**От *редактор******а***

«Фейямановские лекции по физике» подходят к концу. Настоящий, восьмой, и следующий, девятый, выпуски, составляющие третий том американского издания, завершают курс и приводят читателя к идеям и задачам современной квантовой механики.

Квантовая механика считается трудной наукой. И это правда: ее методы и понятия еще очень далеки от наглядности. Чтобы рассказать о ней понятно и увлекательно, надо совмещать талант педагога и боль­шой опыт исследователя. Обычно барьером к изучению квантовой меха­ники служит ее математический аппарат. Чтобы научиться решать квантовомеханические задачи, надо знать дифференциальные уравнения в частных производных, свободно обращаться со специальными функ­циями и уметь делать многое другое

Но, в действительности трудность квантовой механики связана не только с математикой. Более того, с нее даже не обязательно начинать. В лекциях Фейнмана изучение квантовой механики начинается с физики, а уравнение Шредингера появляется лишь в конце. При этом оказы­вается, что о многих задачах — от рассеяния электронов до сверхпрово­димости — можно рассказать, не прибегая к исследованию сложных уравнений. Однако это вовсе не означает, что квантовая механика про­стая наука. В действительности выучить формулы и уравнения, пожа­луй, легче, чем следовать физическим рассуждениям и понимать логику явлений природы, которая часто выглядит весьма странной. Поэтому надо потратить много времени и труда, чтобы постичь красоту и вели­чие того, о чем рассказано в этом курсе. Если читатель с успехом пре­одолеет первый этап долгого пути, то будет полностью вознагражден за свои усилия. К счастью, этот путь не имеет конца. Те, кто захочет пойти дальше, должны, конечно, изучить еще многое другое и, разу­меется, довольно сложную (и также очень красивую) математику. Однако и для них то, что они узнали из лекций, будет хорошей школой: полезно с самого начала научиться отделять математический язык науки от ее физического содержания.

Квантовая механика — наука не изолированная. Ее нельзя понять без знания классической физики. Поэтому, читая последние выпуски, полезно время от времени возвращаться к предыдущим. Кстати, то, что в них рассказано, будет теперь выглядеть по-новому.

При подготовке перевода настоящих лекций было обнаружено и исправлено довольно много опечаток и мелких ошибок. Наверное, кое-что и осталось. Многие читатели писали нам об этом, за что мы им весьма признательны. В предстоящем новом издании первых четырех выпусков все правильные замечания учтены. Мы просим читателей сооб­щать нам обо всем, что еще будет ими замечено. Мы пользуемся случаем поблагодарить одного из соавторов книги проф. Мэтью Сэндса за ис­правления, присланные им специально для русского издания.

*Я. Смородинский*

Июль 1966 г.

Со времени величайшего триумфа физики XX ве­ка — рождения квантовой механики — прошло уже 40 лет, но до сих пор, читая студентам вводный (а для многих из них и последний) курс физики, мы огра­ничиваемся, как правило, не более чем случайными намеками на эту центральную область наших знаний о физическом мире. Считая, что так поступать со сту­дентами нехорошо, мы сделали в настоящем курсе попытку изложить им основные, самые существенные идеи квантовой механики и сделать это так, чтобы это им было понятно. Курс был построен совершенно по-новому, особенно если учесть, что он был рассчи­тан на второкурсников, и все происшедшее можно было в значительной степени рассматривать как экс­перимент. Впрочем, после того как выяснилось, на­сколько легко многие студенты усваивают предмет, я считаю, что эксперимент удался. Конечно, здесь есть что улучшать, и улучшения последуют, как только у нас появится опыт преподавания. Пока же перед вами лишь отчет о первом эксперименте.

В двухгодичном курсе «Фейнмановских лекций по физике», который читался с сентября 1961 г. по май 1963 г. в качестве вводного курса физики в КАЛТЕХе, понятия квантовой механики вводились всюду, где они были необходимы для понимания описываемых явлений. Кроме того, последние двенадцать лекций второго года были целиком посвящены более связному введению в некоторые понятия квантовой механики. Но по мере того, как лекции близились к концу, ста­новилось ясно, что на квантовую механику мы оста­вили слишком мало времени. По мере подготовки материала постепенно выяснялось, что с помощью уже развитых элементарных подходов можно рассмо­треть и другие важные и интересные темы. Кроме того, еще было опасение, что, чересчур мало пора­ботав с волновой функцией Шредингера, введенной в двенадцатой лекции, студент не сможет ориентиро­ваться в изложении, принятом в других книгах, ко­торые ему придется читать. Поэтому было решено расширить курс еще на семь лекций; они и были про­читаны второкурсникам в мае 1964 г.. Эти лекции за­вершают и несколько расширяют материал, развитый в предыдущих лекциях.

С самого начала в этом томе делается попытка пролить свет на основные и самые общие черты квантовой механики. Первые главы обращаются к представлениям об амплитуде вероят­ности, интерференции амплитуд, абстрактному определению состояния и к наложению и разложению состояний, причем с самого начала используются обозначения Дирака. В каждом случае введение нового представления сопровождается подробным разбором некоторых частных примеров, чтобы эти фи­зические идеи приобрели как можно большую реальность. Затем следует зависимость состояний от времени, включая со­стояния с определенной энергией, и эти идеи немедленно при­меняются к изучению двухуровневых систем — систем, имею­щих только два возможных значения энергии. Подробное изу­чение аммиачного мазера подготавливает почву для введения поглощения света и индуцированных переходов. Затем лекции продолжают рассмотрение более сложных систем, подводя к изучению распространения электронов в кристалле и к довольно полному изложению квантовомеханической теории момента количества движения. Наше введение в квантовую механику заканчивается обсуждением свойств шредингеровской волновой функции, ее дифференциального уравнения и решений для атома водорода.

Последнюю главу этого тома не следует считать частью «кур­са». Это «семинар» по сверхпроводимости, проведенный в духе тех лекций из первых двух томов, которые были прочитаны «для развлечения», чтобы помочь студентам шире взглянуть на связь того, чему их учили, с общей физической культурой. «Эпилог» Фейнмана ставит точку на этом курсе.

Как уже объяснялось в предисловии к первому тому (см. вып. 1—4), эти лекции являются лишь частью программы по разра­ботке нового вступительного курса, проводимой в КАЛТЕХе под руководством Комитета по пересмотру курса физики (Ро­берт Лейтон, Виктор Неер и Мэтью Сэндс). Осуществление этой программы стало возможным благодаря помощи Фонда Форда. Техническую помощь при подготовке этого тома оказали Мэрилу Клейтон, Юлия Курцио, Джеймс Хартл, Том Харвей, Мартин Израэль, Патриция Прейс, Фанни Уоррен, Барбара Циммерман и многие другие. Проф. Джерри Нойгебауер и проф. Чарльз Уилтс внимательно прочли рукопись и во многом спо­собствовали четкости и ясности изложения материала.

Но сама повесть о квантовой механике, которую вы здесь найдете, принадлежит Ричарду Фейнману. Наши труды не были напрасными, если нам удалось донести до других хоть долю восторга, который мы испытывали сами, следя, как в его пол­ных жизни лекциях по физике перед нами разворачиваются все новые и новые идеи.

*Мэтью Сэндс*

# Декабрь 1964

***Глава 1***

[**АМПЛИТУ****ДЫ ВЕРОЯТНОСТ****И**](#прим1)

[**§ 1.Законы ко****мпозиции амплитуд**](#а1)

[**§ 2.Картина инт****е****рференции от двух щелей**](#а2)

[**§ З. Рассеяние** **на крист****алле**](#а3)

[**§ 4. Тождестве****нные частиц****ы**](#а4)

*Повторить*:гл. 37 (вып. 3) «Кван­товое поведение» ; гл. 38 (вып. 3) « Соотношение между волновой и корпускулярной точками зрения»

**§ 1. Законы композиции амплитуд**

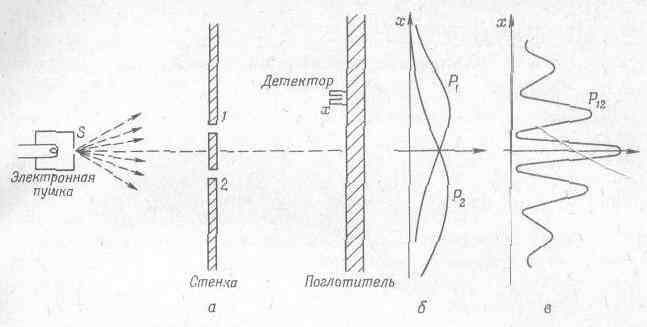
Когда Шредингер впервые открыл правиль­ные законы квантовой механики, он написал уравнение, которое описывало амплитуду ве­роятности обнаружения частицы в различ­ных местах. Это уравнение было очень похоже на уравнения, которые были уже изве­стны классическим физикам, они ими пользо­вались, чтобы описать движение воздуха в звуковой волне, распространение света и т. д. Так что в начале развития квантовой механики большую часть времени люди занимались ре­шением этого уравнения. Но в то же время началось (в частности, благодаря Борну и Дираку) понимание тех фундаментально новых идей, которые лежали в основе кванто­вой механики. По мере дальнейшего ее разви­тия выяснилось, что в ней есть много такого, что прямо в уравнении Шредингера не содер­жится,— таких вещей, как спин электрона и различные релятивистские явления. Все курсы квантовой механики по традиции начинают с того же самого, повторяя путь, пройденный в историческом развитии предмета. Сперва долго изучают классическую механику, чтобы потом понять, как решается уравнение Шредингера. Затем столь же долго получают различные решения. И лишь после деталь­ного изучения этого уравнения переходят к «высшим» вопросам, таким, как спин электрона.

Сначала мы тоже считали, что лучше всего закончить эти лекции, показав, как решаются уравнения классической физики в различных сложных случаях, таких, как опи­сание звуковых волн в замкнутом пространстве, типы элек­тромагнитного излучения в цилиндрических полостях и т. д. Таков был первоначальный план этого курса. Но затем мы решили отказаться от этого плана и вместо этого дать введение в квантовую механику. Мы пришли к заключе­нию, что то, что обычно именуют «высшими» разделами квантовой механики, на самом деле совсем простая вещь. Нужная для этого математика чрезвычайно проста — требуются лишь несложные алгебраические операции, никаких дифферен­циальных уравнений не нужно (или в крайнем случае нужны самые простые). Проблема только в том, чтобы перепрыгнуть через одно препятствие: усвоить, что мы больше не имеем права *детально* описывать поведение частиц в пространстве. И вот этим-то мы и собираемся заняться: рассказать вам о том, что обычно называют «высшими» разделами квантовой механики. Но уверяю вас, это самые что ни на есть простые (в полном смысле этого слова), но в то же время самые фундаментальные ее части. Честно говоря, это педагогический эксперимент, и, насколько нам известно, он никогда раньше не ставился.

Конечно, здесь есть своя трудность: квантовомеханическое поведение вещей чрезвычайно странно. Никто не может пола­гаться на то, что его ежедневный опыт даст ему интуитивное, грубое представление о том, что должно произойти. Так что этот предмет можно представить двояким образом: можно либо довольно грубо , описать, что происходит — сообщать более или менее подробно, что случится, но не формулировать точных законов, либо же можно приводить и точные законы в их абстрактном виде. Но тогда эта абстракция приведет к тому, что вы не будете знать, к чему физически она относится. Этот способ не годится, потому что он совершенно отвлеченный, а от первого способа будет оставаться неприятный осадок, потому что никогда не будет точно известно, что верно, а что нет. И мы не знаем, как эту трудность обойти. С этой проблемой мы уже сталкивались раньше [гл. 37 и 38 (вып. 3)1. В гл. 37 изложение относительно строгое, а в гл. 38 дано лишь грубое описание раз­личных явлений. Теперь мы попытаемся найти золотую сере­дину.

Мы начнем эту главу с некоторых общих квантовомеханических представлений. Кое-какие из этих утверждений будут со­вершенно точными, иные же точны лишь частично. При изложении нам будет трудно отмечать, которые из них какие, но к тому времени, когда вы дочитаете книжку до конца, вы уже сами будете понимать, оглядываясь назад, какие части устояли, а какие оказались только грубым объяснением. Главы, которые последуют за этой, не будут столь неточными. Одна из причин, почему мы пытаемся в последующих главах быть как можно более точными, состоит в том, что таким образом мы сможем продемонстрировать одно из самых прекрасных свойств кван­товой механики — как много в ней удается вывести из столь малого.

Мы опять начинаем с выяснения свойств суперпозиции, наложения, *амплитуд вероятностей.* Для примера мы сошлем­ся на опыт, описанный в гл. 37 (вып. 3) и еще раз показанный здесь на фиг. 1.1.



*Фиг. 1.1. Интерференционный опыт с электронами.*

Имеется источник частиц *s*, скажем электронов; дальше стоит стенка, в которой имеются две щели; за стенкой помещен детектор; он находится где-то в точке *х.* Мы спраши­ваем: какова вероятность того, что в точке *х* будет обнаружена частица? Наш *первый общий принцип* квантовой механики заключается в том, что *вероятность* того, что частица достигнет точки *х,* выйдя из источника s, может быть численно представле­на квадратом модуля комплексного числа, называемого *ампли­тудой вероятности,* в нашем случае — «амплитудой того, что частица из *s* [попадет](#прим2) в *х».* К этим амплитудам мы будем прибе­гать так часто, что удобно будет использовать сокращенное обозначение, изобретенное Дираком и повсеместно применяемое в квантовой механике, чтобы отображать это понятие. Мы запишем амплитуду вероятности так:

<Частица попадает в *х*|Частица покидает s> (1.1)

Иными словами, две скобки <> *—* это знак, эквивалентный словам «амплитуда (вероятности) того, что»; выражение *справа* от вертикальной черточки всегда задает *начальное* условие, а то, что *слева,— конечное* условие. А иногда будет удобно еще сильнее сокращать, описывая начальные и конечные условия одной буквой. Например, амплитуду (1.1) можно при случав записать и так:

<x|s>. (1.2)

Надо подчеркнуть, что подобная амплитуда — это, конечно, всего-навсего число — *комплексное* число.

В гл. 37 (вып. 3) мы уже видели, что, когда частица может достичь детектора двумя путями, итоговая вероятность не есть сумма двух вероятностей, а должна быть записана в виде квад­рата модуля суммы двух амплитуд. Мы обнаружили, что ве­роятность того, что электрон достигнет детектора при обеих открытых амбразурах, есть

C:\Мои документы\gray.jpg(1.3)

Теперь мы этот результат собираемся записать в наших новых обозначениях. Сначала сформулируем наш *второй общий принцип* квантовой механики. Когда частица может достичь данного состояния двумя возможными путями, полная амплиту­да процесса есть *сумма амплитуд* для этих двух путей, рас­сматриваемых порознь. В наших новых обозначениях мы на­пишем

C:\Мои документы\gray.jpg

При этом мы предполагаем, что щели 1 и 2 достаточно малы, так что, когда мы говорим, что электрон прошел сквозь щель, не встает вопрос, через какую часть щели он прошел. Конечно, можно разбить каждую щель на участки с конечной амплитудой того, что электрон прошел через верх щели или через низ и т. д. Мы допустим, что щель достаточно мала, так что нам не надо думать об этой детали. Это одна из тех неточностей, о которых мы говорили; суть дела можно уточнить, но мы покамест не будем этого делать.

Теперь мы хотим подробнее расписать, что можно сказать об амплитуде процесса, в котором электрон достигает детектора в точке *х* через щель 1. Это можно сделать, применив *третий общий принцип.* Когда частица идет каким-то определенным данным путем, то амплитуда для этого пути может быть записана *в виде произведения амплитуды* того, что будет пройдена часть пути, на *амплитуду* того, что и остаток пути будет пройден.

Для установки, показанной на фиг. 1.1, амплитуда перехода от s к *х* сквозь щель 1 равна амплитуде перехода от s к 1, умно­женной на амплитуду перехода от 1 к *х:*

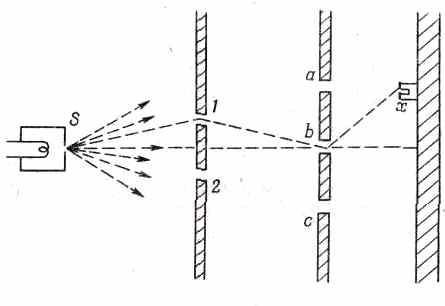
C:\Мои документы\gray.jpg

Опять-таки, это утверждение не совсем точно. Нужно добавить еще один множитель — амплитуду того, что электрон пройдет щель в точке 1; но пока это у нас просто щель, и мы положим упомянутый множитель равным единице.

Заметьте, что уравнение (1.5) кажется написанным задом наперед. Его надо читать справа налево: электрон переходит от s к 1 и затем от 1 к *х.* В итоге если события происходят друг за другом, т. е. если вы способны проанализировать один из путей частицы, говоря, что она сперва делает то-то, затем то-то, потом то-то, то итоговая амплитуда для этого пути вы­числяется последовательным умножением на амплитуду каж­дого последующего события. Пользуясь этим законом, мы мо­жем уравнение (1.4) переписать так:

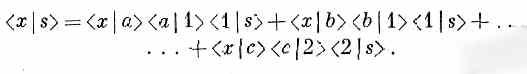
C:\Мои документы\gray.jpg

А теперь мы покажем, что, используя одни только эти прин­ципы, уже можно решать и более трудные задачи, наподобие показанной на фиг. 1.2.

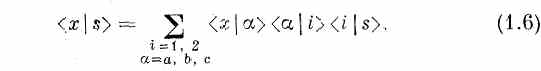


*Фиг. 1.2. Интерференционный опыт посложнее.*

Тут изображены две стенки: одна с двумя щелями 1 и 2, другая с тремя — *а, b* и *с.* За второй стенкой в точке *х* стоит детектор, и мы хотим узнать амплитуду того, что частица достигнет *х.* Один способ решения состоит в расчете суперпозиции, или интерференции, волн, проходящих сквозь щели; но можно сделать и иначе, сказав, что имеется шесть возможных путей, и накладывая друг на друга их амплитуды. Электрон может пройти через щель 1, затем через щель а и потом в *х,* или же он мог бы пройти сквозь щель 1, затем сквозь щель *b* и затем в *x;* и т. д. Согласно нашему второму принципу, амплитуды взаимоисключающих путей складываются, так что мы должны записать амплитуду перехода от s к *х* в виде суммы шести отдельных амплитуд. С другой стороны, согласно третье­му принципу, каждую из них можно записать в виде произведе­ния трех амплитуд. Например, одна из них — это амплитуда перехода от s к 1, умноженная на амплитуду перехода от 1 к а и на амплитуду перехода от а к я. Используя наше сокращенное обозначение, полную амплитуду перехода от *s к х* можно запи­сать в виде



Можно сэкономить место, использовав знак суммы:



Чтобы, пользуясь этим методом, проводить какие-то вы­числения, надо, естественно, знать амплитуду перехода из од­ного места в другое. Я приведу пример типичной амплитуды. В ней не учтены некоторые детали, такие, как поляризация све­та или спин электрона, а в остальном она абсолютно точна. С ее помощью вы сможете решать задачи, куда входят различные сочетания щелей. Предположим, что частица с определенной энергией переходит в пустом пространстве из положения r1 в положение r2. Иными словами, это свободная частица: на нее не действуют никакие силы. Отбрасывая численный множитель впереди, амплитуду перехода от r1 к r2 можно записать так:

C:\Мои документы\gray.jpg

где r12=r2-r1 а **р** — импульс частицы, связанный с ее энергией *Е* релятивистским уравнением

C:\Мои документы\gray.jpg

или нерелятивистским уравнением

*p*2*/2m* = Кинетическая энергия.

Уравнение (1.7) в итоге утверждает, что у частицы есть волно­вые свойства, что амплитуда распространяется как волна с волновым числом, равным импульсу, деленному на C:\Мои документы\gray.jpg

В общем случае в амплитуду и в соответствующую вероят­ность входит также и время. В большинстве наших первона­чальных рассуждений будет предполагаться, что источник испускает частицы с данной энергией беспрерывно, так что о времени не нужно будет думать. Но, вообще-то говоря, мы вправе заинтересоваться и другими вопросами. Допустим, что частица испущена в некотором месте *Р* в некоторый момент и вы хотите знать амплитуду того, что она окажется в каком-то месте, скажем г, в более позднее время. Это символически мож­но представить в виде амплитуды <r, *t = t*1 *P, t*= 0>. И яс­но, что она зависит и от r, и от *t.* Помещая детектор в разные места и делая измерения в разные моменты времени, вы получите разные результаты. Эта функция r и *t,* вообще говоря, удовле­творяет дифференциальному уравнению, которое является волно­вым уравнением. Скажем, в нерелятивистском случае это уравне­ние Шредингера. Получается волновое уравнение, аналогичное уравнению для электромагнитных волн или звуковых волн в газе. Однако надо подчеркнуть, что волновая функция, удовлет­воряющая уравнению, не похожа на реальную волну в простран­стве; с этой волной нельзя связать никакой реальности, как это делается со звуковой волной.

Хотя, имея дело с одной частицей, можно начать пытаться мыслить на языке «корпускулярных волн», но ничего в этом хорошего нет, потому что если, скажем, частиц не одна, а две, то амплитуда обнаружить одну из них в r1 а другую в r2 не есть обычная волна в трехмерном пространстве, а зависит от *шести* пространственных переменных r1и r2. Когда частиц две (или больше), возникает потребность в следующем добавочном прин­ципе. Если две частицы не взаимодействуют, то амплитуда того, что одна частица совершит что-то одно, а другая сделает что-то другое, есть произведение двух амплитуд — амплитуд того, что две частицы проделали бы это по отдельности. Напри­мер, если <а|*s*1>есть амплитуда того, что частица 1 перейдет из s1 в *а,* а <b|s2> — амплитуда того, что частица 2 перейдет из s2 в *b,* то амплитуда того, что оба эти события произойдут вместе, есть

<a|sl><b|s2>.

И еще одну вещь надо подчеркнуть. Предположим, нам не­известно, откуда появляются частицы на фиг. 1.2, прежде чем они пройдут через щели 1 и 2 в первой стенке. Несмотря на это, мы все равно можем предсказать, что произойдет за стенкой (скажем, вычислить амплитуду попасть в *х),* если только нам даны два числа: амплитуда попадания в 1 и амплитуда попада­ния в 2. Иными словами, из-за того, что амплитуды последова­тельных событий перемножаются, как это показано в уравнении (1.6), все, что вам нужно знать для продолжения анализа,— это два числа, в данном частном случае <1|s> и <2|s>. Этих двух комплексных чисел достаточно для того, чтобы предска­зать все будущее. Это-то и делает квантовую механику простой. В следующих главах выяснится, что именно это мы и делаем, когда отмечаем начальные условия при помощи двух (или нескольких) чисел. Конечно, эти числа зависят от того, где рас­положен источник и каковы другие свойства прибора, но, как только эти числа даны, все подобные детали нам больше не нужны.

**§ 2. Картина интерференции от двух щелей**

Рассмотрим еще раз вопрос, который мы довольно подробно обсудили раньше, в гл. 37 (вып. 3). Сейчас мы используем идею об амплитуде во всей ее мощи, чтобы показать вам, как она работает. Вернемся к старому опыту, изображенному на фиг. 1.1, добавив к нему еще источник света и поместив его за щелями (ср. фиг. 37.4 гл. 37). В гл. 37 мы обнаружили следующий приме­чательный результат. Если мы заглядывали за щель 1 и заме­чали фотоны, рассеивавшиеся где-то за ней, то распределение вероятности того, что электрон попадал в *х* при одновременном наблюдении этих фотонов, было в точности такое же, как если бы щель 2 была закрыта. Суммарное распределение для элект­ронов, которые были «замечены» либо у щели 1, либо у щели 2, было суммой отдельных распределений и было совсем не похоже на распределение, которое получалось, когда свет бывал вы­ключен. По крайней мере так бывало, когда использовался свет с малой длиной волн. Когда длина волны начинала расти и у нас исчезала уверенность в том, у какой из щелей произо­шло рассеяние света, распределение становилось похожим на то, которое бывало при выключенном свете.

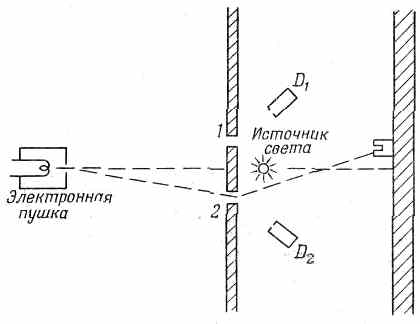
Посмотрим теперь, что здесь происходит, используя наши новые обозначения и принципы композиции амплитуд. Чтобы упростить запись, можно через ϕ1опять обозначить амплитуду того, что электрон придет в *х* через щель 1, т. е.

C:\Мои документы\gray.jpg

Сходным же образом ϕ2 будет обозначать амплитуду того, что электрон достигнет детектора через щель 2:

C:\Мои документы\gray.jpg

Это — амплитуды проникновения электрона через щель и появле­ния в *х,* когда света нет. А если свет включен, мы поставим себе вопрос: какова амплитуда процесса, в котором вначале электрон выходит из s, а фотон испускается источником света *L,* а в конце электрон оказывается в ж, а фотон обнаруживается у щели 1? Предположим, что мы с помощью счетчика *D*1наблюдаем фотон у щели 1 (фиг. 1.3), а такой же счетчик *D*2 считает фо­тоны, рассеянные у щели 2.



*Фиг.**1.3****.*** *Опыт, в котором определяется, через которую из щелей проник электрон.*

Тогда можно говорить об ампли­туде появления фотона в счетчике *D*1а электрона в x; и об амплитуде появления фотона в счетчике *D*2*,* а электрона в *х.* Попробуем их подсчитать.

Хоть мы и не располагаем правильной математической формулой для всех множителей, входящих в этот расчет, но дух расчета вы почувствуете из следующих рассуждений. Во-первых, имеется амплитуда <1|s> того, что электрон доходит от источника к щели 1. Затем можно предположить, что имеется конечная амплитуда того, что, когда электрон находится у щели 1, он рассеивает фотон в счетчик *D*1*.* Обозначим эту ам­плитуду через *а.* Затем имеется амплитуда <x|1> того, что электрон переходит от щели 1 к электронному счетчику в *х.* Амплитуда того, что электрон перейдет от s к *х* через щель 1 ирассеет фотон в счетчик *D*1тогда равна

<x|l> a <l|s>.

Или в наших прежних обозначениях это просто *аϕ*1*.*

Имеется также некоторая амплитуда того, что электрон, проходя сквозь щель 2, рассеет фотон в счетчик *D*1*.* Вы скажете: «Это невозможно; как он может рассеяться в счетчик *D*1? если тот смотрит прямо в щель 1?» Если длина волны достаточно велика, появляются дифракционные эффекты, и это становится возможным. Конечно, если прибор будет собран хорошо и если используются лишь фотоны с короткой длиной волны, то ам­плитуда того, что фотон рассеется в счетчик *D*1от электрона в щели 2, станет очень маленькой. Но для общности рассуждения мы учтем тот факт, что такая амплитуда всегда имеется, и обо­значим ее через *b.* Тогда амплитуда того, что электрон проходит через щель 2 *и* рассеивает фотон в счетчик *D*1есть

C:\Мои документы\gray.jpg

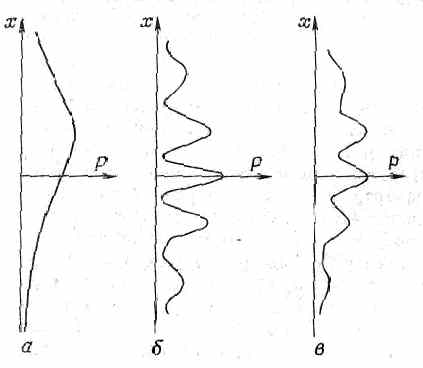
Амплитуда обнаружения электрона в х и фотона в счетчике *D*1 есть сумма двух слагаемых, по одному для каждого мысли­мого пути электрона. Каждое из них в свою очередь составлено из двух множителей: первого, выражающего, что электрон прошел сквозь щель, и второго — что фотон рассеян таким электроном в счетчик *D*1;мы имеем

C:\Мои документы\gray.jpg

Аналогичное выражение можно получить и для случая, ког­да фотон будет обнаружен другим счетчиком *D*2. Если допус­тить для простоты, что система симметрична, то *а* будет также амплитудой попадания фотона в счетчик *D*2, когда электрон проскакивает через щель 2, a *b* — амплитудой попадания фо­тона в счетчик *D*2*,* когда электрон проходит через щель 1. Соот­ветствующая полная амплитуда — амплитуда того, что фотон окажется в счетчике *D*2*,* а электрон в *х,—* равна

C:\Мои документы\gray.jpg

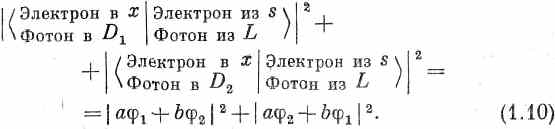
Вот и все. Теперь мы легко можем рассчитать вероятность тех или иных случаев. Скажем, мы желаем знать, с какой ве­роятностью будут получаться отсчеты в счетчике *D*1при попада­нии электрона в *х.* Это будет квадрат модуля амплитуды, давае­мой формулой (1.8), т. е. попросту |aϕ1+bϕ2|2. Поглядим на это выражение внимательнее. Прежде всего, если b=0 (мы хотели бы, чтобы наш прибор работал именно так), ответ просто равен |ϕ1|2 с множителем |a|2. Это как раз то рас­пределение вероятностей, которое получилось бы при наличии лишь одной щели, как показано на фиг. 1.4, *а.*



*Фиг. 1.4. Вероятность отсчета электрона в х при условии, что в D1 замечен фотон в опыте, показанном на фиг. 1.3. а — при b=0; б — при b=а; в — при 0<b<а.*

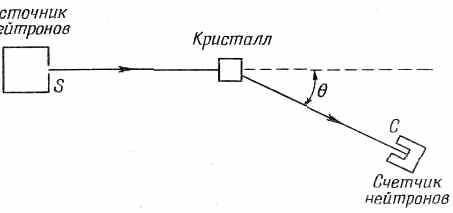
С другой сторо­ны, если длина волны велика, рассеяние за щелью 2 в счетчик *D*1 может стать почти таким же, как за щелью 1. Хотя в *а* и *b* могут входить какие-то фазы, возьмем самый простой случай, когда обе фазы одинаковы. Если *а* практически совпадает с *b,* то полная вероятность обращается в | ϕ1+ϕ2|2, умноженное на |*а*|2, потому что общий множитель *а* можно вынести. Но тогда выходит то самое распределение вероятностей, которое получилось бы, если бы фотонов вовсе не было. Следовательно, когда длина волны очень велика (и детектировать фотоны бес­полезно), вы возвращаетесь к первоначальной кривой распре­деления, на которой видны интерференционные эффекты, как показано на фиг. 1.4,*б*. Когда же детектирование частично все же оказывается эффективным, возникает интерференция между большим количеством ϕ1 и малым количеством ϕ2 и вы получаете промежуточное распределение, такое, какое намечено на фиг. 1.4,*в*. Само собой разумеется, если нас заинтересуют одно­временные отсчеты фотонов в счетчике *D*2 и электронов в *х,* то мы получим тот же результат. Если вы вспомните рассужде­ния гл. 37 (вып. 3), то увидите, что эти результаты описывают количественно то, что было сказано там.

Нам хотелось бы подчеркнуть очень важное обстоятельство и предостеречь от часто допускаемой ошибки. Пусть вас инте­ресует только амплитуда того, что электрон попадает в *х,* причем вам *безразлично,* в какой счетчик попал фотон — в *D*1или в *D*2. Должны ли вы складывать амплитуды (1.8) и (1.9)? Нет! *Никог­да не складывайте амплитуды разных, отличных друг от друга конечных состояний.* Как только фотон был воспринят одним из фотонных счетчиков, мы всегда, если надо, можем узнать, не возмущая больше системы, какая из альтернатив (взаимо­исключающих событий) реализовалась. У каждой альтерна­тивы есть своя вероятность, полностью независимая от другой. Повторяем, не складывайте амплитуд для различных *конечных* условий (под «конечным» мы понимаем тот момент, когда нас интересует *вероятность,* т. е. когда опыт «закончен»). Зато нужно складывать амплитуды для различных *неразличимых* альтернатив в ходе самого опыта, прежде чем целиком закон­чится процесс. В конце процесса вы можете, если хотите, ска­зать, что вы «не желаете смотреть на фотон». Это ваше личное дело, но все же амплитуды складывать нельзя. Природа не знает, на что вы смотрите, на что нет, она ведет себя так, как ей положено, и ей безразлично, интересуют ли вас ее данные или нет. Так что мы не должны складывать амплитуды. Мы сперва возводим в квадрат модули амплитуд для всех возможных разных конечных состояний, а затем уж складываем. Пра­вильный результат для электрона в *x* и фотона то ли в *D*1то ли в *D*2 таков:



**§ 3. Рассеяние на кристалле**

Следующий пример — это явление, в котором интерферен­цию амплитуд вероятности следует проанализировать тщатель­нее. Речь идет о процессе рассеяния нейтронов на кристалле. Пусть имеется кристалл, в котором много атомов, а в центре каждого атома — ядро; ядра расположены периодически, и откуда-то издалека на них налетает пучок нейтронов. Различ­ные ядра в кристалле можно пронумеровать индексом *i,* где *i* пробегает целые значения 1, 2, 3, ... , *N,* а *N* равняется общему числу атомов. Задача состоит в том, чтобы подсчитать вероят­ность того, что нейтрон окажется в счетчике, изображенном на фиг. 1.5.



*Фиг. 1.5. Измерение рассеяния нейтронов на кристалле.*

Для каждого отдельного атома *i* амплитуда того, что нейтрон достигнет счетчика *С,* равна амплитуде того, что нейтрон из источника *S* попадет в ядро *i,* умноженной на ампли­туду *а* рассеяния в этом месте и умноженной на амплитуду того, что он из *i* попадет в счетчик *С.* Давайте запишем это:

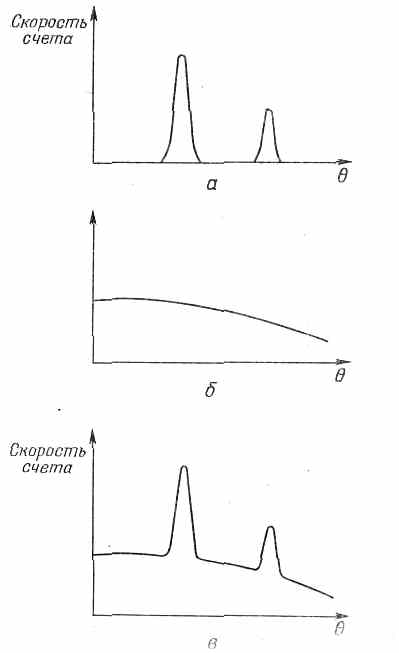
C:\Мои документы\gray.jpg

Написав это, мы предположили, что амплитуда рассеяния а — одна и та же для всех атомов. Здесь у нас есть множество, по-видимому, неразличимых путей. Они неразличимы оттого, что нейтрон с небольшой энергией рассеивается на ядре, не выбивая при этом самого атома с его места в кристалле — никакой «отметки» о рассеянии не остается. Согласно нашим прежним рассуждениям, полная амплитуда того, что нейтрон попал в *С,* включает в себя сумму выражения (1.11) по всем атомам:

C:\Мои документы\gray.jpg

Из-за того, что складываются амплитуды рассеяния на ато­мах, по-разному расположенных в пространстве, у амплитуд будут разные фазы, и это даст характерную интерференционную картину, которую мы уже анализировали на примере рассеяния света на решетке.

Интенсивность нейтронов как функция угла в подобном опыте действительно *ч часто* обнаруживает сильнейшие изменения — очень острые интерференционные пики, между которы­ми ничего нет (фиг. 1.6, а).

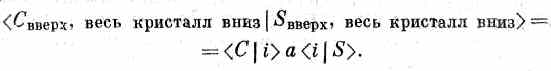


*Фиг.**1.6. Скорость счета нейтронов как функция угла, а — для ядер* со *спином 0; б — вероятность рассеяния с перево­ротом спина; в — наблюдаемая скорость счета для ядра со спи­ном 1*/*2*.

Однако в некоторых сортах кристал­лов этого не случается, в них наряду с упомянутыми выше дифракционными пиками имеется общий фон от рассеяния во всех направлениях. Мы должны попытаться понять столь та­инственную с виду причину этого. Дело в том, что мы не учли одного важного свойства нейтрона. Его спин равен 1/2. и тем самым он может находиться в двух состояниях: либо его спин направлен вверх (скажем, поперек страницы на фиг. 1.5), либо вниз. И если у ядер самого кристалла спина нет, то спин нейтрона никакого действия не окажет. Но когда и у ядер кристалла есть спин, равный, скажем, тоже 1/2, то вы заметите фон от описанного выше размазанного рассеяния. Объяснение состоит в следующем.

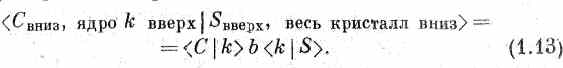
Если спин нейтрона куда-то направлен и спин атомного ядра направлен туда же, то в процессе рассеяния направление спина не меняется. Если же спины нейтрона и атомного ядра направлены в противоположные стороны, то рассеяние может происходить посредством двух процессов, в одном из которых направления не меняются, а в другом происходит обмен направлениями. Это правило о том, что сумма спинов не должна меняться, аналогично нашему классическому закону сохране­ния момента количества движения. И мы уже в состоянии будем понять интересующее нас явление, если предположим, что все ядра, на которых происходит рассеяние, имеют одно и то же направление спина. Нейтрон с тем же направлением спина тогда рассеется так, что получится ожидавшееся узкое интерферен­ционное распределение. А что будет с нейтроном с противопо­ложным направлением спина? Если он рассеивается без пере­ворота направления спина, то ничего по сравнению со сказан­ным не меняется; но если при рассеянии оба спина перевора­чиваются, то, вообще говоря, можно указать, на каком из ядер произошло рассеяние, потому что именно у этого ядра спин перевернулся. Но если мы в состоянии указать, на каком атоме случилось рассеяние, то причем здесь остальные атомы? Ни при чем, конечно. Рассеяние здесь такое же, как от отдельного атома.

Чтобы учесть этот эффект, надо видоизменить математиче­скую формулировку уравнения (1.12), потому что в том анализе состояния не были охарактеризованы полностью. Пусть вна­чале у всех нейтронов, вылетающих из источника, спин направ­лен вверх, а у всех ядер кристалла — вниз. Во-первых, нам нужна амплитуда того, что в счетчике нейтронов их спин ока­жется направленным вверх *и* все спины в кристалле будут по-прежнему смотреть вниз. Это ничем не отличается от наших прежних рассуждений. Обозначим через *а* амплитуду рассея­ния без переворота спина. Амплитуда рассеяния от *i*-го атома, разумеется, равна



Поскольку все спины атомов направлены вниз, разные альтерна­тивы (разные значения *i)* нельзя друг от друга отличить. В этом процессе все амплитуды интерферируют.

Но есть и другой случай, когда спин детектируемого нейтро­на смотрит вниз, хотя вначале, в *S,* он смотрел вверх. Тогда в кристалле один из спинов должен перевернуться вверх, скажем спин *k-го* атома. Допустим, что у всех атомов амплитуда рас­сеяния с переворотом спина одна и та же и равна 6. (В реальном кристалле имеется еще одна неприятная возможность: пере­вернутый спин переходит к какому-то другому атому, но до­пустим, что в нашем кристалле вероятность этого мала.) Тогда амплитуда рассеяния равна



Если мы спросим теперь, какова вероятность того, что у нейтро­на спин окажется направленным вниз, а у *k-го* ядра — вверх, то она будет равняться квадрату модуля этой амплитуды, т. е. просто |*b*|2, умноженному на |<С|k><k|S>|2. Второй множитель почти не зависит от того, где атом *k* расположен в кристалле, и все фазы при вычислении квадрата модуля ис­чезают. Вероятность рассеяния *на любом ядре* кристалла с пере­воротом спина, стало быть, равна

C:\Мои документы\gray.jpg

что дает гладкое распределение, как на фиг. 1.6, *б.*

Вы можете возразить: «А мне все равно, какой атом перевер­нулся». Пусть так, но природа-то это знает, и вероятность на самом деле выходит такой, как написано выше,— никакой интерференции не остается. А вот если вас заинтересует ве­роятность того, что спин в детекторе будет направлен вверх, а спины всех атомов — по-прежнему вниз, то вы должны будете взять квадрат модуля суммы:

C:\Мои документы\gray.jpg

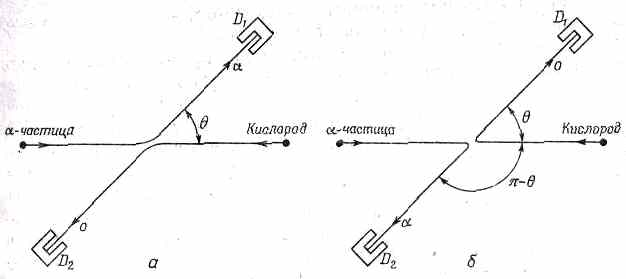
Поскольку у каждого слагаемого в этой сумме есть своя фаза, то они интерферируют и появляется резкая интерференционная картина. И если мы проводим эксперимент, в котором мы не наблюдаем спина детектируемого нейтрона, то могут произойти события обоих типов и сложатся отдельные вероятности. Полная вероятность (или скорость счета) как функция угла тогда выглядит подобно кривой на фиг. 1.6, в.

Давайте еще раз окинем взглядом физику этого опыта. Если вы способны *в принципе* различить взаимоисключающие *ко­нечные* состояния (хотя вы и не собирались на самом деле этого делать), то полная конечная вероятность получается подсчетом *вероятности* каждого состояния (а не амплитуды) и последую­щим их сложением. А если вы *неспособны даже в принципе* различить конечные состояния, тогда надо сперва сложить амплитуды вероятностей, а уж потом вычислять квадрат моду­ля и находить самую вероятность. Заметьте особенно, что если бы вы попытались представить нейтрон в виде отдельной волны, то получили бы одно и то же распределение и для рассеяния нейтронов, вращающихся спином вниз, и для нейтронов, вра­щающихся спином вверх. Вы должны были бы сказать, что «волна» нейтронов со спином, направленным вниз, пришла ото всех различных атомов и интерферирует так же, как это делает одинаковая по длине волна нейтронов со спином, направленным вверх. Но мы знаем, что на самом деле это не так. Так что (мы уже это отмечали) нужно быть осторожным и не представлять себе чересчур реально волны в пространстве. Они полезны для некоторых задач. Но не для всех.

**§ 4. Тождественные частицы**

Очередной опыт, который мы хотим описать, продемонстри­рует одно из замечательных следствий квантовой механики. В нем снова встретятся такие физические события, в которых существуют два *неразличимых* пути и, как *всегда* при таких об­стоятельствах, возникает интерференция амплитуд. Мы собира­емся рассмотреть рассеяние одних ядер на других при сравни­тельно низкой энергии. Начнем, скажем, с α-частиц (это, как вы знаете, просто ядра гелия), бомбардирующих кислород. Чтобы облегчить анализ реакции, проведем его в системе центра масс, в которой скорости ядра кислорода и α-частицы перед столкновением противоположны, а после столкновения тоже противоположны (фиг. 1.7, *а).* (Величины скоростей, конечно, различны, поскольку массы различны.) Предположим также, что энергия сохраняется и что энергия столкновения настолько мала, что частицы ни раскалываются, ни переходят в возбужденное состояние. Причина, отчего частицы отклоняют друг друга, состоит попросту в том, что обе они заряжены положительно и, выражаясь классически, отталкиваются, проходя одна мимо дру­гой. Рассеяние на разные углы будет происходить с различной вероятностью, и мы хотим выяснить угловую зависимость подоб­ного рассеяния. (Конечно, все это можно рассчитать классически, и по удивительной случайности оказалось, что ответ на этот вопрос в квантовой механике и в классической — один и тот же. Это очень занятно, потому что ни при каком законе сил, кроме закона обратных квадратов, так не бывает, стало быть, это и впрямь случайность.)

Вероятность рассеяния в разных направлениях можно из­мерить в опыте, изображенном на фиг. 1.7,*а.*



*Фиг. 1.7. Рассеяние α-частиц на ядрах кислорода, наблюдаемое в системе центра масс.*

Счетчик в положе­нии *D*1может быть сконструирован так, чтобы детектировать только α-частицы; счетчик в положении *D*2 может быть устроен так, чтобы детектировать кислород просто для проверки. (В си­стеме центра масс детекторы должны смотреть друг на друга, в лабораторной — нет.) Опыт заключается в измерении вероят­ности рассеяния в разных направлениях. Обозначим через *f*(θ) амплитуду рассеяния в счетчики, когда они расположены под углом θ; тогда | *f*(θ)|2 — наша экспериментально опре­деляемая вероятность.

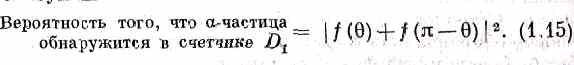
Можно было бы провести и другой опыт, в котором наши счетчики реагировали бы ина α-частицу, ина ядро кислорода. Тогда нужно сообразить, что будет, если мы решим не забо­титься о том, какая из частиц попала в счетчик. Разумеется, когда кислород летит в направлении θ, то с противоположной стороны, под углом (π-θ), должна оказаться α-частица (фиг. 1.7,б). Значит, если *f*(θ) — амплитуда рассеяния кисло­рода на угол 0, то *f*(π-θ) — это амплитуда рассеяния α-частицы [на угол θ](#прим3). Таким образом, вероятность того, что *какая-то* частица окажется в счетчике, который находится в положе­нии *d*1, равна

C:\Мои документы\gray.jpg

Заметьте, что в принципе оба состояния различимы. Даже если в этом опыте мы их *не различали,* мы *могли бы* это сделать. И в соответствии с нашими прежними рассуждениями мы, стало быть, должны складывать вероятности, а не амплитуды.

Приведенный выше результат справедлив для многих ядер. Мишенью здесь могут служить и кислород, и углерод, и бериллий, и водород. *Но он неверен* при рассеянии α-частиц на α-частицах. В том единственном случае, когда обе частицы в точности одинаковы, экспериментальные данные не согласуются с пред­сказаниями формулы (1.14). Например, вероятность рассеяния на угол 90° в точности вдвое больше предсказанной вышеизло­женной теорией — с частицами, являющимися ядрами «гелия», номер не проходит. Если мишень из Не3, а налетают на нее α-частицы (Не4), то все хорошо. И только когда мишень из Не4, т. е. ее ядра тождественны падающим α-частицам, только тогда рассеяние меняется с углом каким-то особым образом.

Быть может, вы уже догадались, в чем дело? В счетчике α-частица может очутиться по двум причинам: либо из-за рас­сеяния налетевшей α-частицы на угол θ, либо из-за рассеяния ее на угол (π-θ). Как мы можем удостовериться, кто попал в счетчик — частица-снаряд или частица-мишень? Никак. В случае рассеяния α-частиц на α-частицах существуют две альтернативы, различить которые нельзя. Приходится дать *амплитудам* вероятности интерферировать при помощи сложе­ния, и вероятность обнаружить в счетчике α-частицу есть квад­рат этой суммы:



Это совсем не то, что (1.14). Возьмите, скажем, угол я/2 (это легче себе представить). При θ=π/2 мы, естественно, имеем *f*(θ)=f(π-θ), так что из (1.15) вероятность оказывается равной

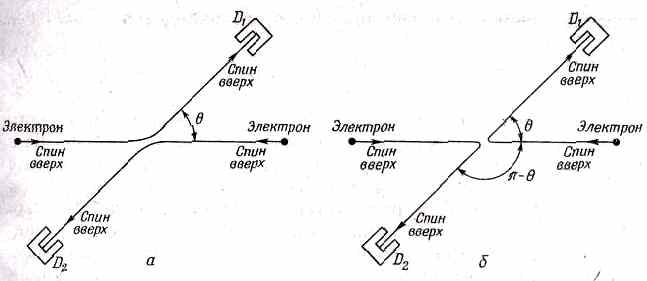
C:\Мои документы\gray.jpg

А с другой стороны, если бы не было интерференции, форму­ла (1.14) дала бы только 2*|f*(π/2)|2. Так что на угол 90° рас­сеивается вдвое больше частиц, чем можно было ожидать. Конечно, и под другими углами результаты будут другие. И мы приходим к необычному выводу: когда частицы тождественны, происходит нечто новое, чего не бывало, когда частицы можно было друг от друга отличить. При математическом описании вы обязаны складывать амплитуды взаимоисключающих процессов, в которых обе частицы просто обмениваются ролями, и происходит интерференция.

Еще более неожиданное явление происходит с рассеянием электронов на электронах или протонов на протонах. Тогда не верен ни один из прежних результатов! Для этих частиц мы должны призвать на помощь совершенно новое правило: если попадающий в некоторую точку электрон обменивается своей индивидуальностью с другим электроном, то новая ам­плитуда интерферирует со старой в *противофазе.* Это все равно интерференция, но с обратным знаком. В случае α-частиц, когда происходит обмен α-частицами, достигающими счетчика, амплитуды интерферируют с одним и тем же знаком. *А в случае электронов амплитуды обмена интерферируют с разными зна­ками.* С точностью до одной детали, о которой будет сейчас сказано, правильная формула для электронов в опыте, подобном изображенному на фиг. 1.8, такова:

C:\Мои документы\gray.jpg

Это утверждение нуждается в уточнении, потому что мы не учли спин электрона (у α-частиц спина нет).

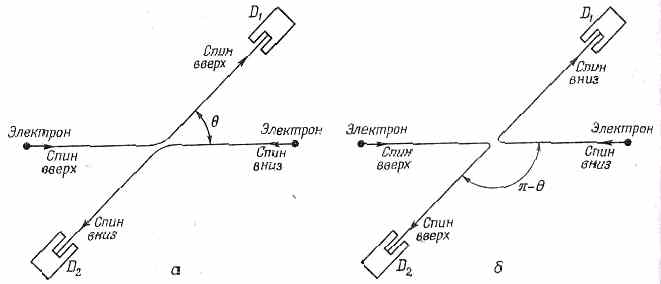


*Фиг, 1.8. Рассеяние электронов на электронах.*

*Если спины сталкивающихся электронов параллельны, то процессы а и б неразличимы.*

Спин электрона можно считать направленным либо вверх, либо вниз по отно­шению к плоскости рассеяния. Если энергия в опыте достаточно низка, то магнитные силы, возникающие от токов, будут ма­лы и не повлияют на спин. Предположим в нашем анализе, что так оно и есть, так что нет шансов, чтобы спины при столкно­вении перевернулись. Какой бы спин у электрона ни был, он уносит его с собой. Мы видим теперь, что есть много возможно­стей. У частицы-снаряда и частицы-мишени оба спина могут быть направлены вверх, или вниз, или в разные стороны. Если они оба направлены вверх, как на фиг. 1.8 (или оба — вниз), то после рассеяния останется то же самое, и *амплитуда* про­цесса будет *разностью* амплитуд тех двух возможностей, ко­торые показаны на фиг. 1.8. *Вероятность* обнаружить электрон в счетчике *D*1тогда будет даваться формулой (1.16).

Предположим, однако, что у «снаряда» спин направлен вверх, а у «мишени» — вниз. У электрона, попавшего в счетчик *D*1, спин может оказаться либо направленным вверх, либо —вниз, и, измеряя этот спин, мы можем сказать, выскочил ли этот элек­трон из бомбардирующего пучка или же из мишени.



*Фиг. 1.9. Рассеяние электронов с антипараллельными спинами.*

Эти две возможности показаны на фиг. 1.9; в принципе они различимы, и поэтому интерференции не получится, просто сложатся две вероятности. Все это верно и тогда, когда оба первоначальных спина перевернуты, т. е. если спин слева смотрит вниз, а спин справа — вверх.

*Таблица 1.1* • рассеяние неполяризованных частиц со спином 1/2



Наконец, если электроны вылетают случайно (например, они вылетают из накаленной вольфрамовой нити полностью неполяризованным пучком), то с равной вероятностью каждый отдельный электрон вылетит либо спином вверх, либо спином вниз. Если мы не собираемся в нашем опыте измерять в ка­кой-нибудь точке спин электронов, то получается то, что назы­вают экспериментом с неполяризованными частицами. Результат этого эксперимента лучше всего подсчитать, перечислив все мыс­лимые возможности, как это сделано в табл. 1.1. Для каждой различимой альтернативы отдельно подсчитана *вероятность.* Тогда полная вероятность есть сумма всех отдельных вероят­ностей. Заметьте, что для неполяризованных пучков результат при θ=π/2 составляет половину классического результата для независимых частиц.

Поведение тождественных частиц приводит ко многим ин­тересным следствиям; в следующей главе мы обсудим их по­подробнее.

***\* Вообще-то направление рассеяния должно, конечно, описываться двумя углами — полярным углом ϕ и азимутом θ. Тогда следовало бы ска­зать, что рассеяние кислорода в направлении (θ,ϕ) означает, что α-частица движется в направлении (π-θ, ϕ+π). Однако для кулоновского рассеяния (и многих других случаев) амплитуда рассеяния не зависит от ϕ. Тогда амплитуда того, что кислород полетел под углом 6, совпадает с ам­плитудой того, что α-частица полетела под углом (π-θ).***

\* По-русски, наверно, правильнее говорить амплитуда вероятности, но короче говорить просто амплитуда и примириться с выражением типа «амплитуда того, что электрон находится в точке х».— Прим. ред.

\* В американском издании этот том начинается с двух глав из второго тома [гл. 37 и 38 (вып. 3)], кото­рые авторы считали нужным повторить. Это было сде­лано для того, чтобы третий том можно было чи­тать, не обращаясь к прежним томам. В русском издании мы не стали печатать их снова: читатель должен всегда держать первые выпуски под рукой, поэтому нумерация глав в русском издании сдвинута на 2 единицы по сравнению с третьим томом. Из тех же соображений мы не перепечатали вновь гл. 34 и 35, они вошли в вып. 7.— Прим. ред.

# Глава 2

**ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ЧАСТИЦЫ**

[**§ 1.Бозе-части****цы и ферм****и-частицы**](#a1)

[**§ 2.Состояния с двум****я боз****е-частицами**](#a2)

[**§ 3.Состояния** **с n бозе-ча****стицами**](#a3)

[**§ 4.Излучение и** **по****глощение фотонов**](#a4)

[**§ 5. Спектр абсо****лю****тно черного тела**](#a5)

[**§ 6.Жидкий ге****лий**](#a6)

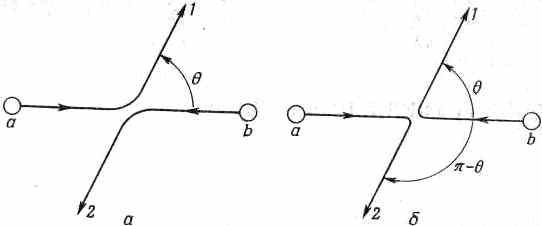
[**§ 7.Принцип** **запрета**](#a7)

*Повторить:* гл. 41 (вып. 4) «Броуновское движение» (об излучении абсолютно черного тела гл. 42 (вып 4 «Применения кинетической теории»

**§ 1. Бозе-частицы и ферми-частицы**

В предыдущей главе мы начали рассматри­вать особые правила, по которым происходит с интерференция в процессах с двумя *тождественными* частицами. *Тождественными* мы счи­таем такие частицы, которые, подобно электро­нам, никак невозможно отличить друг от друга. Если в процессе имеются две тождественные частицы, то замена той, которая повернула к счетчику, на другую — это неотличаемая альтернатива, которая, как и во всех случаях неотличимых альтернатив, интерферирует с первоначальным случаем, когда обмена не было. Амплитудой события тогда служит сумма двух интерферирующих амплитуд, и существенно, что в одних случаях интерференция происходит в *фазе,* а в других — в *противофазе.*

Представим, что сталкиваются две частицы *а* и *b* и частица *а* рассеивается в направлении *1,* а частица *b —* в направлении *2* (фиг. 2.1, а).



Фиг. 2.1. При рассеянии двух тождественных частиц процессы а и б неразличимы.

Пусть *f(*θ) будет амплитуда этого процесса; тогда вероятность *Р*1наблюдения подобного события пропорциональна |*f*(θ)|2. Конечно, могло случиться, что частица *b* рассеялась в счетчик *1,* а частица *а* направилась в счетчик *2* (фиг. 2.1, *б).* Если считать, что никаких спе­циальных направлений, определяемых спином или чем-то подобным, в опыте нет, то вероят­ность Р2 этого события можно просто записать в виде | *f*(π-θ)|2, потому что этот процесс попросту эквивалентен первому процессу, в котором счетчик *1* поставили под углом (я — 6). И вам могло бы показаться, что *амплитуда* вто­рого процесса равна просто *f*(π-θ). Но это не обязательно так, потому что в ней мог стоять произвольный фазовый множитель. Иначе говоря, амплитуда могла бы быть такой:



Ведь и такая амплитуда все еще приводит к вероятности *Р*2, равной |*f*(π-θ)|2.

Посмотрим теперь, что случается, если частицы *a* и *b* оказы­ваются идентичными. Тогда два разных процесса, показанных на двух частях фиг. 2.1, уже нельзя друг от друга отличить. Существует амплитуда того, что *а* или *b* попадает в счетчик *1,* тогда как оставшаяся частица попадает в счетчик *2.* Эта амплитуда есть сумма амплитуд двух процессов, показанных на фиг. 2.1.

Если первую мы обозначим *f*(θ), то вторая будет C:\Мои документы\gray.jpg и теперь уже фазовый множитель очень важен, потому что мы собираемся складывать амплитуды. Предположим, что мы обязаны умножать амплитуду на некий фазовый множитель всякий раз, когда две частицы обмениваются ролями. Если они еще раз обменяются ими, то множитель появится еще раз. Но при этом мы снова возвратимся к первому процессу. Фазовый множитель, взятый дважды, должен вернуть нас к тому, с чего мы начали,— его квадрат должен быть равен единице. Есть только две возможности: C:\Мои документы\gray.jpg

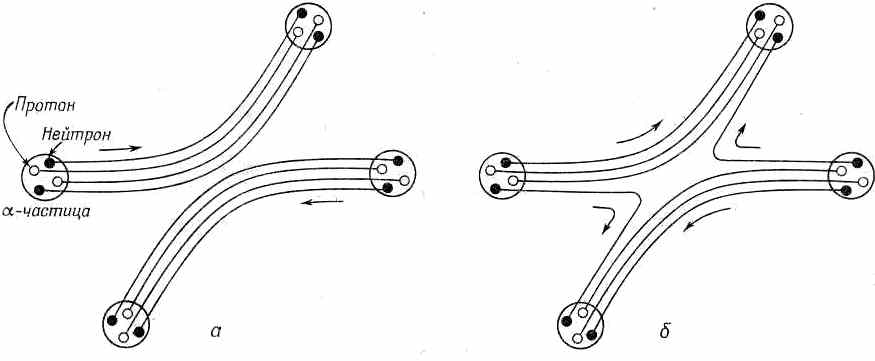
равно либо +1, либо -1. Обмен при­водит ко вкладу в амплитуду с *тем же* знаком или ко вкладу с *противоположным* знаком. И оба случая встречаются в природе, каждый для своего класса частиц. Частицы, интерферирующие с *положительным* знаком, называются *бозе-частицами,* а те, которые интерферируют с *отрицательным* знаком, именуются *ферми-частицами.* Ферми-частицы — это электрон, мюон, оба нейтрино, нуклоны и барионы. Стало быть, амплитуда рассеяния тождественных частиц имеет вид *для бозе-частиц:*

(Амплитуда процесса)+(Амплитуда обмена); (2.1) *для ферми-частиц*:

(Амплитуда процесса)-(Амплитуда обмена). (2.2)

Для частиц со спином (скажем, электронов) возникает добавочное усложнение. Нужно указывать не только местопо­ложение частиц, но и направление их спинов. Только в том случае, когда частицы идентичны и их *спиновые состояния тоже идентичны,* только тогда при обмене частицами амплитуды ин­терферируют. А если вас интересует рассеяние неполяризован­ных пучков, являющихся смесью различных спиновых состоя­ний, то нужны еще выкладки и сверх этого.

Интересная проблема возникает при наличии двух или больше тесно связанных частиц. К примеру, в α-частице сидят четыре частицы: два нейтрона и два протона. И когда рассеи­ваются две α-частицы, может представиться несколько возмож­ностей. Может случиться, что при рассеянии обнаружится ко­нечная амплитуда того, что один из нейтронов перескочит от одной α-частицы к другой, а нейтрон из другой α-частицы пе­рейдет к первой, так что две α-частицы после рассеяния оказы­ваются не первоначальными частицами — произошел обмен парой нейтронов (фиг. 2.2).



*Фиг. 2.2. Рассеяние двух α-частиц.*

*а —- обе частицы сохраняют свою индивидуальность; б* — во *время рассеяния происходит обмен нейтроном.*

Амплитуда рассеяния с обменом парой нейтронов будет интерферировать с амплитудой рассея­ния без такого обмена, и интерференция должна иметь знак минус, потому что состоялся обмен ферми-частицами. С другой стороны, если относительная энергия двух α-частиц так мала, что они находятся сравнительно далеко друг от друга (скажем, из-за кулоновского отталкивания) и вероятность обмена лю­быми внутренними частицами оказывается незначительной, в этом случае α-частицу можно считать простейшим объектом, не задумываясь о деталях ее внутреннего строения. В этих условиях в амплитуду рассеяния войдут только два члена. Либо обмена вовсе нет, либо при рассеянии происходит обмен всеми четырьмя нуклонами. Поскольку и протоны, и нейтроны в α-частице — это ферми-частицы, обмен любой парой меняет знак амплитуды рассеяния. Пока внутри α-частиц нет никаких изменений, обмен двумя α-частицами означает то же самое, что обмен четырьмя парами ферми-частиц. Каждая пара меняет знак, и в итоге амплитуды складываются со знаком плюс. Так что α-частица ведет себя как бозе-частица.

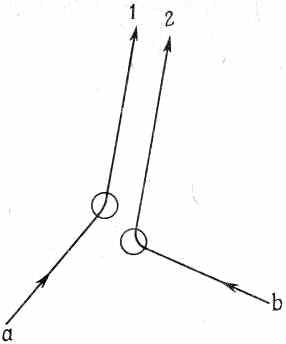
Значит, правило состоит в том, что сложные объекты в тех обстоятельствах, когда их можно считать неделимыми объекта­ми, ведут себя как бозе- или ферми-частицы, смотря но тому, содержится ли в них четное или нечетное число ферми-частиц.

Все элементарные ферми-частицы, о которых мы упоминали (такие, как электрон, протон, нейтрон и т. д.), обладают спином j=1/2. Если несколько таких ферми-частиц образует сложный объект, общий их спин может быть либо целым, либо полуцелым. К примеру, у самого распространенного изотопа гелия Не4, в ко­тором два протона и два нейтрона, спин равен нулю, а у Li7, в котором протонов три, а нейтронов четыре, спин равен 3/2. Позже мы выучим правила сложения моментов количества движения, а пока просто заметим, что всякий сложный объект с *полуцелым* спином имитирует *ферми-частицу,* тогда как всякий сложный объект с *целым* спином имитирует *бозе-частицу.*

Интересно, отчего так получается? Отчего частицы с полу­целым спином суть ферми-частицы, чьи амплитуды складывают­ся со знаком минус, а частицы с целым спином суть бозе-частицы, чьи амплитуды складываются с положительным знаком? Мы просим прощения за то, что неспособны элементарно объяснить вам это. Но объяснение существует, его нашел Паули, основываясь на сложных доводах квантовой теории поля и тео­рии относительности. Он показал, что эти факты с необходи­мостью связаны друг с другом; но мы не в состоянии найти спо­соб воспроизвести его аргументы на элементарном уровне. Это, видимо, одно из немногих мест в физике, когда правило формулируется очень просто, хотя столь же простого объясне­ния ему не найдено. Объяснение коренится глубоко в реляти­вистской квантовой механике. По-видимому, это означает, что мы до конца не понимаем лежащего в его основе принципа. Будем считать его пока одним из законов Вселенной.

**§ 2. Состояния с двумя бозе-частицами**

Теперь мы хотели бы обсудить интересное следствие из пра­вила сложения для бозе-частиц. Оно касается поведения этих частиц, когда их не одна, а несколько. Начнем с рассмотрения случая рассеяния двух бозе-частиц на двух различных рассеивателях. Нас интересуют не детали механизма рассеяния, а лишь одно: что происходит с рассеянными частицами. Пусть перед нами случай, показанный на фиг. 2.3.



Фиг. 2.3. Двойное рассеяние в близ­кие конечные состояния.

Частица *а*, рас­сеявшись, оказалась в состоянии 1. Под *состоянием* мы подра­зумеваем данное направление и энергию или какие-нибудь другие заданные условия. Частица *b* рассеялась в состояние 2.Предположим, что состояния 1 и 2 почти одинаковы. (На са­мом же деле мы хотели бы получить амплитуду того, что две частицы рассеялись в одном и том же направлении или в одно и то же состояние, но лучше будет; если мы сперва подумаем над тем, что произойдет, если состояния будут почти одинако­выми, а затем выведем отсюда, что бывает при их полном сов­падении.)

Пусть у нас была бы только частица а; тогда у нее была бы определенная амплитуда рас­сеяния в направлении 1, скажем <1|*а*>. А частица *b* сама по себе обладала бы амплитудой <2|*b>* того, что приземление произойдет в направлении 2. Если частицы не тождественны, то амплитуда того, что в одно и то же время произойдут оба рассеяния, равна попросту произведению

<1|а><2|*b>.* Вероятность же такого события тогда равна

|<l|*a*><2|*b>*|2 что также равняется

|<1|*а*>|2|<2|*b*>|2. Чтобы сократить запись, мы иногда будем полагать

<1|*а*>=*а*1, <2|*b*>=*b*2.

Тогда вероятность двойного рассеяния есть

|a1|2|b2|2.

Могло бы также случиться, что частица *b* рассеялась в на­правлении 1, а частица а —в направлении 2. Амплитуда та­кого процесса была бы равна

<2|*а*><1|*b*>, а вероятность такого события равна

|<2|*а*><1|*b*>|2=|*a*2|2|*b*1|2.

Представим себе теперь, что имеется пара крошечных счет­чиков, которые ловят рассеянные частицы. Вероятность Р2 того, что они засекут сразу обе частицы, равна просто

*P*2=|*a*1|2|*b*2|2+|a2|2|*b*1|2. (2.3)

Положим теперь, что направления 1 и 2 очень близки. Бу­дем считать, что *а* с изменением направления меняется плавно, тогда *а*1и *а*2 при сближении направлений 1 и 2 должны приближаться друг к другу. При достаточном сближении амплитуды *а*1и *а*2 сравняются, и можно будет положить *а*1=*а*2 и обозна­чить каждую из них просто *а;* точно так же мы положим и *b*1=*b*2=*b.* Тогда получим

*Р*2*=*2*|а|*2*|b|*2. (2.4)

Теперь, однако, предположим, что *а* и *b —* тождественные бозе-частицы. Тогда процесс перехода *а в* состояние 1, а *b* в состояние 2 нельзя будет отличить от обменного процесса, в ко­тором *b* переходит в 2, а а — в 1. В этом случае *амплитуды* двух различных процессов могут интерферировать. *Полная* амплиту­да того, что в каждом из счетчиков появится по частице, равна

<1| *а*><2|*b*>+<2|*а*><1|*b*>, (2.5)

и вероятность того, что ими будет зарегистрирована пара, дается квадратом модуля этой амплитуды:

*Р*2= |*а*1*b*2+*a*2*b*1|2=4|*a*|2|*b*|2(2.6)

Б итоге выясняется, что *вдвое более вероятно* обнаружить две *идентичные* бозе-частицы, рассеянные в одно и то же состоя­ние, по сравнению с *расчетом, проводимым в предположении, что частицы различны.*

Хотя мы считали, что частицы наблюдаются двумя разными счетчиками,— это несущественно. В этом можно убедиться следующим образом. Вообразим себе, что оба направления 1 и 2 привели бы частицы в *один и тот же* маленький счетчик, кото­рый находится на каком-то расстоянии. Мы определим направ­ление 1, говоря, что оно смотрит в элемент поверхности *dS*1 счетчика. Направление же 2 смотрит в элемент поверхности *dS*2счетчика. (Считается, что счетчик представляет собой по­верхность, поперечную к линии рассеяния.) Теперь уже нельзя говорить о вероятности того, что частица направится точно в каком-то направлении или в *определенную* точку пространства. Это невозможно — шанс зарегистрировать любое фиксирован­ное направление равен нулю. Если уж нам хочется точности, то нужно так определить наши амплитуды, чтобы они давали ве­роятность попадания на *единицу площади* счетчика. Пусть у нас была бы только одна частица я; она бы имела определенную амплитуду рассеяния в направлении 1. Пусть<1|*а*>=*a*1 определяется как амплитуда того, что *а* рассеется в *единицу площади* счетчика, расположенного в направлении 1. Иными словами, мы выбираем масштаб *а*1и говорим, что она «нормирована» так, что вероятность того, что *а* рассеется в *элемент площади dS*1равна

C:\Мои документы\gray.jpg

Если вся площадь нашего счетчика Δ*S* и мы заставим *dS*1странст­вовать по этой площади, то полная вероятность того, что ча­стица *а* рассеется в счетчик, будет

C:\Мои документы\gray.jpg

Как и прежде, мы хотим считать счетчик настолько малым, что амплитуда *а*1на его поверхности не очень меняется; зна­чит, *а*1будет постоянным числом, и мы обозначим его через *а.* Тогда вероятность того, что частица а рассеялась куда-то в счетчик, равна

C:\Мои документы\gray.jpg

Таким же способом мы придем к выводу, что частица *b* (когда она одна) рассеивается в элемент площади *dS*2с ве­роятностью

C:\Мои документы\gray.jpg

(Мы говорим d*S*2, а не *dS*1в расчете на то, что позже ча­стицам *а* и *b* будет разрешено двигаться в разных направле­ниях.) Опять положим *b*2 равным постоянной амплитуде *b*; тогда вероятность того, что частица *b* будет зарегистрирована счетчиком, равна

C:\Мои документы\gray.jpg

Когда же имеются две частицы, то вероятность рассеяния *а* в *dS*1и *b* в *dS*2будет

C:\Мои документы\gray.jpg

Если нам нужна вероятность того, что *обе* частицы (и *а,* и *b)* попали в счетчик, мы должны будем проинтегрировать *dS*1 и *dS*2по всей площади Δ*S;* получится

C:\Мои документы\gray.jpg

Заметим, кстати, что это равно просто *ра•рb* вточности так, как если бы мы предположили, что частицы *а* и *b* действуют независимо друг от друга.

Однако, когда две частицы тождественны, имеются две не­различимые возможности для каждой пары элементов поверх­ности *dS*1и *dS*2*.* Частица *а,* попадающая в *dS*2*,* и частица *b,* по­падающая в *dS*1*,* неотличимы от а в *dS*1и от *b* в *dS2,* так что амплитуды этих процессов будут интерферировать. (Когда у нас были две *различные* частицы, то, хотя мы *на самом деле* не заботились о том, какая из них куда попадает в счетчике, мы все же *в принципе* могли это узнать; так что интерференции не было. А для тождественных частиц мы и в принципе не можем этого сделать.) Мы должны тогда написать, что вероятность того, что пара частиц очутится в *dS*1и *dS*2*,* есть

C:\Мои документы\gray.jpg

Однако сейчас, интегрируя по поверхности счетчика, нужно быть осторожным. Пустив *dS*1и *dS*2 странствовать по всей пло­щади Δ*S*, мы бы сосчитали каждую часть площади *дважды,* поскольку в (2.13) входит все, что может [случиться](#прим1) с каждой парой элементов поверхности *dS*1и *dS*2*.* Но интеграл можно все равно подсчитать, если учесть двукратный счет, разделив результат пополам. Тогда мы получим, что *Р*2для тождествен­ных бозе-частиц есть

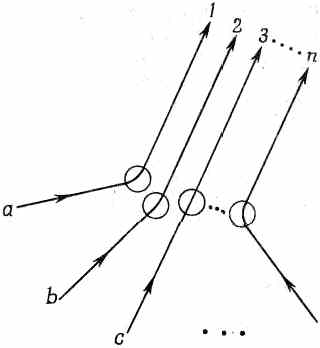
C:\Мои документы\gray.jpg

И опять это ровно вдвое больше того, что мы получили в (2.12) для различимых частиц.

Если вообразить на мгновение, что мы откуда-то знали, что канал *b* уже послал свою частицу в своем направлении, то мож­но сказать, что *вероятность* того, что вторая частица направит­ся в ту же сторону, вдвое больше того, чего можно было бы ожи­дать, если бы мы посчитали это событие независимым. Таково уж свойство бозе-частиц. что если есть одна частица в каких-то условиях, то *вероятность* поставить в те же условия вторую вдвое больше, чем если бы первой там не было. Этот факт часто формулируют так: если уже имеется одна бозе-частица в данном состоянии, то амплитуда того, что туда же, ей на голову, можно будет поместить вторую, в √2 раз больше, чем если бы первой там не было. (Это неподходящий способ формулировать резуль­тат с той физической точки зрения, какую мы избрали, но, если это правило последовательно применять, оно все же приводит к верному результату.)

**§ 3. Состояния с n бозе-частицами**

Распространим наш результат на тот случай, когда имеются *n* частиц. Вообразим случай, изображенный на фиг. 2.4.



*Фиг. 2.4. Рассеяние n частиц в близкие конечные состояния.*

Есть *n* частиц *а, b, с,* . . . , которые рассеиваются в направлениях 1, 2, 3, . . . , *п.* Все *n* направлений смотрят в небольшой счет­чик, который стоит где-то поодаль. Как и в предыдущем параг­рафе, выберем нормировку всех амплитуд так, чтобы вероятность того, что каждая частица, действуя по отдельности, попадет в элемент поверхности *dS* счет­чика, была равна

|< >*|*2*dS.*

Сперва предположим, что частицы все различимы, тогда вероятность того, что *n* частиц будут одновременно зарегистрированы в *n* разных элементах поверхности, будет равна

C:\Мои документы\gray.jpg

Опять примем, что амплитуды не зависят от того, где в счет­чике расположен элемент *dS* (он считается малым), и обозна­чим их .просто *а*, *b*, *с*, .... Вероятность (2.15) обратится в

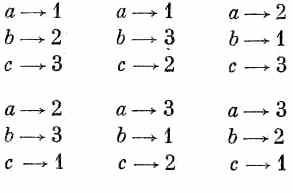
C:\Мои документы\gray.jpg

Прогоняя каждый элемент *dS* по всей поверхности Δ*S* счет­чика, получаем, что *Р*n(разные) — вероятность одновременно зарегистрировать *n* разных частиц — равна

C:\Мои документы\gray.jpg

Это просто произведение вероятностей попаданий в счетчик каждой из частиц по отдельности. Все они действуют незави­симо — вероятность попасть для одной из них не зависит от того, сколько других туда попало.

Теперь предположим, что все эти частицы — идентичные бозе-частицы. Для каждой совокупности направлений 1, 2, 3, ... существует много неразличимых возможностей. Если бы, ска­жем, частиц было только три, появились бы следующие воз­можности:



Возникает шесть различных комбинаций. А если частиц *n,* то будет *n*!разных, хотя и *не отличимых* друг от друга, комбина­ций; их амплитуды положено складывать. Вероятность того, что *n* частиц будут зарегистрированы в *n* элементах поверхности, тогда будет равна

│ *a*1*b*2*c*3 *…+* a1b3c2 … + и т. д. +│2 *dS*1 *dS*2 *dS*3... *dSn.* (2.18)

И снова мы предположим, что все направления столь близки друг к другу, что можно будет положить а1=а2= . . . . . . *=аn*=*а* и то же сделать с *b, с, . . . ;* вероятность (2.18) обратится в

*|n*!*abc ... |*2*dS*1*dS*2 *... dSn.* (2.19)

Когда каждый элемент *dS* прогоняют по площади Δ*S* счет­чика, то всякое мыслимое произведение элементов поверхности считается *n*!раз; учтем это, разделив на *n*!, и получим

C:\Мои документы\gray.jpg

или

C:\Мои документы\gray.jpg

Сравнивая это с (2.17), видим, что вероятность совместного счета *n* бозе-частиц в *n*!раз больше, чем получилось бы в пред­положении, что все частицы различимы. Все это можно подыто­жить так:

C:\Мои документы\gray.jpg

Итак, вероятность в случае бозе-частиц в *n*!раз больше, чем вы получили бы, считая, что частицы действовали независимо. Мы лучше поймем, что это значит, если спросим: чему равна вероятность того, что бозе-частица перейдет в некоторое состоя­ние, в котором *уже находятся n других частиц?* Обозначим добавленную частицу буквой *w.* Если всего, включая *w*, имеется *(n*+1) частиц, то (2.20) обращается в

C:\Мои документы\gray.jpg

Это можно записать так:

C:\Мои документы\gray.jpg

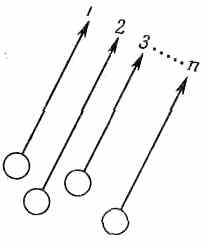
или

C:\Мои документы\gray.jpg

Этот результат можно истолковать следующим образом. Число *|w|*2Δ*S —* это вероятность заполучить в счетчик части­цу *w,* если никаких других частиц нет; *Рn*(бозе) — это шанс того, что там уже есть *n* других бозе-частиц. Значит, (2.23) говорит нам, что *когда* у нас уже есть *n* других идентичных друг другу бозе-частиц, то вероятность того, что *еще одна* частица придет в то же состояние, усиливается в *(n*+1) раз. Вероят­ность получить еще один бозон там, где уже есть их *n* штук, в (*n*+1) раз больше той, какая была бы, если бы там раньше ни­чего не было. *Наличие* других частиц увеличивает вероятность заполучить еще одну.

**§ 4. Излучение и поглощение фотонов**

Повсюду в наших рассуждениях шла речь о процессе, по­хожем на рассеяние α-частиц. Но это необязательно; можно было бы говорить и о создании частиц, например об излучении света. При излучении света «создается» фотон. В этом случае уже не нужны на фиг. 2.4 входящие линии; можно просто счи­тать, что есть *n* атомов *а, b, с, . . . ,* излучающих свет (фиг. 2.5).



*Фиг. 2.5. Образование n фотонов в близких состояниях.*

Значит, наш результат можно сформулировать и так: *вероятность того, что атом излучит фотон в некотором конечном состоянии, увеличивается в (n+*1) *раз, если в этом состоянии уже есть n фотонов.*

Многим больше нравится высказывать этот результат иначе; они говорят, что *амплитуда* испускания фотона увеличи­вается в √(*п*+1) раз, если уже имеется в наличии *n* фотонов. Разумеется, это просто другой способ сказать то же самое, если только иметь в виду, что эту амплитуду для получения вероят­ности надо просто возвести в квадрат.

В квантовой механике справедливо в общем случае утвержде­ние о том, что амплитуда получения состояния χиз любого другого состояния ϕ комплексно сопряжена амплитуде получе­ния ϕ из χ

C:\Мои документы\gray.jpg

Мы разберемся в этом чуть позже, а пока просто предположим, что на самом деле это так. Тогда этим можно воспользоваться, чтобы понять, как фотоны рассеиваются или поглощаются из данного состояния. Мы знаем, что амплитуда того, что фотон прибавится к какому-то состоянию, скажем *к i,* вкотором уже находится *n* фотонов, равна

C:\Мои документы\gray.jpg

где *а*=<*i|*а> — амплитуда, когда нет других фотонов. Если воспользоваться формулой (2.24), то амплитуда обратного перехода — от *(n+*1) фотонов к *n* фотонам — равна

C:\Мои документы\gray.jpg

Но обычно говорят иначе; людям не нравится думать о пере­ходе от *(n*+1) к *n,* они всегда предпочитают исходить из того, что имелось *n* фотонов. Поэтому говорят, что амплитуда погло­щения фотона, если имеется *n* других, иными словами, перехода от *n* к *(n-*1), равна

<n-1|n>=√na\*. (2.27)

Это, разумеется, просто та же самая формула (2.26). Но тогда возникает новая забота — помнить, когда пишется √*n* и когда √(*n*+1). Запомнить это можно так: множитель всегда равен корню квадратному из наибольшего числа имевшихся в нали­чии фотонов, все равно — до реакции или после. Уравнения (2.25) и (2.26) свидетельствуют о том, что закон на самом деле симметричен; несимметрично он выглядит лишь тогда, когда его записывают в виде (2.27).

Из этих новых правил проистекает множество физических следствий; мы хотим привести одно из них, касающееся испус­кания света. Представим случай, когда фотоны находятся в ящике,— можете вообразить, что ящик имеет зеркальные стен­ки. Пусть в этом ящике в одном и том же состоянии (с одними и теми же частотой, поляризацией и направлением) имеется *n* фо­тонов, так что их нельзя друг от друга отличить, и пусть в ящике имеется атом, который может испустить еще один фотон в таком же состоянии. Тогда вероятность того, что он испустит фотон, равна

(п+1)|*a*|2, (2.28)

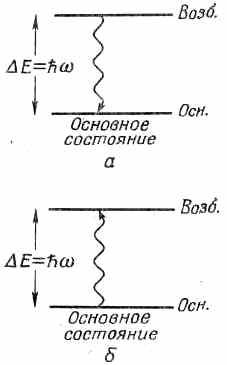
а вероятность того, что он фотон поглотит, равна

*n*|*а*|2, (2.29)

где |*а*|2 — вероятность того, что он испустил бы фотон, если бы не было этих *n* фотонов. Мы уже говорили об этих правилах немного по-иному в гл. 42 (вып. 4). Выражение (2.29) утверждает, что вероятность того, что атом *поглотит* фотон и совершит переход в состояние с более высокой энергией, пропорциональ­на интенсивности света, освещающего его. Но, как впервые указал Эйнштейн, скорость, с которой атом переходит в *более низкое* энергетическое состояние, состоит из двух частей. Есть вероятность |*а|*2 того, что он совершит самопроизвольный переход, и есть вероятность вынужденного перехода *n|а|*2*,* пропорциональная интенсивности света, т. е. числу имеющихся фотонов. Далее, как заметил Эйнштейн, коэффициенты погло­щения и вынужденного испускания равны между собой и свя­заны с вероятностью самопроизвольного испускания. Здесь же мы выяснили, что если интенсивность света измеряется ко­личеством имеющихся фотонов (вместо того, чтобы пользоваться энергией в единице объема или в секунду), то коэффициенты поглощения, вынужденного испускания и самопроизвольного испускания все равны друг другу. В этом смысл соотношения между коэффициентами *А* и *В,* выведенного Эйнштейном [см. гл. 42 (вып. 4), соотношение (42.18)].

**§ 5. Спектр абсолютно черного тела**

Мы хотим теперь использовать наши правила для бозе-частиц, чтобы еще раз получить спектр излучения абсолютно черного тела [см. гл. 42 (вып. 4)]. Мы сделаем это, подсчитав, сколько фотонов содержится в ящике, если излучение нахо­дится в тепловом равновесии с атомами в ящике. Допустим, что каждой световой частоте со соответствует определенное количество *N* атомов с двумя энергетическими состояниями, отличающимися на энергию Δ*Е* =hω (фиг. 2.6).



*Фиг. 2.6. Излучение и поглощение фотона с частотой ω*.

Состояние с меньшей энергией мы назовем «основным», с большей — «возбужденным». Пусть *Nосн* и *N*возб — средние числа атомов в основном и возбужденном состояниях; тогда для теплового равновесия при температуре *Т* из статистической механики следует

C:\Мои документы\gray.jpg

Каждый атом в основном состоянии может поглотить фотон и перейти в возбужденное состояние, и каждый атом в возбу­жденном состоянии может испустить фотон и перейти в основное состояние. При равновесии скорости этих двух процессов должны быть равны. Скорости пропорциональны вероятности событий и количеству имеющихся атомов. Пусть *n —* среднее число фотонов, находящихся в данном состоянии с частотой ω. Тогда скорость поглощения из этого состояния есть *Nocнn*|*а*|2*,* а скорость испускания в это состояние есть *Nвозб(n*+1)|*а*|2, Приравнивая друг другу эти две скорости, мы получаем

C:\Мои документы\gray.jpg

Сопоставляя это с (2.30), имеем

C:\Мои документы\gray.jpg

Отсюда найдем

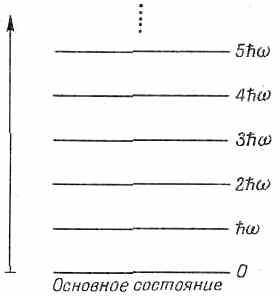
C:\Мои документы\gray.jpg

Это и есть среднее число фотонов в любом состоянии с частотой ω при тепловом равновесии в полости. Поскольку энергия каждого фотона hω, то энергия фотонов в данном состоянии

есть *nh*ω*,* или

C:\Мои документы\gray.jpg

Кстати говоря, мы уже получали подобное выражение в другой связи [см. гл. 41 (вып. 4), формула (41.15)]. Вспомните, что для гармонического осциллятора (скажем, грузика на пружинке) квантовомеханические уровни энергии находятся друг от друга на равных расстояниях hω, как показано на фиг. 2.7.

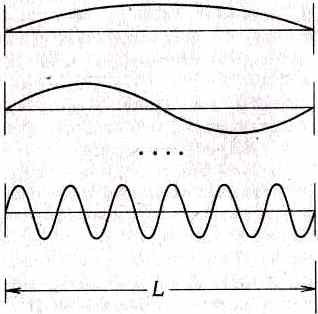


Фиг. 2.7. Уровни энергии гармонического осциллятора.

Обозначив энергию *n*-го уровня через *nh*ω. мы получили, что средняя энергия такого осциллятора также давалась выражением (2.33). А сейчас это выражение было выведено для фо­тонов путем подсчета их числа и привело к тому же результату. Перед вами — одно из чудес квантовой механики. Если начать с рассмотрения таких состояний или таких условий для бозе-частиц, когда они друг с другом не взаимодействуют (мы ведь предположили, что фотоны не взаимодействуют друг с другом), а за­тем считать, что в эти состояния могут быть помещены нуль, или одна, или две и т. д. до *n* частиц, то оказывается, что эта система ведет себя во всех квантовомеханических отношениях в точности, как гармонический осциллятор. Таким осциллято­ром считается динамическая система наподобие грузика на пружинке или стоячей волны в резонансной полости. Вот по­чему можно представлять электромагнитное поле фотонными частицами. С одной точки зрения можно анализировать электро­магнитное поле в ящике или полости в терминах множества гармонических осцилляторов, рассматривая каждый тип коле­баний, согласно квантовой механике, как гармонический ос­циллятор. С другой, отличной точки зрения ту же физику можно анализировать в терминах тождественных бозе-частиц. И итоги обоих способов рассуждений *всегда точно совпадают.* Невоз­можно установить, следует ли на самом деле электромагнитное поле описывать в виде квантуемого гармонического осциллято­ра или же задавать количество фотонов в каждом состоянии. Оба взгляда на вещи оказываются математически тождествен­ными. В будущем мы сможем с равным правом говорить либо о числе фотонов в некотором состоянии в ящике, либо о номере уровня энергии, связанного с некоторым типом колебаний электромагнитного поля. Это два способа говорить об одном и том же. То же относится и к фотонам в пустом пространстве. Они эквивалентны колебаниям полости, стенки которой отошли на бесконечность.

Мы подсчитали среднюю энергию произвольного частного типа колебаний в ящике при температуре *T*; чтобы получить закон излучения абсолютно черного тела, остается узнать толь­ко одно: сколько типов колебаний бывает при каждой энергии. (Мы предполагаем, что для каждого типа колебаний найдутся такие атомы в ящике — или в его стенках,— у которых есть Уровни энергии, способные приводить к излучению этого типа колебаний, так что каждый тип может прийти в тепловое равно­весие.) Закон излучения абсолютно черного тела обычно форму­лируют, указывая, сколько энергии в единице объема уносится светом в малом интервале частот от со до ω+Δω. Так что нам нужно знать, сколько типов колебаний с частотой в интервале Δω имеется в ящике. Хотя вопрос этот то и дело возни­кает в квантовой механике, это все же чисто классический во­прос, касающийся стоячих волн.

Ответ мы получим только для прямоугольного ящика. Для произвольного ящика выходит то же, только выкладки куда сложней. Нас еще будет интересовать ящик, размеры которого намного больше длины световых волн. В этом случае типов колебаний будет мириады и мириады; в каждом малом интер­вале частот Δω их окажется очень много, так что можно будет говорить об их «среднем числе» в каждом интервале Δω при частоте to. Начнем с того, что спросим себя, сколько типов колебаний бывает в одномерном случае — у волн в натянутой струне. Вы знаете, что каждый тип колебаний — это синусоида, кривая, обращающаяся на обоих концах в нуль; иначе говоря, на всей длине линии (фиг. 2.8) должно укладываться целое число полуволн.



*Фиг. 2.8. Типы стоячих волн на отрезке.*

Мы предпочитаем пользоваться волновым числом *k=*2π/λ; обозначая волновое число *j*-го типа колебаний через *kj,* получаем

C:\Мои документы\gray.jpg

где *j* — целое. Промежуток δ*k* между последовательными ти­пами равен

C:\Мои документы\gray.jpg

Нам удобно выбрать столь большое *kL,* что в малом интервале Δ*k*; оказывается множество типов колебаний.

Обозначив число типов колебаний в интервале Δ*k* черезC:\Мои документы\gray.jpg, имеем

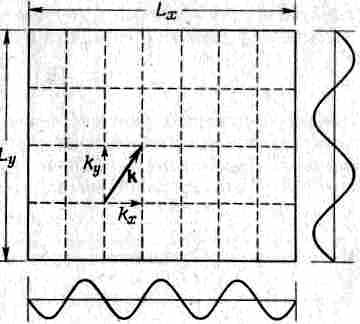
C:\Мои документы\gray.jpg

Физики-теоретики, занимающиеся квантовой механикой, обычно предпочитают говорить, что типов колебаний вдвое меньше; они пишут

C:\Мои документы\gray.jpg

И вот почему. Им обычно больше нравится мыслить на языке бегущих волн — идущих направо (с *k* положительными) и идущих налево (с *k* отрицательными). Но «тип колебаний», или «собственное колебание»,— это *стоячая* волна, т. е. сумма двух волн, бегущих каждая в своем направлении. Иными словами, они считают, что каждая стоячая волна включает два различ­ных фотонных «состояния». Поэтому если предпочесть под C:\Мои документы\gray.jpg подразумевать число фотонных состояний с данным *k* (где теперь уже *k* может быть и положительным, и отрицательным), то тогда C:\Мои документы\gray.jpg окажется вдвое меньше. (Все интегралы теперь нужно будет брать от *k*=-∞ до *k =+*∞, и общее число состояний вплоть до любого заданного абсолютного значения *k* получится таким, как надо.) Конечно, стоячие волны мы тогда не сможем хорошо описывать, но подсчет типов колебаний бу­дет идти согласованно.

Теперь наши результаты мы обобщим на три измерения. Стоячая волна в прямоугольном ящике должна обладать целым числом полуволн *вдоль каждой оси.* Случай двух измерений дан на фиг. 2.9.



Фиг. 2.9. Типы стоячих волн в двух измерениях.

Каждое направление и частота волны описываются вектором волнового числа k. Его *х-, у-* и z-компоненты должны удовлетворять уравнениям типа (2.34). Стало быть, мы имеем

C:\Мои документы\gray.jpg

Число типов колебаний с k*x* в интервале Δ*k*x, как и прежде, равно

C:\Мои документы\gray.jpg

то же и с Δ*k*y, и с Δ*k*z. Если обозначить через C:\Мои документы\gray.jpg (**k**) число таких типов колебаний, в которых векторное волновое число **k** обладает х-компонентой в интервале от *kx* до *k*x+Δ*k*x, у-компонентой в интервале от *ky* до *k*y+Δ*k*y и z-компонентой в интервале от *kz* до. *k*z +Δ*k*z, то

C:\Мои документы\gray.jpg

Произведение *Lx Ly Lz —* это объем *V* ящика. Итак, мы пришли к важному результату, что для высоких частот (длин волн, меньших, чем габариты полости) число мод (типов колебаний) в полости пропорционально ее объему *V* и «объему в *k*-пространстве» Δ*k*хΔ*k*yΔ*k*z. Этот результат то и дело появляется то в од­ной, то в другой задаче, и его стоит запомнить:

C:\Мои документы\gray.jpg

Хоть мы этого и не доказали, результат не зависит от формы

ящика.

Теперь мы применим этот результат для того, чтобы найти число фотонных мод для фотонов с частотами в интервале Δω. Нас интересует всего-навсего энергия разных собственных ко­лебаний, а не направления самих волн. Мы хотим знать число собственных колебаний в данном интервале частот. В вакууме величина **k** связана с частотой формулой

|**k**| =ω/c. (2.39)

Значит, в интервал частот Δω попадают все моды, отвечающие векторам **k**, *величина* которых меняется от *k* до *k*+Δ*k* незави­симо от направления. «Объем в k-пространстве» между *k* и *k*+Δ*k* — это сферический слой, объем которого равен

4π*k*2Δ*k*.

Количество собственных колебаний (мод) тогда равно

C:\Мои документы\gray.jpg

Однако раз нас интересуют частоты, то надо подставить *k=ω/c,* и мы получаем

C:\Мои документы\gray.jpg

Но здесь возникает одно усложнение. Если мы говорим о собственных колебаниях электромагнитной волны, то каж­дому данному волновому вектору **k** может соответствовать любая из двух поляризаций (перпендикулярных друг другу). Поскольку эти собственные колебания независимы, то нужно (для света) удвоить их число. И мы имеем

C:\Мои документы\gray.jpg

Мы показали уже [см. (2.33)], что каждое собственное коле­бание (мода, тип колебаний, «состояние») обладает в среднем

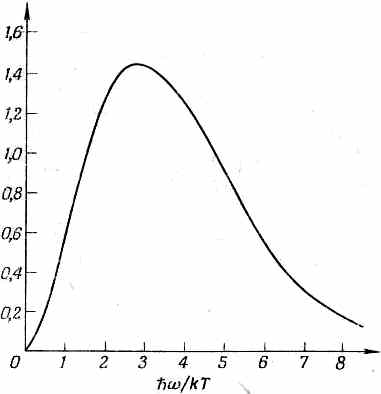
энергией

C:\Мои документы\gray.jpg

Умножая это на число собственных колебаний, мы полу­чаем энергию Δ*Е.* которой обладают собственные колебания лежащие в интервале Δω

C:\Мои документы\gray.jpg

Это и есть закон для спектра частот излучения абсолютно черного тела, найденный нами уже однажды в гл. 41 (вып. 4). Спектр этот вычерчен на фиг. 2.10.



*Фиг. 2.10. Спектр частот излучения в полости при тепловом равновесии (спектр «абсолютно чер­ного тела»).*

*На оси ординат отложена величина* C:\Мои документы\gray.jpg

*отличающаяся от de/dω постоянным множителем* C:\Мои документы\gray.jpg

Вы теперь видите, что ответ зависит от того факта, что фотоны являются бозе-частицами — частица­ми, имеющими тенденцию собираться всем вместе в одном и том же состоянии (амплитуда такого поведения велика). Бы помните, что именно Планк, изучавший спектр абсолютно чер­ного тела (который представлял загадку для классической фи­зики) и открывший формулу (2.43), положил тем самым начало квантовой механике.

**§ 6. Жидкий гелий**

Жидкий гелий при низких температурах обладает рядом странных свойств, на подробное описание которых у нас, к со­жалению, не хватает времени. Многие из них просто связаны с тем, что атом гелия — это бозе-частица. Одно из этих свойств— жидкий гелий течет без какого бы то ни было вязкого сопротив­ления. Это в действительности та самая «сухая» вода, о которой мы говорили в одной из прежних глав (при условии, что ско­рости достаточно низки). Причина здесь вот в чем. Чтобы жи­дкость обладала вязкостью, в ней должны быть внутренние поте­ри энергии; надо, чтобы одна из частей жидкости могла двигаться не так, как оставшаяся жидкость. Это означает, что должна быть возможность выбивать некоторые атомы в состояния, отличные от тех, в которых пребывают другие атомы. Но при достаточно низких температурах, когда тепловое движение становится очень слабым, все атомы стремятся попасть в одни и те же ус­ловия. Так, если некоторые из них движутся в одну сторону, то и все атомы пытаются двигаться все вместе таким же образом. Это своего рода жесткость по отношению к движению, и такое движение трудно разбить на неправильные турбулентные части, как это было бы, скажем, с независимыми частицами. Итак, в жидкости бозе-частиц есть сильное стремление к тому, чтобы все атомы перешли в одно состояние,— стремление, представ­ляемое множителем √(n+1), полученным нами ранее. (А в бутылке жидкого гелия *n,* конечно, очень большое число!) Это движение не происходит при высоких температурах, потому что тогда тепловой энергии хватает на то, чтобы перевести разные атомы во всевозможные различные высшие состояния. Но при достаточном понижении температуры внезапно насту­пает момент, когда все атомы гелия стремятся оказаться в одном и том же состоянии. Гелий становится сверхтекучим. Кстати, это явление возникает лишь у изотопа гелия с атомным весом 4. Отдельные атомы изотопа гелия с атомным весом 3 суть ферми-частицы, и жидкость здесь самая обычная. Поскольку сверх­текучесть бывает лишь у Не4, то со всей очевидностью этот эффект квантовомеханический, вызываемый бозевской приро­дой α-частицы.

**§ 7. Принцип запрета**

Ферми-частицы ведут себя совершенно иначе. Посмотрим, что произойдет, если мы попытаемся поместить две ферми-частицы в одно и то же состояние. Вернемся к нашему первона­чальному примеру и поинтересуемся амплитудой того, что две идентичные ферми-частицы рассеются в почти одинаковом на­правлении. Амплитуда того, что частица *а* пойдет в направ­лении 1, а частица *b —* в направлении 2, есть

<1|*a*>.<2|*b*>,

тогда как амплитуда того, что направления вылетающих частиц обменяются местами, такова:

<2|*а*><1|*b>.*

Раз мы имеем дело с ферми-частицами, то амплитуда процесса является разностью этих двух амплитуд:

<1|*а*><2|*b*>-<2|*а*><1|*b*>. (2.44)

Следует сказать, что под «направлением 1» мы подразумеваем, что частица обладает не только определенным направлением, но и заданным направлением своего спина, а «направление 2» почти совпадает с направлением 1 и отвечает *тому же* направ­лению спина. Тогда <1|*а*> и <2|*а*> будут примерно равны. (Этого могло бы и не быть, если бы состояния 1 и 2 вылетающих частиц не обладали одинаковым спином, потому что тогда по каким-то причинам могло бы оказаться, что амплитуда зависит от направления спина.) Если теперь позволить направлениям 1 и 2 сблизиться друг с другом, то полная амплитуда в уравне­нии (2.44) станет равной нулю. Для ферми-частиц результат много проще, чем для бозе-частиц. Просто абсолютно невоз­можно, чтобы две ферми-частицы, например два электрона, оказались в одинаковом состоянии. Вы никогда не обнаружите два электрона в одинаковом положении и со спинами, направленными в одну сторону. Двум электронам невозможно иметь один и тот же импульс и одно и то же направление спина. Если они оказываются в одном и том же месте или в одном и том же состоянии движения, то единственное, что им остается,— это завертеться навстречу друг другу.

Каковы следствия этого? Имеется множество замечатель­ных эффектов, проистекающих из того факта, что две ферми-частицы не могут попасть в одно и то же состояние. На самом деле почти все особенности материального мира зависят от этого изумительного факта. Все разнообразие, представленное в периодической таблице элементов, в основе своей является следствием только этого правила.

Конечно, мы не можем сказать, на что был бы похож мир, если бы это правило — и только оно одно — изменилось; ведь оно является частью всей структуры квантовой механики, и невозможно сказать, что бы еще изменилось, если бы правило, касающееся ферми-частиц, стало бы другим. Но все же попро­буем представить себе, что случилось бы, если бы переменилось только это правило. Во-первых, можно показать, что каждый атом остался бы более или менее неизменным. Начнем с атома водорода. Он заметно не изменился бы. Протон ядра был бы окружен сферически симметричным электронным облаком (фиг. 2.11, а).

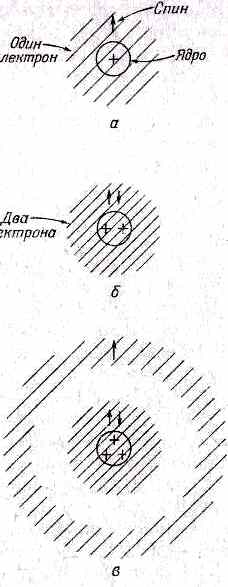


Фиг. 2.11. Так могли бы выглядеть атомы, если бы электроны вели себя как бозе-частицы.

Как мы уже писали в гл. 38 (вып. 3), хоть элект­рон и притягивается к центру, принцип неопределенности тре­бует, чтобы было равновесие между концентрацией в простран­стве и концентрацией по импульсу. Равновесие означает, что распределение электронов должно характеризоваться опреде­ленной энергией и протяженностью, определяющими характе­ристические размеры атома водорода.

Пусть теперь имеется ядро с двумя единицами заряда, на­пример ядро гелия. Это ядро будет притягивать два электрона, и, будь они бозе-частицами, они бы, если не считать их электри­ческого отталкивания, сплотились близ ядра как можно тесней. Атом гелия выглядел бы так, как на фиг. 2.11, *б.* Точно так же и атом лития, у которого ядро заряжено трехкратно, обладал бы электронным распределением, похожим на то, что изобра­жено на фиг. 2.11, *в.* Каждый атом выглядел бы более или ме­нее, как раньше: круглый шарик, все электроны в котором си­дят близ ядра; не было бы никаких выделенных направлений и никаких сложностей.

Но из-за того, что электроны — это ферми-частицы, дейст­вительное положение вещей совершенно иное. Для атома водорода оно в общем-то не меня­ется. Единственное отличие в том, что у электрона есть спин (показан на фиг. 2.12, а стрелочкой).

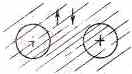


*Фиг. 2.12. Атомные конфигурации, для настоящих, фермиевского типа электронов со спином. 1/2.*

В слу­чае же атома гелия мы уже не сможем посадить один из элект­ронов на другой. Впрочем, пого­дите, это верно лишь тогда, когда их спины направлены одинаково. Но если они разведут свои спины врозь, то они уже *будут вправе* занять одно и то же место. Так что атом гелия тоже не очень-то изме­нится. Он будет выглядеть так, как показано на фиг. 2.12, б. А вот для лития положение вещей совер­шенно изменится. Куда сможем мы пристроить третий электрон? Его нельзя посадить прямо на первые два, потому что оба направления спина заняты. (Вы помните, что и у электрона, и у любой частицы со спином 1/2 имеются лишь два допустимых направления спина.) Третий электрон не сможет приблизиться к месту, оккупированному двумя другими, он обязан занять особое положение в каком-то ином состоянии, намного дальше от ядра (фиг. 2.12, в). (Мы здесь говорим обо всем довольно грубо, потому что на са­мом-то деле все три электрона тождественны, а раз мы не можем в действительности разобраться, кто из них кто, то наш рисунок верен только в общих чертах.)

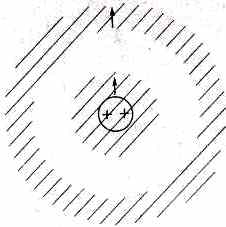
Теперь мы уже начинаем понимать, отчего у разных атомов бывают разные химические свойства. Из-за того, что третий электрон в литии намного дальше, он связан несравненно сла­бее. Увести один электрон у лития куда легче, чем у гелия. (Опыт говорит, что для ионизации гелия нужно 25 *в*, а для ио­низации лития лишь 5 *в.)* Это отражается на валентности атома лития. Свойства валентности, касающиеся направлений, свя­заны с волновой картиной внешнего электрона, но мы не будем сейчас входить в подробности. Становится понятной важность так называемого *принципа запрета,* утверждающего, что ни­какие два электрона не могут оказаться в точности в одном и том же состоянии (включая спин).

Принцип запрета несет также ответственность за крупно­масштабную стабильность вещества. Мы раньше уже объясняли, что отдельные атомы вещества не обваливаются благодаря прин­ципу неопределенности, тогда можно понять, почему не бывает так, чтобы два атома водорода прижались друг к другу сколь угодно тесно, почему все протоны не могут сойтись вплотную, образовав вокруг себя электронную *тучу.* Ответ, конечно, состоит в том, что поскольку в одном месте может находиться не более двух электронов с противоположными спинами, то атомы водорода вынуждены держаться поодаль друг от друга. Так что крупномасштабная стабильность вещества на самом деле есть следствие того, что электроны — это ферми-частицы. Конечно, если у двух атомов спины внешних электронов на­правлены в противоположные стороны, то они могут оказаться вплотную друг к другу. Именно так и возникает химическая связь. Оказывается, что два рядом стоящих атома обладают меньшей энергией, если между ними стоит электрон. Это своего рода электрическое притяжение двух положительных ядер к электрону между ними. Можно поместить пару электронов — коль скоро их спины противоположны — примерно посредине между двумя ядрами, и так возникает самая сильная из химических связей. Более сильной связи не бывает, потому что принцип запрета не позволит, чтобы в пространстве между атомами оказалось больше двух электронов. Считается, что молекула водорода выглядит примерно так, как изображено на фиг. 2.13.



*Фиг. 2.13. Молекула водорода.*

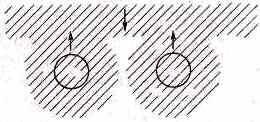
Хочется сказать еще об одном следствии из принципа за­прета. Вы помните, что если оба электрона в атоме гелия хотят оказаться поближе к ядру, то их спины обязательно должны смотреть навстречу друг другу. Допустим теперь, что нам бы захотелось расположить поблизости друг от друга два электро­на с одним и тем же спином, скажем, приложив столь фантасти­чески сильное магнитное поле, что спины выстроились бы в одну сторону. Но тогда два электрона не смогут занять одного положения в пространстве. Один из них вынужден будет занять другую геометрическую позицию (фиг. 2.14).



фиг. 2.14. Гелий с одним электроном в высшем энергетическом состоянии.

Более удаленный от ядра электрон будет обладать меньшей энергией связи. Поэ­тому энергия всего атома станет чуть выше. Иными словами, если два спина противоположны, то это приводит к намного более сильному взаимному притяжению.

Стало быть, существует взаимодействие, стремящееся рас­положить спины навстречу друг другу, когда электроны сбли­жаются. Если два электрона пытаются попасть в одно и то же место, то спины стремятся выстроиться навстречу друг другу. Эта кажущаяся сила, стремящаяся ориентировать спины в разные стороны, намного мощнее слабеньких сил, действующих между магнитными моментами двух электронов. Вы помните, что, когда мы толковали о ферромагнетизме, возникала загадка, отчего это электроны в разных атомах имеют столь сильную тенденцию выстраиваться параллельно. Хотя здесь еще нет количественного объяснения, но уже можно поверить в следую­щий процесс: электроны, окружающие один из атомов, взаимо­действуют при помощи принципа запрета с внешними элек­тронами, которые высвободились и бродят по кристаллу. Это взаимодействие заставляет спины свободных электронов и внутренних электронов принимать противоположные на­правления. Но свободные электроны и внутриатомные электро­ны могут выстроиться противоположно лишь при условии, что у всех внутренних электронов спины направлены одинаково (фиг. 2.15).



*Фиг. 2.I5. Вероятный механизм, действующий в ферромагнитном кристалле. Спины электронов проводимости устанавливаются антипараллельно спинам неспаренных внутренних электронов.*

Кажется весьма вероятным, что именно влияние принципа запрета, действующего косвенно через свободные электроны, кладет начало большим выстраивающим силам, от­ветственным за ферромагнетизм.

Упомянем еще один пример влияния принципа запрета. Мы уже говорили ранее, что ядерные силы, действующие между нейтроном и протоном, между протоном и протоном и между нейт­роном и нейтроном, одинаковы. Почему же так получается, что протон с нейтроном могут пристать друг к другу, образовав ядро дейтерия, а вот ядер просто с двумя протонами или просто с двумя нейтронами не существует? Действительно, дейтрон связан энергией около 2,2 *Мэв,* а соответствующей связи между парой протонов, которая бы создала изотоп гелия с атом­ным весом 2, не существует. Таких ядер не бывает. Комбина­ция двух протонов не дает связанного состояния.

Ответ складывается из двух эффектов: во-первых, из прин­ципа запрета; во-вторых, из того факта, что ядерные силы до­вольно чувствительны к направлению спина. Силы, действую­щие между нейтроном и протоном,—это силы притяжения; они чуть больше, когда спины параллельны, и чуть меньше, когда они направлены противоположно. Оказывается, что раз­личие между этими силами достаточно велико, чтобы дейтрон возникал лишь в том случае, когда спины нейтрона и протона параллельны, а когда спины противоположны, то притяжения не хватает на то, чтобы связать частицы воедино. Поскольку спины нейтрона и протона каждый равен 1/2и направлены они в одну сторону, то спин дейтрона равен единице. Мы знаем, однако, что двум протонам не разрешается сидеть друг на друге, если их спины параллельны. Если бы не было принципа запрета, два протона были бы связаны. Но раз они не могут существовать в одном месте и с одним и тем же направлением спина, ядра Не2 не существует. Протоны с противоположными спинами могли бы сойтись, но тогда им не хватило бы энергии связи для обра­зования стабильного ядра, потому что ядерные силы при про­тивоположных спинах чересчур слабы, чтобы связать пару нуклонов. В том, что силы притяжения между нейтронами и протонами с противоположными спинами существуют, можно убедиться из опытов по рассеянию. Сходные же опыты по рас­сеянию двух протонов с параллельными спинами показывают, что и между ними существует притяжение. Итак, принцип запрета помогает нам понять, почему дейтерий может сущест­вовать, а Не2 нет.

***\* Перестановка dS1 и dS2 в (2.11) приводит к другому событию, так что оба элемента поверхности обязаны пройтись по всей площади счет­чика. В (2.13) мы рассматриваем dS1 и dS2 как пару и включаем все, что может случиться. Если интегралы опять включают все, что случится, когда dS1 и dS2 поменяются местами, то все считается дважды.***

*Г****лава 3***

# СПИН ЕДИНИЦА

[**§ 1.Фильтровка ато­мов при помо****щи прибора Штерна — Герлаха**](#а1)

[**§ 2.Опыты с про­ф****ильтрованными атомами**](#а2)

[**§ 3. Последовательно соединенные** **фильтры Штер­на — Герлаха**](#а3)

[**§ 4. Базисные состоя­****ния**](#а4)

[**§ 5. Интерферирую­щие а****мплитуды**](#а5)

[**§ 6. Механика кван­товой** **механики**](#а6)

[**§ 7. Преобразо****вание к другому базису**](#а7)

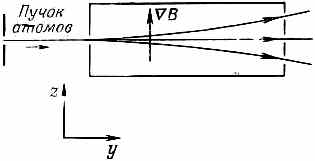
[**§ 8. Другие сл****учаи**](#а8)

*Повторить:* гл. 35 (вып. 7) «Пара­магнетизм и маг­нитный резонанс»

**§ 1. Фильтровка атомов при помощи прибора Штерна — Герлаха**

В этой главе мы начнем изучать квантовую механику по-настоящему — в том смысле, что мы собираемся теперь описывать квантовомеханическое явление полностью с квантовомеханической точки зрения. Мы не будем искать объяснений в классической механике или пы­таться установить с ней связь. Мы хотим гово­рить на новом языке о чем-то новом. Частный случай, с которого мы начнем, это поведение квантованного момента количества движения для частицы со *спином* 1. Но мы не хотим упот­реблять такие слова, как «момент количества движения» или другие понятия классической механики, мы несколько отложим их обсужде­ние. Мы избрали этот частный случай лишь потому, что он достаточно прост, хотя и не самый простой из всех. Он достаточно сложен для то­го, чтобы служить образцом, который можно будет обобщить для описания всех квантовомеханических явлений. Стало быть, хотя мы будем иметь дело лишь с частным примером, все законы, которые мы упомянем, могут быть немедленно обобщены; мы так и сделаем, чтобы вам стали ясны общие черты квантовомеханического описания.

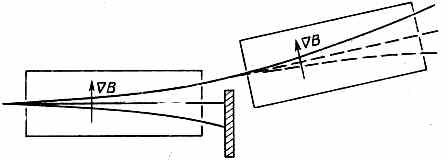
Начнем с явления расщепления пучка ато­мов на три отдельных пучка в опыте Штерна — Герлаха. Вы помните, что если имеется неод­нородное магнитное поле, созданное магнитом с острым полюсным наконечником, и если через прибор пропустить пучок частиц, то этот пучок может расщепиться на несколько пучков; их количество зависит от сорта атома и его состояния. Мы разберем случай, когда атом расщепляется на три пучка; такую частицу мы будем называть частицей со *спином* 1. Вы сможете потом сами разобрать случай пяти пучков, семи пучков, двух и т. д. Вам придется попросту все скопировать, но там, где у нас были три члена, у вас окажется пять, семь, два и т. д. Представьте себе прибор, схематически начерченный на фиг. 3.1.



Фиг. 3.1. В опыте Штерна—Герлаха атомы со спином 1 расщеп­ляются на три пучка.

Пучок атомов (или любых частиц) коллимирован (ограни­чен) какими-то прорезями и проходит сквозь неоднородное поле. Пусть пучок движется по оси y, а магнитное поле и его градиент направлены по оси z. Тогда, глядя со стороны, мы увидим, как пучок расщепляется по вертикали на три пучка. На выходном конце магнит можно поставить Небольшие счетчики, подсчи­тывающие скорость появления частиц в том или ином из трех пучков. Или можно перекрыть два пучка и пропускать только третий.

Предположим, что мы перекрыли два нижних пучка, а са­мый верхний пропустили, введя его во второй прибор Штерна — Герлаха такого же типа (фиг. 3.2).



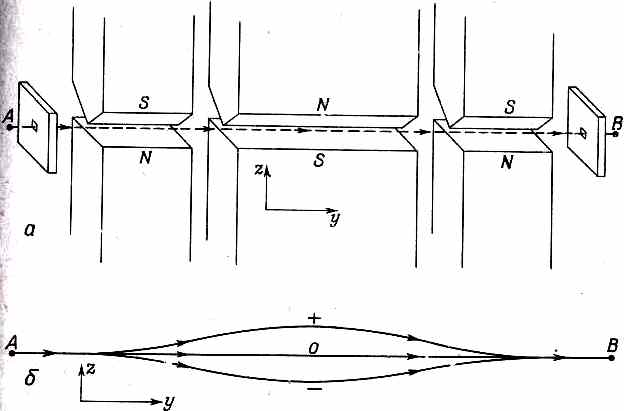
Фиг. 3.2. Атомы одного из пучков посланы в другой такой же прибор.

Что произойдет? Во втором приборе уже *не будет* трех пучков; там останется только верх­ний пучок (мы предполагаем, что угол отклонения очень мал). Если считать второй прибор простым продолжением первого, то те атомы, которые в первый раз отклонялись вверх, продолжают отклоняться вверх и вторым магнитом.

Вы видите, что первый прибор создал пучок «очищенных» объектов — атомов, которые отклонились вверх в некотором неоднородном поле. Те атомы, которые входят в первоначаль­ный прибор Штерна — Герлаха, суть атомы трех «разновидно­стей», или три copтa выбирают разные траектории. Отфильтро­вывая одну-единственную разновидность, можно создать такой пучок, будущее поведение которого в приборе того же типа вполне определено и предсказуемо. Такой пучок мы назовем *отфильтрованным,* или *поляризованным,* в этом пучке все ато­мы находятся в *определенном состоянии.*

В дальнейшем будет удобнее рассматривать слегка видоизме­ненный прибор Штерна — Герлаха. На первый взгляд он вы­глядит сложнее, но на самом деле упрощает все рассуждения. Впрочем, раз мы будем делать только «мысленные эксперимен­ты», усложнение оборудования не будет стоить нам ни гроша, (Заметим, кстати, что никто никогда всех этих экспериментов точно таким образом не ставил, а мы тем не менее знаем, что в них *произойдет.* Мы это знаем из законов квантовой механики, которые, конечно, основаны на других сходных экспериментах. Эти другие эксперименты вначале труднее понять, и мы пред­почитаем описывать какие-то идеализированные, но мыслимые эксперименты.)

На фиг. 3.3, «изображен чертеж «усовершенствованного при­бора Штерна — Герлаха», которым мы и будем пользоваться.

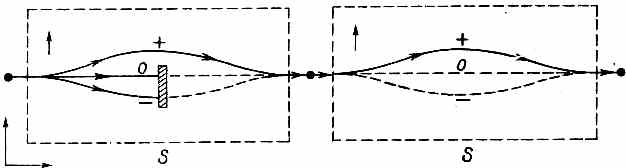


*Фиг. 3.3. Воображаемое видоизменение прибора Штерна* — *Герлаха (а) и пути атомов со спином 1 (б)*

Он состоит из последовательности трех магнитов с сильным градиентом ноля. Первый (левый) — это обычный магнит Штерна — Герлаха. Он разделяет падающий пучок частиц со спином 1 на три отдельных пучка. Второй магнит имеет то же сечение, что и первый, но он вдвое длиннее и полярность его магнитного поля противоположна полю в первом магните. Второй магнит отталкивает атомные магнитики в обратную сторону и искривляет их пути снова к оси, как показано на траекториях, начерченных на фиг. 3.3, *б.* Третий магнит в точ­ности похож на первый; он сводит три пучка снова в одно место и выпускает их через выходное отверстие вдоль оси. Наконец, надо представить себе, что перед отверстием в *А* имеется какой-то механизм, который разгоняет атомы из состояния покоя, а после выходного отверстия в *В* имеется замедляющий меха­низм, который опять приводит атомы в *В* в состояние покоя. Это несущественно, но это все же будет означать, что в нашем анализе нам не придется заботиться об учете каких-либо эффектов движения, когда атомы выходят, и можно будет сосредоточиться на тех вопросах, которые связаны только со спином.

Все назначение «усовершенствованного» прибора в том и состоит, чтобы свести все частицы в одно и то же место, где они имели бы нулевую скорость.

Если мы хотим теперь провести опыт наподобие показанного на фиг. 3.2, то для начала нужно будет получить отфильтрован­ный пучок, вставив внутрь прибора пластинку, которая заго­родит два пучка (фиг. 3.4).



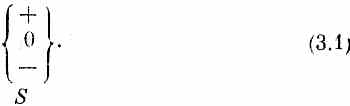
Фиг. 3.4. «Усовершенствованный» прибор Штерна—Герлаха в качестве фильтра.

Если теперь пропустить полученные поляризованные атомы через второй такой же прибор, то все атомы изберут верхний путь; в этом можно убедиться, поставив такие же пластинки на пути различных пучков во втором фильт­ре и наблюдая, пройдут ли частицы насквозь.

Обозначим первый прибор буквой *S.* (Мы собираемся рас­сматривать всевозможные сочетания приборов, и, чтобы не пу­таться, мы дадим каждому свое имя.) Об атомах, которые избра­ли в *S* верхний путь, мы скажем, что они находятся в «плюс-состоянии по отношению к *S*»; о тех, которые пошли по среднему пути,— что они «в нуль-состоянии по отношению к *S*», и о тех, которые выбрали нижний путь,— что они в «минус-состоянии по отношению к *S*». (На более привычном языке мы бы сказали, что z-компонента момента количества движения равна +1h. 0 и -1h, но сейчас мы отказались от этого языка.) На фиг. 3.4 второй прибор ориентирован точно так же, как первый, так что отфильтрованные атомы все пойдут по верхнему пути. А если бы в первом приборе загородить верхний и нижний пучки и пропустить только находящиеся в нуль-состоянии, то все отфильтрованные атомы прошли бы через среднюю часть вто­рого прибора. И наконец, если бы загородить в первом приборе все пучки, кроме нижнего, то во втором был бы только нижний пучок. Можно сказать, что в любом случае первый прибор соз­дает отфильтрованный пучок в *чистом* состоянии по отношению к *S* (+, 0 или -), и мы всегда можем испытать, какое именно состояние он создает, пропустив атомы через второй такой же прибор.

Можно и второй прибор устроить так, чтобы он пропускал атомы только в одном определенном состоянии. Для этого нуж­но поставить внутри него перегородки так, как мы это делали в первом приборе, и тогда можно будет проверять состояние падающего пучка, просто глядя, вышло ли что-нибудь из дальнего конца. Например, если загородить два нижних пути во втором приборе, то все атомы выйдут наружу; если же заго­родить верхний, то не пройдет ничего.

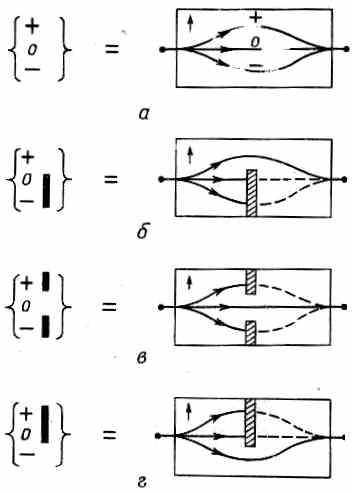
Чтобы облегчить подобные рассуждения, мы сейчас приду­маем сокращенное изображение наших усовершенствованных приборов Штерна — Герлаха. Вместо каждого такого прибора мы будем ставить символ



(Этот символ вы не встретите в квантовой механике; мы попросту выдумали его для этой главы. Он означает просто сокращенное изображение прибора, показанного на фиг. 3.3.) Поскольку мы I собираемся пользоваться несколькими приборами одновремен­но, имеющими к тому же разную ориентацию, то каждый из них мы будем отмечать буквой внизу. Так, символ (3.1) обозна­чает прибор *S.* Загораживая внутри один или больше пучков, мы будем отмечать это вертикальными чертами, показывающи­ми, какой из пучков перекрыт, наподобие

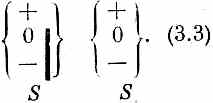


Различные мыслимые комбинации собраны на фиг. 3.5.



Фиг. 3.5. Специальные сокра­щенные обозначения для фильт­ров типа Штерна — Герлаха.

Если два фильтра сто­ят друг за другом (как на фиг. 3.4), мы и симво­лы будем ставить друг за другом:



При таком расположении все, что прошло через пер­вый фильтр, пройдет и через второй. В самом деле, даже если мы перекроем каналы «нуль» и «минус» второго прибора, так что будет



все равно прохождение через второй прибор будет 100%-ным. Но если имеется



то из дальнего конца не выйдет ничего. Равным образом ни­чего не выйдет и при



С другой стороны,



было бы просто эквивалентно одному только



Теперь мы хотим описать эти опыты квантовомеханически. Мы скажем, что атом находится в состоянии (+*S*), если он прошел через прибор, изображенный на фиг, 3.5,*б*, что он находится в состоянии *(0S),* если прошёл сквозь прибор на фиг. 3.5, *в,* и что он находится в состоянии (-*S),* если прошел [сквозь прибор на фиг. 3.5](#прим1), *г.* Затем пусть <*b|a*> будет *амплитуда* того, что атом, который находится в состояний а, пройдя через прибор, окажется в состоянии *b*. Можно ска­зать <*b*|*а*> есть амплитуда для атома в состоянии *а перейти* в состояние *b.* Опыт (3.4) означает, что

<+*S*|+*S*>=1,

а (3.5) — что

<-S|+S>=0.

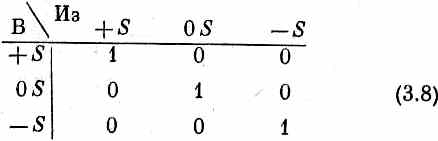
Точно так же и результат (3.6) означает, что

<+ *S*|-*S*>=0,

а (3.7)— что

<-*S*|-*S*>=1.

Пока мы имеем дело только с «чистыми» состояниями, т. е. пока бывает открыт только один канал, таких амплитуд — всего девять. Их можно перечислить в следующей таблице:

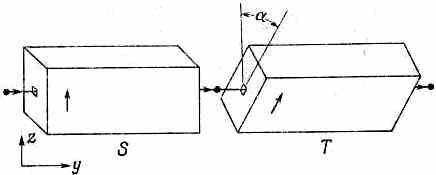


Эта совокупность девяти чисел, именуемая *матрицей,* по­дытоживает описанные нами явления.

**§ 2. Опыты с профильтрованными атомами**

Теперь возникает важный вопрос: что будет, если второй

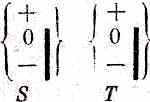
прибор наклонить под некоторым углом, так чтобы ось его поля больше не была параллельной оси первого? Его можно не только наклонить, но и направить в другую сторону, напри­мер повернуть пучок поперек. Вначале для простоты возьмем такое расположение, при котором второй прибор Штерна — Герлаха повернут вокруг оси *у* на угол а (фиг. 3.6).



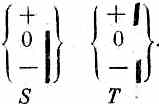
*Фиг. 3.6. Два последовательно соединенных фильтра типа Штерна — Герлаха.*

*Второй повернут, относительно первого на угол α*.

Такой при­бор мы обозначим буквой *Т.* Пусть мы теперь предприняли следующий опыт:



или такой опыт:



Что в этих случаях выйдет из дальнего конца?

Ответ таков. Если атомы по отношению к *S* находятся в опре­деленном состоянии, то по отношению к *Т* они *не находятся* в том же состоянии, состояние (+*S*) *не является* также и состоя­нием (+*T*). Однако *имеется* определенная *амплитуда* обна­ружить атом в состоянии *(+Т),* или в состоянии (О *Т),* или в состоянии (-*Т).*

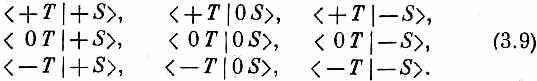
Иными словами, как бы досконально мы ни убедились, что наши атомы находятся в определенном состоянии, факт остается фактом, что, когда такой атом проходит через прибор, наклоненный под другим углом, он вынужден, так сказать, «переориентироваться» (что происходит, не забывайте, по зако­нам случая). Если пропускать в каждый момент по одной части­це, то вопрос можно будет ставить только таким образом: какова вероятность того, что она пройдет насквозь? Некоторые прошед­шие сквозь *S* атомы очутятся в конце в состоянии *(+Т),* дру­гие — в состоянии (0*Т),* третьи — в состоянии (-*Т),* и каж­дому состоянию отвечает своя вероятность. Эти вероятности можно вычислить, зная квадраты модулей комплексных ампли­туд; нам нужен математический метод для этих амплитуд, их квантовомеханическое описание. Нам нужно знать, чему равны различные величины типа

*<-T+S*>;

под этими выражениями мы подразумеваем амплитуду того, что атом, первоначально бывший в состоянии (+*S*), может перейти в состояние (-*Т)* (что *не равно* нулю, если только *S* и Г не параллельны друг другу). Имеются и другие амплитуды, например

*<+T*|0*S>* или <0*T*|-*S*> и т. д.

Таких амплитуд на самом деле девять — это тоже матрица, и теория должна сообщить нам, как их вычислять. Подобно тому как **F** = m**a** сообщает нам, как подсчитать, что бывает в любых обстоятельствах с классической частицей, точно так же и законы квантовой механики позволяют нам определять ам­плитуду того, что частица пройдет через такой-то прибор. Центральный вопрос тогда заключается в том, как сосчитать для каждого данного угла а или вообще для какой угодно ориен­тации девять амплитуд:



Некоторые соотношения между этими амплитудами мы сразу можем себе представить. Во-первых, согласно нашим определениям, квадрат модуля

C:\Мои документы\gray.jpg

— это *вероятность* того, что атом, бывший в состоянии ( +*S*), придет в состояние (*+Т*)*.* Такие квадраты удобнее писать в эквивалентном виде

C:\Мои документы\gray.jpg

В тех же обозначениях число

C:\Мои документы\gray.jpg

дает вероятность того, что частица в состоянии (+*S*) перей­дет в состояние (0*T*), а

C:\Мои документы\gray.jpg

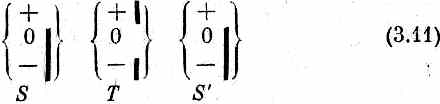
— вероятность того, что она перейдет в состояние (-*Т).* **Но** наши приборы устроены так, что каждый атом, входящий в прибор *Т,* должен быть найден в *каком-то* одном из трех со­стояний прибора *Т',*— атомам данного сорта нет других путей. Стало быть, сумма трех только что написанных вероятностей должна равняться единице. Получается соотношение

C:\Мои документы\gray.jpg

Имеются, конечно, еще два таких же уравнения для случаев, когда вначале было состояние (0*S)* или (-*S).* Их очень легко написать, так что мы переходим к другим общим вопросам.

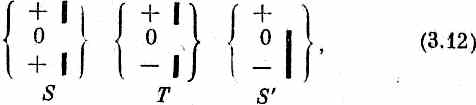
**§ 3. Последовательно соединенные фильтры Штерна — Герлаха**

Пусть у нас есть атомы, отфильтрованные в состояние (+*S*), которые мы затем пропустили через второй фильтр, переведя, скажем, в состояние (О *Т),* а *затем* — через *другой* фильтр (+*S*). (Обозначим его *S*', чтобы не путать с первым фильтром *S*.) Вспомнят ли атомы, что они уже раз были в со­стоянии (+*S*)? Иначе говоря, мы ставим такой опыт:



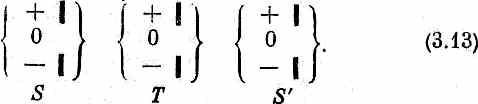
и хотим знать, все ли атомы, прошедшие сквозь *Т,* пройдут и сквозь *S'. Нет.* Как только они пройдут фильтр *Т,* они сразу же *позабудут* о том, что, входя в *Т,* они были в состоянии (+*S*). Заметьте, что второй прибор *S* в (3.11) ориентирован в точности так же, как первый, так что это по-прежнему фильтр типа *S.* Состояния, выделяемые фильтром *S',*— это, конечно, все те же *(+S), (0S)* и *(-S).*

Здесь существенно вот что: *если фильтр Т пропускает толь­ко один пучок,* то та *доля,* пучка, которая проходит через второй фильтр *S,* зависит только от расположения фильтра *Т* и совер­шенно не зависит от того, что было перед ним. Тот факт, что те же самые атомы однажды уже были отсортированы фильтром *S*, никак и ни в чем не влияет на то, что они будут делать после того, как прибор *Т* снова отсортирует их в чистый пучок. От­сюда следует, что вероятность перейти в те или иные состояния для них одна и та же безотносительно к тому, что с ними слу­чалось до того, как они угодили в прибор *Т,* Для примера сравним опыт (3.11) с опытом



в котором изменилось только первое *S.* Пусть, скажем, угол α (между *S* и *Т)* таков, что в опыте (3.11) треть атомов, прошед­ших сквозь *Т,* прошла также и через *S'.* В опыте (3.12), хоть в нем, вообще говоря, через *Т* пройдет другое число атомов, но через *S'* пройдет *та же самая, часть их —* одна треть.

Мы можем на самом деле показать, опираясь на то, чему мы научились раньше, что доля атомов, которые выходят из *Т* и проходят через произвольный определенный фильтр *S',* зависит лишь от *Т* и *S',* а не от чего бы то ни было происходившего ра­нее. Сравним опыт (3.12) с



Амплитуда того, что атом, выходящий из *S,* пройдет и сквозь *Т,* и сквозь 6", в опыте (3.12) равна

*<+S*|0*T><*0*T*|0*S>.*

Соответствующая вероятность такова:

C:\Мои документы\gray.jpg

а вероятность в опыте (3.13)

C:\Мои документы\gray.jpg

Их отношение

C:\Мои документы\gray.jpg

зависит только от *Т* и *S'* и совсем не зависит от того, какой пу­чок (+*S*), *(*0*S)* или (-*S)* был отобран в *S.* (Абсолютные же количества могут быть большими или меньшими, смотря по тому, сколько прошло через *Т.)* Мы бы получили, конечно, аналогичный результат, если бы сравнили вероятности того, что атомы перейдут в плюс- или минус-состояние (по отноше­нию к *S*'), или отношения вероятностей перейти в нуль- или минус-состояние.

Но раз эти отношения зависят только от того, какой пучок может пройти сквозь *Т,* а не от отбора, выполненного первым фильтром *S,* то становится ясно, что тот же результат получил­ся бы, если бы последний прибор даже не был фильтром *S.* Если в качестве третьего прибора (назовем его *R)* мы используем прибор, повернутый относительно *Т* на некоторый произволь­ный угол, то все равно увидим, что отношения типа

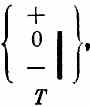
C:\Мои документы\gray.jpg

не зависят от того, какой пучок проник через первый фильтр *S.*

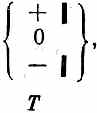
**§ 4. Базисные состояния**

Эти результаты иллюстрируют один из основных принципов квантовой механики: любая атомная система может быть раз­делена процессом фильтрования на определенную совокуп­ность того, что мы назовем *базисными состояниями,* и будущее поведение атомов в любом данном отдельном базисном состоя­нии зависит только от природы базисного состояния — оно не зависит от [предыдущей истории](#прим2). Базисные состояния за­висят, конечно, от примененного фильтра; например, три со­стояния (+*Т*), (0*Т)* и (-*Т)—*это одна совокупность базисных состояний, а три состояния (+*S*), (0*S*) и (-*S) —* другая. Возможностей сколько угодно, и ни одна не хуже другой.

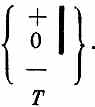
Необходимо быть осторожным, утверждая, что мы рас­сматриваем *хорошие* фильтры, которые действительно создают «чистые» пучки. Если, скажем, наш прибор Штерна — Герлаха недостаточно хорошо отделяет пучки друг от друга, то Мы не можем произвести полного разделения на базисные состояния. Мы можем проверить, есть ли у нас чистые базисные состояния, посмотрев, смогут ли пучки опять расщепиться еще одним таким же фильтром. Если, например, имеется чистое состояние (+*T*), то все атомы пройдут через



но ни один из них не пройдет ни через



ни через

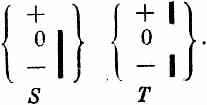


Наше утверждение относительно базисных состояний означает, что *есть возможность* отфильтровать пучок до некоторого чис­того состояния, так что дальнейшее фильтрование идентичным прибором уже станет невозможным.

Следует еще отметить, что все, что мы говорим, до конца верно лишь в идеализированных случаях. В каждом реальном приборе Штерна — Герлаха надо подумать и о дифракции на щелях, которая может вынудить некоторые атомы перейти в состояния, отвечающие другим углам, и о том, нет ли в пучке атомов с другой степенью возбуждения своих внутренних со­стояний и т. д. Мы идеализировали наш случай и говорим только о тех состояниях, которые расщепляются в магнитном поле; при этом мы игнорируем все, что касается местоположения, импульса, внутренних возбуждений и т. п. Вообще же следовало бы рассматривать также базисные состояния, рассортированные и по отношению ко всем перечисленным характеристикам. Но для простоты мы пользуемся только нашей совокупностью трех состояний. Этого вполне достаточно для того, чтобы точно рассмотреть идеализированный случай, в котором атомы не подвергаются в приборе плохому обращению, не разрываются и, более того, покидая его, оказываются в состоянии покоя.

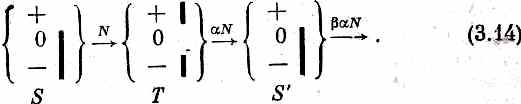
Заметьте, что мы всегда начинаем наши мысленные экспери­менты с того, что берем фильтр, у которого открыт только один канал, так что начинаем всегда с определенного базисного со­стояния. Мы делаем это потому, что атомы выходят из печи в различных состояниях, случайно определенных тем, что про­изойдет в печи. (Это дает так называемый «неполяризованный» пучок.) Эта случайность предполагает вероятности «классичес­кого» толка (как при бросании монеты), которые отличаются от интересующих нас сейчас квантовомеханических вероятностей. Работа с неполяризованным пучком привела бы нас к добавоч­ным усложнениям, а их лучше избегать, пока мы не поймем поведения поляризованных пучков. Так что пока не пытайтесь размышлять о том, что случится, если *первый* аппарат пропустит сквозь себя больше одного пучка. (В конце главы мы расскажем вам, как нужно поступать и в таких случаях.)

А теперь вернемся назад и посмотрим, что будет, если мы перейдем от базисного состояния для одного фильтра к базис­ному состоянию для другого фильтра. Начнем опять с

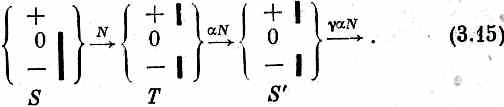


Атомы, выходящие из *Т,* оказываются в базисном состоянии (О *Т)* и не помнят, что когда-то они побывали в состоянии (+*S*). Некоторые говорят, что при фильтровании прибором *Т* мы «потеряли информацию» о былом состоянии (+*S),* потому что «возмутили» атомы, когда разделяли их прибором *Т* на три пучка. Но это неверно. Прошлая информация теряется не при *разделении* на три пучка, а тогда, когда *ставятся перегородки, в* чем можно убедиться в следующем ряде опытов.

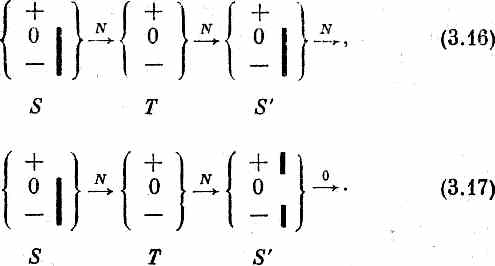
Начнем с фильтра +*S* и обозначим количество прошедших сквозь него атомов буквой *N.* Если мы вслед за этим поставим фильтр О *Т,* то число атомов, которое выйдет из фильтра, окажется некоторой частью от первоначального их количества, скажем α*N.* Если мы затем поставим второй фильтр +*S,* то до конца дойдет лишь часть β атомов. Это можно записать следующим образом:



Если наш третий прибор *S'* выделяет другое состояние, скажем (0*S*), то через него пройдет другая часть атомов, [скажем γ](#прим3). Мы будем иметь



Теперь предположим, что мы повторили оба эти опыта, убрав из *Т* все перегородки. Тогда мы получим следующий замечательный результат:



В первом случае через *S'* прошли *все* атомы, во втором — *ни* одного! Это один из самых великих законов квантовой механики. То, что природа действует таким образом, вовсе не самоочевид­но; результаты, которые мы привели, отвечают в нашем идеа­лизированном случае квантовомеханическому поведению, на­блюдавшемуся в бесчисленных экспериментах.

**§ 5. Ннтерферирующив амплитуды**

Как же это может быть, что, когда переходят от (3.15) к (3.17), т. е. когда *открывается больше каналов,* через фильтры начинает проходить *меньше* атомов? Это и есть старый, глубо­кий секрет квантовой механики — интерференция амплитуд. С такого рода парадоксом мы впервые встретились в интерферен­ционном опыте, когда электроны проходили через две щели. Помните, мы тогда увидели, что временами кое-где получается меньше электронов, когда обе щели открыты, чем когда открыта одна. Численно это получается вот как. Можно написать ам­плитуду того, что атом пройдет в приборе (3.17) через *Т* и *S'* в виде суммы трех амплитуд — по одной для каждого из трех пучков в *Т;* эта сумма равна нулю:

C:\Мои документы\gray.jpg

Ни одна из трех отдельных амплитуд не равна нулю: например, квадрат модуля второй амплитуды есть γα [см. (3.15)], но их *сумма есть* нуль. Тот же ответ получился бы, если бы мы настро­или *S*’ на то, чтобы отбирать состояние (-*S).* Однако при рас­положении (3.16) ответ уже другой. Если обозначить амплитуду прохождения через *Т* и *S'* буквой *а,* то в этом случае мы [будем иметь](#прим4)

C:\Мои документы\gray.jpg

В опыте (3.16) пучок сперва расщеплялся, а потом восста­навливался. Как мы видим, Шалтая-Болтая удалось собрать обратно. Информация о первоначальном состоянии (+ *S)* со­хранилась — все выглядит так, как если бы прибора *Т* вовсе не было. И это будет верно, что бы ни поставили за «до отказа раскрытым» прибором *Т.* Можно поставить за ним фильтр *R —* под каким-нибудь необычным углом — или что-угодно. Ответ будет всегда одинаков, как будто атомы шли в *S*' прямо из пер­вого фильтра *S.*

Итак, мы пришли к важному принципу: фильтр *Т* или любой другой с открытыми до отказа заслонками не приводит ни к каким изменениям. Надо только упомянуть одно добавочное условие. Открытый фильтр должен не только пропускать все три пучка, но и *не* вызывать в них неодинаковых возмущений. Например, в нем не должно быть сильного электрического поля близ одного из пучков, которого не было бы возле других. Причина заключается вот в чем: хотя это добавочное возмуще­ние может и не помешать всем атомам пройти сквозь фильтр, оно может привести к изменению *фаз* некоторых амплитуд. Тогда интерференция стала бы не такой, как была, и амплитуды (3.18) и (3.19) стали бы другими. Мы всегда будем предполагать, что таких добавочных возмущений нет.

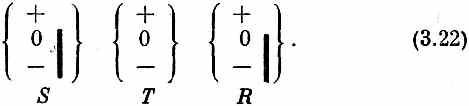
Перепишем (3.18) и (3.19) в улучшенных обозначениях. Пусть *i* обозначает любое из трех состояний (+*Т),* (0*Т*)и (-*Т*); тогда уравнения можно написать так:

C:\Мои документы\gray.jpg

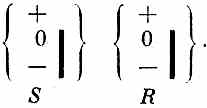
и

C:\Мои документы\gray.jpg

Точно так же в опыте, в котором *S'* заменяется совершенно произвольным фильтром *R,* мы имеем



*S Т R* Результаты будут всегда такими же, как если бы прибор *Т* убрали и осталось бы только



Или на математическом языке

C:\Мои документы\gray.jpg

Это и есть наш основной закон, и он справедлив всегда, если только *i* обозначает три базисных состояния любого фильтра. Заметьте, что в опыте (3.22)никакой особой связи между *S, R* и *Т* не было. Более того, рассуждения остались бы теми же независимо от того, какие состояния эти фильтры отбирают. Чтобы написать уравнение в общем виде без ссылок на какие-то особые состояния, отбираемые приборами *S* и *R,* обозначим через ϕ состояние, приготовляемое первым прибором (в нашем частном примере +*S*)*,* и через χ — состояние, подвергаемое испытанию в конечном фильтре (в нашем примере +*R*)*.* Тогда мы можем сформулировать наш основной закон (3.23) так:

C:\Мои документы\gray.jpg

где *i* должно пробегать по всем трем базисным состояниям некоторого определенного фильтра.

Хочется опять подчеркнуть, что мы понимаем под базисными состояниями. Они напоминают тройку состояний, которые мож­но отобрать с помощью одного из наших приборов Штерна — Герлаха. Одно условие состоит в том, что если у вас есть ба­зисное состояние, то будущее не зависит от прошлого. Другое условие — что если у вас есть полная совокупность базисных состояний, то формула (3.24) справедлива для любой сово­купности начальных и конечных состояний ϕ и χ. Но не сущест­вует никакой *особой совокупности* базисных состояний. Мы на­чали с рассмотрения базисных состояний по отношению к при­бору *Т.* В равной мере мы бы могли рассмотреть *другую совокуп­ность* базисных состояний — по отношению к прибору *S,* [к прибору R и т. д.](#прим5) Мы обычно говорим о базисных состояниях «в каком-то представлении».

Другое требование к совокупности базисных состояний (в том или ином частном представлении) заключается в том, что им положено полностью отличаться друг от друга. Под этим мы понимаем, что если имеется состояние (+T), то для него нет амплитуды перейти в состояние (О Т) или (-Т). Если i и j обозначают два базисных состояния в некотором представлении, то общие правила, которые мы обсуждали в связи с (3.8), го­ворят, что

<*j*|*i*>=0

для любых неравных между собой *i* и *j*. Конечно, мы знаем, что

<*i*|*i*>=1.

Эти два уравнения обычно пишут так:

C:\Мои документы\gray.jpg

где δij («символ Кронекера») — символ, равный по определению нулю при *i≠j* и единице при *i*=*j*.

• Уравнение (3.25) не независимо от остальных законов, о кото­рых мы упоминали. Бывает, что нас не особенно интересует математическая задача поиска наименьшей совокупности неза­висимых аксиом, из которых все законы проистекут как след­ствия. Нам вполне достаточно обладать совокупностью, кото­рая полна и по виду непротиворечива. Однако мы беремся пока­зать, что (3.25) и (3.24) не независимы. Пусть ϕ в (3.24) пред­ставляет одно из базисных состояний той же совокупности, что и i, скажем *j-e* состояние; тогда мы имеем

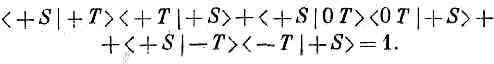
C:\Мои документы\gray.jpg

Но (3.25) утверждает, что <*i*|*j*> равно нулю, если только *i* не равно *j*, так что сумма обращается просто в <χ|*j*} и полу­чается тождество, что говорит о том, что эти два закона не не­зависимы.

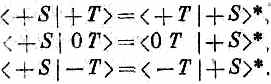
Можно видеть, что если справедливы оба уравнения (3.25) и (3.24), то между амплитудами должно существовать еще одно соотношение. Уравнение (3.10) имело вид

C:\Мои документы\gray.jpg

Если теперь посмотреть на (3.24) и предположить, что и ϕ, и χ — это состояние (+*S*), то слева получится <+S|+*S>, а* это, конечно, равно единице, и мы должны получить (3.19)



Эти два уравнения согласуются друг с другом (для всех относи­тельных ориентации приборов *Т* и *S)* только тогда, когда

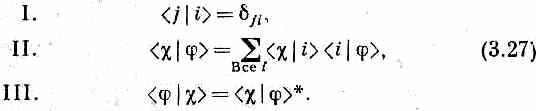


Стало быть, для любых состояний ϕ и χ

C:\Мои документы\gray.jpg

Если бы этого не было, вероятности «не сохранились бы» и частицы «терялись бы».

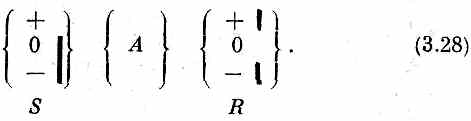
Прежде чем идти дальше, соберем все три общих закона для амплитуд, т. е. (3.24) —(3.26):



В этих уравнениях *i* и *j* относятся ко *всем* базисным состояниям какого-то *одного* представления, тогда как ϕ и χ — это любое возможное состояние атома. Важно отметить, что закон II справедлив лишь тогда, когда суммирование проводится по *всем* базисным состояниям системы (в нашем случае по трем: +*Т, 0Т, -Т).* Эти законы ничего не говорят о том, что сле­дует избирать в качестве базиса. Мы начали с прибора *Т,* ко­торый является опытом Штерна — Герлаха с какой-то произ­вольной ориентацией, но и всякая другая ориентация, скажем *W,* тоже подошла бы. Вместо *i* и *j* нам пришлось бы ставить другую совокупность базисных состояний, но все законы оста­лись бы правильными; какой-то единственной совокупности не существует. Успех в квантовой механике часто определяется тем, умеете ли вы использовать тот факт, помня, что расчет можно вести из-за этого разными путями.

**§ 6. Механика квантовой механики**

Мы покажем вам сейчас, почему полезны эти законы. Пусть у нас есть атом в заданном состоянии (под этим мы подразумеваем, что он как-то был приготовлен), и мы хотим знать, что с ним бу­дет в таком-то опыте. Иными словами, мы начинаем с состояния ϕ атома и хотим знать, каковы *шансы,* что он пройдет через при­бор, который пропускает атомы только в состоянии χ*.* Законы го­ворят, что мы можем полностью описать прибор тремя комплексными числами <χ|*i*> — амплитудами того, что каждое из базисных состояний окажется в состоянии χ*,* и что мы, пустив атом в прибор, можем предсказать, что произойдет, если опишем состояние атома, задав три числа <*i*|ϕ>,— амплитуды того что атом из своего первоначального состояния перейдет в лю­бое из трех базисных состояний. Это очень и очень важная идея, Рассмотрим другую иллюстрацию. Подумаем о следующей задаче. Начинаем с прибора *S,* затем имеется какая-то сложная мешанина, которую мы обозначаем *A*, а дальше стоит прибор *R:*



Под *А* мы подразумеваем любое сложное расположение прибо­ров Штерна — Герлаха — с перегородками и полуперегород­ками, под всевозможными углами, с необычными электрически­ми и магнитными полями,— словом, годится все, что вам придет в голову. (Очень приятно ставить мысленные эксперименты — тогда нас не тревожат никакие заботы, возникающие при реаль­ном *сооружении* приборов!) Задача состоит в следующем: с какой амплитудой частица, входящая в область *A* в состоянии (+*S*), выйдет из него в состоянии (0*R),* так что сможет пройти через последний фильтр *R*? Имеется стандартное обозначение для такой амплитуды:

<0*R*|*A*|*+S*>*.*

Как обычно, это надо читать справа налево: < Конец | Через | Начало>.

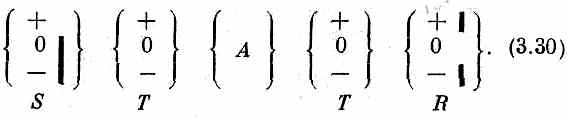
Если случайно окажется, это *А* ничего не меняет, а просто яв­ляется открытым каналом, тогда мы пишем

<0*R* |1|+*S*>=<0*R*|+*S*>; (3.29)

эти два символа равнозначны. В более общих задачах мы можем заменить (+*S)* общим начальным состоянием ϕ, а (0*R*) *—* об­щим конечным состоянием χ и захотеть узнать амплитуду

<χ|*A*|ϕ>.

Полный анализ прибора *А* должен был бы дать нам амплитуду <χ|*А*|ϕ> для каждой мыслимой пары состояний ϕ и χ — бес­конечное количество комбинаций! Как же сможем мы тогда дать краткое описание поведения прибора *А*?Это можно сде­лать следующим путем. Вообразим, что мы видоизменили прибор (3.28) так:



На самом деле это вовсе не видоизменение, потому что широко раскрытые приборы *Т* ничего нигде не меняют. Но они подска­зывают нам, как проанализировать проблему. Имеется опре­деленная совокупность амплитуд <*i*|+*S*> того, что атомы из *S* перейдут в состояние *i* прибора *Т.* Затем имеется другая совокупность амплитуд того, что состояние *i* (по отношению к *Т),* войдя в *А,* выйдет оттуда в виде состояния *j* (по отношению *к Т).* И наконец, имеется амплитуда того, что каждое состоя­ние *j* пройдет через последний фильтр в виде состояния (0*R*). Для каждого допустимого пути существует амплитуда вида

<0*R*|*j*><*j*|*A*|*i*><*i*|+*S*>,

и полная амплитуда есть сумма членов, которые можно полу­чить из всех сочетаний *i* и *j.* Нужная нам амплитуда равна

C:\Мои документы\gray.jpg

Если (О Л) и (+*S)* заменить общими состояниями χ и ϕ, то полу­чится выражение такого же рода; так что общий результат выглядит так:

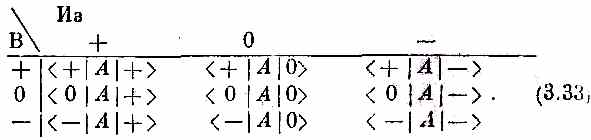
C:\Мои документы\gray.jpg

Теперь заметьте, что правая часть (3.32) на самом деле «проще» левой части. Прибор *А* полностью описан *девятью* числами <*j*|*А*|*i*>*,* сообщающими, каков отклик *А* на три базисных состояния прибора *Т.* Как только мы узнаем эту де­вятку чисел, мы сможем управиться с любой парой входных и выходных состояний ϕ и χ, если только определим каждое из них через три амплитуды перехода в каждое из трех базисных состояний (или выхода из них). Результат опыта предсказы­вается с помощью уравнения (3.32).

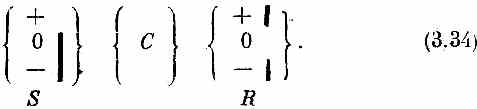
В этом и состоит основной вывод квантовой механики частицы со спином 1. Каждое *состояние* описывается тройкой чисел — амплитудами пребывания в каждом из базисных состояний (из избранной их совокупности). Всякий прибор описывается де­вяткой чисел — амплитудами перехода в приборе из одного ба­зисного состояния в другое. Зная эти числа, можно подсчитать что угодно.

Девятка амплитуд, описывающая прибор, часто изобра­жается в виде квадратной матрицы, именуемой матрицей

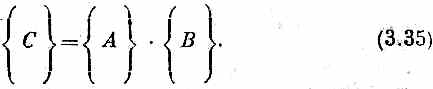
<*j*|*A*|*i*>:



Вся математика квантовой механики является простым расши­рением этой идеи. Приведем несложный пример. Пусть име­ется прибор *С,* который мы хотим проанализировать, т. е. рассчитать различные <*j*|*С|i*>. Скажем, мы хотим знать, что случится в эксперименте типа



Но затем мы замечаем, что *С* просто состоит из двух частей: стоящих друг за другом приборов *А* и *В.* Сперва частицы про­ходят через *А,* а потом — через *B*, т. е. можно символически записать



Мы можем прибор *С* назвать «произведением» *А* и *В.* Допустим также, что мы уже знаем, как эти две части анализировать; таким образом, мы можем узнать матрицы *А* и *В* (по отношению к *Т).* Тогда наша задача решена. Мы легко найдем <χ|*С|*ϕ> для любых входных и выходных состояний. Сперва мы напишем

C:\Мои документы\gray.jpg

Понимаете, почему? *(Подсказка:* представьте, что между *А к В* поставлен прибор *Т.)* Если мы затем рассмотрим особый случай, когда ϕ и χтакже базисные состояния (прибора *Т),* скажем *i* и *j*, то получим

C:\Мои документы\gray.jpg

Это уравнение дает нам матрицу прибора «произведения» *С* через матрицы приборов *А* и *В.* Математики именуют новую матрицу <*j*|*С|i*>, образованную из двух матриц <*j*|*В|i*> и <*j*|*А*|*i*> в соответствии с правилом, указанным в (3.36), матричным «произведением» *ВА* двух матриц *В* и *А.* (Заметьте, что *порядок* существен, *АВ≠ВА.)* Итак, можно сказать, что матрица для стоящих друг за другом двух частей прибора — это матричное произведение матриц для этих двух приборов порознь (причем *первый* прибор стоит в произведении *справа).* И каждый, кто знает матричную алгебру, поймет, что речь идет просто об уравнении (3.36).

**§ 7. Преобразование к другому базису**

Мы хотим сделать одно заключительное замечание относи­тельно базисных состояний, используемых в расчетах. Предпо­ложим, мы захотели работать с каким-то определенным базисом, скажем с базисом *S,* а кто-то другой решает провести те же расчеты с другим базисом, скажем с базисом *Т.*

Для конкретности назовем наши базисные состояния состоя­ниями *(iS),* где *i= +*, 0, -, а его базисные состояния назовем *(jT).* Как сравнить его работу с нашей? Окончательные ответы для результатов любых измерений обязаны оказаться одинако­выми, но употребляемые в самих расчетах всевозможные мат­рицы и амплитуды будут другими.

Как же они соотносятся? К примеру, если оба мы начи­наем с одного и того же ϕ, то мы опишем это ϕ на языке трех амплитуд <*iS*|ϕ> — амплитуд того, что ϕ переходит в наши базисные состояния в представлении *S,* а он опишет это ϕ ам­плитудами <*jТ*|ϕ> — амплитудами того, что состояние ϕ переходит в базисные состояния в его, *Т,* представлении. Как проверить, что мы оба на самом деле говорим об одном и том же состоянии ϕ? Это можно сделать с помощью нашего общего пра­вила II [см. (3.27)]. Заменяя χлюбым из *его* состояний *jT,* напишем

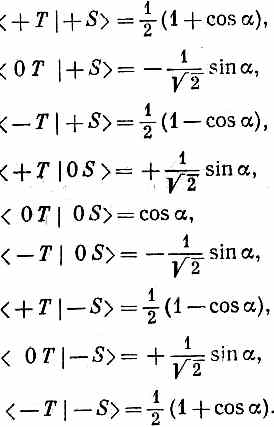
C:\Мои документы\gray.jpg

Чтобы связать оба. представления, нужно задать только девять комплексных чисел — матрицу <*jT|iS*>*,* Эту матрицу затем можно использовать для того, чтобы перевести все его урав­нения в нашу форму. Она сообщает нам, как *преобразовать* одну совокупность базисных состояний в другую. (По этой причине <*jT*|*iS*>иногда именуют «матрицей преобразования от представления *S к* представлению *T*». Слова ученые!)

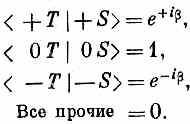
Для случая частиц со спином 1, у которых бывает только тройка базисных состояний (у высших спинов их больше), математическая ситуация напоминает то, что мы видели в век­торной алгебре. Каждый вектор может быть представлен тремя числами — компонентами вдоль осей *х, у* и z. Иначе говоря, всякий вектор может быть разложен на три «базисных» вектора, т. е. векторы вдоль этих трех осей. Но предположим, что кто-то другой решает выбрать другую тройку осей: x', y' и *z'.* Чтобы представить любой частный вектор, он воспользуется другими (а не теми, что мы) числами. Его выкладки не будут похожи на наши, но окончательный итог окажется таким же. Мы это уже рассматривали раньше и знаем правила преобразования векто­ров от одной тройки осей к другой.

Вам может захотеться увидать, как действуют квантовомеханические преобразования, и самим попробовать их проде­лать; для этого мы приведем здесь без вывода матрицы преобра­зований амплитуд спина 1 от представления *S* к другому пред­ставлению *Т* для разных взаимных ориентации фильтров *S* и *Т.* (В следующих главах мы покажем, как получаются эти результаты.)

*Первый случай.* У прибора *Т* ось *у* (вдоль которой дви­жутся частицы) та же самая, что и у *S,* но *Т* повернут вокруг общей оси *у* на угол а (на фиг. 3.6). (Чтобы быть точными, ука­жем, что в приборе *Т* установлена система координат *х' , у', z',* связанная с координатами *х, у, z* прибора *S* формулами z'=zcosα+*х*sinα; *х'=х*cosα- *z*sinα; *у'* = *у.)* Тогда ам­плитуды преобразований таковы:

 (3.38)

*Второй случай.* Прибор *Т* имеет ту же ось г, что и *S,* но повернут относительно оси *z* на угол β. (Преобразование координат: z'=z; *х'* =*x*cosβ*+y*sinβ; *у'*=*у*cosβ- *х*sinβ.) Тогда амплитуды преобразований суть

 (3.39)

Заметьте, что любые вращения *Т* можно составить из опи­санных двух вращений.

Если состояние ϕ определяется тремя числами

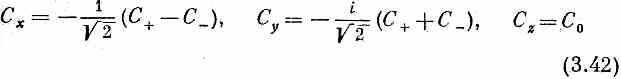
C:\Мои документы\gray.jpg

и если то же состояние описывается с точки зрения *Т* тремя числами

C:\Мои документы\gray.jpg

тогда коэффициенты <*jT*| *iS*>из (3.38) и (3.39) дают преоб­разования, связывающие С*i* и *С'i.* Иными словами. *С;* очень походят на компоненты вектора, который с точек зрения *S* и *Т* выглядит по-разному.

*Только* у частицы со спином 1 (потому что ей требуются как раз три амплитуды) есть такое тесное соответствие с векторами. Здесь во всех случаях имеется тройка чисел, которая обязана преобразовываться при изменениях координат определенным известным образом. И действительно, здесь есть и такая сово­купность базисных состояний, которая *преобразуется в точ­ности, как три компоненты вектора.* Три комбинации



преобразуются в *С'х, С'у, С'z* как раз так же, как *х, у, z* преобра­зуются в *х', у', z' .* [Вы можете проверить это с помощью законов преобразований (3.38) и (3.39).] Теперь вы понимаете, почему частицу со спином 1 часто называют «векторной частицей».

**§ 8. Другие случаи**

Мы начали с того, что подчеркнули, что наши рассуждения о частице со спином 1 явятся прототипом любых квантовомеханических задач. Обобщения требует только количество состояний. Вместо тройки базисных состояний в других случаях может потребоваться *n* [базисных состояний](#прим6). Форма наших основных законов (3.27) останется той же, если только понимать, что *i* и *j* должны пробегать по всем *n* базисным состояниям. Любое явление можно проанализировать, задав амплитуды того, что оно начинается с любого базисного состояния и кончается тоже в любом базисном состоянии, а затем просуммировав по всей полной системе базисных состояний. Можно использовать лю­бую подходящую систему базисных состояний, и каждый впра­ве выбрать ту, которая ему по душе; связь между любой парой базисов осуществляется матрицей преобразований *n*X*n.* Позже мы подробнее расскажем об этих преобразованиях.

Наконец, мы пообещали рассказать о том, что надо делать, если атомы прямо из печи проходят через какой-то прибор *А* и затем анализируются фильтром, который отбирает состояние χ. Вы не знаете, каково то состояние ϕ, в котором они входят в прибор. Лучше всего, наверное, было бы, если бы вы, не думая пока об этой проблеме, занимались такими задачами, в ко­торых вначале имеются только чистые состояния. Но если уж вы на этом настаиваете, так вот как расправляются с этой про­блемой.

Прежде всего вы должны быть в состоянии сделать разумные предположения о том, каким образом распределены состояния в атомах, которые выходят из печи. Например, если в печи нет чего-либо «особого», то разумно предположить, что атомы по­кидают печь, будучи «ориентированы» как попало. Квантовомеханически это соответствует вашему утверждению о том, что о состояниях вы не знаете ничего, кроме того, что треть ато­мов находится в состоянии (+*S),* треть — в состоянии *(*0*S)* и треть — в состоянии (-*S).* Для пребывающих в состоянии (+*S*) амплитуда пройти сквозь *А* есть <χ|*А*|+*S*>, а вероят­ность |<χ|*А*|+*S*>|2. То же и для других. Общая вероят­ность тогда равна

C:\Мои документы\gray.jpg

Но почему мы пользовались *S,* а не *Т* или каким-нибудь другим представлением? Дело в том, что, как это ни странно, ответ не зависит от того, каким было исходное разложение; он один и тот же, если только мы имеем дело с совершенно случайными ориентациями. Таким же образом получается, что

C:\Мои документы\gray.jpg

для любого χ. (Докажите-ка это сами!)

Заметьте, что *неверно* говорить, будто входные состояния обладают амплитудой √1/3быть в состоянии (+*S*), √1/3 в состоянии (0*S*)и √1/3в состоянии (-*S);* если бы это было так, были бы допустимы какие-то интерференции. Здесь вы просто *не знаете,* каково начальное состояние; вы обязаны думать на языке вероятностей, что система сперва находится во всевоз­можных мыслимых начальных состояниях, и затем взять средне­взвешенное по всем возможностям.

***\* Число базисных состояний n может оказаться (и, вообще говоря, бывает) равным бесконечности.***

***\* И в самом деле, для атомных систем с тремя или более базисными состояниями существуют другие типы фильтров (совершенно непохожие на приборы Штерна —Герлаха), которые можно было бы употребить для выбора других совокупностей базисных состояний (но при том же общем иx числе****).*

***\* Из этого опыта мы на самом деле не можем заключить, что а= 1, а видим только, что |а|2=1, следовательно, а может быть eiδ, но можно показать, что при выборе δ=0 мы ничего существенного здесь не по­теряли.***

***\* На языке наших прежних обозначений***

C:\Мои документы\gray.jpg

\* Мы не собираемся вкладывать в слова «базисное состояние» что-либо сверх того, что здесь сказано. Не следует переводить «базис» как «основу» и хоть в каком-то смысле считать их «основными состояниями». Слово «базис» понимается как «система описания», скажем, в таком смыс­ле, как в выражении «число в десятичной системе».

***\* Произносить надо так: (+S)—«плюс-S»; (0S) — «нуль-S»; (-S)— «минус-S».***

***Глава 4***

# [СПИН ОДНА ВТОРАЯ](#прим1)

[**§ 1. Преобразовани****е а****мплитуд**](#а1)

[**§ 2. Преобразование к** **повернут****ой системе к****оординат**](#а2)

[**§ 3. Повороты вокр****уг оси z**](#а3)

[**§ 4. Повороты на** **180° и на** **90 вокруг оси у**](#а4)

[**§ 5. Повороты в****округ** **оси x**](#а5)

[**§ б. Произвольные по****вороты**](#а6)

**§ 1. Преобразование амплитуд**

В предыдущей главе мы, пользуясь в ка­честве примера системой со спином 1, набросали общие принципы квантовой механики.

Любое состояние ψ можно описать через совокупность базисных состояний, задав амплитуды пребывания в каждом из них.

Амплитуда перехода из одного состоя­ния в другое может быть в общем слу­чае записана в виде суммы произведений амплитуд перехода в одно из базисных со­стояний на амплитуды перехода из этих базисных состояний в конечное положе­ние; в сумму непременно входят члены, относящиеся к каждому базисному состоя­нию;

C:\Мои документы\gray.jpg

Базисные состояния ортогональны друг другу — амплитуда пребывания в одном, если вы находитесь в другом, есть нуль:

C:\Мои документы\gray.jpg

Амплитуда перехода из одного состоя­ния в другое комплексно сопряжена амп­литуде обратного перехода

C:\Мои документы\gray.jpg

Мы немного поговорили о том, что базис для состояний может быть не один и что можно использовать (4.1), чтобы пе­рейти от одного базиса к другому. Пусть, например, мы знаем амплитуды <*iS*|*ψ*> обнаружения состояния *ψ* в лю­бом из базисных состояний *i* базисной системы *S,* но затем решаем, что лучше описывать состояние в терминах другой совокупности базисных состояний — скажем, состояний *j*, при­надлежащих к базису *Т.* Мы тогда можем подставить в общую формулу (4.1) *jT* вместо χ и получить

C:\Мои документы\gray.jpg

Амплитуды обнаружения состояния *(ψ)* в базисных состояниях *(jТ)* связаны с амплитудами его обнаружения в базисных со­стояниях (*iS)* совокупностью коэффициентов <*jT*|*iS*>*.* Если базисных состояний *N,* то таких коэффициентов всего *N*2*.* Эту совокупность коэффициентов часто называют *«матрицей преобразования* от *представления S* к *представлению Т».* Математически это выглядит страшновато, но стоит все чуть обозначить иначе и оказывается, что ничего страшного нет. Если обозначить через С; амплитуду того, что состояние *ψ* находится в базисном состоянии *iS,* т. е. *Ci=*<*iS*|*ψ*>, а через *C'j* назвать соответствующие амплитуды для базисной системы *Т.* т. е. С*j*=<*jT*|*ψ*>, то (4.4) можно записать в виде

C:\Мои документы\gray.jpg

где *Rji —* то же самое, что и <*jT*|*iS*>*.* Каждая амплитуда *Cj* есть сумма по *всем i* одного ряда коэффициентов *Rji ,* умно­женных на каждую амплитуду *Сi.* Это выглядит так же, как преобразование вектора от одной системы координат к другой.

Но не будем слишком долго увлекаться абстракцией. Мы уже приводили парочку примеров этих коэффициентов для случая спина 1, и вы сами можете разобраться, как ими пользоваться практически. Но, с другой стороны, у квантовой механики существует очень красивое качество: из того факта, что состоя­ний только три, используя лишь свойства симметрии простран­ства относительно вращений она умеет чисто отвлеченным пу­тем вычислить эти коэффициенты. Приводить на столь ранней стадии эти рассуждения было бы нехорошо: прежде чем вы «вер­нулись бы на землю», вы могли бы утонуть в новом море абстрак­ций. Однако все это так красиво, что мы в свое время это не­пременно проделаем.

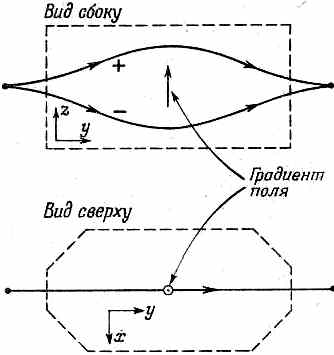
В этой же главе мы покажем вам, как можно получить коэффициенты преобразований для частиц со спином 1/2. Мы выбрали этот случай потому, что он проще спина 1. Задача состоит в том, чтобы определить коэффициенты *Rji* для частицы, или атомной системы, которая в аппарате Штерна — Герлаха расщепляется на два пучка„ Мы собираемся вывести все коэф­фициенты для преобразования от одного представления к дру­гому путем чистого рассуждения плюс несколько предположе­ний. *Какие-то* предположения всегда нужны для того, чтобы пользоваться «чистыми» рассуждениями! Хотя наши доказа­тельства будут абстрактными и немного запутанными, резуль­тат, который мы получим, сформулировать легко и понять просто; сам же по себе он будет очень важным. Можете, если угодно, рассматривать это как своего рода культмероприятие. Мы ведь условились уже, что все существенное, выведенное здесь, будет также выводиться по мере надобности в следующих главах другим путем. Так что вы не бойтесь потерять нить нашего изложения квантовой механики, если полностью про­пустите эту главу или изучите ее попозже. Мероприятие «куль­турное» в том смысле, что оно должно показать вам, что прин­ципы квантовой механики не только любопытны, но и настолько глубоки, что, прибавив к ним всего несколько добавочных ги­потез о структуре пространства, мы сможем вывести огромное множество свойств физических систем. Кроме того, важно по­нимать, откуда вытекают различные следствия квантовой ме­ханики. Пока наши законы физики неполны (а так оно и есть на самом деле), всегда интересно выяснить, в каких местах наши теории перестают согласовываться с опытом — там ли, где наша логика самая лучшая, или же там, где она наихудшая. До сих пор оказывалось, что там, где наша логика наиболее абстрактна, там она всегда дает правильные результаты — теория согласуется с опытом. Только тогда, когда мы пытаемся строить конкретные модели внутреннего устройства элементар­ных частиц и их взаимодействий, только тогда мы оказываемся не в состоянии найти теорию, согласную с экспериментом. Та теория, которую мы намерены описать здесь, согласуется с опытом всюду, где ее испытывали; она так же хороша для странных частиц, как и для электронов, протонов и т. д.

Еще одно неприятное (но важное) замечание: коэффициенты *R*jiневозможно определить однозначно, потому что в амплиту­дах вероятностей всегда есть какой-то произвол. Если у вас есть ряд каких угодно амплитуд, скажем амплитуд прихода в некоторое место по целому множеству различных путей, и если вы помножите каждую отдельную амплитуду на один и тот же фазовый множитель, скажем на еiδ, то получится другая сово­купность, которая будет ничуть не хуже первой. Значит, всегда можно произвольно изменить фазу всех амплитуд в любой за­даче, если вы этого захотите.

Допустим, вы вычисляете некоторую вероятность, беря сумму нескольких амплитуд, скажем *(А*+*В*+*С*+...), и возводя ее модуль в квадрат. Затем кто-то другой вычисляет то же самое, складывая амплитуды *(А'*+*В'*+*С'+* ...) и возводя их модуль в квадрат. Если все *А', В', С'* и т. д. отли­чаются от *А, В, С* и т. д. только множителем еiδ, то все вероят­ности, получаемые возведением модуля в квадрат, окажутся в точности одинаковыми, потому что тогда *(А'*+*В'*+*С*+...) равно *e*iδ*(А*+*В*+*С+*...). Или допустим, к примеру, что мы считали что-нибудь по уравнению (4.1), но затем внезап­но изменили все фазы определенной базисной системы. Каждую из амплитуд <*i*|ψ> тогда пришлось бы умножить на один и тот же множитель *еiδ.* Точно так же изменились бы в e*iδ* раз и все амплитуды: <i|χ>, но амплитуды <χ|*i*> комплексно сопряжены амплитудам <*i*|χ>; тем самым они приобрели бы множитель *е-iδ .* Плюс и минус *iδ* в экспонентах уничтожатся, и получится то же выражение, что было и раньше. Стало быть, общее правило таково, что изменение на одну и ту же фазу всех амплитуд по отношению к данной базисной системе или даже простое изменение *всех* амплитуд в любой задаче на одну и ту же фазу ничего не меняет. Значит, существует некоторая свобода в выборе фаз нашей матрицы преобразования. Мы то и дело будем прибегать к такому произвольному выбору, всегда сле­дуя общепринятым соглашениям.

**§ 2. Преобразование к повернутой системе координат**

Рассмотрим опять «усовершенствованный» прибор Штерна— Герлаха, описанный в предыдущей главе. Пучок частиц со спи­ном 1/2, входящих слева, расщепляется, вообще говоря, на *два* пучка, как показано схематически на фиг. 4.1.



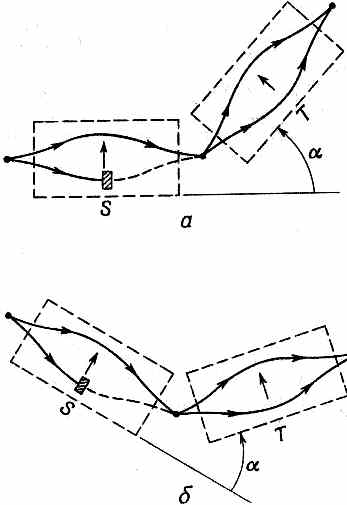
*Фиг. 4.1. «Усовершенствованный» прибор Штерна — Герлаха с пучками частиц со спином* 1/2.

(При спине 1 пучков было три.) Как и раньше, пучки в конце снова сводятся в одно место, если только один из них не будет перекрыт «перегородкой», которая перехватит его на полпути. На рисунке имеется стрелка, которая показывает направление роста *величины* поля, скажем положение магнитного полюса с острым наконечником. Эта стрелка пусть будет представлять собой на*правление вверх* для данного прибора. В каждом аппарате ее положение фиксировано, что позволяет указывать взаимную ориентацию нескольких приборов относительно друг друга. Наконец, предположим еще, что направление магнитного поля относительно стрелки во всех магнитах одинаково.

Будем говорить, что атомы из «верхнего» пучка находятся *по отношению к этому прибору* в состоянии (+), атомы из «нижнeгo» — в состоянии (-). (Нуль-состояния для спина 1/2 не

существует.)

Положим теперь, что мы поставили два наших усовершен­ствованных прибора Штерна — Герлаха один за другим фиг. 4.2, *а).*



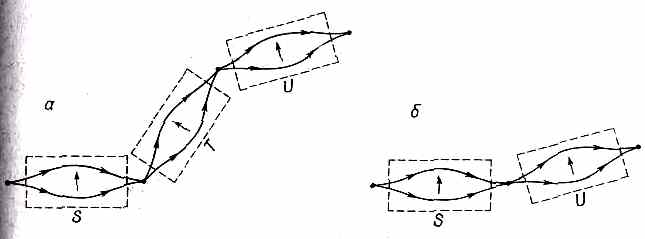
*Фиг.* *4.2. Два эквивалентных эксперимента.*

Первый (назовем его *S*) можно употребить на то, что­бы приготовлять чистое состояние (+*S*) или (-*S*), загораживая то один, то другой пучок. [На рисунке приготовляется чистое состояние (+*S*).] При любом расположении всегда есть неко­торая амплитуда того, что частица, выходящая из *S,* окажется в пучке *(+Т)* или (-*Т)* второго прибора. Всего таких ампли­туд четыре: амплитуды перехода от (+*S*) к (+*T*), от *(+S)* к *(-Т),* от *(-S)* к *(+Т)* и от (-*S*) к (-*T*). Эти амплитуды — просто четыре коэффициента матрицы преобразования *R*ji перехода от представления *S к* представлению *Т.* Можно счи­тать, что первый прибор «приготовляет» определенное состояние в одном представлении, а второй «анализирует» это состояние в терминах второго представления. Мы хотим научиться отве­чать на такие вопросы: если, загородив один из пучков в *S,* мы приготовили атом в данном состоянии, например в состоянии (+5), то каково будет изменение, которое он испытает, пройдя через прибор *Т,* который настроен на состояние (-*T*)? Резуль­тат, конечно, будет зависеть от углов между системами *S* и *Т.*

Мы должны объяснить, почему есть надежда найти коэф­фициенты *Rji* теоретически. Почти невозможно поверить, что если у частиц спин был выстроен в направлении +z, то есть хоть какой-то шанс обнаружить, что ее спин ориентирован в направлении +*x* или в каком-либо другом направлении. Это дей­ствительно *почти* невозможно. Но все же не совсем. Это на­столько невозможно, что остается *лишь один путь,* каким это происходит, а если этот путь один, то его уже можно найти.

Первое рассуждение можно провести так. Предположим, что, как показано на фиг. 4.2, *а,* прибор *Т* направлен вверх под уг­лом а относительно *S.* Пусть через *S* проходит только пучок (+), а через *Т —* только пучок (-). Мы измерили некоторую вероятность того, что частицы, выходя из *S,* пройдут сквозь *Т.* Теперь предположим, что мы делаем второе измерение при­бором, показанным на фиг. 4.2, *б. Относительная* ориентация *S* и *Т* одинакова, но вся система расположена в пространстве под другим углом. Мы хотим предположить, что оба опыта приведут к одному и тому же значению вероятности того, что частица в чистом состоянии относительно *S* окажется в некото­ром определенном состоянии относительно *Т,* Иными словами, мы предполагаем, что результат любого опыта такого рода оди­наков, что сама *физика* одинакова, как бы *весь* прибор ни был ориентирован в пространстве. (Вы скажете: «Это самоочевидно». Но это *все же* только предположение, и оно «правильно» только тогда, если так действительно бывает.) Это означает, что коэффициенты *Rji* зависят лишь от взаимного расположения *S* и *Т* в пространстве, а не от абсолютного их расположения. Выражаясь иначе, *Rji* зависит только от *поворота,* который переводит *S* в *Т,* потому что общим для фиг. 4.2, *а* и *б,* очевидно, является трехмерный поворот, переводящий прибор *S* в положе­ние прибора *Т.* Когда матрица преобразования *Rji* зави­сит, как в нашем случае, только от поворота, ее называют *матрицей поворота.*

Для следующего шага нужно еще немного информации. Пусть мы добавили третий прибор (назовем его *U*), стоящий вслед за *Т* под каким-то произвольным углом (фиг. 4.3, *а).*



*Фиг. 4.3. Если Т «открыт до отказа», то б эквивалентно а.*

(Все это начинает выглядеть устрашающе, но в этом-то и прелесть отвлеченного мышления: самые сверхъестественные опыты можно ставить, просто проводя новые линии!) Что же пред­ставляет собой преобразование *S*→*Т*→*U*? Фактически нас интересует амплитуда перехода из некоторого состояния по отношению к *S к* некоторому другому состоянию по отношению к *U,* если известны преобразования от *S к Т* и от *Т* к *U,* Поин­тересуемся сперва опытом, в котором в *Т* открыты оба канала. Ответ можно получить, дважды подряд применяя (4.5). Для перехода от *S*-представления к *T*-представлению имеем

C:\Мои документы\gray.jpg

где верхние индексы *TS* нужны, чтобы отличать это *R* от *RUT,* когда мы будем переходить от *Т* к *U.*

Обозначая амплитуды появления атома в базисных состоя­ниях представления *U* через *C"k,* можно связать их с *T*-амплитудами, применяя (4.5) еще раз; получим

C:\Мои документы\gray.jpg

Теперь можно из (4.6) и (4.7) получить преобразование от *S* прямо к *U.* Подставляя *С'j* из (4.6) в (4.7), имеем

C:\Мои документы\gray.jpg

Или, поскольку в *RUTkj* отсутствует *i,* можно поставить сум­мирование по *i* впереди и написать

C:\Мои документы\gray.jpg

Это и есть формула двойного преобразования.

Заметьте, однако, что, пока пучки *в Т не* загораживаются, состояния на выходе из *Т те же,* что и при входе в него. Мы могли бы с равным успехом делать преобразования из *S*-представления прямо в представление *U.* Это значило бы, что прибор *U* по­ставлен прямо за *S,* как на фиг. 4.3, *б.* В этом случае мы бы написали

C:\Мои документы\gray.jpg

где *RUSki —* коэффициенты, принадлежащие этому преобразо­ванию. Но ясно, что (4.9) и (4.10) должны приводить к одинако­вым амплитудам *С"k,* причем независимо от того, каково было то начальное состояние ϕ, которое снабдило нас амплитудами С*i*. Значит, должно быть

C:\Мои документы\gray.jpg

Иными словами, для любого поворота *S→U* базиса, если рас­сматривать его как два последовательных поворота *S→Т* и *Т→U,* можно получить матрицу поворота *ruski* из матриц двух частных поворотов при помощи формулы (4.11). Если угод­но, (4.11) следует прямо из (4.1) и представляет собой лишь другую запись формулы:

C:\Мои документы\gray.jpg

Для полноты добавим еще следующее. Но не думайте, что это будет что-то страшно важное; если хотите, переходите, не читая, прямо к следующему параграфу. Надо сознаться, что то, что мы сказали, не совсем верно. Мы не можем на самом деле утверждать, что (4.9) и (4.10) обязаны привести к *абсолют­но* одинаковым амплитудам. Одинаковыми должны оказаться только *физические результаты;* сами же амплитуды, могут отличаться на общий фазовый множитель типа *e*iδ, не меняя результатов никаких расчетов, касающихся реального мира. Иначе говоря, вместо (4.11) единственное, что можно утвер­ждать,— это

C:\Мои документы\gray.jpg

где δ — *какая-то* вещественная постоянная величина. Смысл этого добавочного множителя *е*iδ, конечно, в том, что амплиту­ды, которые мы получим, пользуясь матрицей *RUS,* могут все отличаться на одну и ту же фазу *(е-iδ)* от амплитуд, которые получились бы из двух поворотов *RUT* и *RTS.* Но мы знаем, что если все амплитуды изменить на одинаковую фазу, то это ни на чем не скажется. Так что при желании можно этот фазовый множитель просто игнорировать. Оказывается, однако, что если определить нашу матрицу поворота особым образом, то этот фазовый множитель вообще не появится: б в (4.12) всегда будет нулем. Хотя это и не отражается на наших дальнейших рассуждениях, мы беремся это быстро доказать, пользуясь ма­тематической теоремой о детерминантах. [А если вы до сих пор мало знакомы с детерминантами, то не следите за доказатель­ством и прямо переходите к определению (4.15).)

Во-первых, следует напомнить, что (4.11) — это математи­ческое определение «произведения» двух матриц. (Просто очень удобно говорить *«RUS* есть произведение *RUT* и *RTS*».) Во-вторых, существует математическая теорема (которую для используемых здесь матриц 2X2 вы легко докажете), утверждающая, что детерминант «произведения» двух матриц есть произведение их детерминантов. Применив эту теорему к (4.12), получим



(Мы отбрасываем нижние индексы, они здесь ничего полезного нам не сообщают.) Да, слева стоит 2S! Вспомните, что мы имеем дело с матрицами 2x2; каждый член в матрице *RUSki* умножен на *еiδ,* а каждый член в детерминанте (состоящий из двух мно­жителей) получается умножением на *еi2δ.* Извлечем из (4.13) корень и разделим на него (4.12):

C:\Мои документы\gray.jpg

Добавочный фазовый множитель исчез.

Дальше оказывается, что если мы хотим, чтобы все наши амплитуды в любом заданном представлении были нормированы (а это, как вы помните, означает, что C:\Мои документы\gray.jpg

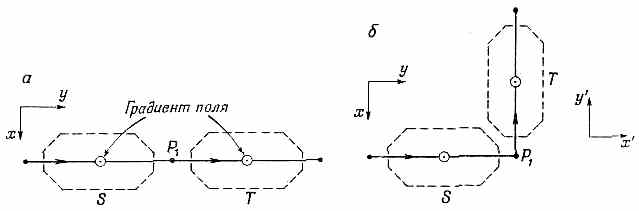
то у всех матриц поворота детерминанты окажутся чисто мни­мыми экспонентами, наподобие *еiα.* (Мы не будем этого дока­зывать; вы сами потом увидите, что это всегда так.) Значит, мы сможем, если захотим, выбрать все наши матрицы поворота *R* так, чтобы фаза их получалась однозначно, взяв Det*R*=1. Это будет делаться так. Пусть мы каким-то произвольным об­разом определили матрицу поворота *R.* Возьмем за правило «приводить» ее к «стандартной форме», определяя

C:\Мои документы\gray.jpg

Для получения однозначных фаз мы просто умножаем каждый член в *R* на один и тот же фазовый множитель. В дальнейшем мы будем всегда предполагать, что наши матрицы были приве­дены к «стандартной форме»; тогда мы сможем пользоваться прямо формулой (4.11) без каких-либо добавочных фазовых множителей.

**§ 3. Повороты вокруг оси z**

Теперь мы уже подготовлены к тому, чтобы отыскать матри­цу преобразования *Rji*, связывающую два разных представления, Владея нашим правилом объединения поворотов и нашим предположением, что в пространстве нет предпочтительного направ­ления, мы владеем ключом для отыскания матрицы любого произвольного поворота. Решение здесь только *одно.* Начнем с преобразования, которое отвечает повороту вокруг оси *z.* Пусть имеются два прибора *S* и *Т,* поставленных друг за дру­гом вдоль одной прямой; оси их параллельны и смотрят из страницы на вас (фиг. 4.4, *а).*



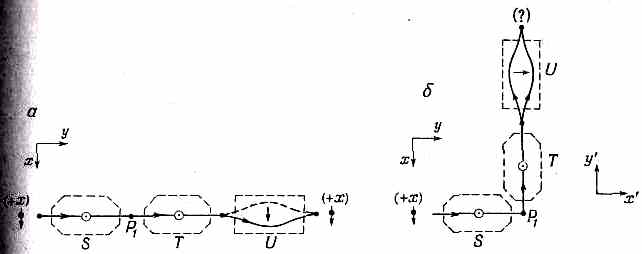
*Фиг. 4.4. Поворот на 90° вокруг оси z.*

Это их направление мы примем за ось *z.* Ясно, что если пучок в приборе *S* идет вверх (к +*z),* то то же будет и в аппарате *Т.* Точно так же, если он в *S* идет вниз, то и в *Т* он направится вниз. Положим, однако, что прибор *Т* был повернут на какой-то угол, но его ось, как и прежде, параллельна оси прибора *S,* как на фиг. 4.4, *б.* Интуитивно хочется сказать, что пучок (+) в *S* будет по-прежнему пере­ходить в пучок (+) в *Т,* потому что и поля, и их градиенты характеризуются тем же физическим направлением. И это вполне правильно. Точно так же и пучок (-) в *S* будет перехо­дить в пучок (-) в *Т.* Тот же результат применим для любой ориентации *Т* в плоскости *ху* прибора *S.* Что же отсюда сле­дует для связи между *С'+=*<+T|ψ>, *С'-*=<-*T*|ψ> и *С+*=<+*S*|ψ>, *С-=*<-*S* |ψ>? Можно подумать, что любой поворот вокруг оси z «системы отсчета» базисных со­стояний оставляет амплитуды *С±* пребывания «вверху» и «вни­зу» теми же, что и раньше, и написать *С'+=С+* и С'-=*С-.* Но это *неверно.* Все, что *можно* отсюда заключить,— это, что при таких поворотах вероятности оказаться в «верхнем» пучке при­боров *S* и *Т* одинаковы, т. е.

C:\Мои документы\gray.jpg

Но мы не вправе утверждать, что *фазы* амплитуд, относящихся к прибору *Т,* не могут в двух различных ориентациях *а* и *б* (фиг. 4.4) различаться.

Пары приборов, показанных на фиг. 4.4, на самом деле от­личаются друг от друга, в чем можно убедиться следующим образом. Предположим, что мы перед прибором *S* поставили другой, создающий чистое (+*x*)-состояние. (Ось *х* направлена на рисунке вниз.) Эти частицы расщеплялись бы в *S* на пучки (+*z*) и (-*z*), но на выходе *S* (в точке *Р*1*)* оба пучка снова сое­динялись бы и восстанавливали состояние (+ *х).* Затем то же самое происходило бы в *Т.* Если бы за *Т* поставить третий при­бор *U,* ось которого направлена по (+ *х).* как показано на фиг. 4.5, *а,* то все частицы пошли бы в пучок (+) прибора *U.*



*Фиг. 4.5. Частица в состоянии (+х) ведет себя в опытах а и б по-разному.*

Теперь представим, что произойдет, если *Т* и *U вместе* повер­нуть на 90°, как показано на фиг. 4.5, *б.* Прибор *Т* опять будет пропускать все, что в него поступает, так что частицы, входя­щие в *U*, будут в (+*x*)-состоянии по отношению к *S.* Но *U* теперь анализирует состояние (+*y*) (по отношению к *S),* а это совсем не то, что раньше. (Из симметрии следует ожидать, что через него пройдет только половина частиц.)

Что же могло перемениться? Приборы *Т* и *U* по отношению друг к другу расположены одинаково. Могла ли измениться *фи­зика* просто из-за того, что *Т* и *U* иначе ориентированы? Нет, гласит наше первоначальное предположение. Значит, разли­чаться в двух случаях, показанных на фиг. 4.5, должны *ампли­туды* по отношению к *Т.* То же должно быть, следовательно, и на фиг. 4.4. Частица должна как-то уметь узнавать, что в *Р*1 она завернула за угол. Как же она может об этом поведать? Что ж, остается только одно: *величины* С'+ и *С'+* в обоих случаях одинаковы, но могут — а на самом деле *должны —* обладать разными *фазами.* Мы приходим к заключению, что *С'+* и *С+* дол­жны быть связаны формулой

C:\Мои документы\gray.jpg

а *С'-* и С —формулой C:\Мои документы\gray.jpg

где λ, и μ *—* вещественные числа, которые как-то должны быть связаны с углом между *S* и *Т.*

В данный момент единственное, что мы можем сказать про λи μ,— это то, что они не могут быть равны друг другу (кроме показанного на фиг. 4.5, *а* особого случая, когда *Т* и *S* ориен­тированы одинаково). Мы видели, что изменение всех амплитуд на одну и ту же фазу ни к каким физическим следствиям не при­водит. По той же причине всегда можно добавить к λи μлюбое постоянное число — это тоже ничего не изменит. Значит, нам представляется возможность *выбрать* λи μравными плюс и минус одному и тому же числу. Всегда можно взять

C:\Мои документы\gray.jpg

Тогда

C:\Мои документы\gray.jpg

Итак, мы [договоримся](#прим2) считать μ=-λ и придем к общему правилу, что поворот прибора, относительно которого ведется отсчет, вокруг оси *z* на какой-то угол приводит к преобразова­нию

C:\Мои документы\gray.jpg

Абсолютные значения одинаковы, а фазы различны. Эти-то фазовые множители и отвечают за различные результаты двух опытов, показанных на фиг. 4.5.

Теперь надо узнать закон, связывающий X с углом между *S* и *Т.* Для одного случая ответ известен. Если угол — нуль, то и λ — нуль. Теперь *предположим,* что фазовый сдвиг λ, есть непрерывная функция угла ϕ между *S* и *Т* (см. фиг. 4.4) при ϕ, стремящемся к нулю. По-видимому, это единственное разум­ное допущение. Иными словами, если свернуть *Т с* прямой линии *S* на малый угол ε, то и λтоже будет малым числом, ска­жем *m*ε, где *m —* некоторый коэффициент. Мы пишем те, по­тому что можем доказать, что λ обязано быть пропорционально ε. Если бы мы поставили за *T* новый прибор Т, тоже образую­щий с *Т* угол ε, а с *S* тем самым образующий угол 2ε, то по отно­шению к *Т* мы бы имели

C:\Мои документы\gray.jpg

а по отношению к *T'*

C:\Мои документы\gray.jpg

Но мы знаем, что, должны были бы получить тот же результат если бы сразу за *S* поставили *Т'*!Значит, когда угол удваивает­ся, то удваивается и фаза. Эти аргументы мы можем, естествен­но, обобщить и построить любой поворот из последовательных бесконечно малых поворотов. Мы заключаем, что *К* пропор­ционально ϕ для *любого* угла ϕ. Поэтому всегда можно писать λ=mϕ.

Общий полученный нами результат состоит, следовательно, в том, что для *Т,* повернутого вокруг оси *z* относительно *S* на угол ϕ,

C:\Мои документы\gray.jpg

Для угла ϕ и для всех поворотов, которые встретятся нам в будущем, мы условимся считать, что *положительным* поворо­том будет поворот правого винта, который ввинчивается в по­ложительном направлении z.

Теперь остается узнать, каким должно быть *m.* Попробуем сперва следующее рассуждение: пусть *Т* повернулся на 360°; ясно, что тогда он опять очутится под нулем градусов, и мы должны будем иметь *С'+*=*С+* и С'-= *С-,* или, что то же самое, *eim2π=*1. Мы получаем *m*=1. *Это рассуждение не годится!*

Чтобы убедиться в этом, допустим, что *Т* повернут на 180°. Если бы *т* было равно единице, мы получили бы

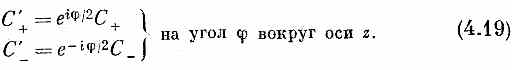


Но это просто опять получилось *первоначальное* состояние. *Обе* амплитуды по­просту умножены на -1; это возвращает нас к исходной физиче­ской системе. (Опять случай всеобщей перемены фаз.) Это озна­чает, что если угол между *Т* и *S* на фиг. 4.5, *б* увеличивается на 180°, то система (по отношению к *Т)* оказывается неотличимой от случая 0° и частицы должны опять проходить через состояние (+) прибора *U*. Но при 180° состояние (+) прибора *U* — это состояние (-*х)* начального прибора *S.* Так что состояние (+*x*) станет состоянием (*-х*)*.* Но мы-то ведь ничего не делали для *изменения* начального состояния; ответ поэтому ошибочен. Не может быть, чтобы *т*=1.

Нет, все должно быть иначе: надо, чтобы только поворот на 360° *(и ни на какие меньшие углы)* воспроизводил то же самое физическое состояние. Это случится при *m* =1/2. Тогда и только тогда первым углом, воспроизводящим то же самое *физическое* состояние, [будет угол ϕ=360°](#прим3). При этом будет

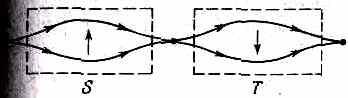
C:\Мои документы\gray.jpg

Очень курьезно вдруг обнаружить, что поворот прибора на 360° приводит к новым амплитудам. Но на самом деле они не новы, потому что одновременная перемена знака ни к какой новой физике не приводит. Если кто-нибудь задумает переме­нить все знаки у всех амплитуд, подумав, что он повернулся на 360°, то это его дело — физику он получит ту же, [прежнюю](#прим4). Итак, наш окончательный ответ таков: если мы знаем амплиту­ды *С+* и *С-* для частиц со спином 1/2 по отношению к системе отсчета *S* и если затем мы используем базисную систему, свя­занную *с Т (Т* получается из *S* поворотом на ϕ относительно оси z), то новые амплитуды выражаются через старые так:



**§ 4. Повороты на 180° и па 90° вокруг оси у**

Теперь попробуем подобрать преобразование для поворота *Т* (по отношению к *S)* на 180° вокруг оси, *перпендикулярной* к оси z, скажем вокруг оси *у.* (Оси координат мы определили на фиг. 4.1.) Иными словами, берутся два одинаковых прибора Штерна — Герлаха и второй из них, *Т*, переворачивается от­носительно первого, *S*, «вверх ногами» (фиг. 4.6).



*Фиг. 4.6. Поворот на 180° вокруг оси у.*

Если рассмат­ривать частицы как маленькие магнитные диполи, то частица, которая находится в состоянии (+*S*) (в первом приборе она избирает «верхний» путь), и во втором приборе избирает «верх­ний» путь, т. е. окажется по отношению к Г в *минус*-состоянии. (В перевернутом приборе *Т* переворачиваются и поле, и направление его градиента; для частицы с заданным направле­нием магнитного момента сила не меняется.) То, что для *S* было «верхом», то для *Т* будет «низом». Для такого относительного расположения *S* и *Т* преобразования, естественно, должны дать

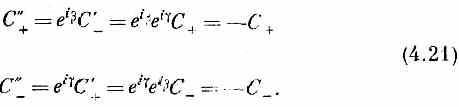
C:\Мои документы\gray.jpg

Как и раньше, нельзя исключить добавочные фазовые множи­тели; на самом деле может оказаться, что

C:\Мои документы\gray.jpg

где β и γ еще подлежат определению.

А что можно сказать о повороте вокруг оси *у* на угол 360° Мы уже знаем ответ для поворота на 360° вокруг оси z: амплитуда пребывания в любом состоянии меняет знак. Повороты на 360° вокруг любой оси всегда приводят прибор в прежнее положение. Таким образом, результат *любого* поворота на 360° должен быть таким же, как и при повороте на 360° вокруг оси z,—все амплитуды должны просто переменить знак. Теперь представим себе два последовательных поворота на 180° вокруг оси *у* по формуле (4.20); после них должен получиться резуль­тат (4.18). Иными словами,



Это означает, что

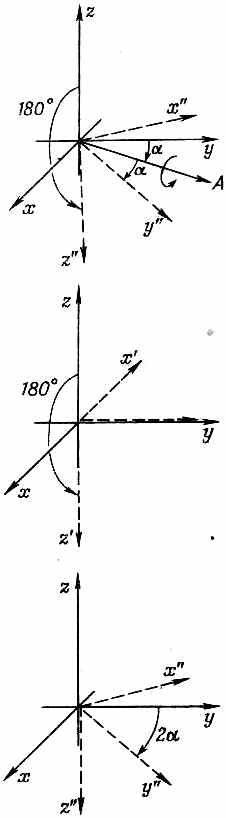
C:\Мои документы\gray.jpg

Следовательно, γ*=-β*+π, и преобразование для поворота на 180° вокруг оси *у* может быть записано так:

C:\Мои документы\gray.jpg

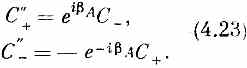
Рассуждения, которыми мы только что пользовались, в рав­ной степени применимы к поворотам на 180° вокруг *любой* оси в плоскости *ху,* хотя, конечно, повороты вокруг разных осей дадут для β разные числа. Но это единственное, чем они могут отличаться. В числе β имеется известный произвол, но, как только оно определено для какой-то одной оси в плоскости *ху,* оно определяется и для всех прочих осей. *Принято* выби­рать β=0 для поворотов на 180° вокруг оси *у.*

Чтобы показать, что свобода такого выбора у нас есть, предположим, что мы решили, что β не равно нулю для пово­рота вокруг оси *y*; тогда можно показать, что в плоскости *ху* существует *какая-то другая* ось, для которой соответствующая фаза *будет* нулем. Найдем фазовый множитель βA для оси *А,* образующей с осью *у* угол α, как показано на фиг. 4.7, *а.*



*Фиг. 4.7. Поворот на 180° вокруг оси А (а) эквивалентен повороту на 180° вокруг оси у (б), за которым следует поворот вокруг оси z' (в).*

(Для удобства на рисунке угол а отрицателен, но это неважно.) Если теперь мы возьмем прибор *Т,* первоначально направлен­ный гак же, как и *S,* а потом повернем его вокруг оси *А* на 180°, то его оси — назовем их *х", у", z"—* расположатся так, как на фиг. 4,7, а. Амплитуды по отношению к *Т* тогда станут



Но той же самой ориентации можно добиться двумя последова­тельными поворотами, показанны­ми на фиг. 4.7, *б* и *в*. Возьмем сначала прибор *U,* повернутый по отношению к *S* на 180° вокруг оси *у.* Оси *х', у'* и *z'* прибора *U* будут такими, как на фиг. 4.7, *б,* а амп­литуды *по отношению к U* будут даваться формулой (4.22).

Заметьте теперь, что от *U* к *T* можно перейти, повернув прибор *U* вокруг «оси z», т. е. вокруг z', как показано на фиг. 4.7, *в.* Из рисунка видно, что требуемый угол вдвое больше угла а, но на­правлен в обратную сторону (по отношению к z"). Используя пре­образование (4.19) с ϕ=-2α, получаем

C:\Мои документы\gray.jpg

Подставляя (4.22) в (4.24), получаем

C:\Мои документы\gray.jpg

Эти амплитуды, конечно, должны совпасть с полученными в (4.23). Значит, β*A* должно быть связано с α и β формулой

βA=β-α. (4.26) Это означает, что если угол α между осью *А* и осью *у* (прибоpa *S)* равен β то в преобразовании поворота на 180° вокруг оси *А* будет стоять βA=0.

Но коль скоро у *какой-то* из осей, перпендикулярных к оси *z,* может оказаться β=0, то ничто не мешает принять эту ось за ось *у.* Это всего лишь вопрос *соглашения,* и мы примем это в общем случае. *Итог:* для поворота на 180° вокруг оси *у* мы имеем

C:\Мои документы\gray.jpg

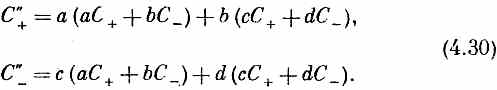
Продолжая размышлять о поворотах вокруг оси *у,* перей­дем теперь к матрице преобразования для поворотов на 90°. Мы в состоянии установить ее вид, оттого что знаем, что два последовательных поворота на 90° вокруг одной и той же оси — это то же самое, что один поворот на 180°. Напишем преобразование для 90° в самой общей форме:

C:\Мои документы\gray.jpg

Второй поворот на 90° вокруг той же оси обладал бы теми же коэффициентами:

C:\Мои документы\gray.jpg

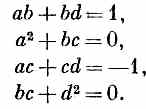
Подставляя (4.28) в (4.29), получаем



Однако из (4.27) нам известно, что

C:\Мои документы\gray.jpg

так что должно быть

 (4.31)

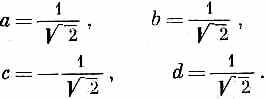
Этих четырех уравнений вполне хватает, чтобы определить все наши неизвестные *а, b, с* и *d.* Сделать это нетрудно. По­смотрите на второе и четвертое уравнения. Вы видите, что *a*2=*d*2, откуда либо *a=d,* либо *a=-d.* Но последнее отпадает, потому что тогда не выполнялось бы первое уравнение. Зна­чит, *d=a.* А тогда сразу же выходит *b=1/2a* и с=-1/2а. Те­перь все выражено через *а.* Подставляя, скажем, во второе

уравнение значения *b* и с, получаем

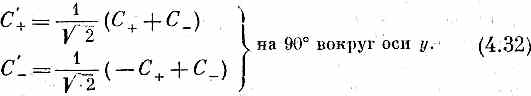
а2 -1/4a2 = 0. или а4 =1/4.

Из четырех решений этого уравнения только два приводят к детерминанту стандартной формы. Мы можем принять а=1/√2;

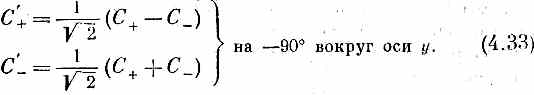
[тогда](#прим5)



Иными словами, для двух приборов *S* и *T* при условии, что *Т* повернут относительно *S* на 90° вокруг оси *у,* преобра­зование имеет вид



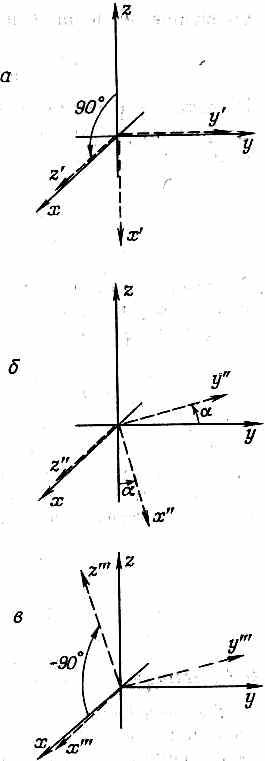
Эти уравнения можно, конечно, разрешить относительно *С+* и *С-;* это даст нам преобразование при повороте вокруг оси *у* на -90°. Переставив еще и штрихи, мы напишем



**§ 5. Повороты вокруг оси х**

Вы, пожалуй, подумаете: «Это становится смешным. Чему же нас теперь будут учить— поворотам на 47° вокруг оси *у,* потом на 33° вокруг x? Долго ли это будет продолжаться?» Нет, оказы­вается, я почти все рассказал. Зная только два преобразова­ния — на 90° вокруг оси *у* и на произвольный угол вокруг оси z (как вы помните, именно с этого мы начали),— мы уже способны производить любые повороты.

Для иллюстрации предположим, что нас интересует пово­рот на угол а вокруг оси *х.* Мы знаем, как быть с поворотом на угол а вокруг оси *z,* но нам нужен поворот вокруг оси *х.* Как его определить? Сперва повернем ось z вниз до оси *х,* а это есть поворот на +90° вокруг оси *у* (фиг. 4.8).



*Фиг. 4.8. Поворот на угол α вокруг оси х равнозначен повороту на +90° вокруг оси у (а), за которым следует поворот ни а вокруг оси z' (б), вслед за которым про­исходит поворот на -90° вокруг оси. у" (в).*

Затем во­круг оси *z'* повернемся на угол α. *А* потом повернемся на -90° вокpуг оси *у".*

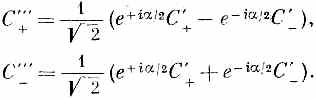
Итог этих трех поворотов тот же самый, что при повороте вокруг оси *х* на угол α*.* Таково свойство пространства. (Все эти сочетания поворотов их результат очень трудно себе представить. Не правда ли, странно, что, живя в трех измерениях, мы все же с трудом воспринимаем, что произойдет, если сперва повернуться так, а потом еще как-нибудь. Вероятно, если бы мы были птицами или рыбами и если а мы на собственном опыте знали, что бывает, когда все время крутишь разные сальто в пространстве, нам было бы легче воспринимать подобные вещи.) Во всяком случае, давайте выведем преобразование для поворота на угол а вокруг оси *х,* пользуясь тем, что нам уже известно. При первом повороте на +90*°* вокруг оси *у* амплитуды следуют закону (4.32). Если повернутые оси обозначить *х'*, y' и z', то последующий поворот на угол а вокруг оси *z* переводит нас в систему отсчета *х". у", z",* для которой

C:\Мои документы\gray.jpg

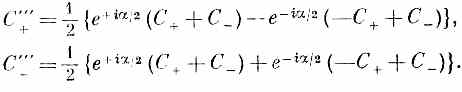
Последний поворот на -90° вокруг оси *у"* переводит нас в систему *х'", у'", z'";* из(4.33) следует

C:\Мои документы\gray.jpg

Сочетая эти два последних преобразования, получаем



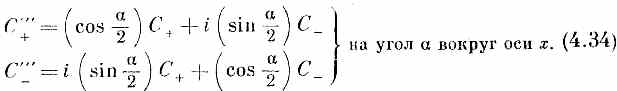
Подставляя сюда вместо *С'+* и С'- (4.32), придем к полному преобразованию



А если вспомнить, что

C:\Мои документы\gray.jpg

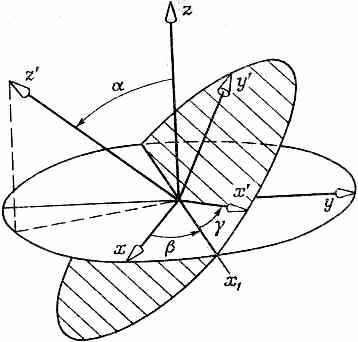
то эти формулы можно записать проще:



Это и есть наше искомое преобразование для поворота вокруг оси *х* на *любой* угол α. Оно лишь чуть посложнее остальных,

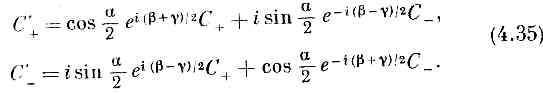
**§ 6. Произвольные повороты**

Теперь уже понятно, как быть с *произвольным* поворотом. Во-первых, заметьте, что любая относительная ориентация двух систем координат может быть описана тремя углами (фиг. 4.9).



*Фиг. 4.9. Ориентацию лю­бой системы координат х'*, *у', г' по отношению к другой системе х, у, z можно опре­делить с помощью углов Эйлера α*, *β,* *γ*.

Если есть система осей *х', у', z',* ориентированных относительно *х, у, z* как угодно, то соотношение между ними можно описать тремя углами Эйлера α, β и γ, определяющими три последовательных поворота, которые переводят систему *х, у,* z в систему *х', у', z' .* Отправляясь от x, *у,* z, мы повора­чиваем нашу систему на угол bets вокруг оси z, перенося ось *х* на линию *х'.* Затем мы проводим поворот на угол а вокруг этой временной оси *х*1*,* чтобы довести ось *z* до *z'.* Наконец, по­ворот вокруг новой оси *z* (т. е. вокруг *z'*) на угол γ переведет ось *х*1в *х', а* [ось](#прим6) *у* в *у'.* Мы знаем преобразования для каж­дого из трех поворотов — они даются формулами (4.19) и (4.34). Комбинируя их в нужном порядке, получаем

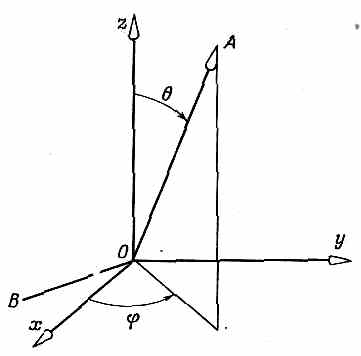


Итак, начав просто с некоторых предположений о свойст­вах пространства, мы вывели преобразование амплитуды при любом повороте. Это означает, что если нам известны ампли­туды того, что любое состояние частицы со спином 1/2 перейдет в один из двух пучков прибора Штерна — Герлаха *S* с осями *х, у, z,* то мы можем подсчитать, какая часть перейдет в каж­дый пучок в приборе *Т* с осями *х', у'* и z'. Иначе говоря, если имеется состояние ψчастицы со спином 1/2, у которого ам­плитуды пребывания вверху и внизу по отношению к оси z системы координат *х, у, z* равны С+=<+|ψ> и С-=<-|ψ>, то тем самым мы знаем амплитуды *С+* и C- пребывания вверху и внизу по отношению к оси *z'* любой другой системы *х', у", z' ,* Четверка коэффициентов в (4.35) — это члены «матрицы преобразования», с помощью которой можно проецировать амплитуды частицы со спином 1/2 в другие системы ко­ординат.

Теперь решим несколько примеров, чтобы посмотреть, как все это работает. Возьмем следующий простой вопрос. Пустим атом со спином 1/2 через прибор Штерна — Герлаха, пропу­скающий только состояние (+z). Какова амплитуда того, что атом окажется в состоянии (+*x*)? Ось +*х —* это все равно, что ось +z' системы, повернутой на 90° вокруг оси *у.* Поэтому в этой задаче проще воспользоваться выражением (4.32), хотя, конечно, можно применить и полное уравнение (4.35). По­скольку *С+*=1 и *С-*=0, то получится *С'+*=1/√2. Вероятности -это квадраты модулей этих амплитуд; таким образом, 50% шансов за то, что частица пройдет сквозь прибор, отбирающий состояние (*+х*)*.* Если бы мы поинтересовались состоянием (-*х*)*,* то амплитуда оказалась бы -1/√2, что опять дало бы вероятность 1/2, чего и следовало ожидать из симметрии про­странства. Итак, если частица находится в состоянии (+z), то ей в равной степени вероятно побывать в состояниях (+*x*) и (-*х*)*.* Но фазы противоположны.

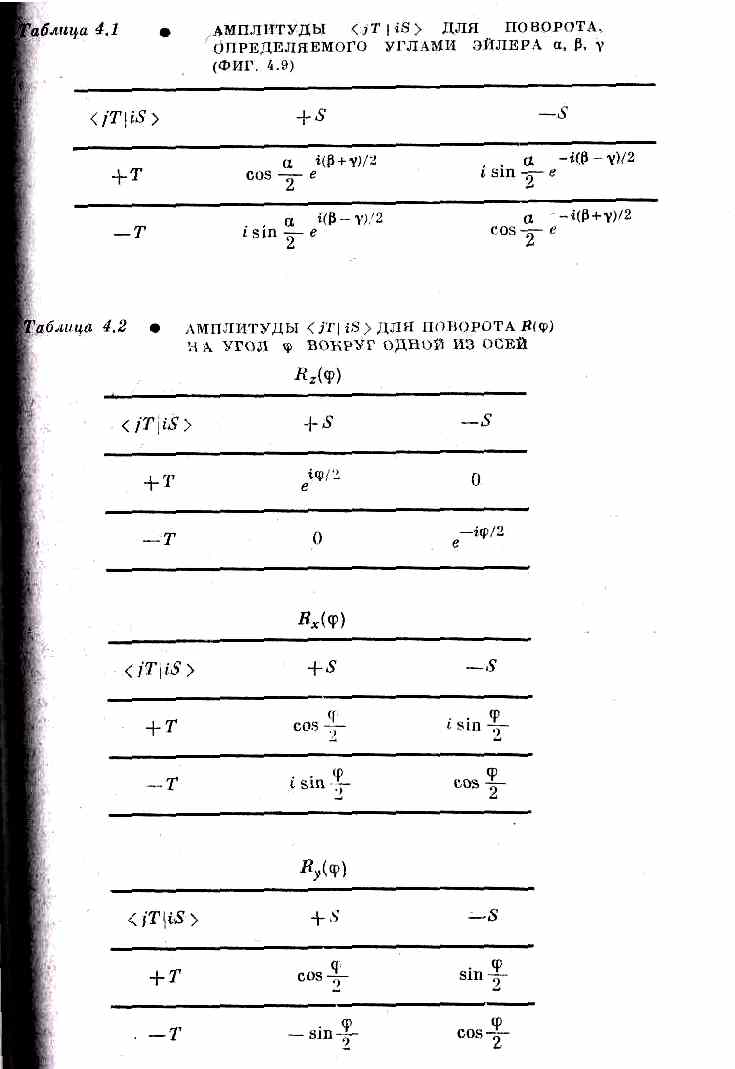
Ось *у* тоже без претензий. Частица в состоянии (+*z*) имеет равные шансы быть в состоянии *(+у)* или (-*у*)*.* Но теперь (согласно формуле для поворота на -90° вокруг оси *х)* амплитуды суть l/√2 и -*i*/√2. В этом случае разница в фа­зах двух амплитуд уже не 180°, как было для (*+х*)и (-*х*)*,* а 90°. В этом-то и проявляется различие между *х* и *у.*

Вот еще пример. Пусть нам известно, что частица со спином 1/2 находится в состоянии ψ, поляризованном вверх относи­тельно оси *А,* определяемой углами θ и ϕ (фиг. 4.10).



*Фиг. 4.10. Ось А, определяе­мая полярными углами θ* *и ϕ*.

Мы хо­тим знать амплитуду <C+|ψ> того, что частица относительно оси *z* окажется в состоянии «вверх», и амплитуду <C-|ψ> того, что она окажется в состоянии «вниз» относительно той же оси *z.* Эти амплитуды мы можем найти, вообразив, что *А* есть ось *z'* системы, у которой ось *х'* направлена произвольно, ска­жем лежит в плоскости, образованной *А* и z. Тогда можно перевести систему *А* в систему *х, у, z* тремя поворотами. Во-первых, надо сделать поворот на -π/2 вокруг оси *A*, что пере­ведет ось *x* в линию *В* на рисунке. Затем повернуть на — 0 вокруг линии *В* (вокруг новой оси *х* системы *А),* чтобы ось *А* попала на ось *z.* И, наконец, повернуть вокруг оси z на угол (π/2-ϕ).



Вспоминая, что вначале было только одно состояние (+) по отношению к *А,* получаем

C:\Мои документы\gray.jpg

Мы хотели бы напоследок подытожить результаты этой главы в форме, которая окажется полезной для нашей даль­нейшей работы. Во-первых, напомним, что наш основной ре­зультат (4.35) может быть записан в других обозначениях. Заметьте, что (4.35)— это то же самое, что и (4.4) Иначе го­воря, в (4.35) коэффициенты при С+=<+S|ψ> и C'-= <-*S*|ψ> суть как раз амплитуды <*jT*|*iS*>в (4.4), амплитуды того, что частица в состоянии *i* по отношению к *S* окажется в состоя­нии *j* по отношению к *Т* (когда ориентация *Т* по отношению к *S* дается углами α, β и γ)*.* Мы их также называли *RTSji* в выра­жении (4.6). (Чего-чего, а обозначений у нас хватало!) Например,C:\Мои документы\gray.jpg— это коэффициент при *С+* в формуле для С- , а именно *i*sin(α/2)exp[*i*(β-γ*)*/2]*.* Поэтому сводку наших ре­зультатов мы можем дать в виде табл. 4.1.

Было бы удобно иметь эти амплитуды расписанными для некоторых особо важных случаев. Пусть *Rz(ϕ)* — поворот на угол ϕ вокруг оси z. Так же можно обозначить и соответ­ствующую матрицу поворота (опуская молчаливо подразу­меваемые индексы *i* и *j*). В том же смысле *Rx(ϕ)* и *Ry(ϕ)* будут обозначать повороты на угол ϕ вокруг оси *х* и оси *у,*

В табл. 4.2 мы приводим матрицы — таблицы амплитуд <*jT*|*iS*>*,* которые проецируют амплитуды из системы *S* в систему *Т,* где *Т* получается из *S* указанным поворотом.

***\* Нетрудно показать, что систему х, у, z можно перевести в систему х', у', z' следующими тремя поворотами вокруг первоначальных осей: 1) повернуть на угол γ вокруг первоначальной оси z; 2) повернуть на угол а вокруг первоначальной оси х; 3) повернуть на угол β вокруг первоначальной оси z.***

***\* Второе решение меняет все знаки у а, b, с, d и отвечает повороту на -270°.***

\* Заметим, что если последовательность малых поворотов приведет в конце концов к первоначальной ориентации предмета, то всегда есть возможность, проследив всю историю, отличить поворот на 360° от по­ворота на 0° (но интересно, что для поворота на 720° это неверно).

***\* Конечно, подошло бы и m=-1/2. Однако из (4.17) ясно, что изме­нение знака просто переопределит понятие «спин вверх».***

\* Можно посмотреть на это и иначе. Мы просто производим преоб­разование к «стандартной форме», описанное в § 2, используя формулу (4.15).

\* Эта глава — не что иное, как весьма абстракт­ное и длинное отступление от основной линии расска­за; в ней нет каких-либо новых идей, которые бы не появлялись иным путем в дальнейших главах. Поэ­тому можете спокойно пропустить ее, а позже, если заинтересуетесь, вернуться.

***Главa 5***

**ЗАВИСИМОСТЬ АМПЛИТУД ОТ ВРЕМЕНИ**

[**§ 1. Покоя****щиеся атомы; стацио­нарные состояния**](#a1)

[**§ 2.Равномерное** **д****ви­жение**](#a2)

[**§ 3.Потен****циальная эн****ергия; сохране­ние энергии**](#a3)

[**§ 4.Силы; кла****ссиче­ски****й предел**](#a4)

[**§ 5. «Прецес****сия» ча­стиц****ы со спином 1/2**](#a5)

*Повторить:* гл. 17 (вып. 2) «Про­странство-время»; гл. 48 (вып. 4) «Биения»

**§ 1. Покоящиеся атомы;** **стационарные состояния**

Мы хотим теперь немного рассказать о том, как ведут себя амплитуды вероятности во вре­мени. Мы говорим «немного», потому что на самом деле поведение во времени с необхо­димостью включает в себя и поведение в про­странстве. Значит, пожелав описать поведение со всей корректностью и детальностью, мы немедленно очутимся в весьма сложном поло­жении. Перед нами возникает наша всегдаш­няя трудность — то ли изучать нечто строго логически, но абсолютно абстрактно, то ли не думать о строгости, а давать какое-то представ­ление об истинном положении вещей, откла­дывая более тщательное исследование на поз­же. Сейчас, говоря о зависимости амплитуд от энергии, мы намерены избрать второй спо­соб. Будет высказан ряд утверждений. При этом мы не будем стремиться к строгости, а просто расскажем вам о том, что было обна­ружено, чтобы вы смогли почувствовать, как ведут себя амплитуды во времени. По мере хода нашего изложения точность описания будет возрастать, так что, пожалуйста, не нервничайте, видя, как фокусник будет извле­кать откуда-то из воздуха разные вещи. Они и впрямь берутся из чего-то неосязаемого — из духа эксперимента и из воображения мно­гих людей. Но проходить все стадии историче­ского развития предмета — дело очень долгое, кое-что придется просто пропустить. Можно было бы погрузиться в абстракции и все строго выводить (но вы вряд ли бы это поняли) или пройти через множество экспериментов, под­тверждая ими каждое свое утверждение. Мы выберем что-то среднее.

Одиночный электрон в пустом пространстве может при некоторых условиях обладать вполне определенной энергией Например, если он покоится (т. е. не обладает ни перемещательным движением, ни импульсом, ни кинетической энергией), то у него есть энергия покоя. Объект посложнее, напри­мер атом, тоже может, покоясь, обладать определенной энергией, но он может оказаться и внутренне возбужденным -возбужденным до другого уровня энергии. (Механизм этого мы опишем позже.) Часто мы вправе считать, что атом в возбужденном состоянии обладает определенной энергией; впрочем, на самом деле это верно только приближенно. Атом не остается возбужденным навечно, потому что он всегда стремится разрядить свою энергию, взаимодействуя с электромагнитным полем. Так что всегда есть некоторая амплитуда того, что возникнет новое состояние — с атомом в низшем состоянии возбуждения и электромагнитным полем в высшем. Полная энергия системы и до, и после — одна и та же, но энергия *атома* уменьшается. Так что не очень точно говорить, что у возбуж­денного атома есть *определенная* энергия; но часто так говорить удобно и не очень неправильно.

[Кстати, почему все течет в одну сторону и не течет в дру­гую? Отчего атом излучает свет? Ответ связан с энтропией Когда энергия находится в электромагнитном поле, то перед ней открывается столько разных путей — столько разных мест, куда она может попасть,— что, отыскивая условие равнове­сия, мы убеждаемся, что в самом вероятном положении поле оказывается возбужденным одним фотоном, а атом — невозбуж­денным. И фотону требуется немалое время, чтобы возвра­титься и обнаружить, что он может возбудить атом обратно, Это полностью аналогично классической задаче: почему уско­ряемый заряд излучает? Не потому, что он «хочет» утратить энергию, нет, ведь на самом-то деле, когда он излучает, энер­гия мира остается такой же, как и прежде. Просто излучение или поглощение всегда идет в направлении роста *энтропии.*

Ядра тоже могут существовать на разных энергетических уровнях, и в том приближении, когда пренебрегают электромагнитными эффектами, мы вправе говорить, что ядро в возбужденном состоянии таким и остается. Хоть мы и знаем, что оно не останется таким навсегда, часто бывает полезно исходить из несколько идеализированного приближения, которое проще рассмотреть. К тому же в некоторых обстоятельствах — это узаконенное приближение. (Когда мы впервые вводили клас­сические законы падения тел, мы не учитывали трения, а ведь почти не бывает так, чтобы трения *вовсе* не было.)

Кроме того, существуют еще «странные частицы» с различными массами. Но более массивные из них распадаются на более легкие, так что опять неправильно будет говорить, будто их энергия точно определена. Это было бы верно, если бы они сохранялись навечно. Так что когда мы приближенно считаем их обладающими определенной энергией, то забываем при этом, что они должны распасться. Но сейчас мы нарочно за­будем про такие процессы, а после, со временем выучимся принимать во внимание и их.

Пусть имеется атом (или электрон, или любая частица), обладающий в состоянии покоя определенной энергией *E*0. Под энергией *Е*0мы подразумеваем массу всего этого, умножен­ную на *с*2. В массу входит любая внутренняя энергия; стало быть, масса возбужденного атома отличается от массы того же атома, но в основном состоянии. *(Основное* состояние означает состояние с наинизшей энергией.) Назовем *Е0* «энергией покоя». Для атома, находящегося в состоянии *покоя,* квантовомеханическая *амплитуда* обнаружить его в каком-то месте *всюду одно и та же;* от положения она *не зависит.* Это, разумеется, означает, что *вероятность обнаружить* атом в любом месте — одна и та же. Но это означает даже большее. *Вероятность* могла бы не зависеть от положения, а *фаза амплитуды* при этом могла бы еще меняться от точки к точке. Но для частицы в покое полная амплитуда всюду одинакова. Однако она за­висит от *времени.* Для частицы в состоянии определенной энер­гии *Е0,* амплитуда обнаружить частицу в точке *(х, у, z)* в момент *t* равна

C:\Мои документы\gray.jpg

где *а —* некоторая постоянная. Амплитуда пребывания в та­кой-то точке пространства для всех точек одинакова, но зато зависит от времени согласно (5.1). Мы просто допустим, что это правило верно всегда.

Можно, конечно, (5.1) записать и так:

C:\Мои документы\gray.jpg

где

C:\Мои документы\gray.jpg

а *М* — масса покоя атомного состояния или частицы. Суще­ствуют три разных способа определения энергии: по частоте амплитуды, по энергии в классическом смысле или по инертной массе. Все они равноценны; это просто разные способы выра­жать одно и то же.

Вам может показаться, что странно представлять себе «частицу», обладающую одинаковыми амплитудами оказаться в пространстве где угодно. Ведь, помимо прочего, мы всегда представляем себе «частицу» как небольшой предмет, располо­женный «где-то». Но не забудьте о принципе неопределенности. Если частица обладает определенной энергией, то и импульс у нее определенный. Если неопределенность в импульсе равна нулю, то соотношение неопределенностей Δ*р*Δ*x*=h говорит, что неопределенность в положении должна быть бесконечной; именно это мы и утверждаем, говоря, что существует одинако­вая амплитуда обнаружить частицу во всех точках простран­ства.

Если внутренние части атома находятся в другом состоянии с другой полной энергией, тогда амплитуда меняется во вре­мени по-другому. А если вы не знаете, в каком состоянии на­ходится атом, то появится некоторая амплитуда пребывания в одном состоянии и некоторая амплитуда пребывания в дру­гом, и у каждой из этих амплитуд будет своя частота. Между этими двумя разными компонентами появится интерференция наподобие биений, которые могут проявиться как переменная вероятность. Внутри атома будет что-то «назревать», даже если он будет «в покое» в том смысле, что его центр масс не будет двигаться. Если же атом обладает только одной определен­ной энергией, то амплитуда дается формулой (5.1) и квадрат модуля амплитуды от времени не зависит. Следовательно, вы видите, что если энергия какой-то вещи определена и если вы задаете вопрос о *вероятности* чего-то в этой вещи, то ответ от времени не зависит. Хотя сами *амплитуды* от времени зависят, но если энергия *определенная,* они изменяются как мнимая экс­понента и абсолютное значение (модуль) их не меняется.

Вот почему мы часто говорим, что атом на определенном энергетическом уровне находится в *стационарном состоянии.* Если вы что-то внутри него измеряете, вы обнаруживаете, что ничего (по вероятности) во времени не меняется. Чтобы вероят­ность менялась во времени, должна быть интерференция двух амплитуд при двух разных частотах, а это означало бы, что неизвестно, какова энергия. У предмета были бы одна ампли­туда пребывания в состоянии с одной энергией и другая ам­плитуда пребывания в состоянии с другой энергией. Так в квантовой механике описывается что-то, если *поведение* этого «чего-то» зависит от времени.

Если имеется случай, когда смешаны два различных со­стояния с разными энергиями, то амплитуды каждого из двух состояний меняются со временем согласно уравнению (5.2), скажем, как

C:\Мои документы\gray.jpg

И если имеется комбинация этих двух состояний, то появится интерференция. Но заметьте, что добавление к обеим энергиям одной и той же константы ничего не меняет. Если кто-то другой пользовался другой шкалой энергий, на которой все энергии сдвинуты на константу (скажем, на *А),* то амплитуды оказаться в этих двух состояниях, с его точки зрения, были бы

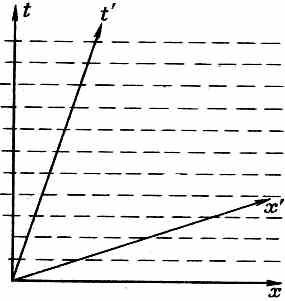
C:\Мои документы\gray.jpg

Все его амплитуды оказались бы умноженными на один и тот же множитель

ехр[-*i(A/h)/t*]*,* и во все линейные комбинации, во все интерференции вошел бы тот же множитель. Вычисляя для определения вероятностей модули, он пришел бы к тем же ответам. Выбор начала отсчета на нашей шкале энергий ничего не меняет; энергию можно отсчитывать от любого нуля. В ре­лятивистских задачах приятнее измерять энергию так, чтобы в нее входила масса покоя, но для многих других нерелятивист­ских целей часто лучше вычесть из всех появляющихся энер­гий стандартную величину. Например, в случае атома обычно бывает удобно вычесть энергию Мsс2, где *Мs—* масса *отдель­ных* его частей, ядра и электронов, отличающаяся, конечно, от массы самого атома. В других задачах полезно бывает вы­честь из всех энергий число *Mgc*2*,* где *Mg—* масса всего атома *в основном* состоянии; тогда остающаяся энергия есть просто энергия возбуждения атома. Значит, порой мы имеем право сдвигать, наш нуль энергии очень и очень сильно, и это все равно ничего не меняет (при условии, что все энергии в данном частном расчете сдвинуты на одно и то же число). На этом мы расстанемся с покоящимися частицами.

**§ 2. Равномерное движение**

Если мы предполагаем, что теория относительности верна, то частица, покоящаяся в одной инерциальной системе, в дру­гой инерциальной системе может оказаться в равномерном движении. В системе покоя частицы амплитуда вероятности для всех *х, у* и *z* одинакова, но зависит от *t. Величина* амплиту­ды для всех *t* одинакова, а *фаза* зависит от *t.* Мы можем по­лучить картину поведения амплитуды, если проведем линии равной фазы (скажем, нулевой) как функций *х* и *t.* Для части­цы в покое эти линии равной фазы параллельны оси *х* и рас­положены по оси *t* на равных расстояниях (показано пунктир­ными линиями на фиг. 5.1).



*Фиг. 5.1.* *Релятивистское преоб­разование амплитуды покоящейся. частицы в систему х—t.*

В другой системе, *х'*, *у', z' , t',* движущейся относительно частицы, скажем, в направлении *х,* координаты *х'* и *t'* некото­рой частной точки пространства связаны с *х* и *t* преобразованием Лоренца. Это преобразование можно изобразить графи­чески, проведя оси *х'* и *t',* как показано на фиг. 5.1 [см. гл. 17 (вып. 2), фиг. 17.2]. Вы видите, что в системе *х'-—t'* точки [рав­ной фазы](#прим1) вдоль оси *t'* расположены на других расстояниях, так что частота временных изменений уже другая. Кроме того, фаза меняется и по *х'.* т. е. амплитуда вероятности должна быть функцией *х'.*

При преобразовании Лоренца для скорости *v* направлен­ной, скажем, вдоль отрицательного направления *х.* время *t* связано со временем *t'* формулой

C:\Мои документы\gray.jpg

и теперь наша амплитуда меняется так:

C:\Мои документы\gray.jpg

В штрихованной системе она меняется в пространстве и во времени. Если амплитуду записать в виде

C:\Мои документы\gray.jpg

то видно, что *Е'р=Е0/√(*1*-v*2/с2). Это энергия, вычисленная по классическим правилам для частицы с энергией покоя *Е0,* движущейся со скоростью *v; p'=E'pv/c2—* соответствующий импульс частицы.

Вы знаете, что *хμ=(t, х, y*, z) и *рμ=(Е, рх, рy* , *рг)* — четырехвекторы, a *pμxμ*= *Et-***р•х** —скалярный инвариант. В системе покоя частицы *pμxμ* просто равно *Et;* значит, при преобразовании в другую систему *Et* следует заменить на

C:\Мои документы\gray.jpg

Итак, амплитуда вероятности для частицы, импульс которой есть **р**, будет пропорциональна

C:\Мои документы\gray.jpg

где *Ер —* энергия частицы с импульсом *р,* т. е.

C:\Мои документы\gray.jpg

а *Е0,* как и прежде, —энергия покоя. В нерелятивистских задачах можно писать

C:\Мои документы\gray.jpg

где *Wp—* избыток (или нехватка) энергии по сравнению с энергией покоя Мsс2 частей атома. В общем случае в *Wp* должны были бы войти и кинетическая энергия атома, и его энергия связи или возбуждения, которые можно назвать «внутренней» энергией. Тогда мы бы писали

C:\Мои документы\gray.jpg

а амплитуды имели бы вид

C:\Мои документы\gray.jpg

Мы собираемся все расчеты вести нерелятивистски, так что именно таким видом амплитуд вероятностей мы и будем поль­зоваться.

Заметьте, что наше релятивистское преобразование снаб­дило нас формулой для изменения амплитуды атома, движу­щегося в пространстве, не требуя каких-либо добавочных до­пущений. Волновое число ее изменений в пространстве, как это следует из (5.9), равно

C:\Мои документы\gray.jpg

а, значит, длина волны

C:\Мои документы\gray.jpg

Это та самая длина волны, которую мы раньше использовали для частиц с импульсом *р.* Именно таким путем де-Бройль впервые пришел к этой формуле. Для движущейся частицы *частота* изменения амплитуды по-прежнему дается формулой

C:\Мои документы\gray.jpg

Абсолютная величина (5.9) равна просто единице, так что для частицы, движущейся с *определенной энергией,* вероят­ность обнаружить ее где бы то ни было - одна и та же повсю­ду и со временем не меняется. (Важно отметить, что амплиту­да это *комплексная* волна. Если бы мы пользовались веще­ственной синусоидой, то ее квадрат от точки к точке менялся бы, что было бы неверно.)

Конечно, мы знаем, что бывают случаи, когда частицы дви­жутся от одного места к другому, так что вероятность зависит от положения и изменяется со временем. Как же нужно опи­сывать такие случаи? Это можно сделать, рассматривая ампли­туды, являющиеся суперпозицией двух или большего числа амплитуд для состояний с определенной энергией. Такое поло­жение мы уже обсуждали в гл. 48 (вып. 4), причем именно для амплитуд вероятности! Мы нашли тогда, что сумма двух ам­плитуд с разными волновыми числами *k* (т. е. импульсами) и частотами ω (т. е. энергиями) приводит к интерференционным буграм, или биениям, так что квадрат амплитуды меняется и в пространстве, и во времени. Мы нашли также, что эти биения движутся с так называемой «групповой скоростью», опреде­ляемой формулой

C:\Мои документы\gray.jpg

где Δk и Δω — разности волновых чисел и частот двух волн. В более сложных волнах, составленных из суммы многих амплитуд с близкими частотами, групповая скорость равна

C:\Мои документы\gray.jpg

Так как ω*=Ер/h,* a *k = p/h,* то

C:\Мои документы\gray.jpg

Но из (5.6) следует, что

C:\Мои документы\gray.jpg

а так как *Ep=Mc2,* то

C:\Мои документы\gray.jpg

а это как раз классическая скорость частицы. Даже применяя нерелятивистские выражения, мы будем иметь

C:\Мои документы\gray.jpg

и

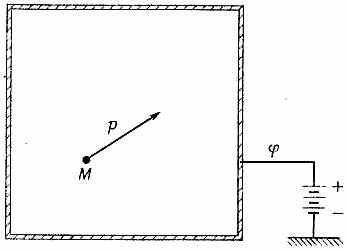
C:\Мои документы\gray.jpg

т. е. опять классическую скорость.

Результат наш, следовательно, состоит в том, что если име­ется несколько амплитуд для чистых энергетических состоянии с почти одинаковой энергией, то их интерференция приводит к «всплескам» вероятности, которые движутся сквозь прост­ранство со скоростью, равной скорости классической частицы с такой же энергией. Но нужно, однако, заметить, что, когда мы говорим, что можем складывать две амплитуды с разными волновыми числами, чтобы получать пакеты, отвечающие дви­жущейся частице, мы при этом вносим нечто новое — нечто, не выводимое из теории относительности. Мы сказали, как ме­няется амплитуда у неподвижной частицы, и затем вывели из этого, как она должна была бы меняться, если бы частица двигалась. Но из этих рассуждений мы *не в состоянии* вывести, что случилось бы, если бы были *две* волны, движущиеся с раз­ными скоростями. Если мы остановим одну из них, мы не смо­жем остановить другую. Так что мы втихомолку добавили *еще одну* гипотезу: кроме того, что (5.9) есть *возможное* реше­ние, мы. допускаем, что у той же системы могут быть еще ре­шения со всевозможными *p* и что различные члены будут интерферировать.

**§ 3. Пoтeнциальная энергия; сохранение энергии**

А теперь мы хотели бы выяснить вопрос о том, что бывает; когда энергия частицы может меняться. Начнем с размышления о частице, которая движется в поле сил, описываемом потен­циалом. Рассмотрим сперва влияние постоянного потенциала. Пусть у нас имеется большой металлический ящик, который мы зарядили до некоторого электростатического потенциала ϕ (фиг. 5.2).



*|Фиг. 5.2. Частица с массой M и импульсом р в области постоянного потенциала.*

Если внутри ящика есть заряженные объекты, то их потенциальная энергия будет равна *q*ϕ; мы обозначим это число буквой *V.* Оно по условию совершенно не зависит от положения самого объекта. От наложения потенциала никаких физических изменений внутри ящика не произойдет, ведь постоянный потенциал ничего не меняет в том, что происходит внутри ящика. Значит, закон, по которому теперь будет меняться амплитуда, вывести никак нельзя. Можно только догадаться. Вот он, правильный ответ — он выглядит примерно так, как и следовало ожидать: вместо энергии нужно поставить сумму потенциальной энергии *V* и энергии *Ер,* которая сама есть сумма внутренней и кинетической энергий. Амплитуда тогда будет пропорциональна

C:\Мои документы\gray.jpg

*Общий принцип* состоит в том, что коэффициент при *t,* который можно было бы назвать со, всегда дается *полной энергией* системы: внутренней энергией («энергией массы») плюс кине­тическая энергия плюс потенциальная энергия:

C:\Мои документы\gray.jpg

Или в нерелятивистском случае

C:\Мои документы\gray.jpg

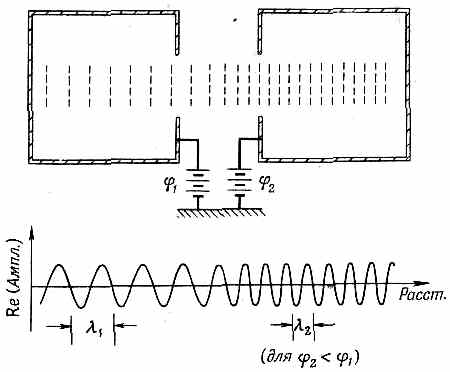
Ну, а что можно сказать о физических явлениях внутри ящика? Если физическое состояние не одно, а несколько, то что мы получим? В амплитуду каждого состояния войдет один и тот же добавочный множитель

*e-(i/h)Vt*

сверх того, что было при *V*=0. Это ничем не отличается от сдвига нуля нашей энергетической шкалы. Получится одинаковый сдвиг всех фаз всех амплитуд, а это, как мы раньше убе­дились, не меняет никаких вероятностей. Все физические яв­ления остаются теми же. (Мы предположили, что речь идет о разных состояниях одного и того же заряженного объекта, так что *q*ϕ у них у всех одинаково. Если бы объект мог менять свой заряд, переходя от одного состояния к другому, то мы пришли бы к совершенно другому результату, но сохранение заряда предохраняет нас от этого.)

До сих пор наше допущение согласовывалось с тем, чего сле­довало ожидать от простого изменения уровня отсчета энер­гии. Но если оно на самом деле справедливо, то обязано вы­полняться и для потенциальной энергии, которая не является просто постоянной. В общем случае *V* может меняться произ­вольным образом и во времени, и в пространстве, и оконча­тельный результат для амплитуды должен выражаться на языке дифференциальных уравнений. Но мы не хотим сразу приступать к общему случаю, а ограничимся некоторым пред­ставлением о том, что происходит. Так что пока мы рассмотрим только потенциал, который постоянен во времени и медленно меняется в пространстве. Тогда мы сможем сравнить между со­бой классические и квантовые представления.

Предположим, что мы размышляем о случае, изображенном на фиг. 5.3, где два ящика поддерживаются при постоянных потенциалах ϕ1 и ϕ2, а в области между ними потенциал плавно меняется от ϕ1 к ϕ2.



*Фиг. 5.3.*  *Амплитуда для частицы, переходящей от одного потенциала к другому.*

Вообразим, что у некоторой частицы есть амплитуда оказаться в одной из этих областей. Допустим так­же, что импульс достаточно велик, так что в любой малой об­ласти, в которой помещается много длин волн, потенциал почти постоянен. Тогда мы вправе считать, что в любой части прост­ранства амплитуда обязана выглядеть так, как (5.18), только *V* в каждой части пространства будет свое.

Рассмотрим частный случай, когда ϕ1=0, так что потен­циальная энергия в первом ящике равна нулю, во втором же пусть *q*ϕ2 будет отрицательно, так что классически частица в нем будет обладать большей кинетической энергией. В клас­сическом смысле она во втором ящике будет двигаться быст­рее, у нее будет, стало быть, и больший импульс. Посмот­рим, как это может получиться из квантовой механики.

При наших предположениях амплитуда в первом ящике Должна была быть пропорциональна

C:\Мои документы\gray.jpg

а во втором

C:\Мои документы\gray.jpg

(Будем считать, что внутренняя энергия не изменяется, а остается в обеих областях одной и той же.) Вопрос заключается в следующем: как эти две амплитуды сопрягаются друг с другом в области между ящиками?

Мы будем считать, что все потенциалы во времени постоянны, так что в условиях ничего не меняется. Затем мы предположим, что изменения амплитуды (т. е. ее фазы) всюду обладают одной и той же *частотой,* потому что в «среде» между ящи­ками нет, так сказать, ничего, что бы зависело от времени. Если в пространстве ничего не меняется, то можно считать, что волна в одной области «генерирует» во всем пространстве вспомогательные волны, которые все колеблются с одинако­вой частотой и, подобно световым волнам, проходящим через покоящееся вещество, не меняют своей частоты. Если частоты в (5.21) и (5.22) одинаковы, то должно выполняться равенство

C:\Мои документы\gray.jpg

Здесь по обе стороны стоят просто классические полные энер­гии, так что (5.23) есть утверждение о сохранении энергии. Иными словами, классическое утверждение о сохранении энер­гии вполне равноценно квантовомеханическому утверждению о том, что частоты у частицы всюду одинаковы, если условия во времени не меняются. Все это согласуется с представлением о том, что *h*ω*=E.*

В том частном случае, когда V1=0, a V2 отрицательно (5.23) означает, что *p*2 больше *р*1,т. е. в области 2 волны короче. Поверхности равной фазы показаны на фиг. 5.3 пунктиром. Там еще вычерчен график вещественной части амплитуды, из которого тоже видно, как уменьшается длин волны при переходе от области 1 в область 2. Групповая скорость волн, равная *р/М,* тоже возрастает так, как и следовало ожидать из классического сохранения энергии, потому что оно просто совпадает с (5.23).

Существует интересный частный случай, когда V2 становится столь большим, что *V*2- *V*1 уже превышает *p*21*/2M.* Тогда *p*22*,* даваемое формулой

C:\Мои документы\gray.jpg

становится *отрицательным.* А это значит, что *р*2— мнимо число, скажем *ip'.* Классически мы бы сказали, что частица никогда не попадет в область 2, ей не хватит энергии, чтобы взобраться на потенциальный холм. Однако в квантовой ме­ханике амплитуда по-прежнему представляется уравнением (5.22); ее изменения в пространстве по-прежнему следуют закону

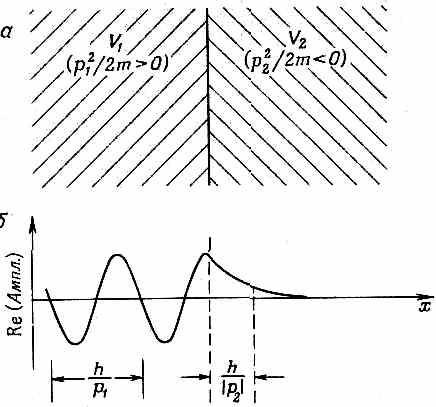
C:\Мои документы\gray.jpg

Но раз *p*2— мнимое число, то пространственная зависимость превращается в вещественную экспоненту. Если, скажем, частица сперва двигалась в направлении *+х,* то амплитуда начнет меняться, как

C:\Мои документы\gray.jpg

С ростом *х* она быстро падает.

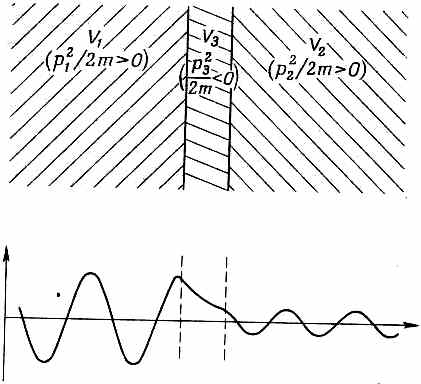
Вообразим, что обе области с разными потенциалами рас­положены очень тесно друг к другу, так что потенциальная анергия внезапно изменяется от *V*1 к *V*2(фиг. 5.4, а).



*Фиг. 5.4. Амплитуда для частицы, приближающейся к сильно отталкивающему потенциалу.*

Начер­тив график вещественной части амплитуды вероятности, Мы получим зависимость, показанную на фиг. 5.4, *б.* Волна в области 1 отвечает частице, пытающейся попасть в область 2, но там амплитуда быстро спадает. Имеется какой-то шанс, что ее заметят в области 2, где классически она *ни за что бы* Не оказалась, но амплитуда этого очень мала (кроме места близ самой границы). Положение вещей очень похоже на то, Что мы обнаружили для полного внутреннего отражения света. Обычно свет не выходит, но его можно все же заметить, если поставить что-нибудь на расстоянии в одну-две длины волны от поверхности.

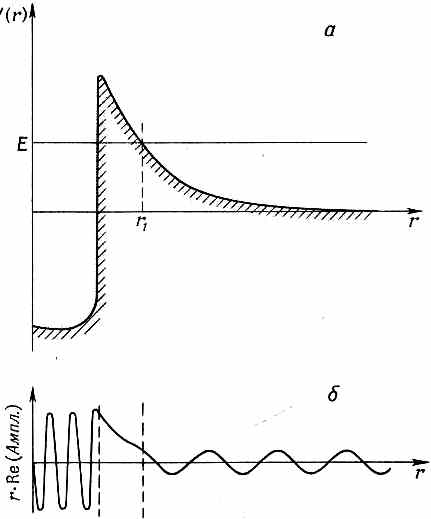
Вспомните, что если поместить вторую поверхность вплот­ную к границе, где свет полностью отражался, то можно до­биться того, чтобы во втором куске вещества все же распро­странялся какой-то свет. То же самое происходит и с частицами в квантовой механике. Если имеется узкая область с таким высоким потенциалом *V,* что классическая кинетическая энер­гия там отрицательна, то частица никогда не пройдет сквозь нее. Но в квантовой механике экспоненциально убывающая амплитуда может пробиться сквозь эту область и дать слабую вероятность того, что частицу обнаружат по другую сторону — там, где кинетическая энергия опять положительна. Все это изображено на фиг. 5.5.



*Фиг. 5.5. Проникновение амплитуды сквозь потенциальный барьер.*

Эффект называется квантовомеханическим «проникновением сквозь барьер».

Проникновение квантовомеханической амплитуды сквозь барьер дает объяснение (или описание) α-распада ядра урана. Кривая зависимости потенциальной энергии α-частицы от рас­стояния от центра показана на фиг. 5.6, *а.*

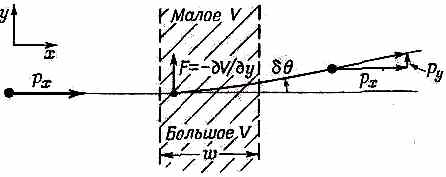


*Фиг. 5.6. Потенциал α-частицы в ядре урана (а) и качественный вид амплитуды вероятности (б).*

Если бы попытаться выстрелить α-частицей с энергией *Е в ядро,* то она почувство­вала бы электростатическое отталкивание от ядерного заряда *z* и по классическим канонам не подошла бы к ядру ближе, чем на такое расстояние *r*1при котором ее полная энергия срав­няется с потенциальной *V.* Но где-то внутри ядра потенциаль­ная энергия окажется намного ниже из-за сильного притяжения короткодействующих ядерных сил. Как же тогда объяс­нить, отчего при радиоактивном распаде мы обнаруживаем α-частицы, которые, первоначально находясь внутри ядра, оказываются затем снаружи него с энергией *Е*?Потому что они. с самого начала обладая энергией *E*, «просочились» сквозь потенциальный барьер. Схематичный набросок амплитуды ве­роятности дан на фиг. 5.6, *б,* хотя на самом деле экспоненци­альный спад много сильнее, чем показано. Весьма примеча­тельно, что среднее время жизни α-частицы в ядре урана до­стигает 41/2 миллиарда лет, тогда как естественные колебания внутри ядра чрезвычайно быстры, их в секунду бывает 1022! Как же можно из 10-22 *сек* получить число порядка 109 лет? Ответ состоит в том, что экспонента дает неслыханно малый множитель порядка 10-45, что и приводит к очень малой, хоть и вполне определенной, вероятности просачивания. Если уж α-частица попала в ядро, то почти нет никакой амплитуды об­наружить ее не в ядре; если, однако, взять таких ядер побольше и подождать подольше, то вам, может быть, повезет и вы уви­дите, как частица выскочит наружу.

**§ 4. Силы; классический предел**

Предположим, что частица движется сквозь область, где есть потенциал, меняющийся поперек движения. Классически мы бы описали этот случай так, как показано на фиг. 5.7.



*Фиг. 5.7. Отклонение частицы поперечным градиентом потенциала.*

Если частица движется в направлении *х* и вступает в область, где имеется потенциал, изменяющийся вдоль *y*, то частица полу­чит поперечное ускорение от силы *F=-дV/дy.* Если сила при­сутствует только в ограниченной области шириной *w,* то она будет действовать только в течение времени *w/v.* Частица получит поперечный импульс

*py= Fw/v*

Тогда угол отклонения δθ будет равен

C:\Мои документы\gray.jpg

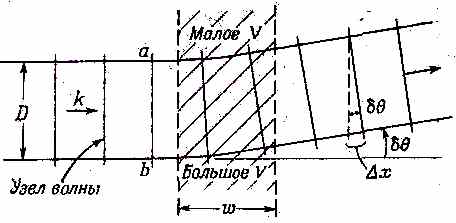
где *р —* начальный импульс. Подставляя вместо *F* число -*дV/дy,* получаем

C:\Мои документы\gray.jpg

Теперь нам предстоит выяснить, удастся ли получить этот результат с помощью представления о том, что волны подчи­няются уравнению (5.20). Мы рассмотрим то же самое явление квантовомеханически, предполагая, что все масштабы в нем намного превосходят длины волн наших амплитуд вероятности. В любой маленькой области можно считать, что амплитуда ме­няется как

C:\Мои документы\gray.jpg

В состоянии ли мы увидеть, как отсюда получится отклонение частиц, когда у *V* будет поперечный градиент? На фиг. 5.8 мы прикинули, как будут выглядеть волны амплитуды вероят­ности.



*Фиг. 5.8. Амплитуда вероятности в области с поперечным градиентом потенциала.*

Мы начертили ряд «узлов волн», которые вы можете считать, скажем, поверхностями, где фаза амплитуды равна нулю. В любой небольшой области длина волны (расстояние между соседними узлами) равна

C:\Мои документы\gray.jpg

где *р* связано с *V* формулой

C:\Мои документы\gray.jpg

В области, где *V* больше, там *р* меньше, а волны длиннее. По­этому направление линий узлов волн постепенно меняется, как показано на рисунке.

Чтобы найти изменение наклона линий узлов волн, заме­тим, что на двух путях *а* и *b* имеется разность потенциалов Δ*V=(дV/дy)D,* а значит, и разница Δ*р* между импульсами. Эту разность можно получить из (5.28):

C:\Мои документы\gray.jpg

Волновое число *p/h* поэтому тоже на разных путях различно, что означает, что фазы растут вдоль них с разной скоростью. Разница в скорости роста фазы есть Δ*k*=Δ*р*/h, и накопленная на всем пути *w* разность фаз будет равна

C:\Мои документы\gray.jpg

Это число показывает, на сколько к моменту выхода из полосы фаза вдоль пути *b* «опережает» фазу вдоль пути *а.* Но на вы­ходе из полосы такое опережение фаз отвечает опережению узла волны на величину

C:\Мои документы\gray.jpg

или

C:\Мои документы\gray.jpg

Обращаясь к фиг. 5.8, мы видим, что новый фронт волны повер­нется на угол δθ, даваемый формулой

C:\Мои документы\gray.jpg

так что мы имеем

C:\Мои документы\gray.jpg

А это совпадает с (5.26), если заменить *р/М* на *v,* а Δ*V/D* на *дV/дy.*

Результат, который мы только что получили, верен лишь, когда потенциал меняется медленно и плавно — в так называе­мом *классическом пределе.* Мы показали, что при этих условиях получим те же движения частиц, что получились бы и из **F**=*m***a**, если предположить, что потенциал дает вклад в фазу ампли­туды вероятности, равный *Vt/h. В классическом пределе кван­товал механика оказывается, в согласии с ньютоновской меха­никой.*

**§ 5. «Прецессия» частицы со спином 1/2**

Заметьте, что мы не предполагали, что потенциальная энер­гия у нас какая-то особая, это просто энергия, производная от которой дает силу. Например, в опыте Штерна — Герлаха энергия имела вид *U*=-**μ•B**; отсюда при наличии у В прост­ранственной вариации и получалась сила. Если бы нам нужно было квантовомеханическое описание опыта, мы должны были бы сказать, что у частиц в одном пучке энергия меняется в одну сторону, а в другом пучке — в обратную сторону, (Маг­нитную энергию *U* можно было бы вставить либо в потенциаль­ную энергию *V,* либо во «внутреннюю» энергию *W*;куда именно, совершенно неважно.) Из-за вариаций энергии волны прелом­ляются, пучки искривляются вверх или вниз. (Мы теперь знаем, что квантовая механика предсказывает то же самое искривле­ние, которое следует и из расчета по классической механике.)

Из зависимости амплитуды от потенциальной энергии также следует, что у частицы, сидящей в однородном магнитном поле, направленном по оси z, амплитуда вероятности обязана ме­няться во времени по закону

C:\Мои документы\gray.jpg

(Можно считать это просто определением μz.) Иначе говоря, если поместить частицу в однородное поле *В* на время τ, то ее амплитуда вероятности умножится на

C:\Мои документы\gray.jpg

сверх того, что было бы без поля. Поскольку у частицы со спи­ном 1/2 величина μz может быть равна плюс или минус какому-то числу, скажем μ, то у двух мыслимых состояний в однород­ном поле фазы будут меняться с одинаковой скоростью в про­тивоположные стороны. Амплитуды помножатся на

C:\Мои документы\gray.jpg

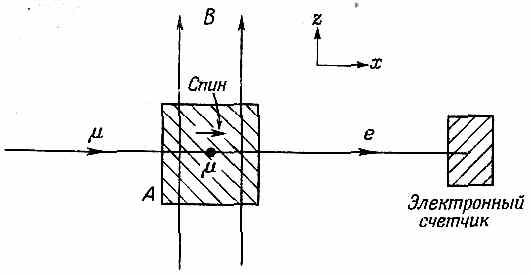
Этот результат приводит к интересным следствиям. Пусть частица со спином 1/2 находится в каком-то состоянии, которое не есть ни чистое состояние со спином вверх, ни чистое состоя­ние со спином вниз. Его можно описать через амплитуды пре­бывания в этих двух состояниях. Но в магнитном поле у этих двух состояний фазы начнут меняться с разной скоростью. И если мы поставим какой-нибудь вопрос насчет амплитуд, то ответ будет зависеть от того, сколько времени частица провела в этом поле.

В виде примера рассмотрим распад мюона в магнитном поле. Когда мюоны возникают в результате распада π-мезонов, они оказываются поляризованными (иными словами, у них есть предпочтительное направление спина). Мюоны в свою очередь распадаются (в среднем через 2,2 *мксек),* испуская электрон и пару нейтрино:

C:\Мои документы\gray.jpg

При этом распаде оказывается, что (по крайней мере при высо­ких энергиях) электроны испускаются преимущественно в на­правлении, противоположном направлению спина мюона.

Допустим затем, что имеется экспериментальное устройство (фиг. 5.9): поляризованные мюоны входят слева и в блоке ве­щества *А* останавливаются, а чуть позже распадаются.

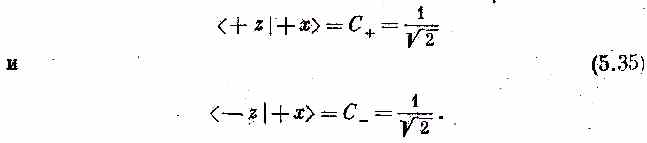


*Фиг.*. *5.9.* *Опыт с распадом мюона.*

Испу­скаемые электроны выходят, вообще говоря, во всех мыслимых направлениях. Представим, однако, что все мюоны будут вхо­дить в тормозящий блок *А* так, что их спины будут повернуты в направлении *х.* Без магнитного поля там наблюдалось бы какое-то угловое распределение направлений распада; мы же хотим знать, как изменилось бы это распределение при наличии магнитного поля. Можно ожидать, что оно как-то будет меняться со временем. То, что получится, можно узнать, спросив, ка­кой будет в каждый момент амплитуда того, что мюон обнару­жится в состоянии (+*x*).

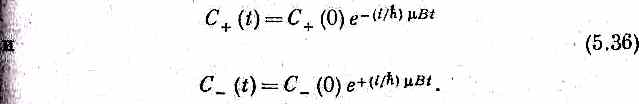
Эту задачу можно сформулировать следующим образом: пусть известно, что в момент t=0 спин мюона направлен по +*х*; какова амплитуда того, что в момент т он окажется в том же состоянии? И хотя мы не знаем правил поведения частицы со спином 1/2 в магнитном поле, перпендикулярном к спину, но зато мы знаем, что бывает с состояниями, когда спины на­правлены вверх или вниз по полю,— тогда их амплитуды ум­ножаются на выражение (5.34). Наша процедура тогда будет состоять в том, чтобы выбрать представление, в котором ба­зисные состояния — это направления спином вверх или спи­ном вниз относительно *z* (относительно направления поля). И любой вопрос тогда сможет быть выражен через амплитуды этих состояний.

Пусть |ψ(t)> представляет состояние мюона. Когда он вхо­дит в блок *А,* его состояние есть |ψ (0)>, а мы. хотим знать |ψ (τ)> в более позднее время τ. Если два базисных состояния обозначить (+z) и (-z), то нам известны амплитуды <+z|ψ (0)> и <-z|ψ (0)> — они известны потому, что мы знаем, что |ψ (0)> представляет собой состояние со спином в направлении (+*x*). Из предыдущей главы следует, что эти [амплитуды равны](#прим2)

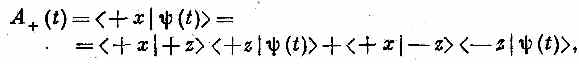


Они оказываются одинаковыми. Раз они относятся к положе­нию при t=0, обозначим их *С*+(0) и *С*-(0).

Далее, мы знаем, что из этих двух амплитуд получится со временем. Из (5.34) следует



Но если нам известны *C+(t)* и *C-(t),* то у нас есть все, чтобы знать условия в момент *t.* Надо преодолеть только еще одно затруднение: нужна-то нам вероятность того, что спин (в мо­мент *t*)окажется направленным по +*х.* Но наши общие пра­вила учитывают и эту задачу. Мы пишем, что амплитуда пре­бывания в состоянии *(+x)* в момент *t* [обозначим ее *A+*(*t*)]есть



или

C:\Мои документы\gray.jpg

Опять пользуясь результатом последней главы (или лучше равенством

C:\Мои документы\gray.jpg\* из гл. 3), мы пишем

C:\Мои документы\gray.jpg

Итак, в (5.37) все известно. Мы получаем

C:\Мои документы\gray.jpg

или

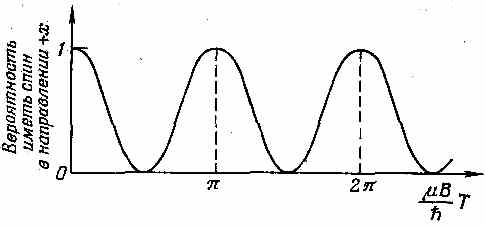
C:\Мои документы\gray.jpg

Поразительно простой результат! Заметьте: ответ согласуется с тем, что ожидалось при *t=*0*.* Мы получаем *А+*(0)*=*1*,* и это вполне правильно, потому что сперва и было предположено, что при *t*=0 мюон был в состоянии (+*x*).

Вероятность *Р+* того, что мюон окажется в состоянии *(+х)* в момент *t,* есть *(А*+)2, т. е.

C:\Мои документы\gray.jpg

Вероятность колеблется от нуля до единицы, как показано на фиг. 5.10.



*Фиг. 5.10. Временная зависимость вepoятности того. что частица со спином 1/2 окажется в состоянии (+) по отношению оси х.*

Заметьте, что вероятность возвращается к единице при μ*Bt/h=π (а не при* 2π). Из-за того что косинус возведен в квадрат, вероятность повторяется с частотой *2μВ/h.*

Итак, мы обнаружили, что шанс поймать в электронном счетчике, показанном на фиг. 5.9, распадный электрон перио­дически меняется с величиной интервала времени, в течение которого мюон сидел в магнитном поле. Частота зависит от магнитного момента (Л. Именно таким образом и был на самом деле измерен магнитный момент мюона.

Тем же методом, конечно, можно воспользоваться, чтобы ответить на другие вопросы, касающиеся распада мюона. На­пример, как зависит от времени *t* шанс заметить распадный электрон в направлении *у,* под 90° к направлению *х,* но по-прежнему под прямым углом к полю? Если вы решите эту за­дачу, то увидите, что вероятность оказаться в состоянии *(+у)* меняется как *cos2*{(μ*Bt/h*)-(π/4)}; она колеблется с тем же периодом, но достигает максимума на четверть цикла позже, когда μВt/h=π/4. На самом-то деле происходит вот что: с те­чением времени мюон проходит через последовательность со­стояний, отвечающих полной поляризации в направлении, ко­торое непрерывно вращается вокруг оси *z.* Это можно описать, говоря, что *спин прецессирует* с частотой

C:\Мои документы\gray.jpg

Вам должно становиться понятно, в какую форму выли­вается квантовомеханическое описание, когда мы описываем поведение чего-либо во времени.

\* Если вы пропустили гл. 4, то можете пока просто считать (5.35) невыведенным правилом. Позже, в гл. 8, мы разберем прецессию спина подробнее, будут получены и эти амплитуды.

***\* Мы предполагаем, что фазы обязаны иметь одно и то же значение в соответствующих точках в двух системах координат. Впрочем, это весьма тонкое место, поскольку в квантовой механике фаза в значитель­ной степени произвольна. Чтобы до конца оправдать это предположение, нужны более детальные рассуждения, учитывающие интерференцию двух или нескольких амплитуд.***

***Г лава 6***

**ГАМИЛЬТОНОВА МАТРИЦА**

[**§ 1. Амплитуды и** **векторы**](#а1)

[**§ 2. Разложени****е век­торов состояний**](#а2)

[**§ 3. Каковы базисны****е состояния мира?**](#а3)

[**§ 4. Как состояния мен****яются во времени**](#а4)

[**§ 5. Гамильтонова** **матрица**](#а5)

[**§ б. Молекул****а аммиака**](#а6)

*Повторить:* гл. 49) (вып. 4) «Собст­венные колеба­ния»

**§ 1. Амплитуды и векторы**

Прежде чем приступить к основной теме этой главы, мы хотели бы изложить несколько математических идей, которые часто встреча­ются в книгах по квантовой механике. Знание их облегчит вам чтение других книг или статей по этому предмету. Первая идея — это тесное математическое подобие между уравнениями квантовой механики и формулами для скаляр­ного произведения двух векторов. Вы помните, что если χи ϕ — два состояния, то амплитуда начать в ϕ и кончить в χ может быть записана в виде суммы (по полной совокупности базис­ных состояний) амплитуд перехода из ϕ в одно из базисных состояний и затем из этого базис­ного состояния уже в χ:

C:\Мои документы\gray.jpg

Мы объясняли это при помощи прибора Штер­на — Герлаха, но сейчас напоминаем вам, что в этих приборах нет нужды. Уравнение (6.1) — это математический закон, который верен всег­да, все равно, есть ли у нас фильтровальное оборудование или нет; вообще совсем не обя­зательно воображать наличие какого-то при­бора. Можно рассматривать это просто как формулу для амплитуды <χ|ϕ>.

Сопоставим (6.1) с формулой для скалярного произведения двух векторов В и А. Если В и А — обычные трехмерные векторы, то ска­лярное произведение можно написать так:

C:\Мои документы\gray.jpg

считая, что символ еi обозначает любой из трех единичных векторов в направлениях *х.у* и z. Тогда **B•e1**— это то, что обычно называют *Вх, а* **В•е2**— то, что обычно называют *By* , и т,д. Значит, (6.2) эквивалентно

*ВхАх+ВуАу+ВгАг,*

а это и есть скалярное произведение **В•А**.

Сравнение (6.1) с (6.2) обнаруживает следующую аналогию. Состояния χ и ϕ соответствуют двум векторам А и В. Базис­ные состояния *i* отвечают специальным векторам **е**i, к которым мы относим все прочие векторы. Любой вектор может быть представлен как линейная комбинация трех «базисных векто­ров» **е**i. Далее, если вам известны коэффициенты при каждом «базисном векторе» в этой комбинации, т. е. три его компонен­ты, то вы знаете о векторе все. Точно так же любое квантовомеханическое состояние может быть полностью описано ампли­тудами <*i*|ϕ> перехода в базисные состояния, и если эти коэф­фициенты вам известны, то вы знаете все, что можно знать о состоянии. Из-за этой тесной аналогии то, что мы назвали «состоянием», часто именуют «вектором состояния».

Раз базисные векторы **еi** перпендикулярны друг другу, то существует соотношение

C:\Мои документы\gray.jpg

Это соответствует соотношению (3.25) между базисными со­стояниями *i*

C:\Мои документы\gray.jpg

Теперь вы понимаете, почему говорят, что базисные состоя­ния *i* все «ортогональны друг другу».

Между (6.1) и скалярным произведением есть одно мини­мальное различие. У нас

C:\Мои документы\gray.jpg

а в векторной алгебре

**А•В = В•А.**

В квантовой механике с ее комплексными числами мы обязаны выдерживать порядок множителей, а в скалярном произве­дении порядок неважен.

Теперь рассмотрим такое векторное уравнение:

C:\Мои документы\gray.jpg

оно немножко необычно, но тем не менее верно. И означает оно то же самое, что и

C:\Мои документы\gray.jpg

Заметьте, однако, что в (6.6) входит величина, *отличная* от скалярного произведения. Скалярное произведение — это про­сто *число,* а (6.6) — *векторное* уравнение. Одним из великих приемов векторного анализа было абстрагировать от уравне­ний идею самого *вектора.* Равным образом можно попытаться абстрагировать от уравнения (6.1) то, что в квантовой механике является аналогом «вектора». И это действительно можно сделать. Уберем <χ| по обе стороны (6.1) и напишем такое урав­нение (не пугайтесь — это просто обозначение, и через пару минут вы узнаете, что означают эти символы):

C:\Мои документы\gray.jpg

Скобку <χ|ϕ> представляют себе состоящей из двух полови­нок. Вторую половинку |ϕ> называют кет, а первую <χ| на­зывают *брэ* (поставленные рядом они образуют брэ-кет≡bгаcket, скоб-ка≡скобка — обозначение, предложенное Дираком); полусимволы <χ| и |ϕ> также называют *векторами состоя­ний.* Это не числа отнюдь, а нам вообще-то нужно, чтобы результаты наших расчетов выражались числами; стало быть, такие «незаконченные» величины представляют собой проме­жуточные шаги в расчетах.

До сих пор мы все свои результаты выражали с помощью чисел. Как же мы умудрялись избегать векторов? Забавно, что даже в обычной векторной алгебре *можно сделать* так, чтобы во все уравнения входили только числа. Например, вместо векторного уравнения типа

**F*=****т****а*** всегда можно написать

**C•F**=**C•**(m**a**).

Получается уравнение, связывающее скалярные произведения и справедливое для *любого* вектора С. Но если оно верно для любого С, то едва ли имеет смысл вообще писать это **С**!

Теперь вернемся к (6.1). Это уравнение справедливо при *любых* χ*.* Значит, для сокращения письма мы должны просто *убрать* χ и написать вместо (6.1) уравнение (6.8). Это уравне­ние снабдит нас той же самой информацией, *лишь бы* мы пони­мали, что его всегда надлежит «завершить», «умножив слева на...», т. е. просто дописав некоторое <χ| по обе стороны знака равенства. Следовательно, (6.8) означает в точности то же, что и (6.1),— ни более ни менее. Если вы предпочитаете числа, вы подставляете то <χ|, которое вам нужно.

Может быть, вы в уравнении (6.8) уже нацелились и на ϕ? Раз (6.8) справедливо при *любом* ϕ, зачем же нам *его* держать? И действительно, Дирак предлагает абстрагироваться и от ϕ, так что остается только

C:\Мои документы\gray.jpg

Вот он каков — великий закон квантовой механики! Этот закон утверждает, что если вы вставите любые два состояния χ и ϕ с обеих сторон, слева и справа, то опять *вернетесь* к (6.1). Уравнение (6.9) вообще-то не очень полезно, но зато является неплохим напоминанием о том, что уравнение выполняется для любых двух состояний.

**§ 2. Разложение векторов состояний**

Посмотрим на уравнение (6.8) еще раз; его можно рассмат­ривать следующим образом. Любой вектор состояния |ϕ> может быть представлен в виде линейной комбинации совокуп­ности базисных «векторов» с подходящими коэффициентами, или, если угодно, в виде суперпозиции «единичных векторов» в подходящих пропорциях. Чтобы подчеркнуть, что коэффи­циенты <*i*|ϕ> — это просто обычные (комплексные) числа, на­пишем

<*i*|ϕ>=*Сi*. Тогда (6.8) совпадает с

C:\Мои документы\gray.jpg

Такое же уравнение можно написать и для всякого другого вектора состояния, скажем для |χ>, но, конечно, с другими коэффициентами, скажем с *Di.* Тогда будем иметь

C:\Мои документы\gray.jpg

где *Di —* это просто амплитуды <*i*|χ>.

Представим, что мы начали бы с того, что в (6.1) абстра­гировались бы от ϕ. Тогда мы бы имели

C:\Мои документы\gray.jpg

Вспоминая, что <χ|*i*>=<*i*|χ>\*, можно записать это в виде

C:\Мои документы\gray.jpg

А теперь интересно вот что: чтобы обратно получить <χ|ϕ>, можно просто *перемножить* (6.13) и (6.10). Только, делая это, надо быть внимательным к индексам суммирования, потому что они в разных уравнениях разные. Перепишем сперва (6.13):

C:\Мои документы\gray.jpg

Это ничего не меняет. Объединяя с (6.10), получаем

C:\Мои документы\gray.jpg

Вспомните, однако, что <j|*i*>=δij, так что в сумме останутся только члены с *j=i.* Выйдет

C:\Мои документы\gray.jpg

где, как вы помните, *d\*i*=<*i*|χ>\*=<χ|*i*>, а *Ci*=<i|ϕ>. Опять мы являемся свидетелями тесной аналогии со скалярным произведением

C:\Мои документы\gray.jpg

Единственная разница — что *Di* нужно комплексно сопрягать. Значит, (6.15) утверждает, что если разложить векторы со­стояний <χ| и |ϕ> по базисным векторам <*i|* или |*i*), то ампли­туда перехода из ϕ в χ дается своего рода скалярным произве­дением (6.15). А это просто (6.1), записанное в других символах. Мы ходим по кругу, привыкая к новым символам.

Может быть, стоит подчеркнуть, что в то время, как про­странственные трехмерные векторы выражаются через *три* ортогональных единичных вектора, базисные векторы |*i*> квантовомеханических состояний должны пробегать всю совокуп­ность, отвечающую данной задаче. В зависимости от положения вещей в нее может входить два или три, пять или бесконечно много базисных состояний.

Мы говорили также о том, что происходит, когда частицы проходят через прибор. Если мы выпустим частицы в опре­деленном состоянии ϕ, затем проведем их через прибор, а после проделаем измерение, чтобы посмотреть, находятся ли они в состоянии χ, то результат будет описываться амплитудой

C:\Мои документы\gray.jpg

Такой символ не имеет близкого аналога в векторной алгебре. (Он ближе к тензорной алгебре, но эта аналогия не так уж полезна.) Мы видели в гл. 3 [формула (3.32)], что (6.16) можно переписать так:

C:\Мои документы\gray.jpg

Это пример двукратного применения основного правила (6.9).

Мы обнаружили также, что если вслед за прибором *А* по ставить другой прибор 5, то можно написать

C:\Мои документы\gray.jpg

Это опять-таки следует прямо из предложенного Дираком метода записи уравнения (6,9). Вспомните, что между *В* и *A* всегда можно поставить черту (|), которая ведет себя совсем как множитель единица.

Кстати говоря, об уравнении (6.17) можно рассуждать и иначе. Предположим, что мы рассуждаем о частице, попадающей в прибор *А* в состоянии ϕ и выходящей из него в состоянии ψ. Мы можем задать себе такой вопрос: можно ли найти такое состояние ψ, чтобы амплитуда перехода от ψк χ тождественно совпадала с амплитудой <χ|*A*|ϕ>?Ответ гласит да. Мы хотим, чтобы (6.17) заменилось уравнением

C:\Мои документы\gray.jpg

Конечно, этого можно достичь, если взять

C:\Мои документы\gray.jpg

что и определяет собой ψ. «Но оно не определяет собой ψ,— скажете вы,— оно определяет только <*i*|ψ>». Однако <i|ψ> *все же определяет* ψ; ведь если у вас есть все коэффициенты, связывающие ψ с базисными состояниями *i*, то ψ опреде­ляется однозначно. И действительно, можно поупражняться с нашими обозначениями и записать (6.20) в виде

C:\Мои документы\gray.jpg

А раз это уравнение справедливо при всех г, то можно просто писать

C:\Мои документы\gray.jpg

Теперь мы вправе сказать: «Состояние ψ — это то, что полу­чается, если начать с ϕ и пройти сквозь аппарат *A*».

Еще один, последний пример полезных уловок. Начинаем опять с (6.17). Раз это уравнение соблюдается при любых χ и ϕ, то их обоих можно сократить! [Получаем](#прим1)

C:\Мои документы\gray.jpg

Что это значит? Только то, что получится, если вернуть на свои места ϕ и χ. В таком виде это уравнение «недокончено» и неполно. Если умножить его «справа» на |ϕ>, то оно превра­щается в

C:\Мои документы\gray.jpg

а это снова то же уравнение (6.22). В самом деле, мы бы могли просто убрать из (6.22) все *j* и написать

C:\Мои документы\gray.jpg

Символ *А —* это не амплитуда и не вектор; это вещь осо­бого рода, именуемая *оператором.* Он — нечто, что «опериру­ет» над состоянием, чтобы создать новое состояние; уравнение (6.25) говорит, что |ψ)> — это то, что получается, если *А* дей­ствует на |ϕ>. Это уравнение тоже нужно считать недокончен­ным, открытым, пока слева оно не умножится на какое-то «брэ», скажем на <χ|, и не обратится в

C:\Мои документы\gray.jpg

Оператор *А,* разумеется, полностью описывается тем, что за дается матрица амплитуд <*i*|*A*|*j*>;ее также пишут в виде *Аij—* через любую совокупность базисных векторов.

Все эти математические обозначения на самом деле ничего нового не вносят. Единственный резон, почему мы их ввели,— мы хотели показать, как пишутся обрывки уравнений, потому что во многих книжках вы встретите уравнения, написанные в неполном виде, и нет причин вам пугаться, увидев их. Если вы захотите, вы всегда сможете дописать те части, которых не хватает, и получить уравнение, связывающее числа. Оно будет выглядеть более привычно.

Кроме того, как вы увидите, обозначения «брэ» и «кет» очень удобны. Прежде всего мы теперь сможем указывать со­стояния, задавая их вектор состояния. Когда мы захотим вести речь о состоянии с определенным импульсом **р**, то скажем: «состояние

|**р**>». Или будем говорить о некотором произволь­ном состоянии |ψ>. Для единообразия мы всегда, говоря о состоянии, будем употреблять «кет» и писать |ψ>. (Конечно, этот выбор совершенно произволен; в равной мере мы могли бы остановиться и на «брэ» <ψ|.)

**§ 3. Каковы базисные состояния мира?**

Мы обнаружили, что всякое состояние в мире может быть представлено в виде суперпозиции (линейной комбинации с подходящими коэффициентами) базисных состояний. Вы вправе спросить, во-первых: *каких именно* базисных состояний? Что ж, возможностей здесь немало. Можно, например, взять проек­цию спина на направление z или на некоторое другое направ­ление. Имеется очень-очень много различных *представлений*— аналогов различных *систем координат,* которые можно при­менять для представления обычных векторов. Затем можно спросить: с *какими* коэффициентами их брать? А это уж за­висит от физических обстоятельств. Различные совокупности коэффициентов отвечают разным физическим условиям. Здесь важно знать одну вещь — «пространство», в котором вы ра­ботаете, иными словами, знать, что эти базисные состояния означают физически. Так что первое, что вы, вообще говоря, должны знать,— это на что похожи базисные состояния. Тогда вам станет понятно, как описывать положение вещей на языке этих базисных состояний.

Мы хотели бы чуть-чуть заглянуть вперед и немножко по­говорить о том, каким скорей всего окажется общее квантовомеханическое описание природы — во всяком случае, каким оно будет, судя по нынешним физическим представлениям. Первым делом надо решиться на тот или другой выбор пред­ставления базисных состояний (всегда ведь возможны различ­ные представления). Например, для частицы со спином 1/2 можно использовать плюс- и минус-состояния относительно оси *z.* В оси z нет ничего особенного — можете выбрать любую ось, какую вам захочется. Но для единообразия мы всегда будем брать ось *z.* Начнем со случая одного электрона. Наряду с двумя возможностями для спина (вверх и вниз по оси z) электрон имеет еще импульс. Мы выбираем совокупность ба­зисных состояний, по одному на каждое значение импульса. А что если у электрона нет определенного импульса? Ничего страшного: мы ведь говорим только, каковы *базисные* состоя­ния. Если у электрона не будет определенного импульса, то у него какая-то амплитуда будет иметь один импульс, а какая-то — другой и т. д. А если он вертится не обязательно вверх спином, то у него есть какая-то амплитуда вертеться при этом импульсе спином вверх, а какая-то — вниз и т. д. Для пол­ного описания электрона, *насколько нам сейчас известно,* требуется только, чтобы базисные состояния описывались *импульсом* и *спином.* Значит, одна из приемлемых совокуп­ностей базисных состояний |*i*> для отдельного электрона ука­зывает различные значения импульса и еще направление, куда смотрит спин,— вверх или вниз. Различные смеси амплитуд, т. е. различные сочетания чисел *С,* описывают различные об­стоятельства. Что делает тот или иной электрон, описывается тем, что сообщается, с какой амплитудой у него спин может быть вверх, а с какой — вниз, и при этом импульс будет равен тому или иному числу, и так для всех мыслимых импульсов. Вы теперь видите, что требуется для полного квантовомеханического описания отдельного электрона.

А как обстоит дело с системами нескольких электронов? В этих случаях базисные состояния становятся сложнее. Пусть электронов пара. Во-первых, имеются четыре мыслимых состоя­ния по отношению к спину: у обоих электронов спины вверх, или у первого вверх, а у второго вниз, или у первого вниз, а у второго вверх, или у обоих вниз. Кроме того, нужно ука­зать, что у первого электрона импульс **p**1 а у второго импульс **р2.** Базисные состояния для двух электронов требуют указания двух импульсов и двух значков для спина. Для семерки элект­ронов нужно указать семь пар таких чисел.

Если же имеются протон и электрон, то нужно указать на­правление спина протона и его импульс и направление спина электрона и его импульс. По крайней мере, в каком-то при­ближении это так. *Мы на самом деле не знаем,* каким является правильное представление для нашего мира. Мы начинаем с предположения, что если указать спин и импульс электрона и то же самое для протона, то получатся базисные состояния; все это очень хорошо, но как быть с «протоньими внутренно­стями»? В самом деле, рассудим следующим образом. В атоме водорода, в котором имеются один протон и один электрон, приходится описывать множество различных базисных состояний, отмечать направления вверх и вниз у спинов про­тона и электрона и всевозможные импульсы протона и электро­на. Затем имеются различные комбинации амплитуд *Сi*;все вместе они описывают характер атома водорода в тех или иных состояниях. Но представьте, что мы смотрим на целый атом водорода, как на «частицу». Если бы мы не знали, что он со­стоит из протона и электрона, то могли бы сказать: «О, я знаю, какие у него базисные состояния — они соответствуют разным импульсам атома водорода». Но это на самом деле не так, ведь у атома водорода есть какие-то внутренние части. Значит, у него могут быть различные состояния с разной внутренней энергией, и описание реальной природы потребовало бы даль­нейших подробностей.

То же и с протоном. Вопрос стоит так: есть ли у протона внутренние части? Должны ли мы описывать протон, задавая все мыслимые состояния протонов, мезонов или странных ча­стиц? Мы этого не знаем. И даже хотя мы допускаем, что элект­рон прост и все, что можно о нем сказать,— это задать его импульс и спин, но ведь не исключена возможность завтра открыть наличие внутри электрона каких-то колесиков и ше­стеренок. А это будет означать, что наше представление не­полно, или неверно, или неточно, так же как и представление атома водорода, описывающее только его импульс, было бы неполным, потому что оно пренебрегало бы тем фактом, что атом водорода может оказаться возбужденным изнутри. Если электрон тоже может оказаться возбужденным изнутри и превратиться еще во что-то, например в мюон, то его следовало бы описывать не простым заданием состояний новой частицы, а, вероятно, в терминах более сложных внутренних колесиков. *Главная сегодняшняя проблема в изучении фундаментальных частиц* и состоит в том, чтобы открыть, каковы правильные представления для описания природы. В настоящее время мы полагаем, что для электрона достаточно указывать его импульс и спин. Но мы полагаем также, что существует идеализирован­ный протон, имеющий при себе свои π-мезоны, свои *K*-мезоны и т. д., и все они должны быть отмечены. Но ведь отмечать несколько десятков частиц смысла мало! Вопрос о том, *что есть* фундаментальная частица, а что — не фундаментальная,— вопрос, о котором столько сейчас говорится,— это вопрос о том, на что будет похоже окончательное *представление* в окон­чательном квантовомеханическом описании мира. Будет ли такая вещь, как импульс электрона, все еще способна описы­вать природу? И вообще нужно ли весь вопрос ставить именно таким образом! Такие мысли беспрерывно возникают в любом научном исследовании. Во всяком случае, проблема нам по­нятна — как найти представление? Но ответа мы не знаем. Мы даже не знаем, «в этом ли состоит» проблема или нет; но если проблема в этом, то сперва нужно попытаться узнать, «фунда­ментальна» или нет каждая отдельная частица.

В нерелятивистской квантовой механике, где энергии не очень высоки и где вы не затрагиваете внутреннего устройства странных частиц и т. п., вы можете делать весьма сложные расчеты, не заботясь об этих деталях. Вы можете просто оста­новиться на импульсах и спинах электронов и ядер и все будет в порядке. В большинстве химических реакций и других низко­энергетических событий в ядрах ничего не происходит; они не возбуждаются. Дальше, если атом водорода движется мед­ленно и если он спокойно стукается о другие атомы водорода и ничего внутри него не возбуждается, не излучается, никаких сложностей не происходит, а все остается в основном состоя­нии энергии внутреннего движения, — в этом случае вы мо­жете пользоваться приближением, при котором об атоме во­дорода говорят как об отдельном предмете, или частице, не за­ботясь о том, что он *может* что-то внутри себя с собой сделать. Это будет хорошим приближением до тех пор, пока кинетиче­ская энергия в любом столкновении будет заметно меньше 10 *эв,* т. е. энергии, требуемой для того, чтобы возбудить атом водо­рода до следующего внутреннего состояния. Мы часто будем прибегать к приближению, при котором исключается возмож­ность внутреннего движения, тем самым уменьшая число де­талей, которые должны быть учтены в наших базисных состояниях. Конечно, при этом мы опускаем кое-какие явления, которые проявляются (как правило) при каких-то высших энер­гиях, но такое приближение сильно упрощает анализ физиче­ских задач. Например, можно рассуждать о столкновении двух атомов водорода при низкой энергии (или о любом химическом процессе), не заботясь о том, что атомные ядра могут возбуж­даться. Итак, подведем итог. Когда мы вправе пренебречь влиянием любых внутренних возбужденных состояний части­цы, мы вправе выбрать базисную совокупность из состояний с определенным импульсом и z-компонентой момента количе­ства движения.

Первой проблемой при описании природы является отыска­ние подходящего представления для базисных состояний. Но это только начало. Надо еще уметь сказать, что «случится». Если известны «условия» в мире в один момент, то мы хотим знать условия в более поздний момент. Значит, надо также найти законы, определяющие, как все меняется со временем. Мы теперь обращаемся ко второй части основ квантовой меха­ники — к тому, как состояния меняются во времени.

**§ 4. Как состояния меняются во времени**

Мы уже говорили о том, как отображать ход событий, где мы что-то пропускаем через прибор. Но самый привлекатель­ный, самый удобный для рассмотрения «опыт» состоит в том, что вы останавливаетесь и ждете несколько минут, т. е. вы приготовляете состояние ϕ и, прежде чем проанализировать его, оставляете его в покое. Быть может, вы оставите его в покое в каком-то электрическом или магнитном поле — все зависит от физических обстоятельств. Во всяком случае, ка­кими бы ни были условия, вы от момента *t*1до момента *t*2 ос­тавляете объект на свободе. Допустим, что он выпущен из на­шего первого прибора в состоянии ϕ в момент *t*1*.* А затем он проходит через «прибор», в котором он находится до момента t2. Во время такой «задержки» могут продолжаться различные события, прилагаться внешние силы,— словом, что-то в это время случается. После такой задержки амплитуда того, что этот объект обнаружится в состоянии χ, уже не та же самая, какой она была бы, если бы задержки не было. Так как «ожи­дание» — это просто частный случай «прибора», то можно опи­сать то, что происходит, задав амплитуду в том же виде, как в уравнении (6.17). Поскольку операция «ожидания» представляет особую важность, мы вместо *А* обозначим ее *U,* а чтобы отмечать начальный и конечный моменты *t*1 и *t*2, будем писать *U (t*2*, t*1*).* Интересующая нас амплитуда — это

C:\Мои документы\gray.jpg

Как и всякая подобная амплитуда, она может быть представ­лена в той или иной базисной системе в виде

C:\Мои документы\gray.jpg

Тогда *U* описывается заданием полной совокупности амплитуд — матрицы

C:\Мои документы\gray.jpg

Кстати, следует отметить, что матрица <*i*|*U(t*2*, t*1|*j*> могла бы дать гораздо больше всяких деталей, чем нам обычно нужно. Теоретик высокого класса, работающий в физике высоких энергий, рассматривает примерно такие проблемы (потому что именно так обычно ставятся эксперименты): он начинает с двух частиц, скажем с протона и протона, налетающих друг на друга из бесконечности. (В лаборатории обычно одна частица покоится, другая же вылетает из ускорителя, кото­рый по атомным масштабам пребывает в бесконечности.) Они сталкиваются, и в итоге появляются, скажем, два *К* -мезона, шесть π-мезонов и два нейтрона с определенными импульсами в определенных направлениях. Какова амплитуда того, что это случится? Математика здесь выглядит так. Состояние ϕ отмечает спины и импульсы сближающихся частиц. а χ — это сведения о том, что получается в конце. К примеру, с какой амп­литудой вы получите шесть мезонов, идущих в таких-то и та­ких-то направлениях, а два нейтрона, вылетающих вот в этих направлениях и со спинами, торчащими так-то и так-то. Ины­ми словами, χ отмечается заданием всех импульсов, спинов и т. п. конечных продуктов. И вот работа теоретика состоит в том, чтобы подсчитать амплитуду (6.27). Однако на самом деле его интересует только частный случай, когда t1=-∞, а t2 =+∞. (У нас не бывает экспериментальных данных о де­тальном ходе процесса, известно только, что вошло и что вышло. Предельный случай *U* (t2, *t*1)при t1→-∞ и t2→+∞ обозначается буквой *S;* теоретик нуждается в величине

<χ|*S*|ϕ>.

Или, если пользоваться формой (6.28), ему нужно вычислить матрицу

*<i*|*S*|*j>,*

называемую *S-матрицей.* Стало быть, если вы увидите физика-теоретика, который меряет шагами комнату и говорит: «Мне нужно только вычислить *S*-матрицу», — то вы теперь уже будете понимать, над чем он ломает голову.

Как анализировать S-матрицу, т. е. как указать законы для нее,— вопрос интересный. В релятивистской квантовой механике при высоких энергиях это делается одним способом, в нерелятивистской же квантовой механике — другим, более удобным. (Он годится и в релятивистском случае, но перестает быть таким удобным.) Состоит он в том, чтобы вывести *U*-мат­рицу для небольших интервалов времени, т. е. для близких t2 и t1. Если мы сможем найти последовательность таких *U* для последовательных интервалов времени, то сможем проследить за тем, как все меняется в зависимости от времени. Сразу же ясно, что для теории относительности этот способ не очень хорош, потому что не так уж просто указать, как «одновремен­но» все всюду выглядит. Но не стоит нам думать об этом; нашей заботой будет только нерелятивистская механика.

Рассмотрим матрицу *U* для задержки от *t*1до *t*3*,* где *t*3 больше *t*2*.* Иными словами, возьмем три последовательных момента: *t*1 меньше *t*2, *t*2 меньше *t*3*.* Тогда мы утверждаем, что матрица, которая тянется от *t*1до *t*3*,* получается *перемноже­нием* подряд всего того, что происходит при задержке от *t*1 до *t*2*,* и затем от *t*2до *t*3*.* Это в точности то же самое, что было с двумя последовательными приборами *В* и *А.* Тогда, следуя обозначениям, принятым в гл. 3, § 6, мы можем написать

C:\Мои документы\gray.jpg

Иначе говоря, можно проанализировать любой интервал вре­мени, если мы умеем анализировать последовательность про­межуточных коротких интервалов. Мы просто перемножаем все куски; это и есть способ нерелятивистского анализа кван­товой механики.

Итак, задача состоит в том, чтобы узнать матрицу *U*(*t*2*, t*1) для бесконечно малого интервала времени — для *t*2=*t*1+Δ*t*. Спросим себя: если сейчас у нас есть состояние ϕ, то как оно будет выглядеть через бесконечно малое время Δ*t*? Посмотрим, как это можно расписать. Обозначим состояние в момент *t* через |ψ(*t*)> (мы указываем зависимость ψ от времени, чтобы было совершенно ясно, что речь идет об условиях в момент *t).* Теперь зададим вопрос: каково будет положение вещей через короткое время Δ*t*? Ответ таков:

C:\Мои документы\gray.jpg

Здесь имеется в виду то же, что и в (6.25), а именно, что амплитуда обнаружить *χ* в момент *t+*Δ*t* есть

C:\Мои документы\gray.jpg

Поскольку мы еще не очень хорошо разбираемся в этих абстрактных вещах, то давайте спроецируем наши амплитуды в определенное представление. Умножая обе части (6.31) на <*i*|, получаем

C:\Мои документы\gray.jpg

Можно также разложить и |ψ(t)> на базисные состояния и написать

C:\Мои документы\gray.jpg

Понять это можно так. Если через *Ci(t)=*<*i|*ψ|(*t*)> обозна­чить амплитуду пребывания в базисном состоянии *i* в момент *t,* то можно считать эту амплитуду (помните, это просто *число*!) меняющейся во времени. Каждое *Сi* становится функцией времени *t.* Кроме того, у нас есть информация о том, *как* амп­литуды *Сi* меняются во времени. Каждая амплитуда в момент *(t+*Δ*t)* пропорциональна *всем прочим* амплитудам в момент *t,* умноженным на ряд коэффициентов. Обозначим *U*-матрицу через *Uij*, считая, что

*Uij=<i|U|j*>*.*

Тогда (6.34) можно записать так:

C:\Мои документы\gray.jpg

Вот как будет выглядеть динамика квантовой механики.

Нам пока мало известно об *Uij.* Мы знаем только, что при Δ*t,* стремящемся к нулю, ничего не должно произойти, просто должно получиться начальное состояние. Значит, *Uij*→1 и *Uij*→0 при *i≠j.* Иными словами, *Uij*→*δij* при Δ*t*→0. Кроме того, мы вполне вправе предположить, что при малых *At* каж­дый из *Uij* обязан отличаться от δ*ij* на величину, пропорцио­нальную Δ*t;* так что можно писать

C:\Мои документы\gray.jpg

Однако обычно по историческим и по иным причинам из коэф­фициентов *Кij* [выносят множитель](#прим2)

(-*i/h)* ; предпочитают писать

C:\Мои документы\gray.jpg

Это, разумеется, то же самое, что и (6.36). Если угодно, это просто определение коэффициентов *Hij*(*t*).Члены *Hij* — это как раз производные по *t*2от коэффициентов *Uij*(*t*2*, t*1)*,* вычисляемые при *t*2*=t*1*=t,*

Подставляя в (6.35) этот вид *U*, получаем

C:\Мои документы\gray.jpg

Суммируя члены с δ*ij*, получаем просто *Ci*(*t*)*,* что можно пере­нести в другую сторону уравнения. После деления на Δ*t* мы распознаем в этом производную

C:\Мои документы\gray.jpg

или

C:\Мои документы\gray.jpg

Вы помните, что *Сi*(*t*) — это амплитуда <*i|*ψ> обнаружить состояние ψ в одном из базисных состояний *i* (в момент *t).* Значит, уравнение (6.39) сообщает нам, как каждый из коэф­фициентов <*i|*ψ> меняется со временем. Но это все равно, что сказать, что (6.39) сообщает нам, как со временем меня­ется состояние ψ, раз мы описываем ψ через амплитуды < *i*|ψ>. Изменение ψ со временем описывается через матрицу *Нij,* которая, конечно, должна включать все то, что мы делали с системой, чтобы вызвать ее изменения. Если мы знаем матрицу *Hij ,* которая содержит в себе всю физику явления и может, вообще говоря, зависеть от времени, то у нас есть полное опи­сание поведения системы во времени. Таким образом, (6.39)— это квантовомеханический закон для динамики мира.

(Нужно сказать, что мы всегда будем выбирать совокуп­ность базисных состояний, которые фиксированы и со временем не меняются. Иногда используют такие базисные состояния, которые сами меняются. Однако это все равно, что пользова­ться в механике вращающейся системой координат, а мы не хотим входить в подобные тонкости.)

**§ 5. Гамилътонова матрица**

Идея, стало быть, заключается в том, что для квантовомеханического описания мира нужно выбрать совокупность базисных состояний *i* и написать физические законы, задавая матрицу коэффициентов *Нij*. Тогда у нас будет все, что нужно,— мы сможем отвечать на любой вопрос о том, что случится. Нам остается выучить правила, по которым находят *Н* в соответ­ствии с данной физической обстановкой: какое *Н* отвечает маг­нитному полю, какое электрическому и т. д. Это самая труд­ная часть дела. К примеру, для новых странных частиц мы со­вершенно не представляем, какие *Нij* употреблять. Иными словами, никто не знает *полного Hij* для всего мира. (Частично трудность заключается в том, что едва ли можно надеяться на открытие *Нij,* раз никому не известно, каковы базисные со­стояния!) Мы действительно владеем превосходными прибли­жениями для нерелятивистских явлений и некоторых других особых случаев. В частности, мы знаем вид *Нij,* требуемый для движений электронов в атомах — для описания химии. Но мы не знаем полного, истинного *Н* для всей Вселенной.

Коэффициенты *Hij* называют *гамильтоновой матрицей,* или, короче, просто *гамильтонианом.* (Как получилось, что Гамильтон, работавший в 30-х годах прошлого века, дал свое имя квантовомеханической матрице,— история длинная.) Много лучше было бы называть ее *энергетической матрицей* по при чинам, которые станут ясны, когда мы поработаем с ней. Итак все сошлось на гамильтониане. *Как узнать гамильтониан* — *вот в чем вопрос!*

У гамильтониана есть одно свойство, которое выводится сразу же:

*Н\*ij=Hji.* (6.40)

Это следует из того, что полная вероятность пребывания си­стемы *хоть в каком-то* состоянии не должна меняться. Если вначале у вас была частица (или любой объект, или весь мир), то с течением, времени она пропасть не может. Полная вероят­ность ее *где-то* найти равна

C:\Мои документы\gray.jpg

что не должно меняться со временем. Если это обязано выпол­няться для любого начального условия ϕ, то уравнение (6.40) тоже должно соблюдаться.

В качестве первого примера возьмем случай, когда физические условия не меняются со временем; мы имеем в виду *внешние* физические условия, так что *Н* не зависит от времени никаких магнитов никто не включает и не выключает. Выберем также систему, для описания которой хватает одного базисного состояния; такое приближение годится для покоящегося атома водорода и сходных систем. Уравнение (6.39) тогда утверж­дает, что

C:\Мои документы\gray.jpg

Только одно уравнение — и все! Если *Н*11постоянно, это диф­ференциальное уравнение легко решается, давая

C:\Мои документы\gray.jpg

Так зависит от времени состояние с определенной энергией *Е=Н*11*.* Вы видите, почему *Нij* следовало бы называть энер­гетической матрицей: она обобщает понятие энергии на бо­лее сложные случаи.

Вслед за этим, чтобы еще лучше разобраться в смысле уравнений, рассмотрим систему с двумя базисными состояниями.

Тогда (6.39) читается так:

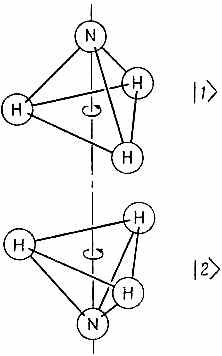
C:\Мои документы\gray.jpg

Если все *Н* опять не зависят от времени, то эти уравнения легко решить. Для интереса займитесь этим сами, а мы позже еще вернемся к ним. Вот вы уже и можете вести расчеты по кван­товой механике, зная об *Н* только то, что оно не зависит от времени!

**§ 6. Молекула аммиака**

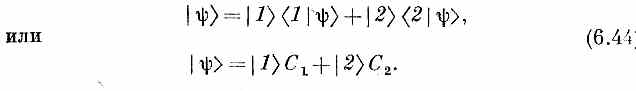
Теперь мы хотим продемонстрировать, как динамическое уравнение квантовой механики может быть использовано для описания какой-то физической обстановки. Мы выбрали ин­тересный и простой пример, в котором, сделав некоторые ра­зумные предположения о гамильтониане, сможем вывести кое-какие важные (и даже практически важные) результаты. Возьмем случай, когда достаточно двух состояний,— это мо­лекула аммиака.

Молекулу аммиака образуют один атом азота и три атома водорода, плоскость которых проходит мимо атома азота, так что молекула имеет форму пирамидки (фиг. 6.1, *а).*



*Фиг. 6.I. Два равноценных геометрических расположения молекулы аммиака.*

Эта мо­лекула, как и всякая другая, обладает бесконечным количест­вом состояний. Она может вращаться вокруг какой угодно оси; двигаться в любом направлении, вибрировать и т. д. и т. п. Значит, это вовсе не система с двумя состояниями. Но мы сде­лаем следующее приближение: предположим, что все прочие степени свободы закреплены и не связаны с теми, которые нас сейчас интересуют. Будем считать, что молекула может только вращаться вокруг оси симметрии (как показано на рисунке), что импульс ее переносного движения равен нулю и что ее колебания очень слабы. Это фиксирует все условия, кроме одного: *для, атома азота все еще существуют два возможных положения —* он может оказаться по одну сторону плоскости атомов водорода, а может оказаться и по другую (фиг. 6.1). Так что мы будем рассуждать о молекуле, как если бы она была системой с двумя состояниями. Под этим подразумева­ется, что существуют только два состояния, о которых реально следует заботиться, все же прочее предполагается зафиксиро­ванным. Как видите, если даже известно, что молекула вращается вокруг оси с определенным моментом количества дви­жения и что она движется с определенным импульсом и колеб­лется определенным образом, то все равно еще остаются два Допустимых состояния. Будем говорить, что молекула нахо­дится в состоянии |1>, когда азот «вверху» (фиг. 6.1, а) и в состоянии |2>, когда азот «внизу» (фиг. 6.1, *б).* Состояния |*1*> и |*2*> в нашем анализе поведения молекулы аммиака можно принять за совокупность базисных состояний В каждый момент истинное состояние |ψ> молекулы может быть представлено заданием *C*1=<1|ψ> — амплитуды пребывания в состоянии *\1* и *С*2=<2|ψ> — амплитуды пребывания в состоянии |2>. Тогда, используя (6.8), вектор состояния |ψ> можно записать так:



Но вот что интересно: если известно, что молекула в опреде­ленный момент была в определенном состоянии, то в следующий момент она может уже *не быть* в том же состоянии. Два *С*-коэффициента меняются со временем в соответствии с уравнениями (6.43), которые верны для любой системы с двумя состояниями. Предположим, к примеру, что вы сделали какое-то наблюде­ние (или как-то отобрали молекулы), так что *знаете,* что *пер­воначально* молекула находилась в состоянии |1>. Чуть позже уже появляются некоторые шансы засечь ее в состоянии |2>. Чтобы узнать, сколь велики эти шансы, нужно решить диф­ференциальное уравнение, которое говорит, как амплитуды меняются со временем.

Единственная трудность в том, что мы не знаем, что ставить вместо коэффициентов *Нij* в (6.43). Но кое-что мы все же *можем* сказать. Предположим, что, если уж молекула оказалась в со­стоянии *\1* >, тогда у нее не будет никакого шанса когда-либо по­пасть в состояние |2>, И наоборот. Тогда *H*12 и *H*21 будут оба равны нулю, и (6.43) примет вид

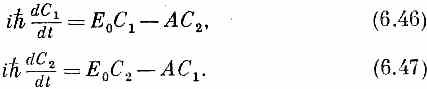
C:\Мои документы\gray.jpg

Эти уравнения легко решить; получается

C:\Мои документы\gray.jpg

Это просто амплитуды *стационарных* состояний с энергиями *E*1*=H*11и *E*2=*H*22. Еще мы знаем, что у молекулы аммиака состояния *|*1>и *|*2>обладают определенной симметрией. Если природа ведет себя более или менее разумно, то матричные элементы *Н*11и *H*22должны равняться друг другу. Мы обозна­чим их через *Е*0*,* потому что они соответствуют энергии, ко­торой обладали бы состояния, будь *H*12 и *H*21 равны нулю.

Но (6.45) не отражает того, что на самом деле бывает с аммиаком. Оказывается, что аммиак имеет возможность про­толкнуть свой азот мимо трех водородов и перебросить его по ту сторону. Это очень трудно: чтобы азоту пройти полпути, нужна немалая энергия. Как же он может пройти на другую сторону, если он не располагает достаточной энергией? Просто имеется *некоторая* амплитуда того, что он *проникнет* сквозь энергетический барьер. В квантовой механике разрешается быстро проскакивать через энергетически нелегальную об­ласть. Стало быть, существует небольшая амплитуда того, что молекула, начав с состояния |1>, перейдет в состояние |2>. Коэффициенты *Н*12и *Н*21на самом деле не равны нулю. И опять из симметрии ясно, что они должны быть одинаковы, по край­ней мере по величине. И действительно, мы уже знаем, что вообще *Нij* равняется комплексно сопряженной величине *Нji,* т. е, они могут отличаться только фазой. Оказывается, как вы потом увидите, что без потери общности можно положить эти коэффициенты равными друг другу. Позднее нам будет удоб­нее считать их равными отрицательному числу; мы примем поэтому *H*12=*H*21=-*А.* Тогда получится следующая пара уравнений:



Эти уравнения достаточно просты и могут быть решены разным путем. Удобно решать их так. Складывая их, по­лучаем

C:\Мои документы\gray.jpg

с решением

C:\Мои документы\gray.jpg

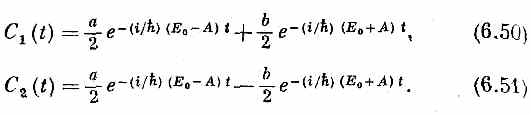
Вычитая затем (6.47) из (6.46), получаем

C:\Мои документы\gray.jpg

что дает

C:\Мои документы\gray.jpg

Две постоянные интегрирования мы обозначили *а* и *b;* их надо выбрать так, чтобы получились подходящие начальные условия данной физической задачи. Наконец, складывая и вычитая (6.48) и (6.49), получаем *C*1и *С*2:



Они отличаются только знаком при втором слагаемом.

Решения-то мы получили, но что они значат? (В квантовой механике трудность не только в том, чтобы получить решения но и в том, чтобы разобраться в их смысле!) Заметьте, что при *b=*0оба решения обладают одинаковой частотой ω*=(E0-A)/h* Если все меняется с одной частотой, это значит, что система пребывает в состоянии с определенной энергией, в данном слу­чае с энергией *(Е0-А).* Значит, существует стационарное состояние с такой энергией; в нем обе амплитуды *С*1и *C*2равны друг другу. Мы приходим к выводу, что *молекула аммиака обладает определенной энергией (Е0*-*А),* если для атома азота одинакова амплитуда оказаться «вверху» и «внизу».

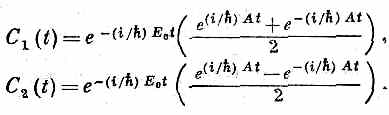
Имеется другое допустимое стационарное состояние, когда а=0; тогда обе амплитуды обладают частотой *(E*0*+A)/h.* Зна­чит, имеется другое состояние с определенной энергией *(Е0+А),* когда две амплитуды равны, но отличаются знаком: *C*2*=-C*1*.* Вот и все состояния с определенной энергией. В следующей главе мы поговорим о состояниях молекулы аммиака подроб­нее; здесь же мы отметим еще только некоторые особенности.

Мы приходим к заключению, что *из-за того,* что имеется некоторая вероятность перескока атома азота из одного по­ложения в другое, энергия молекулы равна не просто *Е*0*,* как можно было ожидать, но обладает *двумя* энергетическими уровнями (*Е*0*+А*)и (*Е*0*-А*)*.* Каждое из возможных состояний молекулы, какую бы энергию оно ни имело, «расщепляется» на два уровня. Мы говорим «каждое из состояний», потому что, как вы помните, мы выбрали какое-то определенное состояние вращения с определенной внутренней энергией и т. д. И для каждых мыслимых условий подобного рода возникает (из-за возможности переворота молекулы) пара энергетических уров­ней.

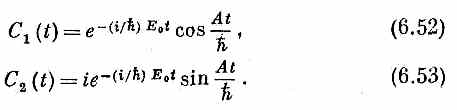
Теперь поставим следующий вопрос. Пусть мы *знаем,* что при *t=*0молекула находится в состоянии *|*1>, т. е. что *С*1{0)=1 и С2(0)=0. Какова вероятность того, что молекула будет обна­ружена в момент *t* в состоянии |2> или же что она окажется в этот момент в состоянии |1>? Наши начальные условия го­ворят нам, какими должны быть *а* и *b* в (6.50) и (6.51). Полагая *t=0,* имеем

C:\Мои документы\gray.jpg

Значит, *а*=*b*=1. Подставляя их в формулы для *С*1*(t)* и *С*2*(t)* и вынося общий множитель, получаем



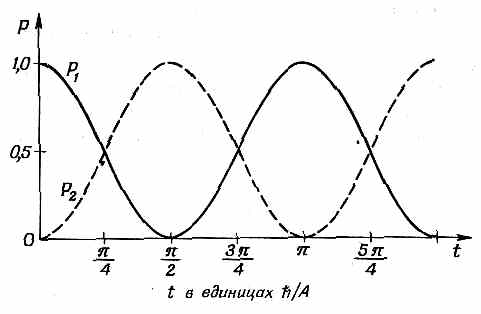
Это можно переписать так:



Величина обеих амплитуд гармонически изменяется во времени. Вероятность того, что молекула будет обнаружена в со­стоянии |2> в момент *t,* равна квадрату модуля *C*2*(t):*

C:\Мои документы\gray.jpg

Она, как и следует, начинается с нуля, растет до единицы и затем колеблется вперед и назад между нулем и единицей, как показано на кривой, обозначенной *P*2, на фиг. 6.2.



*Фиг. 6.2. p1— вероятность того, что молекула аммиака, находившаяся при t=0 в состоянии |1>, бу­дет обнаружена в момент t тоже в состоянии |1>; Р2— вероятность того, что она будет обнаружена в состоянии |2>.*

Вероят­ность остаться в состоянии |1> тоже, конечно, не остается равной единице. Она «перекачивается» во второе состояние до тех пор, пока вероятность увидать молекулу в первом состоя­нии не обратится в нуль, как показано на кривой *Р*1фиг. 6.2. Вероятность попросту переливается туда и обратно между этими двумя состояниями.

Еще раньше мы видели, что бывает, если качаются два одинаковых маятника, слегка связанные друг с другом [см. гл.49 (вып.4)]. Когда мы отводим в сторону один из них и отпускаем, он колеблется, но затем постепенно начинает колебаться дру­гой и вскоре забирает себе всю энергию. Затем процесс обра­щается, и энергию отбирает первый маятник. В точности то же самое происходит и здесь. Скорость, с какой происходит обмен энергией (быстрота просачивания «колебаний»), зависит от связи между маятниками. Кроме того, как вы помните, при двух маятниках существуют два определенных типа движений (каждый с определенной частотой), которые мы назвали фун­даментальными типами колебаний. Если отклонить оба маят­ника вместе, они колеблются с одной частотой. Если же отклонить один в одну сторону, а другой — в другую, то появляется иной стационарный тип колебаний и тоже с определенной частотой. С тем же мы встретились и сейчас — молекула аммиака математически походит на пару маятников. Существуют две частоты *(E*0*+A)/h* и *(Е*0*-A)/h,* при которых они колеблются либо разом, либо навстречу друг другу.

Сходство с маятником ненамного глубже принципа, что у оди­наковых уравнений и решения одинаковы. Линейные уравнения для амплитуд (6.39) очень похожи на линейные уравнения для гармонических осцилляторов. (В действительности именно этой причине обязана успехом наша классическая теория пока­зателя преломления, в которой квантовомеханический атом мы заменяли гармоническим осциллятором, хотя классически неразумно говорить об электронах, циркулирующих вокруг ядра.) Толкнув атом азота в одну сторону, вы получите *супер­позицию* этих двух колебаний и тем самым своеобразные бие­ния, потому что система *не будет находиться* в том или ином состоянии с определенной частотой. Однако расщепление уров­ней энергии молекулы аммиака — это строго квантовомеханический эффект.

Расщепление уровней энергии молекулы аммиака имеет важные практические применения, которые мы опишем в сле­дующей главе. Наконец-то у нас будет пример практической физической задачи, которую мы сможем понять при помощи квантовой механики!

***\* Здесь небольшая неприятность с обозначениями. В этом множителе i означает мнимую единицу √-1, а не индекс i, относящийся к i-му базисному состоянию! Надеемся, это не слишком смутит вас.***

***\* Вы можете оказать, что надо писать не просто А, но |А|. Но тогда это будет похоже на символ «абсолютного значения А». Поэтому обычно черточки опускают. Черточка (|) вообще ведет себя очень похоже на множитель единица.***

***Глава 7***

# АММИАЧНЫЙ МАЗЕР

[**§ 1. Состояния** **моле­кулы аммиака**](#a1)

[**§ 2. Молекула в стат****и­ческом электриче­ском поле**](#a2)

[**§ З. Переходы в поле,** **зависящем от вре­мени**](#a3)

[**§ 4.Перехо****ды при резонансе**](#a4)

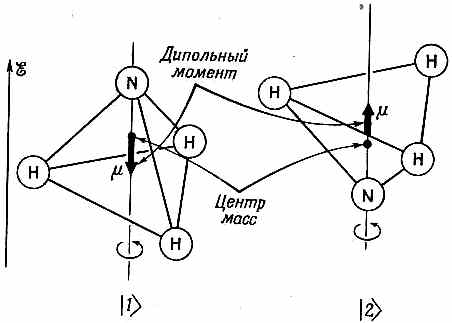
[**§ 5. Переходы вне резо****нанса**](#a5)

[**§ 6. Погл****ощение света**](#a6)

**§ 1. Состояния молекулы аммиака**

В этой главе мы хотим обсудить применение квантовой механики в одном практическом устройстве — в аммиачном мазере. Вас может удивить, отчего это мы бросаем на полпути наше изложение формального аппарата кван­товой механики и обращаемся к частной задаче. Но позже вы увидите, что многие черты этой частной задачи сплошь и рядом встречаются и в общей теории квантовой механики, так что детальное изучение задачи многому нас научит. Аммиачный мазер — это устройство для генерирования электромагнитных волн. Его действие основано на свойствах молекулы аммиака, о которых вкратце говорилось в предыдущей главе. Поэтому сначала мы под­ведем итоги тому, что нам уже известно.

Молекула аммиака имеет много состояний. Но мы будем считать ее системой с двумя состоя­ниями (двухуровневой); сейчас нас интересует лишь то, что бывает, когда молекула находится в любом заданном состоянии вращения или посту­пательного движения. Физическую модель этих двух состояний можно наглядно представить себе следующим образом. Если вращать моле­кулу аммиака вокруг оси, проведенной через атом азота перпендикулярно плоскости атомов водорода, как показано на фиг. 7.1, мы обна­ружим, что существуют два сорта состояний, которые не переходят друг в друга при таких поворотах и отличаются положением атома азота.



*Фиг. 7.1. Физическая модель двух базисных состояний молекулы аммиака. Электрические дипольные моменты этих состояний рав­ны μ.*

Азот может быть либо по одну сторону плоскости атомов водорода, либо по другую. Эти два состояния мы обозначаем |1> и |2>. Их мы выберем в качестве совокупности ба­зисных состояний в нашем анализе поведения молекулы аммиака.

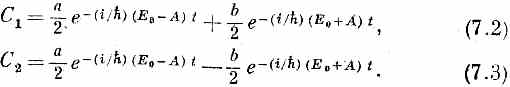
В системе с двумя базисными состояниями любое состоя­ние |ψ> системы всегда может быть описано линейной комби­нацией двух базисных состояний; это значит, что существует определенная амплитуда *С*1быть в одном базисном состоянии и амплитуда *С*2 быть в другом. Вектор состояния |ψ>можно записать в виде

C:\Мои документы\gray.jpg

где

C:\Мои документы\gray.jpg

Эта пара амплитуд меняется со временем согласно нашим гамильтоновым уравнениям — уравнениям (6.43). Используя симметрию двух состояний молекулы аммиака, мы полагаем H11*=H*22*=E*0и *H*12=*H*21=-*А* и получаем такое решение [см. (6.50) и (6.51)]:



Кинем теперь на эти решения более внимательный взгляд. Пусть сперва молекула была поставлена в состояние |ψ11>, для которого коэффициент *b* был равен нулю. Тогда при *t*=0 амплитуды оказаться в состояниях |1> и |2> одинаковы и *останутся такими все время.* Их фазы обе меняются во времени одинаково, с частотой (*E*0-*A)/h.* И точно так же, если бы мы поставили молекулу в состояние |ψ1>*,* для которого *а=0,* амплитуда *C*2равнялась бы *C*1с минусом, и это соотношение сохранилось бы навсегда — обе амплитуды менялись бы теперь во времени с частотой *(E0+A)/h.* Это все состояния, для кото­рых связь между *С*1и *С*2не зависит от времени; других возмож­ностей нет.

Мы нашли два частных решения, в которых амплитуды *не меняются по величине* и, более того, фазы меняются с одина­ковой частотой. Это *стационарные состояния* по определению, данному в гл. 5, § 1, т. е. *состояния с определенной энергией.* Состояние |ψ11> обладает энергией *Е*11=*Е*0-*А,* а состояние |ψ1> — энергией *E*1*=E0+A.* Кроме этих, никаких стационар­ных состояний не существует, т. е. мы обнаруживаем, что у мо­лекулы есть два уровня энергии, отличающиеся на *2А.* (Под­разумеваются, конечно, два уровня энергии для заданного со­стояния колебания и вращения, о которых говорилось в наших [исходных допущениях.](#прим1))

Если бы азот не мог перескакивать вверх или вниз, нам пришлось бы принять *А* равным нулю, и оба энергетических уровня (с энергией *Е*0)налезли бы один на другой. Истинные уровни не таковы; их *среднее* значение *Е*0*,* но они разведены на *±А,* т. е. промежуток между энергиями двух состояний равен *2А.* Поскольку *А* на самом деле мало, то и разница в энергиях очень мала.

Чтобы возбудить *электрон* внутри атома, требуются до­вольно высокие энергии, нужны фотоны оптического или уль­трафиолетового диапазона. Чтобы возбудить вибрации молекул, требуются инфракрасные фотоны. Если речь идет о возбужде­нии *вращений,* различия в энергиях состояний соответствуют фотонам в далекой инфракрасной области. Но разность энер­гий *2А* меньше их всех, меньше инфракрасных энергий, она приходится на микроволновой диапазон. Опытным путем было найдено, что существует пара уровней энергии с промежутком 10-4 *эв,* что отвечает частоте 24000 *Мгц.* Это, очевидно, озна­чает, что *2A=hf,* где *f*=24000 *Мгц* (отвечает волне длиной 11/4 *см).* Значит, перед нами молекула с переходами, которые вызывают испускание микроволн, а не свет в обычном смысле.

Для дальнейшей работы нам понадобится немного более удобное описание этих двух состояний с определенной энер­гией. Представим, что мы построили амплитуду *С*11из суммы двух чисел *C*1и *С*2:

C:\Мои документы\gray.jpg

Что бы это могло означать? Очень просто: это амплитуда того, что состояние |Ф> окажется в новом состоянии |//>, в котором амплитуды первоначальных базисных состояний равны между собой, Иначе говоря, когда мы пишем *СII=*<*II* |Ф>, то мы впра­ве абстрагироваться в уравнении (7.4) от |Ф>, поскольку оно вы­полняется при любых Ф, и писать

C:\Мои документы\gray.jpg

это означает то же самое, что и

C:\Мои документы\gray.jpg

Амплитуда того, что состояние (II} окажется в состоянии |1>, равна

C:\Мои документы\gray.jpg

а это, конечно, равняется просто единице, поскольку и |1>, и |2>суть базисные состояния. И амплитуда обнаружения состояния |II> в состоянии *\2у* тоже равна единице, так что у состояния |II> одинаковы амплитуды оказаться в каждом из базисных состояний |1> и |2>*.*

Но тут всплывает новая трудность. У состояния |*II*> пол­ная вероятность оказаться *то ли в одном* базисном состоянии, *то ли в другом* получается больше единицы. Но это всего лишь означает, что вектор состояния неудачно «отнормирован». Чтобы исправить дело, надо вспомнить, что всегда для любого состояния обязано быть <*II*|*II*>=1. Использовав общее соотношение

C:\Мои документы\gray.jpg

полагая, что и Ф, и χ суть состояние II*,* и суммируя по ба­зисным состояниям |1> и |2>*,* получаем

C:\Мои документы\gray.jpg

Это даст, как положено, единицу, если мы изменим наше оп­ределение *СII* [см. уравнение (7.4)] и примем

C:\Мои документы\gray.jpg

Таким же путем можно построить и амплитуду

C:\Мои документы\gray.jpg

или

C:\Мои документы\gray.jpg

Эта амплитуда есть проекция состояния |Ф> на новое состоя­ние |*I*>, обладающее амплитудами противоположного знака, для пребывания в состояниях |1> и |2>*.* А именно (7.6) означает то же самое, что и

C:\Мои документы\gray.jpg

или

C:\Мои документы\gray.jpg

откуда следует

C:\Мои документы\gray.jpg

Зачем все это нужно? С какой целью все это делается? Дело в том, что состояния |I> и |II> *могут быть приняты за новую совокупность базисных состояний,* особенно подхо­дящую для описания стационарных состояний молекулы ам­миака. Вы помните, что требования к совокупности базисных состояний были таковы:

C:\Мои документы\gray.jpg

Мы уже сами сделали так, чтобы было

C:\Мои документы\gray.jpg

Из (7.5) и (7.7) легко вывести, что и

C:\Мои документы\gray.jpg

Амплитуды *СI*=<*I*|Ф> и С*II*=<*II*|Ф> того, что любое состояние |Ф> окажется в одном из наших новых базисных со­стояний |*I*> и |*II*>, обязаны также удовлетворять гамильтонову уравнению вида (6.39). И действительно, если мы просто вычтем друг из друга два уравнения (7.2) и (7.3) и продиф­ференцируем по *t,* то убедимся, что

C:\Мои документы\gray.jpg

А взяв сумму (7.2) и (7.3), увидим

C:\Мои документы\gray.jpg

Если за базисные состояния взять |*I*> и |*II*>, то гамильтонова матрица очень проста:

C:\Мои документы\gray.jpg

Заметьте, что каждое из уравнений (7.8) и (7.9) выглядит очень похоже на то, что получалось в гл. 6, § 6, для уравнения си­стемы с одним состоянием. Они дают простую экспоненциальную зависимость от времени, отвечающую определенной энергии.

С ростом времени амплитуды пребывания в каждом из состоя­ний ведут себя независимо.

Найденные нами раньше стационарные состояния |ψI> и |ψII> тоже являются, конечно, решениями уравнений (7.8) и (7.9). У состояния |ψI> (для которого *С*1*=-С*2*)*

C:\Мои документы\gray.jpg

А у состояния |ψII> (для которого *С*1=*С*2)

C:\Мои документы\gray.jpg

Пусть мы теперь умножили (7.10) на вектор состояния |/>; тогда получится

C:\Мои документы\gray.jpg

Вспомним, однако, что |I><I|=1; значит, это одно и то же, что сказать

C:\Мои документы\gray.jpg

Иначе говоря, вектор состояния стационарного состояния |ψI> не отличается от вектора состояния базисного состояния |*I*> ничем, кроме экспоненциального множителя, связанного с энергией состояния. И действительно, при t=0

|ψI>=|*I*>;

физическая конфигурация у состояния )/> та же самая, что и у стационарного состояния с энергией *Е*0*+А.* Точно так же для второго стационарного состояния получается

C:\Мои документы\gray.jpg

Состояние |*II*>— это просто стационарное состояние с энер­гией *Е*0*-А* при *t=*0*.* Стало быть, оба наших новых базисных состояния |*I*> и |*II*> физически имеют вид состояний с опреде­ленной энергией, но с изъятым экспоненциальным временным множителем, так что они могут быть приняты за базисные со­стояния, не зависящие от времени. (В дальнейшем нам будет удобно не отличать стационарные состояния |ψI> и |ψII> от их базисных состояний |*I*> и |*II*>, ведь различаются они только очевидными временными множителями.)

Подведем итог. Векторы состояний |*I*> и |*II*> — это пара базисных векторов, приспособленных для описания состояний молекулы аммиака с определенной энергией. Они связаны с нашими исходными базисными векторами формулами

C:\Мои документы\gray.jpg

Амплитуды пребывания в |*I*> и |*II*> связаны с *С*1и *С*2форму­лами

C:\Мои документы\gray.jpg

Всякое состояние может быть представлено линейной комби­нацией *|1*> и *|2*>(с коэффициентами *С*1и *С*2) или линейной ком­бинацией базисных состояний с определенной энергией |*I*> и |*II*> (с коэффициентами *СI* и *СII*)*.* Итак,

*|*Ф*>=|1>С*1*+|2>С*2*,* или

|Ф>=|*I*>*СI*+|*II*>*СII*.

Вторая формула дает нам амплитуды обнаружить состоя­ние |Ф> в состоянии с энергией *ЕI=Е*0*+А* или в состоянии с энергией *ЕII=Е*0*-А.*

**§ 2. Молекула в статическом электрическом поле**

Если молекула аммиака находится в любом из двух состоя­ний определенной энергии, а мы приложим к ней возмущение с частотой ω, такой, что hω= E*I*-*ЕП=2А,* то система может перейти из нижнего состояния в верхнее. Или она может перейти из верхнего в нижнее и испустить фотон. Но для возбуждения таких переходов у вас должна быть физическая связь с состоя­ниями — возможность возмущать систему. Должен существо­вать какой-то внешний механизм влияния на состояния, нечто вроде электрического или магнитного поля. В нашем частном случае эти состояния чувствительны к электрическому полю. На очереди, стало быть, у нас теперь проблема поведения мо­лекулы аммиака во внешнем электрическом поле.

Для разбора этого поведения вернемся опять к перво­начальной базисной системе |1> и |2> вместо |*I*> и |*II*>. Пред­положим, что имеется электрическое поле, направленное по­перек плоскости атомов водорода. Пренебрежем на мгновение возможностью переброса атома азота вверх или вниз и зададим вопрос: верно ли, что энергия, этой молекулы в обоих положе­ниях атома азота будет одинаковой? Вообще говоря, нет. Элект­роны стремятся к тому, чтобы находиться ближе к ядру азота, чем к ядрам водорода, так что водороды оказываются слегка положительно заряженными. Насколько — это зависит от деталей расположения электронов. Каково это распределение, точно представить очень трудно, но, во всяком случае, окон­чательный результат состоит в том, что у молекулы аммиака есть электрический дипольный момент, как показано на фиг.7.1. С его помощью можно продолжить дальнейший анализ, не ин­тересуясь деталями направлений или величин смещений за­рядов. Впрочем, чтобы наши обозначения не отличались от общепринятых, предположим, что электрический дипольный момент равен μ и направлен *от* атома азота поперек плоскости атомов водорода.

Далее, когда азот перепрыгивает с одной стороны на дру­гую, то центр масс не перемещается, а электрический дипольный момент переворачивается. В результате энергия в электрическом поле *ξ* будет зависеть от [ориентации молекулы](#прим2). При сделанном только что допущении потенциальная энергия бу­дет выше тогда, когда атом азота будет удален от плоскости водородов в направлении поля, и ниже, когда он удален в обратную сторону; промежуток между обеими энергиями будет равен 2μξ*.*

До этого места мы вынуждены были делать предположения о том, чему равны *Е*0и *А,* не зная, как подсчитать их. В соот­ветствии со строгой физической теорией обязана существовать возможность вычисления этих констант, если известны поло­жения и движения всех ядер и электронов. Но никто никогда не делал этого. В систему входит десяток электронов и четверка ядер, и задача чересчур сложна. Факт остается фактом: о молекуле этой никто не знает больше того, что знаем мы с вами. И все, что всякий может о ней сказать,— что в электри­ческом поле энергия двух состояний отличается и разность энергий пропорциональна электрическому полю. Коэффициент пропорциональности мы обозначили *2μ,* но его величина долж­на определяться экспериментально. Можно еще сказать, что молекула имеет амплитуду *А* перевернуться, но и она должна измеряться экспериментально. Никто не укажет нам точных теоретических значений μ и *А*, потому что расчеты уж слишком сложны, чтобы честно их проделать.

Для молекулы аммиака в электрическом поле наше описа­ние придется изменить. Если игнорировать амплитуду пере­броса молекулы из одной конфигурации в другую, то энергии двух состояний |1> и |*2*>обязаны быть равны *(Е*0±μξ)*.* Сле­дуя процедуре, принятой в предыдущей главе, мы примем

C:\Мои документы\gray.jpg

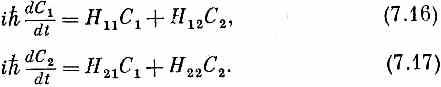
Кроме того, предположим, что при интересующих нас электри­ческих полях сами поля не сказываются заметно на геометрии молекулы и, стало быть, на амплитуде того, что атом азота перепрыгнет из одного положения в другое.

Поэтому можно принять, что *Н*12и *H*21 не изменились, т. е.

*H*12=*H*21=-*А.* (7.15)

Теперь с этими новыми значениями *Нij* надо решать гамильтоновы уравнения (6.43). Мы могли бы их решить просто, как делали это прежде, но поскольку нам не раз, видимо, представится случай решать системы с двумя состояниями, то давайте уж решим их раз и навсегда в общем случае произвольного *Нij,* считая только, что со временем оно не меняется.

Мы ищем общее решение пары гамильтоновых уравнений



Это линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Значит, всегда можно найти решения, яв­ляющиеся экспоненциальными функциями независимой пере­менной *t.* Сперва отыщем решения, в которых *С*1и *С*2 одина­ково зависят от времени; возьмем пробные функции

C:\Мои документы\gray.jpg

Поскольку это решение отвечает состоянию с энергией *E=hω*,

то можно прямо написать

C:\Мои документы\gray.jpg

где *Е* пока неизвестна и должна быть определена так, чтобы дифференциальные уравнения (7.16) и (7.17) выполнялись. При подстановке *С1* и *С*2 из (7.18) и (7.19) в дифференци­альные уравнения (7.16) и (7.17) производные дают просто -*iE/h,* умноженное на *С*1или *C*2, так что слева остается попросту *ЕС*1или *ЕС*2*.* Сокращая общие экспоненциальные множители, получаем

C:\Мои документы\gray.jpg

или после перестановки членов

C:\Мои документы\gray.jpg

У такой системы однородных алгебраических уравнений не­нулевые решения для а1 и а2 будут лишь тогда, когда опре­делитель, составленный из коэффициентов при *а*1и *а*2, равен нулю, т. е. если

C:\Мои документы\gray.jpg

Но когда уравнений два и неизвестных тоже два, то можно обойтись и без столь возвышенных представлений. Каждое из уравнений (7.20) и (7.21) дает отношение двух коэффициентов a1 и а2, и эти два отношения должны быть равны. Из (7.20) мы имеем

C:\Мои документы\gray.jpg

а из (7.21)

C:\Мои документы\gray.jpg

Приравнивая эти отношения, получаем, что *Е* должно удовле­творять равенству

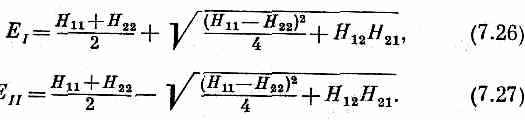
*(E-H*11*)(E-H*22*)-H*12*H*21*=*0*.*

То же получилось бы и из (7.22). В любом случае для *Е* получается квадратное уравнение с двумя решениями:

C:\Мои документы\gray.jpg

Энергия *E* может иметь два значения. Заметьте, что оба они *вещественны,* потому что *Н*11и *H*22 вещественны, а *Н*12*Н*21*,* равное *Н*12*H*12=|*H*12|2, тоже вещественно, да к тому же положительно.

Пользуясь тем же соглашением, что и раньше, обозначим большую энергию *EI,* а меньшую *ЕII.* Имеем



Подставив каждую из этих энергий по отдельности в (7.18) и (7.19), получим амплитуды для двух стационарных состояний (состояний определенной энергии). Если нет каких-либо внеш­них возмущений, то система, первоначально бывшая в одном из этих состояний, останется в нем навсегда, у нее только фаза будет меняться.

Наши результаты можно проверить на двух частных слу­чаях. Если *H*12=*H*21=0, то получается *EI*=*H*11 и *EII*=*H*22. А это бесспорно правильно, потому что тогда уравнения (7.16) и (7.17) не связаны и каждое представляет состояние с энер­гией *H*11 и *H*22. Далее, положив *H*11=*H*22=*E*0 и *H*21=*H*12=-*А,* придем к найденному выше решению:

*еi=е*0*+а* и *еii=е*0*-а.*

В общем случае два решения *ЕI* и *ЕII* относятся к двум состояниям; мы их опять можем назвать состояниями

C:\Мои документы\gray.jpg

У этих состояний *С*1и *С*2будут даваться уравнениями (7.18) и (7.19), где *а*1и *а*2 еще подлежат определению. Их отношение дается либо формулой (7.23), либо (7.24). Они должны также удовлетворять еще одному условию. Если известно, что си­стема находится в одном из стационарных состояний, то сумма вероятностей того, что она окажется в *|1*>или |*2*>, должна равняться единице. Следовательно,

C:\Мои документы\gray.jpg

или, что то же самое,

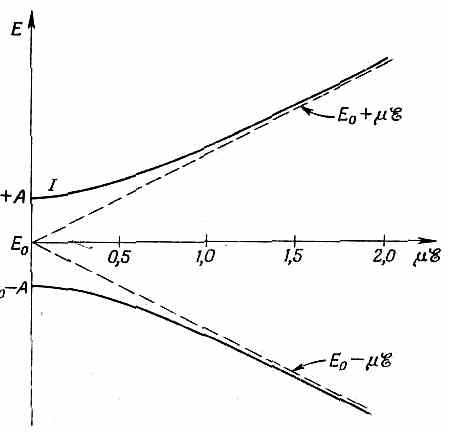
C:\Мои документы\gray.jpg

Эти условия не определяют *а*1и *а*2 однозначно: остается еще произвол в фазе, т. е. в множителе типа *еiδ.* Хотя для *а* можно выписать [общие решения](#прим3), но обычно удобнее вычислять их в каждом отдельном случае.

Вернемся теперь к нашему частному примеру молекулы аммиака в электрическом поле. Пользуясь значениями *Н*11*, H*22 и *Н*12из (7.14) и (7.15), мы получим для энергий двух ста­ционарных состояний выражения

C:\Мои документы\gray.jpg

Эти две энергии как функции напряженности ξэлектрического поля изображены на фиг. 7.2.



*Фиг. 7,2. Уровни энергии молекулы аммиака в электрическом поле.*

*Кривые построены по формулам (7.30):* 

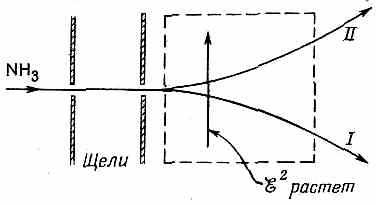
Когда электрическое поле нуль, то энергии, естественно, обращаются в *Е*0*±А.* При наложении электрического поля расщепление уровней растет. Сперва при малых ξоно растет медленно, но затем может стать пропор­циональным *$.* (Эта линия — гипербола.) В сверхсильных полях энергии попросту равны

C:\Мои документы\gray.jpg

*Тот факт, что у азота существует амплитуда переброса вверх — вниз, малосуществен, когда энергии в этих двух поло­жениях сильно отличаются.* Это интересный момент, к которо­му мы позже еще вернемся.

Теперь мы наконец готовы понять действие аммиачного мазера. Идея в следующем. Во-первых, мы находим способ отделения молекул в состоянии |*I*> от молекул в [состоянии](#прим4) |*II*>. Затем молекулы в высшем энергетическом состоянии |*I*> пропускаются через полость, у которой резонансная частота равна 24000 *Мгц.* Молекулы могут оставить свою энергию полости (способ будет изложен позже) и покинуть полость в состоянии |*II*>. Каждая молекула, совершившая такой пере­ход, передаст полости энергию *E=EI-ЕII.* Энергия, отобран­ная у молекул, проявится в виде электрической энергии поло­сти.

Как же разделить два молекулярных состояния? Один способ такой. Аммиачный газ выпускается тонкой струйкой и проходит через пару щелей, создающих узкий пучок (фиг. 7.3).



*Фиг. 7.3. Пучок молекул аммиака может быть раз­делен электрическим полем, в котором* ξ2 *обладает гра­диентом, перпендикуляр­ным пучку.*

Затем пучок пропускается через область, в которой имеется сильное поперечное электрическое поле. Создающие поле элект­роды изогнуты так, чтобы электрическое поле поперек пучка резко менялось. Тогда квадрат *ξ•ξ* электрического поля будет иметь большой градиент, перпендикулярный пучку. А у мо­лекулы в состоянии |/> энергия с *ξ*2растет, значит, эта часть пучка отклонится в область меньших *ξ*2. Молекула же в со­стоянии |*II*>, наоборот, отклонится к области, где *ξ*2побольше, потому что ее энергия падает, когда *ξ*2растет.

Кстати, при тех электрических полях, которые удается генерировать в лаборатории, энергия μ*ξ* всегда много мень­ше *А.* В этом случае корень в уравнении (7.30) приближенно равен

C:\Мои документы\gray.jpg

Во всех практических случаях энергетические уровни, стало быть, равны

C:\Мои документы\gray.jpg

и

C:\Мои документы\gray.jpg

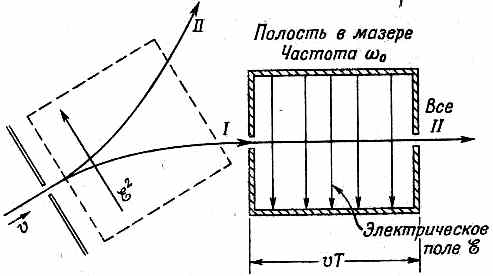
и энергии с *ξ*2меняются линейно. Действующая на молекулы сила тогда равна

C:\Мои документы\gray.jpg

Энергия в электрическом поле у многих молекул пропорцио­нальна *ξ*2*.* Коэффициент — это поляризуемость молекулы. Поляризуемость аммиака необычно высока: у него *А* в зна­менателе очень мало. Стало быть, молекулы аммиака очень чувствительны к электрическому полю.

**§ 3. Переходы в поле, зависящем от времени**

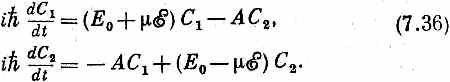
В аммиачном мазере пучок молекул в состоянии |7> и с энергией *ЕI* пропускается через резонансную полость, как по­казано на фиг. 7.4.



*Фиг. 7.4. Схематическое изображение аммиачного мазера.*

Другой пучок отводится прочь. Внутри полости существует меняющееся во времени электрическое поле, так что нашей очередной задачей явится изучение поведе­ния молекулы в электрическом поле, которое меняется во вре­мени. Это совершенно новый род задач — задача с гамильто­нианом, меняющимся во времени. Раз *Htj* зависит от *ξ,* то и *hij* меняется во времени, и нам надлежит определить поведе­ние системы в этих обстоятельствах.

Для начала выпишем уравнения, которые нужно решить:



Для определенности положим, что электрическое поле меня­ется синусоидально; тогда можно написать

C:\Мои документы\gray.jpg

На самом деле частота ω берется всегда очень близкой к резо­нансной частоте молекулярного перехода ω0*=2A/h,* но пока мы для общности будем считать ω произвольной. Лучший спо­соб решить наши уравнения — это, как и прежде, составить из *C*1и *С*2 линейные комбинации. Сложим поэтому оба урав­нения, разделим на *у* 2 и вспомним определения *СI* и *СII* из (7.13), Получим

C:\Мои документы\gray.jpg

Вы видите, что это похоже на (7.9), но появился добавочный член от электрического поля. Равным образом, вычитая урав­нения (7.36), получаем

C:\Мои документы\gray.jpg

Вопрос теперь в том, как решить эти уравнения. Это труд­нее, чем прежде, потому что *ξ* зависит от *t;* и действительно, при общем *ξ* (*t*)решение не представимо в элементарных функ­циях. Однако, пока электрическое поле мало, можно добиться хорошего приближения. Сперва напишем

C:\Мои документы\gray.jpg

Если бы электрического поля не было, то, беря в качестве γ*I* и γ*II* две комплексные постоянные, мы бы получили пра­вильное решение. Ведь поскольку вероятность быть в состоя­нии |/ > есть квадрат модуля *CI,* а вероятность быть в состоя­нии |*II*> есть квадрат модуля *СII,* то вероятность быть в со­стоянии |*I*>или в состоянии |*II*> равна просто |γ*I*|2 или |γ*II*|2. Например, если бы система начинала развиваться из состояния |*II*> так, что γ*I* было бы нулем, a |γ*II*|2— единицей, то эти условия сохранились бы навсегда. Молекула из состояния |*II*> никогда бы не перешла в состояние |*I*>.

Польза записи решений в форме (7.40) состоит в том, что оно сохраняет свой вид и тогда, когда есть электрическое поле, если только μξ меньше *А,* только γ*I* и γ*II* при этом станут мед­ленно меняющимися функциями времени. «Медленно меняю­щиеся» означает медленно *в сравнении* с экспоненциальными функциями. В этом весь фокус. Для получения приближен­ного решения используется тот факт, что γ*I* и γ*II* меняются медленно.

Подставим теперь *СI* из (7.40) в дифференциальное уравне­ние (7,39), но вспомним, что γ*I* тоже зависит от *t.* Имеем

C:\Мои документы\gray.jpg

Дифференциальное уравнение обращается в

C:\Мои документы\gray.jpg

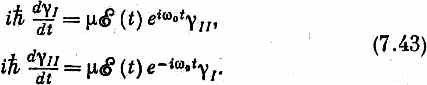
Равным образом уравнение для *dCII/dt* обращается в

C:\Мои документы\gray.jpg

Обратите теперь внимание, что в обеих частях каждого урав­нения имеются одинаковые члены. Сократим их и умножим первое уравнение на C:\Мои документы\gray.jpg

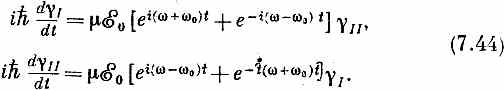
а второе на C:\Мои документы\gray.jpg

*.* Вспоминая, что *(EI- eii)=2А=hω*0, мы в конце концов получаем



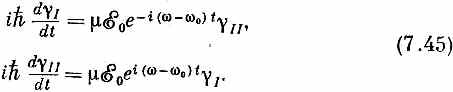
Получилась довольно простая пара уравнений — и пока еще точная. Производная от одной переменной есть функция от времениC:\Мои документы\gray.jpg, умноженная на вторую переменную; про­изводная от второй — такая же функция от времени, умножен­ная на первую. Хотя эти простые уравнения в общем не реша­ются, но в некоторых частных случаях мы решим их.

Нас, по крайней мере сейчас, интересует только случай ко­леблющегося электрического поля. Взяв ξ*(t)* в форме (7.37), мы увидим, что уравнения для γ*I* и γ*II* обратятся в



***(it***

И вот если ξ*0* достаточно мало, то скорости изменения γ*I* и γ*II* тоже будут малы. Обе *у* не будут сильно меняться с *t,* особен­но в сравнении с быстрыми вариациями, вызываемыми экспо­ненциальными членами. У этих экспоненциальных членов есть вещественные и мнимые части, которые колеблются с частотой ω+ω0 или ω-ω0. Члены с частотой ω+ω0 колеблются вокруг среднего значения (нуля) очень быстро и поэтому не дадут сильного вклада в скорость изменения γ. Значит, можно сде­лать весьма разумное приближение, заменив эти члены их средним значением, т. е. нулем. Их просто убирают и в каче­стве приближения берут



Но даже и оставшиеся члены с показателями, пропорциональ­ными (ω-ω0), меняются быстро, если только ω не близко к ω0. Только тогда правая сторона будет меняться достаточно мед­ленно для того, чтобы набежало большое число, пока интег­рируешь эти уравнения по *t.* Иными словами, при *слабом* электрическом поле изо всех частот представляют важность лишь те, которые близки к ω0.

При тех приближениях, которые были сделаны для того, чтобы получить (7.45), эти уравнения можно решить и точно; но работа эта все же трудоемкая, и мы отложим ее на другое время, когда обратимся к другой задаче того же типа. Пока же мы их просто решим приближенно, или, лучше сказать, найдем точное решение для случая идеального резонанса ω=ω0 и приближенное — для частот близ резонанса.

**§ 4. Нереходы при резонансе**

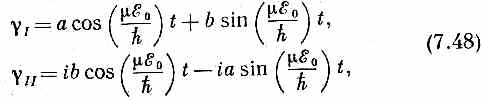
Первым рассмотрим случай идеального резонанса. Если положить ω=ω0, то экспоненты в обоих уравнениях (7.45) станут равными единице, и мы просто получим

C:\Мои документы\gray.jpg

Если из этих уравнений исключить сперва γ*I*, а потом γ*II,* то мы увидим, что каждое из них удовлетворяет дифференциаль­ному уравнению простого гармонического движения

C:\Мои документы\gray.jpg

Общее решение этих уравнений может быть составлено из сину­сов и косинусов. Легко проверить, что решениями являются следующие выражения:



где *а* и *b —* константы, которые надо еще определить так, чтобы они укладывались в ту или иную физическую ситуацию.

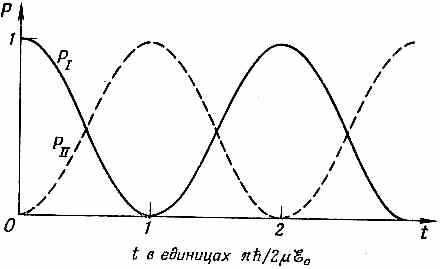
К примеру, предположим, что при *t*=0 наша молекулярная система была в верхнем энергетическом состоянии |*I*>, а это требует [из уравнения (7.40)], чтобы γ*I*=1 и γ*II*=0 при *t*=0. Для такого случая должно быть *а*=1 и *b*=0. Вероятность того, что молекула окажется в том же состоянии |*I*> в какой-то позднейший момент *t,* равна квадрату модуля γ*I*, или

C:\Мои документы\gray.jpg

Точно так же и вероятность того, что молекула окажется в состоянии |*II*>, дается квадратом модуля γ*II*:

C:\Мои документы\gray.jpg

Пока ξ мало и пока мы находимся в резонансе, вероятности даются простыми колебательными функциями. Вероятность быть в состоянии |*I*> падает от единицы до нуля и возрастает опять, а вероятность быть в состоянии |*II*> растет от нуля до единицы и наоборот. Изменение обеих вероятностей во времени показано на фиг. 7.5.



*Фиг.* 7.5. *Вероятности обоих состояний моле­кулы аммиака в синусоидальном электрическом поле.*

Нечего и говорить, что сумма обеих вероятностей всегда равна единице; ведь молекула всегда на­ходится в *каком-то* состоянии.

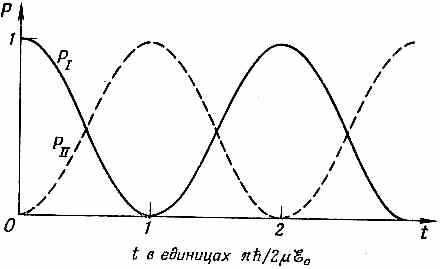
Положим, что прохождение через полость занимает у мо­лекулы время *Т.* Если сделать полость как раз такой длины, чтобы было μξ0*Т/h=π/2,* то молекула, ныряющая в нее в состоянии |*I*>, наверняка вынырнет из нее в состоянии |*II*>. Если она вошла в полость в верхнем состоянии, то выйдет из полости в нижнем. Иными словами, ее энергия упадет, и эта потеря энергии не сможет перейти ни во что другое, а только в механизм, который генерирует поле. Детали, которые по­могли бы вам разглядеть, как именно энергией молекулы питаются колебания полости, не так уж просты; однако нам и не нужно все эти детали изучать, потому что имеется принцип сохранения энергии. (Мы могли бы, если бы это было нужно, изучить их, но тогда нам пришлось бы иметь дело с квантовой механикой поля в полости наряду с квантовой механикой атома.)

Подытожим. Молекула входит в полость, поле полости, колеблющееся с как раз нужной частотой, индуцирует перехо­ды с верхнего состояния на нижнее, и высвобождаемой энергией питается осциллирующее поле. В работающий мазер молекулы доставляют достаточно энергии для того, чтобы поддержива­лись колебания полости, ее хватает не только на то, чтобы воз­местить потери в полости, но и на то, чтобы небольшие избытки энергии извлекались из полости. Итак, молекулярная энергия превращается в энергию внешнего электромагнитного поля.

Вспомним, что перед входом в полость нам приходилось пользоваться фильтром, который разделял пучок так, что в полость входило только верхнее состояние. Легко показать, что, если бы мы начали с молекул в нижнем состоянии, процесс пошел бы в другую сторону и энергия от полости отбиралась бы. Если пустить в полость нефильтрованный пучок, то сколько молекул будет отбирать энергию от полости, столько же из них будет отдавать ей свою энергию, и в итоге ничего не случится. В настоящем мазере, конечно, не обязательно делать *(*μ*ξ*0T*/h)* точно равным π/2. И при других значениях (кроме точных кратных π) существует какая-то вероятность переходов из состояния |*I*> в состояние |*II*>. Но при этих других значе­ниях прибор уже не имеет к. п. д., равного 100%; многие из молекул, покидающие полость, могли бы снабдить ее энергией, но не сделали этого.

На самом деле и скорости молекул неодинаковы; они рас­пределены по Максвеллу. Это означает, что идеальные периоды времени для разных молекул окажутся различными, и невоз­можно получить к. п. д., равный 100%, сразу для всех моле­кул. Вдобавок имеется еще одно усложнение, которое, правда, легко принять во внимание, но на этой стадии мы не будем им за­ниматься. Вы помните, что электрическое поле обычно меня­ется в полости от места к месту. Когда молекулы дрейфуют вдоль полости, электрическое поле близ молекул меняется как-то очень сложно, сложнее, чем предположенное нами обыч­ное синусоидальное колебание. Ясно, что для точного решения задачи следовало бы воспользоваться более сложными интег­рированиями, но общая идея остается прежней.

Можно мазеры устраивать и иначе. Не отделять прибором Штерна — Герлаха атомы в состоянии |*I*> от атомов в состоя­нии |*II*>, а собрать атомы в какой-то полости (в газообразном или твердом виде) и как-то переселить их из состояния |*II*> в состояние |*I*>. Один такой способ применяется в так назы­ваемом трехуровневом мазере. Для него используются атомные системы с тремя уровнями энергии (фиг. 7.6) и со следующими специальными свойствами.



*Фиг. 7.6. Уровни энергии «трехуровневого» мазера.*

Система поглощает излучение (ска­жем, свет) с энергией hω1и переходит от низшего уровня энер­гии *ЕII* к какому-то более высокому уровню *Е',* а затем быстро испускает фотоны с энергией hω2 и переходит в состояние |/> с энергией *ЕI.* У состояния |*I*> большое время жизни, так что его населенность может возрасти; создаются условия, благо­приятствующие работе мазера между состояниями |*I*> и |*II*>. Хотя такой прибор называют «трехуровневым» мазером, но сама мазерная процедура на самом деле происходит так же, как и у описанной нами двухуровневой системы.

Лазер — это всего-навсего мазер, действующий на свето­вых частотах. «Полость» лазера обычно состоит попросту из двух зеркал, между которыми генерируются стоячие волны.

***§ 5. Переходы вне резонанса***

Наконец, хотелось бы выяснить, как изменяются состояния в условиях, когда частота полости, хотя и близка к ω0, но не совпадает с ней. Эту задачу можно было бы решить точно, но мы не будем пытаться это делать, а обратимся к важному слу­чаю малого электрического поля и малого промежутка време­ни *Т,* так что μξ0*T/h* много меньше единицы. Тогда даже в слу­чае уже изученного нами идеального - резонанса вероятность перехода очень мала. Будем исходить опять из того, что γ*I*=1 и γ*II*=0. Тогда мы вправе ожидать, что в течение всего времени *Т* наша величина γ*I* останется близкой к единице, а γ*II* будет малой по сравнению с единицей, и задача облегчается. Из вто­рого уравнения (7.45) мы можем подсчитать γ*II,* принимая γ*I* равной единице и интегрируя от *t*=0 до *t=T.* Получается

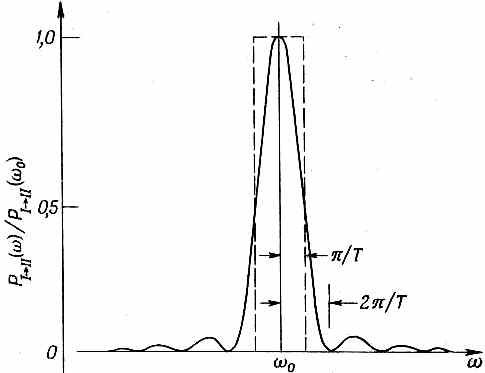
C:\Мои документы\gray.jpg

Это та величина γ*II*, которая стоит в (7.40), и она дает амплитуду того, что переход из состояния |*I*> в состояние |*II*> произой­дет за время *Т.* Вероятность *Р* (*I*→*II*) такого перехода равна

|γ*II*|2, или

C:\Мои документы\gray.jpg

Интересно начертить эту вероятность при фиксированном времени *T* как функцию частоты полости, чтобы посмотреть, насколько чувствительна она к частотам близ резонансной ча­стоты ω0. Кривая *Р (I*→*II)* показана на фиг. 7.7.



*Фиг. 7.7. Вероятность перехода для молекулы аммиака как функция частоты.*

(Вертикаль­ная шкала была подогнана так, чтобы в пике была единица, для этого разделили на величину вероятности при ω=ω0.) С подобными кривыми мы встречались в теории дифракции, так что они должны быть вам знакомы. Кривая довольно резко падает до нуля при

(ω-ω0)=2π/*T* и никогда при больших отклонениях частоты снова не достигает заметной величины. Почти вся площадь под кривой лежит в пределах ±π/*T*. Можно показать [с помощью формулы

C:\Мои документы\gray.jpg

что площадь под кривой равна *2π/T* и совпадает с площадью выделен­ного штрихованной линией прямоугольника.

Посмотрим, что это дает для реального мазера. Возьмем разумное время пребывания молекулы аммиака в полости, ска­жем 1 *мсек.* Тогда для *f*0=24000 *Мгц* можно подсчитать, что вероятность падает до нуля при отклонениях (*f-f0*)/*f*0=1/*f*0*T*, т. е. порядка 5•10-8. Очевидно, что для заметных вероятностей перехода частоты должны очень точно совпадать с ω0. Этот эффект является основой той большой точности, которой можно достичь в «атомных» часах, работающих на принципе мазера.

**§ 6. Поглощение света**

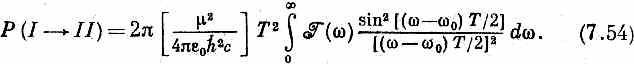
Наше изложение применимо и к более общему случаю, чем аммиачный мазер. Мы ведь изучали поведение молекулы под влиянием электрического поля независимо от того, заклю­чено оно в полость или нет. Просто можно было направить пучок «света» — микроволновой частоты — на молекулу и искать вероятность испускания или поглощения. Наши урав­нения ничуть не хуже применимы и к этому случаю, но только лучше переписать их на языке *интенсивности* излучения, а не электрического поля. Если определить интенсивность C:\Мои документы\gray.jpg как средний поток энергии через единицу площади в секунду, то из гл. 27 (вып. 6) следует

C:\Мои документы\gray.jpg

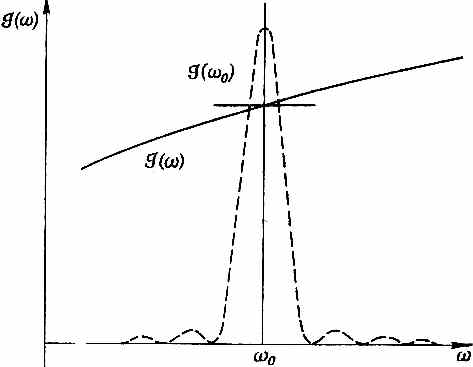
(Максимум ξ равен 2ξ0.) Вероятность перехода принимает вид

C:\Мои документы\gray.jpg

Обычно свет, освещающий подобную систему, не точно монохроматичен. Поэтому интересно решить еще одну задачу— подсчитать вероятность перехода, когда интенсивность света на единицу интервала частот равна C:\Мои документы\gray.jpg и покрывает собой широкую полосу, включающую ω0. Тогда вероятность перехо­да от |*I*> к |*II*> обратится в интеграл



Как правило, меняется с ω медленнее, чем острый резо­нансный фактор. Эти две функции могут выглядеть так, как по­казано на фиг. 7.8.



*Фиг. 7.8. Спектральная интенсивность* C:\Мои документы\gray.jpg *может быть представлена своим значением при ω0.*

В таких случаях можно заменить C:\Мои документы\gray.jpg ее значением C:\Мои документы\gray.jpg в центре острой резонансной кривой и вы­нести из-под интеграла. Оставшийся интеграл — это просто площадь под кривой на фиг. 7.7, которая, как известно, равна *2π/Т.* Мы приходим к результату

C:\Мои документы\gray.jpg

Это очень важный результат; *перед нами общая теория поглощения света любой молекулярной или атомной системой.* Хотя мы вначале считали, что состояние |*I*> обладает более высокой энергией, чем состояние |*II*>, но никакие наши рас­суждения от этого не зависели. Уравнение (7.55) соблюдается и тогда, когда энергия состояния |*I*> *ниже* энергии состояния |*II*>; тогда *Р (I→II)* представляет собой вероятность перехода с *поглощением* энергии от падающей электромагнитной волны. Поглощение атомной системой света всегда предполагает, что имеется амплитуда для перехода в колеблющемся электриче­ском поле между состояниями, отличающимися на энергию *E*=*hω*0. В каждом отдельном случае она рассчитывается так же, как мы это проделали, и дает выражения наподобие (7.55). Поэтому мы подчеркнем следующие свойства этой формулы. Во-первых, вероятность пропорциональна *Т.* Иными словами, существует неизменная вероятность на единицу времени, что переход произойдет. Во-вторых, эта вероятность пропорцио­нальна *интенсивности* света, падающего на систему. В-третьих, вероятность перехода пропорциональна μ2, где, как вы помните, μ*ξ* определяет энергетический сдвиг, вызываемый электриче­ским полем *ξ.* По этой именно причине μ*ξ* появлялось и в урав­нениях (7.38) и (7.39) в качестве коэффициента связи, ответствен­ного за переход между стационарными состояниями |*I*> и |*II*>. Иными словами, для рассматривавшихся нами малых *ξ* член μ*ξ* есть так называемое «возмущение» в матричном элементе гамильтониана, связывающем состояния |/> и |//>. В общем случае μ*ξ* заменилось бы матричным элементом <*II*|*H*|*I*> (см. гл. 3, § 6).

В гл. 42, § 5 (вып. 4) мы говорили о связи между поглоще­нием света, вынужденным испусканием и самопроизвольным испусканием в терминах введенных Эйнштейном коэффициентов *А* и *В.* Здесь наконец-то в наших руках появляется квантовомеханическая процедура для подсчета этих коэффициентов. То, что мы обозначили Р (*I*→*II*) для нашей аммиачной двухуровневой молекулы, в точности соответствует коэффициенту поглощения *Bnm* в эйнштейновской теории излучения. Из-за сложности молекулы аммиака — слишком трудной для рас­чета — нам пришлось взять матричный элемент <*II|H*|*I*> в виде μ*ξ* и говорить, что μ извлекается из опыта. Для более про­стых атомных систем величину μ*mn,* отвечающую к произвольному переходу, можно подсчитать, исходя из определения

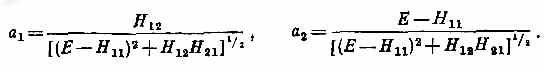
C:\Мои документы\gray.jpg

где *Нmn —* это матричный элемент гамильтониана, учитываю­щего влияние слабого электрического поля. Величина μ*mn,* вычисленная таким способом, называется *электрическим дипольным матричным элементом,* Квантовомеханическая тео­рия поглощения и испускания света сводится тем самым к расчету этих матричных элементов для тех или иных атомных систем.

Итак, изучение простых систем с двумя состояниями (двух­уровневых) привело нас к пониманию общей проблемы поглощения и испускания света.

***\* Теперь мы опять будем писать | I> и | II> вместо |ψI> и |ψII>. Вы должны вспомнить, что настоящие состояния |ψI> и |ψII> суть энергетические базисные состояния, умноженные на соответствующий экспоненциальный множитель.***

***\* Например, как легко убедиться, одно из допустимых решений имеет вид***



***\* Очень жаль, но нам придется ввести новое обозначение. Раз бук­вы р и Е заняты у нас импульсом и энергией, то мы поостережемся опять обозначать ими дипольный момент и электрическое поле. Напомним, что в этом параграфе μ означает электрический дипольный момент.***

***\* В дальнейшем полезно (и читая, и произнося вслух) отличать арабские 1 и 2 и римские I и II. Мы считаем, что удобно для арабских, цифр резервировать названия «один» и «два», а I и II читать как «первый», «второй».***

***Глава 8***

**ДРУГИЕ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ состояниями**

[**§ 1. Мол****екулярный ион водорода**](#a1)

[**§ 2. Ядерные си****лы**](#a2)

[**§ 3. Молекула** **водорода**](#a3)

[**§ 4.Молек****ула бензола**](#a4)

[**§ 5. Кра****сители**](#a5)

[**§ 6.Гамильтониа****н частицы со спи­ном 1/2 в магнит­ном поле**](#a6)

[**§ 7.Вращающийся э****лектрон в магнитном поле**](#a7)

**§ 1. Молекулярный ион водорода**

В предыдущей главе мы обсудили некото­рые свойства молекулы аммиака в предположении, что это система о двух состояниях (или двухуровневая система). На самом деле, конечно, это не так — у нее есть множество состояний: вращения, колебания, перемещения и т. д., но в каждом из этих состояний движе­ния следует говорить о паре внутренних со­стояний из-за того, что атом азота может быть переброшен с одной стороны плоскости трех атомов водорода на другую. Сейчас мы рас­смотрим другие примеры систем, которые в том или ином приближении можно будет считать системами с двумя состояниями. Многое здесь будет приближенным, потому что всегда име­ется множество других состояний, и в более точном анализе их следовало бы учитывать. Но в каждом из этих примеров мы окажемся в силах очень многое понять, рассуждая толь­ко о двух состояниях.

Раз мы будем иметь дело только с двух­уровневыми системами, то нужный нам га­мильтониан будет выглядеть так же, как и в предыдущей главе. Когда гамильтониан не зависит от времени, то известно, что имеются два стационарных состояния с определенными (и обычно разными) энергиями. В общем слу­чае, однако, мы будем начинать наш анализ с выбора базисных состояний *(не обязательно* этих стационарных состояний), таких, которые, скажем, имеют другой простой физический смысл. Тогда стационарные состояния систе­мы будут представлены линейной комбинацией этих базисных состояний.

Для удобства подытожим важнейшие уравнения, выведенные в гл. 7, Пусть первоначально в качестве базисных состояний были приняты |*1*> и |*2*>*.* Тогда любое состояние |ψ> пред­ставляется их линейной комбинацией:

C:\Мои документы\gray.jpg

Амплитуды *Сi* (под этим подразумеваются как *C*1так и *С*2) удовлетворяют двум линейным дифференциальным уравнениям

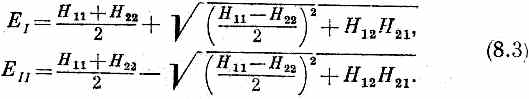
C:\Мои документы\gray.jpg

где и *i,* и *j* принимают значения 1 и 2.

Когда члены гамильтониана *Hij* не зависят от *t,* то два состояния с определенной энергией (стационарные), которые мы обозначим

C:\Мои документы\gray.jpg

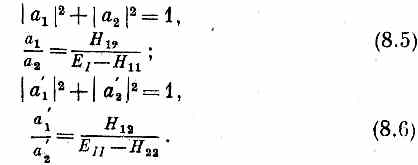
обладают энергиями



Для каждого из этих состояний оба С имеют одинаковую зависимость от времени. Векторы состояний |*I*> и |*II*>, кото­рые отвечают стационарным состояниям, связаны с нашими первоначальными базисными состояниями |*1*> и |*2*>формулами

C:\Мои документы\gray.jpg

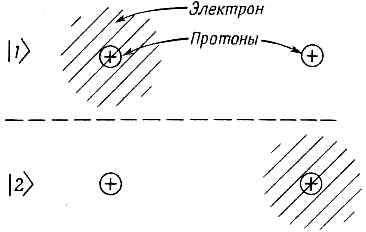
Здесь а —комплексные постоянные, удовлетворяющие равен­ствам



Если *H*11 и *H*22 между собой равны, скажем оба равны *Е*0*,* а *H*12=*H*21=-*А,* то E*I*=*E*0+*A*, *ЕII=Е*0*-А,* и состоя­ния | *I*> и |*II*> особенно просты:

C:\Мои документы\gray.jpg

Эти результаты мы хотим теперь использовать, чтобы рас­смотреть ряд интересных примеров, взятых из химии и физики. Первый пример — это ион молекулы водорода. Положительно ионизированная молекула водорода состоит из двух протонов и одного электрона, как-то бегающего вокруг них. Каких состояний можно ожидать для этой системы, если расстояние между протонами велико? Ответ вполне ясен: электрон распо­ложится вплотную к одному протону и образует атом водорода в его наинизшем состоянии, а другой протон останется одиноч­кой, положительным ионом. Значит, когда два протона удале­ны друг от друга, то можно себе наглядно представить одно физическое состояние, в котором электрон «придан» одному из протонов. Существует, естественно, и другое, симметричное первому состояние, в котором электрон находится возле вто­рого протона, а ионом оказывается первый протон. Эту пару состояний мы и сделаем базисными, обозначив их |*1*> и |*2*>. Они показаны на фиг. 8.1.



*Фиг. 8.1. Совокупность базисных состояний для двух протонов и электрона.*

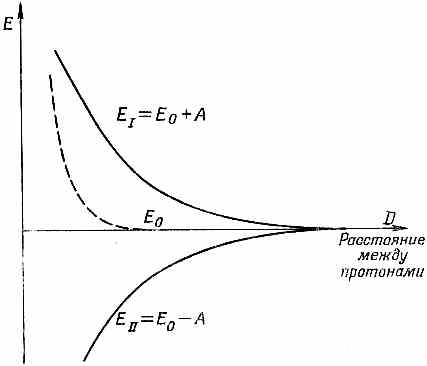
Конечно, на самом деле у электрона возле протона имеется множество состояний, потому что их комбинация может существовать в виде одного из возбуждён­ных состояний атома водорода. Но нас сейчас не интересует это разнообразие состояний, мы будем рассматривать лишь случай, когда атом водорода пребывает в наинизшем состоя­нии — своем основном состоянии,— и пренебрежем на время спином электрона. Мы просто [предположим](#прим1), что для всех на­ших состояний спин электрона направлен вверх по оси z.

Чтобы убрать электрон из атома водорода, требуется 13,6 *эв* энергии. Столько же энергии — очень много по нашим тепе­решним масштабам — понадобится и на то, чтобы электрон ока­зался на полпути между протонами (коль скоро сами протоны сильно удалены друг от друга). Так что по классическим поня­тиям электрону немыслимо перескочить от одного протона к другому. Однако в квантовой механике это возможно, хоть и не очень вероятно. Существует некая малая амплитуда того, что электрон уйдет от одного протона к другому. Тогда в пер­вом приближении каждое из наших базисных состояний |*1*> и |*2*> будет иметь энергию *Е*0*,* равную просто сумме энергий атома водорода и протона. Матричные элементы *Н*11и *H*22 гамильтониана мы можем принять приближенно равными *Е*0*.* Другие матричные элементы *Н12* и *Н21,* представляющие собой амплитуды перехода электрона туда и обратно, мы опять за­пишем в виде -*А.*

Вы видите, что это та же игра, в какую мы играли в послед­них двух главах. Если пренебречь способностью электрона перескакивать туда и обратно, то два состояния будут иметь в точности одинаковую энергию. Эта энергия, однако, расщеп­ляется на два энергетических уровня из-за того, что электрон может переходить туда и назад, и чем больше вероятность пере­хода, тем больше расщепление. Стало быть, два уровня энер­гии системы равны *Е*0*+А* и *Е*0-*А,* и состояния, у которых такие энергии, даются уравнениями (8.7).

Из нашего решения мы видим, что если протон и водород­ный ион как-то расположить близко один к другому, то элек­трон не останется подле одного протона, а будет перескакивать от протона к протону и обратно. Если вначале он был близ од­ного из протонов, то затем он начнет колебаться туда и назад между состояниями |*1*> и |*2*>, давая решение, меняющееся во времени. Чтобы получить решение, отвечающее самой низ­кой энергии (которое не меняется со временем), необходимо, чтобы вначале система обладала одинаковыми амплитудами пребывания электрона возле каждого из протонов. Кстати, вспомните, что электронов отнюдь не два; мы совсем не утверж­даем, что вокруг каждого протона имеется электрон. Имеется только *один* электрон, и это *он* имеет одинаковую амплитуду (1/√2 по величине) быть в том или ином положении.

Дальше, для электрона, который находится близ одного протона, амплитуда *А* оказаться близ другого зависит от рас­стояния между протонами. Чем они ближе один к другому, тем больше амплитуда. Вы помните, что в гл. 5 мы говорили об амплитуде «проникновения» электрона «сквозь барьер», на что по классическим канонам он не способен. Здесь то же самое положение дел. Амплитуда того, что электрон переберется к другому протону, спадает с расстоянием примерно по экспо­ненте (для больших расстояний). Раз вероятность, а следова­тельно, и значение *А* при сближении протонов возрастают, то возрастает и расстояние между уровнями энергии. Если си­стема находится в состоянии |*I*>, то энергия *Е*0*+А с* умень­шением расстояния растет так, что эти квантовомеханические эффекты приводят к *силе отталкивания,* стремящейся развести протоны. Если же система пребывает в состоянии |*II*>, то полная энергия при сближении протонов *убывает;* сущест­вует *сила притяжения,* подтягивающая протоны один к другому. Эти энергии меняются с расстоянием между протонами пример­но так, как показано на фиг. 8.2.

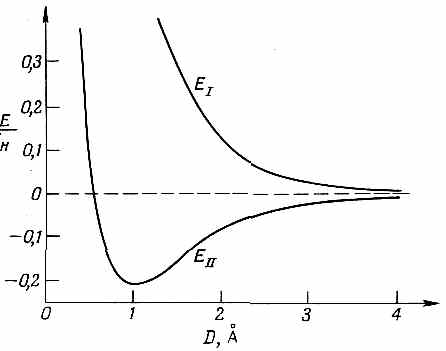


*Фиг. 8.2. Энергии двух стационарных состояний иона h+2 как функция расстояния между двумя протонами.*

Тем самым у нас появляется квантовомеханическое объяснение силы связи, скрепляющей

ион H+2.

Однако мы позабыли об одной вещи. В дополнение к только что описанной силе имеется также электростатическая сила взаимного отталкивания двух протонов. Когда оба протона очень удалены друг от друга (как на фиг. 8.1), то «голый» про­тон видит перед собой только нейтральный атом, так что элек­тростатической силой можно пренебречь. При очень тесных сближениях, однако, «голый» протон оказывается порой «внут­ри» электронного распределения, т. е. в среднем он ближе к протону, чем к электрону. Появляется некоторая добавочная электростатическая энергия, которая, конечно, положительна. Эта энергия — она тоже зависит от расстояния — должна быть включена в *Е*0*.* Значит, за *Е*0мы должны принять нечто похожее на штриховую кривую на фиг. 8.2; она быстро поды­мается на расстояниях, меньших, чем радиус атома водорода. Энергию переворота *А* надо вычесть и прибавить к этому *Е*0*.* Если это сделать, то энергии *ЕI* и *ЕII* будут меняться с меж­протонным расстоянием *D,* как показано на фиг. 8.3.



*Фиг. 8.3. Уровни энергии иона H+2* *как функция межпротонного расстояния D (EH=13,6 эв).*

[На ри­сунке мы воспроизвели результаты более детальных выкладок. Межпротонное расстояние дано в ангстремах (1Å=10-8 *см), а* избыток энергии над протоном плюс водородным ионом да­ется в единицах энергии связи атома водорода, так называе­мых «ридбергах» (13,6 *эв*).]Мы видим, что состояние |*II*> имеет точку минимума энергии — равновесную конфи­гурацию (условие наинизшей энергии) для иона Н+2 . Энергия в этой точке ниже, чем энергии отдельно протона и отдельно водородного иона, так что система связана. Отдельный элект­рон действует так, что скрепляет протоны. Химик назвал бы это «одноэлектронной связью».

Этот род химической связи часто также называют «квантовомеханическим резонансом» (по сходству с двумя связанными маятниками, о котором мы уже говорили). Но звучит это таин­ственнее, чем оно есть на самом деле; это только тогда «резо­нанс», когда базисные состояния с самого начала неудачно выбраны, как у нас и было! А если выбрать состояние |*II*>, вы сразу получите наинизшее энергетическое состояние — и все.

Можно и по-иному объяснить, отчего энергия этого состоя­ния должна быть ниже, чем у протона плюс атома водорода. Представим себе электрон возле двух протонов, удаленных на определенное, но не очень большое расстояние. Вы помните, что электрон возле одиночного протона «размазан» из-за прин­ципа неопределенности. Он ищет равновесия, пытаясь раздо­быть энергию пониже (низкую кулоновскую *потенциальную* энергию) и не оказаться при этом сжатым в пространстве че­ресчур тесно, что привело бы к высокой *кинетической* энергии (из-за соотношения неопределенности ΔрΔх≈h). Если же про­тонов два, то будет больше места, где у электрона может быть низкая потенциальная энергия. Он может размазаться (снижая тем самым свою кинетическую энергию), не повышая при этом своей потенциальной энергии. В итоге его энергия ниже, чем в атоме водорода. Тогда почему же у другого состояния |*I*> энергия выше? Но заметьте, что это состояние есть *разность* состояний |*1*> и |*2*>*.* Вследствие симметрии |*1*> и |*2*> разность должна иметь нулевую амплитуду того, что электрон окажется на полпути между протонами. Это означает, что электрон немного сильнее ограничен в пространстве, что и приводит к большей энергии.

Следует сказать, что наше приближенное рассмотрение иона H+2 как двухуровневой системы рассыпается в прах, едва лишь протоны сблизятся до минимума энергии на кривой фиг. 8.3; тогда больше не получается хорошего значения истин­ной энергии связи. На малых удалениях энергии двух «со­стояний» на самом деле уже не равны *Е*0*;* требуется более тонкое квантовомеханическое рассмотрение.

Положим, мы теперь заинтересуемся, что случилось бы, если бы вместо двух протонов у нас были два разных объекта, скажем один протон и один положительный ион лития (причем обе частицы по-прежнему имеют по единичному положитель­ному заряду). В этом случае два члена *Н*11и *H*22 в гамильто­ниане больше не совпадали бы; они были бы совершенно раз­личны. Если бы оказалось, что разность (*H*11-*H*22) по абсо­лютной величине много больше *А=-H*12, то сила притяжения стала бы очень слабой. В этом можно убедиться следующим образом.

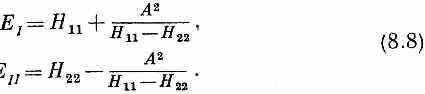
Если в (8.3) подставить *H*12*H*21=*A*2, то мы получим

C:\Мои документы\gray.jpg

Когда *H*11-*H*22 много больше *А*2*,* корень довольно точно равен

C:\Мои документы\gray.jpg

Тогда энергии обращаются в



Теперь они почти вплотную совпадают с энергиями *H*11 и *H*22 изолированных атомов и только чуть-чуть отличаются из-за наличия амплитуды перескока *А.*

Разность энергий *(ЕI-ЕII)* равна

C:\Мои документы\gray.jpg

*Добавка* к расстоянию между уровнями из-за переброса электрона уже не равна *2А*; она составляет *А /(Н*11*-Н*22*) —* часть этой величины (что по предположению много меньше единицы). Кроме того, сама зависимость *ЕI-ЕII* от расстояния между ядрами сейчас намного слабее, чем для иона Н+2: в нее тоже входит множитель *А/(Н*11*-Н*22).Можно поэтому понять, от­чего связь несимметричных двуатомных молекул, как правило, очень слаба.

В нашей теории иона Н+2 мы открыли объяснение механиз­ма, с помощью которого электрон, распределенный между двумя протонами, создает в итоге силу притяжения между ними даже тогда, когда они очень удалены друг от друга. Сила притяжения проистекает от уменьшения энергии системы, вы­зываемого тем, что у электрона есть возможность прыгать от одного протона к другому. При таких прыжках система пере­ходит от конфигурации атом водорода — протон к конфигура­ции протон — атом водорода и обратно. Процесс символически можно записать так:

C:\Мои документы\gray.jpg

Сдвиг энергии, вызываемый этим процессом, пропорционален амплитуде *А* того, что электрон с энергией ─WH (его энергия связи в атоме водорода) может от одного протона перейти к другому.

При больших расстояниях *R* между протонами электроста­тическая потенциальная энергия электрона близка к нулю почти во всем том пространстве, которое он вынужден преодо­леть, делая прыжок. Так что в этом пространстве электрон движется почти как свободная частица в пустом пространстве, но обладая при этом *отрицательной* энергией! В гл. 1 [уравне­ние (1.7)] мы видели, что амплитуда для частицы определенной энергии перейти с одного места на другое, удаленное на рас­стояние *r,* пропорциональна

C:\Мои документы\gray.jpg

где *р —* импульс, отвечающий заданной энергии. В теперешнем случае (применяется нерелятивистская формула) *р* определя­ется из выражения

C:\Мои документы\gray.jpg

А это значит, что *р* —число мнимое:

C:\Мои документы\gray.jpg

(другой знак перед корнем приводит к абсурду).

Стало быть, следует ожидать, что амплитуда *А* для иона

Н+2 будет меняться как

C:\Мои документы\gray.jpg

при больших расстояниях *R* между протонами. Сдвиг энергии, вызываемый электронной связью, пропорционален *А*;значит, существует сила, сближающая два протона, которая пропор­циональна (при больших *R)* производной от (8.10) по *R.*

Наконец, для полноты следует заметить, что в одноэлектронной системе с двумя протонами есть еще один эффект, кото­рый тоже приводит к зависимости энергии от *R.* Мы пока им пренебрегали, поскольку он обычно не очень важен, за исклю­чением как раз тех больших расстояний, на которых энергия обменного члена *А* убывает экспоненциально до очень малых величин. Новый эффект, о котором мы говорим,— это электро­статическое притяжение протона к атому водорода, возникаю­щее по той же причине, по какой любой заряженный предмет притягивает к себе незаряженный. «Голый» протон создает электрическое поле ξ(изменяющееся как 1*/R*2)возле нейтраль­ного атома водорода. Атом становится поляризованным, при­обретая наведенный дипольный момент μ, пропорциональный ξ*.* Энергия диполя есть (μξ,т. е. пропорциональна ξ2, или 1*/R*4*.* Значит, в выражении для энергии системы существует член, убывающий как четвертая степень расстояния (это поправка к *e*0)*.* Эта энергия спадает с расстоянием медленнее, чем сдвиг *А,* даваемый формулой (8.10). На каких-то больших расстоя­ниях *R* член с *R*4становится важнейшим, определяющим из­менение энергии с *R,* и поэтому единственной оставшейся си­лой. Заметьте, что электростатический член для обоих базис­ных состояний имеет один знак (раз сила притягивает, то энер­гия отрицательна), а потому и для обоих стационарных со­стояний его знак один и тот же, в то время как член электрон­ного обмена *А* для двух стационарных состояний дает разные знаки.

**§ 2. Ядерные силы**

Мы видели, что система, составленная из атома водорода и протона, вследствие обмена одним электроном обладает энер­гией взаимодействия, которая на больших расстояниях *R* меняется как

C:\Мои документы\gray.jpg

где *a =*C:\Мои документы\gray.jpg*.* (Обычно говорят, что происходит обмен «виртуальным» электроном, когда, как в нашем случае, элект­рон вынужден перепрыгивать через ту область, где его энергия оказалась бы отрицательной. Конкретнее говоря, «виртуаль­ный обмен» означает, что явление предполагает квантовомеханическую интерференцию между состоянием без обмена и состоянием с обменом.)

А теперь следует задать такой вопрос: не может ли быть, что и силы, действующие между другими частицами, имеют сходное происхождение? Что, к примеру, можно сказать о ядерной силе, действующей между нейтроном и протоном или между двумя протонами? Пытаясь объяснить природу ядерных сил, Юкава предположил, что сила, действующая между двумя нуклонами, вызывается сходным обменным эффектом, только в этом слу­чае из-за виртуального обмена не электроном, а какой-то но­вой частицей, которую он назвал «мезон». Сегодня мы бы отож­дествили мезон Юкавы с π-мезоном (или «пионом»), возникаю­щим в высокоэнергетических столкновениях протонов или других частиц.

Посмотрим для примера, какого рода силы возникнут от того, что протон и нейтрон обменяются положительным пио­ном (π+), имеющим массу *m*π. Как атом водорода Н0 может, от­казавшись от электрона е-, превратиться в протон р+

Н0→ р+ + е-, (8.12)

точно так же протон р+ может перейти в нейтрон n0, отказав­шись от π+-мезона:

р+→n0+π+ . (8.13)

Значит, если у нас есть протон (в точке *а)* и нейтрон (в точке *b),* разделенные расстоянием *R,* то протон может стать нейтроном, испуская π+-мезон, который затем поглощается нейтроном в точке *b,* обращая его в протон. И имеется энергия взаимодей­ствия системы из двух нуклонов и одного пиона, зависящая от амплитуды *А* пионного обмена, как это было с электрон­ным обменом в ионе Н+2.

В процессе (8.12) энергия атома Н0 (если вычислять ее нерелятивистски, опуская энергию поля электрона WH) мень­ше энергии протона на величину *mc*2, так что *кинетическая* энергия электрона отрицательна — или импульс мнимый [см. уравнение (8.9)]. В ядерном процессе (8.13) массы протона и нейтрона почти равны, так что *полная* энергия π+-мезона ока­жется равной нулю. Соотношение между полной энергией *Е* и импульсом *р* пиона с массой *mπ* таково:

*E*2=*р*2*с*2+*m*2π*c*4.

раз *Е* равно нулю (или по крайней мере пренебрежимо мало

по сравнению с *m*π), то импульс опять выходит мнимый:

*p=imπc.*

Повторяя знакомые нам уже рассуждения, с помощью ко­торых мы вычисляли амплитуду того, что связанный электрон проникнет через барьер в пространстве между двумя протонами, мы получаем для ядерного случая амплитуду обмена *А,* кото­рая — при больших *R —* будет вести себя как



Энергия взаимодействия пропорциональна *А* и, значит, ме­няется таким же образом. Мы получаем изменение энергии в форме так называемого *потенциала Юкавы* между двумя нук­лонами. Кстати, ту же формулу мы получили раньше прямо из дифференциального уравнения для движения пиона в пустом пространстве [см. гл. 28 (вып. 6), уравнение (28.18)].

Следуя той же линии рассуждений, можно попытаться при­кинуть взаимодействие двух протонов (или двух нейтронов), происходящее от обмена *нейтральными* пионами (π0). Основ­ной процесс теперь таков:

р+→р++π0. (8.15)

Протон может испустить виртуальный π0, оставаясь после этого все еще протоном. Если протонов два, то протон № 1 может испустить виртуальный π0, который поглотится прото­ном № 2. В конце остается опять пара протонов. Это немного не то, что было в случае иона H+2. Тогда Н0 переходил после испускания электрона в другое состояние — в протон. Теперь же мы предполагаем, что протон может испускать π0, не ме­няя своего характера. Такие процессы и впрямь наблюдаются в высокоэнергетических столкновениях. Процесс аналогичен тому, как электрон, испуская фотон, остается все же электроном:

е→е+фотон. (8.16)

Мы не «видим» фотонов внутри электрона до того, как они испустятся, или после того, как они поглотятся, и их «испускание» не изменяет «природы» электрона.

Вернемся к нашей паре протонов. Между ними существует взаимодействие из-за наличия амплитуды *А —* амплиту­ды того, что один из протонов испускает нейтральный пион, который проскакивает (с мнимым импульсом) к другому про­тону и там поглощается. Амплитуда эта опять пропорциональна (8.14), но *mπ—* теперь масса нейтрального пиона. Сходные рас­суждения приводят к такому же взаимодействию между двумя нейтронами. А раз ядерные силы (в пренебрежении электри­ческими эффектами), действующие между нейтроном и прото­ном, между протоном и протоном, между нейтроном и нейтро­ном, одинаковы, то мы приходим к заключению, что массы за­ряженного и нейтрального пионов обязаны быть равны между собой. И экспериментально оказывается, что массы действитель­но очень близки друг к другу, а небольшая разница между ними — это примерно то, что и следует из поправок на собст­венную энергию [см. гл. 28 (вып. 6)].

Существуют и другие виды частиц, скажем .K-мезоны, ко­торыми могут обмениваться два нуклона. Допустим также и одновременный обмен двумя пионами. Но у всех этих прочих обмениваемых «объектов» масса покоя *mx* выше массы пиона *mπ,* что приводит к членам в амплитуде обмена, изменяющимся как



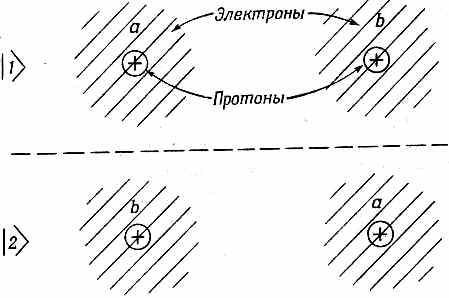
Такие члены с ростом *R* отмирают быстрее, чем одномезонный член. Сегодня еще никто не знает, как вычислять эти члены с большей массой, но для достаточно высоких значений *R* вы­живает только однопионный член. И действительно, те опыты, в которых играет роль только взаимодействие на больших расстояниях, свидетельствуют, что энергия взаимодействия именно такова, как предсказывает теория однопионного обмена.

В классической теории электричества и магнетизма кулоновское электростатическое взаимодействие и излучение света ускоряемым зарядом тесно связаны — оба они вытекают из уравнений Максвелла. Мы видели, что в квантовой теории свет может быть представлен как квантовые возбуждения гармони­ческих колебаний классического электромагнитного поля в ящике. С другой стороны, квантовая теория может быть по­строена при помощи описания света как частиц — фотонов, подчиняющихся статистике Бозе. В гл. 2, § 5, мы подчеркнули, что обе эти взаимоисключающие точки зрения всегда приводят к одинаковым предсказаниям. Может ли вторая точка зрения быть проведена последовательно и до конца, так чтобы в нее вошли *все* электромагнитные эффекты? В частности, если мы хотим описать электромагнитное поле полностью на языке бозе-частиц, т. е. фотонов, то чем будет вызвана сила Кулона?

С точки зрения «частиц» кулоновское взаимодействие между двумя электронами *вытекает из обмена виртуальными фото­нами.* Один из электронов испускает фотон [как в реакции (8.16)], который переходит к другому электрону и там погло­щается,— та же реакция идет в обратную сторону. Энергия взаимодействия снова дается формулой типа (8.14), но теперь *mπ* заменяется массой покоя фотона, которая равна нулю. Значит, виртуальный обмен фотоном приводит к энергии взаи­модействия, которая меняется просто обратно пропорциональ­но *R —* расстоянию между электронами — в точности, как нормальная кулоновская потенциальная энергия! В «частич­ной» (от слова частица) теории электромагнетизма процесс об­мена виртуальным фотоном приводит ко всем явлениям элек­тростатики.

**§ 3. Молекула водорода**

В качестве очередной системы с двумя состояниями рассмот­рим нейтральную молекулу водорода Н2. В ней, естественно, труднее разобраться, потому что там имеются два электрона. Мы опять начнем с рассуждений о том, что происходит, когда оба протона достаточно удалены друг от друга. Но теперь к ним следует добавить еще два электрона. Чтобы удобнее было сле­дить за ними, назовем их «электрон о» и «электрон 6». Здесь опять можно себе вообразить два мыслимых состояния. Одна возможность: «электрон а» размазан вокруг первого протона, а «электрон *b*» — вокруг второго (фиг. 8.4).



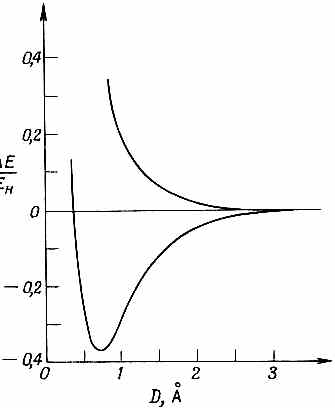
*Фиг. 8.4. Совокупность базисных состояний для молекулы* Н2.

Получаются по­просту два атома водорода. Это состояние назовем |*1*>. Но есть и другая возможность: вокруг первого протона размазан «электрон *b*», а вокруг второго — «электрон а». Это состояние обозначим |2>. Из-за симметрии эти две возможности обязаны быть энергетически эквивалентными, но, как мы увидим, энергия системы *не есть* просто энергия двух атомов водорода.

Нужно заметить, что имеются многие другие возможности. Например, «электрон а» может находиться близ первого про­тона, а «электрон 6» — в другом состоянии вокруг *того же* протона. Мы не станем рассматривать такой случай, поскольку его энергия заведомо будет больше (из-за сильного кулоновского отталкивания между двумя электронами). Для большей точ­ности, конечно, стоило бы учесть и такие состояния; но уже из рассмотрения одной только пары состояний, показанных на фиг. 8.4, мы узнаем самое главное о молекулярной связи. В этом приближении мы можем описать всякое состояние, задав амплитуду <*1*|ϕ> быть в состоянии |*1*> и амплитуду <*2*|ϕ> быть в состоянии |*2*>. Иными словами, вектор состоя­ния |ϕ> может быть записан в виде линейной комбинации

C:\Мои документы\gray.jpg

Для дальнейшего, как всегда, предположим, что имеется некоторая амплитуда *А* того, что электроны могут проходить через промежуточное пространство и обмениваться местами. Эта возможность обмена означает, что энергия системы, как мы наблюдали и в других системах с двумя состояниями, расщеп­лена. Как и у молекулярного иона водорода, расщепление очень мало, когда расстояние между протонами велико. А когда про­тоны сближаются, возрастает амплитуда переходов электронов туда-сюда, а вместе с ней растет и расщепление. Убывание энер­гии в нижнем состоянии означает, что имеется сила притяжения, сближающая атомы. И опять, когда протоны сблизятся особенно тесно, уровни энергии поднимутся вследствие кулоновского отталкивания. В итоге энергии двух стационарных состояний будут меняться с расстоянием так, как показано на фиг. 8.5.



*Фиг. 8.5. Уровни анергии молекулы* Н2 *для различных межпротонных расстояний D (ЕH=13,в эв).*

На расстоянии порядка 0,74Å низший энергетический уровень достигает минимума; это и есть расстояние между протонами в настоящей молекуле водорода.

Но у вас уже, вероятно, появилось возражение. А как же быть с тем, что оба электрона — тождественные частицы? Мы их назвали «электрон а» и «электрон *b»,* но на самом-то деле невозможно сказать, кто из них кто. И мы еще говорили в гл. 2, что если за счет обмена электронами (ферми-частицами) имеются два пути, по которым что-то может произойти, то две амплитуды будут интерферировать с *отрицательным* знаком. Это значит, что если у электронов переставить обозначающие их номера, то знак амплитуды должен перемениться. Однако мы только что пришли к выводу, что связанное состояние молекулы водо­рода имело бы вид (при *t*=0)

C:\Мои документы\gray.jpg

А согласно нашим правилам, перечисленным в гл. 2, такое со­стояние недопустимо. Если переставить номера электронов, то мы получим состояние

C:\Мои документы\gray.jpg

и знак выйдет тот же, а не обратный.

Эти рассуждения верны, но только тогда, когда *спины обоих электронов одинаковы.* Если у них обоих спины смотрят вверх (или вниз), то единственно допустимое состояние таково:

C:\Мои документы\gray.jpg

Для этого состояния перестановка электронов дает

C:\Мои документы\gray.jpg

что, как и положено, равно *|I*>. Значит, если сблизить два атома водорода так, чтобы их электроны вращались глядя в одну сторону, то они смогут перейти лишь в состояние *|I*>, но не в состояние |*II*>.Но заметьте теперь, что состояние |*I*> — это *верхнее* энергетическое состояние. Его кривая «энергия—расстояние» не имеет минимума. Два атома водорода всегда будут отталкиваться и не смогут образовать молекулу. Мы заключаем, что молекула водорода, в которой спины элек­тронов параллельны, не способна существовать. И это на самом деле так.

С другой стороны, наше состояние |*II*>полностью симмет­рично по двум электронам. Действительно, если переименовать электроны, назвав первый *а,* а второй *b,* то мы снова получим в точности то же состояние. В гл. 2, § 7, мы видели, что если две ферми-частицы находятся в одном и том же состоянии, то спины их *обязаны* быть противоположными. Значит, у связанной моле­кулы водорода спин одного из электронов должен быть направ­лен вверх, а спин другого — вниз.

Весь рассказ о молекуле водорода на самом деле будет зву­чать еще более запутанно, если мы захотим включить в него спины протонов. Тогда уже будет нельзя считать молекулу системой с *двумя* состояниями. Она скорее должна походить на систему с *восемью* состояниями — для каждого из наших состояний |*1*> и |*2*> возможны четыре различные расстановки спинов так что, пренебрегая спинами, мы слегка упростили дело. Наши окончательные выводы, однако, все равно верны.

Мы нашли, что в низшем энергетическом состоянии молекулы Н2 — единственном связанном состоянии — спины двух электронов противоположны друг другу. Полный спиновый момент количества движения электронов равен нулю. Наоборот, два близких атома водорода с параллельными спинами (и, стало быть, с полным моментом количества движения *h*) должны нахо­диться в высшем (несвязанном) энергетическом состоянии; атомы будут отталкиваться. Налицо интересная корреляция между спинами и энергиями. Она еще раз иллюстрирует то, о чем мы упоминали раньше: что выходит, будто у двух спинов существует энергия «взаимодействия», потому что случай парал­лельных спинов обладает большей энергией, чем случай спинов антипараллельных. В каком-то смысле можно говорить, что спины стремятся выстроиться в антипараллельное положение и стремясь к этому, обладают потенциалом к высвобождению энергии не из-за того, что там имеется большая магнитная сила, а из-за принципа запрета.

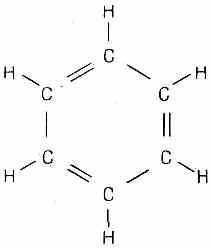
В § 1 мы видели, что связь двух *различных* ионов посредством *одного* электрона чаще всего оказывается весьма слабой. При *двухэлектронной* связи это *не так.* Представим, что два протона на фиг. 8.4 мы заменили любой парой ионов (с замкнутыми внутренними электронными оболочками и единичным ионным зарядом) и что энергии связи электрона в этих двух ионах раз­личны. Энергии состояний |*1*> и |*2*>по-прежнему будут равны друг другу, потому что в каждом из этих состояний имеется по одному электрону на каждый ион. Поэтому у нас всегда будет расщепление, пропорциональное *А.* Двухэлектронная связь поистине вездесуща — это самая обычная валентная связь. Химическая связь, как правило, предполагает эту игру в «туда-сюда», в которую играют два электрона. Хотя пара атомов может быть связана только одним электроном, это случается сравни­тельно редко, потому что требует надлежащих условий.

Наконец, надо заметить, что если энергия притяжения элек­трона к одному ядру намного больше, чем к другому, то уже нельзя говорить, будто можно игнорировать другие мыслимые состояния. Пусть ядро *а* (это может быть и положительный ион) притягивает электрон намного сильнее, чем ядро *b.* Это сильное притяжение может более чем компенсировать взаимное оттал­кивание двух электронов. И если это так, то низшее энергети­ческое состояние может обладать большой амплитудой того, что оба электрона окажутся возле *а* (образуя отрицательный ион), и малой амплитудой того, что хотя бы один из них обнару­жится возле *b.* Состояние выглядит как отрицательный ион рядом с положительным ионом. Именно это и случается в «ион­ных» молекулах наподобие NaCl. Вы видите, что мыслимы лю­бые градации между ковалентной связью и ионной связью.

Теперь вы ясно видите, что многие химические факты на квантовомеханическом языке удается очень отчетливо понять.

**§ 4. Молекула бензола**

Для изображения сложных органических молекул химики изобрели изящные диаграммы. Мы хотим теперь поговорить об одной из самых интересных молекул — о молекуле бензола, диаграмма которой приведена на фиг. 8.6.

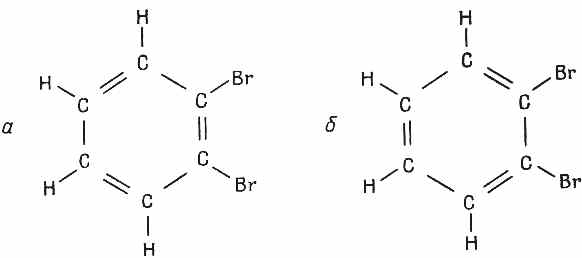


*Фиг. 8.6. Молекула бензола С6Н6.*

В нее входят по шести весьма симметрично расположенных атомов углерода и водо­рода. Каждая черточка на диаграмме представляет *пару* элек­тронов с противоположными спинами, пляшущих танец ковалентной связи. Каждый атом водорода вводит в игру по одному электрону, а каждый атом углерода — по четыре, образуя в общей сложности систему из 30 участвующих в игре электро­нов. (В углероде ближе к ядру есть еще два электрона, образую­щих первую, или *К,* оболочку. Они не показаны, поскольку их связь столь тесна, что сколько-нибудь заметной важности для ковалентной связи они не представляют.) Итак, каждая чер­точка на рисунке представляет связь, или пару электронов, а двойные связи означают, что между чередующимися парами атомов углерода имеются по *две пары* электронов.

С молекулой бензола связана одна загадка. Можно подсчи­тать, какая энергия должна потребоваться на образование этого химического соединения, потому что химики измерили энергии различных соединений, включающих части кольца; к примеру, изучая этилен, они узнали энергию двойной связи и т. д. Поэтому мы можем подсчитать полную энергию, которую должна была бы иметь молекула бензола. Однако истинная энер­гия бензольного кольца намного меньше, чем получается при таком подсчете: кольцо связано куда крепче, чем полагается обычной системе «ненасыщенных двойных связей». Как правило, система двойных связей, не образующая подобного кольца, весьма легко поддается химическим атакам: ее энергия сравни­тельно высока, и, добавляя лишние атомы водорода, двойные связи удается легко разрывать. Не то у бензола — кольцо его почти нерушимо: сломать его нелегко. Иными словами, энергия бензола намного ниже, чем дает подсчет по картине двойных связей.

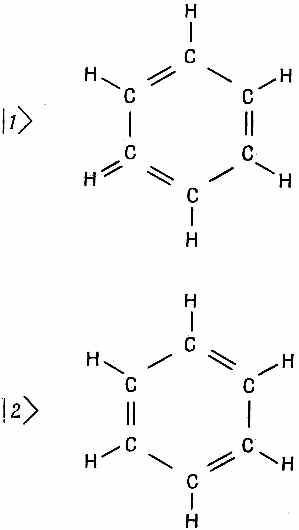
Имеется еще и другая загадка. Пусть мы заменили два смеж­ных водорода атомами брома, образуя *орто*-дибромбензол. Это можно сделать двумя путями. Атомы брома могут быть на противоположных концах двойной связи (фиг. 8.7, *а)* или могут быть на противоположных концах одинарной связи (фиг. 8.7, *б).*



*Фиг.**8.7. Две возможности для орто-дибромбензола. Два атома брома могут разделяться либо одиночной связью, либо двойной.*

Можно было бы подумать, что должны существовать две разные формы *opmo*-дибромбензола, но это не так. Есть только одно [такое вещество](#прим2).

Теперь мы собираемся разрешить эти загадки, и вы, может быть, уже догадались как: конечно, дело в том, что «основное состояние» бензольного кольца на самом деле является системой с двумя состояниями. Можно представить себе, что связи в бен­золе могут быть расположены двояким образом, как показано на фиг. 8.8.



*Фиг. 8.8. Совокупность базисных состояний для молекулы бензола.*

Вы скажете: «Но ведь это одно и то же; у них должна быть одинаковая энергия». Конечно, должна быть. Именно по­этому их и надо анализировать как систему с двумя состояниями. Каждое состояние представляет другую конфигурацию всей совокупности электронов, и существует некоторая амплитуда *А* того, что все переплетение переключится с одного расположения на другое, есть какой-то шанс, что электроны смогут сменить фигуру в танце.

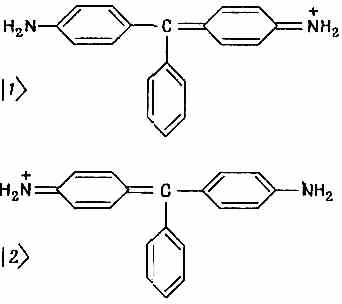
Как мы видели, эта вероятность переброса приводит к сме­шанному состоянию, энергия которого ниже, чем получилось бы, если бы мы рассчитали каждую из схем, представленных на фиг. 8.8, по отдельности. Вместо этого существуют два стацио­нарных состояния: одно с энергией выше, другое — ниже ожидаемого значения. Значит, в действительности истинное нормальное состояние бензола (с наинизшей энергией) не есть какая-либо из возможностей, представленных на фиг. 8.8, а обладает амплитудой 1/√2 пребывания в каждом из нарисованных состояний. Это единственное состояние, которое и стоит принимать в расчет в химии бензола при нормальных темпера­турах. Кстати, существует и верхнее состояние; мы вправе так говорить, потому что бензол обладает сильным поглощением света в ультрафиолетовой области с частотой ω= *(ЕI -EII)/h.* Вспомните, что в аммиаке, где прыгающим вверх и вниз объек­том являлась тройка протонов, расстояние между энергиями приходилось на микроволновую область. В бензоле таким объектом являются электроны, и, поскольку они намного легче, им и перескакивать туда-сюда тоже намного легче, отчего и коэффициент *А* становится куда больше. В итоге разница энер­гий намного больше — около 1,5 *эв, а* это энергия [ультрафиоле­тового фотона](#прим3).

Что же происходит, когда мы присоединяем бром? Тогда опять возникают две возможности с двумя разными электрон­ными конфигурациями, показанные на фиг. 8.7. Отличие их в том, что те два базисных состояния, из которых мы исходим, обладают теперь слегка различными энергиями. В стационарное состояние с наинизшей энергией по-прежнему войдет линейная комбинация двух состояний, но с неравными амплитудами. Для состояния |*1*> амплитуда может стать равной, скажем, √2/3, для состояния |*2*> она будет √1/3 чтобы знать коэффи­циенты точно, нужна добавочная информация, но, во всяком случае, если уж энергии *H*11 и *H*22 не равны друг другу, то и амплитуды *С*1и *С*2не могут быть равны между собой. Это, есте­ственно, означает, что одна из двух изображенных на рисунке возможностей более вероятна, чем другая, но все же электроны достаточно подвижны, чтобы и та, и другая обладали какой-то конечной амплитудой. У другого стационарного состояния

амплитуды другие (скажем, √1/3 и — √2/3), но оно лежит при более высокой энергии. Есть только одно наинизшее состояние, а не два, как можно было бы подумать, пользуясь наивной тео­рией закрепленных химических связей.

**§ 5. Красители**

Приведем еще один химический пример явления, связанного с двумя состояниями, но на этот раз на уровне крупных молекул. Касается это теории красителей. У многих красителей, а именно у большинства искусственных красителей, есть одна общая характеристика — они обладают своего рода симметрией. На фиг. 8.9 изображен ион одного из красителей — фуксина (он дает пурпурный цвет).



*Фиг. 8.9. Пара базисных состояний для молекулы красите­ля фуксин.*

В молекуле есть три кольцевые структуры, две из которых — бензольные кольца. Третья не совсем совпадает с бензольным кольцом, потому что внутри кольца в ней только две двойные связи. На рисунке показаны две в равной степени подходящие схемы, и мы догадываемся, что их энергии должны быть равны. Но имеется еще и амплитуда того, что все электроны смогут переброситься из одного состояния в другое, передвинув местоположение «незаполненного» кольца в другой конец. Когда электронов так много, то амплитуда переброса несколько ниже, чем у бензола, и различие в энергиях двух стационарных состояний не так велико. Но тем не менее все равно имеется обычная пара стационарных состояний |*I*> и |*II*>, представляющая собой сумму и разность двух базисных состояний, показанных на рисунке. Энергетический промежуток между |*I*>и |*II*> оказывается равным энергии фотона в оптической области. Если молекулу осветить, возникает очень сильное поглощение при некоторой частоте и молекула покажет­ся ярко окрашенной. Вот почему она краситель! Другая интересная черта такой молекулы красителя — в двух изображенных базисных состояниях центры электриче­ского заряда расположены в разных местах. В итоге молекула должна быть сильно подвержена действию внешнего электрического поля. Такой же эффект мы наблюдали в молекуле аммиака. Ясно, что его можно анализировать при помощи той же матема­тики, если только известны числа *Е*0и *А.* Их. вообще говоря получают, накапливая опытные данные. Если проделать изме­рения со многими красителями, то часто можно догадаться, что произойдет с какой-то родственной молекулой красителя. Из-за сильного сдвига местоположения центра электрического заряда значение μ в формуле (7.55) велико, и вещество обладает большой вероятностью поглощения света с характеристической частотой *2A/h.* Значит, вещество не просто окрашено, а окрашено очень густо — малое количество вещества поглощает много света. Скорости переброса (и тем самым *А)* очень чувствительны ко всей структуре молекулы. Если изменить *А,* то изменится расщепление энергии и вместе с ним цвет красителя. Кроме того, молекулы не обязаны быть совершенно симметричными. Мы видели, что то же самое основное явление бывает и при не­больших видоизменениях—даже когда имеется небольшая асим­метрия. Небольшого изменения цвета можно добиваться вве­дением в молекулы легких асимметрий. Так, другой важный краситель, малахитовая зелень, очень похож на фуксин, только у него две из имеющихся молекул водорода замещены на СН3. Цвет выходит другой, потому что *А* сдвинуто и скорость пере­броса электронов изменилась.

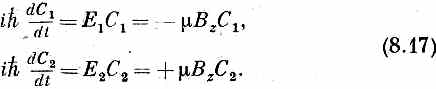
**§ 6. Гамильтониан частицы со спином 1/2 в магнитном поле**

Обратимся теперь еще к одной системе с двумя состоя­ниями. На этот раз нашим объектом будет частица со спином 1/2. Кое-что из того, что мы намерены сказать, затрагивалось уже в предыдущих главах, но повторение поможет нам немного прояснить кое-какие темные места. Покоящийся электрон мы можем считать тоже системой с двумя состояниями. Хотя в этом параграфе мы будем толковать об «электроне», но то, что мы выясним, будет справедливо по отношению ко *всякой* частице со спином 1/2.

Предположим, что в качестве наших базисных состояний *|1*>и |*2*>мы выбрали состояния, в которых z-компонента спина электрона равна либо +h/2, либо -*h/2.* Эти состояния, конечно, те же самые состояния (+) и (-), с которыми мы встречались в прежних главах. Чтобы согласовать эти и прежние обозначе­ния, спиновое состояние *1 у* мы будем отмечать «плюсом», а спи­новое состояние | *2 у —* «минусом», причем «плюс» и «минус» относятся к моменту количества движения в направлении z.

Всякое мыслимое состояние |ψ>электрона можно описать уравнением (8.1), задав амплитуду *С*1того, что электрон нахо­дится в состоянии |*1*>, и амплитуду *С*2 того, что он находится в состоянии *2у.* Для этого нам понадобится гамильтониан нашей системы с двумя состояниями — электрона в магнитном поле. Начнем с частного случая магнитного поля в направле­нии z.

Пусть вектор В имеет только z-компоненту *Bz.* Из определе­ния двух базисных состояний (что их спины параллельны и анти­параллельны **В)** мы знаем, что они уже являются стационарными состояниями — состояниями с определенной энергией в маг­нитном поле. Состояние |*1*> [соответствует энергии](#прим4), равной — μ*Вz,* а состояние |*2*> — энергии +μ*B*z. В этом случае га­мильтониан должен быть очень простым, поскольку на *С*1 *—* амплитуду оказаться в состоянии |*1*> *С*2 не влияет и наоборот:



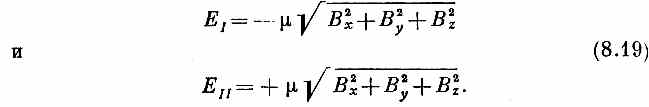
В этом частном случае гамильтониан равен

C:\Мои документы\gray.jpg

Итак, мы знаем, какой вид имеет гамильтониан, когда магнит­ное поле направлено по z, и знаем еще энергии стационарных состояний.

А теперь пусть поле *не направлено* по z. Каков теперь га­мильтониан? Как меняются матричные элементы, когда поле не направлено по z? Мы сделаем предположение, что для членов гамильтониана имеется своего рода принцип суперпозиции. Точнее, мы предположим, что если два магнитных поля нала­гаются одно на другое, то члены гамильтониана просто склады­ваются: если нам известно *Hij* для поля, состоящего из одной только компоненты *Bz,* и известно *Нij* для одной только *Вх,* то *Hij* для поля с компонентами *Bz, Bx* получится простым сло­жением. Это бесспорно верно, если рассматриваются только поля в направлении z: если удвоить *Bz,* то удвоятся и все *Нij.* Итак, давайте допустим, что *Н* линейно по полю В. Чтобы найти *Hij* для какого угодно магнитного поля, больше ничего и не нужно.

Пусть у нас есть постоянное поле В. Мы бы *могли* провести нашу ось z в направлении поля и *обнаружили бы* два стационарных состояния с энергиями ±μВ. Простой выбор другого направления осей не изменил бы *физики* дела. Наше *описание* стационарных состояний стало бы иным, но их энергии по-прежнему были бы ±μ*B*, т. е.



Дальше все уже совсем легко. У нас есть формулы для энер­гий. Нам нужен гамильтониан, линейный по *Вх, Вy* и *Bz,* который даст именно такие энергии, если применить нашу общую фор­мулу (8.3). Задача — найти гамильтониан. Прежде всего за­метим, что энергия расщепляется симметрично и ее среднее значение есть нуль. Взглянув на (8.3), мы сразу же увидим, что для этого требуется

*Н*22=-*H*11.

(Заметьте, что это подтверждается тем, что нам уже известно при *Вx=Вy*=0; в этом случае *Н*11*=-μBz* и *H*22=μ*Bz.)* Если теперь приравнять энергии из (8.3) к тому, что нам известно из (8.19), то получится

C:\Мои документы\gray.jpg

(Мы использовали также тот факт, что *Н*21*=Н\**12*,* так что *H*12*H*21 может быть записано в виде |*Н12*|2.) Опять в частном случае поля в направлении *z* это даст

C:\Мои документы\gray.jpg

откуда | *H*12| в этом частном случае равно нулю, что означает, что в *H*12не может войти член с *Вz.* (Вы помните, что мы гово­рили о линейности всех членов по *Вх, Вy* и *Bz.)*

Итак, пока мы узнали, что в *Н*11и *H*22 входят члены с *Вz,* а в *H*12 и *H*21 — нет. Можно попробовать угадать формулы, которые будут удовлетворять уравнению (8.20), написав

*H*11=-μ*В*z,

*H*22=μ*B*z

и

C:\Мои документы\gray.jpg

Оказывается, что *никак иначе* этого сделать нельзя!

«Погодите,— скажете вы,— *H*12 по *В* не линейно. Из (8.21) следует, что H12=μ√(*В*2*x+В*2*y)*»*.* Не обязательно. Есть и дру­гая возможность, которая уже *линейна,* а именно

*Н*12*=μ*(*Вx+iBy* )*.*

На самом деле таких возможностей не одна, в общем случае можно написать

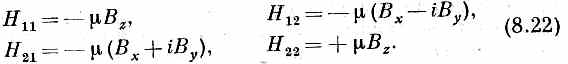
C:\Мои документы\gray.jpg

где δ — произвольная фаза.

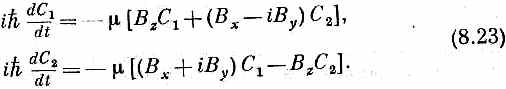
Какой же знак и какую фазу мы обязаны взять? Оказы­вается, что можно выбрать любой знак и фазу тоже любую, а физические результаты от этого не изменятся. Так что выбор — это вопрос соглашения. Еще до нас кто-то решил ставить знак минус и брать еiδ=-1. Мы можем делать так же и написать

C:\Мои документы\gray.jpg

(Кстати, эти соглашения связаны и согласуются с тем про­изволом в выборе фаз, который мы использовали в гл. 4.) Полный гамильтониан для электрона в произвольном маг­нитном поле, следовательно, равен



уравнения для амплитуд *С*1 и *С*2 таковы:



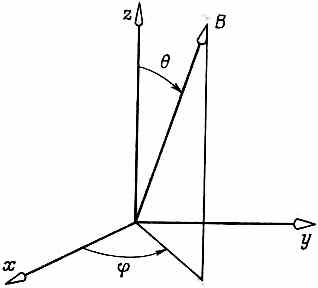
Итак, мы открыли «уравнения движения спиновых состояний» электрона в магнитном поле. Мы угадали их, пользуясь некото­рыми физическими аргументами, но истинная проверка всякого гамильтониана заключается в том, что он обязан давать предсказания, согласующиеся с экспериментом. Из всех сделанных проверок следует, что эти уравнения правильны. Более того, хотя все наши рассуждения относились к постоянному полю, написанный нами гамильтониан правилен и тогда, когда маг­нитные поля меняются со временем. Значит, мы теперь можем применять уравнения (8.23) для решения всевозможных инте­ресных задач.

**§ 7. Вращающийся электрон в магнитном поле**

Пример первый: пусть сначала имеется постоянное поле в направлении z. Ему соответствуют два стационарных состоя­ния с энергиями *±μВz.* Добавим небольшое поле в направлении *х.* Тогда уравнения получатся такими же, как в нашей старой задаче о двух состояниях. Опять, в который раз, получается знакомый уже нам переброс, и уровни энергии немного расщеп­ляются. Пусть, далее, *x*-компонента поля начнет меняться во времени, скажем, как cosωt. Тогда уравнения станут такими, как для молекулы аммиака в колеблющемся электрическом поле (см. гл. 7). И тем же способом, что и прежде, вы можете рассчитать процесс во всех деталях. При этом вы увидите, что колеблющееся поле приводит к переходам от +z-состояния к —z-состоянию и обратно, если только горизонтальное поле колеблется с частотой, близкой к резонансной, ω0=2μ*B*z/*h*. *Это приводит к квантовомеханической теории явлений магнит­ного резонанса, описанной нами в гл. 35 (вып. 7).*

Можно еще сделать мазер, в котором используется система со спином 1/2. Прибор Штерна — Герлаха создает пучок частиц, поляризованных, скажем, в направлении +z, и они потом направляются в полость, находящуюся в постоянном магнитном поле. Колеблющиеся в полости поля, взаимодействуя с магнит­ным моментом, вызовут переходы, которые будут снабжать полость энергией.

Рассмотрим теперь второй пример. Пусть у нас имеется магнитное поле В, направление которого характеризуется полярным углом 6 и азимутальным углом ϕ (фиг. 8.10).



*Фиг. 8.10. Направление В опре­деляется полярным углом θ и ази­мутальным углом ϕ.*

Допу­стим еще, что имеется электрон, спин которого направлен по полю. Чему равны амплитуды *С*1и *С*2для этого электрона? Иными словами, обозначая состояние электрона |ψ>, мы хотим написать

C:\Мои документы\gray.jpg

где *C*1и *С*2 равны

C:\Мои документы\gray.jpg

а |*1*> и |*2*>обозначают то же самое, что раньше обозначалось |+> и |-> (по отношению к выбранной нами оси z).

Ответ на этот вопрос также содержится в наших общих уравнениях для систем с двумя состояниями. Во-первых, мы знаем, что раз спин электрона параллелен В, то электрон нахо­дится в стационарном состоянии с энергией *ЕI=-μВ.* Поэтому и *c*1 и *С*2 должны изменяться как C:\Мои документы\gray.jpg

[см. уравнение (7.18)]; и их коэффициенты *а*1и *а*2 даются формулой (8.5):

C:\Мои документы\gray.jpg

Вдобавок *a*1 и *а*2 должны быть нормированы так, чтобы было |*a*|2 +|*а*2|2=1. Величины *Н*11и *H*12 мы можем взять из (8.22), используя равенства

*Bz=Bcosθ, Вх=В*sinθсоsϕ, *Ву=В*sinθsinϕ.

Тогда мы имеем

C:\Мои документы\gray.jpg

Кстати, скобка во втором уравнении есть простоC:\Мои документы\gray.jpg*,* так что проще писать

C:\Мои документы\gray.jpg

Подставляя эти матричные элементы в (8.24) и сокращая на -μ*B,* находим

C:\Мои документы\gray.jpg

Зная это отношение и зная условие нормировки, можно найти и *а*1*,* и *а*2. Сделать это нетрудно, но мы сократим путь, прибег­нув к одному трюку. Известно, что

1-cosθ=2sin2(θ/2) и sinθ=2sin(θ/2)cos(θ/2). Значит, (8.27) совпадает с

C:\Мои документы\gray.jpg

Один из ответов, следовательно, таков:

C:\Мои документы\gray.jpg

Он удовлетворяет и уравнению (8.28), и условию

C:\Мои документы\gray.jpg

Вы знаете, что умножение *a*1 и *а*2 на произвольный фазовый мно­житель ничего не меняет. Обычно формуле (8.29) предпочитают более симметричную запись, умножая на e'f'2. Принято пи­сать так:

C:\Мои документы\gray.jpg

Это и есть ответ на наш вопрос. Числа *а*1и *а*2 — это ампли­туды того, что электрон будет замечен спином вверх или вниз (по отношению к оси *z),* если известно, что его спин направлен вдоль оси (θ,ϕ). [Амплитуды *C*1и *С*2равны просто *a*1 и *a*2, умноженным на C:\Мои документы\gray.jpg

Заметьте теперь занятную вещь. Напряженность *В* магнитного поля нигде в (8.30) не появляется. Тот же результат разумеется, получится в пределе, если поле *В* устремить к нулю Это означает, что мы дали *общий* ответ на вопрос, как представлять частицу, спин которой направлен вдоль произвольной оси. Амплитуды (8.30) — это проекционные амплитуды для частиц со спином 1/2, подобные проекционным амплитудам для частиц со спином 1, приведенным в гл. 3 [уравнения (3.38)]. Теперь мы сможем находить для фильтрованных пучков частиц со спином 1/2 амплитуды проникновения через тот или иной фильтр Штерна — Герлаха.

Пусть |+z> представляет состояние со спином, направлен­ным по оси *z* вверх, а |-z> — состояние со спином вниз. Если | +z'> представляет состояние со спином, направленным вверх по оси *z',* образующей с осью *z* углы θ и ϕ, то в обозначе­ниях гл. 3 мы имеем

C:\Мои документы\gray.jpg

Эти результаты эквивалентны тому, что мы нашли из чисто гео­метрических соображений в гл. 4 [уравнение (4.36)]. (Если вы в свое время решили пропустить гл. 4, то вот перед вами один из ее существенных результатов.)

Напоследок вернемся еще раз к тому примеру, о котором уже не раз говорилось. Рассмотрим такую задачу. Сперва имеет­ся электрон с определенным образом направленным спином, затем на 25 минут включается магнитное поле в направлении *z,* а затем выключается. Каким окажется конечное состояние? Опять представим состояние в виде линейной комбинации |ψ>=|*1*>*C*1+|*2*>*С2,* Но в нашей задаче состояния с опреде­ленной энергией являются одновременно нашими базисными состояниями |*1*> и |*2>,* Значит, *С*1и *С*2 меняются только по фазе. Мы знаем, что

C:\Мои документы\gray.jpg

и

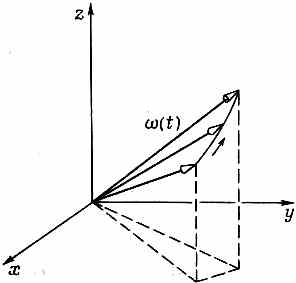
C:\Мои документы\gray.jpg

Мы сказали, что вначале у спина электрона было определенное направление. Это означает, что вначале *С*1и *С*2были двумя числами, определяемыми формулами (8.30). Переждав *Т* се­кунд, новые *С*1 и *С*2 мы получим из прежних умножением соот­ветственно на C:\Мои документы\gray.jpgиC:\Мои документы\gray.jpg. Что это будут за состоя­ния? Узнать это легко, ведь это все равно, что изме­нить угол ϕ, вычтя из него *2μBzT/h,* и не трогать угол θ.

Это значит, что к концу интервала времени *Т* состояние |ψ> будет представлять электрон, выстроенный в направлении, отличаю­щемся от первоначального только *поворотом* вокруг оси z на угол Δϕ*=2μBzT/h.* Раз этот угол пропорционален *Т,* то можно говорить, что направление спина прецессирует вокруг оси z с угловой скоростью *2μBz/h.* Этот результат мы уже полу­чали раньше несколько раз, но не так полно и строго. Теперь мы получили полное и точное квантовомеханическое описание прецессии атомных магнитов.

Любопытно, что математические идеи, которые мы только что применили к электрону, вращающемуся в магнитном поле, применимы и для *любой* системы с двумя состояниями. Это озна­чает, что, проведя математическую *аналогию* с вращающимся электроном, можно при помощи чисто геометрических рассужде­ний решить *любую задачу* для двухуровневой системы. Сперва вы сдвигаете энергию так, чтобы (*H*11+*H*22) было равно нулю (так что *H*11*=-H*22). И тогда любая задача о такой системе *формально* совпадет с задачей об электроне в магнитном поле. Вам нужно будет только *отождествить —μBz* с *H*11, а -μ*(Вх-iBy* ) с *H*12*.* И неважно, какая физика там была перво­начально — молекула ли аммиака или что другое,— вы можете перевести ее на язык соответствующей задачи об электроне. Стало быть, если мы в состоянии решить в *общем случае* задачу об электроне, мы уже решили *все* задачи о двух состояниях.

А общее решение для электронов у нас есть! Пусть вначале электрон обладает определенным состоянием, в котором спин направлен вверх по некоторому направлению, а магнитное поле В — в какую-то другую сторону. Вращайте просто направление спина вокруг оси В с *векторной* угловой скоростью ω(*t*)*,* равной некоторой константе, умноженной на вектор В (а именно ω=2μ**В**/h). Если В меняется со временем, двигайте по-прежнему ось вращения так, чтобы она оставалась параллельной В, и изменяйте скорость вращения так, чтобы она все время была пропорциональна напряженности В (фиг. 8.11).



*Фиг. 8.11. Направление спина электрона в изменяющемся магнит­ном поле* В *(t) прецессирует с частomoй ω(t) вокруг оси, параллель­ной* В.

Если все время это делать, вы остановитесь на какой-то конечной, ориентации спиновой оси, и амплитуды *С*1и *С*2 получатся просто как ее проекции [при помощи (8.30)] на вашу систему координат.

Вы видите, что задача эта чисто геометрическая: надо заме­тить, где закончились все ваши вращения. Хотя сразу видно, что для этого требуется, но эту геометрическую задачу (отыска­ние окончательного итога вращений с переменным вектором угловой скорости) нелегко в общем случае решить явно. Во вся­ком случае, мы *в принципе* видим общее решение любой задачи для двух состояний. В следующей главе мы глубже исследуем математическую технику обращения с частицами спина 1/2 и, следовательно, обращения с системами, обладающими двумя состояниями, в общем случае.

***\* Мы принимаем энергию покоя m0c2 за «нуль» энергии и считаем магнитный момент μ электрона отрицательным числом, поскольку он направлен против спина.***

***\* Сказанное нами может вас слегка ввести в заблуждение. Погло­щение ультрафиолетового света в принятой нами для бензола системе с двумя состояниями было бы очень слабым, потому что матричный элемент дипольного момента между двумя состояниями равен нулю. [Оба состояния электрически симметричны, и в нашей формуле (7.55) для ве­роятности перехода дипольный момент μ равен нулю, и свет не погло­щается.] Если бы других состояний не было, существование верхнего со­стояния пришлось бы доказывать иными путями. Однако более полная теория бензола, которая исходит из большего числа базисных состояний (обладающих, скажем, смежными двойными связями), показывает, что истинные стационарные состояния бензола слегка искажены по сравне­нию с найденными нами. В результате все же возникает дипольный мо­мент, который и разрешает упомянутые в тексте переходы, приводящие к поглощению ультрафиолетового света.***

\* Мы немного упрощаем дело. Первоначально химики думали, что должны существовать четыре формы дибромбензола: две формы с атомами брома при соседних атомах углерода (орто-дибромбензол), третья форма с атомами брома при атомах углерода, идущих через один (.мета-дибромбензол), и четвертая форма с атомами брома, стоящими друг против друга (пара-дибромбензол). Однако отыскали они только три формы — суще­ствует лишь одна форма орто-молекулы.

\* До тех пор, пока нет сильных магнитных полей, это предположе­ние вполне удовлетворительно. Влияние магнитных полей на электрон мы обсудим в этой же главе позже, а очень слабые спиновые эффекты в атоме водорода — в гл. 10.

## Глава 9

**ЕЩЕ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ**

# состояниями

[**§ 1. С****пиновые матри­цы Паули**](#a1)

[**§ 2.Спиновые** **матри­цы как операторы**](#a2)

[**§ З. Решение уравне­ний для двух со­стоян****ий**](#a3)

[**§ 4. Состояния поляризации фо****тона**](#a4)

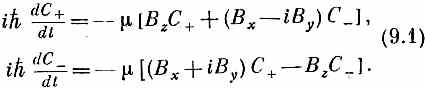
[**§ 5. Нейтральный K****-мезон**](#a5)[\*](#прим1)

[**§ 6. Обобщение на си­с****темы с N** **состоя­ниями**](#a6)

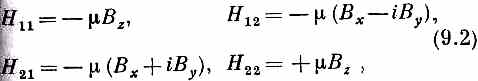
*Повторить:* гл. 33 (вып. 3) «Поля­ризация»

**§ 1. Спиновые матрицы. Паули**

Продолжаем обсуждение свойств двухуровневых систем. В конце предыдущей главы мы говорили о частице со спином l/2в магнитном поле. Мы описывали спиновое состояние, задавая амплитуду *С*1того, что z-компонента спинового момента количества движения равна +h/2, и амплитуду *С*2 того, что она равна -*h*/2. В предыдущих главах мы эти базисные состояния обозначали |+> и |->. Прибегнем опять к этим обозначениям, хотя, когда это будет удобнее, мы будем менять их на |*1*> и |*2*>. Мы видели в последней главе, что когда частица со спином 1/2 и с магнитным моментом μ, находится в магнитном поле **В***=(Вx, Вy*, *Bz),* то амплитуды *С+*(*=C*1)и *С-* (=*С*2) связаны сле­дующими дифференциальными уравнениями:



Иначе говоря, матрица-гамильтониан *Hij* имеет вид



конечно, уравнения (9.1) совпадают с

C:\Мои документы\gray.jpg

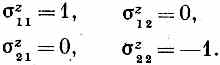
где *i* и *j* принимают значения + и - (или 1 и 2).

Эта система с двумя состояниями — спин электрона — на­столько важна, что очень полезно было бы найти для ее описа­ния способ поаккуратнее и поизящнее. Мы сейчас сделаем небольшое математическое отступление, чтобы показать вам, как обычно пишутся уравнения системы с двумя состояниями. Это делается так: во-первых, заметьте, что каждый член гамильто­ниана пропорционален μ, и некоторой компоненте В; поэтому *(чисто формально)* можно написать

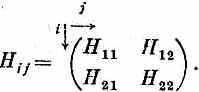
C:\Мои документы\gray.jpg

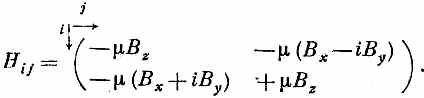
Здесь нет какой-либо новой физики; эти уравнения просто означают, что коэффициентыC:\Мои документы\gray.jpg— их всего 4X3=12 — могут быть представлены так, что (9.4) совпадет с (9.2).

Посмотрим, почему это так. Начнем с *B*z*.* Раз *В*z встречается только в *H*11 и *H*22, то все будет в порядке, если взять



Мы часто пишем матрицу *Hij* в виде таблички такого рода:

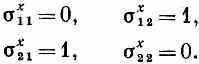


Для гамильтониана частицы со спином 1/2 в магнитном поле **В**—это все равно что 

Точно так же и коэффициенты C:\Мои документы\gray.jpgможно записать в виде матрицы



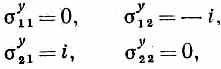
Расписывая коэффициенты при *Вх,* получаем, что элементы матрицы σ*х* должны иметь вид



Или сокращенно:

C:\Мои документы\gray.jpg

Инаконец, глядя на B*y,* получаем



или

C:\Мои документы\gray.jpg

Если так определить три матрицы сигма, то уравнения (9.1) и (9.4) совпадут. Чтоб оставить место для индексов *i* и *j*, мы отме­тили, какая а стоит при какой компоненте *В*, поставив индексы *х, у, z* сверху. Обычно, однако, *i* и *j* отбрасывают (их легко себе и так вообразить), а индексы *х, у* и z ставят внизу. Тогда (9.4) записывается так:

C:\Мои документы\gray.jpg

Матрицы сигма так важны (ими беспрерывно пользуются),

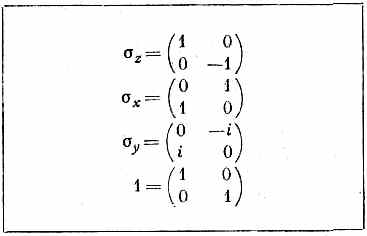
что мы выписали их в табл. 9.1. (Тот, кто собирается работать

в квантовой физике, обязан запомнить их.) Их еще называют

*спиновыми матрицами Паули —* по имени физика, который

их выдумал.

*Таблица 9.1* • СПИНОВЫЕ МАТРИЦЫ ПАУЛИ



В таблицу мы включили еще одну матрицу 2X2, которая бывает нужна тогда, когда мы хотим рассматривать систему, о6a спиновых состояния которой имеют одинаковую энергию, или когда хотим перейти к другой нулевой энергии. В таких случаях к первому уравнению в (9.1) приходится добавлять *E*0*С*+ , а ко второму *Е0С-.* Это можно учесть, введя новое обозначение — *единичную матрицу* «1», или δij:

C:\Мои документы\gray.jpg

переписав (9.8) в виде

C:\Мои документы\gray.jpg

Обычно просто *понимают без лишних оговорок,* что любая константа наподобие *Е*0автоматически умножается на еди­ничную матрицу, и тогда пишут просто

C:\Мои документы\gray.jpg

Одна из причин, отчего спиновые матрицы так полезны,— это что *любая* матрица 2x2 может быть выражена через них. Во всякой матрице стоят четыре числа, скажем

C:\Мои документы\gray.jpg

Ее всегда можно записать в виде линейной комбинации четы­рех матриц. Например,

C:\Мои документы\gray.jpg

Это можно делать по-всякому, но, в частности, можно сказать, что *М* состоит из какого-то количества σ*х* плюс какое-то коли­чество а и т. д., и написать

C:\Мои документы\gray.jpg

где «количества» α, β, γ и δ в общем случае могут быть комплекс­ными числами.

Раз любая матрица 2X2 может быть выражена через единич­ную матрицу и матрицу сигма, то все, что может понадобиться для *любой* системы с двумя состояниями, у нас уже есть. Какой бы ни была система с двумя состояниями — молекула аммиака, краситель фуксин, что угодно,— гамильтоново уравнение может быть переписано в сигмах. Хотя в физическом случае электрона в магнитном поле сигмы кажутся имеющими геометрический смысл, но их можно считать и просто полезными матрицами, пригодными к употреблению во всякой системе с двумя состоя­ниями.

Например, один из способов рассмотрения протона и ней­трона — это представлять их как одну и ту же частицу в любом из двух состояний. Мы говорим, что *нуклон* (протон или нейтрон) есть система с двумя состояниями, в данном случае состояниями по отношению к электрическому заряду. Если рассматривать нуклон таким образом, то состояние |*1*>может представлять протон, а |*2*> — нейтрон. Говорят, что у нуклона есть два состояния «изотопспина».

Поскольку мы будем применять матрицы сигма в качестве «арифметики» квантовой механики систем с двумя состояниями, то наскоро познакомимся с соглашениями матричной алгебры. Под «суммой» двух или большего числа матриц подразумевается как раз то, что имелось в виду в уравнении (9.4).

Вообще если мы «складываем» две матрицы *А* и *В,* то «сумма» *С* означает, что каждый ее элемент *Cij* дается формулой

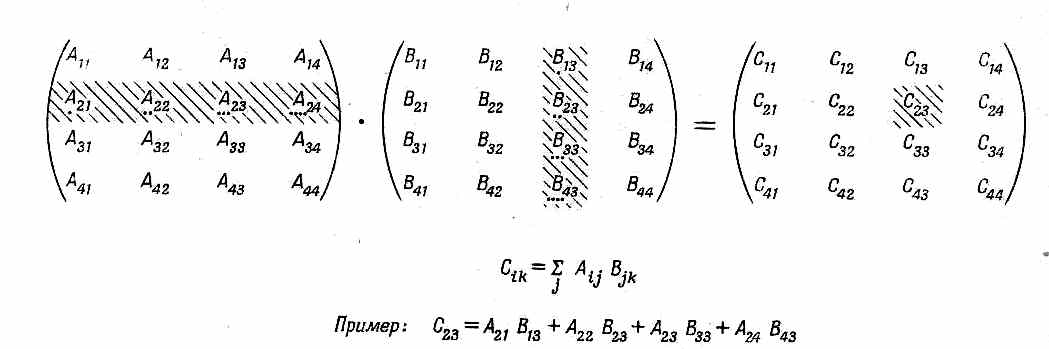
*Cij=Aij+Bij.*

Каждый элемент *С* есть сумма элементов *А* и *В,* стоящих на тех же самых местах.

В гл. 3, § 6, мы уже сталкивались с представлением о матрич­ном «произведении». Та же идея полезна и при обращении с мат­рицами сигма. В общем случае «произведение» двух матриц *A* и *В* (в этом именно порядке) определяется как матрица *С* с элементами

C:\Мои документы\gray.jpg

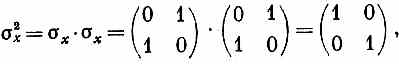
Это — сумма произведений элементов, взятых попарно из *i*-й строчки *А* и *k*-ro столбца *В.* Если матрицы расписаны в виде таблиц, как на фиг. 9.1, то можно указать удобную «систему» получения элементов матрицы-произведения.



*Фиг. 9.1. Перемножение двух матриц.*

Скажем, вы вычисляете *С*23*.* Вы двигаете левым указательным пальцем *по второй строчке А,* а правым — *вниз по третьему столбцу В,* перемножаете каждую пару чисел и складываете пары по мере движения. Мы попытались изобразить это на рисунке.

Для матриц 2X2 это выглядит особенно просто. Например, если σ*х* умножается на σ*x*, то выходит



т. е. просто единичная матрица. Или, для примера, подсчита­ем еще

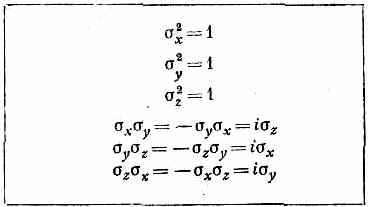
C:\Мои документы\gray.jpg

Взглянув на табл. 9.1, вы видите, что это просто матрица σ*x*, умноженная на *i.* (Вспомните, что умножение матрицы на число означает умножение каждого элемента матрицы на число.) Попарные произведения сигм очень важны и выглядят они довольно забавно, так что мы их выписали в табл. 9.2. Вы сами можете подсчитать их, как мы сделали это с σ2*х* и σ*х*σ*y*.

С матрицами *о* связан еще один очень интересный и важный момент. Можно, если угодно, представить себе, что три матрицы σ*х*., σ*y* и σ*z* подобны трем компонентам вектора; его иногда име­нуют «вектором сигма» и обозначают а. Это на самом деле «мат­ричный вектор», или «векторная матрица». Это три разные матрицы, связанные каждая со своей осью *х, у* или *z.* С их по­мощью гамильтониан системы можно записать в красивом виде, пригодном для любой системы координат:

C:\Мои документы\gray.jpg

*Таблица 9.2* • ПРОИЗВЕДЕНИЯ СПИНОВЫХ МАТРИЦ



Хотя мы записали эти три матрицы в представлении, в кото­ром понятия «вверх» и «вниз» относятся к направлению z (так что σz выглядит особенно просто), но можно представить себе, как будут они выглядеть в любом другом представлении. И хотя это требует немалых выкладок, можно все же показать, что они изменяются как компоненты вектора. (Мы, впрочем, пока не будем заботиться о том, чтобы доказать это. Проверьте сами, если хотите.) Вы можете пользоваться о в различных системах координат, как если бы это был вектор.

Вы помните, что гамильтониан *Н* связан в квантовой механике с энергией. Он действительно в точности совпадает с энергией в том простом случае, когда состояний только одно. Даже в системе с двумя состояниями, какой является спин электрона, если записать гамильтониан в виде (9.13), он очень напоминает *классическую* формулу энергии магнита с магнитным моментом μ в магнитном поле В. Классически это выглядит так:

C:\Мои документы\gray.jpg

где μ — свойство объекта, а В — внешнее поле. Можно вообра­зить себе, что (9.14) обращается в (9.13), если классическую энергию заменяют гамильтонианом, а классическое μ — мат­рицей (μσ. Тогда после такой чисто формальной замены результат можно будет интерпретировать как матричное уравнение. Иногда утверждают, что каждой величине в классической физике соответствует в квантовой механике матрица. На самом деле правильнее было бы говорить, что матрица Гамильтона соот­ветствует энергии и что у каждой величины, которая может быть определена через энергию, есть соответствующая матрица. Например, магнитный момент можно определить через энергию, сказав, что энергия во внешнем поле **В** есть —**μ**•**B**. Это *определяет* вектор магнитного момента μ*.* Затем мы смотрим на формулу для гамильтониана реального (квантового) объекта в магнитном поле и пытаемся угадать, какие матрицы соответ­ствуют тем или иным величинам в классической формуле. С помощью этого трюка *иногда у некоторых* классических вели­чин появляются их квантовые двойники.

Если хотите, попробуйте разобраться в том, как, в каком смысле классический вектор равен матрице μσ*;* может быть, вы что-нибудь и откроете. Но не надо ломать над этим голову. Право же, не стоит: на самом-то деле они *не равны.* Кван­товая механика — это совсем другой тип теории, другой тип представлений о мире. Иногда случается, что всплывают неко­торые соответствия, но вряд ли они представляют собой нечто большее, нежели мнемонические средства — правила для за­поминания.

Иначе говоря, вы запоминаете (9.14), когда учите классиче­скую физику; затем если вы запомнили соответствие μ→μσ, то у вас есть повод вспомнить (9.13). Разумеется, природа знает *квантовую* механику, классическая же является всего лишь приближением, значит, нет ничего загадочного в том, что из-за классической механики выглядывают там и сям тени квантовомеханических законов, представляющих на самом деле их подоп­леку. Восстановить реальный объект по тени прямым путем ни­как невозможно, но тень помогает нам вспомнить, как выглядел объект. Уравнение (9.13) — это истина, а уравнение (9.14) — ее тень. Мы сперва учим классическую механику и поэтому нам хочется выводить из нее квантовые формулы, но раз и навсегда установленной схемы для этого нет. Приходится каждый раз возвращаться обратно к реальному миру и открывать правильные квантовомеханические уравнения. И когда они оказываются похожими на что-то классическое, мы радуемся. Если эти предостережения покажутся вам надоедливыми, если, по-вашему, здесь изрекаются старые истины об отношении классической физики к квантовой, то прошу прощения: сработал условный рефлекс преподавателя, который привык втолковы­вать квантовую механику студентам, никогда прежде не слыхав­шим о спиновых матрицах Паули. Мне всегда казалось, что они не теряют надежды, что квантовая механика как-то сможет быть выведена как логическое следствие классической механики, той самой, которую они старательно учили в прежние годы. (Может быть, они просто хотят обойтись без изучения чего-то нового.) Но, к счастью, вы выучили классическую формулу (9.14) всего несколько месяцев тому назад, да и то с оговорками, что она не совсем правильна, так что, может быть, вы не будете столь неохотно воспринимать необходимость рассматривать квантовую формулу (9.13) в качестве первичной истины.

**§ 2. Спиновые матрицы как операторы**

Раз уж мы занялись математическими обозначениями, то хотелось бы описать *еще один* способ записи, способ, часто упо­требляемый из-за своей краткости. Он прямо следует из обозна­чений, введенных в гл. 6. Если имеется система в состоянии |ψ|(*t*)>, изменяющемся во времени, то можно, как мы это де­лали в уравнении (6.31), написать амплитуду того, что система при *t*+Δ*t* оказалась бы в состоянии |*i*>:

C:\Мои документы\gray.jpg

Матричный элемент *<i*|*U(t, t*+Δ*t*) |*j*> — это амплитуда того, что базисное состояние |*j*> превратится в базисное состоя­ние |*i*> за время Δ*t*. Затем мы *определяли Нij* при помощи

C:\Мои документы\gray.jpg

и показывали, что амплитуды *Ci*(*t*)=<*i*|ψ(*t*)> связаны диф­ференциальными уравнениями

C:\Мои документы\gray.jpg

Если амплитуды *Ci* записать явно, то это же уравнение будет выглядеть по-иному:

C:\Мои документы\gray.jpg

Далее, матричные элементы *Hij —* это тоже амплитуды, которые можно записывать в виде <*i*|*H*|*j*>; наше дифференциальное уравнение выглядит тогда так:

C:\Мои документы\gray.jpg

Мы видим, что *—i/h* <1|*H*|*j*> — это амплитуда того, что в физических условиях, описываемых матрицей *Н,* состояние |*j*> за время *dt* «генерирует» состояние |*i*>. (Все это неявно подразумевалось в рассуждениях гл. 6, § 4.)

Теперь, следуя идеям гл. 6, § 2, мы можем сократить в (9.17) общий «множитель» <*i*|, поскольку (9.17) справедливо при любом |*i*>, и записать это уравнение просто в виде

C:\Мои документы\gray.jpg

Или, сделав еще один шаг, убрать к тому же и *j* и написать

C:\Мои документы\gray.jpg

В гл. 6 мы указывали, что при такой записи *Н* в *Н*|*j*> или в *Н*|ψ> называется *оператором.* Отныне на операторы мы бу­дем надевать маленькие шапочки (^), чтобы напоминать вам, что это оператор, а не число. Мы будем писать C:\Мои документы\gray.jpg

. Хотя оба уравнения (9.18) и (9.19) *означают в точности то же самое,* что и (9.15) или (9.17), мы можем *думать* о них совершенно иначе. Например, уравнение, (9.18) можно было бы описывать так: «Производная по времени от *вектора состояния* |ψ> рав­няется тому, что получается от действия *оператора* Гамильтона *Н* на каждое базисное состояние, умноженному на амплитуду <*j*|ψ> того, что ψ окажется в состоянии *j,* и просуммирован­ному по всем *j*». Или уравнение (9.19) можно описать так: «Производная по времени (умноженная на *ih)* от состояния |ψ> равняется тому, что вы получите, если подействуете гамильто­нианом *Н* на вектор состояния |ψ>». Это просто сокращенный способ выражения того, что содержится в (9.17), но, как вы потом убедитесь, он может оказаться очень удобным.

Если хотите, идею «абстрагирования» можно продвинуть еще на шаг. Уравнение (9.19) справедливо для *всякого состоя­ния* |ψ>. Кроме того, левая сторона *ihd/dt* — это тоже опера­тор; его действие: «продифференцируй по *t* и умножь на *ih».* Итак, (9.19) можно рассматривать как уравнение между опера­торами — операторное уравнение

*Ih(d/dt)=* C:\Мои документы\gray.jpg

Оператор Гамильтона (с точностью до константы), действуя на любое состояние, приводит к тому же результату, что и *d/dt.* Помните, что это уравнение, как и (9.19), *не есть* утверждение о том, что оператор C:\Мои документы\gray.jpg просто та же *операция,* что и *d/dt.* Эти уравнения — динамический закон природы (закон движения) для квантовой системы.

Только для того, чтобы попрактиковаться в этих представ­лениях, продемонстрируем вам другой вывод уравнения (9.18). Вы знаете, что любое состояние |ψ> можно записать через его проекции на какой-то базис [см. (6.8)]:

C:\Мои документы\gray.jpg

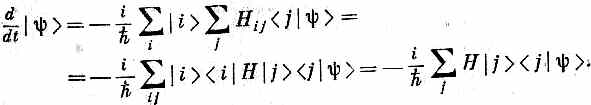
Как же меняется |ψ> во времени? Продифференцируем его:

C:\Мои документы\gray.jpg

Но базисные состояния |*i*> во времени неменяются (по край­ней мере *у нас* они всегда были определенными, закрепленными состояниями), и только амплитуды <*i*|ψ>—это числа, которые могут меняться. Иначе говоря, (9.21) прекращается в

C:\Мои документы\gray.jpg

Но ведь *d*<*i*|ψ>/dt нам известно—это (9.16); получается, сле­довательно,



А это опять-таки уравнение (9.18).

Итак, на гамильтониан можно смотреть по-разному. Можно рассматривать совокупность коэффициентов *Hij* просто как компанию чисел, можно говорить об «амплитудах» <*i*|*Н*|j>, можно представлять себе «матрицу» *Hij* и можно считать его

«оператором» *H^*. Все это одно и то же.

Вернемся теперь к нашей системе с двумя состояниями. Если уж мы записываем гамильтониан через матрицы сигма (с подходящими численными множителями, такими, как *Вх* и т. д.), то естественно рассматривать и σxij как амплитуду < *i*|σ*х*|*j*>, или, для краткости, как оператор σ^л. Если приме­нить эту идею оператора, то уравнение движения состояния |ψ> в магнитном поле можно написать в виде

C:\Мои документы\gray.jpg

Желая «использовать» это уравнение, нам, естественно, прихо­дится выражать |ψ> через базисные векторы (равносильно тому, что приходится находить компоненты пространственных векторов, когда задача доводится до числа). Так что обычно мы предпочитаем расписывать (9.23) в более раскрытом виде:

C:\Мои документы\gray.jpg

Сейчас вы увидите, чем красива идея оператора. Чтобы при­менять уравнение (9.24), нужно знать, что будет, когда опера­торы о подействуют на каждое базисное состояние. На­пишем σ^*z*|+>; это какой-то вектор |?>, но какой? Что ж, умножим его слева на <+| и получим

C:\Мои документы\gray.jpg

(пользуясь табл. 9.1). Итак, мы знаем, что

<+|?>=1. (9.25)

Теперь умножим σ^z|+> слева на <-|. Получится

C:\Мои документы\gray.jpg

т, е.

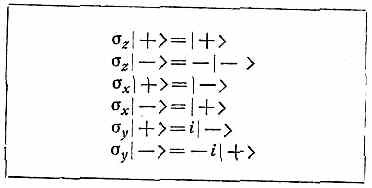
C:\Мои документы\gray.jpg

Существует только один вектор состояния, удовлетворяющий и (9.25), и (9.26); это |+>. Мы, стало быть, открыли, что

C:\Мои документы\gray.jpg

Такого рода рассуждениями можно легко показать, что все свойства матриц сигма могут быть в операторных обозначениях описаны рядом правил, приведенных в табл. 9.3.

*Таблица 9.3 •* СВОЙСТВА ОПЕРАТОРА σ^



Если у нас есть произведения матриц сигма, то они переходят в произведения операторов. Когда два оператора стоят рядом в виде произведения, то сперва приступает к операции тот оператор, который стоит правее. Скажем, под σ^*x*σ^*y*|+> надо понимать σ^*х*(σ^*y*|+>). Из табл. 9.3 получаем σ^*y*|+>=*i*|-> так что

C:\Мои документы\gray.jpg

Числа (как, например, *i*) просто проходят сквозь операторы (операторы действуют только на векторы состояний); значит (9.28) перейдет в

C:\Мои документы\gray.jpg

Если сделать то же самое с σ^*x*σ^*y*|->, то получится

C:\Мои документы\gray.jpg

Если взглянуть на табл. 9.3, то видно, что σ^*х*σ*^у,* действуя на |+> или |->, даст в точности то же, что получается, если просто подействовать оператором σ^*z* и умножить на — *i.* По­этому можно сказать, что операция σ^*х* σ*^y* совпадает с операци­ей *i*σ*^z,* и записать это утверждение в виде операторного урав­нения

C:\Мои документы\gray.jpg

Убедитесь, что это уравнение совпадает с одним из наших мат­ричных уравнений табл. 9.2. Итак, мы опять видим соответствие между матричной и операторной точкой зрения. Каждое из уравнений в. табл. 9.2 может поэтому рассматриваться и как

уравнение относительно операторов сигма. Можно проверить,

что они действительно следуют из табл. 9.3. Работая с этими

вещами, лучше не следить за тем, являются ли величины типа 0

или *Н* операторами или матрицами. Чем их ни считай, уравнения

: выйдут одни и те же, так что табл. 9.2 можно при желании относить то к операторам сигма, то к матрицам сигма.

**§ 3. Решение уравнений для двух состояний**

Теперь можно писать наше уравнение двух состояний в раз-jличных видах, например:

C:\Мои документы\gray.jpg

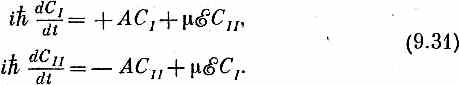
или вот так:

C:\Мои документы\gray.jpg

Оба они означают одно и то же. Для частицы со спином 1/2 в магнитном поле гамильтониан *Н* дается уравнением (9.8) или (9.13). I Если поле направлено по г, то, как мы уже много раз видели, решение заключается в том, что состояние |ψ>, каким бы оно ни было, прецессирует вокруг оси *z* (в точности, как если бы взять *\* физическое тело и вращать его как целое вокруг оси z) с угловой

скоростью, вдвое большей, чем *μB/h*. Все это, конечно, относится и к магнитному полю, направленному под другим углом, ведь физика от системы координат не зависит. Если магнитное поле время от времени как-то сложно меняется, то такое положение пещей можно анализировать следующим образом. Пусть вначале спин был в направлении +z, а магнитное поле — в направле­нии *х.* Спин начал поворачиваться. Если выключить *x*-поле, поворот прекратится. Если теперь включить z-поле, спин начнет поворачиваться вокруг z и т. д. Значит, смотря по тому, как меняются поля во времени, вы можете представить себе, каким будет конечное состояние — по какой оси оно будет направлено. Затем можно отнести это состояние к первоначальным |+> и |-> по отношению к z, пользуясь проекционными формулами, полученными в гл. 8 (или в гл. 4). Если в конечном состоянии спин направлен по (θ, ϕ), то амплитуда того, что спин будет смотреть вверх, равнаC:\Мои документы\gray.jpg, а амплитуда того, что спин будет смотреть вниз, равнаC:\Мои документы\gray.jpg. Это решает любую задачу. Таково словесное описание решений дифференциальных уравнений.

Только что описанное решение достаточно общо для того. чтобы справиться с *любой системой с двумя состояниями.* Возь­мем наш пример с молекулой аммиака, на которую действует электрическое поле. Если система описывается на языке состоя­ний |*I*> и |*II*>, то уравнения выглядят так:



Вы скажете: «Нет, там, я помню, стояло еще *E*0». Неважно, мы просто сдвинули начало отсчета энергий, чтобы *Е*0стало равно нулю. (Это всегда можно сделать, изменив обе амплитуды в одно и то же число раз — в *eiE0T/h;* так можно избавить­ся от любой постоянной добавки к энергии.) Одинаковые урав­нения обладают одинаковыми решениями, поэтому не стоит решать их вторично. Если взглянуть на эти уравнения и на (9.1), то их можно отождествить между собой следующим образом. Состояние |+> обозначим |*I*>, состояние |-> обозначим |*Н*>*.* Это *вовсе не значит,* что мы выстраиваем аммиак в про­странстве в одну линию или что |+> и |-> как-то связаны с осью z. Это все делается чисто искусственно. Имеется искусст­венное пространство, которое можно было бы назвать, например, «модельным пространством молекулы аммиака» или еще как-нибудь иначе. Это просто трехмерная «диаграмма», и направле­ние «вверх» означает пребывание молекулы в состоянии |*I*>, а направление «вниз» по фальшивой оси z означает пребывание молекулы в состоянии |*II*>. Тогда уравнения отождествляются следующим образом.

Прежде всего вы видите, что гамильтониан может быть записан через матрицы сигма:

C:\Мои документы\gray.jpg

Если сравнить это с (9.1), то μ*Bz* будет соответствовать -*А,* а μ*Вх* будет соответствовать -μξ*.* В нашем «модельном» про­странстве возникает, стало быть, постоянное поле В, направ­ленное по оси *z.* Если есть, кроме этого, электрическое поле ξ, меняющееся со временем, то у поля В появится и пропорцио­нально меняющаяся *x*-компонента. Таким образом, *поведение электрона в магнитном поле с постоянной составляющей в на­правлении z и колеблющейся составляющей в направлении х математически во всем подобно и точно соответствует поведе­нию молекулы аммиака в осциллирующем электрическом поле,* К сожалению, у нас нет времени входить глубже в детали этого соответствия или разбираться в каких-либо технических дета­лях. Мы только хотели подчеркнуть, что можно сделать так, чтобы все системы с двумя состояниями были аналогичны объек­ту со спином 1/2*,* прецессирующему в магнитном поле.

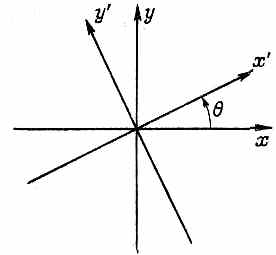
**§ 4. Состояния поляризации фотона**

Есть множество других интересных для изучения систем с двумя состояниями, и первая, о которой мы бы хотели пого­ворить,— это фотон. Чтобы описать фотон, нужно сначала задать вектор его импульса. У свободного фотона импульс определяет и частоту, так что указывать особо частоту не придется. Но еще остается одно свойство, именуемое поляризацией. Представьте себе фотон, приходящий к вам с определенной монохроматиче­ской частотой (которую во всем нашем обсуждении мы будем считать постоянной, так что можно не говорить о множестве состояний импульса).Тогда существуют два направления поля­ризации. По классической теории свет обладает, например, либо горизонтально колеблющимся электрическим полем, либо вертикально колеблющимся электрическим полем; этот свет двух сортов называют *x*-поляризованным и *y*-поляризованным светом. У света может быть и какое-то иное направление поляризации, его можно создать суперпозицией полей в направ­лении *x* и в направлении *у.* Или, взяв *х-* и *y*-компоненты со сдви­гом фаз в 90°, получить вращающееся электрическое поле — свет будет поляризован эллиптически. [Это краткое напомина­ние классической теории поляризованного света, которую мы изучали в гл. 33 (вып. 3).]

Пусть теперь у нас есть *одиночный* фотон, всего один. Уже нет электрического поля, которое можно было бы рассматривать прежним способом. *Один-единственный* фотон и ничего больше. по он тоже должен обладать аналогом классического явления поляризации. Значит, должны существовать по крайней мере два разных сорта фотонов. Сперва могло бы показаться, что их должно быть бесконечное множество, ведь, как бы то ни было, электрический вектор может быть направлен в любую сторону. Однако поляризацию фотона можно описать как систему с двумя состояниями. Фотон может быть либо в состоянии *|х*>*,* либо |в состоянии | *у*>*.* Под |*х*>подразумевается состояние поляризации каждого из фотонов в пучке света, который *классически x*-поляризован. А | *у*>означает состояние поляризации каждого из фотонов в *y*-поляризованном пучке. Эти |*х*>и *|у*>вы можете выбрать в качестве базисных состояний фотона с данным [направленным на вас импульсом—импульсом в направлении *z.*

Итак, существуют два базисных состояния |*x*> и |*y*>, и их вполне хватает, чтобы описать всякий фотон.

К примеру, если у нас есть поляроид, ось которого распо­ложена так, чтобы пропускать свет, поляризованный в направ­лении, которое мы называем направлением *х,* и если мы напра­вили туда фотон, который, как нам известно, находится в состоя­нии |*у*>, то он поглотится поляроидом. Если послать туда фотон, который, как нам известно, находится в состоянии |*х*>*,* он и выйдет в состоянии |*x*>. Когда мы берем кусок кальцита (исландского пшата), который расщепляет пучок поляризован­ного света на |*x*>-пучок и |*y*>-пучок, то этот кусок кальцита полностью аналогичен прибору Штерна — Герлаха, расщеп­ляющему пучок атомов серебра на два состояния |+> и |->. Значит, все, что мы раньше делали с частицами и приборами Штерна — Герлаха, можно повторить со светом и кусками поляроида. А что можно сказать о свете, который отфильтрован куском поляроида, повернутым на угол 6? Другое ли это состоя­ние? Да, действительно, это *другое* состояние. Обозначим ось поляроида *х'* , чтобы отличать ее от осей наших базисных состояний (фиг. 9.2).



*Фиг. 9.2. Оси координат, перпендику­лярные к вектору импульса фотона.*

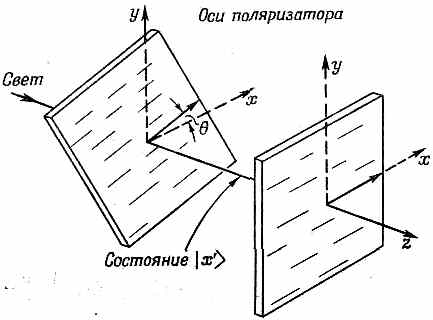
Выходящий наружу фотон будет в состоя­нии |*х'*>. Но всякое состояние может быть представлено в виде линейной комбинации базисных состояний, а формула для такой комбинации известна:

C:\Мои документы\gray.jpg

Иначе говоря, если фотон пройдет сквозь кусок поляроида, повернутого на угол θ (по отношению *к х),* он все равно может быть разрешен на |*x*>- и |*y*>-пучки (например, куском каль­цита). Или, если угодно, вы можете в своем воображении просто разбить его на *х-* и *y*-компоненты. Любым путем вы получите амплитуду cosθ быть в |*х*>-состоянии и амплитуду sinθ быть в |*y*>-состоянии.

Теперь поставим такой вопрос: пусть фотон поляризован в направлении *х'* куском поляроида, повернутого на угол θ,

и пусть он попадет в другой поляроид, повернутый на угол нуль (фиг. 9.3).



*Фиг. 9.3. Две поляроидные пластины с углом θ между плоскостями поляризации.*

Что тогда произойдет? С какой вероятностью он прой­дет сквозь поляроид? *Ответ:* Пройдя первый поляроид, фотон наверняка оказывается в состоянии |*х'*>*.* Через второй поля­роид он протиснется лишь в том случае, если будет в состоянии |*x*> (и поглотится им, оказавшись в состоянии |*у*>). Значит, мы спрашиваем, с какой вероятностью фотон окажется в состоя­нии |*x*>? Эту вероятность мы получим из квадрата модуля амплитуды <x|x'>, амплитуды того, что фотон в состоянии |*х'*>находится также и в состоянии |*x*>. Чему равно <*x*|*x*'>? Умножив (9.33) на <*x*|, получим

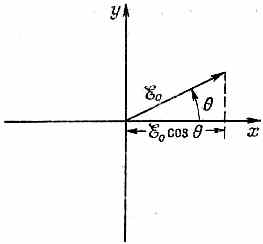
C:\Мои документы\gray.jpg

Но <*x*|*y*>=0; это следует из физики, так *должно* быть, если |*х*>и |*у*>суть базисные состояния, а <*x*|*x*>=l. И мы полу­чаем

<*x*|*x*'>=cosθ,

а вероятность равна cos2θ. Например, если первый поляроид поставлен под углом 30°, то 3/4 времени фотон будет проходить через него, a 1/4времени будет нагревать поляроид, поглощаясь внутри него.

Посмотрим теперь, что в такой же ситуации происходит с точки зрения классической физики. Там мы имели бы пучок света, электрическое поле которого меняется тем или иным обра­зом,— скажем «неполяризованный» пучок. После того как он прошел бы через первый поляроид, электрическое поле величи­ны ξначало бы колебаться в направлении *х'* ; мы бы начертили его в виде колеблющегося вектора с пиковым значением ξ0на диаграмме фиг, 9.4.

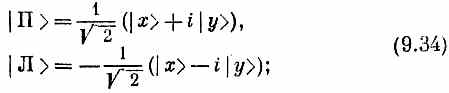


*Фиг. 9.4. Классическая картина электрического вектора ξ.*

Если бы затем свет достиг второго поля­роида, то черен него прошла бы только *x*-компонента ξ0cosθ электрического поля. *Интенсивность* была бы пропорциональна квадрату поля, т. е. ξ2cos2θ. Значит, проходящая сквозь последний поляроид энергия была бы в cos2θ слабее энергии, поступающей в него.

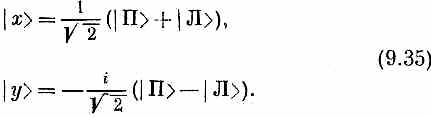
И классическая, и квантовая картины приводят к одинако­вым результатам. Если бы вы бросили на второй поляроид 10 миллиардов фотонов, а средняя вероятность прохождения каждого из них была бы, скажем, 3/4, то следовало бы ожидать, что сквозь него пройдет 3/4 от 10 миллиардов. Равным образом и энергия, которую они унесли бы, составила бы 3/4 той энер­гии, которую вам хотелось протолкнуть через поляроид. Клас­сическая теория ничего не говорит о статистике этих вещей, она попросту утверждает, что энергия, которая пройдет на­сквозь, в точности равна 3/4 той энергии, которая была пущена в поляроид. Это, конечно, немыслимо, если фотон только один. Не бывает 3/4 фотона. Либо он *весь* здесь, либо его вовсе нет. И квантовая механика говорит нам, что он бывает *весь здесь* 3/4 *времени.* Связь обеих теорий ясна.

А как же с другими сортами поляризации? Скажем, с пра­вой круговой поляризацией? В классической теории компо­ненты *х* и *у* правой круговой поляризации были равны, но сдвинуты по фазе на 90°. В квантовой теории фотон, поляризо­ванный по кругу вправо («правый»), обладает равными ампли­тудами быть |*х*>*-* и |*у*>-поляризованным, и эти амплитуды сдвинуты по фазе на 90°. Обозначая состояние «правого» фотона через |II>, а состояние «левого» фотона через |Л>, можно написать [см. гл. 33, § 1 (вып. 3)]



множитель 1/√2 поставлен, чтобы нормировать состояния. С помощью этих состояний можно подсчитывать любые эффекты, связанные с фильтрами или интерференцией, применяя законы квантовой теории. При желании можно также выбрать в каче­стве базисных состояний |П> и |Л> и все представлять через них. Надо только предварительно убедиться, что <П|Л>=0, а это можно сделать, взяв сопряженный вид первого уравнения [см. (6.13)] и перемножив их друг с другом. Можно расклады­вать свет, пользуясь в качестве базиса и *х-,* и *y*-поляризациями, и *х'-,* и *y'*-поляризациями, а можно—и правой, и левой поляри­зациями.

Попробуйте (просто для упражнения) обратить наши фор­мулы. Можно ли представить состояние |х> в виде линейной комбинации правого и левого? Да, вот ответ:

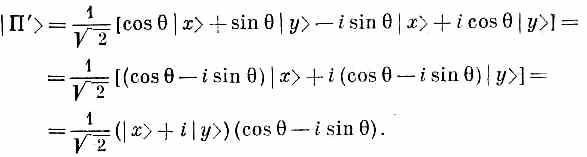


*Доказательство:* сложите и вычтите два уравнения в (9.34). От одного базиса к другому очень легко переходить.

Впрочем, одно замечание надо бы сделать. Если фотон поля­ризован по правому кругу, он не имеет никакого касательства к осям *х* и *у.* Если бы мы взглянули на него из системы коорди­нат, повернутой вокруг направления полета на какой-то угол, то свет по-прежнему был бы поляризован по кругу; то же с левой поляризацией. Право- и левополяризованный по кругу свет при любом таком повороте одинаков; определение не зависит от выбора направления *х* (если не считать того, что направление фотона задано). Великолепно, не так ли? Для определения не нужны никакие оси. Куда лучше, чем *х* и *у*!Но, с другой стороны, не чудо ли, что, складывая левое и правое, вы в состоянии узнать, где было направление *x*? Если «правое» и «левое» никак не зависят от *х,* как же получается, что мы можем сложить их и вновь получить *x*? На этот вопрос можно частью отве­тить, расписав состояние |П'>, представляющее фотон, правополяризованный в системе координат *х', у'.* В этой системе мы бы написали

C:\Мои документы\gray.jpg

Как же будет выглядеть такое состояние в системе *х, у?* Подста­вим | *х'*> из (9.33) и соответствующее |*у'*>; мы его не выписывали, но оно равно (-sinθ)|*x*>+(cosθ)|*y*>. Тогда



Первый множитель — это просто | П>, а второй *е-iθ* ; итог таков:

C:\Мои документы\gray.jpg

Состояния | П'> и | П> отличаются только фазовым множи­телем *е-iθ.* Если подсчитать такую же вещь для | Л' >, [мы полу­чим](#прим3)

C:\Мои документы\gray.jpg

Теперь мы видим, что происходит. Сложив |П> и |Л>, мы получаем нечто отличное от того, что получилось бы при сложении |П'> и |Л'>. Скажем, *x*-поляризованный фотон есть [см. (9.35)] сумма |П> и |Л>, но *y*-поляризованный фо­тон — это сумма со сдвигом фазы первого на 90° назад, а вто­рого — на 90° вперед. Это просто то же самое, что получилось бы из суммы |П> и |Л'> при определенном выборе угла 0=90°, и это правильно, В *штрихованной* системе *x*-поляризация — это то же самое, что *y*-поляризация в первоначальной системе. Значит, не совсем верно, что поляризованный по кругу фотон выглядит в любой системе осей одинаково. Его *фаза* (фазовое соотношение между право- и левополяризованными по кругу состояниями) запоминает направление *х.*

**[§ 5. Нейтральный К](#прим2)****[-мезон\*\*](#прим2)**

Теперь мы расскажем о двухуровневой системе из мира странных частиц — о системе, для которой квантовая механика приводит к поразительнейшим предсказаниям. Полное описание этой системы потребовало бы от нас таких знаний о странных частицах, каких у нас пока нет, поэтому, к сожалению, кое- какие углы нам придется срезать. Мы лишь вкратце успеем изложить историю того, как было сделано одно открытие, чтобы показать вам, какого типа рассуждения для этого потребовались. Началось это с открытия Гелл-Манном и Нишиджимой понятия *странности* и нового закона *сохранения странности.*

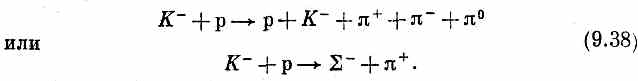
И вот когда Гелл-Манн и Пайс проанализировали следствия из этих новых представлений, то они пришли к предсказанию замечательнейшего явления, о котором мы и хотим повести речь.

Сперва, однако, нужно немного рассказать о «странности».

Начать нужно с того, что называется *сильными взаимодейст­виями* ядерных частиц. Существуют взаимодействия, которые ответственны за мощные ядерные силы, в отличие, например, от относительно более слабых электромагнитных взаимодейст­вий. Взаимодействия «сильны» в том смысле, что если две части­цы сойдутся так близко, чтобы быть способными взаимодейст­вовать, то взаимодействуют они очень мощно и создают другие частицы очень легко. Ядерные частицы обладают еще так назы­ваемым «слабым взаимодействием», в результате которого происходят такие вещи, как бета-распад; но они всегда происходят очень медленно (по ядерным масштабам времени): слабые взаимо­действия на много-много порядков величины слабее, чем силь­ные, и даже слабее, чем электромагнитные.

Когда при помощи больших ускорителей начали изучать сильные взаимодействия, все были поражены, увидев, что некоторые вещи, которые «должны были» произойти (ожида­лось, что они произойдут), на самом деле не возникали. К при­меру, в некоторых взаимодействиях не появлялась частица опре­деленного сорта, хотя ожидалось, что она появится. Гелл-Манн и Нишиджима заметили, что многие из этих странных случаев можно было объяснить одним махом, изобретя новый закон сохранения: *сохранение странности.* Они предположили, что существует свойство нового типа, связываемое с каждой части­цей,— число, названное ими «странностью»,— и что во всяком сильном взаимодействии «количество странности» сохраняется. Предположим, например, что отрицательный *K*-мезон высокой энергии, скажем с энергией во много *Гэв,* сталкивается с протоном. Из их взаимодействия могут произойти много других частиц: π-мезонов, *K*-мезонов, *A*-частиц, *Σ*-частиц,— любые из мезонов или барионов, перечисленных в табл. *2.2* (вып. 1). Оказалось, однако, что возникали только *определенные комбинации,* а другие — никогда.

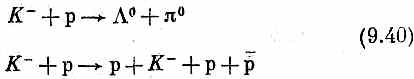
Про некоторые законы сохранения было известно, что они обязаны соблюдаться. Во-первых, всегда сохранялись энергия и импульс. Полная энергия и импульс после события должны быть такими же, как и перед событием. Во-вторых, существует закон сохранения электрического заряда, утверждающий, что полный заряд выходящих частиц обязан равняться полному заряду, внесенному начальными частицами. В нашем примере столкновения *К-ыезона.* и протона действительно *происходят* такие реакции:



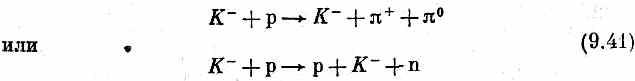
И никогда из-за несохранения заряда не идут реакции

C:\Мои документы\gray.jpg

Было также известно, что *количество барионов* сохраняется. Количество *выходящих* барионов должно быть равно количе­ству *входящих.* В этом законе *античастица* бариона счита­ется за *минус* один барион. Это значит, что мы можем ви­деть — и видим — реакции

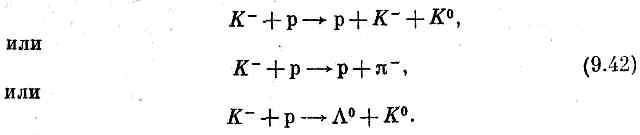


(где  — это антипротон, несущий отрицательный заряд). Но мы *никогда* не увидим



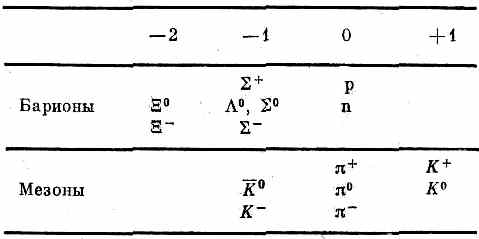
(даже если энергия очень-очень большая), потому что число ба­рионов здесь не сохранялось бы.

Эти законы, однако, *не объясняют* того странного факта, что нижеследующие реакции, которые с виду не особенно отли­чаются от кое-каких приведенных в (9.38) или (9.40), тоже никогда не наблюдались:



Объяснением служит сохранение странности. За каждой части­цей следует число — ее *странность S,* и имеется закон, что в любом *сильном* взаимодействии полная странность *на выходе* должна равняться полной странности *на входе.* Протон и анти­протон (C:\Мои документы\gray.jpg), нейтрон и антинейтрон (C:\Мои документы\gray.jpg) и π-мезоны (π+ , π0, π-) — все имеют странность *нуль;* у *К+-* и *K*0-мезонов странность равна +1;у *К-* иC:\Мои документы\gray.jpg ([*а**нти*](#прим5)*-К*0), у Λ0- и Σ-частиц (2S+ , Σ0, Σ-) странность равна -1. Существует также частица со странностью -*2* (C:\Мои документы\gray.jpg-частица), а может быть, и другие, пока неизвестные. Перечень этих странностей приведен [в табл. 9.4](#прим4).

*Таблица 9.4* • СТРАННОСТИ СИЛЬНО ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ЧАСТИЦ



Посмотрим, как действует сохранение странности в некото­рых написанных реакциях. Если мы исходим из *К-* и протона, то их суммарная странность равна (-1)+0 =-1. Сохранение странности утверждает, что странности *продуктов* реакции после сложения тоже должны дать -1. Вы видите, что в реак­циях (9.38) и (9.40) это действительно так. Но в реакциях (9.42) странность справа во всех случаях есть *нуль.* В них странность не сохраняется, и они не происходят. Почему? Это никому не известно. Никому не известно что-либо сверх того, что мы только что рассказали. Просто природа так действует — и все.

Давайте теперь взглянем на такую реакцию: π-попадает в протон. Вы можете, например, получить Λ0-частицу плюс нейтральный *K*-мезон *—* две нейтральные частицы. Какой же из нейтральных *K*-мезонов вы получите? Раз у Λ-частицы странность -1, а у π- и π+ странность нуль и поскольку перед нами быстрая реакция рождения, то странность измениться не должна. Вот *K*-частица и должна обладать странностью +1,—и быть по­этому *К*0*.* Реакция имеет вид

C:\Мои документы\gray.jpg

причем

C:\Мои документы\gray.jpg (сохраняется).

Если бы здесь вместо *К*0стояло *К°,* то странность справа была бы -2, чего природа не позволит, ведь слева странность нуль.

С другой стороны, *К°* может возникать в других реакциях:

C:\Мои документы\gray.jpg

где

C:\Мои документы\gray.jpg

или

C:\Мои документы\gray.jpg

где

C:\Мои документы\gray.jpg

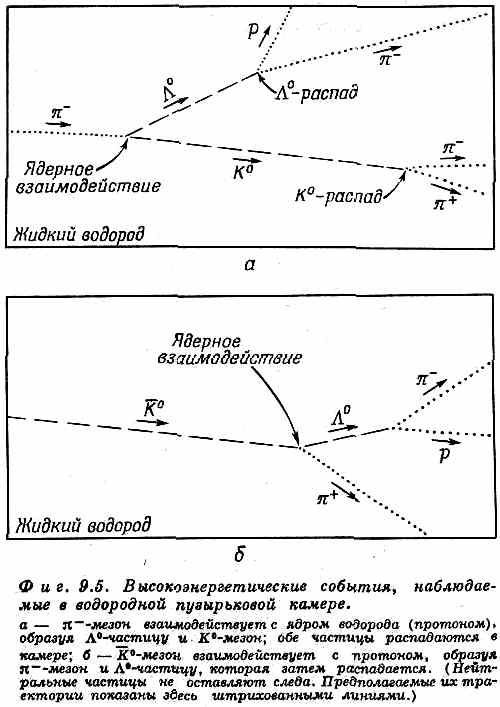
Вы можете подумать: «Не слишком ли много разговоров. *Как узнать,* C:\Мои документы\gray.jpgэто или *K*0? Выглядят-то они одинаково. Они античастицы друг друга, значит, массы их одинаковы, заряды у обеих равны нулю. Как вы их различите?» По реакциям, которые *они* вызывают. Например, C:\Мои документы\gray.jpg-мезон может взаимодей­ствовать с веществом, создавая Λ-частицу, скажем, так:

C:\Мои документы\gray.jpg

а *K*0-мезон не может. У *К*0 *нет* способа создать Λ-частицу, вза­имодействуя с обычным веществом ([протонами и нейтронами](#прим7)). Значит, экспериментальное отличие между *К*0*-* и C:\Мои документы\gray.jpg-мезонами состояло бы в том, что один из них создает Λ-частицу, а другой— нет.

Одно из предсказаний теории странности тогда заключалось бы в следующем: если в опыте с пионами высокой энергии Λ-частица возникает вместе с нейтральным *K*-мезоном, тогда *этот* нейтральный *K*-мезон, попадая в другие массивы вещества, никогда не создаст Λ-частицы. Опыт мог бы протекать таким образом. Вы посылаете пучок π--мезонов в большую водород­ную пузырьковую камеру. След π- исчезает, но где-то в стороне появляется пара следов (протона и π- -мезона), указывающая на то, что распалась [Λ-частица](#прим6) (фиг. 9.5). Тогда вы знаете, что где-то есть *K*0-мезон, который вам не виден.

Но вы можете представить, куда он направился, применяя сохранение импульса и энергии. (Он затем иногда раскрывает свое местоположение, распадаясь на пару заряженных частиц, как показано на фиг. 9.5, а.)



Когда *К*0-мезон летит в веществе, он может провзаимодействовать с одним из ядер водорода (про­тонов), создав при этом, быть может, еще какие-то частицы.

Предсказание теории странности состоит в том, что *K*0-мезон *никогда* не породит Λ-частицу в простой реакции, скажем, такого типа

C:\Мои документы\gray.jpg

хотя C:\Мои документы\gray.jpg-мезон это может сделать. Иначе говоря, в пузырько­вой камере C:\Мои документы\gray.jpg-мезон мог бы вызвать событие, показанное на фиг. 9.5, б, где Λ0-частицу из-за распада можно заметить, а *К*0-мезон не смог бы. Это первая часть рассказа. Это и есть со­хранение странности.

Странность, впрочем, сохраняется *не совсем.* Существуют очень медленные распады странных частиц — распады, происхо­дящие за большое время — [порядка](#прим8) 10-10 *сек,* в которых странность *не* сохраняется. Их называют «слабые» распады. Напри­мер, *K*0-мезон распадается на пару π-мезонов (+ и -) со време­нем жизни 10-10 *сек.* Именно так на самом деле впервые были замечены *K*-частицы. Обратите внимание, что распадная реак­ция

C:\Мои документы\gray.jpg

не сохраняет странности, так что «быстро», путем сильного взаимодействия, она идти не может. Может она идти только через слабый распадный процесс.

Далее, C:\Мои документы\gray.jpg-мезон также распадается *таким же путем* (на π+ и π-) и тоже с таким же самым временем жизни:

C:\Мои документы\gray.jpg

Здесь опять идет слабый распад, потому что он не сохраняет странности. Существует принцип, по которому для всякой реакции всегда найдется соответствующая реакция, в которой «материя» заменяется «антиматерией» и наоборот. РазC:\Мои документы\gray.jpg— это античастица *К*0*,* она обязана распадаться на античастицы π+ и π- , но античастица π*+* есть π- . (Или, если вам угодно, наоборот. Оказывается, что для π-мезонов неважно, кого из них назовут «материей», их эта материя совсем не интересует.) Итак, как следствие слабых распадов *К*0*-* и C:\Мои документы\gray.jpg-мезоны могут превращаться в одинаковые конечные продукты. Если «видеть» их по их распадам (как в пузырьковой камере), то выглядят они, как совершенно одинаковые частицы. Отличаются только их сильные взаимодействия.

Теперь наконец-то мы доросли до того, чтобы описать ра­боту Гелл-Манна и Пайса. Во-первых, они отметили, что раз *К*0 и C:\Мои документы\gray.jpg оба могут превращаться в два π-мезонов, то должна также существовать *некоторая амплитуда* того, что *К*0может превра­титься в *К*0*,* и такая же амплитуда того, что C:\Мои документы\gray.jpgпревратится в *К*0*.* Реакцию можно записать так, как это делают химики:

C:\Мои документы\gray.jpg

Из существования таких реакций следует, что есть амп­литуда, которую мы обозначим черезC:\Мои документы\gray.jpg*,* пре­вращения *К*0вC:\Мои документы\gray.jpg*,* обусловленная тем самым слабым взаимо­действием, с которым связан распад на два π-мезона. Ясно, что есть и амплитуда обратного процессаC:\Мои документы\gray.jpg*.* Так как материя и антиматерия ведут себя одинаково, то эти две амплитуды численно равны между собой; мы обозначим их через *А:*

C:\Мои документы\gray.jpg

И вот, сказали Гелл-Манн и Пайс, здесь возникает интерес­ная ситуация. То, что люди назвали двумя разными состояниями мира *(К*0иC:\Мои документы\gray.jpg*),* на самом деле следует рассматривать как *одну систему* с двумя состояниями, потому что имеется амплитуда перехода из одного состояния в другое. Для полноты рассужде­ний следовало бы, конечно, рассмотреть не два состояния, а больше, потому что существуют еще состояния 2л и т. д.; но поскольку наши физики интересовались главным образом связью *К*0 *с*C:\Мои документы\gray.jpg*,* то они не захотели усложнять положения и представили его приближенно в виде системы с двумя состоя­ниями. Другие состояния *были учтены* в той мере, в какой их влияние неявно скажется на амплитудах (9.44).

В соответствии с этим Гелл-Манн и Пайс анализировали нейтральную частицу как систему с двумя состояниями. Начали они с того, что выбрали состояния | *К*0> и | C:\Мои документы\gray.jpg> за базисные состояния. (С этого места весь рассказ становится очень похо­жим на то, что было для молекулы аммиака.) Всякое состояние |ψ> нейтрального *K*-мезона можно тогда описать, задав ампли­туды того, что оно окажется в одном из базисных состояний. Обозначим эти амплитуды

C:\Мои документы\gray.jpg

Следующим шагом мы должны написать уравнение Гамиль­тона для такой системы с двумя состояниями. Если бы *К*0и не были бы связаны между собой, то уравнения выглядели бы просто

C:\Мои документы\gray.jpg

Однако есть еще амплитуда C:\Мои документы\gray.jpg

перехода *К*0в C:\Мои документы\gray.jpg; поэтому в правую часть первого уравнения надо еще добавить слагаемое

C:\Мои документы\gray.jpg

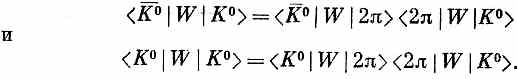
Аналогичное слагаемое *АС*+ надо добавить и в уравнение, опре­деляющее скорость изменения *С \_.* Но это еще не все! Если уж мы учитываем двухпионный эффект, то надо учесть и то, что существует еще *дополнительная* амплитуда превращения *К*0 в *самого себя* по цепочке

C:\Мои документы\gray.jpg

Эта дополнительная амплитуда (обозначим ееC:\Мои документы\gray.jpg)в точности равна амплитуде C:\Мои документы\gray.jpg

, так как амплитуды перехода в пару π-мезонов или от пары π-мезонов в *К*0или C:\Мои документы\gray.jpgодни и те же.

Если угодно, можно показать это и подробнее. [Прежде всего напишем](#прим9)



Симметрия между материей и антиматерией требует, чтобы

C:\Мои документы\gray.jpg

а также

C:\Мои документы\gray.jpg

Отсюда

C:\Мои документы\gray.jpg

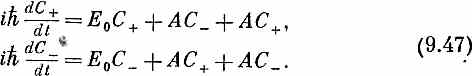
а также

C:\Мои документы\gray.jpgC:\Мои документы\gray.jpg

очем мы уже говорили выше.

Итак, у нас есть две дополнительные амплитуды C:\Мои документы\gray.jpgи C:\Мои документы\gray.jpg

*,* обе равные *А,* которые надо вставить в урав­нения Гамильтона. Первая приводит к слагаемому *АС+* в правой части уравнения для *dC+/dt,* а вторая — к слагаемому *АС-* в правой части уравнения для *dC-/dt.* Рассуждая именно так, Гелл-Манн и Пайс пришли к заключению, что уравне­ния Гамильтона для системы C:\Мои документы\gray.jpgдолжны иметь вид



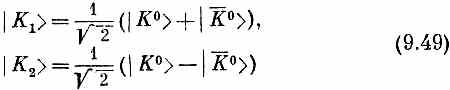
Теперь надо сделать поправку к сказанному в прежних гла­вах: к тому, что две амплитуды, такие, как  и *,* выражающие обратные друг к другу процессы, всегда комплексно сопряжены. Это было бы верно, если бы мы говорили о частицах, которые не распадаются. Но если частицы могут распадаться, а поэтому «пропадать», то амплитуды не обязательно комплексно сопряжены. Значит, равенство (9.44)

*не означает,* что наши амплитуды суть действительные числа. На самом деле они суть комплексные числа. Поэтому коэффи­циент *А* комплексный и его нельзя просто включить в энер­гию *Е*0*.*

Часто, возясь со спинами электронов и тому подобными веща­ми, наши герои знали: такие уравнения означают, что имеется *другая* пара базисных состояний с особенно простым поведением, которые также пригодны для представления системы .*K*-частиц. Они рассуждали так: «Возьмем теперь сумму и разность этих двух уравнений. Будем отсчитывать все энергии от *Е*0и возьмем для энергии и времени такие единицы, при которых h=1». (Так всегда поступают современные теоретики. Это не меняет, конеч­но, физики, но уравнения выглядят проще.) В результате они получили

C:\Мои документы\gray.jpg

откуда ясно, что комбинации амплитуд *С++С-* и *С+-С-*действуют друг от друга независимо (и отвечают стационарным состояниям, которые мы раньше изучали). Они заключили, что удобнее было бы для *K*-частиц употреблять другое представле­ние, Они определили два состояния:



и сказали, что вместо того, чтобы думать о C:\Мои документы\gray.jpg-мезонах, с равным успехом можно рассуждать на языке двух «частиц» (т. е. «состояний») *К*1и *К*2*.* (Они, конечно, соответствуют состоя­ниям, которые мы обычно называли |*I*> и |*II*>. Мы не поль­зуемся нашими старыми обозначениями, потому что хотим следовать обозначениям самих авторов, тем, которые вы встре­тите на физических семинарах.)

Но Гелл-Манн и Пайс проделывали все это не для того, чтобы давать частицам новые названия; во всем этом имеется еще некоторая весьма странная физика. Пусть *C*1и С2 суть амплитуды того, что некоторое состояние |ψ> окажется либо *k*1*-,* либо *K*2-мезоном:

C:\Мои документы\gray.jpg

Из уравнений (9.49)

C:\Мои документы\gray.jpg

Тогда (9.48) превращается в

C:\Мои документы\gray.jpg

Их решения имеют вид

C:\Мои документы\gray.jpg

где *С*1(0) и *С*2(0) — амплитуды при *t=*0*.*

Эти уравнения говорят, что если нейтральный *K*-мезон при *t=*0 находится в состоянии |*К*1> [так что *С*1(0)=1 и

С2(0)=0], то амплитуды в момент *t* таковы:

C:\Мои документы\gray.jpg

Вспоминая, что *А —* комплексное число, удобно положить

C:\Мои документы\gray.jpg

(так как мнимая часть *2А* оказывается отрицательной, мы пишем ее как *минус iβ*). После такой подстановки *С*1(*t*) принимает вид

C:\Мои документы\gray.jpg

Вероятность обнаружить в момент *t* частицу *К*1равна квадрату модуля этой амплитуды, т. е. *e-2βt.* А из (9.52) следует, что ве­роятность обнаружить в любой момент состояние *K*2равна нулю. Это значит, что если вы создаете *К* -мезон в состоянии |*К*1>, *то вероятность найти* его в том же состоянии со временем экспо­ненциально падает, но вы никогда не увидите его в состоянии |*К*2>*.* Куда же он девается? Он распадается на два π-мезона со средним временем жизни τ=1/2β, экспериментально равным 10-10 *сек.* Мы предусмотрели это, говоря, что *А* комплексное.

С другой стороны, (9.52) утверждают, что если создать .*K*-мезон целиком в состоянии *К*2*,* он останется в нем навсегда. На самом-то деле это не так. На опыте замечено, что он распа­дается на *три* π-мезона, но в 600 раз медленнее, чем при описан­ном нами двухпионном распаде. Значит, имеются какие-то другие малые члены, которыми мы в нашем приближении пренебрегли. Но до тех пор, пока мы рассматриваем только двухпионные распады, *К*2остается «навсегда».

Рассказ о Гелл-Манне и Пайсе близится к концу. Дальше они посмотрели, что будет, когда *K*-мезон образуется *вместе с Λ*0*-частицей в сильном* взаимодействии. Раз его странность должна быть +1, он обязан возникать в состоянии *К*0*,* Значит, при *t*=0 он не является ни *К*1*,* ни *К*2*,* а их *смесью.* Начальные условия таковы:

C:\Мои документы\gray.jpg

Но это означает [из (9.50)], что

C:\Мои документы\gray.jpg

а из (9.52) следует, что

C:\Мои документы\gray.jpg

Теперь вспомним, что *K*1 и *К*2суть линейные комбинации *К*0и *К°.* В (9.54) амплитуды были выбраны так, что при *t*=0 части,

из которых состоитC:\Мои документы\gray.jpg*,* взаимно уничтожаются за счет интер­ференции, оставляя только состояние *К*0*.* Но состояние |*К*1> *со временем меняется,* а состояние |*К*2> *— нет*. После *t=*0 интерференция *С*1и *С*2 приведет к конечным амплитудам и для *К*0*,* и дляC:\Мои документы\gray.jpg.

Что же все это значит? Возвратимся назад и подумаем об опыте, показанном на фиг. 9.5. Там π--мезон образовал Λ0-частицу и *K*0-мезон, который летит без оглядки сквозь водород камеры. Когда он движется, существует ничтожный, но постоянный шанс, что он столкнется с ядром водорода. Раньше мы думали, что сохранение странности предохранит K-мезон от образования Λ0-частицы в таком взаимодействии. Теперь, однако, мы понимаем, что это не так. Потому что, хотя наш *К-мезон вначале* является *К*0-мезоном, неспособным к рож­дению Λ°-частицы, он *не остается* им навечно. Через мгнове­ние появляется *некоторая амплитуда* того, что он перейдет в состояниеC:\Мои документы\gray.jpg*.* Значит, следует ожидать, что иногда мы увидим Λ0-частицу, образованную вдоль следа *K*-мезона. Вероятность такого происшествия дается амплитудой *С-,* которую можно [решая (9.50)] связать с *С*1и *С*2. Связь эта такова:

C:\Мои документы\gray.jpg

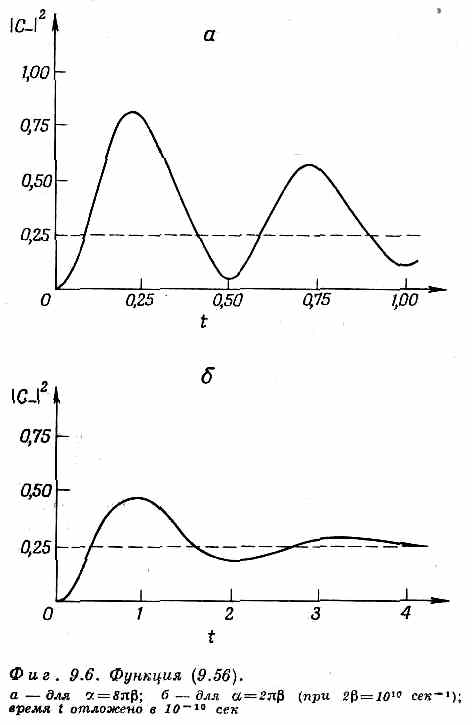
И когда *K*-частица движется, вероятность того, что она будет «действовать как»C:\Мои документы\gray.jpg*,* равна |*С-*|2*,* т. е.

C:\Мои документы\gray.jpg

Сложный и поразительный результат!

Это и есть замечательное предсказание Гелл-Манна и Пайса: когда возникает *K*0-мезон, то шанс, что он превратится в C:\Мои документы\gray.jpg*-*мезон, продемонстрировав это возможностью создания Λ0-частицы, меняется со временем по закону (9.56). Это предсказание последовало только из чистейших логических рассуждений и из основных принципов квантовой механики без знания внутрен­них механизмов *K*-частицы. И поскольку никто не знает ничего об этом внутреннем механизме, то дальше этого Гелл-Манн и Пайс не смогли продвинуться. Им не удалось дать теоретических значений α и β. И никто до сегодняшнего дня не смог это сделать. Им было по силам оценить значение β из экспериментально на­блюдаемой скорости распада на два π-мезона (2β=1,1•1010 *сек*-1), но про α они ничего не смогли сказать.

Мы изобразили функцию (9.56) для двух значений α на фиг. 9.6.



Видно, что форма ее сильно зависит от отношения α и β. Наблюдать C:\Мои документы\gray.jpg-мезон сперва нет никакой вероятности, но затем она появляется. Если значение α велико, вероятность сильно осциллирует; если оно мало, осцилляции невелики или вовсе отсутствуют, вероятность просто плавно возрастает до 1/4.

Как правило, *K*-мезоны движутся с постоянной скоростью, близкой к скорости света. Тогда кривые фиг. 9.6 также пред­ставляют вероятность наблюдения C:\Мои документы\gray.jpg-мезона вдоль следа с ти­пичными расстояниями порядка нескольких сантиметров. Те­перь вы видите, отчего это предсказание так удивительно свое­образно. Вы создаете отдельную частицу, и она не просто рас­падается, а проделывает нечто совсем иное. Временами она распадается, а порой превращается в частицу другого сорта. Характеристическая вероятность этого эффекта по мере ее дви­жения меняется очень странно. Ничего другого, похожего на это, в природе нет. И это удивительнейшее предсказание было сделано только на основе рассуждений об интерференции амплитуд.

Если и существует какое-то место, где есть шанс проверить главные принципы квантовой механики самым прямым обра­зом — бывает ли суперпозиция амплитуд или не бывает,— то оно именно здесь. Несмотря на то что этот эффект был предска­зан уже несколько лет тому назад, до сих пор достаточно ясного опытного определения еще не было. Имеются некоторые грубые результаты, указывающие, что значение α не равно нулю и что эффект действительно наблюдается: они свидетельствуют, что α по порядку величины равно β. И это все, что мы знаем из эксперимента. Было бы замечательно, если бы удалось точно проверить и посмотреть, действительно ли работает принцип суперпозиции в этом таинственном мире странных частиц — с неизвестными поводами для распадов и неизвестным поводом [существования странности](#прим10).

Анализ, который мы только что привели,— характерный пример того, как сегодня используется квантовая механика, чтобы разгадать странные частицы. Во всех сложных теориях, о которых вы, быть может, слышали, нет ничего сверх этого элементарного фокуса, использующего принципы суперпозиции и другие принципы квантовой механики того же уровня. Неко­торые утверждают, что у них есть теории, с помощью которых можно подсчитать β и α или по крайней мере α при данном β. Но эти теории совершенно бесполезны. Например, теория, предсказывающая значение а при данном β, говорит, что α должно быть бесконечным. Система уравнений, из которой они исходят, включает два π-мезона и затем возвращается от двух π-мезонов обратно к *K*0-мезону и т. д. Если все выкладки про­делать, то действительно возникает пара уравнений, похожих на те, что у нас получались, но, поскольку у двух π-мезонов имеется бесконечно много состояний, зависящих от их импуль­сов, интегрирование по всем возможностям приводит к α, рав­ному бесконечности. А природное α *не* бесконечно. Значит, динамические теории неверны. На самом деле чрезвычайно поразительно, что *единственные* явления, которые могут быть в мире странных частиц предсказаны, вытекают из принципов квантовой механики на том уровне, на котором вы их сейчас изучаете.

**§ 6. Обобщение на системы с N состояниями**

Мы покончили с системами с двумя состояниями, рассказав все, что хотелось. В дальнейших главах мы перейдем к изуче­нию систем с большим числом состояний. Расширение на систе­мы с *N* состояниями идей, разработанных для двух состояний, проходит довольно просто. Это делается примерно так.

Если система обладает *N* различными состояниями, то всякое состояние |ψ(*t*)>можно представить как линейную комбина­цию произвольной совокупности базисных состояний |*t*>*,* где *i*=l, 2, 3, . . ., *N:*

C:\Мои документы\gray.jpg

Коэффициенты *Ci*(*t*) *—* это амплитуды <*i*|ψ(*t*)>. Поведение амплитуд *Сi* во времени направляется уравнениями

C:\Мои документы\gray.jpg

где энергетическая матрица *Hij* описывает физику задачи. С виду она такая же, как и для двух состояний. Но только теперь и *i,* и *j* должны пробегать по всем *N* базисным состоя­ниям, и энергетическая матрица *Hij* (или, если вам больше нравится, гамильтониан) — это теперь матрица *NXN,* состоя­щая из *N*2чисел. Как и прежде, *Hij=Hji* (до тех пор, пока частицы сохраняются) и диагональные элементы *Hii* суть ве­щественные числа.

Мы нашли общее решение для всех *С* в системе с двумя со­стояниями, когда энергетическая матрица постоянна (не зави­сит от *t).* Точно так же нетрудно решить и уравнение (9.58) для системы с *N* состояниями, когда *Н* не зависит от времени. Опять мы начинаем с того, что ищем возможное решение, в кото­ром у всех амплитуд зависимость от времени *одинакова.* Мы про­буем

C:\Мои документы\gray.jpg

Если все эти *Ci* подставить в (9.58), то производные *dCi*(*t*)*/dt* превращаются просто в (-*i/h)ECi.* Сокращая повсюду на общую экспоненту, получаем

C:\Мои документы\gray.jpg

Эта система *N* линейных алгебраических уравнений для *N* неизвестных *a*1 *а*2, . . ., *аn*;решение у нее бывает только тогда, когда вам сильно повезет, когда определитель из коэффициентов при всех *а* равен нулю. Но не нужно чересчур умничать: можете просто начать их решать любым способом, и вы сразу увидите, что решить их удается лишь при некоторых значениях *E*. (Вспомните, что единственная величина, которая в этих уравне­ниях подлежит подгонке, это *Е.)*

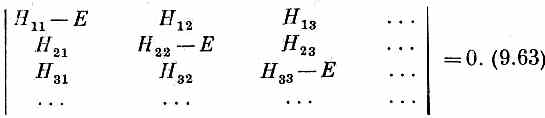
Если, впрочем, вы хотите, чтобы все было по форме, пере­пишите (9.60) так:

C:\Мои документы\gray.jpg

Затем примените правило (если оно вам знакомо), что эти урав­нения будут иметь решения лишь для тех значений *Е,* для кото­рых

C:\Мои документы\gray.jpg

Каждый член в детерминанте — это просто *Hij* и только из диагональных отнято *Е.* Иначе говоря, (9.62) означает просто



Это, конечно, всего-навсего особый способ записывать алгебраи­ческие уравнения для *Е,* складывая вереницы членов, пере­множаемых в определенном порядке. Эти произведения дадут все степени *Е* вплоть до *EN.*

Значит, у нас есть многочлен *N-*йстепени, который равняется нулю. У него, вообще говоря, есть *N* корней. (Нужно помнить, однако, что некоторые из них могут быть кратными корнями; это значит, что два или более корней могут быть равны друг другу.) Обозначим эти *N* корней так:

C:\Мои документы\gray.jpg

(пусть **n** обозначает *n-е* порядковое числительное, так что **n** принимает значения *I*,*II*, . . ., **N**). Некоторые из этих энергий могут быть между собой равны, скажем *ЕII=ЕIII,* но мы решили все же обозначать их разными именами.

Уравнения (9.60) или (9.61) имеют по одному решению для каждого значения *Е* [из (9.64)]. Если вы подставите любое из *Е,* скажем *En*, в (9.60) и найдете все *аi,* то получится ряд чисел *аi,* относящихся к энергии *En .* Этот ряд мы обозначим *аi* (**n**).

Если подставить эти *аi* (**n**) в (9.59), то получатся амплитуды *Сi* (**n**) того, что состояния с определенной энергией находятся в базисном состоянии |*i*>. Пусть |**n**> обозначает вектор состоя­ния для состояния с определенной энергией при *t=*0*.* Тогда можно написать

C:\Мои документы\gray.jpg

где

C:\Мои документы\gray.jpg

Полное состояние с определенной энергией |ψn(*t*)> можно тогда записать так:

C:\Мои документы\gray.jpg

или

C:\Мои документы\gray.jpg

Векторы состояний |**n**> описывают конфигурацию состояний с определенной энергией, но с вынесенной зависимостью от вре­мени. Это постоянные векторы, которые, если мы захотим, можно использовать в качестве новой базисной совокупности.

Каждое из состояний |**n**> обладает тем свойством (в чем легко убедиться), что при действии на него оператором Гамиль­тона *Н* получится просто *Еn ,* умноженное на то же состояние:

C:\Мои документы\gray.jpg

Значит, энергия *Еn —* это характеристическое число опера­тора Гамильтона *Н^.* Как мы видели, у гамильтониана в об­щем случае бывает несколько характеристических энергий. Фи­зики обычно называют их «собственными значениями» мат­рицы *Н.* Для каждого собственного значения *Н^,* иными словами, для каждой энергии, существует состояние с определенной энергией, которое мы называли «стационарным». Состояния |**n**> обычно именуются «собственными состояниями *Н^».* Каждое собственное состояние отвечает определенному собственному значению *Еn.*

Далее, состояния |**n**> (их *N* штук) могут, вообще говоря, тоже быть выбраны в качестве базиса. Для этого все состояния должны быть ортогональны в том смысле, что для любой нары их, скажем |**n**> и |**m**),

<**n**|**m**>=0. (9.68)

Это выполнится автоматически, если все энергии различны. Кроме того, можно умножить все *аi*(**n**) на подходящие множи­тели, чтобы все состояния были отнормированы: чтобы для всех **n** было

<**n**|**n**>=1. (9.69)

Когда оказывается, что (9.63) случайно имеет два (или боль­ше) одинаковых корня с одной и той же энергией, то появляются небольшие усложнения. По-прежнему имеются две различные совокупности *аi*, отвечающие двум одинаковым энергиям, но состояния, которые они дают, не обязательно ортогональны. Пусть вы проделали нормальную процедуру и нашли два стацио­нарных состояния с равными энергиями. Обозначим их |μ>и |v>. Тогда они не обязательно окажутся ортогональными: если вам не повезло, то обнаружите, что

<μ|v>≠0.

Но зато всегда верно, что можно изготовить два новых состоя­ния (обозначим их | μ'> и |v'>) с теми же энергиями, но орто­гональных друг другу:

<μ'|v'>=0. (9.70)

Этого можно добиться, составив |μ'> и |v'> из подходящих линейных комбинаций |μ> и |v> с так подобранными коэффи­циентами, что (9.70) будет выполнено. Это всегда полезно де­лать, и мы будем вообще предполагать, что это уже проделано, так что можно будет считать наши собственноэнергетические состояния | **n**> все ортогональными.

Для интереса докажем, что когда два стационарных состоя­ния обладают разными энергиями, то они действительно ортого­нальны. Для состояния |**n**> с энергией *Еn*

C:\Мои документы\gray.jpg

Это операторное уравнение на самом деле означает, что имеется соотношение между числами. Если заполнить недостающие части, то оно означает то же самое, что и

C:\Мои документы\gray.jpg

Проделав здесь комплексное сопряжение, получим

C:\Мои документы\gray.jpg

Теперь вспомним, что комплексно сопряженная амплитуда — это амплитуда обратного процесса, так что (9.73) можно пе­реписать в виде

C:\Мои документы\gray.jpg

Поскольку это уравнение справедливо для *всякого i,* то его можно «сократить» до

C:\Мои документы\gray.jpg

Это уравнение называется *сопряженным* с (9.71).

Теперь легко доказать, что *Еn—* число вещественное. Умножим (9.71) на <**n**|. Получится

C:\Мои документы\gray.jpg

(с учетом, что <**n**|**n**>=1). Умножим теперь (9.75) справа на

|**n**>:

C:\Мои документы\gray.jpg

Сравнивая (9.76) с (9.77), видим, что

*Еn=Еn\*,* (9.78)

а это означает, что *E*n вещественно. Звездочку при *Еn* в (9.75) можно убрать.

Теперь наконец-то мы в силах доказать, что состояния с различными энергиями ортогональны. Пусть |**n**> и |**m**> — пара базисных состояний с определенными энергиями. Написав (9.75) для состояния |**m**> и умножив его на |**n**>, получим

C:\Мои документы\gray.jpg

Но если (9.71) умножить на <**m**|, то будет

C:\Мои документы\gray.jpg

Раз левые части этих уравнений равны, то равны и правые:

C:\Мои документы\gray.jpg

Если *Еm=Еn ,* то это равенство ни о чем не говорит. Но если энергии двух состояний |**m**> и |**n**> *различны (Еm≠Еn*), то урав­нение (9.79) говорит, что <**m**|**n**> должно быть нулем, что мы и хотели доказать. Два состояния обязательно ортогональны, если только *Еn* и *Еm* отличаются друг от друга.

***\* Такую интерференцию действительно наблюдали. Коэффициент α оказался равным — 0,96β. Отсюда можно было вычислить и разность масс К1- и K2-мезонов. Она оказалась равной около —0,35•10-5 эв. Это наимень­шая разность масс двух частиц, известных физикам.— Прим. ред.***

***\* Мы здесь упрощаем. Система 2π может иметь множество состоя­ний, отвечающих различным импульсам π-мезонов, и в правой части >того равенства следовало бы поставить сумму по всем базисным состоя­ниям π-мезонов. Но полный вывод все равно приводит к тем же резуль­татам.***

***\* Типичное время для сильного взаимодействия ближе к 10-23 сек.***

***\* Если, конечно, он не создает еще двух К+ или других частиц с общей странностью +2. Можно считать, что здесь речь идет о реакциях, в которых не хватает энергии для возникновения этих добавочных стран­ных частиц.***

***\*\* Свободная Λ-частица медленно распадается путем слабого взаимо­действия (так что странность не обязана при этом сохраняться). Про­дуктами распада могут быть либо р и π-, либо n и π0. Время жизни 2,2•10-10сек.***

***\* Читайте: «.K-нуль с чертой».***

***\*\* Среди новых частиц есть барион Ω- со странностью -3.—Прим. ред.***

***\* Это похоже на то, что мы обнаружили (в гл. 4) для частиц со спи­ном 1/2. когда поворачивали систему координат вокруг оси z; тогда мы получили фазовые множители exp (±iϕ/2). В действительности это в точ­ности то же самое, что мы писали в гл. 3, § 7, для состояний |+> и |-> частицы со спином 1, и это не случайно. Фотон— это частица со спи­ном 1, у которой, однако, нет «нуль»-состояния.***

***\*\* Мы сознаем, что материал этого параграфа длиннее и труднее, чем это положено на нашем уровне знаний. Лучше пропустите его и пере­ходите прямо к § 6. Но если у вас есть самолюбие и время, попозже вер­нитесь к нему опять. Это великолепнейший пример (взятый к тому же из последних работ по физике высоких энергий) того, что можно сотворить с помощью нашей формулировки квантовой механики двухуровневых систем. (Для русского издания параграф переделан проф. Сэндсом. — Прим. ред.)***

\* Параграф 5 при первом чтении книги можно пропустить. Он сложнее, чем положено в таких курах.

***Глава 10***

**СВЕРХТОНКОЕ РАСЩЕПЛЕНИЕ В ВОДОРОДЕ**

[**§ 1. Базисные состо­яния** **для системы двух частиц со спином 1/2**](#a1)

[**§2. Гамильтониан** **основного со­стояния водорода**](#a2)

[**§ 3. Уровни энер****гии**](#a3)

[**§ 4. Зеемановско****е расщепление**](#a4)

[**§ 5. Состояния в магнитно****м поле**](#a5)

[**§ 6.Проекционная матр****ица для спина 1**](#a6)

**§ 1. Базисные состояния для системы двух частиц со спином 1/2**

В этой главе мы займемся «сверхтонким расщеплением» водорода — интересным при­мером того, что мы уже в состоянии делать с помощью квантовой механики. Здесь у нас уже будут не два состояния, а больше. Поучи­тельность этого примера в том, что он познако­мит нас с методами квантовой механики, приме­няемыми в более сложных задачах. Сам по себе этот пример достаточно сложен, и как только вы поймете, как с ним справляться, вам сразу же станет ясно, как обобщить его на другие воз­можные задачи.

Как известно, атом водорода состоит из электрона и протона; электрон сидит неподалеку от протона и может существовать в одном из многих дискретных энергетических состояний, в каждом из которых его картина движения дру­гая. Так, первое возбужденное состояние лежит на 3/4 ридберга, или на 10 *эв,* выше основного состояния. Но даже так называемое основное состояние водорода на самом деле не является отдельным состоянием с определенной энергией, ибо у электрона и у протона есть спины. Эти спины и ответственны за «сверхтонкую струк­туру» в уровнях энергии, которая расщепляет все уровни энергии на несколько почти одина­ковых уровней.

Спин электрона может быть направлен либо вверх, либо вниз; у протона тоже *его собствен­ный* спин может смотреть вверх или вниз. Поэтому на всякое динамическое состояние атома приходятся *четыре* возможных спиновых состояния. Иначе говоря, когда физик говорит об «основном состоянии» водорода, он на самом деле имеет в виду «четыре основных состояния», а не просто самое низкое из них. У четырех спиновых состояний энергия не совсем одинакова; имеются небольшие сдвиги по от­ношению к тому, что наблюдалось бы в отсутствие спинов. Эти сдвиги, однако, во много-много раз меньше, чем те 10 *эв,* которые лежат между основным состоянием и следующим более высоким состоянием.

В итоге энергия каждого динамического состояния расщеп­лена на ряд очень тесных уровней — это так называемое *сверх­тонкое расщепление.*

Разности энергий четырех спиновых состояний — это и есть то, что мы хотим рассчитать в этой главе. Сверхтонкое расщеп­ление вызывается взаимодействием магнитных моментов элек­трона и протона; оно приводит для каждого спинового состояния к слегка отличающимся магнитным энергиям. Эти сдвиги энер­гии составляют только около десятимиллионной части электрон-вольта, что действительно много меньше 10 *эв*!

Именно из-за столь большого промежутка основное состоя­ние водорода мы вправе считать «четырехуровневой системой», не заботясь о том, что на самом-то деле при более высоких энер­гиях состояний куда больше. Мы намерены ограничиться здесь изучением сверхтонкой структуры только основного состояния атома водорода.

Для наших целей нам неважны различные детали *расположе­ния* электрона и протона, потому что все они, так сказать, уже выработаны атомом, все они получились сами собой, когда атом попал в основное состояние. Достаточно знать только, что элек­трон и протон находятся невдалеке друг от друга, в каком-то определенном пространственном соотношении. Кроме того, у них могут быть всевозможные взаимные ориентации спинов. И мы хотим рассмотреть только спиновые эффекты.

Первый вопрос, на который нужно ответить: каковы *базис­ные состояния* для этой системы? Но вопрос этот поставлен не­правильно. Такой вещи, как *единственный* базис, не существует, а всякая система базисных состояний, которую вы выберете, не будет единственной. Всегда можно составить новые систе­мы из линейных комбинаций старой. Для базисных состоя­ний всегда есть множество выборов и все они одинаково законны.

Значит, надо спрашивать: не «каков базис?», а «каким его *можно* выбрать?». И выбрать вы вправе какой угодно, лишь бы вам было удобно.

Обычно лучше всего начинать с базиса, который *физи­чески* наиболее очевиден. Он не обязательно должен решать какую-то задачу или быть *непосредственно* важным в каком-то отношении, нет, он в общем должен только облегчать пони­мание того, что происходит.

Мы выбираем следующие базисные состояния:

*Состояние 1.* И у электрона, и у протона спины смотрят вверх.

*Состояние 2.* У электрона спин смотрит вверх, а у протона— вниз.

*Состояние 3.* У электрона спин смотрит вниз, а у протона —

вверх.

*Состояние 4.* И у электрона, и у протона спины смотрят

вниз.

Для краткой записи этих четырех состояний введем следую­щие обозначения:

*Состояние 1:* |+ +>; у электрона спин *вверх,* у протона спин *вверх.*

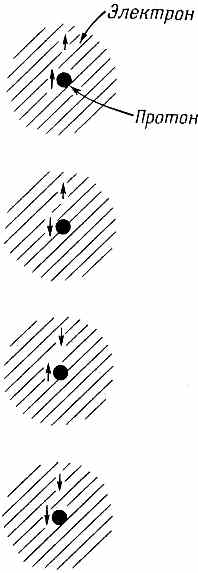
*Состояние 2:* | *+*  ->; у электрона спин *вверх,*

у протона спин *вниз.*

*Состояние 3:* |*- +*>; у электрона спин *вниз,* у протона спин *вверх.*

*Состояние 4:* |*- -*>; у электрона спин *вниз,* у протона спин *вниз*. (10.1)

Помните, что *первый* знак плюс или минус относится к элек­трону, *второй —* к протону. Чтобы эти обозначения были у вас под рукой, они сведены на фиг. 10.1.



*Фиг. 10.1. Совокупность базисных состояний*

*для основного состояния атома водорода.*

*Эти состояния мы обозначаем | + +>, | + ->> |- +>.*

Временами будет удобнее обозначать эти состояния |1>, |2>, |3> и |4>.

Вы можете сказать: «Но частицы взаимодействуют, и, может быть, эти состояния вовсе не являются правильными базисными состояниями. Получается, будто вы рассматриваете обе частицы независимо». Да, действительно! Взаимодействие ставит перед нами вопрос: каков *гамильтониан* системы? Но вопрос о том, как *описать* систему, не касается взаимодействия. Что бы мы ни выбрали в качестве базиса, это никак не связано с тем, что слу­чится после. Может оказаться, что атом не способен *оставаться* в одном из этих базисных состояний, даже если с него все и на­чалось. Но это другой вопрос. Это вопрос о том, как со временем меняются амплитуды в выбранном (фиксированном) базисе. Вы­бирая базисные состояния, мы просто выбираем «единичные векторы» для нашего описания.

Раз уже мы коснулись этого, бросим взгляд на общую проб­лему отыскания совокупности базисных состояний, когда имеет­ся не одна частица, а больше. Вы знаете базисные состояния для одной частицы. Электрон, например, полностью описывается в реальной жизни (не в наших упрощенных случаях, а в реаль­ной жизни) заданием амплитуд пребывания в одном из следующих состояний:

| Электрон спином вверх с импульсом **р>** или

| Электрон спином вниз с импульсом **р>.**

В действительности существуют две бесконечные совокупности состояний, по одному на каждое значение р. Значит, сказать, что электронное состояние |ψ> описано полностью, можно лишь тогда, когда вы знаете все амплитуды

C:\Мои документы\gray.jpg

где + и - представляют компоненты момента количества движения вдоль ка­кой-то оси, обычно оси *z,* a **p** — вектор импульса. Стало быть, для каждого мыс­лимого импульса должны быть две ампли­туды (дважды бесконечная совокупность базисных состояний). Вот и все, что нужно для описания отдельной частицы.

Таким же образом могут быть написаны базисные состояния, когда частиц не одна, а больше. Например, если надо было бы рассмотреть электрон и протон в более сложном, чем у нас, слу­чае, то базисные состояния могли бы быть следующими: Электрон с импульсом **p1** движется спином вверх, а протон с импульсом **р2** движется спином вниз. И так далее для других спиновых комбинаций. Если частиц больше двух, идея остается та же. Так что вы видите, что распи­сать *возможные* базисные состояния на самом деле очень легко. Вопрос только в том, каков гамильтониан.

Нам для изучения основного состояния водорода нет нужды применять полные совокупности базисных состояний для раз­личных импульсов. Мы оговариваем и фиксируем определенные импульсные состояния протона и электрона, когда произносим слова «основное состояние». Детали конфигурации — амплиту­ды для всех импульсных базисных состояний — можно рассчи­тать, но это уже другая задача. А мы сейчас касаемся только влияния спина, так что ограничимся только четырьмя базис­ными состояниями (10.1). Очередной вопрос таков: каков га­мильтониан для этой совокупности состояний?

**§ 2. Гамильтониан основного состояния водорода**

Через минуту вы это узнаете. Но прежде хочу вам напомнить одну вещь: *всякое* состояние всегда можно представить в виде линейной комбинации базисных состояний. Для любого состоя­ния |ψ|> можно написать

C:\Мои документы\gray.jpg

Напомним, что полные скобки — это просто комплексные числа, так что их можно обозначить обычным образом через *Сi*, где *i*=l, 2, 3 или 4, и записать (10.2) в виде

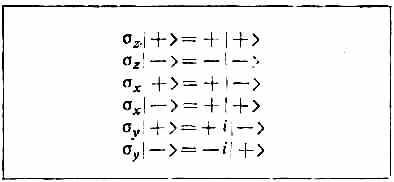
C:\Мои документы\gray.jpg

Задание четверки амплитуд *Сi* полностью описывает спиновое состояние |ψ>. Если эта четверка меняется во времени (как это и будет на самом деле), то скорость изменения во времени дается оператором *Н^.* Задача в том, чтобы найти этот оператор H^ .

Не существует общего правила, как писать гамильтониан атомной системы, и отыскание правильной формулы требует большего искусства, чем отыскание системы базисных состоя­ний. Мы вам смогли дать общее правило, как записывать систему базисных состояний для любой задачи, в которой есть протон и электрон, но описать общий гамильтониан такой комбинации на этом уровне слишком трудно. Вместо этого мы подведем вас к гамильтониану некоторыми эвристическими рассуждениями, и вам придется признать его .правильным, потому что резуль­таты будут согласовываться с экспериментальными наблюде­ниями.

Вспомните, что в предыдущей главе мы смогли описать га­мильтониан отдельной частицы со спином 1/2, применив сигма-матрицы или в точности эквивалентные им сигма-операторы. Свойства операторов сведены в табл. 10.1. Эти операторы, являю­щиеся просто удобным, кратким способом запоминания матрич­ных элементов типа <+|σz|+> были полезны для описания поведения *отдельной* частицы со спином 1/2. Возникает вопрос, можно ли отыскать аналогичное средство для описания системы с двумя спинами. Да, и очень просто. Вот смотрите. Мы изобре­тем вещь, которую назовем «электрон-сигма» и которую будем представлять векторным оператором σe с тремя компонентами σex, σey и σez. Дальше *условимся,* что когда одна из них действует

***Таблица 10.1* •** СВОЙСТВА СИГМА-ОПЕРАТОРОВ



на какое-то из наших четырех базисных состояний атома водо­рода, то она действует на один только спин электрона, причем гак, как если бы электрон был один, сам по себе. Пример: чему равно σy*е* |-+>? Поскольку σy , действующее на электрон со спином вниз, дает -*i*, умноженное на состояние с электроном, у которого спин вверх, то

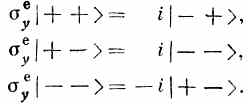
σey|-+>=-*i*|++>.

(Когда σyе действует на комбинированное состояние, оно пе­реворачивает электрон, не затрагивая протон, и умножает результат на -*i*.) Действуя на другие состояния, σ*еу* даст

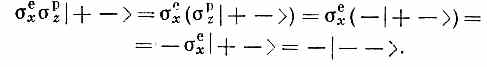
C:\Мои документы\gray.jpg

Напомним еще раз, что оператор σе действует только на *первый* спиновый символ, т. е. на спин *электрона.*

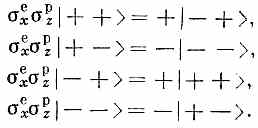
Теперь определим соответствующий оператор «протон-сиг­ма» для спина протона. Три его компоненты σpx*,* σpy, σpz, действуют так же, как и σе, но только на *протонный спин.* Например, если σpxбудет действовать на каждое из четырех базисных со­стояний, то получится (опять с помощью табл. 10.1)



Как видите, ничего трудного. В общем случае могут встретиться вещи и посложнее. Например, произведение операторов σeyσpz*.* Когда имеется такое произведение, то сначала делается то, что хочет правый оператор, а потом — чего [требует левый](#прим1). Например,



Заметьте, что эти операторы с числами ничего не делают; мы использовали это, когда писали σex(-1)=(-1) σex . Мы говорим, что операторы «коммутируют» с числами или что числа «можно протащить» через оператор. Попрактикуйтесь и покажите, что произведение σ*ех*σpz дает для четырех состояний следующий результат:



Если перебрать все допустимые операторы, каждый по разу, то всего может быть 16 возможностей. Да, *шестнадцать,* если включить еще «единичный оператор» 1. Во-первых, есть тройка σ*ех*, σ*еy*, σ*еz*, затем тройка σpx, σpy, σpz, итого шесть. Кроме того, имеет­ся девять произведений вида σ*ех*σpy, итого 15. И еще единичный оператор, оставляющий все состояния нетронутыми. Вот и все шестнадцать!

Заметьте теперь, что для системы с четырьмя состояниями матрица Гамильтона должна представлять собой матрицу коэф­фициентов 4x4, в ней будет 16 чисел. Легко показать, что всякая матрица 4X4, и в частности матрица Гамильтона, может быть записана в виде линейной комбинации шестнадцати двой­ных спиновых матриц, соответствующих системе операторов, которые мы только что составили. Поэтому для взаимодействия между протоном и электроном, в которое входят только их спины, мы можем ожидать, что оператор Гамильтона может быть записан в виде линейной комбинации тех же 16 операторов. Вопрос только в том, как.

Но, во-первых, мы знаем, что взаимодействие не зависит от нашего выбора осей для системы координат. Если нет внеш­него возмущения — чего-то вроде магнитного поля, выделяю­щего какое-то направление в пространстве,— то гамильтониан не может зависеть от нашего выбора направлений осей *х, у* и *z.* Это означает, что в гамильтониане не может быть таких членов, как σex сам по себе. Это выглядело бы нелепо, потому что кто-нибудь в другой системе координат пришел бы к другим резуль­татам.

Единственно возможны только член с единичной матрицей, скажем постоянная *а* (умноженная на 1^), и некоторая комбина­ция сигм, которая не зависит от координат, некоторая «инва­риантная» комбинация. Единственная *скалярная* инвариантная комбинация из двух векторов — это их скалярное произведе­ние, имеющее для наших сигм вид

C:\Мои документы\gray.jpg

Этот оператор инвариантен по отношению к любому повороту системы координат. Итак, единственная возможность для га­мильтониана с подходящей симметрией в пространстве — это постоянная, умноженная на единичную матрицу, плюс постоян­ная, умноженная на это скалярное произведение, т. е.

C:\Мои документы\gray.jpg

Это и есть наш гамильтониан. Это единственное, чему, исходя из симметрии в пространстве, он может равняться, *пока нет внешнего поля.* Постоянный член нам многого не сообщит; он просто зависит от уровня, который мы выбрали для отсчета энергий. С равным успехом можно было принять *Е*0=0.А второй член поведает нам обо всем, что нужно для того, чтобы найти расщепление уровней в водороде.

Если угодно, можно размышлять о гамильтониане иначе. Если поблизости друг от друга находятся два магнита с магнит­ными моментами μе и μр, то их взаимная энергия зависит, кроме всего прочего, и от **μе**•**μ**р. А мы, как вы помните, выяснили, что та вещь, которую мы в классической физике называли **μе**, в квантовой механике выступает под именем μeσe. Подобным же образом, то, что в классической физике выглядит как μp, в кван­товой механике обычно оказывается равным μрσр (где μр— маг­нитный момент протона, который почти в 1000 раз меньше μе и имеет обратный знак). Значит, (10.5) утверждает, что энергия взаимодействия подобна взаимодействию двух магнитов, но не до конца, потому что взаимодействие двух магнитов зависит от расстояния между ними. Но (10.5) может считаться (и на самом деле *является)* своего рода средним взаимодействием. Электрон как-то движется внутри атома, и .наш гамильтониан дает лишь среднюю энергию взаимодействия. В общем все это говорит о том, что для предписанного расположения электрона и протона в пространстве существует энергия, пропорциональ­ная косинусу угла между двумя магнитными моментами (выра­жаясь классически). Такая классическая качественная картина может помочь вам понять, откуда все получается, но единственное что важно при этом то, что (10.5) — это правильная квантовомеханическая формула.

Порядок величины классического взаимодействия между двумя магнитами должен был бы даваться произведением двух магнитных моментов, деленным на куб расстояния между ними. Расстояние между электроном и протоном в атоме водорода, грубо говоря, равно половине атомного радиуса, т. е. 0,5 А. Поэтому можно примерно прикинуть, что постоянная *А* должна быть равна произведению магнитных моментов μе и μp, делен­ному на куб половины ангстрема. Такая пристрелка приводит к числам, попадающим как раз в нужный район. Но оказывается, что *А* можно подсчитать и аккуратней, стоит только разобраться в полной теории атома водорода, что нам пока не по силам. На самом деле *А* было подсчитано с точностью до 30 миллион­ных. Как видите, в отличие от постоянной переброса *А* молекулы аммиака, которую по теории невозможно хорошо подсчитать, наша постоянная *А* для водорода *может быть* рассчитана из более детальной теории. Но ничего не поделаешь, нам для наших теперешних целей придется считать *А* числом, которое может быть определено из опыта, и анализировать физику дела.

Взяв гамильтониан (10.5), можно подставить его в уравнение

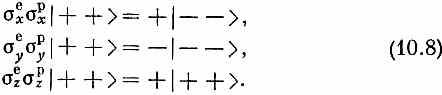
C:\Мои документы\gray.jpg

и посмотреть, что делает спиновое взаимодействие с уровнями энергии. Для этого надо подсчитать шестнадцать матричных элементов *Hij=*<*i*|*H|j*>, отвечающих любой двойке из четырех базисных состояний (10.1).

Начнем с того, что подсчитаем, чему равно *Н^ |j*> для каж­дого из четырех базисных состояний. К примеру,

C:\Мои документы\gray.jpg

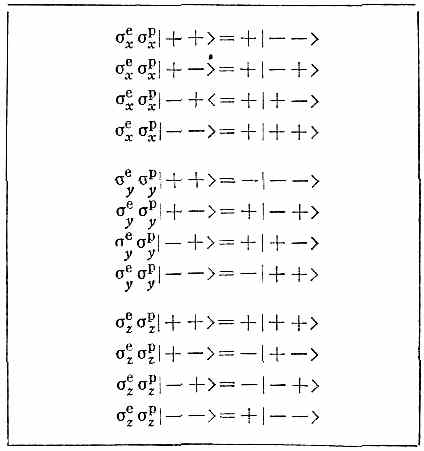
Пользуясь способом, описанным немного раньше (вспомните табл. 10.1, она очень облегчит дело), мы найдем, что каждая пара а делает с |+ +>• Ответ таков:



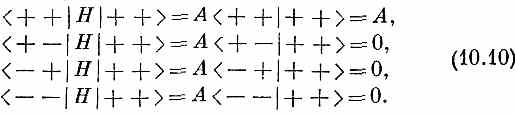
Значит, (10.7) превращается в

C:\Мои документы\gray.jpg

*Таблица 10.2* • спиновые операторы ДЛЯ АТОМА ВОДОРОДА



А раз все наши четыре базисных состояния ортогональны, то это немедленно приводит к



Вспоминая, что <j|*Н*|*i*>*=<.i*|*H*|*j*>\*, мы сразу сможем на­писать дифференциальное уравнение для амплитуды *С*1:

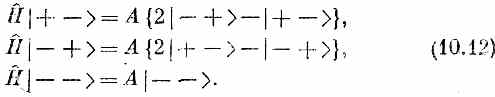
C:\Мои документы\gray.jpg

или

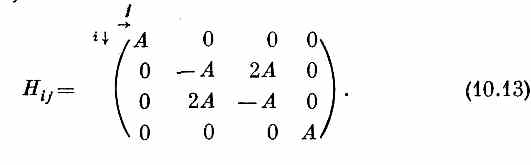
C:\Мои документы\gray.jpg

Вот и все! Только один член.

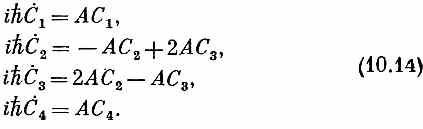
Чтобы теперь получить оставшиеся уравнения Гамильтона, мы должны терпеливо пройти через те же процедуры с *H^,* дей­ствующим на другие состояния. Во-первых, попрактикуйтесь в проверке того, что все произведения сигм в табл. 10.2 написаны правильно. Затем с их помощью получите



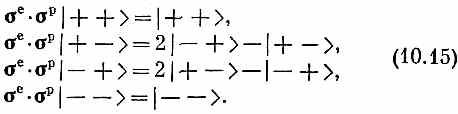
И тогда, умножая их все по порядку слева на все прочие векторы состояний, мы получаем следующую гамильтонову матрицу *Hij*:



Это, конечно, означает, что дифференциальные уравнения для четырех амплитуд *Сi* имеют вид



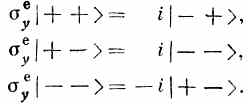
Но прежде чем перейти к их решению, трудно удержать­ся от того, чтобы не рассказать вам об одном умном правиле, которое вывел Дирак. Оно поможет вам ощутить, как много вы уже знаете, хотя нам в нашей работе оно и не понадобит­ся. Из уравнений (10.9) и (10.12) мы имеем



«Взгляните, — сказал Дирак, — первое и последнее уравнения я могу записать также в виде

C:\Мои документы\gray.jpg

и тогда все они станут похожими. Теперь я придумаю новый оператор, который обозначу *Р*спин. обмен и который, по *опре­делению,* будет обладать [следующими свойствами](#прим2):



Оператор этот, как видите, только обменивает направления спина у двух частиц. Тогда всю систему уравнений (10.15) я могу написать как одно простое операторное уравнение:

C:\Мои документы\gray.jpg

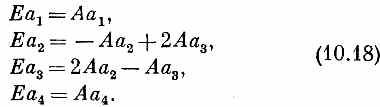
Это и есть формула Дирака. Оператор обмена спинами дает удобное правило для запоминания **σе•σp** . (Как видите, вы теперь уже все умеете делать. Для вас все двери открыты.)

**§ 3. Уровни энергии**

Теперь мы готовы к тому, чтобы вычислить уровни энергии основного состояния водорода, решая гамильтоновы уравнения (10.14). Мы хотим найти энергии стационарных состояний. Это значит, что мы должны отыскать те особые состояния |ψ>, для которых каждая из принадлежащих |ψ> амплитуд *Ci*=<*i*|ψ> обладает одной и той же зависимостью от времени, а именно *е-ωt.* Тогда состояние будет обладать энергией *E=hω*. Зна­чит, мы ищем совокупность амплитуд, для которых

C:\Мои документы\gray.jpg

где четверка коэффициентов *аi* не зависит от времени. Чтобы увидеть, можем ли мы получить эти амплитуды, подставим (10.17) в (10.14) и посмотрим, что из этого выйдет. Каждое *ihdCi/dt* в (10.14) перейдет в *ECi.* И после сокращения на общий экспоненциальный множитель каждое *Сi* превратится в *аi*; получим



Это и нужно решить для отыскания *a*1, *а*2, *а*3и *а*4. Право, очень мило со стороны первого уравнения, что оно не зависит от остальных,— а это значит, что одно решение сразу видно. Если выбрать *Е=А,* то

*a*1=1, *a*2=*a*3=*a*4=0

даст решение. (Конечно, если принять все *а* равными нулю, то это тоже будет решение, но состояния оно не даст!) Будем счи­тать наше первое [решение состоянием](#прим3) | *I*>:

C:\Мои документы\gray.jpg

Его энергия

*ЕI=А.*

Все это немедленно дает ключ ко второму решению, по­лучаемому из последнего уравнения в (10.18):

*а*1=*а*2=*а*3=0, *а*4=1, *Е=А.*

Это решение мы назовем состоянием |*II*>:

|//> = |4> = |-->,(10.20)

*ЕII=А.*

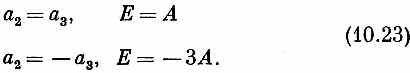
Дальше пойдет чуть труднее; оставшиеся два уравнения (10.18) переплетены одно с другим. Но мы все это уже дела­ли. Сложив их, получим

*Е(а2+ а3) = А(а2+ а3).* (10.21)

Вычитая, будем иметь

C:\Мои документы\gray.jpg

Окидывая это взглядом и припоминая знакомый нам уже аммиак, мы видим, что здесь есть два решения:

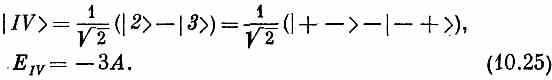


Это смеси состояний |*2*> и |*3*>. Обозначая их |*III*> и |*IV*> и вставляя для правильной нормировки множитель 1/√2, имеем

C:\Мои документы\gray.jpg

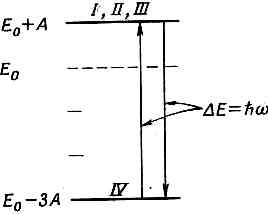
*ЕIII=А* (10.24)

и



Мы нашли четверку стационарных состояний и их энергии. Заметьте, кстати, что наши четыре состояния ортогональны друг другу, так что их тоже можно при желании считать базис­ными состояниями. Задача наша полностью решена.

У трех состояний энергия равна *А*, а у последнего -*ЗА.* Среднее равно нулю, а это означает, что когда в (10.5) мы вы­брали *Е*0*=*0*,* то тем самым мы решили отсчитывать все энергии от их среднего значения. Диаграмма уровней энергии основ­ного состояния водорода будет выглядеть так, как на фиг. 10.2.



Фиг. 10.2. Диаграмма уровней энергии основного состояния атомарного водорода.

Различие в энергиях между состоянием |*IV*> и любым из остальных равно 4*A*. Атом, который случайно окажется в состоя­ний |*I*>, может оттуда упасть в состояние |*IV*>и испустить свет: не оптический свет, потому что энергия очень мала, а микроволновой квант. Или, если осветить водородный газ микроволнами, мы заметим поглощение энергии, оттого что атомы в состоянии |*IV*>будут ее перехватывать и переходить в одно из высших состояний, но все это только на частоте ω=4*A*/h. Эта частота была измерена экспериментально; наилуч­ший результат, полученный [сравнительно недавно](#прим4), таков:

C:\Мои документы\gray.jpg

Ошибка составляет только три стомиллиардных! Вероятно, ни одна из фундаментальных физических величин не измерена лучше, чем эта; таково одно из наиболее выдающихся по точности измерений в физике. Теоретики были очень счастливы, когда им удалось вычислить энергию с точностью до 3•10-5; но к этому времени она была измерена с точностью до 2•10-11,т.е. в миллион раз точнее, чем в теории. Так что экспериментаторы идут далеко впереди теоретиков. В теории основного состояния атома водо­рода и *вы,* и мы находимся в одинаковом положении. Вы ведь тоже можете взять значение *А* из опыта — и всякому, в конце концов, приходится делать то же самое.

Вы, вероятно, уже слышали раньше о «21-с.м линии» водо­рода. Это и есть длина волны спектральной линии в 1420 *Мгц* между сверхтонкими состояниями. Излучение с такой длиной волны испускается или поглощается атомарным водородным газом в галактиках. Значит, с помощью радиотелескопов, настроенных на волны 21 *см* (или примерно на 1420 *Мгц),* можно наблюдать скорости и расположение сгущений атомарного водорода. Измеряя интенсивность, можно оценить его количе­ство. Измеряя сдвиг в частоте, вызываемый эффектом Допплера, можно выяснить движение газа в галактике. Это одна из вели­ких программ радиоастрономии. Так что мы с вами сейчас ведем речь о чем-то очень реальном, это вовсе не какая-то искусствен­ная задача.

**§ 4. Зеемановское расщепление**

Хотя с задачей отыскания уровней энергии основного состоя­ния водорода мы и справились, мы все же продолжим изучение этой интересной системы. Чтобы сказать о ней еще что-то, на­пример чтобы подсчитать скорость, с какой атом водорода поглощает или испускает радиоволны длиной 21 *см,* надо знать, что с ним происходит, когда он возмущен. Нужно проделать то, что мы сделали с молекулой аммиака,— после того как мы нашли уровни энергии, мы отправились дальше и выяснили, что происходит, когда молекула находится в электрическом поле. И после этого нетрудно оказалось представить себе влия­ние электрического поля радиоволны. В случае атома водо­рода электрическое поле ничего с уровнями не делает, разве что сдвигает их все на некоторую постоянную величину, пропор­циональную квадрату поля, а нам это неинтересно, потому что это не меняет *разностей* энергий. На сей раз важно уже *магнит­ное* поле. Значит, следующим шагом будет написать гамильто­ниан для более сложного случая, когда атом сидит во внешнем магнитном поле.

Каков же этот гамильтониан? Мы просто сообщим вам ответ, потому что никакого «доказательства» дать не можем, разве что сказать, что именно так устроен атом.

Гамильтониан имеет вид

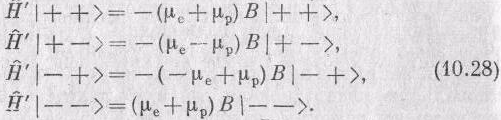
C:\Мои документы\gray.jpg

Теперь он состоит из трех частей. Первый член *А*(σе•σр) пред­ставляет магнитное взаимодействие между электроном и прото­ном; оно такое же, как если бы магнитного поля не было. Влия­ние внешнего магнитного поля проявляется в остальных двух членах. Второй член (-μ*е****σ****е*•**В**) — это та энергия, которой электрон обладал бы в магнитном поле, если бы он там [был один](#прим5). Точно так же последний член (-μр**σ**р•**В**) был бы энер­гией протона-одиночки. Согласно классической физике, энергия их обоих вместе была бы суммой их энергий; по квантовой меха­нике это тоже правильно. Возникающая из-за наличия магнит­ного поля энергия взаимодействия равна просто сумме энергий взаимодействия электрона с магнитным полем и протона с тем же полем, выраженных через операторы сигма. В квантовой меха­нике эти члены в действительности не являются энергиями, но обращение к классическим формулам для энергии помогает запоминать правила написания гамильтониана. Как бы. то ни было, (10.27) — это правильный гамильтониан.

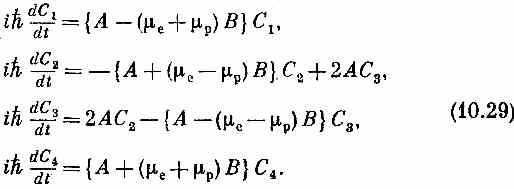
Теперь нужно вернуться к началу и решать всю задачу сызнова. Но большая часть работы уже сделана, надо только добавить эффекты, вызываемые новыми членами. Примем, что магнитное поле В постоянно и направлено по *z.* Тогда к нашему старому гамильтонову оператору *Н^* надо добавить два новых куска; обозначим их *Н^':*



Пользуясь табл. 10.1, мы сразу получаем



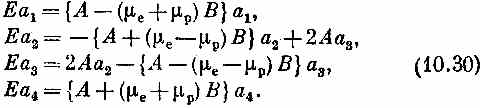
Смотрите, как удобно! Оператор *Н',* действуя на каждое состояние, дает просто число, умноженное на это же состоя­ние. В матрице <*i|H'|j*> есть поэтому только *диагональные* элементы, и можно просто добавить коэффициенты из (10.28) к соответствующим диагональным членам в (10.13), так что гамильтоновы уравнения (10.14) обращаются в



Форма уравнений не изменилась, изменились только коэф­фициенты. И пока *В* не меняется со временем, можно все делать так же, как и раньше.

Подставляя

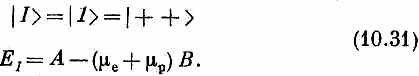
C:\Мои документы\gray.jpg*,* мы получаем



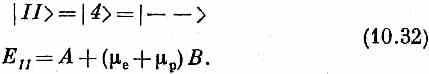
К счастью, первое и четвертое уравнения по-прежнему не зависят от остальных, так что снова пойдет в ход та же техника. Одно решение — это состояние |*I*>, для которого

C:\Мои документы\gray.jpg

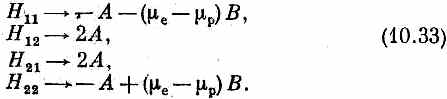
или



Другое решение



Для остальных двух уравнений потребуется больше работы, потому что коэффициенты при *а*2 и a3 уже не равны друг другу. Но зато они очень похожи на ту пару уравнений, которую мы писали для молекулы аммиака. Оглядываясь на уравнения (7.20) и (7.21), можно провести следующую аналогию (помните, что тамошние индексы 1 и 2 соответствуют здесь индексам 2 и 3):



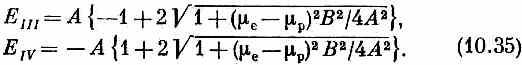
Раньше энергии давались формулой (7.25), которая имела вид

C:\Мои документы\gray.jpg

Подставляя сюда (10.33), получаем для энергии

C:\Мои документы\gray.jpg

В гл. 7 мы привыкли называть эти энергии *ЕI* и *ЕII,* теперь мы их обозначим *ЕIII* и *EIV*:

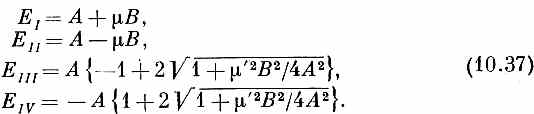


Итак, мы нашли энергии четырех стационарных состояний атома водорода в постоянном магнитном поле. Проверим наши выкладки, для чего устремим *В* к нулю и посмотрим, полу­чатся ли те же энергии, что и в предыдущем параграфе. Вы ви­дите, что вес в порядке. При *В=*0энергии *ЕI, ЕII* и *ЕIII* обра­щаются в +*А,* a *eiv —* в -*ЗА.* Даже наша нумерация состоя­ний согласуется с прежней. Но когда мы включим магнитное поле, то каждая энергия начнет меняться по-своему. Посмотрим, как это происходит.

Во-первых, напомним, что у электрона μе отрицательно и почти в 1000 раз больше μр, которое положительно. Значит, и μe+μp и μe-μp оба отрицательны и почти равны друг другу. Обозначим их -μ и -μ':

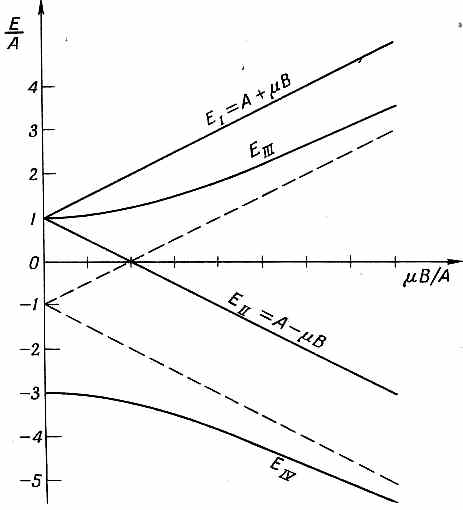
C:\Мои документы\gray.jpg

(И μи μ' положительны и по величине почти совпадают с μе, которое примерно равно одному магнетону Бора.) Наша четверка энергий тогда обратится в



Энергия *ЕI* вначале равна *А* и линейно растет с ростом *В* со скоростью μ. Энергия *ЕII* тоже вначале равна *A*, но с ростом *В* линейно *убывает,* наклон ее кривой равен -μ*.* Изменение этих уровней с *В* показано на фиг. 10.3. На рисунке показаны также графики энергий *ЕIII* и *eiv .* Их зависимость от *В* иная. При малых *В* они зависят от *В* квадратично; вначале наклон их равен нулю, а затем они начинают искривляться и при *боль­ших В* приближаются к прямым с наклоном ±μ', близким к наклону *ei* и *ЕII*

Сдвиг уровней энергии атома, вызываемый действием маг­нитного поля, называется *эффектом Зеемана.* Мы говорим, что кривые на фиг. 10.3 показывают *зеемановское расщепление* основ­ного состояния водорода.



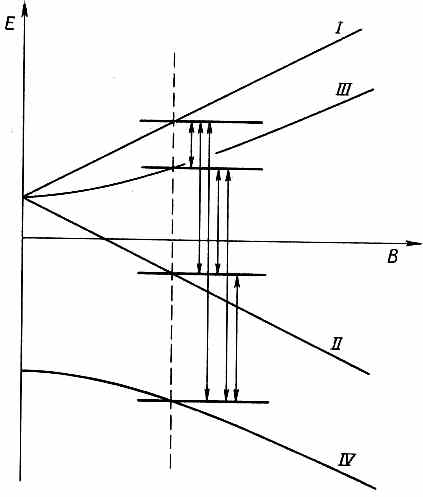
*Фиг. 10.3. Уровни энергии основного состояния*

*водорода в магнитном поле* ***В****.*

*Кривые EIII и ЕIV приближаются к пунктирным прямым*

*А±μ'В.*

Когда магнитного поля нет, то просто получается одна спектральная линия от сверхтонкой структуры водорода. Переходы между состоянием |*IV*> и любым из осталь­ных трех происходят с поглощением или испусканием фотона, частота которого равна 1420 *Мгц*:1*/h,* умноженной на разность энергий 44. Но когда атом находится в магнитном поле В, то линий получается гораздо больше. Могут происходить переходы между любыми двумя из четырех состояний. Значит, если мы имеем атомы во всех четырех состояниях, то энергия может поглощаться (или излучаться) в любом из шести переходов, показанных на фиг. 10.4 вертикальными стрелками.



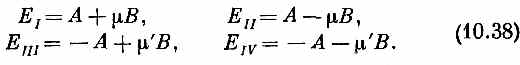
*Фиг. 10.4. Переходы между уровнями энергии основного состояния водорода в некотором маг­нитном поле* **В**.

Многие из этих переходов можно наблюдать с помощью техники молеку­лярных пучков Раби, которую мы описывали в гл. 35, § 3 (вып.7).

Что же является причиной переходов? Они возникают, если наряду с сильным постоянным полем *B* приложить малое возмущающее магнитное поле, которое меняется во времени. То же самое мы наблюдали и при действии переменного электрического поля на молекулу аммиака. Только здесь виновник переходов — это магнитное поле, действующее на магнитные моменты. Но теоретические выкладки те же самые, что и в случае аммиака. Проще всего они получаются, если взять возмущающее магнит­ное поле, вращающееся в плоскости *ху,* хотя то же будет от любого осциллирующего горизонтального поля. Если вы вста­вите это возмущающее поле в качестве добавочного члена в га­мильтониан, то получите решения, в которых амплитуды ме­няются во времени, как это было и с молекулой аммиака. Зна­чит, вы сможете легко и аккуратно рассчитать вероятность перехода из одного состояния в другое. И обнаружите, что все это согласуется с опытом.

**§ 5. Состояния в магнитном поле**

Теперь займемся формой кривых на фиг. 10.3. Во-первых, если говорить о больших полях, то зависимость энергии от поля довольно интересна и легко объяснима. При достаточно боль­ших *В* (а именно при *μB/A*>>1) в формулах (10.37) можно пре­небречь единицей. Четверка энергий принимает вид



Это уравнения четырех прямых на фиг. 10.3. Эти формулы можно физически понять следующим образом. Природа стацио­нарных состояний в *нулевом* поле полностью определяется вза­имодействием двух магнитных моментов. Перемешивание ба­зисных состояний | + -> и | - +> в стационарных состояниях |III>и |*IV*>вызвано этим взаимодействием. Однако вряд ли можно ожидать, что каждая из наших частиц (и протон, и элек­трон) в *сильных внешних* полях будет испытывать влияние поля другой частицы; каждая будет действовать так, как если бы во внешнем поле находилась она одна. Тогда (как мы уже много раз видели) спин электрона окажется направленным вдоль внешнего магнитного поля (по нему или против него).

Пусть спин электрона направлен вверх, т. е. вдоль поля; энергия его будет -μe*B*. Протон при - этом может стоять по-разному. Если у него спин тоже направлен вверх, то его энергия -μp*B.* Их сумма равна -(μе+μр)*B=μB.* А это как раз и есть *ei,* и это очень приятно, потому что мы описываем состояние |+ +>=|*I*>. Есть еще небольшой дополнительный член *А* (теперь (μ*B*>>*A*), представляющий энергию взаимодействия протона и электрона, когда их спины параллельны. (Мы с са­мого начала считали *А* положительным, потому что так должно было быть по теории, о которой шла речь; то же получается и на опыте.) Но спин протона может быть направлен и вниз. Тогда его энергия во внешнем ноле обратится в +μР*B*, а вместе с элек­троном их анергия будет -(μe-μр) *В=*μ*В.* А энергия взаимо­действия обращается в -*А.* Их сумма даст энергию *ЕIII,* в (10.38). Так что состояние |*III*>в сильных полях становится состоянием |+ ->.

Пусть теперь спин электрона направлен вниз. Его энергия во внешнем ноле равна μ*eВ.* Если и протон смотрит вниз, то их общая энергия равна {μe+μp)*В = -*μ*В плюс* энергия взаимо­действия *А* (спины-то теперь параллельны). Это приводит как раз к энергии *ЕII* в (10.38) и соответствует состоянию |- ->=|*II*>*,* что очень мило. И наконец, если у электрона спин направлен вниз, а у протона — вверх, то мы получим энер­гию (μe -μ*p)В-А (минус А* потому, что спины противопо­ложны), т. е. *eiv.* А состояние отвечает |- +>.

«Погодите минутку,— вероятно, скажете вы.— «Состояния | *Ill*>и |*IV*> *— это не* состояния | + — > и | — + >; они яв­ляются их *смесями».* Верно, но перемешивание здесь едва замет­но. Действительно, при 5=0 они являются смесями, но мы пока не выясняли, что бывает при больших *В.* Когда мы для полу­чения энергии стационарных состояний пользовались анало­гией между (10.33) и формулами гл. 7, то заодно можно было оттуда взять и амплитуды. Они получатся из (7.23):

C:\Мои документы\gray.jpg

Отношение *a*2*/a3 —* это, конечно, на сей раз *C*2*/C*3Вставляя аналогичные величины из (10.33), получаем

C:\Мои документы\gray.jpg

или

C:\Мои документы\gray.jpg

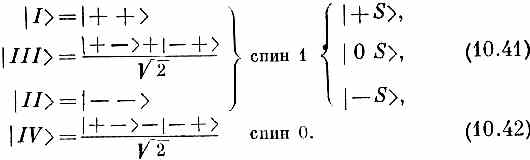
где вместо *Е* надо взять подходящую энергию (либо *ЕIII,* либо *EIV).* Например, для состояния |*III*>имеем

C:\Мои документы\gray.jpg

Значит, при больших *В* у состояния | ///> *С*2*>>С*3;состояние почти полностью становится состоянием | *2>=*|+ ->. Точно так же если в (10.39) подставить *eiv,* то получится, что (С2/С3)IV<<1; в сильных полях состояние | *IV*>обращается попросту в состояние |3>*=*|- +>. Вы видите, что коэффи­циенты в линейных комбинациях наших базисных состояний, составляющих стационарные состояния, сами зависят от *В.*

Состояние, которое мы име­нуем |*III*>*,* в очень слабых полях представляет собой смесь |+ -> и |- +> в про­порции 1:1, но в сильных полях целиком смещается к |+ ->. Точно так же и со­стояние |*IV*>, которое в сла­бых полях также является смесью |+ -> и |- +> в пропорции 1:1 (с обратным зна­ком), переходит в состояние | - + ), когда спины из-за силь­ного внешнего поля больше друг с другом не связаны.

Хотелось бы обратить ваше внимание, в частности, на то, что происходит в *очень слабых* магнитных полях. Имеется одна энергия (*-3А*)*,* которая *не изменяется* при включении слабого магнитного поля. И имеется другая энергия (*+А*)*,* которая при включении слабого магнитного поля расщепляется на три различных уровня энергии. В слабых полях энергии с ростом *В* меняются так, как показано на фиг. 10.5. Допустим, что у нас есть каким-то образом отобранное множество атомов водорода, у которых у всех энергия равна -*3А.* Если пропу­стить их через прибор Штерна — Герлаха (с не очень сильными полями), то мы найдем, что они просто проходят целиком на­сквозь. (Поскольку их энергия не зависит от *В,* то, согласно принципу виртуальной работы, градиент магнитного поля не создает никакой силы, которая бы ощущалась ими.) Пусть, с другой стороны, мы бы отобрали группку атомов с энергией +*А* и пропустили их через прибор Штерна — Герлаха, скажем через прибор *S.* (Опять поля в приборе не должны быть столь сильными, чтобы разрушить внутренность атома; подразуме­вается, что поля малы настолько, что энергии можно считать линейно зависящими от *В.)* Мы бы получили *три пучка.* На состояния |*I*> и |*II*> действуют противоположные силы, их энергии меняются по *В* линейно с наклоном ±μ, так что *силы* сходны с силами, действующими на диполь, у которого μ*z=*±μ*,* а состояние |*III*> проходит насквозь. Мы опять возвращаемся к гл. 3. *Атом водорода с энергией +А — это частица со спином 1.* Это энергетическое состояние является «частицей», для которой *j*=1, и может быть описано (по отношению к некоторой системе осей в пространстве) в терминах базисных состояний |+*S*>, | 0*S*> и |-*S*>*,* которыми мы пользовались в гл. 3. С другой стороны, когда атом водорода имеет энергию -3*А,* он является частицей со спином нуль. (Напоминаем, что все сказанное, строго говоря, справедливо лишь для бесконечно малых магнит­ных полей.) Итак, состояния водорода в нулевом магнитном поле можно сгруппировать следующим образом:

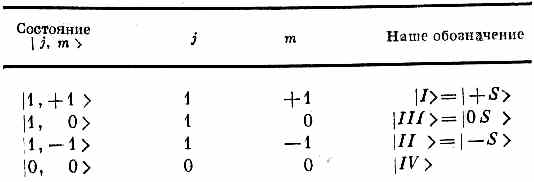


В гл. 35 (вып. 7) мы говорили, что у всякой частицы компо­ненты момента количества движения вдоль любой оси могут принимать только определенные значения, всегда отличаю­щиеся на *h.* Так, z-компонента момента количества движения *Jz* может быть равна *jh,* (j-1)*h, (j-*2)*h*,..., (-*j*)*h*, где *j* — спин частицы (который может быть целым или полу­целым). Обыкновенно пишут

*Jz=mh,* (10.43)

где *т* стоит вместо любого из чисел *j*, *j*-1, *j-*2, . . .,*-j* (в свое время мы не сказали об этом). Вы поэтому часто встре­тите в книжках нумерацию четырех основных состояний при помощи так называемых *квантовых чисел j* и *m* [часто именуе­мых «квантовым числом полного момента количества движения» (*j*) и «магнитным квантовым числом» *(m)].* Вместо наших сим­волов состояний |*I*>, |*II*> и т. д. многие часто пишут состоя­ния в виде |*j*, *m*>*.* Нашу табличку состояний для нулевого поля в (10.41) и (10.42) они бы изобразили в виде табл. 10.3. Здесь нет какой-либо новой физики, это просто вопрос обозначении.

*Таблица 10.3* • СОСТОЯНИЯ АТОМА ВОДОРОДА В НУЛЕВОМ ПОЛЕ



**§ 6. Проекционная матрица для** [**сп****ина 1**](#прим6)

Теперь мы хотели бы применить наши знания об атоме водо­рода к одной специальной задаче. В гл. 3 мы говорили о том, что частица *со спином 1,* находящаяся в одном из базисных со­стояний (+, 0, -) по отношению к прибору Штерна — Герлаха с какой-то частной ориентацией (скажем, по отношению к при­бору *S),* будет иметь определенную амплитуду пребывания в одном из трех состояний по отношению к прибору *Т,* ориенти­рованному в пространстве по-другому. Имеются девять таких амплитуд <*jT|iS*>*,* которые вместе образуют проекционную матрицу. В гл. 3, § 7, мы без доказательства выписали элементы этой матрицы для различных ориентации *Т* по отношению к *S.* Теперь мы хотим показать вам один из способов их вывода.

В атоме водорода мы с вами отыскали систему со спином 1, составленную из двух частиц со спином 1/2. В гл. 4 мы уже научились преобразовывать амплитуды для спина 1/2. Эти зна­ния можно применить к тому, чтобы получить преобразование для спина 1. Вот как это делается: имеется система (атом водо­рода с энергией +*А)* со спином 1. Пусть мы пропустили ее сквозь фильтр *S* Штерна — Герлаха так, что знаем теперь, что она находится в одном из базисных состояний по отношению к *S,* скажем в |+*S*). Какова амплитуда того, что она окажется в одном из базисных состояний, скажем |+*T*), по отношению к прибору *Т?* Если вы назовете систему координат прибора *S* системой *х, у, z,* то состояние |+*S*> *—* это то, что недавно назы­валось состоянием |+ +>. Но представьте, что какой-то ваш приятель провел свою ось *z* вдоль оси *Т.* Он свои состояния будет относить к некоторой системе *х', у',* z'. Его состояния «вверх» и «вниз» для электрона и протона отличались бы от ваших. *Его* состояние «плюс — плюс», которое можно записать | +'+'>, отмечая «штрихованность» системы, есть состояние |+*Т*> частицы со спином 1. А вас интересует <+*T*|+*S*>, что есть просто иной способ записи амплитуды <+'+' | + + >.

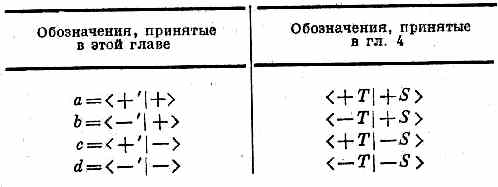
Амплитуду <+ '+' | + +> можно найти следующим обра­зом. В *вашей* системе спин *электрона* из состояния | + +> направлен вверх. Это означает, что у него есть некоторая ампли­туда <+'|+>e оказаться в системе вашего приятеля спином вверх и некоторая амплитуда <-' |+>е оказаться в этой системе спином вниз. Равным образом, *протон* в состоянии + + *У* имеет спин вверх в вашей системе и амплитуды <+'|+>р и <-'|+>p оказаться спином вверх или вниз в «штрихованной» системе. Поскольку мы говорим о двух раз­ных частицах, то амплитуда того, *что обе* частицы *вместе* в *его* системе окажутся спинами вверх, равна произведению амплитуд

C:\Мои документы\gray.jpg

Мы поставили значки е и р под амплитудами <+'|+>, чтоб было ясно, что мы делаем. Но обе они — это просто ампли­туды преобразований для частицы со спином 1/2, так что на самом деле — это одни и те же числа. Фактически — это те же амплитуды, которые мы в гл. 4 называли <+*Т*|+*S*> > и которые мы привели в табл. 4.1 и 4.2.

Но теперь, однако, нам угрожает путаница в обозначениях. Надо уметь различать амплитуду <+*T*|+*S*) для частицы *со спином* 1/2 от того, что мы *также* назвали <+*T*|+*S*>, но для *спина* 1—между ними нет ничего общего! Надеюсь, вас не очень собьет с толку, если мы *на время* введем иные обозначения амплитуд для спина 1/2, Они приведены в табл. 10.4. Для состоя­ний частиц спина 1 мы по-прежнему будем прибегать к обозна­чениям | +*S*, | 0*S*> и |-*S*>.

*Таблица 10.4* • АМПЛИТУДЫ для СПИНА 1/2



В наших новых обозначениях (10.44) просто превращается в

C:\Мои документы\gray.jpg

Это как раз амплитуда <+*T*|+*S*> для спина 1. Теперь давайте, например, предположим, что у вашего приятеля система коор­динат, т. е. «штрихованный» прибор *Т,* повернута вокруг *вашей* оси *z* на угол ϕ; тогда из табл. 4.2 получается

C:\Мои документы\gray.jpg

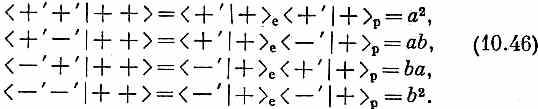
Значит, из (10.44) амплитуда для спина 1 окажется равной

C:\Мои документы\gray.jpg

Теперь вам понятно, как мы будем действовать дальше.

Но хорошо бы провести выкладки в общем случае для всех состояний. Если протон и электрон в *нашей* системе (системе *S)* оба смотрят вверх, то амплитуды того, что в другой системе (системе *Т*)они будут в одном из четырех возможных состояний,

равны



Затем мы можем записать состояние |+ +> в виде следующей линейной комбинации:

C:\Мои документы\gray.jpg

Но теперь мы замечаем, что |+ '+'> — это состояние |+*Т*>*,* что {| + '-'>+|-'+'>} — это как раз √2, *умноженный* на состояние |0*T*> [см. (10.41)], и что | - '-'> = |-*Т*>*.* Иными словами, (10.47) переписывается в виде

C:\Мои документы\gray.jpg

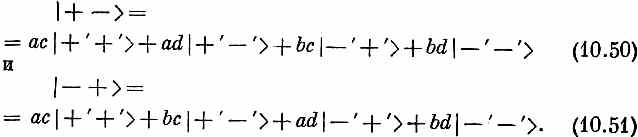
Точно так же легко показать, что

C:\Мои документы\gray.jpg

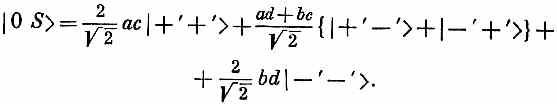
С |0*S*> дело обстоит чуть посложнее, потому что

C:\Мои документы\gray.jpg

Но каждое из состояний | + - > и | - +> можно выразить через «штрихованные» состояния и подставить в сумму:



Умножая сумму (10.50) и (10.51) на 1/√2, получаем

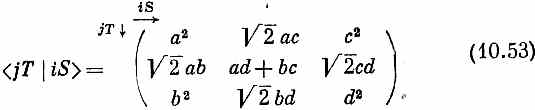


Отсюда следует

C:\Мои документы\gray.jpg

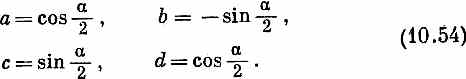
Теперь у нас есть все необходимые амплитуды. Коэффи­циенты в (10.48), (10.49) и (10.52) —это матричные элементы

<*jТ*|*iS*>*.* Сведем их в одну матрицу:



Мы выразили преобразование спина 1 через амплитуды *а, b,* с и *d* преобразования спина 1/2.

Если, например, система *Т* повернута по отношению к *S* на угол а вокруг оси *у* (см. фиг. 3.6, стр. 64), то амплитуды в табл. 10.4—это просто матричные элементы *Ry* (α) в табл. 4.2:



Подставив их в (10.53), получим формулы (3.38), которые приведены на стр. 80 без доказательства.

Но что же случилось с состоянием |*IV*)?! Это система со спи­ном нуль; значит, у нее есть только одно состояние — оно *во всех системах координат* одно и то же. Можно проверить, что все так и выходит, если взять разность (10.50) и (10.51); получим

C:\Мои документы\gray.jpg

Но *(ad-bc) —* это определитель матрицы для спина 1/2, он просто равен единице. Получается

|*IV*'>=|*IV*> при любой относительной ориентации двух систем координат.

***\* Тем, кто перескочил через гл. 4, придется пропустить и этот па­раграф.***

***\* Вспомните, что класси******чески U= -μ•B, так что энергия наименьшая, когда момент направлен по полю. Для положительно за­ряженных частиц магнитный момент параллелен спину, для отрицатель­ных — наоборот. Значит, в (10.27) μр— число положительное, а (μе— отрицательное.***

***\*Crampton, Kleppner, Ramsey, Physical Review Letters, 11, 338 (1963).***

***\*В действительности состоянием является***

******

***но, как обычно, мы отождествим состояния с постоянными векторами, которые при t=0 совпадают с настоящими векторами.***

***\* Этот оператор сейчас называют оператор обмена спинами.***

***\* Для этих операторов, правда, оказывается, что от их порядка ни­чего не зависит.***