закончили тем, что не понимаем достаточно хорошо ни того, ни другого. Зато в процессе изучения мы *узнали* огромное количество удивительных и очень полезных для практики вещей!

***\* Вас может удивить, каким образом спины, которые должны быть направлены либо «вверх», либо «вниз», могут также быть направлены «вбок»! Это, конечно, правильно, но мне, право, не хотелось бы останавли­ваться на этом вопросе сейчас. Мы просто встанем на классическую точку зрения, представив себе атомные магнитики в виде магнитных диполей, ко­торые могут быть ориентированы и в боковом направлении. Чтобы понять, как в квантовой механике можно в одно и то же время квантовать как «вверх—вниз», так и «направо — налево», требуется поднакопить больше знаний.***

***\* Вместо В мы записали это уравнение через H=B-M/ε0c2, чтобы согласовать со сказанным в предыдущей главе. Если вам больше нравится, можете написать U=±|μ|Ba=±|μ|(В+λ'M/ε0с2), где λ'=λ-1. Это одно и то же.***

***Литература: Ch. Кittel, Introduction to Solid State Physics, 2nd ed., New York, 1956. (Имеется пере­вод: Ч. Киттель, Введение в физику твердого тела, Физматгиз, М., 1962.— Ред.)***

***Главa 38***

**УПРУГОСТЬ**

[**§ 1.****Зак****он** **Гука**](#а1)

[**§ 2.Одноро****дная д****еформация**](#а2)

[**§ 3. Кручение**  **ст****ержня; волны сдвига**](#а3)

[**§ 4.Изгибани****е бал****ки**](#а4)

[**§ 5.Продольны****й** **изгиб**](#а5)

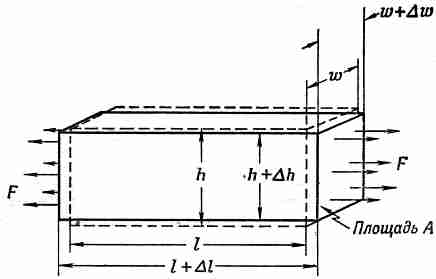
*Повторить:* гл. 47 (вып. 4) «Звук, волновое уравнение»

**§ 1. Закон Гука**

Теория упругости занимается поведением таких тел, которые обладают свойством восста­навливать свой размер и форму после снятия деформирующих сил. В какой-то степени этими упругими свойствами обладают все твердые тела. Если бы у нас было время заниматься этим предметом подольше, то нам пришлось бы рассмотреть множество вопросов: поведение напряженных материалов, законы упругости и общая теория упругости, атомный механизм, определяющий упругие свойства, и, наконец, ограничения на законы упругости, когда силы становятся настолько велики, что возникает пластическое течение и разрушение. Детальное рассмотрение всех этих вопросов потребовало бы гораздо больше времени, чем мы распола­гаем, поэтому кое от чего нам придется отка­заться. Например, мы не будем обсуждать воп­росы пластичности и ограничений на законы упругости. (Этого мы коснемся только очень кратко, когда у нас речь пойдет о дислокациях в металлах.) Мы не сможем также обсудить механизм упругости, так что наше исследова­ние не будет обладать той полнотой, к которой мы стремились в предыдущих главах. Основная цель лекции — познакомить вас с некоторыми способами обращения с такими практическими задачами, как, например, задача об изгибании бруска.

Если вы надавите на кусок материала, то материал «поддастся» — он деформируется. При достаточно малых силах относительное переме­щение различных точек материала пропорцио­нально силе. Такое поведение называется *уп­ругим.* Мы будем говорить только о таком упругом поведении. Сначала мы выпишем фундаментальный закон упругости, а затем применим его к нескольким различным си­туациям.

Предположим, что мы взяли прямоугольный брусок длиной *l,* шириной *w* и высотой *h* (фиг. 38.1).



*Фиг. 38.1. Растяжение бруска под действием однородной нагрузки.*

Если мы потянем за его конец с силой *F*, то его длина увеличится на Δ*l*. Во всех случаях мы будем предполагать, что изменение длины составляет малую долю от первоначальной. На самом деле материалы, подобные стали или дереву, разрушаются еще до того, как изменение длины достигнет нескольких процентов от первоначального значения. Опыты показывают, что для большого числа мате­риалов при достаточно малых удлинениях сила пропорцио­нальна удлинению

*F~*Δ*l.* (38.1)

Это соотношение известно как *закон Гука.*

Удлинение бруска Δl зависит и от его длины. Это можно про­демонстрировать следующими рассуждениями. Если мы скре­пим вместе два одинаковых бруска конец к концу, то на каж­дый будет действовать одна и та же сила и каждый из них удли­нится на Δl. Таким образом, удлинение бруска длиной *2l* бу­дет в два раза больше удлинения бруска того же поперечного сечения, но длиной *l*. Чтобы получить величину, полнее харак­теризующую сам материал и менее зависящую от формы образ­ца, будем оперировать отношением Δl/l (удлинение к перво­начальной длине). Это отношение пропорционально силе, но не зависит от *l*:

F~Δl/l(38.2)

Сила *F* зависит также от площади сечения бруска. Предпо­ложим, что мы поставили два бруска бок о бок. Тогда для дан­ного удлинения Δl мы должны приложить силу *F* к каждому бруску, или для комбинации двух брусков требуется вдвое большая сила. При данной величине растяжения сила должна быть пропорциональна площади поперечного сечения бруска *А.* Чтобы получить закон, в котором коэффициент пропорциональ­ности не зависит от размеров тела, мы для прямоугольного бруска будем писать закон Гука в виде

*F=YA(*Δ*l/l)* (38.3)

Постоянная *Y* определяется только свойствами природы ма­териала; ее называют *модулем Юнга.* (Обычно модуль Юнга обозначается буквой *Е,* но эту букву мы уже использовали для электрического поля, для энергии и для э. д. с., так что теперь лучше взять другую.)

Силу, *действующую на единичной площади,* называют *на­пряжением,* а удлинение участка, отнесенное к его длине, т. е. *относительное* удлинение называют *деформацией.* Уравне­ние (38.3) можно переписать следующим образом;

F/A =YXΔl/l. (38.4)

Напряжение=(Модуль Юнга)X(Деформация).

При растяжении, подчиняющемуся закону Гука, возникает еще одно осложнение: если брусок материала *растягивается* в одном направлении, то под прямым углом к растяжению он *сжимается.* Уменьшение толщины пропорционально самой толщине *w* и еще отношению Δl/l*.* Относительное боковое сжатие одинаково как для ширины, так и для его высоты и обычно за­писывается в виде

C:\Мои документы\gray.jpg

где постоянная σ характеризует новое свойство материала и называется *отношением Пуассона.* Это число положительное до знаку, по величине меньше 1/2. (То, что постоянная о в об­щем случае должна быть положительной, «разумно», но ниотку­да не следует, что она *должна* быть такой.)

Две константы *Y* и σ полностью определяют упругие свой­ства *однородного изотропного* (т. е. некристаллического) мате­риала. В кристаллическом материале растяжение и сокращение в разных направлениях может быть различным, поэтому и упру­гих постоянных может быть гораздо больше. Временно мы ог­раничим наши обсуждения однородными изотропными материа­лами, свойства которых могут быть описаны постоянными σ и Y. Как обычно, существует множество способов описания свойств.

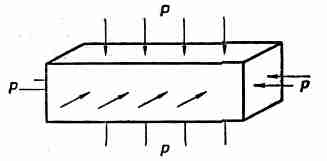
Некоторым, например, нравится описывать упругие свойст­ва материалов другими постоянными. Но таких постоянных всегда берется две, и они могут быть связаны с нашими σ и Y.

Последний общий закон, который нам нужен,— это принцип суперпозиции. Поскольку оба закона (38.4) и (38.5) линейны в отношении сил и перемещений, то принцип суперпозиция будет работать. Если при одном наборе сил вы получаете неко­торое дополнительное перемещение, то результирующее пере­мещение будет суммой перемещений, которые бы получились при независимом действии этих наборов сил.

Теперь мы имеем все необходимые общие принципы: прин­цип суперпозиции и уравнения (38.4) и (38.5), т. е. все, что нуж­но для описания упругости. Впрочем, с таким же правом можно было заявить: у нас есть законы Ньютона, и это все, что нужно для механики. Или, задавшись уравнениями Максвелла, мы имеем все необходимое для описания электричества. Оно, ко­нечно, так; из этих принципов вы действительно можете полу­чить почти все, ибо ваши теперешние математические возмож­ности позволяют вам продвинуться достаточно далеко. Но мы все же рассмотрим лишь некоторые специальные приложения.

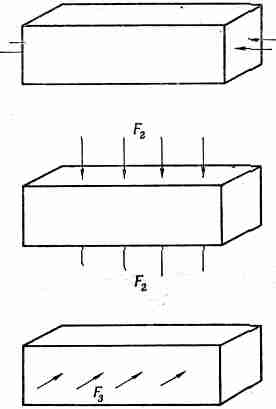
**§ 2. Однородная деформация**

В качестве первого примера посмотрим, что происходит с пря­моугольным бруском при однородном гидростатическом сжатии. Давайте поместим брусок в резервуар с водой. При этом воз­никнет сила, действующая на каждую грань бруска и пропор­циональная его площади (фиг. 38.2).



*Фиг. 38.2. Брусок под действием равномерного гидростатического давления.*

Поскольку гидростатиче­ское давление однородно, то *напряжение* (сила на единичную площадь) на каждой грани бруска будет одним и тем же. Прежде всего найдем изменение длины бруска. Его можно рассматри­вать как сумму изменений длин, которые происходили бы в трех независимых задачах, изображенных на фиг. 38.3.



*Фиг. 38.3. Гидростатическое давление равно суперпозиции трех сжатий.*

***Задача* 1***.* Если мы приложим к концам бруска давление *р,* то деформация сжатия будет отрицательна и равна *p/Y:*

C:\Мои документы\gray.jpg

***Задача* 2***.* Если мы надавим на горизонтальные грани бруска, то деформация по высоте будет равна -*p/Y,* а соответствующая деформация в бо­ковом направлении будет +σ*p/Y.* Мы получаем

C:\Мои документы\gray.jpg

***Задача* 3***.* Если мы прило­жим к сторонам бруска дав­ление *р,* то деформация дав­ления снова будет равна *p/Y,* но теперь нам нужно определить деформацию длины. Для этого боковую деформа­цию нужно умножить на -σ. Боковая деформация равна

C:\Мои документы\gray.jpg

так что

C:\Мои документы\gray.jpg

Комбинируя результаты этих трех задач, т. е. записывая Δl как δl1+Δl2+Δl3, получаем

C:\Мои документы\gray.jpg

Задача, разумеется, симметрична во всех трех направлениях, поэтому

C:\Мои документы\gray.jpg

Интересно также найти изменение *объема* при гидроста­тическом давлении. Поскольку *V=lwh,* то для малых пере­мещений можно записать

C:\Мои документы\gray.jpg

Воспользовавшись (38.6) и (38.7), мы имеем

C:\Мои документы\gray.jpg

Имеются любители назы­вать ΔV/V *объемной де­формацией* и писать

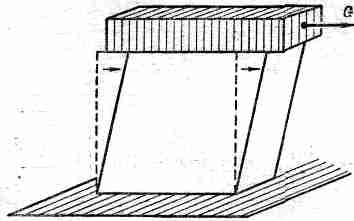
C:\Мои документы\gray.jpg

*Объемное напряжение р* (гидростатическое давление) пропор­ционально вызванной им объемной деформации — снова закон Гука. Коэффициент *К* называется *объемным модулем* и связан с другими постоянными выражением

C:\Мои документы\gray.jpg

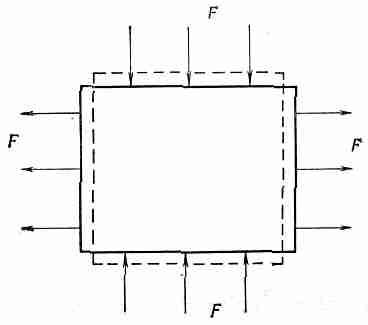
Поскольку коэффициент *К* представляет некоторый практиче­ский интерес, то во многих справочниках вместо *Y* и σ приво­дятся У и *К.* Но если вам нужно знать *а,* то вы всегда можете получить это значение из формулы (38.9). Из этой формулы видно также, что коэффициент Пуассона σ должен быть меньше 1/2. Если бы это было не так, то объемный модуль *К* был бы от­рицательным и материал при увеличении давления расширялся бы. Это позволило бы добывать механическую энергию из лю­бого кубика, т. е. это означало бы, что кубик находится в неу­стойчивом равновесии. Если бы он начал расширяться, то рас­ширение продолжалось бы само по себе с высвобождением энергии.

Посмотрим, что получится, если мы приложим к чему-то «косое» напряжение. Под косым, или скалывающим, напряже­нием мы подразумеваем такое воздействие, как показано на фиг. 38.4.



*Фиг. 38.4. Однородный сдвиг.*

В качестве предварительной задачи посмотрим, ка­кова будет деформация *кубика* под действием сил, показанных на фиг. 38.5.



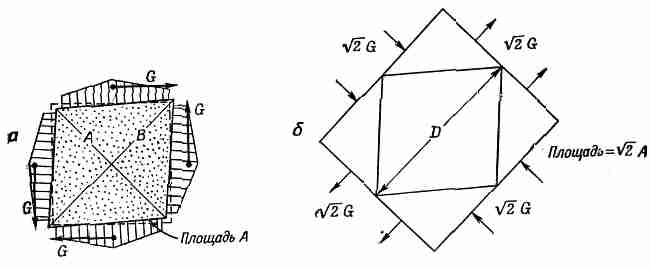
Фиг. 38.5. Действие сжи­мающих сил, давящих на вершину и основание, и рав­ных им растягивающих сил с двух сторон.

Снова можно разделить эту задачу на две: вер­тикальное давление и горизонтальное растяжение. Обозначая через *А* площадь грани кубика, мы получаем для изменения горизонтальной длины

C:\Мои документы\gray.jpg

Изменение же высоты по вертикали равно просто тому же выражению с обратным знаком.

Предположим те­перь, что мы имеем тот же самый кубик, и под­вергнем его действию сдвиговых сил, показанных на фиг. 38.6, *а.*



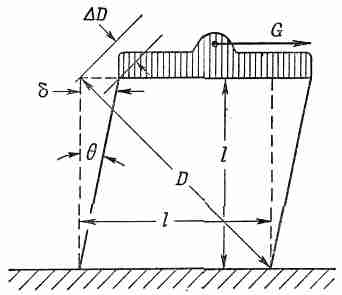
*Фиг. 38.6. Две пары сил сдвига (а) создают то же самое напряжение, что и сжимающие* = *растягивающие силы (б).*

Заметим те­перь, что все силы должны быть равными, ибо на тело не должен действовать никакой момент сил и оно должно находиться в равновесии. (Подобные силы должны дей­ствовать также и в случае, изображенном на фиг. 38.4, поскольку кубик находится в равновесии. Они обеспечиваются тем, что кубик «приклеен» к столу.) При таких условиях го­ворят, что кубик находится в состоянии чистого сдвига. Но об­ратите внимание, что если мы разрежем кубик плоскостями под углом 45°, скажем, вдоль диагонали *А* на фиг. 38.6, а, то полная сила, действующая в этой плоскости, *нормальна* к ней и равна √2G.Площадь, на которой действует эта сила, равна √2A;следовательно, напряжение, нормальное к этой плоско­сти, будет просто *G/A.* Точно так же если взять плоскость, наклоненную под углом 45° в другую сторону, т. е. по диа­гонали *В,* то мы увидим, что на ней действует нормальное сдавливающее напряжение, равное -*G/A.* Из этого ясно, что *напряжение* при «чистом сжатии» эквивалентно комби­нации растягивающего и сжимающего напряжений, направлен­ных под прямым углом друг к другу и под углом 45° к перво­начальным граням кубика. Внутренние напряжения и деформа­ции будут такими же, как и в большом кубике материала под действием сил, показанных на фиг. 38.6, *б.* Но эту задачу мы уже решили. Изменение длины диагонали задается уравнением (38.10):

C:\Мои документы\gray.jpg

(Одна диагональ сокращается, а другая удлиняется.)

Часто деформацию сдвига удобно описывать с помощью угла «искажения» кубика θ, показанного на фиг. 38.7.



*Фиг. 38.7. Напряжение сдвига* θ *равно 2ΔD/D.*

Из геометрии фигуры вы видите, что горизонтальный сдвиг б верхнего края равен √*2ΔD,* так что

C:\Мои документы\gray.jpg

Напряжение сдвига *g* определяется как отношение тангенциаль­ной силы, действующей на грань, к площади грани *g=G/A.* Воспользовавшись уравнением (38.11), мы из (38.12) получаем

C:\Мои документы\gray.jpg

Или, если написать это в форме

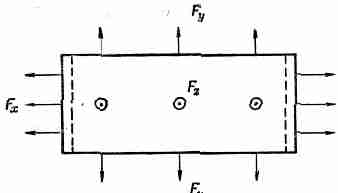
Напряжение = ПостояннаяXДеформация

g=μθ. (38.13)

Коэффициент пропорциональности μназывается *модулем сдвига* (или иногда коэффициентом жесткости). Вот как он выражается через Y и σ:

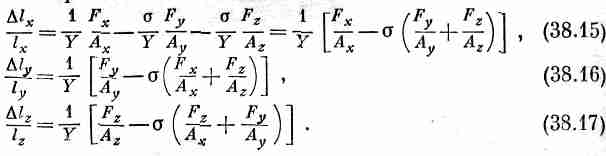
C:\Мои документы\gray.jpg

Кстати, модуль сдвига дол­жен быть положительным, иначе мы бы могли полу­чить энергию от самопро­извольного сдвига кубика. Из уравнения (38.14) очевидно, что постоянная а должна быть больше -1. Теперь мы знаем, что *о* заключена между -1 и 1/2, но на практике, однако, она всегда больше нуля. В ка­честве последнего примера состояний подобного типа, когда напряженность постоянна по всему материалу, давайте рассмот­рим задачу о бруске, который растягивается и в то же время *закреплен* таким образом, что боковое сокращение невозможно. (Технически немного легче сжимать брусок и сдерживать бока его от «распирания», но в сущности — это та же самая за­дача.) Что при этом происходит? На брусок должны действо­вать боковые силы, которые препятствуют изменению его тол­щины,— силы, которых мы не знаем непосредственно, но ко­торые следует вычислить. Эта задача того же самого сорта, что мы решали, но только с немного другой алгеброй. Представьте себе силы, действующие на все три стороны, как это показано на фиг. 38.8.



Фиг. 38.8. Растяжение без сокращения бокового размера.

Мы вычислим изменение размеров и подберем та­кие поперечные силы, чтобы ширина и высота оставались по­стоянными. Следуя обычным рассуждениям, мы получаем для трех напряжений



Но поскольку по условию Δlу и Δl*z* равны нулю, то уравнения (38.16) и (38.17) дают два соотношения, связыва­ющие *Fy* и *Fz* с *Fx.* Совместно решая их, найдем

C:\Мои документы\gray.jpg

а подставляя (38.18) в (38.15), получаем

C:\Мои документы\gray.jpg

Это соотношение вы часто можете встретить «перевернутым» и с преобразованным квадратичным полиномом по *σ,* т. е.

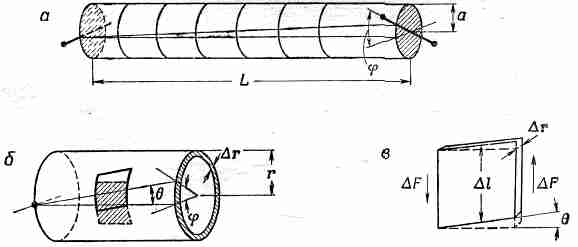
C:\Мои документы\gray.jpg

Когда вы удерживаете бока, модуль Юнга умножается на не­которую сложную функцию σ. Из уравнения (38.19) можно сразу же увидеть, что множитель перед Y всегда больше едини­цы. Растянуть брусок, когда его бока удерживаются, гораздо труднее. Это означает также, что брусок *становятся жестче,* когда его боковые стороны закреплены, нежели когда они свободны.

**§ 3. Кручение стержня; волны сдвига**

Обратимся теперь к более сложному примеру, когда различ­ные части материала напряжены по-разному. Рассмотрим скру­ченный стержень — скажем, приводной вал какой-то машины или подвеску из кварцевой нити, применяемую в точных при­борах. Из опытов с маятником кручения вы, по-видимому, знае­те, что *момент сил,* действующий на закручиваемый стержень, пропорционален *углу,* причем константа пропорциональности, очевидно, зависит от длины стержня, его радиуса и свойств ма­териала. Но каким образом — вот в чем вопрос? Теперь мы в состоянии ответить на него: просто нужно немного разобраться в геометрии.

На фиг. 38.9, *а* показан цилиндрический стержень, облада­ющий длиной *L* и радиусом а, один из концов которого закручен на угол ϕ по отношению к другому.



Фиг. 38.9. Кручение цилиндрического стержня (а), кручение цилин­дрического слоя (б) и сдвиг любого маленького кусочка в слое (в).

Если мы хотим связать де­формацию с тем, что уже известно, то стержень можно предста­вить состоящим из множества цилиндрических оболочек и выяснить, что происходит в каждой из этих оболочек. Начнем с рассмотрения тонкого короткого цилиндра радиусом r(мень­шего, чем в) и толщиной Δr, как показано на фиг. 38.9, *б.* Если теперь посмотреть на кусочек внутри этого цилиндра, который первоначально был маленьким квадратом, то можно заметить, что он превратился в параллелограмм. Каждый элемент ци­линдра сдвигается, а угол сдвига θ равен

θ=rϕ/L.

Поэтому напряжение сдвига *g* в материале будет [из уравне­ния (38.13)]

C:\Мои документы\gray.jpg

Напряжение среза равно тангенциальной силе ΔF, дейст­вующей на конец квадратика, поделенной на его площадь Δl/Δr (см. фиг. 38.9, б):

g=ΔF/ΔlΔr.

Сила ΔF, действующая на конец такого квадратика, создает относительно оси стержня момент сил Δτ, равный

Δτ=rΔF=rgΔlΔr. (38.22)

Полный момент τ равен сумме таких моментов по всему периметру цилиндра. Складывая достаточное число таких кусков так, чтобы все Δl составляли 2πr, находим, что полный момент сил для *пустотелой трубы* равен

гg(2πr)Δr. (38.23)

Или, используя уравнение (38.21),

C:\Мои документы\gray.jpg

Мы получили, что жесткость τ/ϕ пустотелой трубы по отноше­нию к кручению пропорциональна кубу радиуса r и толщине Δr и обратно пропорциональна его длине *L.*

Теперь представьте себе, что стержень сделан из целой се­рии таких концентрических труб, каждая из которых закруче­на на угол ϕ (хотя внутренние *напряжения* в каждой трубе раз­личны). Полный момент равен сумме моментов, требуемых для скручивания каждой оболочки, так что для *твердого* стержня

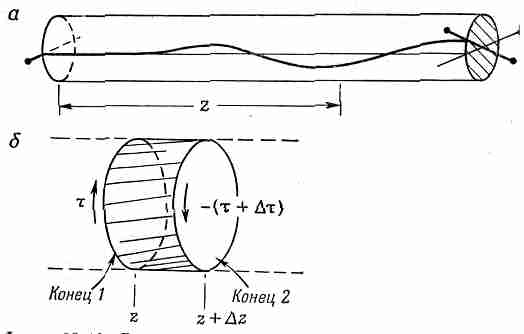
C:\Мои документы\gray.jpg

где интеграл берется от 0 до а — радиуса стержня. После ин­тегрирования получаем

C:\Мои документы\gray.jpg

Если закручивать стержень, то его момент оказывается про­порциональным углу и *четвертой степени* диаметра: стержень вдвое большего радиуса в шестнадцать раз жестче относительно кручения.

Прежде чем расстаться с кручением, рассмотрим применение теории к одной интересной задаче — волнам кручения. Возьмем длинный стержень и неожиданно закрутим один его конец; вдоль стержня, как показано на фиг. 38.10, *а,* пойдет волна кручения.



Фиг. 38.10. Волна кручения в стержне (а) и элемент объема стержня (б).

Это явление более интересно, нежели простое стати­ческое скручивание. Посмотрим, можем ли мы понять, как это происходит.

Пусть *z —* расстояние от некоторой точки до основания стержня. Для статического закручивания момент сил на всем протяжении стержня один и тот же и пропорционален ϕ*/L —* полному углу вращения на полную длину. Но в нашей задаче важна местная деформация кручения, которая, как вы сразу поймете, равна *дϕ/дz.* Если кручение вдоль стержня неравно­мерное, то уравнение (38.25) следует заменить таким:

C:\Мои документы\gray.jpg

Посмотрим теперь, что же происходит с элементом длины Δz, который показан в увеличенном масштабе на фиг. 38.10, *б.* На конце *1* маленького отрезка стержня действует момент τ(z), а на конце *2—* другой момент сил τ(z+Δz). Если величина Δz достаточно мала, то можно воспользоваться разложением в ряд Тэйлора и, сохранив только два члена, написать

C:\Мои документы\gray.jpg

Полный момент сил Δτ, действующий *на* маленький от­резок стержня между z и Δz, равен разности τ(z) и

τ(z+Δz),

или

Δτ=(*дτ*/*д*z)Δz.

Дифференцируя уравнение (38.26), получаем

C:\Мои документы\gray.jpg

Действие этого полного момента должно вызвать угловое ускорение отрезка стержня. Масса его равна

C:\Мои документы\gray.jpg

где ρ — плотность материала. В гл. 19 (вып. 2) мы нашли, что момент инерции кругового цилиндра равен mr2/2; обо­значая момент инерции нашего отрезка через Δl, получаем

C:\Мои документы\gray.jpg

Закон Ньютона говорит нам, что момент силы равен произ­ведению момента инерции на угловое ускорение, или

C:\Мои документы\gray.jpg

# Собирая теперь все воедино, находим

C:\Мои документы\gray.jpg

или

C:\Мои документы\gray.jpg

Вы, должно быть, уже узнали, что это такое: это одномерное волновое уравнение. Мы получили, что волны кручения распространяются по стержню со скоростью

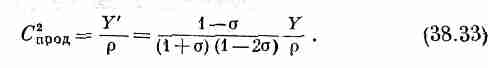
C:\Мои документы\gray.jpg

Чем *плотнее* стержень при одной и той же жесткости, тем *мед­леннее* движется волна, а чем он жестче, тем волна бежит бы­стрее. Скорость ее *не зависит* от диаметра стержня.

Волны кручения представляют частный случай *волн сдвига.* Волны сдвига в общем случае — это такие волны, при которых деформация не изменяет *объема* любой части материала. В вол­нах кручения мы сталкиваемся с особым распределением нап­ряжений сдвига — они распределены по кругу. Но волны при любом распределении напряжений сдвига будут распростра­няться с одной и той же скоростью, которая определяется фор­мулой (38.32). Сейсмологи, например, обнаружили, что такие волны сдвига распространяются и внутри Земли.

В мире упругих явлений возможен и другой сорт волн внут­ри твердого материала. Если вы толкнете что-нибудь, то можете возбудить «продольные» волны, так называемые волны «сжа­тия». Они подобны звуковым волнам в воздухе или в воде, т. е. перемещение вещества в них происходит в ту же сторону, что и распространение волны. (На поверхности упругого тела мо­гут распространяться и другие типы волн, называемые «вол­нами Рэлея». Деформация в них ни продольная, ни поперечная. Однако у нас нет времени говорить о них подробно.)

Раз уж мы коснулись вопроса о волнах, то какова скорость волн чистого сжатия в *большом* твердом теле, подобном Земле? Я сказал в «большом», ибо скорость звука в массивном теле отлична от скорости, свойственной, скажем, тонкому стерж­ню. Под массивным телом я подразумеваю тело, поперечные раз­меры которого много больше длины волны звука. Поэтому, нажимая на такой объект, можно обнаружить, что он не «раз­дается» в стороны — он может сжиматься только в одном нап­равлении. К счастью, однако, мы уже разобрали специаль­ный случай сжатия «сдавленного» упругого материала, а в гл. 47 (вып. 4) мы познакомились еще со скоростью звука в газе. Рас­суждая так же, как и выше, вы можете убедиться, что скорость звука в твердом теле равна √(Y'/ρ), где Y' — «продольный мо­дуль», т. е. давление, деленное на относительное изменение длины (для случая «сдавленного» стержня). Равно это просто отношению Δ*l/l* к *F/A,* полученному нами в уравнении (38.20). Таким образом, скорость продольных волн определяется выра­жением



Поскольку значение σ заключено между 0 и 1/2, то модуль сдвига μ меньше модуля Юнга *Y,* a *Y',* кроме того, больше Y, так что

μ<*Y<Y'.*

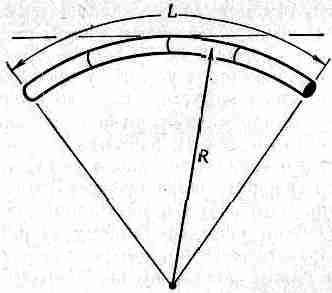
Это означает, что продольные волны распространяются быстрее, чем волны сдвига. Один из наиболее точных способов определе­ния упругих постоянных вещества дает измерение плотности материала и скоростей двух сортов волн. Из этой информации можно получить как Y*,* так и σ. Кстати, именно измеряя раз­ность во времени прихода двух сортов волн от землетрясения, сейсмологи только по сигналам, принятым одной станцией, способны установить расстояние до эпицентра.

**§ 4. Изгибание балки**

Разберем теперь другой практический вопрос — изгибание балки, стержня или бруска. Чему равны силы, необходимые для изгибания балки произвольного поперечного сечения?

Мы определим эти силы для балки круглого сечения, но ответ будет пригоден для балки любой формы. Чтобы сберечь время, мы кое-где упростим дело, так что теория, которую мы разовьем, будет только приближенной. Наши результаты верны лишь при том условии, что радиус изгиба­ния много больше толщины балки.

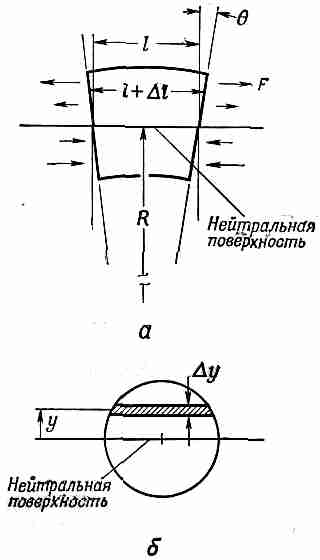
Представьте, что вы ухватились за оба конца прямой балки и согнули ее в виде кривой, похожей на ту, что изображена на фиг. 38.11.



Фиг. 38.11. Изогнутая балка.

Что же происходит внутри балки? Раз она искрив­лена, значит, материал на внутренней стороне сгиба сжат, а на внешней стороне растянут. Но имеется какая-то поверхность, более или менее параллельная оси балки, которая и не сжата, и не растянута. Называется она *нейтральной* поверхностью. По-видимому, эта поверхность проходит где-то «посредине» поперечного сечения. Можно показать (но я не буду этого здесь делать), что для небольшого изгиба простой балки нейтральная поверхность проходит через «центр тяжести» поперечного се­чения. Но это справедливо только для «чистого» сгиба, т. е. когда балка не растягивается и не сжимается как целое.

При чистом сгибе тонкий поперечный отрезок балки возму­щен (фиг. 38.12, а).



*Фиг. 38.12. Маленький отрезок изогнутой балки (а) и поперечное сечение балки (б).*

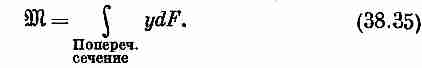
Материал под нейтральной поверхностью испытывает деформацию сжатия, которая *пропорциональна рас­стоянию* от нейтральной поверхности, а материал над ней ра­стянут тоже пропорционально расстоянию от нейтральной по­верхности. Таким образом, продольное *удлинение Δl* пропорцио­нально высоте *у.* Константа пропорциональности равна просто длине *l,* деленной на радиус кривизны балки (см. фиг. 38.12):

*Δl/l=y/R.*

Так что напряжение, т. е. сила, действующая на единичную площадь в некоторой маленькой полоске вблизи *у,* тоже про­порциональна расстоянию от нейтральной поверхности

C:\Мои документы\gray.jpg

Теперь рассмотрим те *си­лы,* которые привели бы к подобной деформации. Силы, действующие на маленький отрезок, изображенный на фиг. 38.12, показаны на том же рисунке. Если мы возьмем любое поперечное сечение, то действующие на нем силы направлены в одну сторону выше нейтральной поверхно­сти и в другую — ниже ее. Получается пара сил, кото­рая создает «изгибающий мо­мент»C:\Мои документы\gray.jpg, под которым мы понимаем момент силы относительно нейтральной линии. Интегрируя произведение силы на расстояние от нейтральной поверхности, можно вычислить полный момент на одной из граней отрезка фиг. 38.12:



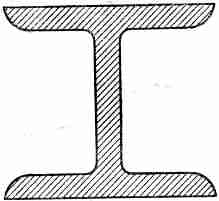
Согласно (38.34), *dF=Y(y/R)dA,* так что

C:\Мои документы\gray.jpg

Но интеграл от *y2dA* можно назвать «моментом инерции» гео­метрического поперечного сечения относительно горизонталь­ной оси, проходящей через его «[центр масс](#прим1)»; мы будем обоз­начать его через *I*, т. е.

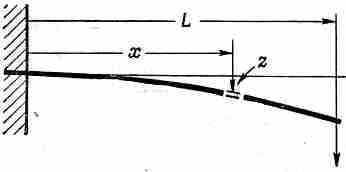


Уравнение (38.36) дает нам соот­ношение между изгибающим момен­том  и кривизной балки 1/R. «Жесткость» балки пропорциональна Y и моменту инерции *I*. Другими словами, если вы хотите какую-то балку, скажем из алюминия, сделать как можно жестче, то вы должны как можно больше вещества поме­стить как можно дальше от оси, относительно которой берется момент инерции. Но этого нельзя доводить до предела, ибо тогда балка не будет искривляться так, как мы предположили: она согнется или скрутится и снова станет слабее. Вот почему каркасные балки делают в форме буквы I или Н (фиг. 38.13).



Фиг. 38.13. Двутавровая балка.

В качестве примера применения нашего уравнения (38.36) для балки вычислим отклонение консольной балки под дейст­вием сосредоточенной силы W, действующей на ее свободный конец (фиг. 38.14).



*Фиг. 38.14. Консольная балка с нагрузкой на конце.*

(Консольная балка закреплена одним концом, который вмурован в стенку.) Какая же тогда будет форма балки? Обозначим отклонение на расстоянии *х* от зак­репленного конца через z; мы хотим найти *z(x).* Будем вычис­лять только малые отклонения. Как вы знаете из курса мате­матики, кривизна 1/R любой кривой *z(x)* задается выражением

C:\Мои документы\gray.jpg

Нас интересуют только малые изгибы (обычная вещь в ин­женерных конструкциях), поэтому квадратом производной *(dz/dx)2* можно пренебречь по сравнению с единицей и считать

C:\Мои документы\gray.jpg

Нам нужно еще знать изгибающий момент . Он является функцией от *х,* так как в любом поперечном сечении он равен моменту относительно нейтральной оси. Весом самой балки пренебрежем и будем учитывать только силу *W,* действующую вниз на свободный ее конец. (Если хотите, можете сами учесть ее вес.) При этом изгибающий момент на расстоянии *х* равен

C:\Мои документы\gray.jpg

ибо это и есть момент сил относительно точки *х,* с которым действует груз *W,* т. е. груз, который должен поддерживать балку. Получаем

C:\Мои документы\gray.jpg

или

C:\Мои документы\gray.jpg

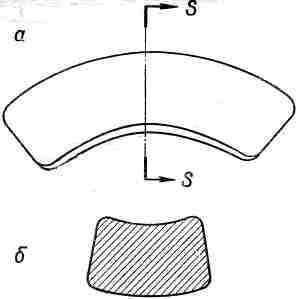
Это уравнение можно проинтегрировать без всяких фокусов и получить

C:\Мои документы\gray.jpg

воспользовавшись предварительно нашим предположением, что z(0)=0 и что *dz/dx* в точке x=0 тоже равно нулю. Это и есть граничные условия. А отклонение конца будет

C:\Мои документы\gray.jpg

т, е. отклонение возрастает пропорционально кубу длины балки. При выводе нашей приближенной теории мы предполагали, что при изгибании поперечное сечение бруска не изменяется. Когда толщина бруска мала по сравнению с радиусом кривизны, поперечное сечение изменяется очень мало и все отлично. Однако в общем случае этим эффектом пренебречь нельзя — согните пальцами канцелярскую резин­ку и вы сами убедитесь в этом. Если первоначально попереч­ное сечение было прямоуголь­ным, то, согнув резинку, вы уви­дите, как она выпирает у основания (фиг. 38.15).

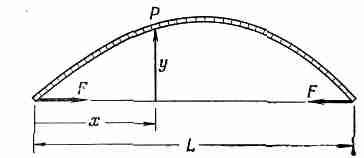


Фиг. 38.15. Согнутая резинка (а) и ее поперечное сечение (б).

Это получается потому, что, согласно отноше­нию Пуассона, при сжатии основания материал «раздается» вбок. Резинку очень легко согнуть или растянуть, но она несколько напоминает жидкость в том отношении, что изменить ее *объем* очень трудно. Это и сказывается при сгибании резинки. Для несжимаемых материалов отношение Пуассона было бы точно равно 1/2, для резинки *те* оно близко к этому числу.

**§ 5. Продольный изгиб**

Теперь воспользуемся нашей теорией, чтобы понять, что про­исходит при продольном изгибе бруска, опоры или стержня. Рассмотрим то, что изображено на фиг. 38.16.



Фиг. 38.16. Продольно изогну­тая балка.

Здесь стержень, обычно прямой, удерживается в согнутом виде двумя проти­воположными силами, давящими на его концы. Найдем форму стержня и *величину сил,* действующих на концы.

Пусть отклонение стержня от прямой линии между концами будет *у(х),* где *х —* расстояние от одного конца. Изгибающий момент  в точке *Р* на рисунке равен силе *F,* умноженной на плечо, перпендикулярное направлению *у:*

C:\Мои документы\gray.jpg

Воспользовавшись выражением для момента (38.36), имеем

C:\Мои документы\gray.jpg

При малых отклонениях можно считать 1*/R=-d2y/dx2* (от­рицательный знак выбран потому, что кривизна направлена вниз). Отсюда

C:\Мои документы\gray.jpg

т. е. появилось дифференциальное уравнение для синуса. Таким образом, для *малых* отклонений кривая такого про­дольно изогнутого стержня представляет синусоиду. «Длина волны» λ. этой синусоиды в два раза больше расстояния *L* между концами. Если изгиб невелик, она просто равна уд­военной длине неизогнутого стержня. Таким образом, получается кривая

C:\Мои документы\gray.jpg

Беря вторую производную, находим

C:\Мои документы\gray.jpg

Сравнивая это с (38.45), видим, что сила равна

C:\Мои документы\gray.jpg

Для малого продольного изгиба сила *не зависит от перемеще­ния у!*

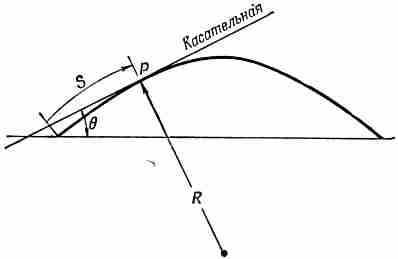
Физически же получается вот что. Если сила *F* меньше опре­деляемой уравнением (38.46), то никакого продольного изгиба не происходит. Но если она хоть немного *больше* этой силы, то балка внезапно и очень сильно согнется, т. е. под действием сил, превышающих критическую величину π*2YI/L2* (часто назы­ваемую «силой Эйлера»), балка будет «гнуться». Если на вто­ром этаже здания разместить такой груз, что нагрузка на под­держивающие колонны превысит силу Эйлера, то здание рух­нет. Другая область, где очень важны продольно изгибающие силы,— это космические ракеты. С одной стороны, ракета дол­жна выдерживать свой вес на стартовой площадке и вынести напряжения во время ускорения, а с другой — очень важно свести вес всей конструкции до минимума, чтобы полезная на­грузка и полезная мощность двигателей были как можно больше.

Фактически превышение силы Эйлера вовсе не означает, что после этого балка полностью разрушится. Когда отклонение ста­новится большим, сила благодаря члену *(dz/dx)2* в уравнении (38.38), которым мы пренебрегли, будет на самом деле больше вычисленной. Чтобы найти силы при большом продольном изги­бании стержня, мы должны вернуться к точному уравнению (38.44), которое получалось до использования приближенной связи между *R* и y.

Уравнение (38.44) имеет довольно простые [геометрические свойства](#прим2). Решается оно немного сложнее, но зато гораздо интереснее. Вмес­то того чтобы описывать кривую через *х* и *у,* можно воспользовать­ся двумя новыми переменными:

*S* — расстоянием вдоль кривой и

θ— наклоном касательной к кри­вой (фиг. 38.17.)



*Фиг. 38.17. Координа­ты кривой продольно изогнутой балки S и θ*.

Тогда кривизна будет равна скорости изменения угла с расстоянием

C:\Мои документы\gray.jpg

Поэтому точное уравнение (38.44) можно записать в виде

C:\Мои документы\gray.jpg

После взятия производной этого уравнения по *S* и замены *dy/dS* на sinθ получим

C:\Мои документы\gray.jpg

[Если углы θ малы, то мы снова приходим к уравнению (38.45), стало быть здесь все в порядке.

Не знаю, можете ли вы еще удивляться, но уравнение (38.47) получилось в точности таким же, как и для колебаний маятника с большой амплитудой (разумеется, с заменой *F/YI* другой постоянной). Еще раньше, в гл. 9 (вып. 1), мы узнали, как нахо­дить решение такого уравнения [численным методом](#прим3). В ответе вы получите очаровательную кривую. На фиг. 38.18 показаны три кривые для разных значений постоянной *F/YI.*

***\* Кстати, точно такое же уравнение возникает и в других физических ситуациях: например, в мениске на поверхности жидкости, заключенной между двумя параллельными стенками, а поэтому можно воспользоваться тем же самым геометрическим рассмотрением.***

***\* Решение его можно выразить также через особые функции, называе­мые «эллиптическими функциями Якоби», которые когда-то раз навсегда были вычислены и протабулированы.***

***\* Это и есть момент инерции пластинки единичной плотности и с единичной площадью сечения***

# Глава 39

[**УПРУГИЕ МАТЕРИА****ЛЫ**](#прим1)

[**§ 1.Тен****зор дефор****мации**](#a1)

[**§ 2.Тенз****ор у****пругости**](#a2)

[**§ З. Дв****ижен****ия в** **упругом теле**](#a3)

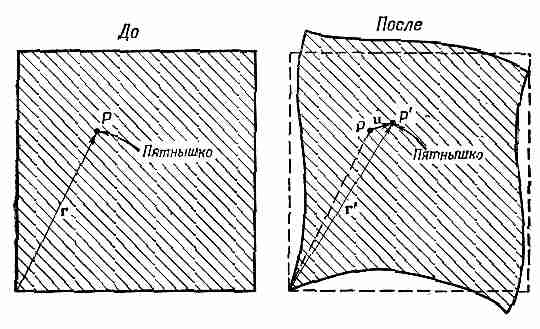
[**§ 4. Неупру****гое п****о****ведение**](#a4)

[**§ 5. Вычис****лени****е упруг****их постоянных**](#a5)

**§ 1. Тензор деформации**

В предыдущей главе мы говорили о возму­щениях упругих тел в простых случаях. В этой главе мы посмотрим, что может происходить внутри упругого материала в *общем случае.* Как описать условия напряжения и деформа­ции в большом куске желе, скрученном и сжа­том каким-то очень сложным образом? Для этого необходимо описать *локальную деформацию* в каждой точке упругого тела, а это можно сде­лать, задав в ней набор шести чисел — компо­нент симметричного тензора. Ранее (в гл. 31) мы говорили о тензоре напряжений, теперь же нам потребуется тензор деформации.

Предположим, что мы взяли недеформиро­ванный материал и, прикладывая напряжение, наблюдаем за движением маленького пятныш­ка примеси, попавшей внутрь. Пятнышко, которое вначале находилось в точке *Р* и имело положение г=(x, *у,* z), передвигается в новую точку *Р',* т. е. в положение r'=*(х', у',* z'), как это показано на фиг. 39.1.



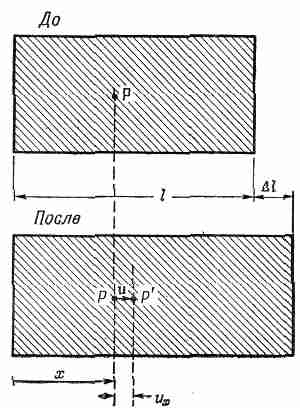
*Фиг. 39.1. Пятнышко примеси в материале из точки Р недеформированного кубика после деформации пере­мещается в точку Р'.*

Мы будем обозначать через и вектор перемещения из точки *Р* в точ­ку *Р',* т. е.

**u = r'-r.** (39.1)

Перемещение и зависит, конечно, от точки *Р,* из которой оно выходит так, что и есть векторная функция от г или от *(х, у, z).*

Сначала рассмотрим простейший случай, ког­да деформация по всему материалу постоянна, т. е. то, что называется *однородной деформацией.* Предположим, например, что мы взяли балку из како­го-то материала и равномерно ее растянули. Иначе говоря, мы просто равномерно изменили ее размер в одном направле­нии, скажем в направлении оси *х* (фиг. 39.2).



*Фиг. 39.2. Однородная деформация растяжения.*

Перемещение *ux* пятнышка с координатой *х* пропорционально самому *х.*

Действительно,

C:\Мои документы\gray.jpg

Мы будем записывать *ux* следующим образом:

*иx=еххх.*

Разумеется, константа пропорциональности *ехх—* это то же, что наше старое отношение Δl/l. (Скоро вы увидите, почему нам потребовался двойной индекс.)

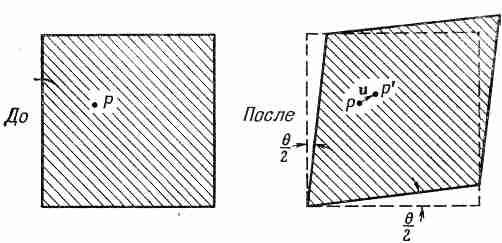
Если же деформация неоднородна, то связь между *х* и *ux* в материале будет изменяться от точки к точке. В таком общем случае мы определим *ехх* как своего рода локальную величину Δl/l, т. е.

C:\Мои документы\gray.jpg

Это число, которое теперь будет функцией *х, у* и z, описывает величину растяжения в направлении оси *х* по всему куску желе. Возможны, конечно, растяжения и в направлении осей *у* и *z.* Мы будем описывать их величинами

C:\Мои документы\gray.jpg

Кроме того, нам нужно описать деформации типа сдви­гов. Вообразите, что в перво­начально невозмущенном желе вы выделили маленький кубик. Нажав на желе, мы изменяем его форму, и наш кубик может превратиться в [параллелограмм](#прим2) (фиг. 39.3).



*Фиг. 39.3. Однородная деформация сдвига.*

При такой дефор­мации перемещение в направлении *х* каждой частицы пропорционально ее координате *у:*

C:\Мои документы\gray.jpg

а перемещение в направлении *у* пропорционально *х:*

uy=(θ/2)x. (39.5)

Таким образом, деформацию сдвигового типа можно описать с помощью

ux=e*xy*y u*у=eyxx,*

где

C:\Мои документы\gray.jpg

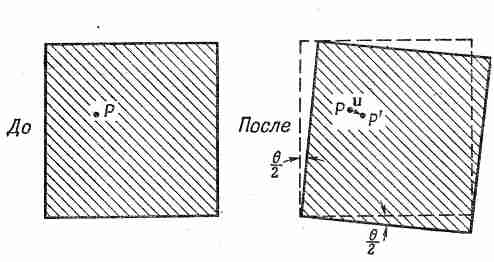
Теперь вы сочтете, что при неоднородной деформации обоб­щенную деформацию сдвига можно описать, определив вели­чины *еxy* и *еyx* следующим образом:

C:\Мои документы\gray.jpg

Однако здесь есть некая трудность. Предположим, что пере­мещения *uх* и *uy* имеют вид

C:\Мои документы\gray.jpg

Они напоминают уравнения (39.4) и (39.5), за исключением того, что при *uy* стоит обратный знак. При таком перемещении маленький кубик из желе претерпевает простой поворот на угол θ/2 (фиг. 39.4).



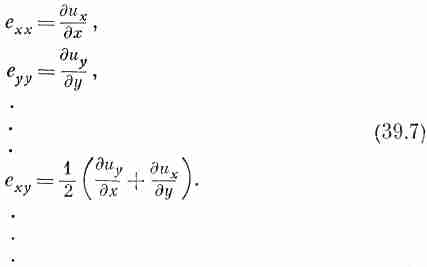
*Фиг. 39.4.* *Однородный поворот. Никаких деформаций нет.*

Никакой деформации здесь вообще нет, а есть просто вращение в пространстве. При этом никакого возмущения материала не происходит, а *относительное* поло­жение всех атомов совершенно не изменяется. Нужно как-то устроить так, чтобы чистое вращение не входило в наше опре­деление деформации сдвига. Указанием может послужить то, что если *дuy/дх* и *дux/ду* равны и противоположны, никакого напряжения нет; этого можно добиться, *определив*



Для чистого вращения оба они равны нулю, но для чистого сдвига мы получаем, как и хотели, *еху=еуx.*

В наиболее общем случае возмущения, который наряду со сдвигом может включать растяжение или сжатие, мы будем *определять* состояние деформации заданием девяти чисел:



Они образуют компоненты *тензора деформации.* Поскольку *тензор* этот *симметричен* (согласно нашему определению, *еху* всегда равно *еух*)*,* то на самом деле различных чисел здесь только шесть. Вы помните (см. гл. 31) общее свойство всех тен­зоров — элементы его преобразуются при повороте подобно произведению компонент двух векторов. (Если А и В — век­торы, то *Сij=АiВj —* тензор.) А каждое наше *eij* есть про­изведение (или сумма таких произведений) компонент вектора

u=*(uх, uу, uz)* и оператора ∇=(*д*/*д*x,*д*/*д*y,*д*/*д*z), который, как

мы знаем, преобразуется подобно вектору. Давайте вместо *х, у* и z писать x1*, x2* и x3, а вместо *uх, uy* и *uг* писать u1, u2 и u*3;* тогда общий вид элемента тензора *eij* будет выглядеть так:

C:\Мои документы\gray.jpg

где индексы *i* и j могут принимать значения 1, 2 или 3.

Когда мы имеем дело с однородной деформацией, которая может включать как растяжения, так и сдвиги, то все *eij —* постоянные, и мы можем написать

*uх=еххх+ехуy+ехzг.* (39.9)

(Начало координат выбрано в точке, где и равно нулю.) В этих случаях тензор деформации *eij* дает соотношение между двумя векторами — вектором координаты r=(x, y, *z)* и вектором перемещения u=*(uх, uу, uг).*

Если же деформация неоднородна, то любой кусочек желе может быть как-то искажен и, кроме того, могут возникнуть местные повороты. Когда все возмущения малы, мы получаем

C:\Мои документы\gray.jpg

где ωij, — *антисимметричный* тензор

C:\Мои документы\gray.jpg

описывающий поворот. Нам незачем беспокоиться о поворотах; займемся только деформацией, которая описывается симмет­ричным тензором *еij.*

**§ 2. Тензор упругости**

Теперь, чтобы описать деформации, мы должны связать их с внутренними силами — с напряжениями в материале. Мы предполагаем, что закон Гука справедлив для любого кусочка материала, т. е. что напряжения всюду пропорциональны дефор­мациям. В гл. 31 мы определили тензор напряжений *Sij* как i-ю компоненту силы, действующей на единичной площадке, перпендикулярной оси j. Закон Гука говорит, что каждая ком­понента Sijлинейно связана с *каждой* компонентой напряжения. Но поскольку *S* и *l* содержат по девяти компонент, то всего для описания упругих свойств материала требуется 9X9=81 возможный коэффициент. Если материал однороден, то все эти коэффициенты будут постоянными. Мы обозначим их C*ijkl* определив посредством уравнения

C:\Мои документы\gray.jpg

где каждый значок i, j, *k* и *l* может принимать значения 1, 2 или 3. Поскольку коэффициенты *Сijkl* связывают один тензор с другим, они тоже образуют тензор — на этот раз тензор *четвертого ранга.* Мы можем назвать его *тензором упругости.*

Предположим, что все C*ijkl* известны и что к телу какой-то произвольной формы мы приложили сложные силы. При этом возникнут все сорта деформаций — тело как-то исказится. Каковы будут перемещения? Вы понимаете, что это довольно сложная задача. Если вам известны деформации, то из уравне­ния (39.12) можно найти напряжения, и наоборот. Но напряже­ния и деформации, которые возникли в любой точке, зависят от того, что происходит во всей остальной части материала.

Наиболее простой способ подступиться к такой задаче — это подумать об энергии. Когда сила *F* пропорциональна пере­мещению *х,* скажем *F=kx,* то работа, затраченная на любое перемещение *х,* равна *kx2/2.* Подобным же образом энергия *w,* запасенная в *любой единице объема* деформированного мате­риала, оказывается равной

C:\Мои документы\gray.jpg

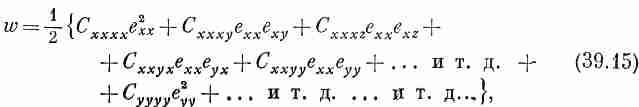
Полная же работа *W,* затраченная на деформацию всего тела, будет интегралом от *w* по всему его объему:

C:\Мои документы\gray.jpg

Следовательно, это и есть потенциальная энергия, запасенная во внутренних напряжениях материала. Когда тело находится в равновесии, эта внутренняя энергия должна быть *минималь­ной.* Таким образом, проблема определения деформаций в теле может быть решена нахождением таких перемещений и по всему телу, при которых *W* минимальна. В гл. 19 (вып. 6) я го­ворил вам о некоторых общих идеях вариационного исчисле­ния, применяемого при решении задач на минимизацию подоб­ного рода. Однако сейчас мы больше не будем вдаваться в под­робности этой задачи.

Сейчас нас главным образом будет интересовать то, что можно сказать относительно общих свойств тензора упругости. Прежде всего ясно, что на самом деле в *Cijkl* содержится *не* 81 различный параметр. Поскольку *Sij* и *eij* — симметричные тензоры, каждый из которых включает только шесть различных элементов, то C*ijkl* состоит максимум из 36 различных компо­нент. Обычно же их гораздо меньше.

Рассмотрим специальный случай кубического кристалла. Плотность энергии *w* для него получается такой:

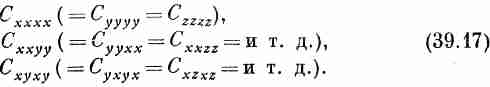


т. е. всего 81 слагаемое! Но кубический кристалл обладает определенными симметриями. В частности, если кристалл по­вернуть на 90°, то все его физические свойства останутся теми же. Например, у него должна быть одна и та же жесткость относительно растяжения как в направлении оси *у,* так и в нап­равлении оси *х.* Следовательно, если мы переменим наши опре­деления осей координат *х* и *у* в уравнении (39.15), то энергия не должна измениться. Поэтому для кубического кристалла

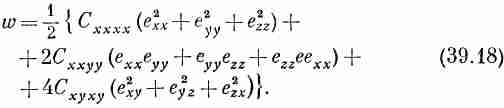
*Cхххх*=*Суууу=Czzzz.* (39.16)

Мы можем еще показать, что компоненты, наподобие *Сххху,* должны быть нулями. Кубический кристалл обладает тем свой­ством, что он симметричен при *отражении* относительно любой плоскости, перпендикулярной к одной из осей координат. Если мы заменим *у* на —y, то ничего не должно измениться. Но из­менение *у* на -*у* меняет *еxy* на -*еxy ,* так как перемещение в нап­равлении +*у* будет теперь перемещением в направлении -*у.* Чтобы энергия при этом не менялась, *Сххху* должно переходить в -*Сххху* Но отраженный кристалл будет тем же, что и прежде, поэтому *Сххxy* должно быть *таким же,* как и -*Сххху.* Это может произойти только тогда, когда оба они равны нулю.

Но вы можете сказать: «Рассуждая таким же образом, можно сделать и C*yyyy*=0!*»* Это неверно. Ведь здесь у нас *четыре* игрека. Каждый *у* изменяет знак, а четыре минуса дают плюс. Если *у* встречается *два* или *четыре* раза, то такие компоненты не должны быть равны нулю. Нулю равны только те компо­ненты, у которых *у* встречается либо *один,* либо *три* раза. Таким образом, для кубического кристалла не равны нулю только те *С,* у которых один и тот же значок встречается *четное число раз.* (Рассуждения, которые мы провели для *у,* имеют силу и для *х* и для z.) Таким образом, выживают только компоненты типа *Сххуу, Схуху, Схуух* и т. д. Однако мы уже показали, что если изменить все *х* на *у* и *наоборот* (или все z на x и т. д.), то для кубического кристалла мы должны получить то же самое число. Это означает, что остаются *всего три различные* ненуле­вые возможности:



Плотность же энергии для кубического кристалла выглядит так:



У изотропного, т. е. некристаллического, материала симмет­рия еще выше. Числа *С* должны быть теми же самыми при *любом* выборе осей координат. При этом, как оказывается, существует другая связь между коэффициентами *С:*

*Cхххх=Cххуу+Cхуху* (39.19)

Это можно усмотреть из следующих общих рассуждений. Тен­зор напряжений *Sij* должен быть связан с *eij* способом, который совершенно не зависит от направления осей координат, т. е. он должен быть связан только с помощью *скалярных* величин. «Это очень просто»,— скажете вы. «Единственный способ полу­чить *Sij* из *eij —* умножить последнее на скалярную постоянную. Получится как раз закон Гука: *Sij=*(Постоянная)Xеij». Однако это не совсем верно. Дополнительно здесь можно вста­вить *единичный тензор δij*, умноженный на некоторый скаляр, линейно связанный с *еij.* Единственный инвариант, который можно составить и который линеен по *е,*— это Σe*jj.* (Он преоб­разуется подобно *х2*+y2+z2, а значит является скаляром.) Таким образом, наиболее общей формой уравнения, связывающего *Sij* с *eij* для изотропного материала, будет

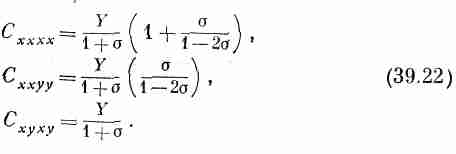
C:\Мои документы\gray.jpg

(Первая константа обычно записывается как 2μ; при этом коэффициенту равен модулю сдвига, определенному нами в пре­дыдущей главе.) Постоянные (μ, и λ называются *упругими по­стоянными Лямэ.* Сравнивая уравнения (39.20) с уравнением (39.12), вы видите, что



Таким образом, мы доказали, что уравнение (39.19) действи­тельно правильное. Вы видите также, что упругие свойства изотропного материала, как уже говорилось в предыдущей главе, полностью задаются двумя постоянными.

Коэффициенты *С* могут быть выражены через любые две из упругих постоянных, которые использовались ранее, напри­мер через модуль Юнга Y и отношение Пуассона *σ.* На вашу долю оставляю показать, что



**§ 3. Движения в упругом теле**

Мы подчеркивали, что в упругом теле, находящемся в *равно­весии,* внутренние напряжения распределяются так, чтобы энергия была минимальной. Посмотрим теперь, что происходит, если внутренние силы *не уравновешены.* Возьмем маленький кусочек материала внутри некоторой поверхности *А* (фиг. 39.5).



*Фиг. 39.5. Маленький элемент объема V*, *ограниченный поверхностью А,*

Если этот кусочек находится в равновесии, то полная действую­щая на него сила ***F***должна быть равна нулю. Можно считать, что эта сила состоит из двух частей, одна из которых обуслов­лена «внешними» силами, подобными гравитации, действующими на расстоянии на вещество нашего кусочка и приводящими к величине силы *на единицу объема* **f**внешн. Полная же внешняя сила **F**внешн равна интегралу от **f**внешн по всему объему кусочка:

C:\Мои документы\gray.jpg

В равновесии эти силы балансируются полной силой **F**внутр, действующей по поверхности *А* со стороны окружающего материала. Когда же этот кусочек *не* на­ходится в равновесии, а движется, сум­ма внутренних и внешних сил будет равна произведению массы на ускорение. При этом мы получаем

C:\Мои документы\gray.jpg

где ρ—плотность материала, а **ŕ** — его ускорение. Теперь мы можем скомбинировать уравнения (39.23) и (39.24) и написать

C:\Мои документы\gray.jpg

Нашу запись можно упростить, положив

C:\Мои документы\gray.jpg

Тогда уравнение (39.25) запишется в виде

C:\Мои документы\gray.jpg

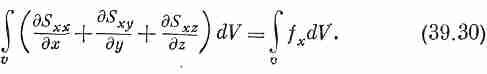
Величина, названная нами **F**внутр, связана с напряжениями в материале. Тензор напряжений *Sij* был определен нами в гл. 31 таким образом, что x-компонента силы *dF*, действующей на эле­мент поверхности *da с* нормалью **n**, задается выражением

C:\Мои документы\gray.jpg

Отсюда х-компонента силы **F**внутр, действующей на наш ку­сочек, равна интегралу от *dFx* по всей поверхности. Подстав­ляя это в x-компоненту уравнения (39.27), получаем

C:\Мои документы\gray.jpg

Оказалось, что поверхностный интеграл связан с интегра­лом по объему, а это напоминает нам нечто знакомое по главам об электричестве. Заметьте, что если не обращать внимания на первый значок *х в* каждом из S в левой части (39.29), то она выг­лядит в точности как интеграл от величины (S•n), т.е. нормаль­ной компоненты вектора по поверхности. Она была бы равна потоку S через объем. А используя теорему Гаусса, поток можно было бы записать в виде объемного интеграла от дивергенции S. На самом деле все это справедливо независимо от того, есть ли у нас индекс *х* или нет. Это просто математическая теорема, которая доказывается интегрированием по частям. Другими словами, уравнение (39.29) можно превратить в



Теперь можно отбросить интегралы по объему и написать дифференциальное уравнение для любой компоненты **f**:



Оно говорит нам, как связана сила, действующая на единицу объема с тензором напряжения *Sij.*

Вот как работает эта теория внутренних движений твердого тела. Если первоначально нам известны перемещения, задавае­мые, скажем, вектором и, то можно найти деформации *eij.* Из деформаций с помощью уравнения (39.12) можно получить напряжения. Затем с помощью уравнения (39.31) мы из напряжений можем найти плотности сил **f**. А зная **f**, мы из уравнения (39.26) получаем ускорение **r** в материале, которое подскажет нам, как изменятся перемещения. Собирая все это вместе, мы получаем ужасно сложные уравнения движения упругого твердого тела. Я просто напишу вам ответ для изо­тропного материала. Если вы воспользуетесь для *Sij* уравне­нием (39.20) и запишете *eij* в виде 1/2 *(dui/dxj+duj]dxi),* то окончательно получите векторное уравнение:



Вы можете очень просто убедиться в том, что уравнение *должно* иметь такую форму. Сила должна зависеть от второй производной — перемещения и. Но какие можно составить вторые производные и так, чтобы они были векторами? Одна из них ∇ (∇•u); это самый настоящий вектор. Есть еще только одна такая комбинация — это ∇2u. Так что наиболее общей формой силы будет



что как раз дает (39.32) с другим определением постоянных. Вас может удивить, почему у нас нет третьего слагаемого ∇X∇Xu, которое тоже вектор. Но вспомните, что ∇X∇Xu

в точности равно ∇2u-∇(∇•u), т. е. это линейная комбина­ция двух уже написанных слагаемых. Так что оно не добавит ничего нового. Мы еще раз доказали, что в изотропном мате­риале есть только две упругие постоянные.

Для получения уравнения движения материала мы можем положить выражение (39.32) равным ρ*д2****u****/дt2* и, пренебрегая объемными силами типа силы тяжести, написать

C:\Мои документы\gray.jpg

Это уравнение выглядит похожим на волновое уравнение, с которым мы познакомились в электромагнетизме, за исклю­чением одного добавленного слагаемого, которое усложняет дело. Для материалов, упругие свойства которых всюду оди­наковы, мы можем увидеть, на что похоже общее решение. Вы, наверное, помните, что любое векторное поле может быть записано в виде суммы двух векторов, у одного из которых нулю равна дивергенция, а у другого — ротор. Другими сло­вами, можно положить

C:\Мои документы\gray.jpg

где

C:\Мои документы\gray.jpg

Подставляя вместо **u** в уравнении (39.33) **u**1+**u**2, получаем

C:\Мои документы\gray.jpg

Взяв дивергенцию этого уравнения, мы можем исключить из него u1:

C:\Мои документы\gray.jpg

Поскольку операторы ∇2 и ∇ могут быть переставлены, можно вынести оператор дивергенции и получить

C:\Мои документы\gray.jpg

А так как ∇X**u**2, по определению, равно нулю, то ротор вы­ражения в фигурных скобках также будет нулем, так что выражение в скобках само по себе тождественно равно нулю и

C:\Мои документы\gray.jpg

Это векторное волновое уравнение для волн, движущихся со скоростью С2 = √(λ+2μ)/ρ. Поскольку ротор **u**2 есть нуль, то эти волны не связаны со сдвигом, а представляют просто волны сжатия наподобие звуковых, которые мы изучали в предыдущих главах и скорость которых как раз равна найденной нами для Спрод.

Подобным же образом, беря ротор уравнения (39.36), можно показать, что **u**1 удовлетворяет уравнению

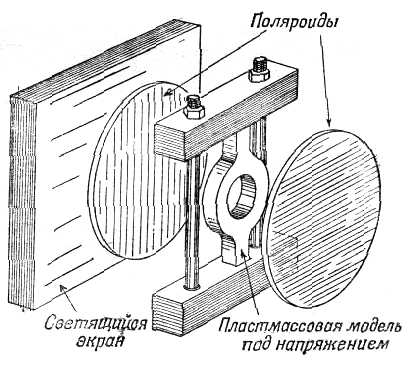
C:\Мои документы\gray.jpg

Это снова векторное волновое уравнение для волн, распро­страняющихся со скоростью C2*=√μ/ρ.* Поскольку ∇•**u**1 равно нулю, то перемещение *u1* не приводит к изменению плот­ности; вектор u1 соответствует поперечным или сдвиговым волнам, которые встречались нам в предыдущей главе, а

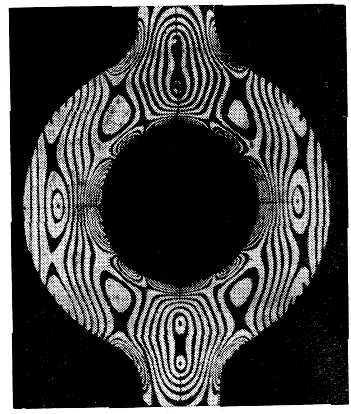
C2=Cсдвиг.

Если мы хотим знать статические напряжения в изотропном материале, то в принципе их можно найти, решая уравнение (39.32) с **f**, равным нулю (или равным статическим объемным силам, обусловленным силой тяжести, такой, как ρg) при опре­деленных условиях, связанных с силами, действующими на поверхности нашего большого куска материала. Сделать это не­сколько сложнее, чем в соответствующих задачах электромагне­тизма. Во-первых, это более трудно потому, что сами уравнения несколько сложнее, и, во-вторых, формы тех упругих тел, кото­рыми мы обычно интересуемся, гораздо сложнее. На лекциях по электричеству мы часто интересовались решением уравнений Максвелла в областях сравнительно простой геометрической формы, таких, как цилиндр, сфера и т. д. В теории упру­гости, нам приходится заниматься объектами гораздо более сложной формы, например крюком подъемного крана, или ко­ленчатым автомобильным валом, или ротором газовой турбины. Такие задачи иногда можно приближенно решить численным методом, воспользовавшись принципом минимальной энер­гии, о котором мы упомянули ранее. Другой способ — это воспользоваться моделями предметов и измерять внутренние напряжения экспериментально с по­мощью поляризованного света.

Метод этот состоит в следующем. Когда кусок упругого изотропного ма­териала, например прозрачную пластмассу типа плекси­гласа, подвергают напряжению, в ней возникает двойное лучепреломление. Если пропускать через эту пластмассу поля­ризованный свет, то плоскость поляризации повернется на ве­личину, связанную с напряжением. Измеряя угол плоскости поляризации, можно измерить напряжение. На фиг. 39.6 пока­зан примерный вид этого устройства, а на фиг. 39.7 приведена фотография упругой модели сложной формы под напряжением.



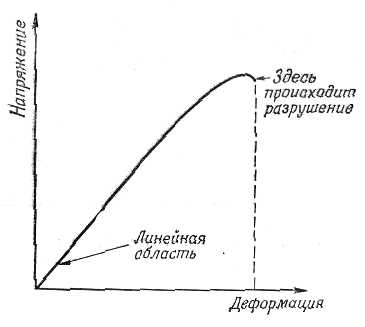
*Фиг. 39.6. Измерение внутренних напряжений с помощью поляризован­ного света.*



Фиг. 39.7. Вид напряженной пластмассовой модели между двумя скрещенными полярои­дами.

**§ 4. Неупругое поведение**

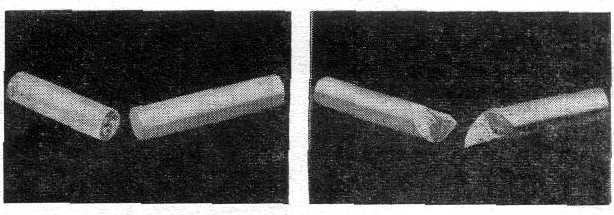
Во всем, что до сих пор говорилось, мы предполагали, что напряжение пропорционально деформации, а это вообще-то неверно. На фиг. 39.8 приведена типичная диаграмма напряже­ние — деформация упругого материала.



Фиг. 39.8. Типичная диаграм­ма напряжение — деформация для больших деформаций.

Для малых деформа­ций напряжение пропорционально деформации. Однако после некоторой точки зависимость напряжения от деформации на­чинает отклоняться от прямой линии. Для многих материалов, которые мы назовем «хрупкими», разрушение наступает, когда деформация несколько превысит ту точку, где кривая начинает загибаться. В общем же случае в диаграмме напряжение — деформация есть и другие усложнения. Например, когда вы деформируете предмет, существующие большие напряжения могут затем медленно уменьшиться со временем. Если вы до­стигнете высоких напряжений, однако ниже точки разрыва, а затем будете уменьшать деформацию, то напряжения будут возвращаться назад уже по другой кривой. Возникает небольшой гистерезисный эффект (наподобие того, что мы видели в связи между *В* и *Н* в магнитных материа­лах).

Напряжения, при которых происходит разрушение, сильно изменяются от материала к материалу. Некоторые материалы разрушаются при максимальном *растягивающем* напряжении. Другие же разрушаются при определенной величине напряже­ния *сдвига.* Скажем, мел гораздо слабее противостоит растяже­нию, тем сдвигу. Если вы потянете за концы палочки мела, то она сломается перпендикулярно направлению приложенной силы (фиг. 39.9, *справа).*



*Фиг. 39.9. Сломанный кусочек мела:*

Справа — *растягиванием за "концы",* слева — *скручиванием.*

Ведь мел — это только спрессованные частички, которые легко растаскиваются в стороны, поэтому он ломается перпендикулярно приложенной силе. А в отношении сдвига этот материал гораздо крепче, так как в этом случае частицы мешают друг другу. Вспомните теперь, что когда мы скручиваем стержень, то в любом его поперечном сечении воз­никают сдвиги. Мы показали, кроме того, что сдвиг эквивален­тен комбинации растяжения и сжатия под углом 45°. По этой причине при *скручивании* кусочек мела разломится по сложной поверхности, которая расположена под углом 45° к образую­щим. На фиг. 39.9 *(слева)* приведена фотография куска мела, сломанного таким способом. Мел ломается там, где напряже­ния максимальны.

Есть и другие материалы, которые ведут себя очень стран­ным и сложным образом. Чем сложнее материал, тем причуд­ливей его поведение. Если мы возьмем лист [сарана](#прим3), скомкаем его и бросим на стол, то постепенно он расправится и примет свою первоначальную плоскую форму. На первый взгляд кажется соблазнительным считать, что здесь основную роль играет именно упругость. Но простой подсчет покажет, что она слишком слаба (на несколько порядков слабее), чтобы как-то влиять на этот эффект. Оказывается, что здесь соревнуются два механизма; «нечто» внутри материала «помнит» первона­чальную форму и «пытается» вернуться к старому виду, а «нечто» другое «предпочитает» новую форму и сопротивляется возврату к старой.

Я не хочу вдаваться в подробности и описывать тот меха­низм, который играет роль в поведении скомканного листа сарана, но получить представление о том, как такие эффекты происходят, вы можете на следующей *модели.* Представьте себе материал, изготовленный из длинных гибких, но крепких нитей вперемешку с пустотелыми ячейками, заполненными вязкой жидкостью. Представьте также, что между каждой ячейкой и соседними с ней имеются узкие проходы, по которым жидкость может медленно проникать из одной ячейки в другую. Если мы скомкаем лист такого материала, то длинные нити де­формируются, жидкость из одной ячейки будет выжиматься и переходить в другие ячейки, которые оказались растянутыми. Когда же мы отпускаем лист, то длинные нити будут стремиться вернуться к своей первоначальной форме. Однако, чтобы сде­лать это, они должны заставить жидкость возвратиться на свое прежнее место, что происходит довольно медленно из-за ее вязкости. Силы, которые мы прилагаем, комкая лист, гораздо больше сил, развиваемых нитями. Скомкать лист можно очень быстро, а вот вернуться к прежнему виду он сможет гораздо мед­леннее. Несомненно, что здесь основную роль играет комбинация больших, жестких молекул и более мелких, но более подвижных. Этот механизм согласуется также с тем фактом, что материал быстрее принимает свою первоначальную форму, если он нагрет, и медленнее в холодном состоянии: тепло увеличивает подвижность (уменьшает вязкость) мелких молекул.

Хотя мы обсуждали, как происходит нарушение закона Гука, но, по-видимому, наиболее удивительно все же не нару­шение этого закона при больших деформациях, а его универ­сальность. Некоторое понятие о том, почему так происходит, вы можете получить, рассматривая энергию деформации материала. Утверждение о том, что напряжение пропорционально деформации, равносильно утверждению, что энергия деформа­ции изменяется как квадрат напряжения. Предположим, что мы скрутили стержень на малый угол θ. Если справедлив закон Гука, то энергия деформации должна быть пропорциональна квадрату θ. Предположим, что энергия является некоторой произвольной функцией угла. Мы можем записать ее в виде разложения Тэйлора около нуля:

*U*(θ)*=U*(0)+*U'*(0)θ +1/2U’’(0)θ2+1/6 U'''(θ)θ3+ -.. . (39.40)

Момент силы τ представляет производную *U* по углу, поэтому

τ(θ)=U'(0)+U"(0) θ+1/2U’’’(0)θ2 + ... . (39.41)

Если теперь отсчитывать угол от положения *равновесия,* то первое слагаемое будет равно нулю. Таким образом, первое оставшееся слагаемое пропорционально θ и при достаточно малых углах оно будет превосходить слагаемое с θ2. [На самом деле, внутренне материалы в достаточной мере симметричны, так что τ(θ)=-τ(-θ); слагаемое с θ2 оказывается нулем, а отклонение от линейности происходит только из-за слагаемого с θ3. Однако нет причин, по которым это было бы верно для растяжения и сжатия.] Единственно, что мы не объяснили,— почему материалы обычно разрушаются вскоре после того, как становятся существенными члены высшего порядка.

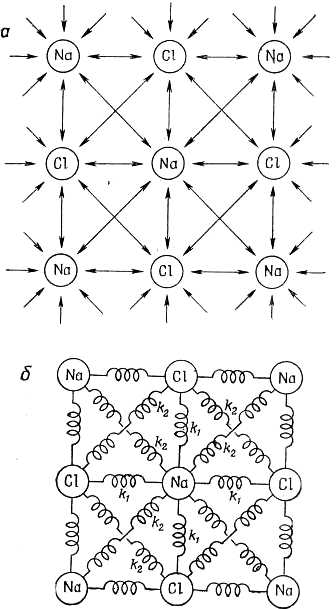
**§ 5. Вычисление упругих постоянных**

Последний вопрос в теории упругости, который я разберу,— это попытка вычислить упругие постоянные материала, исходя из некоторых свойств атомов, составляющих этот материал. Мы рассмотрим простой случай *ионного* кубического кристалла типа хлористого натрия. Размер или форма деформированного кристалла изменяются. Такие изменения приводят к увеличе­нию потенциальной энергии кристалла. Для вычисления изме­нения энергии деформации следует знать, куда идет каждый атом. Чтобы сделать полную энергию как можно меньше, атомы в решетке сложных кристаллов перегруппировываются весьма сложным образом. Это довольно сильно затрудняет вычисление энергии деформации. Но понять, что получается в случае про­стого кубического кристалла, все-таки можно. Возмущения внутри кристалла будут геометрически подобны возмущениям его внешних граней.

Упругие постоянные кубического кристалла можно вычис­лить следующим образом. Прежде всего мы предположим нали­чие некоего закона взаимодействия между каждой парой атомов в кристалле. Затем вычислим изменение внутренней энергии кристалла при отклонении от равновесной формы. Это даст нам соотношения между энергией и деформацией, которая квадра­тична по деформациям. Сравнивая энергию, полученную таким способом, с уравнением (39.13), можно идентифицировать коэф­фициенты при каждом слагаемом с упругими постоянными *Cijkl.*

В нашем примере мы будем предполагать следующий простой закон взаимодействия: между соседними атомами действуют *центральные* силы, имея в виду, что они действуют по линии, соединяющей два соседних атома. Мы ожидаем, что силы в ион­ных кристаллах должны быть именно такого типа, ибо в основе их лежит простое кулоновское взаимодействие. (При ковалентной связи силы обычно более сложны, ибо они приводят и к бо­ковому давлению на соседние атомы; но нам все эти усложнения ни к чему.) Кроме того, мы собираемся учесть только силу взаимодействия каждого атома с *ближайшим* к не­му и *следующими* побли­зости соседями. Другими словами, мы будем делать приближение, в котором пренебрежем силами меж­ду далекими атомами. На фиг. 39.10,а показаны си­лы в плоскости *ху,* которые мы будем учитывать. Сле­дует еще учесть соответ­ствующие силы в плоскос­тях yz и *zx.*

Поскольку нас инте­ресуют только упругие постоянные, которые опи­сывают малые деформации, и, следовательно, в выражении для энергии нам нужны только слагаемые, квадратич­ные по деформациям, то можно считать, что силы между каждой парой атомов изменяются с перемещением линейно.



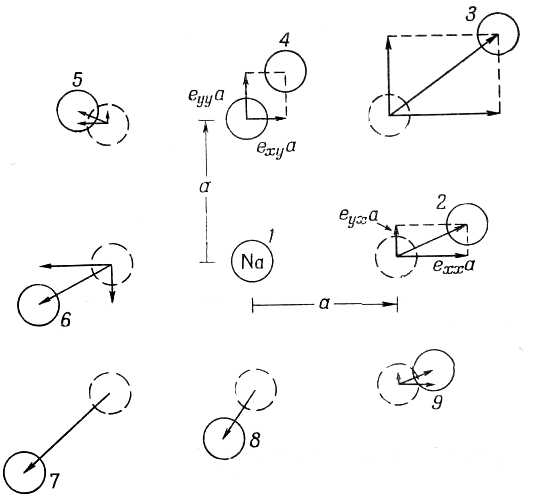
*Фиг. 39.10. Принимаемые нами в расчет межатомные силы (а) и модель, в которой атомы связаны пружинками (б).*

Поэтому для наглядности можно представлять, что каждая пара атомов соединена «линейной» пружинкой (фиг. 39.10, б). Все пружинки между атомами натрия и хлора должны иметь одну и ту же упругую постоянную, скажем k1. Пружинки между двумя атомами натрия и двумя атомами хлора могут иметь различные постоянные, но я хочу упростить наши рассуждения, и поэтому буду считать эти постоянные равными. Обозначим их через *k2.* (Позднее, когда мы посмотрим, как пойдут вычисления, вы сможете вернуться назад и сделать их разными.)

Предположим теперь, что кристалл возмущен однородной деформацией, описываемой тензором *eij.* В общем случае у него будут компоненты, содержащие *х, у* и z, но мы для большей наглядности рассмотрим только деформации с тремя компо­нентами: *ехх, еxy* и *еyy .* Если один из атомов выбрать в качестве начала координат, то перемещение любого другого атома задается уравнением типа (39.9):



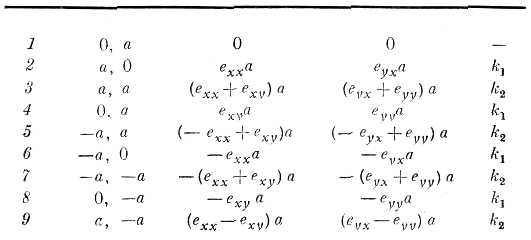
Назовем атом с координатами *х=у=0* «атомом 1», а номера его соседей показаны на фиг. 39.11.



*Фиг,**39.11.* *Перемещение ближайших и следующих побли­зости соседей атома 1. (Масштаб сильно искажен.)*

Обозначая постоянную решетки через *а,* мы получаем *х-* и y-компоненты перемещения *ux, uy ,* выписанные в табл. 39.1.

*Таблица 39.1 •* КОМПОНЕНТЫ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ux, uу



Теперь можно вычислить энергию, запасенную в пружинках, которая равна произведению *k2/2* на квадрат растяжения каждой пружинки. Так, энергия горизонтальной пружинки между атомами 1 и 2будет равна

C:\Мои документы\gray.jpg

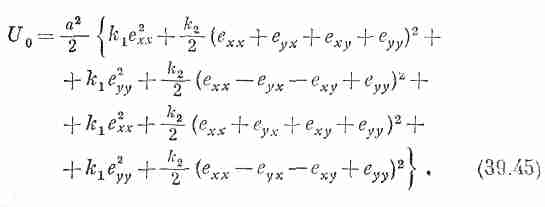
Заметьте, что с точностью до первого порядка y-перемещение атома *2* не изменяет длины пружинки между атомами *1 и 2.* Однако, чтобы получить энергию деформации диагональной пружинки, той, что идет к атому *3,* нам нужно вычислить изме­нение длины как из-за вертикального, так и из-за горизонталь­ного перемещений. Для малых отклонений от начала координат куба изменение расстояния до атома *3* можно записать в виде суммы компонент *uх* и *uv в* диагональном направлении:

C:\Мои документы\gray.jpg

Воспользовавшись величинами *uх* и *uy.* можно получить выра­жение для энергии

C:\Мои документы\gray.jpg

Для полной энергии всех пружинок в плоскости *ху* нам нужна сумма восьми членов типа (39.43) и (39.44). Обозначая эту энергию через *U0,* получаем



Чтобы найти полную энергию всех пружинок, связанных с атомом *1,* мы должны сделать некую добавку к уравнению (39.45). Хотя нам нужны только *х-* и y-компоненты деформации, вклад в них дает еще некоторая добавочная энергия, связанная с диагональными соседями вне плоскости *ху.* Эта добавочная энергия равна

C:\Мои документы\gray.jpg

Упругие постоянные связаны с плотностью энергии *w* урав­нением (39.13). Энергия, которую мы вычислили, связана с од­ним атомом, точнее это *удвоенная* энергия, приходящаяся на один атом, ибо на каждый из двух атомов, соединенных пру­жинкой, должно приходиться по 1/2 ее энергии. Поскольку в единице объема находится 1/a3 атомов, то *w* и *U0* связаны соотношением

*w=U0/2a3.*

2а3

Чтобы найти упругие постоянные *Cijkl,* нужно только воз­вести в квадрат суммы в скобках в уравнении (39.45), приба­вить (39.46) и сравнить коэффициенты при *еijеkl* ссоответствую­щими коэффициентами в уравнении (39.13). Например, собирая слагаемые с *е2xx* и е2yy , мы находим, что множитель при нем равен

C:\Мои документы\gray.jpg

поэтому

C:\Мои документы\gray.jpg

В остальных слагаемых нам встретится небольшое усложнение. Поскольку мы не можем отличить произведения *еххеyy* от *еyyехх,* то коэффициент при нем в выражении для энергии равен сумме двух членов в уравнении (39.13). Коэффициент при *еххеyy* в урав­нении (39.45) равен 2k2, так что получаем

C:\Мои документы\gray.jpg

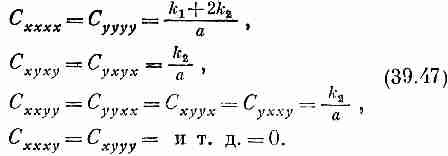
Однако из-за симметрии выражения для энергии при пере­становке двух первых значений с двумя последними можно считать, что *Скхуу=Суухх,* поэтому

C:\Мои документы\gray.jpg

Таким же способом можно получить

C:\Мои документы\gray.jpg

Заметьте, наконец, что любой член, содержащий один раз значок *х* или *у,* равен нулю, как это было найдено ранее из соображений симметрии. Подытожим наши результаты:

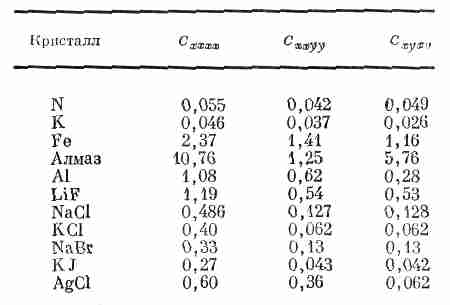


Итак, оказалось, что мы способны связать макроскопиче­ские упругие постоянные с атомными свойствами, которые проявляются в постоянных k1 и k2. В нашем частном случае C*хуxу=Cххуу.*Эти члены для кубического кристалла, как вы, вероятно, заметили из хода вычислений, оказываются *всегда* равными, какие бы силы мы ни принимали во внимание, но только *при условии,* что силы действуют вдоль линии, соеди­няющей каждую пару атомов, т. е. до тех пор, пока силы между атомами подобны пружинкам и не имеют боковой составляющей (которая несомненно существует при ковалентной связи).

Наши вычисления можно сравнить с экспериментальными измерениями упругих постоянных. В табл. 39.2 приведены наблюдаемые величины трех упругих коэффициентов для не­которых кубических [кристаллов](#прим4). Вы, вероятно, обратили внимание на то, что *Сxxyy ,* вообще говоря, не равно *Сxyxy .* При­чина заключается в том, что в металлах, подобных натрию и калию, межатомные силы не направлены по линии, соединяю­щей атомы, как предполагалось в нашей модели. Алмаз тоже не подчиняется этому закону, ибо силы в алмазе — это ковалентные силы, которые обладают особым свойством направ­ленности: «пружинки» предпочитают связывать атомы, распо­ложенные в вершинах тетраэдра. Такие ионные кристаллы, как фтористый литий или хлористый натрий и т. д., обладают почти всеми физическими свойствами, предположенными в на­шей модели; согласно данным табл. 39.2, постоянные *Сxxyy* и *Сxyxy у* них почти равны.

*Таблица 39.2 •* упругие постоянные

КУБИЧЕСКИХ КРИСТАЛЛОВ



Только хлористое серебро почему-то не хочет подчиняться условию *Сххуу=Cxyxy..*

***\* В литературе вы часто столкнетесь с другими обозначениями. Так, многие пишут:***

***C:\Мои документы\gray.jpg***

***\* Пластик с мудреным названием «поливинилиденхлорид», применяе­мый для обертки.— Прим. ред.***

***\* Предположим на минуту, что полный угол сдвига θ делится на две равные части, чтобы деформация была симметричной относительно осей x и y.***

***Литература: Ch. Kittel, Introduction to Solid State Physics, 2nd ed., New York, 1956. (Имеется пере­вод: Ч. Киттель, Введение в физику твердого тела, Физматгиз, М., 1962.)***

***Главa 40***

# ТЕЧЕНИЕ «СУХОЙ» ВОДЫ

[**§ 1. Ги****дрос****татика**](#a1)

[**§ 2. Уравн****ение движения**](#a2)

[**§ 3. Стацион****а****рный поток; теорема Бернулли**](#a3)

[**§ 4. Цирк****ул****яция**](#a4)

[**§ 5. Вихрев****ы****е линии**](#a5)

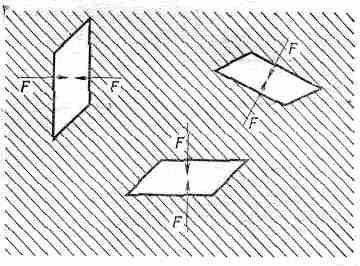
**§ 1. Гидростатика**

Кого не пленяет течение жидкости, кто не любуется течением воды! Все мы в детстве любили плескаться в ванне или возиться в гряз­ных лужах. Став постарше, мы восхищались плавным течением реки, водопадами и водо­воротами; мы любуемся ими, рядом с твердыми телами они кажутся нам почти одушевленными.

Предметом этой и следующей глав будет пове­дение жидкости, столь неожиданное и столь интересное. Попытки ребенка преградить путь маленькому ручейку, текущему по улице, и его удивление перед тем, как вода умудряется все же пробить себе дорогу, напоминает наши мно­голетние попытки понять механизм течения жидкости. Мы пытались мысленно преградить путь воды дамбой, т. е. получить законы и урав­нения, которые описывают поток. Рассказу об этих попытках и посвящена настоящая глава. А в следующей главе мы опишем тот уникаль­ный способ, с помощью которого вода проры­вает дамбу и ускользает от нас, не дав нам понять ее.

Я предполагаю, что элементарные свойства воды вам уже известны. Основное свойство, которое отличает жидкость от твердого тела, заключается в том, что жидкость не способна *сдерживать* ни мгновение напряжения сдви­га. Если к жидкости приложить напряжение сдвига, то она начинает двигаться. Густые жидкости, подобные меду, движутся менее легко, чем жидкости типа воды или воздуха. Мерой легкости, с которой жидкость течет, является ее вязкость. В этой главе мы рас­смотрим такие случаи, когда эффектом вяз­кости можно пренебречь. А эффекты вязкости отложим до следующей главы.

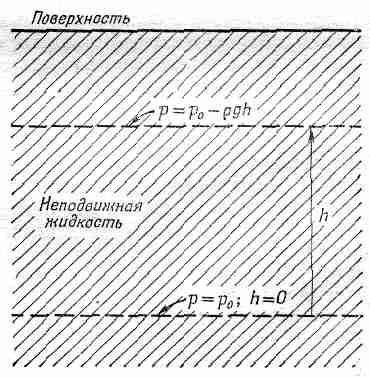
Начнем с рассмотрения *гидростатики,* т. е. теории непод­вижной жидкости. Если жидкость находится в покое, то на нее не действуют никакие сдвиговые силы (даже в вязкой жидкости). Поэтому закон гидростатики заключается в том, что напряже­ния внутри жидкости всегда нормальны к любой ее поверх­ности. Нормальная сила на единичную площадь называется *давлением.* Из того факта, что в неподвижной жидкости нет сдвигов, следует, что напряжение давления во всех направле­ниях одинаково (фиг. 40.1).



*Фиг. 40.1. В неподвижной жидкости сила, действующая на единичную площадь любой поверхности, перпендикулярна этой поверхности и при любых ориентациях поверхности одна и та же.*

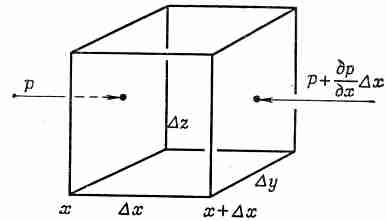
Займитесь самостоятельно доказа­тельством того, что если на любой плоскости в жидкости сдвиг отсутствует, то давление во всех направлениях должно быть одинаковым.

Давление в жидкости может изменяться от точки к точке. Так, в неподвижной жидкости на поверхности Земли давление будет изменяться с высотой из-за веса жидкости. Если плот­ность жидкости ρ считается постоянной и давление на некотором нулевом уровне обозначено через *р0* (фиг. 40.2), то давление на высоте *h* над этой точкой будет *р=р0 -ρgh,* где *g —* сила тяжести единицы массы.



*Фиг. 40.2. Давление в не­подвижной жидкости.*

Комбинация *р*+ρ*gh* в неподвижной жидкос­ти остается постоянной. Вы знаете это соот­ношение, но теперь мы получим более об­щий результат, где на­ше соотношение будет лишь частным случа­ем. Возьмем маленький кубик воды. Какая сила действует на него в результате оказываемого давления? Поскольку давление в любом месте во всех направлениях одинаково, то полная сила, действующая на единицу объема, может быть обусловлена только изменением давления от точки к точке. Предполо­жим, что давление изменяется в направлении оси *х,* и выберем направления других осей координат параллельно ребрам ку­бика. Давление на грань с координатой *х* дает силу pΔy/Δz (фиг. 40.3), а давление на грань с координатой *х*+Δ*х* дает силу—[*р+(др/дх)* Δ*х*] Δ*y*Δ*z*, так что результирующая сила равна -*(др/дх)*Δ*x*ΔyzΔz.



*Фиг. 40.3. Полная сила давления, действующая на куб, составляет -∇p на единицу объема.*

Если же мы учтем остальные пары граней куба, то нетрудно убедиться, что сила давления на единичный объем равна -∇*p.* Если вдобавок есть еще и другие силы, наподобие силы тяжести, то давление при равновесии должно компенсироваться ими.

Разберем случай, когда такие дополнительные силы можно описать потенциальной энергией, наподобие силы тяжести. Обозначим через ϕ потенциальную энергию единицы массы. (Для притяжения, например, ϕ просто равно *gz.)* Сила, дейст­вующая на единичную массу, задаётся через потенциал ϕ выражением -∇ϕ, а если плотность жидкости равна ρ, то на единицу объема будет действовать сила -ρ∇ϕ. В состоянии равновесия эта действующая на единичный объем сила в сумме с силой давления должна давать нуль:

-∇p-ρ∇ϕ=0. (40.1)

Это и есть уравнение гидростатики. *В общем случае* оно *не имеет решения.* Если плотность изменяется в пространстве каким-то произвольным образом, то нет возможности уравновесить все силы и жидкость не может находиться в состоянии статиче­ского равновесия. В ней возникнут разные конвекционные потоки. Это видно прямо из уравнения, ибо член с давлением представляет чистый градиент, тогда как второй член из-за плотности ρ не может быть им. И только когда величина ρ по­стоянна, потенциальный член становится чистым градиентом.

Решение уравнения в этом случае имеет вид

р+ρϕ=const.

Другая возможность, допускающая состояние равновесия,— это когда ρ зависит только от *р.* Однако на этом мы расста­немся с гидростатикой, ибо она не так интересна, как дви­жущаяся жидкость.

**§ 2. Уравнение движения**

Сначала обсудим движение жидкости с чисто абстрактной теоретической стороны, а затем рассмотрим некоторые частные примеры. Чтобы описать движение жидкости, мы должны задать в каждой точке ее некие свойства. Например, вода (бу­дем называть жидкость просто «водой») в разных местах движется с различными *скоростями.* Следовательно, чтобы определить характер потока, мы должны в каждой точке и в любой момент времени задать три компоненты скорости. Если нам удастся найти уравнения, определяющие скорость, то мы будем знать, как в любой момент движется жидкость. Но скорость — не единственная характеристика жидкости, которая меняется от точки к точке. Только что мы изучали изменение *давления* от точки к точке. А есть еще и другие пере­менные. От точки к точке может меняться также *плотность.* Вдобавок жидкость может быть проводником и переносить электрический *ток,* плотность которого **j** изменяется от точки к точке как по величине, так и по направлению. От точки к точке может меняться *температура, магнитное поле* и т. д. Так что число полей, необходимых для полного описания ситуа­ции, зависит от сложности задачи. Очень интересные явления возникают, когда доминирующую роль в определении поведе­ния жидкости играют токи и магнетизм. Эта наука носит назва­ние *магнитогидродинамика.* В настоящее время ей уделяется очень большое внимание. Но мы не собираемся рассматривать эти весьма сложные случаи, ибо имеется немало менее сложных, но столь же интересных явлений, и даже этот более элементар­ный уровень будет достаточно труден.

Возьмем случай, когда нет ни магнитного поля, ни прово­димости и нам, кроме того, не следует беспокоиться о темпера­турах, ибо мы предположим, что температура в любой точке единственным образом определяется плотностью и давлением. Фактически мы уменьшим сложность нашей работы, допустив, что плотность постоянна, т. е. что жидкость существенно не­сжижаема. Другими словами, мы предполагаем, что изменения давлений настолько малы, что производимыми ими изменениями плотности можно пренебречь. Если бы это было не так, то в дополнение к явлениям, рассмотренным здесь, необходимо было бы учитывать и другие явления, скажем распространение звуковых или ударных волн. Распространение звуковых и ударных волн мы уже в какой-то степени изучали, так что при нашем рассмотрении гидродинамики мы изолируемся от этих явлений, допустив, что приближенно плотность ρ посто­янная. Легко определить, когда такое предположение о по­стоянстве ρ будет хорошим. Если скорость потока гораздо меньше скорости звуковой волны, то нам не нужно заботиться об изменениях плотности. Тот факт, что вода ускользает от нас при попытке понять ее, не связан с этим приближе­нием постоянной плотности. Усложнения, которые все-таки позволили ей остаться непонятой, мы обсудим в следующей главе.

Общую теорию жидкостей мы должны начать с *уравнения состояния* жидкости, связывающего давление и плотность; в нашем приближении оно имеет очень простой вид:

ρ=const.

Это и есть первое уравнение для наших переменных. Следую­щее соотношение выражает сохранение вещества. Когда вещество утекает из какой-то точки, то количество его в этой точке должно уменьшаться. Если скорость жидкости равна v, то масса, которая протекает за единичное время через единицу площади поверхности, равна нормальной к поверхности компо­ненте ρv. Подобное соотношение у нас получалось уже в тео­рии упругости. Из знакомства с электричеством мы знаем также, что дивергенция такой величины определяется скоростью уменьшения плотности. Также и здесь уравнение

C:\Мои документы\gray.jpg

выражает сохранение массы жидкости: это гидродинамическое *уравнение непрерывности.* В нашем приближении, т. е. в при­ближении несжимаемой жидкости, плотность ρ постоянна и уравнение непрерывности превращается просто в

(∇•v)=0. (40.3)

Дивергенция скорости жидкости v, как и магнитного поля В, равна нулю. (Гидродинамические уравнения очень часто ока­зываются аналогичными уравнениям электродинамики; вот почему мы сначала изучали электродинамику. Некоторые предпочитают другой путь, считая, что сначала следует изу­чать гидродинамику, чтобы потом было легче понять электри­чество. На самом же деле электродинамика гораздо проще, чем гидродинамика.)

Следующее уравнение мы получим из закона Ньютона; оно говорит нам, как происходит изменение скорости в результате действия сил. Произведение массы элемента объема жидко­сти на ускорение должно быть равно силам, действующим на этот элемент. Выбирая в качестве элемента объема единичный объем и обозначая силу, действующую на единичный объем, через **f**, получаем

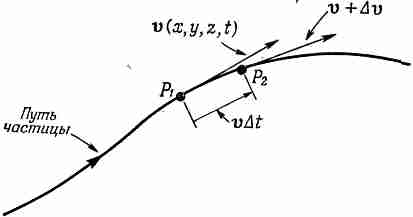
ρX(Ускорение)=**f.**

Плотность сил можно записать в виде суммы трех слагаемых. Одно из них, силу давления на единицу объема — *(*∇*p),* мы уже рассматривали. Но есть еще действующие на расстоянии «внеш­ние» силы, подобные тяжести или электричеству. Если эти силы консервативные с потенциалом, отнесенным к единице массы, равным ϕ, то они приводят к плотности сил —ρ(∇ϕ). (Если же внешние силы не консервативные, то мы вынуждены писать внешнюю силу, приходящуюся на единицу объема, как **f**внешн.) Кроме нее, на единицу объема действует еще одна «внутренняя» сила, которая возникает из-за того, что в *текущей* жидкости могут действовать сдвиговые силы. Они называются *силами вязкости,* и мы будем обозначать их через **f**вязк. Тогда наше уравнение движения приобретает вид

ρX(Ускорение)=-( ∇p)-ρ(∇ϕ)+**f**вязк. (40.4)

В этой главе мы будем предполагать, что наша вода «жид­кая» в том смысле, что ее вязкость несущественна, так что слагаемое **f**вязк будет опускаться. Выбрасывая слагаемое с вяз­костью, мы делаем приближение, которое описывает некое иде­альное вещество, а не реальную воду. Об огромной разнице, возникающей в зависимости от того, оставляем ли мы слагаемое с вязкостью или нет, в свое время хорошо знал Джон фон Нейманн. Известно ему было и то, что во времена наибольшего расцвета гидродинамики, т. е. примерно до 1900 г., основные усилия были направлены на решение красивых *математиче­ских* задач в рамках именно этого приближения, которое ни­чего не имеет общего с реальными жидкостями. По­этому теоретиков, которые занимались подобными веществами, он называл людьми, изучающими «сухую воду». Они отбрасы­вали *важнейшее* свойство жидкости. Именно потому, что в этой главе мы при наших вычислениях тоже этим свойством будем пренебрегать, я озаглавил ее «Течение «сухой» воды». А обсуж­дение *настоящей,* «мокрой» воды мы отложим до следующей главы.

Если мы отбросим fвязк, то в уравнении (40.4) все нам из­вестно, за исключением выражения для ускорения. Может показаться, что формула для ускорения частиц жидкости должна быть очень простой, ибо очевидно, что если v — ско­рость частицы в некотором месте жидкости, то ускорение ее будет просто равно *дv//дt.* Но *это совсем неверно,* и по довольно хитрой причине. Производная *дv/дt* выражает изменение ско­рости v *(х, у, z, t)* в *фиксированной точке* пространства. А нам нужно знать, как изменяется скорость *данной капельки* жидко­сти. Представьте, что мы пометили одну капельку воды цветной краской и можем наблюдать за ней. За маленький интервал времени *At* эта капелька продвинется в другое положение. Если капелька движется по некоторому пути, изображенному на фиг. 40.4, то за промежуток *Δt* она из точки *Р1* переме­стится в точку Р2.

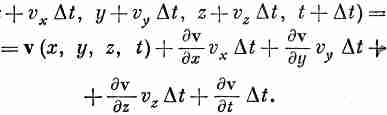


*Фиг. 40.4. Ускорение частицы жидкости.*

Фактически в направлении оси *х* она пере­двинется на расстояние *vxΔt,* в направлении оси *у —* на рас­стояние *vуΔt,* а в направлении оси *z —* на расстояние *vzΔt.* Мы видим, что если v *(х, у, z, t) —* скорость частицы в момент *t,* то скорость *той же самой* частицы в момент *t+Δt* представ­ляет величину v *(х*+*Δ*x, *у*+*Δy,* z+*Δ*z, *t*+*Δt),* причем

*Δx=vxΔt, Δy=vyΔt* и *Δz=vzΔt.*

Из определения частных производных [вспомните уравнения гл. *2,* вып. 5] мы с точностью до членов первого порядка получаем



Ускорение же *Δv/Δt* будет равно

C:\Мои документы\gray.jpg

Считая ∇ вектором, это можно записать символически:

C:\Мои документы\gray.jpg

Обратите внимание, что, даже когда *дv/дt*=0, т. е. когда скорость *в данной точке* не изменяется, ускорение все же останется. Примером может служить вода, текущая с постоян­ной скоростью по кругу: она ускоряется даже тогда, когда ско­рость в данной точке не изменяется. Причина, разумеется, состоит в том, что скорость данной капельки воды, которая первоначально находилась в одной точке, моментом позднее будет иметь другое направление — это центростремительное ускорение.

Остальная часть нашей теории — чисто математическая: нахождение решения уравнения движения, полученного под­становкой ускорения (40.5) в (40.4), т. е.

C:\Мои документы\gray.jpg

где слагаемое с вязкостью уже выброшено. Воспользовав­шись известным тождеством из векторного анализа, это уравнение можно переписать по-другому:

C:\Мои документы\gray.jpg

Если *определить* новое *векторное поле* **Ω**как ротор скорости v, т. е.

C:\Мои документы\gray.jpg

то векторное тождество можно записать так:

C:\Мои документы\gray.jpg

а наше уравнение движения (40.6) примет вид

C:\Мои документы\gray.jpg

Вы можете проверить эквивалентность уравнений (40.6) и (40.8), расписывая их по компонентам и сравнивая их, восполь­зовавшись при этом выражением (40.7).

Если **Ω**всюду равно нулю, то такой поток мы называем *безвихревым* (или потенциальным). В гл. 3, § 5 (вып. 5), мы уже определяли величину, называемую *циркуляцией* векторного поля. Циркуляция по любой замкнутой петле в жидкости равна криволинейному интегралу от скорости жидкости в дан­ный момент времени вокруг этой петли:

C:\Мои документы\gray.jpg

Циркуляция *на единицу площади* для бесконечно малой петли потеореме Стокса будет тогда равна ∇X**v**. Таким образом, **Ω** представляет собой циркуляцию вокруг единичной площади (перпендикулярной направлению **Ω**). Кроме того, ясно, что если в любое место жидкости поместить маленькую соринку (именно соринку, а *не* бесконечно малую точку), то она будет вращаться с угловой скоростью **Ω**/2. Попытайтесь доказать это. Вы можете также попробовать доказать, что для ведра воды на вращающемся столике **Ω** равна удвоенной локальной угловой скорости воды.

Если нас интересует только поле скоростей, то из наших уравнений можно исключить давление. Взяв ротор обеих частей уравнения (40.8) и вспомнив, что ρ — величина постоян­ная, а ротор любого градиента равен нулю, а также использо­вав уравнение (40.3), находим

C:\Мои документы\gray.jpg

Это уравнение вместе с уравнениями

Ω=∇Xv (40.10)

и

∇•v=0 (40.11)

полностью описывают поле скоростей v. На языке матема­тики — если в некоторый момент мы знаем **Ω,** то мы знаем ротор вектора скорости и, кроме того, знаем, что его дивер­генция равна нулю, так что в этих физических условиях у нас есть все необходимое для определения скорости v по­всюду. (Все это в точности напоминает нам знакомые условия в магнетизме, где ∇•**B**=0 и ∇X**B**=**j**/ε0c2.) Таким образом, данная величина Ω определяет v точно так же, как **j** опреде­ляет В. Затем из известного значения v уравнение (40.9) даст нам скорость изменения Ω, откуда мы можем получить новую Ωв следующий момент. Используя снова уравнение (40.10), найдем новое значение v и т. д. Теперь вы видите, как в эти уравнения входит весь механизм, необходимый для вычисления потока. Заметьте, однако, что эта процедура дает только ско­рости, а всю информацию о давлении мы потеряли.

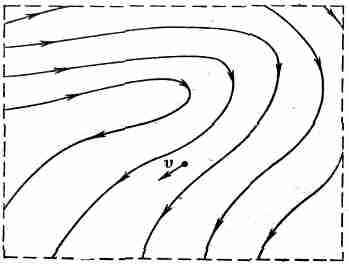
Отметим особое следствие нашего уравнения. Если в ка­кой-то момент времени *t* повсеместно Ω=0, то *дΩ/дt* тоже исче­зает, так что Ω всюду останется равной нулю и в момент *t* +Δt. Отсюда следует, что поток все время остается безвихре­вым. Если вначале поток не вращался, то он так никогда и не начнет вращаться. При этом уравнения, которые мы должны решать, таковы:

∇•v=0, ∇Xv=0.

Они в точности напоминают уравнения электростатики или магнитостатики в пустом пространстве. Позднее мы вернемся к ним и рассмотрим некоторые частные задачи.

**§ 3. Стационарный поток; теорема Бернулли**

Вернемся к уравнениям движения (40.8), но ограничимся теперь приближением «стационарного» потока. Под стационарным потоком я подразумеваю поток, скорость которого в любом месте жидкости никогда не изменяется. Жидкость в любой точке постоянно заменяется новой жидкостью, движущейся в точности таким же образом. Кар­тина скоростей всегда выглядит одинаково, т. е. v представ­ляет статическое векторное поле. Как в магнитостатике мы рисовали силовые линии, так и здесь можно начертить линии, которые всегда касательны к скорости жидкости (фиг. 40.5).



*Фиг. 40.5. Линии тока ста­ционарного потока.*

Эти линии называются «линиями тока». Для стационарного потока они действительно представляют реальные пути частиц жидкости. (В нестационарном потоке картина линий тока меняется со временем, однако в любой момент времени она не представляет пути частиц жидкости.)

Стационарность потока вовсе не означает, что ничего не происходит — частички жидкости движутся и изменяют свои скорости. Это означает только то, что *дv/дt=0.* Если теперь мы скалярно умножим уравнение движения на v, то слагаемое v•(ΩXv) выпадет и у нас останется только

C:\Мои документы\gray.jpg

Согласно этому уравнению, *при малых перемещениях в направ­лении скорости жидкости* величина внутри скобок не изме­няется. В стационарном потоке все перемещения направлены вдоль линий тока; поэтому уравнение (40.12) говорит, что *для всех точек вдоль линии тока*

C:\Мои документы\gray.jpg

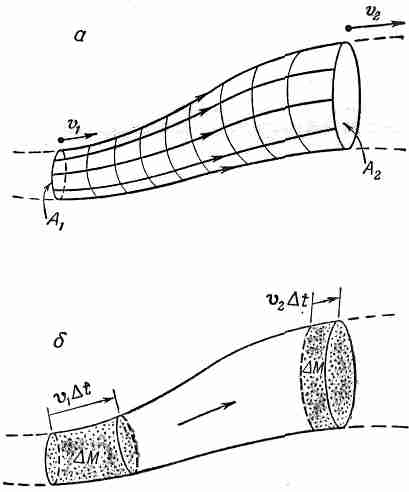
Это и есть *теорема Бернулли.* Постоянная, вообще говоря, для различных линий тока может быть разной; мы знаем только, что левая часть уравнения (40.13) постоянна всюду вдоль *данной линии тока.* Заметьте, кстати, что если стационарный поток безвихревой, т. *е.* если для него Ω=0, то уравнение движения (40.8) дает нам соотношение

C:\Мои документы\gray.jpg

так что

C:\Мои документы\gray.jpg

Оно в точности напоминает уравнение (40.13), за *исключением* того, что *теперь* постоянная *во всей жидкости одна и та же.* На самом деле теорема Бернулли не означает ничего боль­шего, чем утверждение о сохранении энергии. Подоб­ные теоремы о сохранении дают нам массу информации о потоке без детального решения уравнений. Теорема Бернулли на­столько важна и настолько проста, что мне бы хотелось пока­зать вам, как можно ее получить другим способом, отличным от тех формальных вычислений, которые мы только что про­вели. Представьте себе пучок линий тока, образующих трубку тока (фиг. 40.6, а).



*Фиг. 40.6. Движение жидкости в трубке.*

Поскольку стенки трубки образуются ли­ниями тока, то жидкость через них не протекает. Обо­значим площадь на одном конце трубки через A1, скорость жидкости через *v1,* плотность через ρ1 а потенциальную энер­гию через ϕ1. Соответствующие величины на другом конце трубки мы обозначим через *A2, v2, ρ*2 и ϕ2. После короткого интервала времени Δt жидкость на одном конце передвинется на расстояние *v1*Δ*t,* а жидкость на другом конце — на расстоя­ние v2Δt (см. фиг. 40.6, *б).* Сохранение *массы* требует, чтобы масса, которая вошла через *A1* была равна массе, которая

вышла через *А2.* Изменение масс в этих двух концах должно быть одинаково:

C:\Мои документы\gray.jpg

Таким образом, мы получаем равенство

C:\Мои документы\gray.jpg

Оно говорит нам, что при постоянном ρ скорость изменяется обратно пропорционально площади трубки тока.

Вычислим теперь работу, произведенную давлением в жидкости. Работа, произведенная над жидкостью, входящей со стороны сечения *А*1*,* равна р1A1v1АΔt, а работа, произведен­ная в сечении *А*2*,* равна *p2A2v2*Δ*t.* Следовательно, полная работа, произведенная над жидкостью, заключенной между A1 и *А2,* будет

C:\Мои документы\gray.jpg

что должно быть равно возрастанию энергии массы жидкости ΔM при прохождении от *А1* до *А2.* Другими словами,

C:\Мои документы\gray.jpg

где *Е1 —* энергия единицы массы жидкости в сечении *А1,* а *Е2 —* энергия единицы массы в сечении *А2.* Энергию единицы массы жидкости можно записать в виде

C:\Мои документы\gray.jpg

где 1/2*v2 —* кинетическая энергия единицы массы, ϕ — потен­циальная энергия, a *U —* дополнительный член, представляю­щий внутреннюю энергию единицы массы жидкости. Внутрен­няя энергия может соответствовать, например, тепловой энер­гии сжимаемой жидкости или химической энергии. Все эти величины могут изменяться от точки к точке. Воспользо­вавшись выражением для энергии в уравнении (40.16), получим

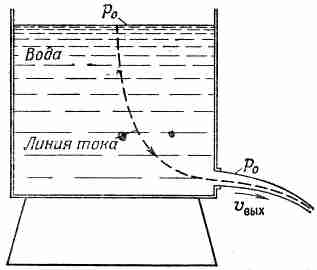
C:\Мои документы\gray.jpg

Но мы видели, что ΔМ=ρΔvΔt, и получили

C:\Мои документы\gray.jpg

а это как раз приводит нас к результату Бернулли, где имеется дополнительный член, представляющий внутреннюю энергию. Если жидкость несжимаемая, то внутренняя энергия с обеих сторон одна и та же и мы снова убеждаемся в справедливости уравнения (40.14) вдоль любой линии тока.

Рассмотрим теперь неко­торые простые примеры, в которых интеграл Бернулли позволяет нам сразу описать поток. Предположим, что из отверстия вблизи дна резервуара вы­текает вода (фиг. 40.7).



*Фиг. 40.7. Вытекание жидкости из резервуара.*

Рассмотрим случай, когда скорость пото­ка vвых в отверстии гораздо больше скорости потока вблизи по­верхности воды в резервуаре; другими словами, предположим, что диаметр резервуара настолько велик, что падением уровня жидкости можно пренебречь. (Мы могли бы при желании про­делать и более аккуратные вычисления.) Давление на по­верхность воды в резервуаре равно *р0* (атмосферному давлению), т. е. такое же, как и давление на бока струи. Напишем теперь уравнение Бернулли для линии тока наподобие той, что пока­зана на фиг. 40.7. В верхней части резервуара скорость *v* мы примем равной нулю; гравитационный потенциал ϕ здесь вы­берем тоже равным нулю. В отверстии же скорость равна vвых а ϕ =-gh*,* так что

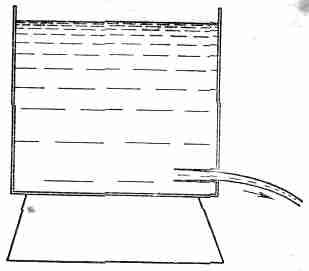
C:\Мои документы\gray.jpg

или

C:\Мои документы\gray.jpg

Скорость получилась в точности равной скорости предмета, падающего с высоты *h.* В этом нет ничего удивительного —ведь в конечном счете вода на выходе получает свою кинетическую энергию из запаса потенциальной энергии воды, находящейся наверху резервуара. Однако не воображайте, что вы можете определить скорость убывания жидкости из резервуара, умно­жив эту скорость vвых на площадь отверстия. Скорости частиц жидкости в тот момент, когда струя вырывается из отверстия, не параллельны друг другу, а имеют компоненту, направлен­ную к центру потока; струя сужается. Пройдя небольшое рас­стояние, струя перестает сжиматься, и скорости становятся параллельными. Таким образом, полный поток равен скорости, умноженной на площадь именно *в том месте,* где сжатие струи прекратилось. На самом деле, если у нас есть выходное отверстие просто в виде круглой дыры с острым краем, то се­чение струи сокращается до 62% от площади отверстия. Уменьшение эффективной площади выходного отверстия для различных форм выходных труб разное, а его экспериментальное значение можно найти в таб­лице *коэффициентов истечения.*

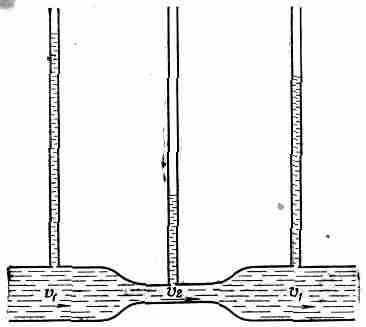
Если выходная труба вдается в резервуар, как показано на фиг. 40.8, то можно весьма красиво доказать, что коэффи­циент истечения в точности равен 50%. Я лишь намекну вам, как проводится это доказательство.



Фиг. 40.8. Если выходная труба вставлена внутрь жидкости, то сокращение струи составляет по­ловину площади отверстия.

Чтобы получить скорость, мы использовали закон сохране­ния энергии [см. уравнение (40.18)]. Можно еще рассмотреть закон сохранения импульса. Поскольку с выходящей струей должен утекать и импульс, то к поперечному сечению выходя­щей трубы должна быть приложена сила. Откуда же она берется? Сила эта должна происходить от давления на стенки. Но наше выходное отверстие мало и расположено далеко от стенок, поэтому скорость жидкости вблизи стенок резервуара будет очень мала. Следовательно, давление на каждую стенку, согласно (40.14), почти точно такое же, как статическое дав­ление в покоящейся жидкости. При этом статическое давление на любую точку с одной стороны резервуара должно урав­новешиваться равным давлением на противоположную стенку, *за исключением* точки на стороне, противоположной выходной трубе. Если теперь мы вычислим импульс, выталкиваемый со струей этим давлением, то сможем показать, что коэффициент истечения равен 1/2. Однако этот метод непригоден для отвер­стия, наподобие показанного на фиг. 40.7, ибо увеличение ско­рости около стенок вблизи области отверстия дает падение давления, которое невозможно вычислить.

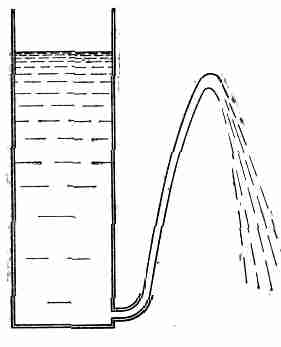
Рассмотрим теперь другой пример — горизонтальную трубу с переменным поперечным сечением (фиг. 40.9), по которой от одного конца к другому течет вода.



*Фиг. 40.9. Там, где скорость* повышается, *давление пони­жается.*

Сохранение энергии, а именно формула Бернулли, говорит, что в суженной области, там, где скорость выше, давление ниже. Мы можем легко про­демонстрировать этот эффект, измеряя давление в разных местах с различным сече­нием с помощью столбика воды, сообщающегося с потоком через достаточно малые отверстия, не возмущающие потока. При этом давление измеряется высотой вертикального столбика воды. И оно в узких местах действи­тельно оказывается меньше, чем в широких. Если после суже­ния площадь сечения возвращается к своей прежней величине — той, что была до сокращения, то давление снова возрастает. Формула Бернулли предсказывает, что давление до сужения должно быть тем же, что и после него, однако на самом деле оно заметно меньше. Ошибка нашего предсказания кроется в том, что мы пренебрегли трением, вязкой силой, которая вы­зывает падение давления вдоль трубы. Однако, несмотря на это падение, давление в узком месте определенно меньше (из-за возрастания скорости), чем по обеим сторонам от него, как это предсказал Бернулли. Скорость v2 должна превышать скорость v1 чтобы через сужение могло пройти то же количе­ство воды. Поэтому вода должна ускоряться, переходя из широкой части в узкую. Силы, которые приводят к этому ус­корению, и есть перепад дав­ления.

Этот результат можно про­верить с помощью еще одного простого опыта. Представьте, что у нас есть резервуар с водой и выходной трубой, которая выбрасывает струю воды вверх (фиг. 40.10).



*Фиг. 40.10. Доказательство того что v не равно √2gh,*

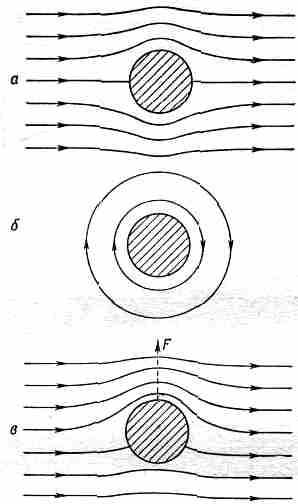
Если бы скорость истечения была в точности равна *√2gh,* то выходящая вода должна была бы подняться вплоть до уровня воды в резервуаре. Однако на опыте она начинает падать несколько ниже его. Наше приближение оказывается очень грубым; вязкое трение, которое мы не учли в нашей формуле для сохранения энергии, приводит к потере энергии. Пытались ли вы когда-нибудь, дунув между двумя слип­шимися листками бумаги, оторвать их друг от друга? Попытай­тесь! Они *сойдутся* вновь. Причина, разумеется, состоит в том, что воздух между листами имеет большую скорость, нежели когда он выходит наружу. Поэтому давление между листами *ниже* атмосферного, и они вместо того, чтобы разлететься в раз­ные стороны, соединятся.

**§ 4. Циркуляция**

В начале предыдущего параграфа мы видели, что если у нас есть безвихревая несжимаемая жидкость, то поток удов­летворяет следующим двум уравнениям:

∇•v=0, ∇Xv=0. (40.19)

Эти уравнения аналогичны уравнениям электростатики или магнитостатики в пустом пространстве. При отсутствии зарядов дивергенция электрического поля равна нулю, а ротор электро­статического поля всегда равен нулю. Ротор магнитного поля равен нулю при отсутствии токов, а дивергенция магнитного поля всегда равна нулю. Следовательно, уравнения (40.19) имеют такие же решения, как и уравнения для **Е** в электро­статике или уравнения для В в магнитостатике. Фактически в гл. 12, § 5 (вып. 5), мы уже решили задачу об обтекании сферы потоком в качестве электростатического аналога. Электростатическим аналогом является однородное электриче­ское поле плюс поле диполя, причем поле диполя подбирается таким, чтобы скорость потока, нормальная к поверхности сферы, была равна нулю. Задачу об обтекании цилиндра можно решить таким же способом, выбрав подходящее направление диполя относительно однородного потока. Эти решения спра­ведливы в тех случаях, когда скорость жидкости на больших расстояниях постоянна как по величине, так и по направлению. Они изображены на фиг. 40.11,а.



*Фиг. 40.11. Обтекание цилиндра идеальной жидкостью (а), циркуля­ция вокруг цилиндра (б) и cyпepрозuция случаев а и б (в).*

Задача об обтекании цилиндра имеет и другое решение, когда условия таковы, что поток на больших расстояниях движется по окружности вокруг цилиндра. Тогда поток будет круговым повсюду (фиг. 40.11,6). У такого потока есть цирку­ляция вокруг цилиндра, хотя ∇Xv *в жидкости* остается нулем. Но как циркуляция может существовать без ротора?

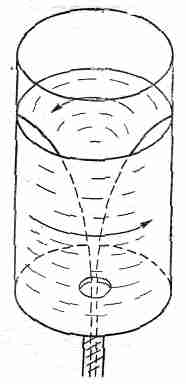
У нас есть циркуляция вокруг цилиндра, ибо криволинейный интеграл от v по замкнутой пет­ле, *охватывающей* цилиндр, не равен нулю. В то же время криволинейный интеграл от v по любому замкнутому пути, который *не* охватывает цилинд­ра, будет нулем. Аналогичные вещи встречались нам и рань­ше, когда мы определяли маг­нитное поле вокруг проводника. Ротор В был нулем вне провода, хотя криволинейный интеграл от В по пути, охватывающему провод, не исчезает. Поле скоростей в безвихревой циркуля­ции вокруг цилиндра в точности такое же, как и магнитное поле вокруг провода. Для кругового пути с центром, совпадаю­щим с центром цилиндра, криволинейный интеграл от скорос­ти равен

C:\Мои документы\gray.jpg

Для безвихревого потока интеграл не должен зависеть от r. Обозначим его через постоянную *С* и получим

C:\Мои документы\gray.jpg

где *v —* тангенциальная скорость, а r — расстояние от оси. Существует очень хороший способ демонстрации циркуля­ции жидкости в трубе. Вы берете прозрачный цилиндрический резервуар с трубкой в центре дна. Наполняете его водой, немного раскручиваете ее палочкой и вынимаете пробку из отводной трубы. И получаете тот красивый эффект, который показан на фиг. 40.12.



Фиг. 40.12. Вода с циркуляцией вытекает из резервуара.

(Подобное явление вы наверняка много раз видели в ванне!) Хотя вначале вы и создали некоторую угловую скорость ω, она из-за вязкости вскоре затухает и поток становится безвихревым. Однако ка­кая-то циркуляция вокруг трубки все же остается.

Из теории можно вычислить форму по­верхности воды в цилиндре. По мере того как частицы движутся внутрь, они набирают скорость. Согласно уравнению (40.20), тан­генциальная скорость увеличивается как *1/r —* просто благодаря закону сохранения момента количества движения, как у фигуриста, при­жавшего руки к телу. Радиальная скорость тоже возрастает как 1/r. Если пренебречь тангенциальным движением, то полу­чится, что вода идет внутрь по радиусу к отверстию, а из урав­нения ∇•v=0 следует, что радиальная скорость пропорцио­нальна 1/r. Таким образом, полная скорость тоже возрастает как 1/г и вода идет по спирали Архимеда. Поверхность вода — воздух целиком находится под атмосферным давлением, так что, согласно уравнению (40.14), она должна обладать свойством

*gz+1/2mv2=*const.

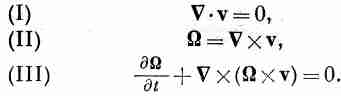
Ио здесь *v* пропорционально 1/r, поэтому форма поверхности будет такой:

C:\Мои документы\gray.jpg

Обратите внимание на одну интересную особенность, кото­рая наблюдается в случае несжимаемого безвихревого потока *(в общем случае* ее нет): если у нас есть какое-то одно решение и какое-то второе решение, то сумма их тоже будет решением. Это справедливо потому, что уравнения (40.19) — линейные. Полный же набор гидродинамических уравнений, т. е. урав­нений (40.8) — (40.10), не линеен, а это уже совсем другое дело. Однако для безвихревого потока вокруг цилиндра мы можем сложить один поток (фиг. 40.11,а) и другой поток (фиг. 40.11,б) и получить новый вид потока (фиг. 40.11,в). Этот новый поток особенно интересен. Скорость потока на *верхней* стороне цилиндра оказывается больше, чем на *нижней,* так что когда на циркуляцию вокруг цилиндра налагается чистый горизонтальный поток, то возникнет действующая на цилиндр *вертикальная сила;* она называется *подъемной силой.* Разумеется, если циркуляция отсутствует, то в соответствии с нашей теорией «сухой» воды для любого тела суммарная сила обращается в нуль.

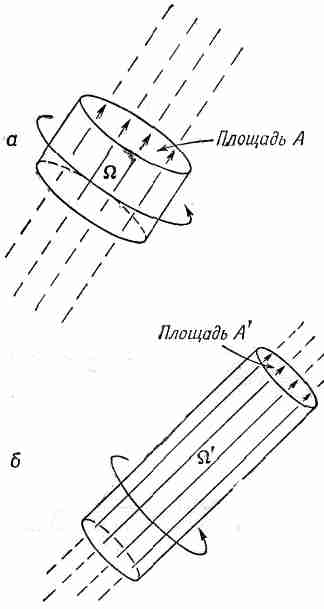
**§ 5. Вихревые линии**

Мы уже выписывали общие уравнения потока несжимаемой жидкости при наличии завихренности:



Физическое содержание этих уравнений было на словах описано Гельмгольцем в трех теоремах. Прежде всего пред­ставьте себе, что мы вместо линий потока нарисовали *вих­ревые линии.* Под вихревыми линиями мы подразумеваем линии поля, которые имеют направление вектора **Ω**, а плотность их в любой области пропорциональна величине **Ω**. Из уравнения (II) дивергенция **Ω** *всегда* равна нулю [вспомните гл.3,§ 7 (вып. 5): дивергенция ротора всегда нуль]. Таким образом, вихревые линии подобны линиям поля В: они нигде не кончаются и нигде не начинаются и всегда стремятся замкнуться. Формулу (III) Гельмгольц описал словами: вихревые линии *движутся вместе с жидкостью.* Это означает, что если бы вы пометили частички жидкости, расположенные на некоторой вихревой линии, на­пример окрасив их чернилами, то в процессе движения жидко­сти и переноса этих частичек они всегда отмечали бы новое положение вихревой линии. Каким бы образом ни двигались атомы жидкости, вихревые линии движутся вместе с ними. Это один из способов описания законов. Он также содержит и метод решения любых задач. Задавшись первоначальным видом потока, скажем задав всюду v, вы можете вычислить Ω. Зная v, можно также сказать, где будут вихревые линии немного позднее: они движутся со скоростью v. А с новым значением Ω можно воспользоваться уравнениями (I) и (II) и найти новую величину v. (Точно как в задаче о нахождении поля В по дан­ным токам.) Если нам задан вид потока в какой-то один момент, то в принципе мы можем вычислить его во все после­дующие моменты. Мы получаем общее решение невязкого потока.

Мне бы хотелось показать вам, как (по крайней мере ча­стично) можно понять утверждение Гельмгольца, а следовательно, формулу (III). Фактически это просто за­кон сохранения момента импульса, примененный к жидкости. Представьте себе маленький жидкий цилиндр, ось которого параллельна вихревым ли­ниям (фиг. 40.13,а).



*Фиг. 40.13. Группа вихревых линий в момент t (а) и те же самые линии в более поздний момент t' (б).*

Спустя некоторое время, *тот же самый* объем жидкости бу­дет находиться где-то в другом месте. Вообще го­воря, он будет иметь фор­му цилиндра с другим диа­метром и находиться в другом месте. Он может еще иметь другую ориентацию (фиг. 40.13,б). Но если изменяется диаметр, то длина тоже должна измениться так, чтобы объем остался постоянным (поскольку мы считаем жидкость несжимаемой). Кроме того, поскольку вихревые линии связаны с веществом, их плотность увеличивается обратно пропорционально умень­шению площади поперечного сечения цилиндра. Произведение Ω на площадь цилиндра *А* будет оставаться постоянной, так что в соответствии с Гельмгольцем

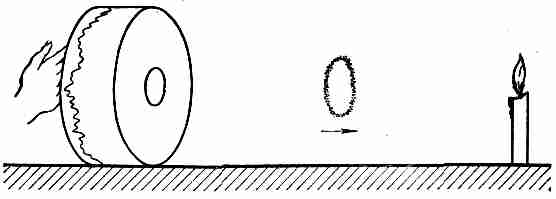
C:\Мои документы\gray.jpg

Теперь обратите внимание, что при нулевой вязкости все силы на поверхности цилиндрического объема (или *любого* объема в этом веществе) перпендикулярны поверхности. Силы давления могут заставить его изменить форму, но без *танген­циальных* сил *величина момента количества движения жидкости внутри* измениться не может. Момент количества движения жидкости внутри маленького цилиндра равен произведению его момента инерции *I* на угловую скорость жидкости, которая пропорциональна завихренности **Ω.** Момент же инерции цилиндра пропорционален mr2. Поэтому из сохранения момента количества движения мы бы заключили, что

C:\Мои документы\gray.jpg

Но масса будет одной и той же *(М1=М2),* а площадь пропор­циональна *R2,* так что мы снова получим просто уравнение (40.21). Утверждение Гельмгольца, которое эквивалентно формуле (III), есть просто следствие того факта, что в отсутствие вязкости момент количества движения элемента жидкости изме­ниться не может.

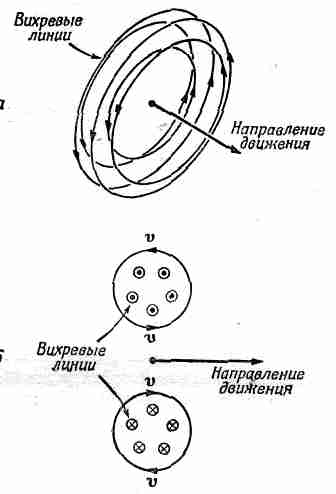
Есть хороший способ продемонстрировать движущийся вихрь с помощью аппаратуры, показанной на фиг. 40.14.



Фиг. 40.14. Распространяющиеся вихревые кольца.

Это «барабан» диаметром и длиной около 60 *см,* состоящий из цилиндрической коробки с натянутым на ее открытое основа­ние толстым резиновым листом. Барабан стоит на боку, а в центре его твердого дна вырезано отверстие диаметром около 8 *см.* Если резко ударить по резиновой диафрагме рукой, то из отверстия вылетает кольцевой вихрь. Хотя этот вихрь уви­деть нельзя, можно смело утверждать, что он существует, так как он гасит пламя свечи, стоящей в 3—6 *м* от барабана. По запаздыванию этого эффекта вы можете сказать, что «нечто» распространяется с конечной скоростью. Лучше разглядеть то, что вылетает, можно, предварительно напустив в барабан дыму. Тогда вы увидите вихри в виде изумительно красивых колец «табачного дыма».

Кольца дыма (фиг. 40.15,а) — это просто баранка из вих­ревых линий.



*Фиг. 40.15. Движущееся вих­ревое кольцо* (я) *и его попереч­ное сечение (б).*

Поскольку Ω=∇Xv, то эти вихревые линия описывают также циркуляцию v (фиг. 40.15,б). Для того чтобы объяснить, почему кольцо движется вперед (т. е. в направ­лении, составляющем с направлением **Ω** правый винт), можно рассуждать так: скорость циркуляции увеличивается к *внут­ренней* поверхности кольца, причем скорость внутри кольца направлена вперед. Поскольку линии **Ω** переносятся вместе с жидкостью, то и они движутся вперед со скоростью v. (Конечно, большая скорость на внутренней части кольца ответственна за движение вперед вихревых линий на его внешней части.)

Здесь необходимо ука­зать на одну серьезную трудность. Как мы уже от­мечали, уравнение (40.90) говорит, что если перво­начально завихренность **Ω** была равна нулю, то она всегда останется равной нулю. Этот результат — крушение теории «сухой» воды, ибо он означает, что если в какой-то момент значение **Ω** равно нулю, то оно *всегда* будет равно нулю, и ни при каких обстоятельствах *создать* завихренность нельзя. Однако в на­шем простом опыте с барабаном мы могли породить вихревые кольца в воздухе, который до того находился в покое. (Ясно, что пока мы не ударили по барабану, внутри него **v** = 0 и **Ω**=0.) Все знают, что, загребая веслом, можно соз­дать в воде вихри. Несомненно, для полного понимания поведе­ния жидкости следует перейти к теории «мокрой» воды.

Другим неверным утверждением в теории «сухой» воды является предположение, которое мы делали при рассмотре­нии потока на границе между ним и поверхностью твердого предмета. Когда мы обсуждали обтекание потоком цилиндра (например, фиг. 40.11), то считали, что жидкость скользит по поверхности твердого тела. В нашей теории скорость на поверх­ности твердого тела могла иметь любое значение, зависящее от того, как началось движение, и мы не учитывали никакого «трения» между жидкостью и твердым телом. Однако то, что скорость реальной жидкости должна на поверхности твердого тела сходить на нуль,— экспериментальный факт. Следова­тельно, наши решения для цилиндра и с циркуляцией, и без нее неправильны, как и результат о создании вихря. О более правильных теориях я расскажу вам в следующей главе.

***Главa 41***

**ТЕЧЕНИЕ «МОКРОЙ» ВОДЫ**

[**§ 1.Вя****зкость**](#а1)

[**§ 2. Вязкий** **поток**](#а2)

[**§ 3.Число Рейно****льдса**](#а3)

[**§ 4.Обтекан****ие кругового цилиндра**](#а4)

[**§ 5. Предел нуле****вой вязкости**](#а5)

[**§ 6.Поток** **Куеттэ**](#а6)

**§ 1. Вязкость**

В предыдущей главе мы говорили о поведе­нии воды, пренебрегая при этом эффектами вязкости. Теперь же мне хотелось бы обсудить, как вязкость влияет на течение жидкости. Рас­смотрим *реальное поведение* жидкости. Я опишу качественно, как ведет себя жидкость в самых разных условиях, так чтобы вы получше прочувствовали эту науку. И хотя вы увидите сложные уравнения и услышите о трудных вещах, наша цель совсем не в том, чтобы изучить все тонкости. Цель этой главы скорее «общеобразовательная», просто я хочу дать вам некоторое понятие о том, как устроен мир. Однако здесь все же есть один пункт, который стоит того, чтобы его выучить: полезно знать простое определение вязкости. С него мы и начнем. Все же остальное предназначено для вашего удовольствия.

В предыдущей главе мы нашли, что законы движения жидкости содержатся в уравнении

C:\Мои документы\gray.jpg

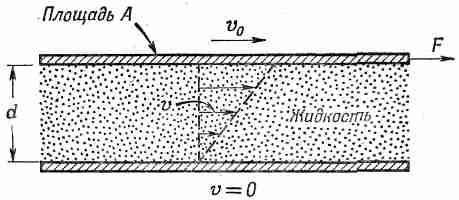
В нашем приближении «сухой» воды мы отбра­сывали последнее слагаемое, так что всеми эффектами вязкости мы пренебрегали. Кроме того, мы иногда делали еще дополнительное приближение, считая жидкость несжимаемой, и при этом получали дополнительное урав­нение;

∇•v=0.

Это приближение часто оказывается вполне приличным, особенно когда скорость потока много меньше скорости звука. Но в реальных жидкостях мы почти никогда не можем пренебречь внутрен­ним трением, называемым нами вязкостью; большинство интересных вещей в поведении жидкости так или иначе свя­зано именно с этим свойством. Так, мы узнали, что циркуля­ция «сухой» воды никогда не изменяется: если ее не было вначале, то она никогда и не появится. Но в то же время мы повседневно сталкиваемся с циркуляцией в жидкости. Так что нашу теорию надо подправить.

Начнем с важного экспериментального факта. Когда мы занимались потоком «сухой» воды, обтекающей какой-то пред­мет или текущей мимо него, т. е. так называемым «потенциаль­ным потоком», у нас не было причин запретить воде иметь составляющую скорости, тангенциальную к поверхности пред­мета; только нормальная компонента должна была быть равна нулю. Мы не принимали во внимание возможность возникнове­ния сил сдвига между жидкостью и твердым телом. А вот ока­зывается, хотя это далеко и не очевидно, что во всех случаях, где это было проверено экспериментально, *скорость жидкости на поверхности твердого тела в точности равна нулю.* Вы заме­чали, конечно, что лопасти вентилятора собирают на себя тонкий слой пыли, и это несмотря на то, что они вращаются в воздухе. Тот же эффект можно наблюдать даже в больших аэродинамических трубах. Почему же пыль не сдувается воз­духом? Несмотря на то что лопасти вентилятора быстро вра­щаются в воздухе, скорость воздуха относительно них, измерен­ная непосредственно на их поверхности, равна нулю, так что поток воздуха не возмущает даже мельчайших [пылинок](#прим1). Мы должны модифицировать теорию так, чтобы она согласо­валась с тем экспериментальным фактом, что во всех обычных жидкостях молекулы, находящиеся рядом с поверхностью, имеют нулевую скорость (относительно [поверхности](#прим2)).

Сначала мы характеризовали жидкость так, что если при­ложить к ней напряжение сдвига, то, сколь бы мало оно ни было, жидкость «поддается» и течет. В статическом случае никаких напряжений сдвига нет. Однако, когда равновесия еще нет, в момент, когда вы давите на жидкость, силы сдвига вполне могут быть. *Вязкость* как раз и описывает эти силы, возникающие в движущейся жидкости. Чтобы измерить силы сдвига в процессе движения жидкости, рассмотрим такой экспе­римент. Предположим, что имеются две плоские твердые пла­стины, между которыми находится вода (фиг. 41.1), причем одна из пластин неподвижна, тогда как другая движется парал­лельно ей с малой скоростью *v0.*



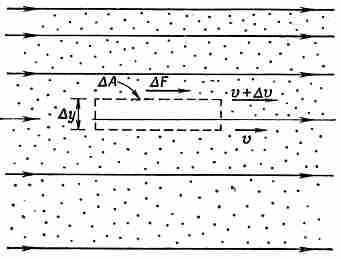
*Фиг. 41.1. Увлечение жидкости между двумя параллельными пластинками.*

Если вы будете измерять силу, требуемую для поддержания движения верхней пластины, то найдете, что она пропорциональна площади пластины и отно­шению *v0/d,* где *d —* расстояние между пластинами. Таким образом, напряжение сдвига *F/A* пропорционально *v0/d:*

C:\Мои документы\gray.jpg

Коэффициент пропорциональности η называется *коэффициен­том вязкости.*

Если перед нами более сложный случай, то мы всегда можем рассмотреть в воде небольшой плоский прямоугольный объем, грани которого параллельны потоку (фиг. 41.2).



*Фиг. 41.2. Напряжения сдви­га в вязкой жидкости.*

Силы в этом объеме определяются выражением

C:\Мои документы\gray.jpg

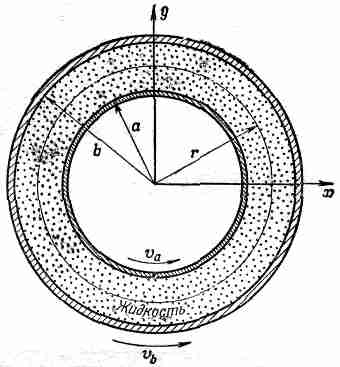
Далее, *дvx/дy* представляет *скорость изменения* деформаций сдвига, определенных нами в гл. 38, так что силы в жидкости пропорциональны *скорости изменения* деформаций сдвига.

В общем случае мы пишем

C:\Мои документы\gray.jpg

При равномерном вра­щении жидкости производ­ная *дuх/ду* равна *дvy/дx* с обратным знаком, a *Sxy* будет равна нулю, как это и требуется, ибо в равно­мерно вращающейся жидкости напряжения отсутствуют. (Подобную же вещь мы проде­лывали в гл. 39 при определении *еxy* .) Разумеется, для *Syz* и S*гх* тоже есть соответствующие выражения.

В качестве примера применения этих идей рассмотрим дви­жение жидкости между двумя коаксиальными цилиндрами. Пусть радиус внутреннего цилиндра равен *а,* его скорость будет vа, а радиус внешнего цилиндра пусть будет b*,* а скорость равна v*b* (фиг. 41.3).



*Фиг. 41.3. Поток жидкости между двумя концентрическими цилиндрами, вращающимися с разными угловыми скоростями.*

Возникает вопрос, каково распределение скоростей между цилиндрами? Чтобы ответить на него, начнем с получения формулы для вязкого сдвига в жидкости на рас­стоянии rот оси. Из симметрии задачи можно предположить, что поток всегда тангенциален и что его величина зависит только от r*; v=v(r).* Если мы понаблюдаем за соринкой в воде, расположенной на расстоянии rот оси, то ее координаты как функции времени будут

*x = rcosωt, у=r*sinωt,

где ω=*v/r.* При этом *х-* и y-компоненты скорости равны

*vx=-*rωsinωt =-ω*у* и *vy*= rωcosωt=ω*х.* (41.4)

Из формулы (41.3) получаем

C:\Мои документы\gray.jpg

Для точек с *у=*0 имеем *д*ω*/ду*=0, *а х(д*ω*/дх)* будет равно r*(d*ω*)/dr).* Так что в этих точках

C:\Мои документы\gray.jpg

(Разумно думать, что величина *S* должна зависеть от *дω/дr,* когда ω не изменяется с r, жидкость находится в состоянии равномерного вращения и напряжения в ней не возникают.) Вычисленное нами напряжение представляет собой танген­циальный сдвиг, одинаковый повсюду вокруг цилиндра. Мы можем получить *момент сил,* действующий на *цилиндриче­ской поверхности* радиусом r, путем умножения напряжения сдвига на плечо импульса rи площадь *2πrl:*

C:\Мои документы\gray.jpg

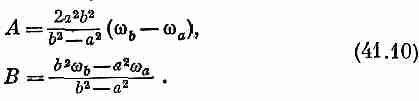
Поскольку движение воды стационарно и угловое уско­рение отсутствует, то полный момент, действующий на ци­линдрическую поверхность воды между радиусами rи r+*dr,* должен быть нулем; иначе говоря, момент сил на расстоянии r должен уравновешиваться равным ему и противоположно на­правленным моментом сил на расстоянии r+*dr,* так что τ не должно зависеть от r*.* Другими словами, r3(dω/dr) равно некоторой постоянной, скажем *А,* и

dω/dr=A/r3 (41.8)

Интегрируя, находим как ω изменяется с r:

C:\Мои документы\gray.jpg

Постоянные *А* и *В* должны определяться из условия, что ω=ωa в точке *r=a*, a ω=ωb в точке *r=b.* Тогда находим



Таким образом, ω как функция r нам известна, а стало быть, известно и *v=ωr*.

Если же нам нужно определить момент сил, то его можно получить из выражений (41.7) и (41.8);

C:\Мои документы\gray.jpg

или

C:\Мои документы\gray.jpg

Он пропорционален относительной угловой скорости двух цилиндров. Имеется стандартный прибор для измерения коэф­фициентов вязкости, который устроен следующим образом: один из цилиндров (скажем, внешний) посажен на ось, но удер­живается в неподвижном состоянии пружинным динамометром, который измеряет действующий на него момент сил, а внутрен­ний цилиндр вращается с постоянной угловой скоростью. Коэффициент вязкости определяется при этом из формулы (41.11).

Из определения коэффициента вязкости вы видите, *что η* измеряется в *ньютон*•*сек/м2.* Для воды при 20° С

η=103 *нъютон*•*сек/м2.*

Часто удобнее бывает пользоваться *удельной вязкостью,* которая равна η, деленной на плотность ρ. При этом величины удельных вязкостей воды и воздуха сравнимы:

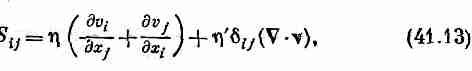
Вода при 20°С η/ρ=10-6*м2/сек*

Воздух при 20°С η/ρ=15•10-6м2/сек. *,* (41.12)

Обычно вязкость очень сильно зависит от температуры. Напри­мер, для воды непосредственно над точкой замерзания отно­шение η/ρ в 1,8 больше, чем при 20° С.

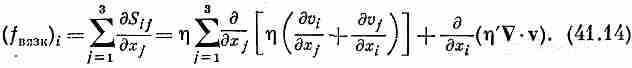
**§ 2. Вязкий поток**

Перейдем теперь к общей теории вязкого потока, по крайней мере настолько общей, насколько это и известно человеку. Вы уже понимаете, что компоненты сдвиговых напряжений сдвига пропорциональны пространственным производным от раз­личных компонент скорости, таких, как *dvx/dy* или *dvy/дх.* Однако в общем случае *сжимаемой* жидкости в напряжениях есть и другой член, который зависит от других производных скорости. Общее выражение имеет вид



где *хi —* какая-либо из координат *х, у* или *z; vi —* какая-либо з прямоугольных составляющих скорости. (Значок δij обозна­чает символ Кронекера, который равен единице при *i=j* и нулю при *i≠j*.) Ко всем диагональным элементам *Sij* тензора напряжений прибавляется дополнительный член η'∇•v. Если жидкость несжимаема, то ∇•v=0 и дополнительного члена не появляется, так что он действительно имеет отношение к внутренним силам при сжатии. Для описания жидкости, точно так же как и для описания однородного упругого тела, требуются две постоянные. Коэффициент η представляет «обыч­ный» коэффициент вязкости, который мы уже учитывали. Он называется также *первым коэффициентом вязкости,* а новый коэффициент η' называется *вторым коэффициентом вязкости.*

Теперь нам предстоит найти вязкую силу **f**вязк, действую­щую на единицу объема, после чего мы сможем подставить ее в уравнение (41.1) и получить уравнение движения реальной жидкости. Сила, действующая на маленький кубический объем жидкости, представляет собой равнодействующую всех сил, действующих на все шесть граней. Взяв их по две сразу, мы получим разность, которая зависит от производных напряжений, и, следовательно, от вторых производных скоростей. Это прият­ный результат, ибо он приведет нас опять к векторному урав­нению. Компонента вязкой силы, действующей на единицу объема в направлении оси *хi,* равна



Обычно зависимость коэффициентов вязкости от координат положения несущественна и ею можно пренебречь. Тогда вяз­кая сила на единицу объема содержит только вторые производ­ные скорости. Мы видели в гл. 39, что наиболее общей формой вторых производных в векторном уравнении будет сумма Лапласиана (∇•∇)v = ∇2v и градиента дивергенции (∇ (∇•v)). Выражение (41.14) представляет как раз такую сумму с коэф­фициентами η и *(*η+η'). Мы получаем

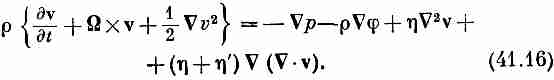
C:\Мои документы\gray.jpg

В случае несжимаемой жидкости ∇•v=0 и вязкая сила в еди­нице объема будет просто равна η∇2v. Это и все, чем обычно пользуются; однако если вам понадобится вычислить погло­щение звука в жидкости, то вам потребуется и второй член. Теперь мы можем закончить вывод уравнения движения реальной жидкости. Подставляя (41.15) в уравнение (41.1), получаем

C:\Мои документы\gray.jpg

Уравнение получилось, конечно, сложное, но ничего не поде­лаешь, такова природа.

Если мы введем Ω=∇Xv, как делали это раньше, то наше уравнение можно записать в виде



Мы снова предполагаем, что единственными объемными силами являются консервативные силы типа сил тяжести. Чтобы понять смысл нового члена, давайте рассмотрим случай несжимаемой жидкости. Если мы возьмем ротор уравнения (41.16), то полу­чим

C:\Мои документы\gray.jpg

Это напоминает (40.9) с той только разницей, что в правой части имеется еще одно слагаемое. Когда правая часть была равна нулю, то имелась теорема Гельмгольца о том, что вихри всегда движутся вместе с жидкостью. Теперь же в правой части появилось довольно сложное выражение, из которого, однако, не сразу же следуют физические выводы. Если бы мы пренебрегли членом ∇X(ΩXv), то получили бы *диффузион­ное уравнение.* Новый член означает, что вихри диффундируют в жидкости. При большом градиенте вихри расползаются в со­седние области жидкости.

Именно поэтому утолщаются кольца табачного дыма. С этим же связано красивое явление, возникающее при прохождении кольца «чистого» вихря (т. е. «бездымного» кольца, созданного с помощью описанной в предыдущей главе аппаратуры) через облако дыма. Когда оно выходит из облака, к нему «прилипает» некое количество дыма и мы видим полую оболочку из дыма. Какое-то количество завихренности **Ω** диффундирует в окру­жающий дым, продолжая свое движение вперед вместе с вихрем.

**§ 3. Число Рейнольдса**

Посмотрим теперь, как изменяется течение жидкости из-за нового члена с вязкостью. Рассмотрим несколько подробнее две задачи. Первая — обтекание жидкостью цилиндра; эту задачу мы пытались решить в предыдущей главе, используя теорию невязкой жидкости. Оказывается, что сегодня возможно найти решение вязких уравнений только для некоторых спе­циальных случаев. Так что кое-что из того, что я расскажу вам, основано на экспериментальных измерениях, считая, конечно, что экспериментальная модель удовлетворяла урав­нению (41.17).

Математически задача состоит в следующем: мы хотим найти решение для потока несжимаемой вязкой жидкости вблизи длинного цилиндра диаметром *D.* Поток должен опреде­ляться уравнением (41.17) и

Ω=∇Xv (41.18)

с условием, что скорость на больших расстояниях равна не­которой постоянной *V* (параллельной оси *х),* а на поверхности цилиндра равна нулю. Так что

vя=vу=vz=0 (41.19)

при

x2+y2=D2/4.

Это полностью определяет математическую задачу.

Если вы вглядитесь в эти выражения, то увидите, что в зада­че есть четыре различных параметра: η, ρ, *D* и *V.* Можно подумать, что нам придется иметь дело с целой серией решений для разных V, разных *D* и т. д. Вовсе нет. Все возможные раз­личные решения соответствуют разным значениям *одного пара­метра.* Такова наиболее важная общая вещь, которую мы мо­жем сказать о вязком потоке. А чтобы понять, почему это так, заметьте сначала, что вязкость и плотность появляются в виде отношения η/ρ, т. е. *удельной* вязкости. Это уменьшает число независимых параметров до трех. Предположим теперь, что все расстояния мы измеряем в единицах той единственной длины, которая появляется в задаче: диаметра цилиндра *D,* т. е. вместо *х, у, z* мы вводим новые переменные *х', у', z',* причем

*x=x'D, y=y'D, z=z'D.*

При этом параметр *D* из (41.19) исчезает. Точно так же если будем измерять все скорости в единицах V, т. е. если мы поло­жим *v=v'V,* то избавимся от *V,* а v*'* на больших расстояниях будет просто равно единице. Поскольку мы фиксировали наши единицы длины и скорости, то единицей времени теперь должно быть *D/V,* так что мы должны сделать подстановку;

t=t'D/V. (41.20)

В наших новых переменных производные в уравнении (41.18) тоже изменятся: так, *д/дх* перейдет в *(1/D)(д/дх')* и т. д., так что уравнение (41.18) превратится в

C:\Мои документы\gray.jpg

А наше основное уравнение (41.17) перейдет в

C:\Мои документы\gray.jpg

Все постоянные при этом собираются в один множитель, который мы, следуя традиции, обозначим черезC:\Мои документы\gray.jpg:

C:\Мои документы\gray.jpg

Если теперь мы просто запомним, что все наши уравнения должны выписываться для величин, измеряемых в новых единицах, то все штрихи можно опустить. Тогда уравнения для потока примут вид

C:\Мои документы\gray.jpg

и

C:\Мои документы\gray.jpg

с условиями ,

v=0 , для

*х2+у2 =1/4* (41.24)

и

vx=1, vy=vz=0

*для*

x2+y2+z2>>1.

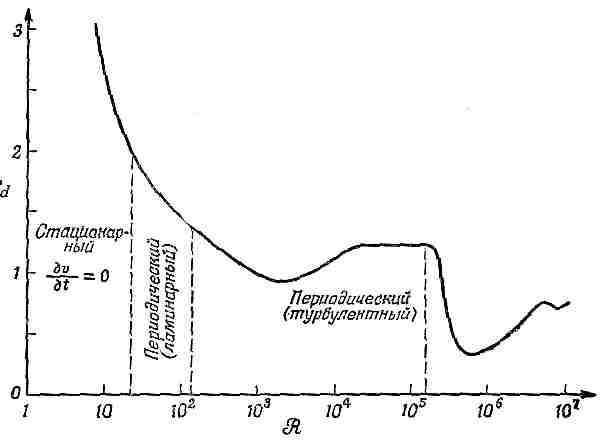
Что все это значит? Если, например, мы решили задачу для потока с одной скоростью V*1* и некоторого цилиндра диа­метром *D1 а* затем интересуемся обтеканием цилиндра другого диаметра *D2* другой жидкостью, то ноток будет одним и тем же при такой скорости *V2,* которая отвечает тому же самому числу Рейнольдса, т. е. когда

C:\Мои документы\gray.jpg

В любых случаях, когда числа Рейнольдса одинаковы, по­ток при выборе надлежащего масштаба *х', у', z'* и *t'* будет «выглядеть» одинаково. Это очень важное утверждение, ибо оно означает, что мы можем определить поведение потока воз­духа при обтекании крыла самолета, не строя самого самолета и не испытывая его. Вместо этого мы можем сделать модель и провести измерения, используя скорость, которая дает то же самое число Рейнольдса. Именно этот принцип позволяет нам применять результаты измерений над маленькой моделью самолета в аэродинамической трубе или результаты, получен­ные с моделью корабля, к настоящим объектам. Напомню, однако, что это можно делать только при условии, что сжимае­мостью жидкости можно пренебречь. В противном случае войдет новая величина — скорость звука. При этом различ­ные модели будут действительно соответствовать друг другу только тогда, когда отношение V к скорости звука тоже приблизительно одинаково. Отношение скорости *V к* скорости звука называется *числом Маха.* Таким образом, для скоростей, близких к скорости звука или больших, поток в двух задачах будет выглядеть одинаково, если и *число Маха и число Рейнольдса* в обеих ситуациях *одинаковы.*

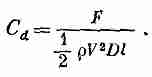
**§ 4. Обтекание кругового цилиндра**

Вернемся теперь обратно к задаче об обтекании цилиндра медленным (почти несжимаемым) потоком. Я дам вам качест­венное описание потока реальной жидкости. О таком потоке нам необходимо знать множество вещей. Например, какая увлекающая сила действует на цилиндр? Сила, увлекающая цилиндр, показана на фиг. 41.4 как функция величины *,* ко­торая пропорциональна скорости *V,* если все остальное фиксировано.



*Фиг. 41.4. Коэффициент увлечения Сd кругового цилиндра как функция числа Рейнольдса.*

Фактически на рисунке отложен *коэффициент увлече­ния Сd —* безразмерное число, равное отношению силы к *1/2ρV2Dl (d —* диаметр, *l* —длина цилиндра, а ρ —плотность жидкости):

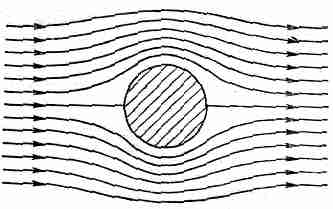


Коэффициент увлечения изменяется довольно сложным обра­зом, как бы намекая нам на то, что в потоке происходит нечто интересное и сложное. Свойства потока полезно описывать для различных областей изменения числа Рейнольдса. Прежде всего, когда число Рейнольдса очень мало, поток вполне ста­ционарен, скорость в любой точке потока постоянна и он плавно обтекает цилиндр. Однако распределение линий потока не похоже на их распределение в потенциальном потоке. Они описывают решение несколь­ко другого уравнения. Когда скорость очень мала или, что эквивалентно, вязкость очень ве­лика, так что вещество по своей консистенции напоминает мед, можно отбросить инерционные члены и описать поток уравнением

C:\Мои документы\gray.jpg

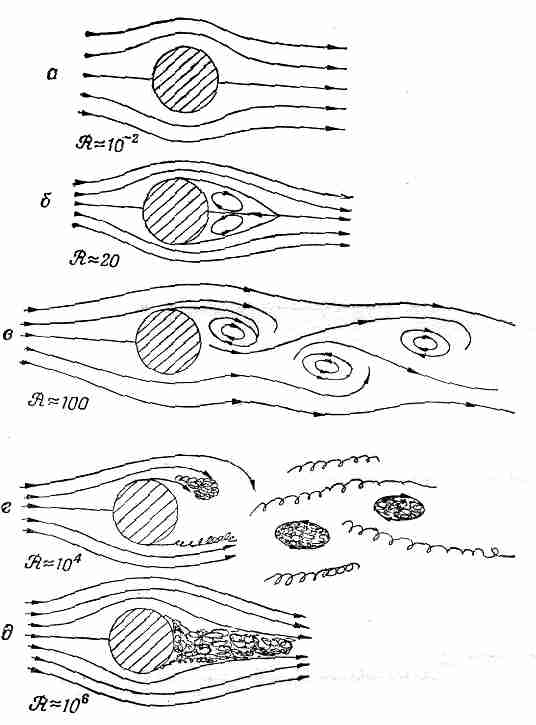
Это уравнение впервые было решено Стоксом. Он также решил задачу для сферы. Когда маленькая сфера движется при малых числах Рейнольдса, то к ней приложена сила, равная 6πηaV*,* где а *—* радиус сферы, a V — его скорость.

Это очень полезная формула: она говорит нам о скорости, с которой мельчайшие частички, которые приближенно можно считать шариками, движутся в жидкости под действием данной силы, как, например, в центрифуге, или при осаждении, или, наконец, в процессе диффузии. В области малых чисел Рей­нольдса, т. е. при <1, линии v вокруг *цилиндра* имеют такой вид, как на фиг. 41.5.



*Фиг. 41.5. Вязкий поток вблизи цилиндра (малая вязкость).*

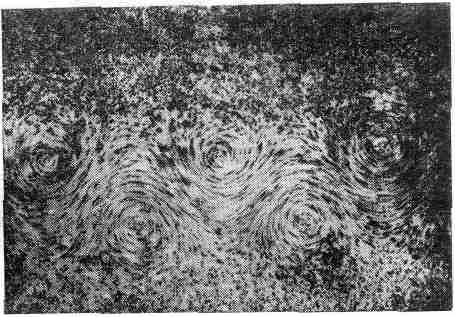
Если теперь мы увеличим скорость потока, так что число Рейнольдса станет несколько больше единицы, то увидим, что поток изменится.



*Фиг. 41.6. Поток, обтекающий цилиндр, при различных числах Рейнольдса.*

Как показано на фиг. 41.6, б, за сферой воз­никнут вихри. До сих пор неясно, существовали ли вихри и при малых числах Рейнольдса или же они возникли неожиданно при некотором определенном числе? Обычно считали, что циркуляция нарастает постепенно. Однако теперь думают, что скорее она проявляется неожиданно и возрастает с увеличе­нием *.* Во всяком случае, поток в районе от =10 до *=*30 меняет свой характер. За цилиндром образуется пара вихрей.

Когда число Рейнольдса проходит через значения в районе 40, поток снова меняется. Характер движения претерпевает не­ожиданное и резкое изменение. Один из вихрей за цилиндром становится настолько длинным, что он отрывается и плывет вниз по течению вместе с жидкостью. При этом жидкость за цилиндром снова закручивается и возникает новый вихрь. Эти вихри поочередно отслаиваются то с одной, то с другой стороны, так что в какой-то момент поток выглядит приблизи­тельно так, как показано на фиг. 41.6, *в.* Такой поток вихрей называется вихревой цепочкой Кармана. Она всегда появляется для чисел Рейнольдса >40. Фотография такого потока пока­зана на фиг. 41.7.



*Фиг. 41.7. Фотография цепочки вихрей в потоке* за *цилиндром.*

Разница в режиме между двумя потоками, изображенными на фиг. 41.6, а, *б* или *в,* очень велика. На фиг. 41.6, *а* и *б* скорость постоянна, тогда как на фиг. 41,6, *в* скорость в любой точке изменяется со временем. Выше =40 стационар­ное решение отсутствует; граница перехода отмечена на фиг. 41.4 пунктирной линией. Для таких более высоких чисел поток изменяется со временем некоторым *регулярным* периодическим образом. Создаются вихри.

Можно представить себе физическую причину возникновения этих вихрей. Мы знаем, что на поверхности цилиндра скорость жидкости должна быть равна нулю, но при удалении от поверх­ности скорость быстро возрастает. Это большое местное изменение скорости жидкости и создает вихри. Когда скорость основного потока достаточно мала, у вихрей хватает времени, чтобы продиффундировать из тонкого слоя вблизи поверхности твердого тела, где они создаются, и «расплыться» на большую область. Эта физическая картина должна подготовить нас к сле­дующему изменению природы потока, когда скорость основ­ного потока или число  увеличивается еще больше.

По мере возрастания скорости у вихря остается все меньше и меньше времени, чтобы «расплываться» на большую область жидкости. К тому моменту, когда число Рейнольдса достигнет нескольких тысяч, вихри начинают заполнять тонкую ленту (фиг. 41.6, *г).* В таком слое поток хаотичен и нерегулярен. Такая область называется *пограничным слоем,* и этот нерегуляр­ный поток с увеличением пробивает себе путь все дальше и дальше вниз по течению. В области турбулентности скорости очень нерегулярны и «беспорядочны», вдобавок поток больше не двумерный — он крутится во всех трех измерениях. Кроме того, на турбулентное движение налагается еще регулярное переменное движение.

При дальнейшем увеличении числа Рейнольдса область турбулентности пробирается вперед, пока при потоке с , превышающим 105, не достигнет места, где линии тока огибают цилиндр. При этом поток будет похож на то, что показано на фиг. 41.6, *д,* и мы получаем так называемый «турбулентный след». Кроме того, происходят еще коренные изменения в силе увлечения — она, как видно из фиг. 41.4, сильно падает. При таких скоростях увлекающая сила с возрастанием скорости действительно *уменьшается.* По-видимому, здесь про­является некоторое стремление к периодичности.

А что происходит при еще больших числах Рейнольдса? С дальнейшим увеличением скорости размер области турбулент­ности снова увеличивается и сила сопротивления возрастает. Последние эксперименты, которые дошли до области R=107 или несколько больше, показывают, что в турбулентной области появляется новая периодичность, быть может, потому, что вся область колеблется вперед и назад в общем движении, а может быть, из-за нового сорта вихрей, которые появляются вместе с нерегулярным «шумовым» движением. Детали его полностью еще не ясны, и они до сих пор изучаются экспериментально.

**§ 5. Предел пулевой вязкости**

Мне бы хотелось подчеркнуть, что ни один из описанных нами потоков ни в каком отношении не похож на решение урав­нения потенциального потока, о котором говорилось в преды­дущей главе. На первый взгляд это очень удивительно. Ведь R в конце концов пропорционально 1/η. Так что предел η→0 эквивалентен пределу R→∞. И если мы перейдем к пределу больших R в (41.23), то избавимся от правой части и получим как раз уравнения из предыдущей главы. Но все же трудно поверить, что сильно турбулентный поток с R=107 хоть в ка­кой-то степени приближается к гладкому потоку, вычисленному из уравнений «сухой» воды. Как может случиться, что при R=∞ поток, описываемый уравнением (41.23), дает реше­ние, полностью отличное от решения, полученного при η=0, с которого мы начали? Ответ очень интересен. Обратите вни­мание, что в правой части (41.23) стоит произведение 1/R на *вторую производную.* Это наиболее высокая степень производной в уравнении: слева только первые производные. Получается так, что, хотя коэффициент 1/R становится малым, Ω в пространстве вблизи поверхности претерпевает очень быстрые изменения. Эти резкие изменения компенсируют малость коэффициента, и про­изведение с увеличением R *не стремится к нулю.* Поэтому, хотя коэффициент при ∇2Ω стремится к нулю, решения не приближа­ются к предельному случаю.

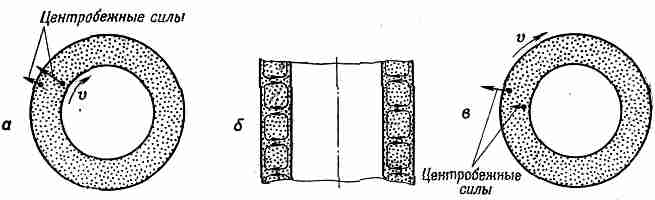
Вас может удивить: «Что же такое мелкомасштабная турбу­лентность и как она может поддерживать сама себя? Как за­вихренность, которая создается где-то на краях цилиндра, приводит к такому шуму позади него?». Ответ снова очень интересен. Завихренность имеет тенденцию к самоусилению. Если мы на минуту забудем о диффузии завихренности, которая обусловливает потери, то законы потока говорят (как мы уже видели), что линии вихря переносятся вместе с жидкостью со скоростью v. Представьте себе некоторое количество линий О, которые возмущаются и скручиваются очень сложной картиной скоростей потока v. Прежде простые линии спу­таются и сожмутся. Величина завихренности будет возрастать, равно как и ее нерегулярности (положительные и отрицатель­ные), которые, вообще говоря, тоже будут увеличиваться. Таким образом, завихренность в трех измерениях по мере перемешивания жидкости будет возрастать.

Вы можете также спросить: «Когда же в конце концов справедлива теория потенциального потока?» Прежде всего она удовлетворительна вне турбулентной области, куда проник­новение завихренности из-за диффузии незначительно. Изго­товляя специальные обтекаемые тела, мы стараемся сделать область турбулентности как можно меньше. Поток, обтекающий крылья самолета, которые имеют специальную рассчитанную форму,— почти настоящий потенциальный поток.

**§ 6. Поток Куеттэ**

Можно показать, что сложный и изменчивый характер потока мимо цилиндра не исключение и что такое разнообразие возможностей получается и в общем случае. В § 1 мы нашли решение для вязкой жидкости между двумя цилиндрами и можем сравнить эти результаты с тем, что получается на самом деле. Если мы возьмем два концентрических цилиндра и запол­ним пространство между ними маслом с добавленной в него мелкой алюминиевой пудрой, то поток можно легко наблюдать. Если начнем медленно вращать внешний цилиндр, то ничего неожиданного не произойдет (фиг. 41.8, *а).* Можно медленно вращать и внутренний цилиндр, все равно ничего потрясающего не будет. А вот если мы начнем очень быстро вращать внутренний цилиндр — случится нечто удивительное. Жидкость разобьется на горизонтальные полосы (фиг. 41.8, *б).* Если с по­добной же скоростью мы будем вращать внешний, цилиндр, а внутренний оставим в покое, то никакого похожего эффекта не возникает. Как же получается, что не все равно, какой ци­линдр вращать — внутренний или внешний. Ведь в конце концов вид потока, который мы нашли в § 1, зависел только от ωb-ω*а.* Ответ можно получить, взглянув на сечение цилиндра, изображенного на фиг. 41.9. Когда внутренние слои жидкости движутся быстрее, чем внешние, они стремятся двигаться наружу: центробежная сила становится больше удерживающего давления. Но весь слой целиком не может двигаться равно­мерно, так как на его пути стоят внешние слои. Поэтому они

разбиваются на клетки и цир­кулируют, как показано на фиг. 41.9, *б.*

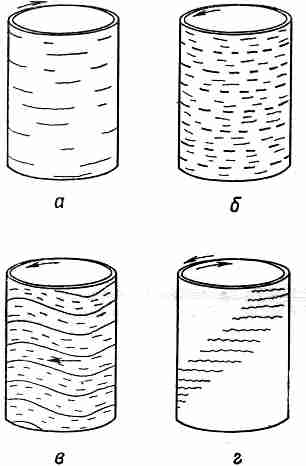


Фиг. 41.9. Вот почему поток разбивается на полосы.

Это напоминает кон­векционные токи в комнате, где на уровне пола имеется слой теплого воздуха. Когда внутрен­ний цилиндр находится в покое, а внешний цилиндр вращается с большой скоростью, центро­бежные силы создают градиент давления, который удерживает все в равновесии

(фиг. 41.9, *в),*как теплый воздух, находящийся у нотолка.

Теперь ускорим внутренний цилиндр. Сначала число полос увеличится. Затем неожиданно полосы станут волнистыми (см. фиг. 41.8,в), и волны эти начнут обтекать цилиндр.



Фиг. 41.8. Виды потока жидкости между двумя прозрачными вращаю­щимися цилиндрами.

Скорость этих волн легко измерить. При больших скоростях вращения она приближается к *1/3* от скорости внутреннего цилиндра, а почему, никто не знает. Здесь есть над чем подумать. Простое число 1/3 и полное отсутствие объяснения! Вообще говоря, весь механизм образования волн тоже далеко не ясен, хотя мы имеем дело со стационарным ламинарным потоком.

Если теперь мы еще начнем вращать и внешний цилиндр, но в противоположную сторону, то картина потока начнет разбиваться. Волновые области начнут чередоваться со спокой­ными на вид областями, образуя спиральную картину (см. фиг. 41.8, г). Однако в этих «спокойных» областях, как можно заметить, поток на самом деле совсем не регулярен; он полностью турбулентен. Кроме того, в волновых областях начинает еще появляться нерегулярный турбулентный поток. Если цилиндры вращаются еще быстрее, то весь поток стано­вится хаотическим турбулентным.

Этот простой эксперимент показал нам много интересных режимов потока, совершенно отличных один от другого и все же содержащихся в нашем простом уравнении при различных величинах одного-единственного параметра R. С помощью наших вращающихся цилиндров мы можем наблюдать многие эффекты, проявляющиеся в потоке, проходящем мимо цилиндра: во-первых, это стационарный поток, во-вторых, целый набор потоков, которые изменяются со временем, но регулярным гладким образом, и, наконец, поток становится полностью нерегулярным. Те же самые эффекты каждый из вас видел в столбике табачного дыма, струящегося от сигареты, когда воздух спокоен. Сначала этот столбик гладкий, затем он как-то скручивается, поток дыма начинает разрушаться, и, наконец, все заканчивается беспорядочными клубами.

Основное, что вам следует вынести из всего сказанного, заключается в том, что в одном простом наборе уравнений (41.23) скрывается огромное разнообразие поведений. Все это решения одного и того же уравнения при различных значениях R. У нас нет причин думать, что в этом уравнении мы потеряли какие-то слагаемые. Единственная трудность заключается в том, что нам сегодня не хватает математических знаний, чтобы проанализировать уравнение, за исключением очень малых чисел Рейнольдса, т. е. в случае очень вязкой жидко­сти. Написав уравнение, мы не отняли у потока жидкости ни его чарующей прелести, ни его таинственности, ни его поразительности.

Что ожидает нас в более сложных уравнениях, если даже в таком простом уравнении с одним-единственным параметром мы видим такое разнообразие возможностей! Вполне возможно, что основное уравнение, которое описывает завихрение туман­ностей, или образование вращений, или взрыв звезд и галактик, будет всего-навсего простым уравнением гидродинамики почти чистого водорода. Часто люди в каком-то неоправданном страхе перед физикой говорят, что невозможно написать уравнение жизни. А может быть, и можно. Очень возможно, что на самом деле мы уже располагаем достаточно хорошим приближением, когда пишем уравнение квантовой механики

C:\Мои документы\gray.jpg

Только что мы видели, как явления во всей их сложности легко и поразительно получаются из простых уравнений, которые описывают их. Не подозревая о возможностях простых уравнений, люди часто заключают, что для объяснения всей сложности мира требуется нечто данное от бога, а не просто уравнения.

Мы написали уравнения для течения воды. Но из нашего опыта у нас сложились какие-то понятия и приближения, поль­зуясь которыми, мы можем обсуждать разные решения — цепочку вихрей, турбулентный след, пограничный слой. Когда подобные уравнения встречаются нам в менее знакомой ситуа­ции, где мы еще не можем экспериментировать, то мы пытаемся решать такие уравнения примитивным, извилистым и запу­танным путем, стремясь определить, какие же качественные явления можно получить из него или какие новые качественные формы являются следствием этого уравнения. Наши уравнения для Солнца, например, представляющие его как водородный шар, описывают Солнце без солнечных пятен, без зернистой структуры его поверхности, без неровностей и короны. Тем не менее все это действительно находится в уравнениях, только у нас нет еще способа вытащить их оттуда.

Есть такие люди, которые будут очень расстроены, если на других планетах не будет найдено жизни. Я не принадлежу к их числу. И я никогда не смогу перестать удивляться и радоваться результатам межпланетных исследований, об­наруживающих бесконечное разнообразие и новизну явлений, порожденных одними и теми же самыми простыми принципами. Критерий науки — ее способность предсказывать. Могли бы вы предсказать бури, вулканы, океанские волны, зори и кра­сочные закаты, если бы вы никогда не были на Земле?

Драгоценным сокровищем для нас будет все, что мы узнаем о происходящем на каждой из мертвых планет, каждого из десятка шаров, образовавшихся из того же самого облака пыли и подчиняющихся тем же самым законам физики, что и наша планета.

Грядущая великая эра пробуждения человеческого разума принесет с собой метод понимания *качественного* содержания уравнений. Сегодня еще мы не способны на это. Сегодня мы не можем увидеть в уравнениях потока воды такие вещи, как спиральное строение турбулентности, которую мы видим между вращающимися цилиндрами. Сегодня мы не можем ска­зать с уверенностью, содержит ли уравнение Шредингера и лягушек, и композиторов, и даже мораль или там ничего похо­жего и быть не может. Мы не можем сказать, требуется ли что-либо сверх уравнения, вроде каких-то богов, или нет. Поэтому каждый из нас может иметь на этот счет свое особое мнение.

***\* Большие частицы можно сдуть со стола, а мельчайшие— невозможно. Их верхушки не «высовываются» в поток.***

***\*\* Можно представить себе и такой случай, когда это окажется невер­ным. Теоретически стекло есть тоже «жидкость», однако оно вполне может скользить по стальной поверхности. Так что и такая теория где-то должна погореть.***

**ПРИЛОЖЕНИЕ (к главе 30)**

**(**[Перевод на русский](#а1)**)**

A dynamical model of a crystal structure

by sir lawrence bragg, F.R.S. and J. F. nye *Cavendish Laboratory, University of Cambridge*

*(Received* 9 *January* 1947—*Read* 19 *June* 1947) [Plates 8 to 211

The crystal structure of a metal is represented by an assemblage of bubbles, a millimetre or less in diameter, floating on the surface of a soap solution. The bubbles are blown from a fine pipette beneath the surface with a constant air pressure, and are remarkably uniform in size. They are held together by surface tension, either m a single layer on the surface or in a threedimensional mass. An assemblage may contain hundreds of thousands of bubbles and persists for an hour or more. The assemblages show structures which have been supposed to exist in metals, and simulate effects which have been observed, such as grain boundaries, disloca­tions and other types of fault, slip, recrystallization. annealing, and strains due to ' foreign' atoms.

*1.* THE BUBBLE MODEL

Models of crystal structure have been described from time to time in which the atoms are represented by small floating or suspended magnets, or by circular disks floating on a water surface and held together by the forces of capillary attraction. These models have certain disadvantages; for instance, in the case of floating objects **in** contact, frictional forces impede their free relative movement. A more serious disadvantage is that the number of components is limited, for a large number of components is required in order to approach the state of affairs in a real crystal.

***A dynamical model of a crystal structure***

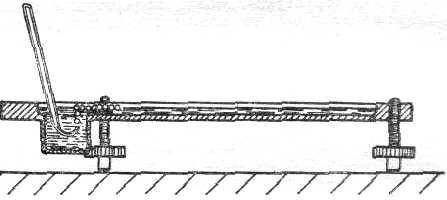
The present paper describes the behaviour of a model in which the atoms are repre­sented by small bubbles from 2.0 to 0.1 mm. in diameter floating on the surface of a soap solution. These small bubbles are sufficiently persistent for experiments lasting an hour or more, they slide past each other without friction, and they can be produced in large numbers. Some of the illustrations in this paper were taken from assemblages of bubbles numbering 100,000 or more. The model most nearly represents the behaviour of a metal structure, because the bubbles are of one type only and are held together by a general capillary attraction, which represents the binding force of the free electrons in the metal. A brief description of the model has been given in the *Journal of Scientific Instruments* (Bragg 1942b).

figure 1. Apparatus for producing rafts of bubbles.

**2. method of formation**

The bubbles are blown *from* a fine orifice, beneath the surface of a soap solution. We have had the best results with a solution the formula of which was given to us by Mr. Green of the Royal Institution. 15-2 c.c. of oleic acid (pure redistilled) is well shaken in 50 c.c. of distilled water. This is mixed thoroughly with 73c.с. of 10% solution of tri-ethanolamine and the mixture made up to 200 c.c. To this fa added 164 c.c. of pure glycerine. It is left to stand and the clear liquid is drawn off from below. In some experiments this was diluted in three times its volume of water to reduce viscosity. The orifice of the jet is about б mm. below the surface. A constant air pressure of 50 to 200cm. of water is supplied by means of two Winchester flasks. Normally the bubbles are remarkably uniform in size. Occasionally they issue in an irregular manner, but *this* can be corrected by a change of jet or of pres­sure. Unwanted bubbles can easily be destroyed by playing a email flame over the surface. Figure 1 shows the apparatus. We have found it of advantage to blacken the bottom of the vessel, because details of structure, such as grain boundaries and dislocations, then show up more clearly.

Figure 2, plate 8, shows a portion of a ' raft' or two-dimensional crystal of bubbles.

Its regularity can be judged by looking at the figure in a glancing direction. The

size of the bubbles varies with the aperture, but does not appear to vary to any

marked degree with the pressure or the depth of the orifice beneath the surface.

# Sir Lawrence Bragg and J. F. Nye

The main effect of increasing the pressure is to increase the rate of issue of the bubbles. As an example, a thick-walled jet of 49μ bore with a pressure of 100cm. produced bubbles of 1-2 mm. in diameter A thin-walled jet of 27μ diameter and a pressure of 180cm. produced bubbles of 0.6 mm diameter It is convenient to refer to bubbles of 2.0 to 1.0mm. diameter as 'large' bubbles, those from 0.8 to 0.6mm. diameter as 'medium' bubbles, and those from 0.3 to 0.1 mm. diameter as 'small' bubbles, since their behaviour varies with their size.

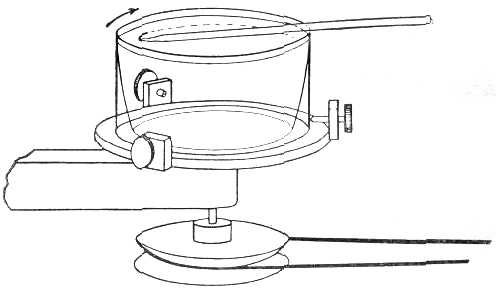


figure 3. Apparatus for producing bubbles of small size.

With this apparatus we have not found it possible to reduce the size of the jet and so produce bubbles of smaller diameter than 0.6 mm. As it was desired to experi­ment with very small bubbles, we had recourse to placing the soap solution in a rotating vessel and introducing a fine jet as nearly as possible parallel to a stream line. The bubbles are swept away as they form, and under steady conditions are reasonably uniform. They issue at a rate of one thousand or more per second, giving a high-pitched note. The soap solution mounts up in a steep wall around the peri­meter of the vessel while it is rotating, but carries back most of the bubbles with it when rotation ceases. With this device, illustrated in figure 3, bubbles down to 0.12 mm. in diameter can be obtained. As an example, an orifice *38*μacross in a thin-walled jet, with a pressure of 190cm. of water, and a speed of the fluid of I80cm./sec. past the orifice, produced bubbles of 0.14 mm. diameter. In this case a dish of diameter 9-5 cm. and speed of 6 rev./sec. was used. Figure 4, plate 8, is an enlarged picture of these 'small' bubbles and shows their degree of regularity; the pattern is not as perfect with a rotating as with a stationary vessel, the rows being seen to be slightly irregular when viewed in a glancing direction.

These two-dimensional crystals show structures which have been supposed to exist in metals, and simulate effects which have been observed, such as grain boundaries, dislocations and other types of fault, slip, recrystallization, annealing, and strains due to ' foreign' atoms.

*A dynamical model of a crystal structure*

**3. grain boundaries**

Figures 5a, 56 and 5c, plates 9 and 10, show typical grain boundaries for bubbles of 1.87, 0.76 and 0.30 mm. diameter respectively. The width of the disturbed area at the boundary, where the bubbles have an irregular distribution, is in general greater the smaller the bubbles. In figure 5a, which shows portions of several adjacent grains, bubbles at a boundary between two grains adhere definitely to one crystalline arrangement or the other. In figure 5с there is a marked ' Beilby layer' between the two grains. The small bubbles, as will be seen, have a greater rigidity than the large ones, and this appears to give rise to more irregularity at the interface,

Separate grains show up distinctly when photographs of polycrystalline rafts such as figures *5a* to 5c, plates 9 and 10, and figures 12a to 12e, plates 14 to 16, are viewed obliquely. With suitable lighting, the floating raft of bubbles itself when viewed obliquely resembles a polished and etched metal in a remarkable way.

It often happens that some 'impurity atoms', or bubbles which are markedly larger or smaller than the average, are found in a polycrystalline raft, and when this is so a large proportion of them are situated at the grain boundaries. It would be incorrect to say that the irregular bubbles make their way to the boundaries; it is ft defect of the model that no diffusion of bubbles through the structure can take place, mutual adjustments of neighbours alone being possible. It appears that the boundaries tend to readjust themselves by the growth of one crystal at the expense of another till they pass through the irregular atoms.

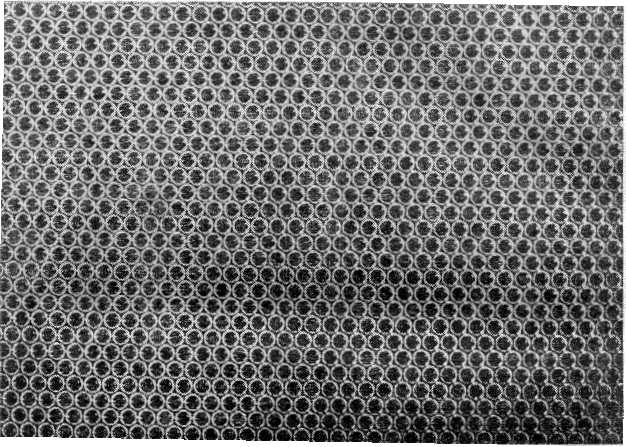
**4. dislocations**

When a. single crystal or polycrystalline raft is compressed, extended, or other­wise deformed it exhibits a behaviour very similar to that which has been pictured for metals subjected to strain. Up to a certain limit the model is within its elastic range. Beyond that point it yields by slip along one of the three equally inclined directions of closely packed rows. Slip takes place by the bubbles in one row moving forward over those in the next row by an amount equal to the distance between neighbours. It is very interesting to watch this process taking place. The movement is not simultaneous along the whole row but begins at one end with the appearance of a 'dislocation', where there is locally one more bubble in the rows on one side of the slip line as compared with those on the other. This dis­location then runs along the slip line from one side of the crystal to the other, the final result being a slip by one 'inter-atomic' distance. Such a process has been invoked by Orowan, by Polanyi and by Taylor to explain the small forces required to produce plastic gliding in metal structures. The theory put forward by Taylor (1934) to explain the mechanism of plastic deformation of crystals considers the mutual action and equilibrium of such dislocations. The bubbles afford a very striking picture of what has been supposed to take place in the metal. Sometimes the dislocations run along quite slowly, taking a matter of seconds to cross a crystal; stationary dislocations also are to be seen in crystals which are not homogeneously strained. They appear as short black lines, and can be seen in the series of photo­graphs, figures 12a to 12 *e,* plates 14 to 16. When a polycrystalline raft is compressed, these dark lines are seen to be dashing about in all directions across the crystals.

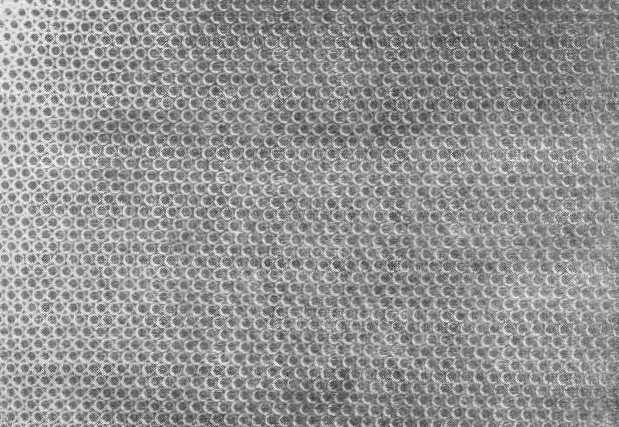
Figures 6a, 66 and 6c, plates 10 and 11, show examples of dislocations. In figure 6a, where the diameter of the bubbles is 1.9 mm., the dislocation is very local, extending over about six bubbles. In figure 66 (diameter 0.76 mm.) it extends over twelve bubbles, and in figure 6c (diameter 0.30mm.) its influence can be traced for a length of about fifty bubbles. The greater rigidity of the small bubbles leads to longer dislocations. The study of any mass of bubbles shows, however, that there is not a standard length of dislocation for each size. The length depends upon the nature of the strain in the crystal. A boundary between two crystals with corresponding axes at approximately 30° (the maximum angle which can occur) may be regarded as a series of dislocations in alternate rows, and in this case the dislocations are very short. As the angle between the neighbouring crystals decreases, the dislocations occur at wider intervals and at the same time become longer, till one finally has single dislocations in a large body of perfect structure as shown in figures 6a, 6b and 6c.

Figure 7, plate 11, shows three parallel dislocations. If we call them positive and negative (following Taylor) they are positive, negative, positive, reading from left to right. The strip between the last two has three bubbles in excess, as can be seen by looking along the rows in a horizontal direction. Figure 8, plate 12, shows a dislocation projecting from a grain boundary, an effect often observed.

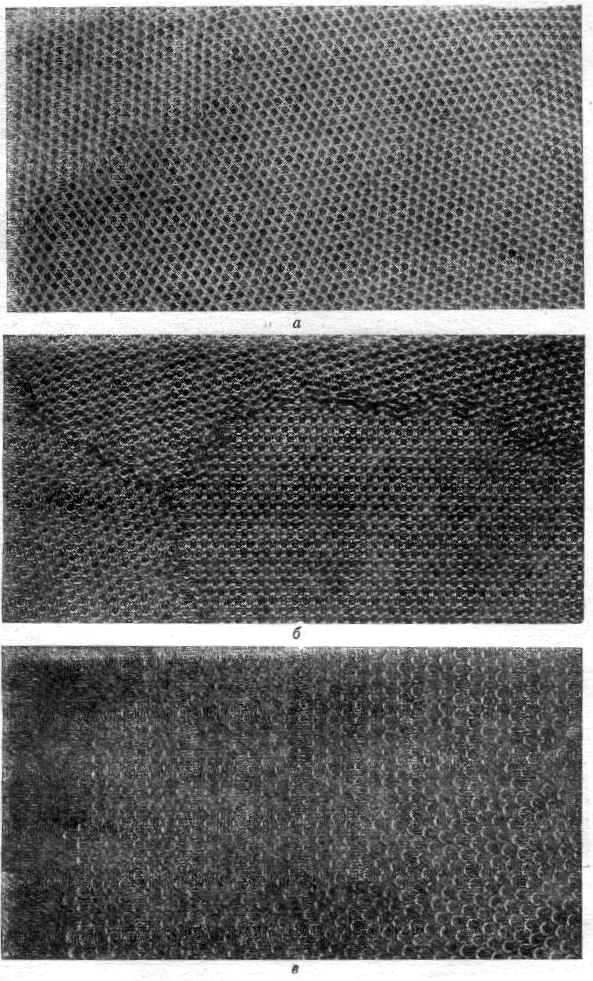
Figure 9, plate 12, shows a place where two bubbles take the place of one. Thin may be regarded as a limiting case of positive and negative dislocations on neigh­bouring rows, with the compressive sides of the dislocations facing each other. The contrary case would lead to a hole in the structure, one bubble being missing at the point where the dislocations met.



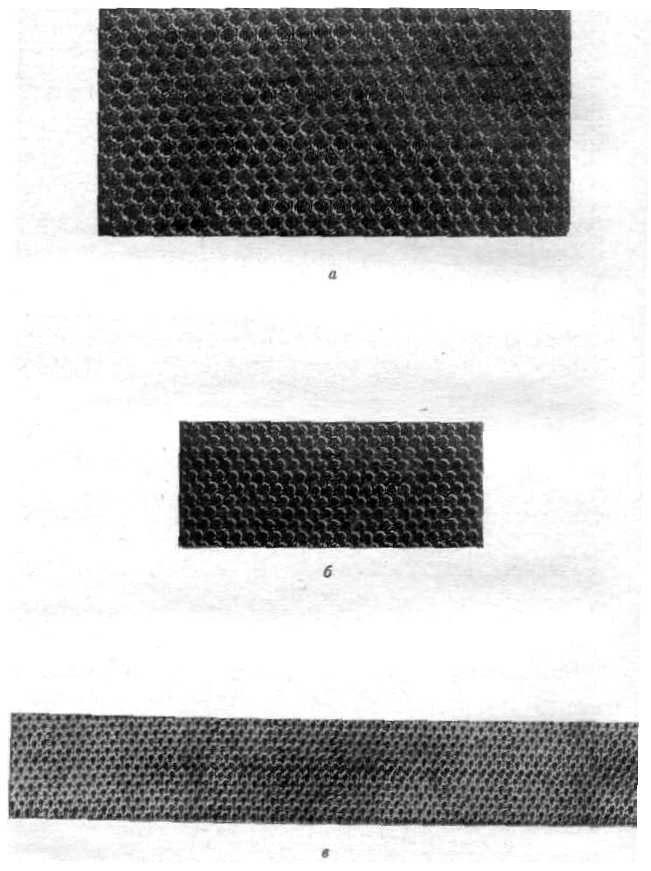
*Фиг. 2. Идеальное расположение пузырьков. Диаметр 1,41 мм.*



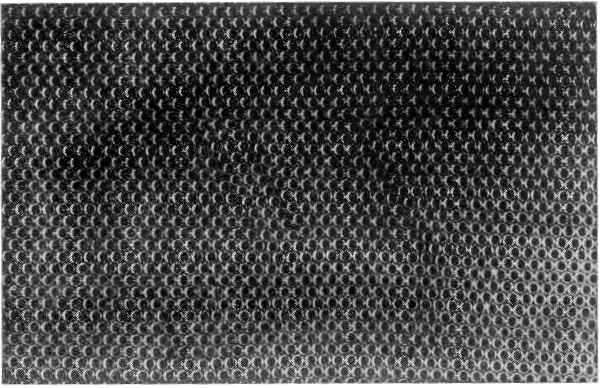
*Фиг. 4. Регулярное расположение «маленьких» пузырьков. Диаметр 0,30 мм.*

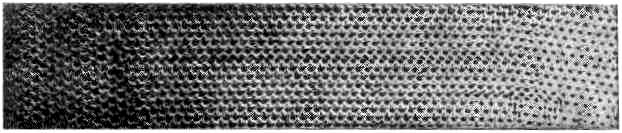


*Фиг. 5. Типичные границы зерен. а* — *диаметр 1,87 мм*; б — *диаметр 0,76 мм; в* — *диаметр 0,30 мм.*

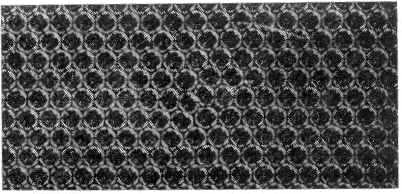
**

*Фиг. 6. Дислокации. а —диаметр 1,9 мм; б — диаметр 0,76 мм; в* — *диаметр 0,30 мм.*

*Фиг. 7. Параллельные дислокации. Диаметр 0,76 мм.*

**

*Фиг. 8. Дислокация, проектирующаяся от границ зерна.*

*Фиг. 9. Дислокации в соседних рядах.*

Здесь воспроизведены лишь первые четыре параграфа статьи из *Proceedings of the Royal Society of London,* Vol. 190, p. 474 (1947). Нумера­ция листов, на которых размещены рисунки, в оригинале и переводе не совпадают. Литература, приведенная в конце статьи, дана в пере­воде в подстрочных примечаниях.— *Прим. ред.*

**ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КРИСТАЛЛИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ**

*Л. Брэгг и Дж. Най*

Кристаллическая структура металла моделируется скоплением пу­зырьков диаметром 1 *мм* и меньше, плавающих на поверхности мыльного раствора. Пузырьки выдуваются из маленькой пипетки, расположенной ниже поверхности раствора; давление воздуха в пипетке постоянно, и размеры пузырьков чрезвычайно мало отличаются друг от друга. Пузырьки удерживаются вместе за счет поверхностного натяжения, выстраиваясь в один слой на поверхности или образуя трехмерную массу. Скопление мо­жет содержать сотни тысяч пузырьков и сохраняется в течение часа или более. Скопление образует структуры, которые, как предполагают, име­ются в металлах, и имитируют эффекты, которые уже наблюдались, такие, как формирование границ между зернами, дислокаций и других типов дефектов, процессы скольжения, явления рекристаллизации и отжига, возникновение напряжений, связанных с «посторонними» атомами.

***1. Пузырьковая модель***

Время от времени предлагались модели кристалла, в кото­рых атомы представлялись маленькими плавающими или под­вешенными магнитами, или же кружками, плавающими на поверхности воды и притягивающимися за счет капиллярных сил.

Эти модели имеют серьезные недостатки; например, в слу­чае плавающих и соприкасающихся объектов силы трения мешают их свободному относительному движению. Более серьез­ным недостатком является ограниченное число компонент, потому что приблизиться к положению дел в реальном кри­сталле можно только с большим числом компонент.

В настоящей работе описано поведение модели, в которой ато­мы представлены маленькими пузырьками диаметром от 0,1 до 2 *мм,* плавающими на поверхности мыльного раствора. Эти ма­ленькие пузырьки достаточно устойчивы для экспериментов дли­тельностью 1 *час* иболее, они скользят друг по другу без трения и могут быть приготовлены в больших количествах. Ряд сним­ков для этой статьи был сделан на скоплениях, насчитываю­щих 100 000 пузырьков и более. Модель ближе всего соответствует поведению металлической структуры, потому что все пузырьки только одного типа и держатся вместе за счет общего капиллярного притяжения, которое изображает силу связи свободных электронов в металле. Краткое описание этой мо­дели было дано в работе [Б](#прим2)[рэгга](#прим2).

***2. Способ образования пузырьков***

Пузырьки выдуваются из тонкой пипетки, расположенной под поверхностью мыльного раствора. Наилучшие результаты мы получили с помощью раствора, состав которого нам сообщил мистер Грин из Королевского института: 15,2 см*3* олеиновой кислоты (двойной дистилляции) тщательно взбалтывается с 50 *см3* дистиллированной воды. Все это тщательно смеши­вается с 73см3 10%-ного раствора триэтаноламина, и всю смесь доливают водой до 200 *см3.* К этому добавляют 164 *см3* чистого глицерина. Смеси дают отстояться и берут чистую жидкость внизу. В некоторых экспериментах ее разбавляли в тройном количестве (по объему) воды для уменьшения вязкости. Отвер­стие пипетки расположено примерно на 5 *мм* ниже уровня раствора. Постоянное давление воздуха (составлявшее 50—200 *см* водяного столба) поддерживается с помощью двух колб Винчестера. Обычно пузырьки удивительно однородны по размерам. Иногда вдруг они выходят беспорядочным обра­зом, но этого можно избежать, меняя пипетку или давле­ние. Ненужные пузырьки легко уничтожить, проведя над поверхностью слабым пламенем. На фиг. 1 (см. стр. 276) показан наш прибор. Мы сочли удобным зачернить дно сосуда, потому что в этом случае детали структуры, такие, как границы зерен и дислокации, проявляются более ярко.

На фиг. 2 *(лист 1,* стр. 284) показана часть «плота» или дву­мерного кристалла из пузырьков. О правильности расположения можно судить, если взглянуть на снимок под небольшим углом к плоскости страницы. Размер пузырьков меняется с апертурой (размером отверстия), но не зависит сколько-нибудь заметным образом от давления или глубины расположения отверстия ниже уровня раствора. Основной эффект, к которому приводит увеличение давления,— это увеличение скорости рождения пузырьков.

Например, толстостенная трубка с внутренним диамет­ром 49 *мк* и давлением 100 *см* образовывала пузырьки диаметром 1,2 *мм.* Тонкостенная трубка с внутренним диамет­ром 27 *мк* и давлением 180 *см* образовывала пузырьки диа­метром 0,6 *мм.* Пузырьки диаметром от 2 до 1 *мм* удобно называть «большими», диаметром от 0,8 до 0,6 *мм —* «сред­ними», а пузырьки диаметром от 0,3 до 1,1 *мм —* «маленькими», так как поведение пузырьков зависит от их размеров.

С помощью такого прибора нам не удалось уменьшить размеры отверстия и получить пузырьки диаметром менее 0,6 *мм.*

Поскольку было желательно поставить опыты с очень маленькими пузырьками, мы влили мыльный раствор во вра­щающийся сосуд и ввели тонкую трубочку, расположив как можно более точно параллельно линии потока. По мере образо­вания пузырьки уносятся и при постоянных условиях довольно близки по размерам. Образуются они со скоростью тысяча или более в секунду, причем издается пронзительный звук. При вращении сосуда мыльный раствор круто поднимается по его стенкам по всей окружности, а когда вращение прекращается, раствор уносит с собой большинство пузырьков. С помощью этого устройства, показанного на фиг. 3 (стр. 278), могут быть получены пузырьки диаметром до 0,12 *мм.* Так, тонкостенная трубка с поперечным отверстием 38 *мк,* при давлении воздуха 190 *см* водяного столба и скорости потока у отверстия в *180см/сек* образует пузырьки диаметром 0,14 *мм.* В этом случае исполь­зовался сосуд диаметром 9,5 *см,* а скорость вращения достигала 6 оборотов в 1 *сек.*

На фиг. 4 *(лист 1,* стр. 284) приведен увеличенный сни­мок этих «маленьких» пузырьков, иллюстрирующий степень их регулярности; при вращении порядок получается не та­ким полным, как в неподвижном сосуде; когда смотришь в плоскости страницы, видно, что ряды слегка нерегулярны.

Эти двумерные кристаллы образуют структуры, которые, как полагают, существуют в металлах, и имитируют такие наблюденные эффекты, как границы зерен, дислокации и дру­гие дефекты, процессы скольжения, явление рекристаллизации и отжига и возникновение напряжений, вызванных «посторон­ними» атомами.

***3. Границы зёрен***

На фиг. 5 *(лист 2,* стр. 285) показаны типичные границы зерен для пузырьков диаметром соответственно 1,87, 0,76 и 0,30 *мм.* Ширина возмущенной поверхности на границе, где пузырьки имеют нерегулярное распределение, в основном бывает тем больше, чем меньше пузырьки. На фиг. 5, *а,* где показано не­сколько соседних зерен, пузырьки на границе между двумя зернами явно придерживаются либо одного, либо другого кристаллического порядка. На фиг. 5, *в* ясно обозначился «слой Бейлби» между двумя зернами. Маленькие пузырьки, как будет видно далее, обладают большей жесткостью, чем большие, а это приводит к значительной беспорядочности на границах. Отдельные зерна ясно видны, если рассматривать фо­тографии поликристаллических слоев. При подходящем освеще­нии сами плавающие слои пузырьков, рассматриваемые вдоль страницы, удивительно напоминают полированный и травленый металл. Часто случается, что в поликристаллический плот попа­дают «атомы примеси», т. е. пузырьки, заметно отличающиеся по размерам от средних, и в этом случае большая доля их размещается на границах зерен. Было бы неправильно утверж­дать, что несоразмерные пузырьки проталкиваются к границам; невозможность диффузии пузырьков сквозь структуру состав­ляет дефект модели. Может возникать только взаимное при­способление соседей. Оказывается, что границы стремятся перестроиться благодаря росту одного кристалла за счет дру­гого, пока граница не пройдет через атомы примесей.

***4. Дислокации***

Если монокристалл или поликристаллический плот подвер­гается сжатию, растяжению или другой деформации, его поведе­ние очень похоже на поведение металлов, на которые действует напряжение. До известного предела модель находится в области упругой деформации. За этой границей модель начинает сколь­зить вдоль одного из трех равноправных направлений, вдоль плотно упакованных рядов. Скольжение происходит за счет пере­хода пузырьков в одном ряду над пузырьками соседнего ряда на расстояние, равное промежутку между соседними пузырьками. Очень интересно наблюдать за этим процессом. Движение вдоль всего ряда не одновременное, начинается оно на одном конце с появления «дислокации», где в рядах по одну сторону линии скольжения в одном месте оказывается на один пузырек больше, нежели в рядах по другую сторону. Эта дислокация затем пробегает вдоль линии скольжения от одного конца кристалла до другого; в результате происходит проскальзыва­ние на одно «межатомное» расстояние. Процесс такого рода предположили Орован, Поляни и Тэйлор для объяснения малости силы, вызывающей пластическое скольжение в металлических структурах. В теории, выдвинутой [Тэйлором](#прим1) для объ­яснения механизма пластической деформации кристаллов, рас­сматривается взаимодействие и равновесие таких дислокаций. Пузырьки дают поразительную иллюстрацию того, что, как думают, происходит в металлах. Иногда дислокации дви­жутся совсем медленно и на прохождение кристалла им требуется время порядка секунд; можно увидеть и неподвижные дислокации в кристаллах, напряжение в которых неодно­родно. Они выглядят как короткие черные черточки. При сжа­тии поликристаллического плота эти черточки разбегаются во всех направлениях по кристаллу.

На фиг. 6 *(лист 3,* стр. 286) показаны примеры дислокаций. На фиг. 6, *а* дислокации имеют ограниченный характер, протяги­ваясь на длину около шести пузырьков. На фиг. 6, б дислокации простираются на двенадцать пузырьков, а на фиг. 6, *в* влияние дислокаций можно проследить на протяжении примерно пятиде­сяти пузырьков. Большая жесткость маленьких пузырьков приводит к более длинным дислокациям. Изучение любой массы пузырьков показывает, однако, что для каждого раз­мера пузырьков не существует стандартной длины дислокаций. Она зависит от природы напряжений в кристалле. Границу между двумя кристаллами с осями под углом 30° друг к другу (максимальный возможный угол) можно рассматривать как серию дислокаций в чередующихся рядах, и в этом случае дис­локации очень короткие. При уменьшении угла между сосед­ними кристаллами дислокации возникают в более широких интервалах и в то же время становятся длиннее, пока, наконец, не образуется единственная дислокация в большом объеме с совершенной структурой (фиг. 6).

На фиг. 7 *(лист 4,* стр. 287) показаны три параллельные ди­слокации. Если (следуя Тэйлору) различать положительные и отрицательные дислокации, то это положительная, отрицатель­ная и снова положительная, считая слева направо. Полоса между двумя последними имеет три лишних пузырька, что можно увидеть, если смотреть вдоль рядов в горизонтальном направлении. На фиг. 8 *(лист 4,* стр. 287) показана дислокация, распространяющаяся от границ зерна, что представляет собой часто встречающийся эффект. На фиг. 9 *(лист 4,* стр. 287) пока­зано то место, где стоят два пузырька, а не один. Это можно рассматривать как предельный случай положительной и отри­цательной дислокаций в соседних рядах, когда сжатые стороны дислокаций находятся друг против друга. Противоположный случай привел бы к возникновению дырки, т. е. одного пу­зырька не хватало бы там, где встречаются дислокации.

1) G. I. Т а у 1 о г, Ргос. Roy. Soc., A145, 362 (1934).

1) W. L. Bragg, Journ. Sci. Instr., 19**,** 148 (1942).