

6Ф6.5

553

УДК 62.50

Определение движения по результатам измерений, П. Е. Эльясберг,
Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука»,
М., 1976, 416 стр.

Книга посвящена определению параметров состояния и движения различных систем по данным измерений, оценке точности получаемых результатов и выбору оптимальной стратегии проведения и обработки измерений (выбору оптимального алгоритма фильтрации, состава используемых измерений и математической модели). Рассматриваются два возможных подхода к этим задачам: классический, при котором характеристики ошибок исходных данных задаются некоторыми равенствами, и неклассический, характеризуемый заданием лишь некоторых множеств, которым принадлежат ошибки или их характеристики. Описываются основные методы решения указанных задач, соответствующие первому подходу (наименьших квадратов, максимального правдоподобия, максимума апостериорной вероятности, рекуррентной и динамической фильтрации, фильтр Калмана). Излагаются новые неклассические результаты (метод минимакса). Исследуется зависимость этих методов от имеющихся сведений об ошибках исходных данных, анализируется влияние отклонений реальных условий решения задачи от принятых допущений.

Книга предназначена для широкого круга исследователей, работающих в области теории управления движением, небесной механики, космонавтики, кибернетики, математической статистики, методов обработки данных физических экспериментов, геодезии, математической экономики, теоретической биологии.

Илл. 25, Библ. 61 назв.

Павел Ефимович Эльясберг

Определение движения по результатам измерений

М., 1976 г., 416 стр. с илл.

Редактор Д. С. Фурманов

Технический редактор В. Н. Кондакова

Корректор Е. А. Белицкая, Е. Я. Строева

Сдано в набор 7/X 1975 г. Подписано к печати 15/VI 1976 г.
Бумага 84X108/32. Физ. печ. л. 13. Услон. печ. л. 21,84.
Уч.-изд. л. 20,14. Тираж 4700 экз. Т-12223. Цена книги 1 р. 80 к.
Заказ 863.

Издательство «Наука»

Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного Знамени
Ленинградская типография № 2
имени Евгении Соколовой Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета
Министров СССР по делам издательств,
полиграфии и книжной торговли.
198052, Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29

30501—086

053(02)-76

160-76

© Главная редакция
физико-математической литературы
издательства «Наука», 1976

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	6
Введение	11
Глава I. Некоторые математические сведения и обозначения	15
§ 1.1. Матрицы, векторы и строки	15
§ 1.2. Операции над матрицами и векторами	18
§ 1.3. Линейные преобразования	21
§ 1.4. Линейные уравнения, квадратичные формы и матричные неравенства	23
§ 1.5. Матричные и векторные функции	26
§ 1.6. Случайные события	28
§ 1.7. Относительная частота и вероятность случайного события	31
§ 1.8. Одномерные распределения вероятностей	33
§ 1.9. Многомерные распределения вероятностей	37
§ 1.10. Нормальное многомерное распределение вероятностей. Распределение Лапласа	45
§ 1.11. Сходимость последовательностей случайных величин. Предельные теоремы	47
§ 1.12. Случайные функции	50
§ 1.13. Выпуклые оболочки	54
Глава II. Задача оценки состояния реальной системы	63
§ 2.1. Постановка задачи	63
§ 2.2. Прогнозируемые, непрогнозируемые и вероятностные модели	67
§ 2.3. Статическая и динамическая фильтрация	72
§ 2.4. Вектор измерений	74
Глава III. Оценка точности и оптимизация	81
§ 3.1. Ошибки измерений	81
§ 3.2. Ошибки измеряемых функций	88
§ 3.3. Ошибки модели	91
§ 3.4. Оценка точности	93
§ 3.5. Неклассический подход к оценке точности	101
§ 3.6. Оптимизация стратегии определения состояния системы	110
§ 3.7. Критерии оптимальности при классической постановке задачи	112

§ 3.8. Критерии оптимальности при неклассической постановке задачи	120
§ 3.9. Асимптотические свойства оценок состояния реальных систем	123
§ 3.10. Апостериорная оценка точности	128

Глава IV. Некоторые задачи определения состояния реальных систем 132

§ 4.1. Определение внешнего гравитационного поля планеты	132
§ 4.2. Определение магнитного поля Земли	139
§ 4.3. Определение движения механической системы	143
§ 4.4. Определение траектории космического аппарата	151
§ 4.5. Определение фактической ориентации неориентированных космических аппаратов	163
§ 4.6. Линеаризация математической модели	172
§ 4.7. Вычисление матриц частных производных от измеряемых параметров по параметрам состояния системы	176
§ 4.8. Статистическая регрессия	183

Глава V. Метод наименьших квадратов 188

§ 5.1. Сущность метода	188
§ 5.2. Простейшая задача построения алгоритма фильтрации по методу наименьших квадратов. Теорема Гаусса — Маркова	190
§ 5.3. Случай коррелированных измерений	199
§ 5.4. Влияние мешающих параметров. Теорема эквивалентности	203
§ 5.5. Случай нелинейной модели	211
§ 5.6. Оценка точности метода наименьших квадратов	221
§ 5.7. Состоятельность оценки по методу наименьших квадратов	223
§ 5.8. Оценка коэффициента σ^2	237
§ 5.9. Погрешности метода наименьших квадратов, связанные с невыполнением принятых допущений	240
§ 5.10. Задача определения движения локомотива	242
§ 5.11. Задача определения расстояния до медленно перемещающегося объекта	251
§ 5.12. Практическое применение метода наименьших квадратов	259

Глава VI. Некоторые статистические оценки, основанные на методе максимального правдоподобия 266

§ 6.1. Метод максимального правдоподобия	266
§ 6.2. Случай нормального закона распределения ошибок	267
§ 6.3. Метод наименьших модулей	268
§ 6.4. Метод максимума апостериорной вероятности	270
§ 6.5. Метод максимума апостериорной вероятности при нормальном законе распределения ошибок	272
§ 6.6. Рекуррентные алгоритмы фильтрации	274
§ 6.7. Случай некоррелированных групп измерений	276
§ 6.8. Динамическая фильтрация	280
§ 6.9. Дискретный фильтр Калмана	282

§ 6.10. Непрерывный фильтр Калмана	284
§ 6.11. Практическое использование рекуррентных алгоритмов фильтрации	287
Глава VII. Минимаксные оценки	291
§ 7.1. Постановка задачи	291
§ 7.2. Две основные теоремы	293
§ 7.3. Сведение к задаче линейного программирования	295
§ 7.4. Геометрическая интерпретация	305
§ 7.5. Некоторые свойства оптимальных оценок	315
§ 7.6. Примеры минимаксных оценок	321
§ 7.7. Разложение пространства параметров состояния системы	331
§ 7.8. Однозначные и неоднозначные решения	333
§ 7.9. Выбор оптимальной стратегии	336
§ 7.10. Сравнение минимаксных оценок и оценок по методу наименьших квадратов	344
§ 7.11. Гарантированная оценка точности несмещенного алгоритма фильтрации	346
§ 7.12. Исключение неинформативных измерений	349
Глава VIII. Выбор оптимального состава измерений	355
§ 8.1. Постановка задачи	355
§ 8.2. Задача Эльвинга	356
§ 8.3. Примеры решения задачи Эльвинга	362
§ 8.4. Случай представления суммарной ошибки в виде суммы коррелированной и некоррелированной составляющих	366
§ 8.5. Выбор оптимального состава измерений при ограничении модулей коэффициентов корреляции	370
§ 8.6. Целесообразность и возможность повторения измерений	372
§ 8.7. Выбор оптимального состава измерений при ограничении их общего количества и частоты проведения измерений	374
§ 8.8. Выражение для первой вариации δJ	378
§ 8.9. Решение вариационной задачи	379
§ 8.10. Особый случай	386
§ 8.11. Примеры	390
§ 8.12. Выбор универсального оптимального состава измерений	396
§ 8.13. Одновременное использование единичных и множественных измерений	397
Заключение	402
Дополнение при корректуре	405
Литература	409
Предметный указатель	413

ПРЕДИСЛОВИЕ

В течение длительного времени автору настоящей книги приходилось заниматься вопросами определения движения различных сложных механических систем по результатам измерений. При этом часто оказывалось, что выводы, получаемые при помощи безупречных с математической точки зрения статистических методов, резко расходились с практическими результатами. Это в первую очередь относится к оценке точности получаемых значений параметров движения рассматриваемых систем, а также к выбору оптимального состава измерений и используемых математических моделей. Это обстоятельство хорошо знакомо многим исследователям, занимающимся определением состояния и движения различных реальных систем по данным измерений. Недавно в последние годы получили право гражданства термины: «оценка точности по внутренней сходимости» и «фактическая точность» определения значений рассматриваемых параметров. При этом под первой подразумеваются результаты, получаемые классическими методами математической статистики, а под второй — фактические значения характеристик точности, оцениваемые другими способами (например, путем сравнения результатов независимых определений параметров исследуемых систем). При большом числе используемых измерений характеристики точности, получаемые первым и вторым способом, могут различаться в несколько раз и даже на несколько порядков. При этом, как правило, фактическая точность оказывается значительно хуже соответствующих оценок «по внутренней сходимости».

По-видимому, основной причиной указанного расхождения между выводами теории и практическими результатами является несоответствие между реальными усло-

виями решения задачи и используемыми при теоретических построениях основными допущениями. При этом большое значение имеет то, что можно назвать «неустойчивостью по основным допущениям», характерной для многих результатов математической статистики. Она заключается в том, что небольшие отклонения от принятых допущений могут кардинальным образом изменить конечные выводы.

Указанное обстоятельство явилось причиной появления в последние годы ряда работ, в которых учитывается влияние ошибок принятых допущений на результаты определения параметров различных реальных систем по данным измерений. Авторы этих работ часто отказываются от классического подхода, предполагающего знание некоторых вероятностных характеристик ошибок исходных данных (например, их математического ожидания и ковариационной матрицы) и задаются лишь областями, в которых могут находиться указанные ошибки или их вероятностные характеристики. Проблемам подобного рода была посвящена работа специального семинара, регулярно проводимого в течение последних лет в Московском университете и в Институте космических исследований Академии наук СССР, а также курса лекций, который читался автором настоящей книги в Московском университете в 1970—1973 гг. Вопросы, обсужденные на этом семинаре, содержание указанного курса лекций, а также результаты ряда опубликованных в последние годы работ послужили основой для написания настоящей книги.

Книга состоит из введения, восьми глав и заключения. Во введении дан краткий исторический обзор развития проблемы определения параметров состояния и движения реальных систем по данным измерений, начиная со времени открытия Гауссом метода наименьших квадратов.

Глава I носит вспомогательный характер. В ней помещены используемые в дальнейшем математические термины и обозначения, а также справочные сведения из теорий матриц, вероятностей и выпуклых множеств, в объеме, достаточном для понимания дальнейшего текста. При этом формулируемые математические теоремы, как правило, не доказываются, за исключением тех,

которые трудно отыскать в распространенных учебниках и монографиях.

В главе II изложена постановка задачи определения параметров реальных систем по данным измерений. В ней введены применяемые в книге специальные термины, даны соответствующие обозначения и пояснения к этим терминам, сформулированы некоторые общие свойства исследуемых величин.

Глава III посвящена вопросам оценки точности и выбора оптимальной стратегии решения рассматриваемой задачи. Описываются используемые в настоящее время основные способы задания характеристик погрешностей исходных данных (т. е. ошибок измерений и используемой математической модели). Сравниваются различные критерии точности получаемых результатов. Сформулированы основные задачи выбора оптимальной стратегии определения параметров состояния и движения реальных систем (задачи выбора оптимального алгоритма фильтрации, состава используемых измерений и математической модели). Описаны применяемые при этом критерии оптимальности. Все перечисленные вопросы рассматриваются как в классической, так и неклассической постановке.

В главе IV описаны некоторые задачи рассматриваемого типа, а именно задачи определения: основных характеристик гравитационных и магнитных полей планет, движения механических систем с конечным числом степеней свободы, орбит естественных и искусственных небесных тел, движения неориентированных искусственных спутников Земли относительно их центров масс, параметров статистической регрессии. Рассмотрены также вопросы линеаризации нелинейных систем. Заметим, что эта глава имеет в основном факультативный характер и рассчитана на специалистов, занимающихся решением данных конкретных задач. Поэтому она (за исключением §§ 4.6 и 4.7) может быть при чтении книги пропущена без особого ущерба для понимания остального текста.

В главе V описан наиболее распространенный способ решения поставленной задачи, а именно — метод наименьших квадратов. Этот метод рассмотрен применительно к линейным и нелинейным задачам при диагно-

нальной и произвольной ковариационной матрице суммарных ошибок исходных данных. Сформулированы используемые при обосновании метода основные допущения и показаны получаемые при этих допущениях его оптимальные свойства. Исследовано влияние отклонений реальных условий решения задачи от принятых допущений на точность получаемых результатов, приводящее к искажению указанных оптимальных свойств. В частности, показано, что получаемое теоретически свойство состоятельности оценки по методу наименьших квадратов на практике, как правило, не имеет места. Рассмотрены практические аспекты использования метода наименьших квадратов для решения прикладных задач в условиях невыполнения принятых при обосновании метода основных допущений.

В главе VI описан ряд применяемых в настоящее время классических способов определения параметров реальных систем по результатам измерений. Рассматриваются методы максимального правдоподобия, максимума апостериорной вероятности, минимума модулей, рекуррентной и динамической фильтрации, а также дискретный и непрерывный фильтры Калмана. Показано, что все они в конечном итоге сводятся к методу максимального правдоподобия, для которого имеется наиболее полное и строгое теоретическое обоснование (т. е. исследование его оптимальных свойств при некоторых допущениях). Показано, что в предположении о нормальности распределения суммарных ошибок исходных данных все перечисленные способы (кроме метода минимума модулей) сводятся к методу наименьших квадратов.

Глава VII посвящена изложению результатов, полученных в настоящее время при неклассическом подходе к решению поставленной задачи, когда задаются лишь области, в которых находятся ошибки исходных данных или их вероятностные характеристики. Излагаются основные свойства разработанного при таком подходе минимаксного алгоритма фильтрации и приводятся результаты решения задачи выбора оптимальной стратегии определения параметров состояния и движения при соответствующих минимаксному алгоритму допущениях.

В главе VIII рассмотрена задача выбора оптимального состава измерений при различных предположениях

об ошибках исходных данных и различных ограничениях, налагаемых на используемые измерения. Приведены некоторые результаты решения этой задачи при классической и неклассической постановках.

В заключении помещены основные выводы по всей книге.

В целом книга написана для специалистов, занимающихся решением прикладных вопросов определения параметров состояния и движения реальных систем. Однако автор надеется, что специалисты по математической статистике также найдут в ней ряд интересных для себя задач.

Основное внимание в книге уделяется зависимости между допущениями, при которых решается задача, и получаемыми результатами. Автор старался сделать содержание книги по возможности математически строгим. Однако в тех случаях, когда для решения важных прикладных задач используются эвристические приемы, не имеющие строгого обоснования, но хорошо зарекомендовавшие себя на практике, автор считал необходимым изложить эти приемы с соответствующими оговорками. Кроме того, для облегчения чтения и сокращения объема текста ряд результатов математической статистики приведен без доказательства со ссылкой на соответствующую литературу. Книга проиллюстрирована примерами, в значительной мере подсказанными практикой определения движения искусственных космических объектов.

Автор пользуется возможностью высказать свою признательность участникам указанного выше семинара, которые выдвинули ряд идей, использованных в настоящей книге. В частности, это относится к Б. Ц. Бахшияну, Л. Ю. Белоусову, Б. П. Быркову, В. В. Голубкову, Н. Н. Козлову, М. Л. Лидову, А. И. Назаренко, Р. Р. Назирову, Б. Л. Новаку, В. С. Мелкумову, Г. А. Мерсову, В. Н. Почукаеву. Особенно благодарен автор Б. Ц. Бахшияну, Л. С. Гурину, Р. Р. Назирову и Б. Л. Новаку, взявшим на себя труд по предварительному просмотру рукописи и сделавшим в процессе этого просмотра ряд ценных замечаний, а также З. А. Стеценко, проделавшей предварительное редактирование рукописи.

ВВЕДЕНИЕ

Умение определять и прогнозировать движение по результатам наблюдений за движущимися объектами глубоко заложено в сознании человека и восходит к его далеким предкам. Многие хищники могут оценивать величину и направление скорости жертвы, «прогнозировать» ее дальнейшее движение и гнаться наперерез или, забегая вперед, ожидать жертву на ее пути... Древний охотник, бросающий камень или пускающий стрелу в летящую птицу, мгновенно решал сложную задачу встречи двух движущихся тел, задачу, которую современной науке и технике удалось эффективно решить лишь в нашем веке! Спортсмен, для того чтобы успешно играть в футбол или теннис, должен уметь определять и учитывать не только перемещение мяча, но и его вращение...

Однако когда человеку приходится иметь дело с объектами, движение которых подчиняется сложным, часто противоречащим так называемому «здравому смыслу» законам, привычная интуиция охотника или спортсмена отказывает. По-видимому, первым объектом подобного рода, с которым столкнулся человек еще в древности, оказалась Солнечная система. Наблюдая за движением Солнца, Луны и планет, описывающих на небесном своде замысловатые кривые, человек сначала считал их живыми существами или приписывал их движение влиянию сверхъестественных сил... Однако с течением времени он заметил, что движение небесных тел не является хаотическим, ему свойственна определенная закономерность и повторяемость. Возникла проблема определения и прогноза этого движения, которая в течение многих веков, начиная с античного времени, была одной из основных задач зарождающейся науки. Строились все усложняющиеся модели Солнечной системы, которые, однако, не могли полностью описать ее движения. Только

гений Коперника, Кеплера и Ньютона сумел перевернуть задачу с головы на ноги и построить удивительно изящную математическую модель Солнечной системы. Однако для того, чтобы пользоваться этой моделью, необходимо было знать ее основные параметры: координаты, составляющие векторов скорости и массы отдельных небесных тел. Эти величины не измерялись непосредственно, и для их определения могли быть использованы лишь угловые координаты небесных объектов, получаемые в процессе астрономических наблюдений. Таким образом, в полном объеме возникла задача определения параметров сложной реальной системы по результатам наблюдений за ее движением.

Обычно эта задача решается в два этапа. На первом из них предварительно определяют приближенные значения параметров системы, а на втором производят окончательное уточнение этих параметров. Настоящая книга в основном посвящена указанному второму этапу решения задачи. Поэтому мы в дальнейшем под *определением параметров системы* будем подразумевать *нахождение их уточненных значений*. При этом результаты предварительного определения состояния системы используются в качестве первого приближения.

Параллельно подобные задачи ставились и в других отраслях быстро развивающейся науки. В первую очередь они возникли в науке о фигуре Земли, в геодезии и картографии, а затем — в экспериментальной физике. Однако до настоящего времени определение и непрерывное уточнение параметров состояния Солнечной системы (в которую сейчас вошло громадное число новых искусственных небесных тел) остается, по-видимому, одной из наиболее сложных и трудоемких задач рассматриваемого типа.

Для эффективного решения указанных задач потребовалось создание специального математического аппарата. Он и был изобретен в 1794 г. семнадцатилетним Гауссом в виде метода наименьших квадратов. Этот метод получил всеобщее признание и широко используется при решении различных задач небесной механики, проведении геодезических работ, определении гравитационных и магнитных полей Земли, а также при обработке данных различных физических экспериментов. По мере

проникновения математических методов в биологические и социальные науки он начал завоевывать позиции и в этих областях человеческого знания.

Широкое распространение метода наименьших квадратов вызвало пристальный интерес к нему со стороны создателей современной математической статистики. В первой половине нашего века трудами Р. А. Фишера, А. Н. Колмогорова, Г. Крамера, С. Р. Рао и др. было дано полное теоретическое обоснование этого метода. Были исследованы его основные свойства и показано, что он является частным случаем значительно более общего метода максимального правдоподобия, который был также детально исследован. Полный перечень работ, посвященных указанным вопросам, может быть найден в любом современном курсе математической статистики [30, 33, 41].

Дальнейшее развитие методы статистической обработки измерительной информации получили в середине нашего века. Это связано, с одной стороны, с необходимостью использования результатов решения задачи определения параметров состояния в процессе управления движением различных управляемых и автоматических систем, а с другой, — с быстрым развитием современной вычислительной техники, открывающей новые возможности для проведения расчетов на основе сложных математических алгоритмов. В это время стал применяться метод максимума апостериорной вероятности, дающий возможность определять состояние системы не только по результатам измерений, но и с учетом имеющихся априорных сведений. Были разработаны методы рекуррентной фильтрации, и в частности, фильтр Калмана [56, 57], позволяющие решать задачу в темпе поступления измерительной информации, что особенно важно для управляемых систем. Начали рассматриваться различные задачи оптимального планирования эксперимента и в первую очередь — задачи выбора оптимального состава измерений. Подробный перечень трудов по теории оптимального планирования можно найти в работах [47, 58].

Для практического применения указанных выше методов решения рассматриваемой задачи необходимо задаться значениями некоторых вероятностных характеристик ошибок измерений и модели. Обычно достаточно

знать их математическое ожидание и ковариационную матрицу (последнюю — с точностью до произвольного положительного множителя). Однако в действительности фактические значения этих характеристик не совпадают с принятыми при построении алгоритма обработки измерительной информации. Это в ряде случаев приводит к значительному ухудшению точности получаемых результатов по сравнению с ее оценками, найденными из теоретических соображений при заданных вероятностных характеристиках ошибок.

Указанное обстоятельство обычно сильно сказывается при большом числе используемых измерений. Оно стало особенно ощутимым в настоящее время в связи с использованием вычислительных машин, позволяющих одновременно обрабатывать большие объемы информации, а также потому, что алгоритмы определения параметров реальных систем по результатам измерений все шире применяются при решении важных прикладных задач, требующих надежной оценки точности получаемых результатов (например, задач определения основных физических констант, задач управления движением различных систем и т. п.). Поэтому в последнее время все чаще стали появляться работы, в которых вероятностные характеристики ошибок исходных данных считаются неизвестными и задаются лишь множества, к которым принадлежат суммарные ошибки или их характеристики. В частности, целесообразность такого подхода для получения надежных оценок точности замечена С. Р. Рао [41]. В работе М. Л. Лидова [34] на основе этого подхода впервые было получено эффективное решение важной задачи, имеющей теоретическое и прикладное значение. Эта работа явилась толчком к ряду аналогичных исследований, подробный перечень которых помещен в прилагаемом списке литературы. В результате были разработаны новые неклассические методы решения рассматриваемой задачи оценки точности получаемых результатов, а также выбора оптимальной стратегии проведения и обработки измерений. Основные полученные в этом направлении достижения изложены в настоящей книге.

Г л а в а I

НЕКОТОРЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

§ 1.1. Матрицы, векторы и строки

Для обозначения матрицы, состоящей из n строк и m столбцов, мы будем пользоваться следующими символами:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nm} \end{pmatrix} = (A_{ij}). \quad (1.1.1)$$

Образующие матрицу величины A_{ij} ($i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, m$) называются ее *элементами*. Они могут быть действительными или комплексными числами. Мы ограничимся здесь рассмотрением только *действительных матриц*, все элементы которых действительны. Выражение $n \times m$ называется *размером* (*размерностью*) матрицы. Эти слова мы будем в тексте обычно опускать и писать: «матрица A $n \times m$ », подразумевая под A матрицу из n строк и m столбцов.

Матрица $n \times n$ называется *квадратной* матрицей. Если все элементы такой матрицы удовлетворяют условию

$$A_{ij} = A_{ji}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad (1.1.2)$$

то матрица называется *симметричной*.

Матрицу $1 \times m$ мы будем называть *матрицей-строкой* или просто *строкой* и обозначать символами

$$A = (A_1 A_2 \dots A_m) = (A_l). \quad (1.1.3)$$

Матрицу $n \times 1$ будем называть *вектором* и обозначать символами

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} = \{a_i\}. \quad (1.1.4)$$

Матрица размера 1×1 является *скаляром*. Скалярные величины мы будем всегда, в отличие от матриц, векторов и строк, обозначать обычным шрифтом.

Так как размеры квадратных матриц, строк и векторов определяются одним числом, то вместо выражений: матрица $n \times n$, матрица $1 \times m$, матрица $n \times 1$ можно соответственно применять выражения: квадратная матрица размера (размерности) n , строка размера (размерности) m , вектор размера (размерности) n .

Для обозначения *определителя* квадратной матрицы A и *модуля* вектора a будем пользоваться символами

$$A = |A| = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix}, \quad (1.1.5)$$

$$a = |a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}. \quad (1.1.6)$$

Модулем строки $C = (C_1 C_2 \dots C_m)$ будем называть скалярную величину

$$C = |C| = \sqrt{\sum_{i=1}^m C_i^2}. \quad (1.1.7)$$

Размер n квадратной матрицы A совпадает с *порядком определителя* $|A|$.

Ранг матрицы A $n \times m$ (т. е. наибольший из порядков не равных нулю определителей квадратных матриц, образованных из A вычеркиванием части ее строк и столбцов), обозначается символом $R(A)$.

Квадратная матрица A размера n , удовлетворяющая условию

$$R(A) = n, \quad (1.1.8)$$

называется *неособенной* (*невыврожденной*). При

$$R(A) < n$$

матрица A является *особенной* (*вырожденной*).

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой*. В этом случае пишут, что

$$A = 0. \quad (1.1.9)$$

Квадратная матрица $A = (A_{ij})$, удовлетворяющая условию

$$A_{ij} = 0 \quad \text{при } i \neq j,$$

называется *диагональной* и обозначается символом

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_n \end{pmatrix}. \quad (1.1.10)$$

Если при этом все

$$A_i = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1.1.11)$$

то матрица называется *единичной* и обозначается символом I . Если требуется указать размер n этой матрицы, то используется обозначение I_n . Для диагональных и единичных матриц имеют место равенства

$$|A| = A_1 A_2 \dots A_n, \quad |I| = 1. \quad (1.1.12)$$

Любая матрица, не являющаяся скаляром, может быть разбита прямыми, проведенными между строками или столбцами, на *подматрицы*. При этом используются обозначения вида

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1l} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{k1} & A_{k2} & \dots & A_{kl} \end{pmatrix} = (A_{il}), \quad (1.1.13)$$

$$A = (A_1 A_2 \dots A_l) = (A_j), \quad (1.1.14)$$

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix} = \{a_1, a_2, \dots, a_k\} = \{a_i\}, \quad (1.1.15)$$

где A_{ij} ($i = 1, 2, \dots, k$; $j = 1, 2, \dots, l$), A_j ($j = 1, 2, \dots, l$), a_i ($i = 1, 2, \dots, k$) — соответственно некоторые матрицы, строки и векторы.

Если при этом матрица A квадратная, матрицы $A_{ij} = 0$ при $i \neq j$ и являются квадратными при $i = j$, то матрица A называется клеточной и обозначается символом

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_k \end{pmatrix}. \quad (1.1.16)$$

Для такой матрицы

$$|A| = |A_1| |A_2| \dots |A_k|. \quad (1.1.17)$$

§ 1.2. Операции над матрицами и векторами

Операции сложения, вычитания, умножения матриц, умножения матриц на скаляр и транспонирования матрицы определены во всех соответствующих учебниках. Следует иметь в виду то, что складывать (вычитать) можно лишь матрицы одинакового размера, а при умножении необходимо, чтобы число столбцов первого сомножителя равнялось числу строк второго. Размер суммы двух матриц равен размеру каждого слагаемого, число строк произведения матриц — числу строк первого сомножителя, а число столбцов произведения — числу столбцов второго сомножителя. Если указанные выше условия соблюдаются, то сложение (вычитание) матриц, а также умножение их друг на друга или на скаляр обладают всеми свойствами сложения и умножения скаляров за исключением того, что, вообще говоря,

$$AB \neq BA. \quad (1.2.1)$$

Равенство

$$AB = BA \quad (1.2.2)$$

имеет место, например, при условии симметричности матриц A , B и AB , а также в случае умножения матрицы на скаляр.

Операцию транспонирования матрицы A будем обозначать символом A^T . Для симметричных матриц справедливо равенство

$$A^T = A. \quad (1.2.3)$$

Для произвольной квадратной матрицы A можно написать, что

$$|A^T| = |A|. \quad (1.2.4)$$

При умножении и транспонировании матриц имеют место равенства

$$\left. \begin{aligned} (A_1 A_2 \dots A_k)^T &= A_k^T A_{k-1}^T \dots A_1^T, \\ |A_1 A_2 \dots A_k| &= |A_1| |A_2| \dots |A_k|. \end{aligned} \right\} \quad (1.2.5)$$

При сложении (вычитании) матриц, разбитых на подматрицы одинакового размера, соответствующие подматрицы складываются (вычитаются).

При транспонировании матрицы A , представленной в виде (1.1.13), получаем

$$A^T = \begin{pmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T & \dots & A_{k1}^T \\ A_{12}^T & A_{22}^T & \dots & A_{k2}^T \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1l}^T & A_{2l}^T & \dots & A_{kl}^T \end{pmatrix}. \quad (1.2.6)$$

При умножении матрицы (1.1.13) на

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1m} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{l1} & B_{l2} & \dots & B_{lm} \end{pmatrix}$$

получаем матрицу

$$C = AB = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1m} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{k1} & C_{k2} & \dots & C_{km} \end{pmatrix}, \quad (1.2.7)$$

где

$$C_{ij} = \sum_{\alpha=1}^l A_{i\alpha} B_{\alpha j}, \quad i = 1, 2, \dots, k; \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

При этом предполагается, что подматрицы A_{ij} и B_{ij} удовлетворяют указанному выше условию, при котором возможно их умножение друг на друга.

Для любой неособенной квадратной матрицы A может быть найдена единственная обратная матрица A^{-1} , удовлетворяющая условию

$$A^{-1} A = A A^{-1} = I. \quad (1.2.8)$$

Можно написать, что

$$|A^{-1}| = |A|^{-1}, \quad (1.2.9)$$

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_k \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2^{-1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_k^{-1} \end{pmatrix}, \quad (1.2.10)$$

$$(A_1 A_2 \dots A_k)^{-1} = A_k^{-1} A_{k-1}^{-1} \dots A_1^{-1}. \quad (1.2.11)$$

Если матрица A симметрична, то соответствующая ей обратная матрица A^{-1} также симметрична.

Квадратная матрица A , удовлетворяющая условию

$$A^T = A^{-1}, \quad A^T A = A A^T = I \quad (1.2.12)$$

называется *ортогональной*. Для нее справедливо равенство

$$|A| = \pm 1. \quad (1.2.13)$$

Если матрица A особенная или не квадратная, то для нее обратная матрица A^{-1} не существует. В этом случае может быть найдена так называемая *обобщенная обратная* (или *g-обратная*) матрица [41].

Если матрица A может быть представлена в виде

$$A = B + CDE, \quad (1.2.14)$$

где B и D — неособенные квадратные матрицы (вообще говоря, разных размеров), то

$$A^{-1} = B^{-1} - B^{-1} C S^{-1} E B^{-1}, \quad (1.2.15)$$

где

$$S = D^{-1} + E B^{-1} C. \quad (1.2.16)$$

При этом предполагается, что $|S| \neq 0$. Для проверки этого равенства вычислим произведение

$$\begin{aligned} A A^{-1} &= (B + CDE)(B^{-1} - B^{-1} C S^{-1} E B^{-1}) = \\ &= I + C D S S^{-1} E B^{-1} - C S^{-1} E B^{-1} - C D E B^{-1} C S^{-1} E B^{-1} = \\ &= I + C [D(D^{-1} + E B^{-1} C) - I - D E B^{-1} C] S^{-1} E B^{-1} = I. \end{aligned}$$

Скалярным произведением векторов $a = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ и $b = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ называется величина

$$a \cdot b = \sum_{i=1}^n a_i b_i = a^T b = b^T a. \quad (1.2.17)$$

Очевидно, что

$$a \cdot a = |a|^2. \quad (1.2.18)$$

Имеет место неравенство Коши—Буняковского

$$|a| |b| \geq |a \cdot b|, \quad (1.2.19)$$

которое обращается в равенство при условии, что

$$a = \lambda b, \quad (1.2.20)$$

где λ — произвольный скалярный множитель. Векторы, удовлетворяющие условию (1.2.20), называются *коллинеарными*. Если при этом $\lambda > 0$, то они одинаково направлены (*параллельны*). При $\lambda < 0$ они направлены в разные стороны (*антипараллельны*).

§ 1.3. Линейные преобразования

Рассмотрим некоторое множество X векторов $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ и зададимся преобразующей матрицей A $n \times n$. Эта матрица определяет линейное преобразование векторов x в векторы x' , образующие множество X'

$$x = Ax'. \quad (1.3.1)$$

Если матрица A невырожденная (неособенная), то это преобразование является невырожденным (неособенным). В этом случае существует обратное преобразование,

$$x' = A^{-1}x, \quad (1.3.2)$$

и соответствие между множествами X и X' взаимно однозначно.

Если матрица A ортогональна, то преобразование (1.3.1) называется *ортогональным преобразованием*. Легко убедиться в том, что при этом не изменяются скалярные произведения и модули векторов. Иначе говоря, если x и y — некоторые элементы множества X , а x' и

y' — соответствующие им элементы множества X' , то

$$x' \cdot y' = x'^T y' = x^T y = x \cdot y, \quad |x'| = |x|, \quad |y'| = |y|. \quad (1.3.3)$$

Таким образом, скалярное произведение и модуль являются *инвариантами* ортогонального преобразования векторов.

Положим, что между векторами x и y множества X существует линейная зависимость

$$y = Tx, \quad (1.3.4)$$

где T — произвольная матрица $n \times n$. При невырожденном линейном преобразовании (1.3.1) эти векторы преобразуются в x' и y' . При этом

$$y' = T'x', \quad (1.3.5)$$

где

$$T' = A^{-1}TA, \quad T = AT'A^{-1}. \quad (1.3.6)$$

Матрицы T' и T называются *подобными*. Для них справедливы равенства

$$|T'| = |T|, \quad R(T') = R(T). \quad (1.3.7)$$

Иначе говоря, определитель и ранг матрицы являются инвариантами преобразования подобия.

Любая симметричная матрица T может быть преобразованием подобия с ортогональной преобразующей матрицей A приведена к диагональному виду, т. е. может быть найдена такая ортогональная матрица A , при которой

$$T' = A^{-1}TA = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}. \quad (1.3.8)$$

Величины $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ называются *собственными значениями* матрицы T . Из зависимостей (1.3.7) и (1.3.8) следует, что

$$|T| = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n. \quad (1.3.9)$$

Отсюда

$$R(T) = n \quad \text{при} \quad \lambda_i \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.3.10)$$

Предположим, что выполняется условие

$$\lambda_i > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.3.11)$$

Тогда существуют действительные матрицы

$$\begin{aligned} (T')^{1/2} &= \begin{pmatrix} \lambda_1^{1/2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^{1/2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^{1/2} \end{pmatrix}, \\ (T')^{-1/2} &= \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1/2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^{-1/2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^{-1/2} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.3.12)$$

Введем обозначения

$$T^{1/2} = A(T')^{1/2} A^{-1}, \quad T^{-1/2} = A(T')^{-1/2} A^{-1}. \quad (1.3.13)$$

Из (1.2.12), (1.3.8), (1.3.12) и (1.3.13) следует, что матрицы $T^{1/2}$ и $T^{-1/2}$ симметричны. При этом

$$T^{1/2} T^{1/2} = T, \quad T^{-1/2} T^{-1/2} = T^{-1}, \quad T^{-1/2} T T^{-1/2} = T^{-1/2} T^{1/2} = I. \quad (1.3.14)$$

Заметим, что для определения матрицы $T^{1/2}$ условие (1.3.11) может быть заменено условием

$$\lambda_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.3.15)$$

§ 1.4. Линейные уравнения, квадратичные формы и матричные неравенства

Если $x = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ — неизвестный вектор, а Q и b — заданные матрица $n \times m$ и вектор размерности n , то зависимость

$$Qx = b \quad (1.4.1)$$

представляет собой систему n линейных уравнений относительно неизвестных x_1, x_2, \dots, x_m . Необходимым и достаточным условием существования решения этой системы является равенство

$$R(Q) = R(Qb), \quad (1.4.2)$$

где так называемая *расширенная матрица* (Qb) представляет собой матрицу Q , дополненную столбцом b .

В противном случае уравнения несовместны. При

$$R(Q) = n = m \quad (1.4.3)$$

решение системы (1.4.1) однозначно.

При $b = 0$ система уравнений (1.4.1) называется *однородной*. Для нее всегда существует тривиальное решение $x = 0$. При условии

$$R(Q) < m \quad (1.4.4)$$

однородная система линейных уравнений имеет бесконечное число отличных от нуля нетривиальных решений. При $n = m$ это условие можно записать в виде

$$|Q| = 0. \quad (1.4.5)$$

Рассмотрим некоторое конечное множество векторов a_1, a_2, \dots, a_m размерности n . Эти векторы называются *линейно независимыми*, если не существует вектора $\lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\} \neq 0$, для которого

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i a_i = 0. \quad (1.4.6)$$

В противном случае векторы a_1, a_2, \dots, a_m *линейно зависимы* и по крайней мере один из них может быть выражен в виде линейной комбинации остальных векторов.

Обозначая через $(a_1 a_2 \dots a_m)$ матрицу, столбцами которой являются рассматриваемые векторы, можно переписать зависимость (1.4.6) в виде

$$(a_1 a_2 \dots a_m) \lambda = 0, \quad (1.4.7)$$

представляющем собой систему линейных однородных уравнений относительно переменных $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$. Отсюда следует необходимое и достаточное условие линейной независимости векторов a_1, a_2, \dots, a_m :

$$R(a_1 a_2 \dots a_m) = m. \quad (1.4.8)$$

В частности, при $m > n$ векторы a_1, a_2, \dots, a_m всегда линейно зависимы. При $m = n$ условие (1.4.8) можно записать в виде

$$|a_1 a_2 \dots a_m| \neq 0. \quad (1.4.9)$$

Пусть $T = (T_{ij})$ — симметричная матрица $n \times n$, а $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ — некоторый вектор. Тогда квадра-

тичной формой от составляющих вектора x с матрицей T называется многочлен

$$P(x) = x^T T x = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n T_{ij} x_i x_j. \quad (1.4.10)$$

При линейном невырожденном преобразовании (1.3.1) вектора x имеет место равенство

$$P(x) = \tilde{P}(x'), \quad (1.4.11)$$

где

$$\tilde{P}(x') = x'^T \tilde{T} x', \quad \tilde{T} = A^T T A. \quad (1.4.12)$$

Матрицы T и \tilde{T} называются *конгруэнтными*. Если преобразующая матрица A ортогональна, то из зависимостей (1.2.12), (1.3.6) и (1.4.12) следует, что $\tilde{T} = T'$.

Пусть A — ортогональная матрица, при помощи которой матрица T приводится к диагональному виду (1.3.8). Введем обозначение

$$Ax = \xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}. \quad (1.4.13)$$

Путем преобразования квадратичной формы (1.4.10) с преобразующей матрицей A получим, что

$$P(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \xi_i^2, \quad (1.4.14)$$

где λ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) — собственные значения матрицы T .

Это преобразование называется *преобразованием квадратичной формы к главным осям или к нормальному виду*.

Обозначим через λ_{\min} наименьшее из собственных значений λ_i ($i = 1, 2, \dots, n$), а через λ_{\max} — наибольшее. Из (1.3.3) и (1.4.14) непосредственно следует, что

$$\lambda_{\min} |x|^2 \leq P(x) \leq \lambda_{\max} |x|^2. \quad (1.4.15)$$

Квадратичная форма (1.4.10) (а также соответствующая ей матрица T) называется *положительно, отрицательно, неотрицательно или неположительно определенной*, если соответственно $P(x) > 0$, $P(x) < 0$, $P(x) \geq 0$ или $P(x) \leq 0$ при произвольном $x \neq 0$. Квадратичные формы $P(x)$ и их матрицы T , не удовлетворяющие ни одному из этих условий, являются *неопределенными*.

Необходимые и достаточные условия положительной, отрицательной, неотрицательной, неположительной определенности, неопределенности или тождественного равенства нулю *) квадратичной формы $P(x)$ и ее матрицы T заключаются в том, что собственные значения λ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) матрицы T соответственно все положительные, отрицательные, неотрицательные, неположительные, имеют разные знаки или равны нулю. Это непосредственно следует из неравенства (1.4.15).

Из (1.3.9) и (1.4.14) следует, что любая неотрицательно (неположительно) определенная квадратичная форма с невырожденной матрицей является положительно (отрицательно) определенной.

Если T_1 и T_2 — две симметричные матрицы одного размера, то говорят, что $T_1 > T_2$, $T_1 < T_2$, $T_1 \geq T_2$ или $T_1 \leq T_2$, если разность $T_1 - T_2$ соответственно положительно, отрицательно, неотрицательно или неположительно определена. Если ни одно из этих соотношений не имеет места и $T_1 \neq T_2$, то можно написать что $T_1 \not\geq T_2$. В этом случае соответствующие рассматриваемым матрицам квадратичные формы $P_1(x)$ и $P_2(x)$ могут быть больше или меньше друг друга в зависимости от выбора вектора x . Возможность такого соотношения между матрицами предопределяет существенную разницу между операциями с матричными и операциями со скалярными неравенствами. Так, например, из того, что $T_1 \neq T_2$, еще не следует, что $T_1 > T_2$ или $T_1 < T_2$.

§ 1.5. Матричные и векторные функции

Если все элементы матрицы (вектора, строки) являются функциями некоторого скалярного или векторного аргумента, то мы будем говорить о матричной функции (векторной функции, строке функций). Пусть t — скалярный аргумент. Тогда матричная функция от этого аргумента

$$A(t) = \begin{pmatrix} A_{11}(t) & A_{12}(t) & \dots & A_{1m}(t) \\ A_{21}(t) & A_{22}(t) & \dots & A_{2m}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1}(t) & A_{n2}(t) & \dots & A_{nm}(t) \end{pmatrix} = [A_{ij}(t)]. \quad (1.5.1)$$

*) Квадратичная форма $P(x)$ тождественно равна нулю, если $P(x) = 0$ при произвольном x .

Аналогично обозначаются векторные функции и строки функций. При дифференцировании (интегрировании) этих функций каждый их элемент дифференцируется (интегрируется) в отдельности. Таким образом,

$$\frac{dA}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{dA_{11}}{dt} & \frac{dA_{12}}{dt} & \dots & \frac{dA_{1m}}{dt} \\ \frac{dA_{21}}{dt} & \frac{dA_{22}}{dt} & \dots & \frac{dA_{2m}}{dt} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{dA_{n1}}{dt} & \frac{dA_{n2}}{dt} & \dots & \frac{dA_{nm}}{dt} \end{bmatrix} = \left(\frac{dA_{ij}}{dt} \right). \quad (1.5.2)$$

При дифференцировании (интегрировании) сумм и произведений сохраняются правила дифференцирования (интегрирования) сумм и произведений скалярных переменных. При этом следует учитывать неравенство 1.2.1).

Рассмотрим два вектора: $d = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ и $q = \{q_1, q_2, \dots, q_m\}$. Функциональная зависимость между ними обозначается символами

$$d = F(q) = \{F_1(q), F_2(q), \dots, F_n(q)\} = \{F_i(q)\}. \quad (1.5.3)$$

Частные производные от составляющих вектора d по составляющим вектора q образуют матрицу частных производных

$$\frac{\partial d}{\partial q} = \frac{\partial F}{\partial q} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial q_1} & \frac{\partial F_1}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial q_m} \\ \frac{\partial F_2}{\partial q_1} & \frac{\partial F_2}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial q_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_n}{\partial q_1} & \frac{\partial F_n}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial q_m} \end{bmatrix} = \left(\frac{\partial F_i}{\partial q_j} \right). \quad (1.5.4)$$

Разлагая функцию $F(q)$ в ряд Тейлора в окрестности некоторого значения $q = q_0$ и ограничиваясь первыми двумя членами разложения, получим

$$F(q) = F(q_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial q} \right)_0 (q - q_0) + o(q - q_0), \quad (1.5.5)$$

где $\left(\frac{\partial F}{\partial q} \right)_0$ — значение матрицы $\frac{\partial F}{\partial q}$ при $q = q_0$, а $o(q - q_0)$ — величина высшего порядка малости по сравнению с $q - q_0$.

Если $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ — вектор, а t — скалярный аргумент, то зависимость

$$\frac{dx}{dt} = F(x, t) \quad (1.5.6)$$

называется *векторным дифференциальным уравнением*. Оно представляет собой сокращенную запись системы скалярных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.5.7)$$

Если скалярный аргумент t — время, то производные по нему мы будем обозначать точками. Таким образом,

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} \text{ и т. д.} \quad (1.5.8)$$

Если $f(x)$ и $\varphi(x)$ — некоторые скалярные функции векторного аргумента $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, то неравенство Коши — Буняковского (1.2.19) может быть обобщено на кратные интегралы от этих функций. При этом

$$\begin{aligned} \int_Q f^2(x) dx_1 dx_2 \dots dx_n \int_Q \varphi^2(x) dx_1 dx_2 \dots dx_n &\geq \\ &\geq \left(\int_Q f(x) \varphi(x) dx_1 dx_2 \dots dx_n \right)^2. \end{aligned} \quad (1.5.9)$$

где интегрирование производится по некоторой области Q в пространстве векторов x .

§ 1.6. Случайные события

Пусть в результате некоторого опыта происходит по крайней мере одно из событий A, B, C, A_1, A_2, \dots , образующих класс S^+ всех возможных исходов опыта.

Объединением (логической суммой) $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots$ ($A = A_1 + A_2 + \dots$) событий A_1, A_2, \dots будем называть событие A , заключающееся в осуществлении хотя бы одного из событий A_1 или A_2 или A_3 и т. д.

Совмещением (логическим произведением) $A = B \cap C$ ($A = BC$) двух событий B и C называется событие A , состоящее в осуществлении B и C .

Дополнение (логическое отрицание) \bar{A} события A — это событие, заключающееся в неосуществлении события A (\bar{A} называется событием, противоположным A).

Достоверное событие I заключается в осуществлении хотя бы одного из событий класса S^+ .

Невозможное событие 0 состоит в неосуществлении ни одного из событий класса S^+ .

Класс S событий, состоящий из S^+ и 0 , образует *алгебру событий*, связанных с данным опытом. Она обладает всеми свойствами *вполне аддитивной булевой алгебры*, а именно:

$A_1 + A_2 + \dots$ и AB единственным образом определены как элементы S (*корректность и замкнутость*);

$$\left. \begin{aligned} A + B &= B + A, \\ AB &= BA \end{aligned} \right\} - \text{(коммутативные законы);} \quad (1.6.1)$$

$$\left. \begin{aligned} A + (B + C) &= (A + B) + C, \\ A(BC) &= (AB)C \end{aligned} \right\} - \text{ассоциативные законы;} \quad (1.6.2)$$

$$\left. \begin{aligned} A(B + C) &= AB + AC, \\ A + BC &= (A + B)(A + C) \end{aligned} \right\} - \text{дистрибутивные законы;} \quad (1.6.3)$$

$$A + A = AA = A - \text{(свойства идемпотентности);} \quad (1.6.4)$$

$$A + B = B \text{ в том и только в том случае, если } AB = A \text{ (свойство совместности);} \quad (1.6.5)$$

S содержит элементы I и 0 такие, что для всякого A из S

$$A + 0 = A, \quad A0 = 0, \quad A + I = I, \quad AI = A; \quad (1.6.6)$$

для каждого A в S содержится соответствующий элемент \bar{A} (*дополнение* A) такой, что

$$A + \bar{A} = I, \quad A\bar{A} = 0. \quad (1.6.7)$$

В каждой булевой алгебре:

$$A(A + B) = A + AB = A \text{ (закон поглощения);} \quad (1.6.8)$$

$$\left. \begin{aligned} \overline{(A + B)} &= \bar{A}\bar{B}, \\ \overline{(AB)} &= \bar{A} + \bar{B} \end{aligned} \right\} \text{(двойственность);} \quad (1.6.9)$$

$$\bar{\bar{A}} = A, \quad \bar{I} = 0, \quad \bar{0} = I; \quad (1.6.10)$$

$$A + \bar{A}B = A + B, \quad AB + AC + \bar{B}C = AC + B\bar{C}. \quad (1.6.11)$$

Все указанные соотношения могут быть графически проиллюстрированы диаграммой, построенной для эксперимента, заключающегося в случайном выборе точки P на заданной области S (рис. 1.6.1). Пусть A , B и C — некоторые части области S . События A , B и C заключаются в попадании точки P в соответствующие области.

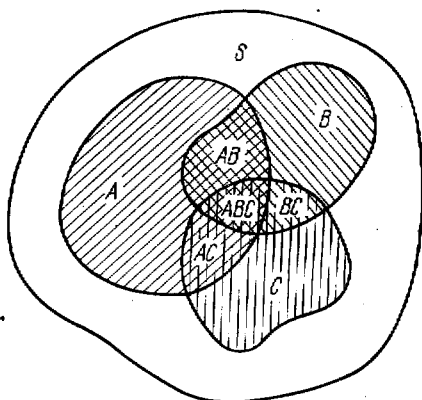


Рис. 1.6.1. Геометрическая интерпретация основных соотношений булевой алгебры.

Тогда событие $A + B$ представляет собой попадание P в сумму областей A и B , событие AB — попадание в пересечение этих областей, \bar{A} — в разность областей S и A . Из этой геометрической интерпретации могут быть непосредственно получены все указанные выше свойства рассматриваемых операций.

Любое из эквивалентных соотношений

$$A + B = A, \quad AB = B$$

представляет собой логическое отношение включения $B \subset A$ (событие B влечет за собой событие A). Из предыдущего следует, что

$$0 \subset A \subset I. \quad (1.6.12)$$

События A и B называются *несовместными*, если $AB = 0$,

Множество S_B совмещений AB при различных A и фиксированном B образует алгебру S_B событий, связанных с данным испытанием при дополнительном условии, что имеет место событие B . BB есть достоверное, а $\bar{B}B$ — невозможное событие в S_B .

§ 1.7. Относительная частота и вероятность случайного события

При многократном повторении эксперимента некоторое случайное событие A может иметь или не иметь места. Обозначим через n общее число проведенных экспериментов (объем выборки), а через m — число экспериментов, при которых осуществилось событие A . Величина

$$h_n(A) = \frac{m}{n} \quad (1.7.1)$$

называется *относительной частотой* (статистической вероятностью) события A для данной серии экспериментов.

При повторном проведении n экспериментов величина $h_n(A)$ изменяется. Если при достаточно большом объеме n выборки значение $h_n(A)$ может быть предсказано с достаточной точностью, то говорят, что оно *обладает статистической устойчивостью*. Статистическая устойчивость — это свойство данного конкретного эксперимента, которое может быть проверено только опытом.

Для события A , обладающего статистической устойчивостью, может быть введена некоторая численная характеристика, к которой при большом объеме выборки приближается относительная частота. Эта характеристика называется вероятностью $P(A)$ события A . Естественно предположить, что она удовлетворяет следующим основным свойствам относительных частот:

1. $P(A) \geq 0$ для любого события A из S ;
2. $P(I) = 1$ для достоверного события I ;
3. $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots$ для любой (конечной или бесконечной) последовательности попарно несовместных событий.

Эти утверждения носят название *аксиом теории вероятностей*. Из них следует, что

$$0 \leq P(A) \leq 1, \quad P(0) = 0, \quad P(\bar{A}) = 1 - P(A). \quad (1.7.2)$$

Однако из равенств $P(A) = 1$ или $P(A) = 0$ не следует, что соответствующее событие является достоверным или невозможным.

Вероятность события A может зависеть от того, осуществилось ли некоторое другое событие B . Вероятность события B при условии осуществления события B называется *условной вероятностью* и обозначается символом $P(A/B)$.

Имеет место следующая аксиома умножения вероятностей:

$$4. P(A \cap B) = P(B)P(A/B).$$

На основе этих аксиом строится математическая теория вероятностей. При построении этой теории можно не интересоваться природой вероятностей. Однако при ее практическом использовании нужно знать численные значения вероятностей отдельных событий. Для этой цели можно:

- принимать вероятность равной относительной частоте, полученной по выборке достаточно большого объема;
- вычислять вероятность некоторого события теоретически, используя опытные значения вероятностей других событий;
- задаваться априорным значением вероятности, полученным исходя из свойств рассматриваемого события.

Так, например, вероятность падения монеты гербом вверх может быть априори принята равной 0,5.

Два события A и B называются *независимыми* (*независимыми по вероятности*), если

$$P(A \cap B) = P(A)P(B). \quad (1.7.3)$$

Отсюда следует, что для независимых событий:

$$\left. \begin{aligned} P(A/B) &= P(A) \quad \text{при} \quad P(B) \neq 0, \\ P(B/A) &= P(B) \quad \text{при} \quad P(A) \neq 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.7.4)$$

События A_1, A_2, \dots, A_N называются *независимыми в совокупности*, если для любой составленной из них группы A_1, A_2, \dots, A_k ($1 < k \leq N$)

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k) = P(A_1)P(A_2) \dots P(A_k). \quad (1.7.5)$$

Теорема Байеса. Пусть A_1, A_2, \dots — последовательность попарно несовместных событий, образующих полную группу, т. е. $A_1 \cup A_2 \cup \dots = I$, а B — некоторое событие. Тогда, пользуясь аксиомой 4, можно написать, что

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i) P(B/A_i)}{P(B)} = \frac{P(A_i) P(B/A_i)}{\sum_i P(A_i) P(B/A_i)}. \quad (1.7.6)$$

Условная вероятность $P(A_i/B)$, получаемая после проведения опыта по осуществлению события B , называется *апостериорной вероятностью* события A_i , в отличие от его *априорной вероятности* $P(A_i)$. Теорема Байеса определяет зависимость между этими величинами.

§ 1.8. Одномерные распределения вероятностей

Пусть в результате некоторого опыта определяется скалярная (одномерная) случайная величина ξ , могущая принимать различные значения от $-\infty$ до $+\infty$. Для описания распределения вероятностей получения различных значений x величины ξ можно воспользоваться *функцией распределения*

$$F(x) = P(\xi < x). \quad (1.8.1)$$

Очевидно, что $F(x)$ является неубывающей функцией. При этом $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$.

Действительная случайная величина ξ называется *непрерывной*, если ее функция распределения $F(x)$ непрерывна и имеет кусочно-непрерывную производную

$$f(x) = \frac{dF}{dx} \geq 0, \quad (1.8.2)$$

называемую *плотностью распределения вероятностей* величины ξ . Мы в дальнейшем ограничимся рассмотрением непрерывных случайных величин.

Дифференциал

$$dF = f(x) dx \approx P(x \leq \xi < x + dx) \quad (1.8.3)$$

называется *элементом вероятности*. Имеют место равенства

$$\left. \begin{aligned} P(\xi < x) &= F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt, \\ P(a \leq \xi < b) &= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx, \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (1.8.4)$$

Математическим ожиданием некоторой функции $\Psi(\xi)$ называется величина

$$E[\Psi(\xi)] = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x) f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x) dF, \quad (1.8.5)$$

если это выражение существует в смысле абсолютной сходимости соответствующего интеграла. Математическое ожидание представляет собой средневзвешенное (по вероятности) значение $\Psi(\xi)$. Оно является функционалом от $\Psi(x)$ и $f(x)$, линейным относительно $\Psi(x)$. Иначе говоря,

$$\left. \begin{aligned} E[\Psi_1(\xi) \pm \Psi_2(\xi)] &= E[\Psi_1(\xi)] \pm E[\Psi_2(\xi)], \\ E[k\Psi(\xi)] &= kE[\Psi(\xi)]. \end{aligned} \right\} \quad (1.8.6)$$

Моментом порядка $r \geq 0$ случайной величины ξ относительно числа a называется математическое ожидание $E[(\xi - a)^r]$. При $a = 0$ получаем *начальный момент*

$$\alpha_r = E(\xi^r) = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x) dx. \quad (1.8.7)$$

Начальный момент первого порядка представляет собой *математическое ожидание (центр)* рассматриваемой случайной величины ξ :

$$\alpha_1(\xi) = E(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx. \quad (1.8.8)$$

При $a = E(\xi)$ момент $E[(\xi - a)^r]$ называется *центральным*. Второй центральный момент представляет собой *дисперсию*

$$D(\xi) = E\{[\xi - E(\xi)]^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} [x - E(\xi)]^2 f(x) dx > 0. \quad (1.8.9)$$

Величина $\sigma(\xi) = \sqrt{D(\xi)}$ называется *средним квадратическим отклонением* (стандартом) ξ .

Имеют место следующие равенства:

$$\left. \begin{aligned} E(\xi + c) &= E(\xi) + c, & D(\xi + c) &= D(\xi), \\ E(k\xi) &= kE(\xi), & D(k\xi) &= k^2 D(\xi), & \sigma(k\xi) &= k\sigma(\xi), \\ D(\xi) &= E(\xi^2) - E^2(\xi), \end{aligned} \right\} \quad (1.8.10)$$

где c и k — произвольные неслучайные числа.

Важные свойства математического ожидания $E(\xi)$ и дисперсии $D(\xi) = \sigma^2$ следуют из *неравенства Чебышева*

$$P(|\xi - c| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} E[(\xi - c)^2], \quad (1.8.11)$$

где c и ε — произвольные числа.

В частности, полагая $c = E(\xi)$, $\varepsilon = \lambda\sigma$, получим

$$P[|\xi - E(\xi)| \geq \lambda\sigma] \leq \frac{1}{\lambda^2}. \quad (1.8.12)$$

Отсюда следует, что при $\lambda \gg 1$ можно с вероятностью, близкой к единице, ожидать получения в результате опыта величины ξ , отклоняющейся от своего математического ожидания не больше, чем на $\lambda\sigma$.

Ниже рассматриваются случайные величины ξ , распределения которых полагаются близкими к так называемому *нормальному распределению Гаусса* с плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-E}{\sigma}\right)^2} = \frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{x-E}{\sigma}\right) \quad (1.8.13)$$

и функцией распределения

$$F(x) = \frac{1 + \Phi\left(\frac{x-E}{\sigma}\right)}{2}, \quad (1.8.14)$$

где $\sigma = \sqrt{D(\xi)}$, $E = E(\xi)$, а $\varphi(t)$ и $\Phi(t)$ — табулированные функции, определяемые выражениями

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}, \quad \Phi(t) = 2 \int_0^t \varphi(u) du \quad (1.8.15)$$

и обладающие следующими свойствами:

1. $\varphi(-t) = \varphi(t) > 0$;
2. $\max \varphi(t) = \varphi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$;
3. $\varphi(t)$ монотонно убывает при возрастании $|t|$ и $\lim_{|t| \rightarrow \infty} \varphi(t) = 0$;
4. $\Phi(-t) = -\Phi(t)$;
5. $\Phi(t)$ монотонно возрастает с увеличением t от 0 до ∞ ;
6. $\Phi(0) = 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t) = 1$.

Графики функций $\varphi(t)$ и $\Phi(t)$ даны на рис. 1.8.1.

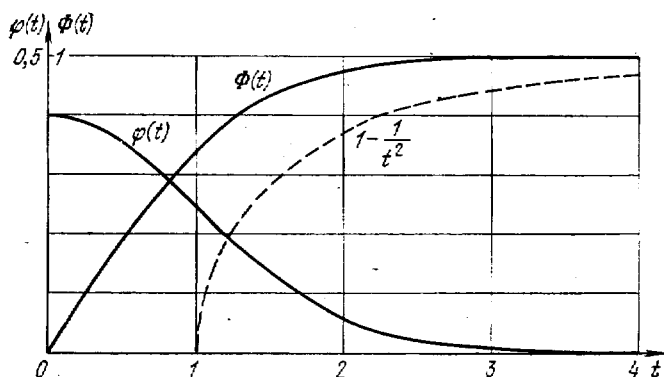


Рис. 1.8.1. Графики функций $\varphi(t)$, $\Phi(t)$ и $1 - 1/t^2$.

Из зависимостей (1.8.4) и (1.8.14) следует, что при нормальном распределении

$$P[|\xi - E(\xi)| \leq \lambda \sigma] = \Phi(\lambda). \quad (1.8.16)$$

Для сравнения зависимостей (1.8.12) и (1.8.16) на рис. 1.8.1 наряду с графиком $\Phi(t)$ пунктиром изображен график функции $1 - 1/t^2$, определяющей нижнюю гра-

ницу величины $P[|\xi - E(\xi)| \leq t\sigma]$ при использовании неравенства Чебышева (1.8.12). Из рисунка видно, что при нормальном законе распределения неравенство Чебышева дает лишь грубую оценку рассматриваемой вероятности. Преимуществом этого неравенства является его независимость от действительного распределения.

§ 1.9. Многомерные распределения вероятностей

Пусть некоторое случайное событие описывается n действительными числами $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, могущими принимать различные значения от $-\infty$ до $+\infty$. Они образуют случайный вектор $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$. В этом случае говорят об n -мерном распределении вероятностей получения различных значений $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ вектора ξ . Оно характеризуется функцией распределения

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = F(x) = P(\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \dots, \xi_n < x_n). \quad (1.9.1)$$

Случайный вектор ξ называется *непрерывным* (имеет *непрерывное распределение вероятностей*), если соответствующая функция $F(x)$ непрерывна и имеет кусочно-непрерывную частную производную

$$\frac{\partial^n F(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x), \quad (1.9.2)$$

называемую *плотностью распределения вероятностей*.

Выражение

$$dF = f(x) dx_1 dx_2 \dots dx_n \approx P(x_1 \leq \xi_1 < x_1 + dx_1, x_2 \leq \xi_2 < x_2 + dx_2, \dots, x_n \leq \xi_n < x_n + dx_n) \quad (1.9.3)$$

называется *элементом вероятности*. При этом

$$P(\xi \in Q) = \int_Q f(x) dx_1 dx_2 \dots dx_n = \int_Q dF, \quad (1.9.4)$$

где Q — некоторая область в пространстве векторов x , а интегрирование ведется по этой области. Отсюда

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx_1 dx_2 \dots dx_n = \int_R dF = 1, \quad (1.9.5)$$

где интегрирование ведется по множеству R всех возможных значений вектора ξ .

Рассмотрим произвольное разбиение $\xi = \{\xi', \xi''\}$ вектора $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ на два вектора: $\xi' = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k\}$ и $\xi'' = \{\xi_{k+1}, \xi_{k+2}, \dots, \xi_n\}$. Обозначим через $f(x)$, $f'(x')$ и $f''(x'')$ плотности распределения векторов ξ , ξ' и ξ'' . Пользуясь зависимостью (1.9.3), можно написать, что

$$\left. \begin{aligned} f'(x') &= \int_{R''} f(x) dx_{k+1} dx_{k+2} \dots dx_n, \\ f''(x'') &= \int_{R'} f(x) dx_1 dx_2 \dots dx_k, \end{aligned} \right\} \quad (1.9.6)$$

где интегрирование ведется по множествам R' и R'' всех возможных значений векторов ξ' и ξ'' .

Обозначим через $\bar{f}'(x'/x'')$ плотность распределения ξ' при условии $\xi'' = x''$, а через $\bar{f}''(x''/x')$ — плотность распределения ξ'' при условии $\xi' = x'$. Пользуясь аксиомой умножения вероятностей и зависимостью (1.9.3), можно написать, что

$$\bar{f}'(x'/x'') = \frac{f(x)}{f''(x'')}, \quad \bar{f}''(x''/x') = \frac{f(x)}{f'(x')}. \quad (1.9.7)$$

Отсюда следует формула Байеса для непрерывного распределения вероятностей

$$\bar{f}'(x'/x'') = \frac{f'(x') \bar{f}''(x''/x')}{\int_{R'} \bar{f}''(x''/x') dF'}, \quad (1.9.8)$$

где $dF' = f'(x') dx_1 dx_2 \dots dx_k$ — элемент вероятности вектора ξ' , а интегрирование ведется по всей области R' возможных значений этого вектора.

Пользуясь зависимостью (1.9.6), можно определить плотности $f_i(x_i)$ и $f_j(x_j)$ распределений произвольных двух составляющих ξ_i и ξ_j ($i, j = 1, 2, \dots, n$) вектора $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$, а также плотность $f_{ij}(x_i, x_j)$ распределения вектора $\{\xi_i, \xi_j\}$. Случайные величины ξ_i и ξ_j называются (взаимно) независимыми, если

$$f_{ij}(x_i, x_j) = f_i(x_i) f_j(x_j). \quad (1.9.9)$$

Все составляющие случайного вектора ξ независимы в совокупности, если любая пара их взаимно независима. Для этого необходимо и достаточно, чтобы плотность распределения вектора ξ

$$f(x) = f_1(x_1) f_2(x_2) \dots f_n(x_n). \quad (1.9.10)$$

Математическим ожиданием некоторой (матричной, векторной или скалярной) функции $\Psi(\xi)$ называется соответственно матричная, векторная или скалярная величина

$$\begin{aligned} E[\Psi(\xi)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x) f(x) dx_1 dx_2 \dots dx_n = \\ &= \int_R \Psi(x) dF. \end{aligned} \quad (1.9.11)$$

Очевидно, что

$$\left. \begin{aligned} E[\Psi_1(\xi) \pm \Psi_2(\xi)] &= E[\Psi_1(\xi)] \pm E[\Psi_2(\xi)], \\ E[K\Psi(\xi)] &= KE[\Psi(\xi)], \end{aligned} \right\} \quad (1.9.12)$$

где K — произвольная неслучайная матрица (вектор, скаляр), для которой возможно умножение на матрицу (вектор, скаляр) $\Psi(\xi)$.

Математическое ожидание (центр) случайного вектора ξ представляет собой вектор

$$E(\xi) = \{E(\xi_1), E(\xi_2), \dots, E(\xi_n)\}. \quad (1.9.13)$$

✓ Ковариационной матрицей случайного вектора $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ называется матрица

$$\begin{aligned} D(\xi) &= E\{[\xi - E(\xi)][\xi - E(\xi)]^T\} = \\ &= \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & \dots & D_{1n} \\ D_{21} & D_{22} & \dots & D_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ D_{n1} & D_{n2} & \dots & D_{nn} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.9.14)$$

Диагональные элементы этой матрицы представляют собой дисперсии соответствующих составляющих вектора ξ

$$D_{ii} = E\{[\xi_i - E(\xi_i)]^2\} = D(\xi_i), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.9.15)$$

Недиагональные элементы матрицы $D(\xi)$ называются ковариациями (корреляционными моментами) соответ-

ствующих пар составляющих вектора ξ :

$$D_{ij} = E \{ [\xi_i - E(\xi_i)] [\xi_j - E(\xi_j)] \} = D(\xi_i, \xi_j), \quad (1.9.16)$$

$$i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Очевидно, что $D_{ij} = D_{ji}$, т. е. любая ковариационная матрица симметрична.

Величины

$$K_{ij} = K(\xi_i, \xi_j) = \frac{D(\xi_i, \xi_j)}{\sqrt{D(\xi_i) D(\xi_j)}}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (1.9.17)$$

называются коэффициентами корреляции между ξ_i и ξ_j . Они определяются при условии, что

$$D(\xi_i) \neq 0, \quad D(\xi_j) \neq 0. \quad (1.9.18)$$

Из неравенства (1.5.9) непосредственно следует, что

$$|K(\xi_i, \xi_j)| \leq 1. \quad (1.9.19)$$

Две случайные величины ξ_i и ξ_j , для которых

$$D(\xi_i, \xi_j) = 0, \quad K(\xi_i, \xi_j) = 0, \quad (1.9.20)$$

называются (взаимно) некоррелированными.

Можно показать, что если две случайные величины взаимно независимы, то они некоррелированы. Иначе говоря, из условия (1.9.9) следует (1.9.20). Однако обратное утверждение не имеет места. Существуют примеры зависимых некоррелированных величин.

Если между двумя случайными скалярными величинами ξ и η существует линейная зависимость $\xi = k\eta$, где k — произвольное неслучайное число, то

$$K(\xi, \eta) = \begin{cases} 1 & \text{при } k > 0, \\ -1 & \text{при } k < 0. \end{cases} \quad (1.9.21)$$

Таким образом, $|K(\xi, \eta)|$ принимает наибольшее возможное значение при наличии линейной зависимости между случайными величинами ξ и η .

Если все составляющие вектора $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ взаимно не коррелированы, то такой вектор называется некоррелированным. Его ковариационная матрица

является диагональной:

$$D(\xi) = \begin{pmatrix} D(\xi_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D(\xi_2) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & D(\xi_n) \end{pmatrix}. \quad (1.9.22)$$

В том случае, когда $D(\xi) = \sigma^2 I$, где $\sigma^2 > 0$ — некоторое число, вектор ξ называется *некоррелированным равноточным*. В дальнейшем мы будем полагать, что такие векторы существуют.

Из зависимостей (1.9.12), (1.9.13) и (1.9.14) непосредственно следует, что

$$\left. \begin{aligned} E(A\xi) &= AE(\xi), & E(\xi + a) &= E(\xi) + a, \\ D(A\xi) &= AD(\xi)A^T, & D(\xi + a) &= D(\xi), \end{aligned} \right\} \quad (1.9.23)$$

где A — произвольная неслучайная матрица (вектор, скаляр), допускающая выполнение операции умножения на ξ , а $a = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ — вектор.

В частности, если $A = a^T = (a_1 a_2 \dots a_n)$, то

$$\eta = a^T \xi = a \cdot \xi = \sum_{i=1}^n a_i \xi_i \quad (1.9.24)$$

представляет собой случайную скалярную величину, дисперсия которой

$$D(\eta) = a^T D(\xi) a = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n D_{ij} a_i a_j \quad (1.9.25)$$

Если вектор ξ некоррелирован, то

$$D(\eta) = \sum_{i=1}^n a_i^2 D_i. \quad (1.9.26)$$

Таким образом, дисперсия скалярного произведения неслучайного вектора a на случайный вектор ξ представляет собой квадратичную форму от вектора a с матрицей $D(\xi)$.

Так как при произвольном векторе a

$$D(a^T \xi) \geq 0,$$

то указанная квадратичная форма и ее матрица $D(\xi)$ неотрицательно определены.

Если

$$R[D(\xi)] = n \Leftrightarrow |D(\xi)| \neq 0, \quad (1.9.27)$$

то распределение вектора ξ и сам вектор называются *собственными*, а при

$$R[D(\xi)] = r < n \Leftrightarrow |D(\xi)| = 0 \quad (1.9.28)$$

— *несобственными*.

Из § 1.4 следует, что при собственном распределении вероятностей ковариационная матрица $D(\xi)$ положительно определена. При этом существует матрица $D^{-1/2}$, удовлетворяющая условию (1.3.14)

$$D^{-1/2} D(\xi) D^{-1/2} = I. \quad (1.9.29)$$

Перейдем теперь от вектора ξ к вектору η путем линейного преобразования

$$\eta = D^{-1/2} \xi. \quad (1.9.30)$$

Из (1.9.23) и (1.9.29) следует, что

$$D(\eta) = I. \quad (1.9.31)$$

Таким образом, любой собственный случайный вектор $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ может быть преобразован в некоррелированный равнооточный вектор $\eta = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n\}$.

Из (1.3.7) и (1.3.8) следует, что при несобственном распределении матрица $D(\xi)$ имеет $n - r$ нулевых собственных значений

$$\lambda_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n - r. \quad (1.9.32)$$

В этом случае существует $n - r$ линейно независимых неслучайных векторов α_j , для которых

$$D(\alpha_j^T \xi) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n - r. \quad (1.9.33)$$

Отсюда, пользуясь неравенством Чебышева (1.8.12), находим, что при условии (1.9.28) между составляющими вектора ξ с вероятностью единица соблюдается $n - r$ линейных зависимостей

$$\alpha_j^T \xi = E(\alpha_j^T \xi), \quad j = 1, 2, \dots, n - r. \quad (1.9.34)$$

Из изложенного следует, что необходимым и достаточным условием возможности рассмотрения заданной

матрицы D в качестве ковариационной матрицы некоторого случайного вектора ξ является неотрицательная определенность D . При этом, если матрица D положительно определена, то вектор ξ — собственный. Необходимость этого условия очевидна. Для доказательства достаточности можно рассмотреть вектор $\xi = D^{1/2}\eta$, где η — некоррелированный равнооточный случайный вектор ($D(\eta) = I$). Тогда из (1.3.14) и (1.9.23) непосредственно следует, что $D(\xi) = D$.

Рассмотрим два случайных вектора, вообще говоря, разной размерности: $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ и $\eta = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m\}$. Матрицу

$$D(\xi, \eta) = E\{[\xi - E(\xi)][\eta - E(\eta)]^T\} = \{D_{ij}\} \quad (1.9.35)$$

мы будем называть взаимной ковариационной матрицей векторов ξ и η . Произвольный элемент этой матрицы

$$D_{ij} = D(\xi_i, \eta_j) = E\{[\xi_i - E(\xi_i)][\eta_j - E(\eta_j)]\}, \quad (1.9.36)$$

$$i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Очевидно, что

$$D^T(\xi, \eta) = D(\eta, \xi). \quad (1.9.37)$$

Если

$$D(\xi, \eta) = D(\eta, \xi) = 0, \quad (1.9.38)$$

то векторы ξ и η взаимно не коррелированы.

Из (1.9.35) следует, что

$$\left. \begin{aligned} D(a + \xi, b + \eta) &= D(\xi, \eta), \\ D(A\xi, B\eta) &= AD(\xi, \eta)B^T, \end{aligned} \right\} \quad (1.9.39)$$

где a и b — неслучайные векторы, имеющие одинаковые с векторами ξ и η размерности, а A и B — неслучайные матрицы (векторы, скаляры), допускающие их умножение на векторы ξ и η соответственно.

В частности, если $a = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ и $b = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ — неслучайные векторы, то

$$x = a \cdot \xi = a^T \xi = \sum_{i=1}^n a_i \xi_i \quad \text{и} \quad y = b \cdot \eta = b^T \eta = \sum_{i=1}^m b_i \eta_i \quad (1.9.40)$$

случайные скалярные величины, коэффициент корреляции между которыми

$$D(x, y) = \mathbf{a}^T \mathbf{D}(\xi, \eta) \mathbf{b} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i b_j D(\xi_i \eta_j). \quad (1.9.41)$$

Пользуясь этой зависимостью, можно выяснить физический смысл коэффициента корреляции между двумя случайными величинами. Пусть ξ и η — некоторые независимые скалярные случайные величины. Обозначим через $\tilde{\xi}$ и $\tilde{\eta}$ результаты измерений этих величин. Предположим, что на них влияют не только фактические значения ξ и η , но и некоторая третья случайная величина ζ , называемая *мешающим параметром*. Пусть

$$\tilde{\xi} = \xi + a\zeta, \quad \tilde{\eta} = \eta + b\zeta,$$

a и b — неслучайные величины. Предположим, что ζ не зависит от ξ и η . Тогда

$$\begin{aligned} K(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) &= \frac{D(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})}{\sqrt{D(\tilde{\xi}) D(\tilde{\eta})}} = \frac{ab D(\zeta)}{\sqrt{[D(\xi) + a^2 D(\zeta)] [D(\eta) + b^2 D(\zeta)]}} = \\ &= \left[1 + \frac{D(\xi)}{a^2 D(\zeta)} \right]^{-1/2} \left[1 + \frac{D(\eta)}{b^2 D(\zeta)} \right]^{-1/2}, \end{aligned}$$

где $D(\xi)$, $D(\eta)$, $D(\zeta)$ — дисперсии соответствующих величин.

Из полученной зависимости видно, что коэффициент $K(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})$ характеризует степень влияния мешающего параметра ζ на результаты измерений. Если хотя бы одно из значений $a^2 D(\zeta)$ или $b^2 D(\zeta)$ мало по сравнению с $D(\xi)$ или $D(\eta)$ (соответственно), то величина $K(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})$ близка к нулю. Если $a^2 D(\zeta)$ и $b^2 D(\zeta)$ велики по сравнению с $D(\xi)$ и $D(\eta)$, то коэффициент $K(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})$ близок к единице.

Из приведенного примера видна разница между корреляционными и причинными связями. В рассматриваемом случае изменение величины $\tilde{\xi}$ влечет за собой соответствующее изменение $\tilde{\eta}$ только тогда, когда оно связано с изменением ζ . Если $\tilde{\xi}$ изменяется под влиянием изменения ξ , то это не отражается на значении $\tilde{\eta}$. На практике корреляции между случайными величинами обычно возникают под влиянием очень большого (часто

практически бесконечного) числа различных мешающих параметров. В том случае, когда установление соответствующих причинных связей оказывается практически невозможным, корреляционные зависимости представляют единственный способ математического описания рассматриваемого явления.

Предположим, что случайный вектор $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ представлен в виде совокупности векторов $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$, т. е.

$$\xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k\}. \quad (1.9.42)$$

Тогда

$$D(\xi) = \begin{pmatrix} D(\xi_1) & D(\xi_1, \xi_2) & \dots & D(\xi_1, \xi_k) \\ D(\xi_2, \xi_1) & D(\xi_2) & \dots & D(\xi_2, \xi_k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ D(\xi_k, \xi_1) & D(\xi_k, \xi_2) & \dots & D(\xi_k) \end{pmatrix}. \quad (1.9.43)$$

В частности, если все векторы $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$ взаимно не коррелированы, то матрица $D(\xi)$ является клеточной

$$D(\xi) = \begin{pmatrix} D(\xi_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D(\xi_2) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & D(\xi_k) \end{pmatrix}. \quad (1.9.44)$$

§ 1.10. Нормальное многомерное распределение вероятностей. Распределение Лапласа

Нормальным n -мерным распределением вероятностей некоторого собственного случайного вектора $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ называется непрерывное распределение с плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |D|}} e^{-\frac{1}{2}(x-E)^T D^{-1}(x-E)}, \quad (1.10.1)$$

где $E = E(\xi)$ и $D = D(\xi)$ — математическое ожидание и ковариационная матрица рассматриваемого вектора.

Если вектор ξ некоррелирован, то это выражение принимает вид

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - E_i}{\sigma_i} \right)^2}, \quad (1.10.2)$$

где $\sigma_i = \sqrt{D_i}$, а E_i и D_i ($i = 1, 2, \dots, n$) — математическое ожидание и дисперсия соответствующей составляющей вектора ξ .

Наконец, если $E = 0$ и $D = I$, то

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i^2} = \varphi(x_1) \varphi(x_2) \dots \varphi(x_n), \quad (1.10.3)$$

где функция $\varphi(t)$ определяется выражением (1.8.15).

Нормальное распределение вероятностей обладает следующими основными свойствами:

1. Оно полностью определяется математическим ожиданием E и ковариационной матрицей D рассматриваемого случайного вектора.

2. Максимум плотности этого распределения достигается в точке $x = E(\xi)$. При возрастании хотя бы одной из величин $|x_i - E(\xi_i)|$ ($i = 1, 2, \dots, n$) указанная плотность монотонно убывает, приближаясь к нулю при $|x_i - E(\xi_i)| \rightarrow \infty$.

3. При любом разбиении $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k\}$ нормально распределенного вектора $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ на несколько частей эти части ξ_j ($j = 1, 2, \dots, k$) распределены нормально. Нормальными являются также получаемые при этом условные распределения вероятностей.

4. Составляющие ~~$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$~~ любого нормально распределенного некоррелированного вектора ξ независимы в совокупности, т. е. удовлетворяют условию (1.9.10).

5. Любая (векторная или скалярная) линейная функция с неслучайными коэффициентами от составляющих нормально распределенного вектора также распределена нормально.

6. Путем линейного преобразования

$$\eta = D^{-\frac{1}{2}} (\xi - E) \quad (1.10.4)$$

можно привести любое нормальное распределение к простейшему виду (1.10.3).

Распределением Лапласа для некоторого случайного вектора ξ , составляющие которого независимы в совокупности, называется непрерывное распределение

вероятностей, плотность которого

$$f(x) = \frac{1}{2^n \beta_1 \beta_2 \dots \beta_n} e^{-\sum_{i=1}^n \frac{|x_i - E_i|}{\beta_i}}, \quad (1.10.5)$$

где

$$\beta_i = \sqrt{\frac{D_i}{2}}. \quad (1.10.6)$$

а E_i и D_i ($i = 1, 2, \dots, n$) — математические ожидания и дисперсии соответствующих составляющих вектора ξ .

§ 1.11. Сходимость последовательностей случайных величин. Предельные теоремы

Рассмотрим некоторую последовательность скалярных случайных величин ξ_i ($i = 1, 2, \dots$). Существует несколько вероятностных определений сходимости этой последовательности. Мы будем пользоваться следующими двумя:

1. Последовательность величин ξ_i *сходится по вероятности* к некоторой константе c , если для любого $\epsilon > 0$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} P(|\xi_i - c| > \epsilon) = 0. \quad (1.11.1)$$

Будем обозначать такую сходимость символом

$$\xi_i \xrightarrow{P} c \text{ при } i \rightarrow \infty. \quad (1.11.2)$$

2. Последовательность величин ξ_i *сходится в среднем квадратичном* к константе c , если

$$\lim_{i \rightarrow \infty} E[(\xi_i - c)^2] = 0. \quad (1.11.3)$$

Этому определению соответствует символ

$$\xi_i \xrightarrow{\text{с. к.}} c \text{ при } i \rightarrow \infty. \quad (1.11.4)$$

Пусть ξ — некоторая случайная величина. Тогда говорят, что $\xi_i \xrightarrow{P} \xi$ или $\xi_i \xrightarrow{\text{с. к.}} \xi$ при $i \rightarrow \infty$, если соответственно $\xi_i - \xi \xrightarrow{P} 0$ или $\xi_i - \xi \xrightarrow{\text{с. к.}} 0$ при $i \rightarrow \infty$.

Из зависимостей (1.8.10) непосредственно следует, что

$$E[(\xi_i - c)^2] = E^2(\xi_i - c) + D(\xi_i), \quad i = 1, 2, \dots$$

Отсюда находим, что равенство (1.11.3) эквивалентно одновременному выполнению условий

$$\lim_{\xi_i \rightarrow \infty} E(\xi_i) = c \quad \text{и} \quad \lim_{i \rightarrow \infty} D(\xi_i) = 0. \quad (1.11.5)$$

Пользуясь неравенством Чебышева (1.8.11), можно показать, что сходимость в среднем квадратичном влечет за собой сходимость по вероятности. Однако обратное утверждение, вообще говоря, не справедливо и может быть доказано лишь при некоторых дополнительных ограничениях. В частности, можно показать, что сходимость в среднем квадратичном является необходимым условием сходимости по вероятности в следующих двух случаях:

1. Все величины ξ_i ($i = 1, 2, \dots$) имеют нормальные законы распределения.

2. Случайные величины ξ_i ограничены по модулю.

Говорят, что случайная величина ξ_i ($i = 1, 2, \dots$) *распределена асимптотически нормально*, если существует последовательность пар действительных чисел E_i и σ_i , таких, что случайная величина

$$\frac{\xi_i - E_i}{\sigma_i} \xrightarrow{P} \xi \quad \text{при} \quad i \rightarrow \infty, \quad (1.11.6)$$

где ξ — случайная величина, имеющая нормальную плотность распределения (1.8.13) при $E = 0$ и $\sigma = 1$. Это имеет место тогда и только тогда, когда

$$\lim_{i \rightarrow \infty} P[E_i - a\sigma_i < \xi_i < E_i + b\sigma_i] = \Phi(b) - \Phi(a), \quad (1.11.7)$$

где a и b — произвольные числа, а функция $\Phi(t)$ определяется выражением (1.8.15).

Эта зависимость позволяет аппроксимировать распределение вероятностей величины ξ_i при достаточно больших i нормальным распределением с математическим ожиданием E_i и дисперсией σ_i^2 .

Заметим, что для осуществления равенства (1.11.6) необязательно, чтобы

$$\lim_{i \rightarrow \infty} E_i = \lim_{i \rightarrow \infty} E(\xi_i) \quad \text{и} \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \sigma_i^2 = \lim_{i \rightarrow \infty} D(\xi_i).$$

Указанные пределы могут даже не существовать.

Большое значение для понимания основ теории вероятностей имеют следующие предельные теоремы.

1. Теорема Бернулли. Пусть A — некоторое случайное событие с вероятностью $P(A)$. Тогда определяемая по формуле (1.7.1) относительная частота этого события

$$h_n(A) \xrightarrow{c. k.} P(A) \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad (1.11.8)$$

и имеет асимптотически нормальное распределение с математическим ожиданием $E_n = P(A)$ и дисперсией

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{n} P(A) [1 - P(A)].$$

Теорема Бернулли представляет теоретическое обоснование возможности использования средней частоты в качестве экспериментального значения вероятности, а также применения нормального распределения при решении ряда задач. Однако следует иметь в виду, что она справедлива в предположении, что рассматриваемое событие обладает вероятностью, подчиняющейся указанным выше аксиомам. Это предположение может быть сделано лишь на основе физических соображений о характере рассматриваемого эксперимента.

2. Теорема Хинчина, закон больших чисел. Пусть ξ_1, ξ_2, \dots — последовательность случайных величин, имеющих одинаковое распределение с математическим ожиданием E . Тогда среднее арифметическое n величин ξ_i ($i = 1, 2, \dots, n$)

$$\bar{\xi}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i \xrightarrow{P} E \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (1.11.9)$$

Если при этом закон распределения величин ξ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) имеет дисперсию D , то случайная величина $\bar{\xi}_n$ имеет асимптотически нормальное распределение с центром E и дисперсией D/n .

Эта теорема служит обоснованием использования среднего арифметического $\bar{\xi}_n$ в качестве опытного значения рассматриваемой величины ξ .

3. Центральная предельная теорема. При некоторых условиях сумма Σ_n большего числа n независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ распределена асимптотически нормально,

Это утверждение фактически представляет группу соответствующих теорем, каждая из которых доказывается при своих условиях [33, 41]. По существу, эти условия сводятся к требованию, чтобы в состав суммы Σ_n не входили отдельные слагаемые, явно преобладающие над другими и распределенные не по нормальному закону. Простейшей из указанных теорем является сформулированная выше теорема Хинчина.

Центральная предельная теорема служит обоснованием возможности использования нормального распределения вероятностей при анализе ошибок измерений. При этом предполагается, что последние представляют собой сумму большего числа составляющих ошибок, вызываемых различными независимыми факторами. Поэтому в ряде случаев закон распределения суммарной ошибки оказывается близким к нормальному. Однако это имеет место не всегда. В частности, распределение суммарной ошибки существенно отличается от нормального в том случае, когда среди составляющих ошибок имеется несколько преобладающих, распределения которых резко отличаются от нормального.

§ 1.12. Случайные функции

Случайные величины, изменяющиеся в процессе опыта, называются *случайными функциями*. Аргумент, от которого зависит случайная функция, может быть скаляром, например, время, или вектором, например, координаты некоторой точки. Мы здесь органичимся рассмотрением случайных функций от скалярного аргумента t , изменяющихся на заданном замкнутом интервале

$$t_n \leq t \leq t_k, \quad (1.12.1)$$

где t_n и t_k — начальная и конечная точки этого интервала.

Обозначим через $\Psi(t)$ рассматриваемую случайную функцию. Проведя серию опытов по определению значения $\Psi(t)$ и присваивая каждому опыту индекс $i = 1, 2, \dots$, получим в результате i -го опыта некоторое конкретное значение $\Psi_i(t)$ этой функции, которое называется ее *частной реализацией*. На рис. 1.12.1 тонкими

тиниями изображены частные реализации некоторых случайных функций.

Если зафиксировать значение аргумента $t = t_1$, то $\Psi(t_1)$ будет представлять собой случайную величину,

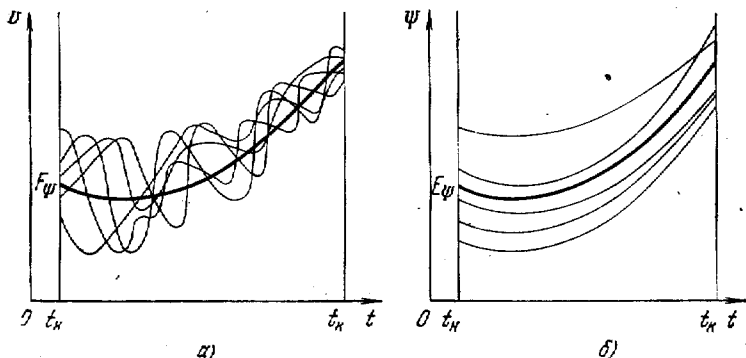


Рис. 1.12.1. Графики математических ожиданий и нескольких частотных реализаций слабо (а) и сильно (б) коррелированных случайных функций.

называемую сечением рассматриваемой случайной функции $\Psi(t)$. Функция

$$F(x, t_1) = P[\Psi(t_1) < x] \quad (1.12.2)$$

характеризует распределение вероятностей этого сечения. Однако знания этой функции для всех значений t , лежащих на интервале (1.12.1), еще не достаточно для полной характеристики случайной функции $\Psi(t)$, так как при этом остается открытым вопрос о зависимости между величинами $\Psi(t_1), \Psi(t_2), \dots$, где t_1, t_2, \dots — различные значения аргумента t .

Более полной характеристикой является n -мерная функция распределения

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \\ = P[\Psi(t_1) < x_1, \Psi(t_2) < x_2, \dots, \Psi(t_n) < x_n]. \end{aligned} \quad (1.12.3)$$

Исчерпывающее описание случайной функции $\Psi(t)$ может быть получено при $n \rightarrow \infty$, т. е. путем построения бесконечно-мерного распределения вероятностей. Построение такого закона представляет достаточно труд-

ную задачу. Поэтому мы в дальнейшем ограничимся использованием более простых вероятностных характеристик. При этом *математическим ожиданием* $E\Psi(t)$ и дисперсией $D\Psi(t)$ случайной функции $\Psi(t)$ будем называть неслучайные функции, которые при любом значении аргумента t равны математическому ожиданию и дисперсии соответствующего сечения $\Psi(t)$:

$$E\Psi(t) = E[\Psi(t)], \quad D\Psi(t) = D[\Psi(t)]. \quad (1.12.4)$$

Математическое ожидание $E\Psi(t)$ и дисперсия $D\Psi(t)$ определяют среднее значение случайной функции $\Psi(t)$ и ее разброс относительно среднего. Однако этого совершенно не достаточно для характеристики рассматриваемой функции. На рис. 1.12.1, а и б изображены частные реализации двух случайных функций, имеющих одинаковые значения $E\Psi(t)$ и $D\Psi(t)$ и при том — совершенно разный характер. Для первой из них характерна слабая зависимость между ее близкими сечениями. Случайные функции такого типа называются *слабо коррелированными*. В отличие от них, функция, изображенная на рис. 1.12.1, б, *сильно коррелирована*.

Для характеристики зависимости между двумя произвольными сечениями $\Psi(t_1)$ и $\Psi(t_2)$ используется корреляционная (автокорреляционная) функция, представляющая собой неслучайную функцию двух аргументов, равную ковариации между соответствующими сечениями

$$K\Psi(t_1, t_2) = D[\Psi(t_1), \Psi(t_2)]. \quad (1.12.5)$$

Очевидно, что

$$K\Psi(t_1, t_2) = K\Psi(t_2, t_1), \quad K\Psi(t, t) = D\Psi(t), \quad (1.12.6)$$

т. е. корреляционная функция симметрична и при $t_1 = t_2$ обращается в дисперсию.

Если $\Psi(t)$ случайная, а $\varphi(t)$ — неслучайная функции, то

$$\left. \begin{aligned} E_{\Psi+\varphi}(t) &= E\Psi(t) + \varphi(t), \\ K_{\Psi+\varphi}(t_1, t_2) &= K\Psi(t_1, t_2), \\ E_{\varphi\Psi}(t) &= \varphi(t) E\Psi(t), \\ K_{\varphi\Psi}(t_1, t_2) &= \varphi(t_1) \varphi(t_2) K\Psi(t_1, t_2). \end{aligned} \right\} \quad (1.12.7)$$

Пусть

$$\Phi(t) = \int_0^t \Psi(\tau) d\tau, \quad \theta(t) = \frac{d\Psi}{dt}.$$

При этом предполагается, что все частные реализации случайной функции $\Psi(t)$ являются соответственно интегрируемыми или дифференцируемыми функциями.

Тогда

$$\left. \begin{aligned} E_{\Phi}(t) &= \int_0^t E_{\Psi}(\tau) d\tau, & K_{\Phi}(t_1, t_2) &= \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} K(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2, \\ E_{\theta}(t) &= \frac{dE_{\Psi}(t)}{dt}, & K_{\theta}(t_1, t_2) &= \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} K_{\Psi}(t_1, t_2). \end{aligned} \right\} \quad (1.12.8)$$

Если корреляционная функция $K_{\Psi}(t_1, t_2)$ зависит только от величины $|t_2 - t_1|$, то соответствующая случайная функция $\Psi(t)$ называется стационарной. Из зависимости (1.12.5) следует, что в этом случае

$$D_{\Psi}(t) = \text{const.} \quad (1.12.9)$$

Зафиксируем на интервале (1.12.1) некоторые значения аргумента t_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Тогда совокупность соответствующих сечений случайной функции

$$\xi_i = \Psi(t_i), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.12.10)$$

образует случайный вектор $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$. Математическое ожидание $E(\xi) = \{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ и ковариационная матрица $D(\xi) = (D_{ij})$ этого вектора определяются равенствами

$$E_i = E_{\Psi}(t_i), \quad D_{ij} = K_{\Psi}(t_i, t_j). \quad (1.12.11)$$

Если одновременно рассматриваются две случайные функции $\Psi(t)$ и $\Phi(t)$, то для их характеристики наряду с автокорреляционными функциями $K_{\Psi}(t_1, t_2)$ и $K_{\Phi}(t_1, t_2)$ может быть использована взаимная корреляционная функция

$$K_{\Psi, \Phi}(t_1, t_2) = D[\Psi(t_1), \Phi(t_2)] \quad (1.12.12)$$

Если

$$K_{\Psi, \Phi}(t_1, t_2) \equiv 0 \quad (1.12.13)$$

для любых t_1 и t_2 , то функции $\Psi(t)$ и $\Phi(t)$ называются *взаимно не коррелированными*.

Рассмотрим на интервале (1.12.1) две совокупности значений аргумента t_i ($i = 1, 2, \dots, n$) и t_j ($j = 1, 2, \dots, m$). Тогда соответствующие сечения

$$\xi_i = \Psi(t_i) \quad \text{и} \quad \eta_j = \Phi(t_j) \quad (1.12.14)$$

образуют векторы $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ и $\eta = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m\}$. Взаимная ковариационная матрица этих векторов $D(\xi, \eta) = \{D_{ij}\}$ определяется равенствами

$$D_{ij} = K_{\Psi, \Phi}(t_i, t_j), \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (1.12.15)$$

§ 1.13. Выпуклые оболочки

Рассмотрим m -мерное евклидово пространство E_m . Введем в нем прямоугольную систему координат x_1, x_2, \dots, x_m с началом в точке O . Положение некоторой точки $A \in E_m$ с координатами a_1, a_2, \dots, a_m характеризуется вектором

$$\overline{OA} = \{a_1, a_2, \dots, a_m\} = \mathbf{a}. \quad (1.13.1)$$

Мы будем в дальнейшем говорить, что точка A является концом вектора $\overline{OA} = \mathbf{a}$, начинающегося в точке O . Таким образом, каждой точке A соответствует единственный вектор \mathbf{a} . Поэтому E_m можно с одинаковым успехом рассматривать как точечное или векторное пространство. Расстояние $\rho(A, B)$ между двумя точками A и B этого пространства определяется выражением

$$\rho(A, B) = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|, \quad (1.13.2)$$

где $\mathbf{a} = \overline{OA}$, $\mathbf{b} = \overline{OB}$.

Множество точек X с векторами $\overline{OX} = \mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, удаленных от точки A на одинаковое расстояние ρ , т. е. удовлетворяющих условию

$$|\mathbf{a} - \mathbf{x}| = \rho = \text{const}, \quad (1.13.3)$$

образует сферу радиуса ρ с центром в точке A .

Множество точек X , удовлетворяющих условию

$$|a - x| < \rho, \quad (1.13.4)$$

называется *шаром*.

Говорят, что шар радиуса ρ с центром в A составляет ρ -окрестность точки A .

Пусть $L \subset E_m$ — множество точек X (векторов x). Если для некоторой точки $X \in L$ существует такое число $\varepsilon > 0$, что все точки, лежащие в ε -окрестности X , принадлежат L , то X называется *внутренней* точкой множества L . Если точка X не принадлежит L и имеет ε -окрестность, также не принадлежащую к этому множеству, то она является *внешней* точкой для L . Если в любой окрестности X содержатся как точки, входящие в L , так и не принадлежащие этому множеству, то X называется *границной* точкой множества L . Совокупность всех граничных точек образует *границу* данного множества. Если множество L включает свою границу, то оно называется *замкнутым*. Множество, не содержащее своих граничных точек, является *открытым*. Примером открытого множества может служить шар, границей которого является соответствующая сфера. Совокупность этого шара и сферы представляет замкнутое множество.

Множество точек X , векторы которого определяются выражением

$$x = \lambda a + (1 - \lambda)b, \quad (1.13.5)$$

где λ — произвольное действительное число, представляет собой *прямую*, проходящую через концы A и B векторов a и b .

Если на величину λ наложить условие

$$0 \leq \lambda \leq 1, \quad (1.13.6)$$

то выражение (1.13.5) определяет все точки *отрезка* с концами в A и B .

В частности, при $b = 0$, $B = O$ отрезок $[O, A]$ совпадает с геометрическим образом вектора $a = \overline{OA}$. В этом случае про любую точку X , лежащую на этом отрезке, будем говорить, что она находится на векторе a . Если положение точки X определяется зависимостью

$$x = \lambda a, \quad \lambda > 1,$$

то можно сказать, что эта точка находится на *продолжении* вектора a .

Множество $L \subset E_m$ называется *выпуклым*, если любой отрезок с концами в двух произвольных точках этого множества также принадлежит множеству L . Пример открытого выпуклого множества — шар. Примеры замкнутых выпуклых множеств — отрезок, а также совокупность шара и соответствующей сферы.

Для любого множества $L \subset E_m$ может быть построена его выпуклая оболочка G , представляющая собой совокупность всех возможных векторов вида

$$x = \sum_{i=1}^n \mu_i a_i, \quad (1.13.7)$$

где

$$\sum_{i=1}^n \mu_i = 1, \quad \mu_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1.13.8)$$

а a_1, a_2, \dots, a_n — произвольная конечная совокупность векторов, принадлежащих L .

Нетрудно показать, что выпуклая оболочка G произвольного множества L обладает следующими свойствами:

она является выпуклым множеством;

любое выпуклое множество, содержащее L , включает его выпуклую оболочку G .

Иначе говоря, выпуклая оболочка G является минимальным выпуклым множеством, содержащим L .

Выпуклая оболочка двух точек представляет собой отрезок с концами в этих точках. Выпуклая оболочка сферы — это совокупность самой сферы и соответствующего ей шара.

При $m = 1$ выпуклая оболочка G замкнутого ограниченного множества L представляет собой минимальный отрезок, заключающий L .

При $m = 2$ и L , представляющем собой конечную совокупность точек A_1, A_2, \dots, A_n , выпуклая оболочка G является минимальным выпуклым многоугольником, содержащим все точки A_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Вершинами этого многоугольника являются некоторые из точек A_i . Кроме того, часть точек A_i может лежать на сторонах

этого многоугольника или внутри него (рис. 1.13.1). При $m = 2$ и бесконечном множестве L выпуклая оболочка G представляет собой минимальную плоскую выпуклую фигуру, полностью включающую в себя множе-

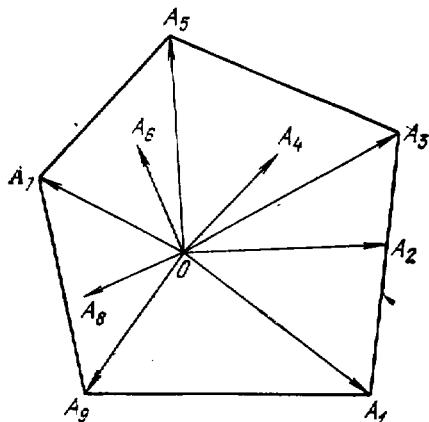


Рис. 1.13.1. Плоская выпуклая оболочка векторов A_1, A_2, \dots, A_9 .

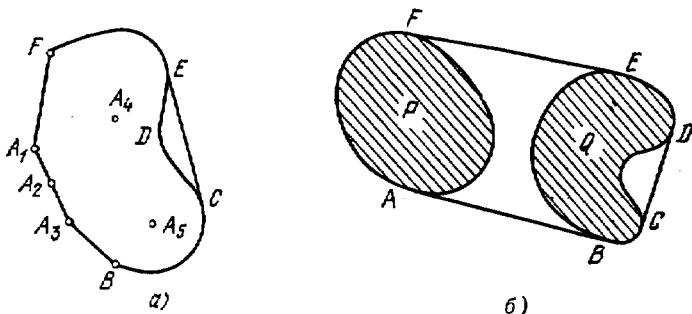


Рис. 1.13.2. Плоские выпуклые оболочки бесконечных множеств точек.

ство L . При этом граница оболочки G частично совпадает с границей множества L , а частично образуется прямыми, охватывающими вогнутые участки границы множества L . На рис. 1.13.2, а и б изображены примеры таких оболочек. На первом из них множество L состоит из точек A_1, A_2, \dots, A_5 и кривой $BCDEF$. При этом

оболочка G представляет собой выпуклую фигуру A_1A_2BCEF . На втором множество L состоит из двух заштрихованных областей P и Q , а оболочка G представляет собой охватывающую эти области выпуклую фигуру $ABCDEF$. Аналогично при $m = 3$ и L конечном выпуклые оболочки G являются выпуклыми многогранниками, а при L бесконечном — выпуклыми объемными фигурами. Границы этих фигур могут включать плоские и криволинейные участки.

При $m > 3$ выпуклые оболочки представляют собой многомерные выпуклые фигуры. Так как непосредственный геометрический анализ многомерных образов чрезвычайно затруднен, при исследовании их свойств приходится пользоваться соответствующими доказанными утверждениями. Получаемые при этом результаты обычно имеют наглядную геометрическую интерпретацию для случаев $m = 1, 2, 3$.

Под *размерностью* k любого множества $L \subset E_m$ мы будем в дальнейшем подразумевать максимальное число линейно независимых векторов, принадлежащих множеству L . Очевидно, что $k \leq m$. При $k < m$ все точки множества L являются граничными. Иначе говоря, множество размерности $k < m$ не может быть открытым. Из (1.13.7) следует, что размерность выпуклой оболочки G совпадает с размерностью исходного множества L . Так, например, в трехмерном пространстве различные выпуклые оболочки изображаются отрезками, а также плоскими и объемными выпуклыми фигурами.

Мы будем называть множество L *симметричным*, если наряду с произвольным вектором $a \in L$ оно включает также вектор $-a \in L$. Очевидно, что выпуклая оболочка симметричного множества также симметрична.

Множество L является ограниченным, если любой вектор $a \in L$ удовлетворяет условию

$$|a| \leq M, \quad (1.13.9)$$

где M — заданное число. Легко показать, что выпуклая оболочка такого множества также ограничена и удовлетворяет условию (1.13.9).

Нам в дальнейшем понадобится следующая теорема, относящаяся к свойствам выпуклых оболочек,

Теорема. Пусть $L \subset E_m$ — произвольное симметричное ограниченное множество размерности $k = m$, G — его выпуклая оболочка, а $c \in E_m$ — произвольный вектор. Тогда c или его продолжение пересекается с границей оболочки G в единственной точке D , которой соответствует вектор $d = \overrightarrow{OD}$, удовлетворяющий условию

$$|d| > 0. \quad (1.13.10)$$

При этом любой вектор $b \parallel c$ определяет внутреннюю точку оболочки G , если

$$|b| < |d|, \quad (1.13.11)$$

и внешнюю точку тогда, когда

$$|b| > |d|. \quad (1.13.12)$$

Иначе говоря, $|d|$ представляет собой точную верхнюю границу (а для замкнутых оболочек — максимум) модулей всех векторов b , удовлетворяющих условиям

$$b = \lambda c, \quad b \in G, \quad (1.13.13)$$

где λ — произвольное число.

При $m \leq 3$ эта теорема геометрически очевидна. При произвольном m она может быть доказана на основе приведенных выше свойств выпуклых множеств.

Для доказательства воспользуемся тем, что начало координат $O \in G$ (это непосредственно следует из симметричности и выпуклости G). Покажем, что O является внутренней точкой G . Для этого из множества L выберем некоторую совокупность $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ линейно независимых векторов. Обозначим через $Y = (y_1, y_2, \dots, y_{2m})$ совокупность $2m$ векторов $\pm x_i$ ($i = 1, 2, \dots, m$), а через G' — выпуклую оболочку этой совокупности. Очевидно, что

$$G' \subset G. \quad (1.13.14)$$

Пусть a — произвольный вектор. Из линейной независимости векторов x_i ($i = 1, 2, \dots, m$) следует, что могут быть найдены m коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, удовлетворяющих условию

$$a = \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i.$$

Отсюда может быть найден вектор $e \parallel a$, определяемый выражением

$$\left. \begin{aligned} e &= \frac{a}{\sum_{i=1}^m |\alpha_i|} = \sum_{i=1}^m \mu_i y_i, \\ \mu_i &= \frac{|\alpha_i|}{\sum_{i=1}^m |\alpha_i|} \geq 0, \quad \sum_{i=1}^m \mu_i = 1. \end{aligned} \right\} \quad (1.13.15)$$

где y_1, y_2, \dots, y_m — m линейно независимых векторов, принадлежащих совокупности Y .

Таким образом, начало и конец вектора e принадлежат выпуклым оболочкам G' и G .

Будем называть *гиперплоскостью* в пространстве E_m совокупность концов всех векторов $x = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, удовлетворяющих линейному уравнению

$$\sum_{i=1}^m A_i x_i = A_0, \quad (1.13.16)$$

где A_i ($i=0, 1, \dots, m$) — некоторые постоянные. В частности, уравнение гиперплоскости, проходящей через концы векторов y_1, y_2, \dots, y_m , может быть записано в виде

$$|x' y'_1 y'_2 \dots y'_m| = 0, \quad (1.13.17)$$

где $x' = \{x, 1\}$, $y'_i = \{y_i, 1\}$ ($i=1, 2, \dots, m$).

Из выражения (1.13.15) следует, что вектор e удовлетворяет уравнению (1.13.17) и его конец лежит в соответствующей гиперплоскости (так как вектор $e' = \{e, 1\}$ является линейной комбинацией векторов y'_1, y'_2, \dots, y'_m).

Представляя уравнение (1.13.17) в виде (1.13.16), находим, что

$$A_0 = (-1)^m |y_1 y_2 \dots y_m| \neq 0.$$

Поэтому кратчайшее расстояние от гиперплоскости (1.13.17) до точки O

$$r = \frac{A_0}{\sqrt{\sum_{i=1}^m A_i^2}} > 0.$$

Так как $|e| \geq r$, то все точки, лежащие на векторе a и удаленные от точки O на расстояние не более r , принадлежат оболочкам G' и G .

Рассматривая все возможные векторы a , мы будем получать различные гиперплоскости (1.13.17) с различными значениями r . Общее число таких гиперплоскостей конечно. Поэтому среди конечного числа расстояний $r > 0$ существует наименьшее. Обозначим его через $\varepsilon > 0$. Очевидно, что все точки, принадлежащие ε -окрестности O , принадлежат оболочкам G' и G . Следовательно O является внутренней точкой этих оболочек.

Рассмотрим теперь произвольный вектор c и обозначим через S совокупность всех точек, лежащих на векторе c и его продолжении. Множество S выпукло. Все точки этого множества, удаленные от O не более чем на ε , принадлежат оболочке G . Таким образом, выпуклые множества S и G пересекаются. Их пересечение также выпукло [42]. Кроме того, по условиям теоремы оно ограничено. Поэтому оно представляет собой некоторый отрезок $[0, D]$ либо полуоткрытый интервал $[0, D)$, получаемый после исключения из отрезка $[0, D]$ точки D . Отсюда, обозначая через d вектор \overline{OD} , получаем доказываемые зависимости (1.13.10), (1.13.11) и (1.13.12).

Остается показать единственность точки D пересечения множества S с границей оболочки G . Для этого достаточно доказать, что любая точка $B \in [0, D]$ является внутренней для оболочки G . Введем обозначение

$$\rho(0, B) = b < d = |d|. \quad (1.13.18)$$

На интервале $[0, D)$ может быть найдена точка F , расстояние которой от начала координат $f = \rho(0, F)$ удовлетворяет неравенству

$$b < f < d.$$

Отсюда величина

$$\varepsilon' = \varepsilon \frac{f-b}{f} > 0.$$

Легко показать, что любая точка B' , лежащая в ε' -окрестности точки B , принадлежит G . Для этого достаточно провести через точки F и B' прямую и убедиться в том, что она имеет с ε -окрестностью начала координат O некоторую общую точку O' . Следовательно,

точка B' лежит на отрезке $[O', F)$, концы которого принадлежат выпуклой оболочке G . Отсюда непосредственно следует, что любая точка интервала $[0, D)$ является внутренней для G .

Пусть L — выпуклое множество. Точка $X \in L$ называется *крайней точкой* множества L , если не существует отрезка $[AB] \subset L$, для которого X была бы внутренней точкой. Иначе говоря, для вектора x точки X тождество $x = x$ является единственным представлением вида (1.13.5) при условии (1.13.6), в котором векторы a и b принадлежат множеству L . Так, например, для замкнутой двухмерной выпуклой фигуры крайними являются все ее вершины, а также точки, лежащие на криволинейных участках границы этой фигуры. Можно показать, что всякое замкнутое ограниченное выпуклое множество является выпуклой оболочкой совокупности всех своих крайних точек [42].

Г л а в а II

ЗАДАЧА ОЦЕНКИ СОСТОЯНИЯ РЕАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

§ 2.1. Постановка задачи

Как известно, фактическое состояние любой реальной системы может быть полностью описано лишь бесконечным (или практически бесконечным) числом параметров. С другой стороны, в распоряжении исследователя, приступающего к решению рассматриваемой задачи, всегда имеется только конечное число независимых измерений, искаженных неизбежными ошибками. Поэтому полное определение состояния реальной системы по данным измерений практически невозможно. Речь может идти лишь о получении некоторой его оценки. При этом реальная система заменяется ее математической моделью, зависящей от конечного числа параметров. Так, например, при решении большинства задач небесной механики Солнечная система, представляющая собой совокупность гигантских тел, в которых непрерывно происходят сложнейшие физико-химические процессы, заменяется простой системой, состоящей из конечного числа материальных точек. Каждая из этих точек представляет соответствующее небесное тело, ее состояние полностью описывается семью величинами — массой и шестью элементами ее орбиты. Поэтому полное состояние такой упрощенной модели Солнечной системы описывается конечным числом параметров.

При решении различных прикладных задач одна и та же реальная система может представляться различными математическими моделями. Так, например, указанная выше точечная модель Солнечной системы

хорошо отображает движение планет, удаленных друг от друга на значительные расстояния. Однако при решении таких задач, как описание движения близких естественных и искусственных спутников планет, исследование возникающих на планетах приливных волн и т. п., эта модель оказывается недостаточной, и приходится переходить к моделям, в которых планеты представляются абсолютно твердыми или деформируемыми телами.

Из приведенного примера видно, что выбор используемой математической модели зависит от природы исследуемой системы и существа решаемой задачи. Однако во всех случаях состояние этой модели должно полностью определяться конечным числом параметров q_1, q_2, \dots, q_m , совокупность которых будем называть *вектором состояния*

$$\mathbf{q} = \{q_1, q_2, \dots, q_m\}. \quad (2.1.1)$$

Число m составляющих вектора \mathbf{q} мы будем называть *размерностью модели (или задачи)*.

В тех случаях, когда при построении математических моделей возникает необходимость в определении некоторых пространственных структур (различных тел, полей сил и т. п.), их представляют в виде конечного числа простых структур, описываемых аналитическими функциями, либо в виде конечного числа членов разложений в ряды по некоторым функциям, либо в виде таблиц, включающих конечное число величин.

Для определения вектора \mathbf{q} используются измерения некоторых величин, зависящих от состояния системы. В рассмотренном выше примере определения состояния Солнечной системы в качестве измерений обычно используются углы, характеризующие направление осей телескопов, следящих за исследуемыми небесными телами, дальности от электрических центров антенн радиолокационных станций до поверхностей небесных тел и др. Совокупность всех используемых измерений образует вектор измерений:

$$\mathbf{d} = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}, \quad (2.1.2)$$

где n — число измерений. Для того чтобы по измеренному значению вектора \mathbf{d} оценить соответствующий век-

тор q , необходимо знать зависимость между ними. Для принятой математической модели она имеет вид

$$d = F(q). \quad (2.1.3)$$

Однако в действительности измеренные значения составляющих вектора d получаются в результате наблюдений за состоянием реальной системы, в то время как зависимость (2.1.3) соответствует принятой математической модели. Обозначим через $\eta = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n\}$ вектор ошибок этой модели

$$\eta = d_n - F(q_n), \quad (2.1.4)$$

где q_n и d_n — истинные значения соответствующих векторов. Погрешности η иногда называют *методическими ошибками*.

Пусть \tilde{d} — значение вектора d , полученное в результате измерений. Оно связано с d_n соотношением:

$$\tilde{d} = d_n + \xi, \quad (2.1.5)$$

где $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ — вектор ошибок измерений. Из (2.1.4) и (2.1.5) следует, что

$$\tilde{d} = F(q_n) + \xi + \eta. \quad (2.1.6)$$

При решении рассматриваемой задачи точные значения векторов ξ и η остаются неизвестными. Их обычно рассматривают как случайные векторы с заданными вероятностными характеристиками (законами распределения, моментами и т. п.). При этом зависимость (2.1.6) заменяется так называемой системой условных уравнений:

$$F(q) = \tilde{d}, \quad (2.1.7)$$

представляющей собой систему из n уравнений относительно m неизвестных q_1, q_2, \dots, q_m . Система условных уравнений является неточной и из нее нельзя получить истинное значение q_n вектора состояния. Может быть найдена лишь некоторая оценка \hat{q} этого вектора. Она должна по возможности мало отличаться от q_n . При этом задача сводится к отысканию алгоритма вида

$$\hat{q} = \Phi(\tilde{d}), \quad (2.1.8)$$

позволяющего находить оценку \hat{q} по измеренному значению \tilde{d} .

Структура этого алгоритма зависит от вида системы условных уравнений (2.1.7) и имеющихся сведений об ошибках ξ и η . Основной задачей этого алгоритма является возможное уменьшение (фильтрация) влияния этих ошибок. Его обычно называют *алгоритмом фильтрации*.

Полученная в результате оценка \hat{q} , как правило, не удовлетворяет системе условных уравнений (2.1.7). После подстановки этой оценки в левую часть указанной системы получаем зависимость вида

$$\tilde{d} = F(\hat{q}) + \delta, \quad (2.1.9)$$

где $\delta = \{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n\}$ — так называемый *вектор невязок*.

Из изложенного следует, что задача построения алгоритма фильтрации является, вообще говоря, неоднозначной. Поэтому возникает вопрос о выборе в некотором смысле оптимального алгоритма фильтрации. Этот вопрос будет рассмотрен ниже. При этом мы будем исходить из того, что любой используемый на практике алгоритм фильтрации должен обладать следующими свойствами:

1. Определяемая зависимость (2.1.8) должна быть однозначной (для данного алгоритма).

2. В предположении об отсутствии ошибок измерения и модели он должен давать истинное значение вектора состояния. Иначе говоря, должно удовлетворяться так называемое *условие несмещенности* алгоритма фильтрации:

$$q = \Phi[F(q)]. \quad (2.1.10)$$

Наряду с задачей нахождения оценки \hat{q} возникает проблема оценки точности полученного результата, т. е. оценки погрешности

$$x = \hat{q} - q_n. \quad (2.1.11)$$

Последняя зависит от алгоритма (2.1.8), а также от ошибок ξ и η . Если при некоторых условиях, налагаемых на указанные ошибки, справедливы равенства

$$E(x) = 0 \Leftrightarrow E(\hat{q}) = q_n, \quad (2.1.12)$$

то говорят, что при этих условиях оценка \hat{q} является *несмещенной*.

Заметим, что в некоторых прикладных задачах вектор q может рассматриваться как случайная величина (см. § 6.4). В этих условиях представляет интерес либо задача оценки конкретной частной реализации этого вектора, либо определение его математического ожидания $E(q)$. Мы здесь, как правило, будем ограничиваться рассмотрением задач первого типа.

§ 2.2. Прогнозируемые, непрогнозируемые и вероятностные модели

В большинстве случаев состояние реальной системы изменяется с течением времени. Поэтому вектор q , характеризующий состояние соответствующей модели в данный момент, является функцией времени t :

$$q = q(t).$$

Мы будем называть модель *прогнозируемой*, если эта функциональная зависимость известна и по состоянию модели в начальный момент $t = t_0$ можно однозначно определить ее состояние для любого другого момента, находящегося в заданном интервале. Иначе говоря,

$$q(t) = \Phi(q_0, t) \quad (2.2.1)$$

при

$$t_n \leq t \leq t_k, \quad (2.2.2)$$

где $q_0 = q(t_0)$ — начальное значение вектора состояния; $\Phi(q_0, t)$ — заданная зависимость, t_n и t_k — границы интервала прогнозирования.

Заметим, что зависимость (2.2.1) между векторами $q(t)$ и $q_0 = q(t_0)$ при фиксированном t должна быть взаимно однозначной, так как выбор начального момента t_0 произволен и времена t_0 , t можно поменять местами. Из (2.2.1) следует, что начальное значение q_0 вектора состояния может быть использовано для описания состояния и движения рассматриваемой системы на всем интервале (2.2.2). Поэтому в дальнейшем мы будем в большинстве случаев индекс «0» опускать и обозначать через $q = q(t_0)$ вектор состояния модели на заданном интервале (2.2.2).

Примером прогнозируемой модели может служить рассмотренная выше точечная модель Солнечной системы. Ее состояние, непрерывно изменяющееся во времени, характеризуется массами, координатами и составляющими векторов скорости отдельных небесных тел. Однако законы небесной механики позволяют на длительных интервалах времени определять текущие значения вектора состояния по заданным его начальным значениям (начальным условиям движения), т. е. осуществлять прогноз движения Солнечной системы.

Ограничение времени действия зависимости (2.2.1) обусловлено тем, что с увеличением интервала прогнозирования, как правило, возрастают ошибки используемой модели. Поэтому при необходимости описания поведения системы на длительном интервале часто приходится разделять этот интервал на несколько частей и находить на каждой из них свое значение вектора состояния.

Наряду с прогнозируемыми моделями широко используются также *непрогнозируемые*, т. е. такие модели, для которых зависимость вида (2.2.1) либо не может быть составлена либо не используется в процессе решения рассматриваемой задачи. Примером может служить определение движения самолета в том случае, когда нам неизвестны намерения его пилота. Рассматривая самолет как точку и определяя в каждый момент t вектор $r(t)$ его координат, находим ряд последовательных положений самолета, а соединяя их плавной кривой — траекторию его движения. Таким образом, задача определения состояния непрогнозируемой модели решается для каждого момента независимо и требует проведения единовременных измерений (для определения состояния прогнозируемой модели могут быть совместно использованы измерения, проводимые в различные моменты времени).

При использовании непрогнозируемых моделей нельзя полностью абстрагироваться от некоторых представлений о характере их движения из-за невозможности строгого соблюдения условия одновременности измерения. Поэтому обычно используют измерения, проводимые на интервале, в течение которого система может рассматриваться как неподвижная. В зависимости от

характера движения этот интервал может быть чрезвычайно маленьким (для быстро летящего самолета) или, наоборот, очень большим. Так, например, при определении фигуры Земли по данным геодезических измерений считают ее неизменной в течение длительного интервала времени, хотя в действительности она представляет собой медленно изменяющуюся непрогнозируемую систему.

Другой способ обхода указанной трудности заключается в использовании различных интерполяционных формул. При этом для некоторых моментов проводятся измерения одной и той же величины. Эти измерения при помощи интерполяционной формулы приводятся к заданному фиксированному времени. Оценка погрешности такой интерполяции невозможна без использования некоторых сведений о характере движения рассматриваемой системы.

Аналогичные трудности возникают при необходимости переноса результатов определения состояния непрогнозируемой системы в фиксированные моменты времени, на промежуточные моменты, для которых такое определение не проводилось. Для этого также необходимы определенные допущения о характере движения системы. Так, например, представляя траекторию самолета плавной кривой, проходящей через измеряемые точки, мы исходим из допущения о невозможности резких «скачков» самолета.

Указанные трудности возрастают в том случае, когда результаты оценки состояния непрогнозируемой системы на некотором интервале времени необходимо использовать вне этого интервала, т. е. осуществлять прогноз движения. В частности, такая необходимость возникает в процессе управления движением. При этом обычно пользуются различными экстраполяционными формулами, погрешности которых резко возрастают с увеличением интервала экстраполяции. Поэтому возможности использования непрогнозируемых моделей для целей прогноза и управления крайне ограничены.

Наряду с перечисленными недостатками непрогнозируемые модели имеют существенное преимущество по сравнению с соответствующими прогнозируемыми: как правило, они проще и точнее. Так, например, при опре-

делении положения самолета мы можем ограничиться слежением за одной его точкой. В этом случае непрогнозируемая точечная модель лишена собственных погрешностей, и единственными источниками ошибок являются неточности проведения измерений и приведения их к заданным моментам времени. При этом необходимо определять только три составляющие вектора состояния, а именно координаты рассматриваемой точки.

С другой стороны, при построении точечной прогнозируемой модели самолета задача сводится к описанию движения его центра масс. При этом возникают методические погрешности, связанные с несовпадением центра масс самолета и точек, за которыми ведется слежение. Кроме того, нужно знать силы, действующие на самолет, и определять по этим силам его движение. Это существенно усложняет модель и вносит дополнительные погрешности, связанные с неточностью знания сил, а также ошибками решения системы уравнений движения. Наконец, размерность вектора состояния должна быть не ниже шести (числа координат и составляющих вектора скорости материальной точки). Если в процессе оценки движения самолета приходится уточнять действующие силы, то эта размерность дополнительно увеличивается на число оцениваемых параметров, определяющих силы.

В том случае, когда законы движения системы неизвестны или известны с небольшой точностью, а прогноз ее состояния необходим (например, для цели управления), используются прогнозируемые модели, построенные на основе формального применения некоторых интерполяционных формул. Так, например, для прогноза движения самолета часто применяется линейная модель вида

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0(t - t_0), \quad (2.2.3)$$

где \mathbf{r}_0 и \mathbf{v}_0 — векторы положения и скорости некоторой точки самолета в момент $t = t_0$. В этом случае вектор состояния $\mathbf{q} = \{\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0\}$ становится шестимерным.

Применение подобных моделей в некоторых задачах неизбежно. Однако к их использованию (особенно для цели прогноза) следует относиться с осторожностью, так как при этом существует опасность появления боль-

ших ошибок. Возникает проблема оценки зависимости этих ошибок от интервалов измерений и прогноза. В частности, для модели (2.2.3) такая оценка может быть проведена, если известно максимально возможное ускорение самолета.

Для простоты рассмотрим случай прямолинейного движения и допустим, что на интервале (2.2.2) самолет летел с постоянной скоростью. В нашем распоряжении имеются измерения параметров движения самолета на этом интервале и нам необходимо составить прогноз его положения в некоторый момент $t_1 = t_k + \tau$, где τ — заданная продолжительность интервала прогнозирования. При этом мы пользуемся моделью (2.2.3). Поскольку намерения пилота нам не известны, мы можем предполагать наихудшее: начиная с момента t_k он будет лететь с максимально возможным ускорением (замедлением) a_{\max} . Тогда наибольшая ошибка прогноза положения самолета в момент t_1 , определяемая погрешностями модели на интервале прогнозирования

$$\Delta_{\max} s = \frac{a_{\max} \tau^2}{2}.$$

Таким образом, ошибка прогноза резко возрастает с увеличением времени τ и при больших допустимых ускорениях точный прогноз возможен лишь на коротком интервале. Подобное положение обычно имеет место при использовании моделей, построенных по формальным соображениям. Только хорошо зная законы движения изучаемой системы и учитывая их при построении модели, мы можем надеяться на получение точного длительного прогноза. Примером может служить прогноз движения малых небесных тел, осуществляемый на основе хорошо разработанных законов небесной механики. Однако и здесь имеют место погрешности, связанные с действием различных недостаточно изученных сил (сопротивление межпланетной среды, световое давление, гравитационные аномалии и т. п.). Они ограничивают возможности прогноза по продолжительности и точности.

Наряду с рассмотренными выше детерминированными моделями при решении ряда задач могут применяться вероятностные модели, состояние которых зависит

от некоторого случайного вектора $\omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k\}$ или случайной функции $\Psi(t) = \{\Psi_1(t), \Psi_2(t), \dots, \Psi_k(t)\}$. При этом зависимость (2.2.1) заменяется выражением вида

$$q(t) = \Phi[q_0, \omega, \Psi(t), t], \quad (2.2.4)$$

и задаются вероятностные характеристики вектора ω и функции $\Psi(t)$. Некоторые из этих характеристик могут входить в число оцениваемых параметров.

Таким образом, для вероятностной модели характерно отсутствие детерминированной зависимости между значениями вектора состояния в различные моменты времени. В этом случае указанная зависимость принимает вероятностный характер.

В качестве примера рассмотрим движение искусственного спутника Земли на сравнительно небольшой высоте (менее 1000 км). На такой высоте орбита спутника заметно эволюционирует под влиянием сопротивления верхних слоев атмосферы, зависящего от ее плотности. Последняя существенно связана с рядом случайных факторов и в первую очередь — с солнечной и геомагнитной активностью. Поэтому силу сопротивления верхней атмосферы можно рассматривать как случайную функцию, что в свою очередь предопределяет вероятностный характер соответствующей модели движения спутника.

Вероятностные модели могут найти широкое применение при описании различных немеханических систем (биологических, социальных, экономических и т. п.).

§ 2.3. Статическая и динамическая фильтрация

Рассмотрим реальную систему, для которой на некотором интервале времени (2.2.2) может быть построена прогнозируемая детерминированная модель (2.2.1). Состояние этой модели в каждый момент времени характеризуется вектором $q(t)$. Из выражения (2.2.1) следует, что для получения оценки $\hat{q}(t)$ этого вектора достаточно найти оценку \hat{q}_0 некоторого начального его значения $q_0 = q(t_0)$, где t_0 — заданный начальный момент времени, находящийся на интервале (2.2.2). При

ЭТОМ МОЖНО СЧИТАТЬ, ЧТО

$$\hat{q}(t) = \Phi(\hat{q}_0, t). \quad (2.3.1)$$

Из взаимной однозначности этой зависимости следует, что для оценки состояния рассматриваемой системы могут быть в равной мере использованы значения \hat{q}_0 и $\hat{q}(t)$.

Задачу определения оценки q_0 мы будем называть *статической фильтрацией*, а задачу непосредственного нахождения оценки $\hat{q}(t)$ — *динамической фильтрацией*. При использовании детерминированных прогнозируемых моделей обе задачи с теоретической точки зрения совершенно идентичны. Однако применяемые на практике алгоритмы в обоих случаях часто оказываются существенно различными. Поэтому при решении той или иной прикладной задачи более удобным может быть один из двух указанных видов алгоритмов. Вопросы сравнения некоторых динамических и статических алгоритмов фильтрации будут рассмотрены ниже.

В подавляющем большинстве случаев используемые на практике алгоритмы фильтрации достаточно сложны и не могут быть описаны аналитическими зависимостями. Поэтому задача решается численными методами, позволяющими вычислять значение оценок $\hat{q}(t)$ для заданных фиксированных времен. В этих условиях при построении динамических алгоритмов фильтрации выбирают на интервале (2.2.2) некоторую последовательность моментов:

$$t_0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_N \leq t_k \quad (2.3.2)$$

и находят соответствующую последовательность оценок $\hat{q}_i = \hat{q}(t_i)$, $i = 1, 2, \dots, N$.

Очевидно, что указанное подразделение алгоритмов фильтрации имеет смысл только при использовании прогнозируемых моделей (2.2.1). Если задача решается на основе непрогнозируемой или вероятностной модели, то однозначная зависимость между оценками состояния системы в различные моменты времени отсутствует и любой алгоритм фильтрации является, по существу, динамическим. Однако в некоторых случаях, когда система изменяется очень медленно, эта динамичность

практически неощутима, и для длительного интервала времени достаточно оценки лишь одного значения вектора состояния. Примером может служить задача определения гравитационного поля планеты. Хотя характеристики этого поля изменяются во времени, но изменение их происходит очень медленно и поэтому в большинстве случаев для описания поля в течение длительного интервала времени используется фиксированное значение вектора состояния.

Таким образом, в зависимости от типа математической модели и характера алгоритма фильтрации, задача определения состояния и движения некоторой системы формулируется как оценка начального значения $q_0 = q(t_0)$ вектора состояния, либо как оценка последовательности $q_i = q(t_i)$, $i = 1, 2, \dots, N$ значений этого вектора. В дальнейшем, когда речь будет идти об оценке вектора q_0 или одного из векторов q_i , мы будем в большинстве случаев отбрасывать соответствующий индекс и говорить об оценке вектора q .

§ 2.4. Вектор измерений

Как было указано выше, для оценки вектора $q = \{q_1, q_2, \dots, q_m\}$ используется вектор $d = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$. При принятой математической модели связь между ними имеет вид (2.1.3).

При построении этой зависимости следует учесть, что вектор d может включать как априорные, так и апостериорные сведения о системе. Под первыми мы подразумеваем совокупность данных, имеющихся в распоряжении исследователя до начала эксперимента. Так, например, при определении фигуры Земли можно использовать сведения, полученные ранее другими экспериментаторами. При определении движения космической ракеты в качестве априорных данных можно использовать проектные значения элементов ее орбиты. В обоих случаях еще до начала эксперимента мы располагаем некоторым априорным значением \tilde{q} вектора q . Это позволяет включить все или некоторые составляющие вектора q в вектор d , а их априорные значения \tilde{q}_j ($j = 1, 2, \dots, m$) рассматривать в качестве измеренных значений соответствующих составляющих вектора измерений.

Под апостериорными данными мы будем подразумевать результаты измерений, проводимых в процессе эксперимента. Заметим, что обычно составляющие вектора q непосредственно не измеряются, а определяются значения их функций, называемых измеряемыми параметрами. Например, при определении движения летательного аппарата в качестве измеряемых параметров могут быть использованы расстояния от аппарата до измерительных пунктов (дальности), производные от дальностей по времени (радиальные скорости), углы, определяющие направление «измерительный пункт — аппарат» (углы визирования), углы между направлениями от аппарата на два известных пункта (звезду, планету, заданный пункт на Земле и т. п.) и др. величины.

В общем случае измеряемые параметры p_i ($i = 1, 2, \dots, l$) являются функциями текущих значений вектора $q(t)$ и образуют вектор измеряемых параметров:

$$p = \{p_1, p_2, \dots, p_l\} = p[q(t)] = p(t). \quad (2.4.1)$$

При использовании непрогнозируемой модели определяется состояние системы для заданного момента $t = t_1$. Это состояние характеризуется вектором $q = q(t_1)$, а измеряемые параметры находятся для того же времени и образуют вектор:

$$p = p(t_1) = p(q). \quad (2.4.2)$$

Тогда, в случае использования совместно априорных и апостериорных данных, полный вектор d измерений представляет собой совокупность векторов q и p :

$$d = \{q, p\} = F(q). \quad (2.4.3)$$

При использовании прогнозируемой модели оценивается начальное значение $q = q(t_0)$ вектора состояния. В этом случае измерения производятся в некоторые моменты t_i , вообще говоря, не совпадающие с t_0 и лежащие на замкнутом интервале

$$t_n \leq t_i \leq t_k, \quad (2.4.4)$$

который мы в дальнейшем будем называть *мерным интервалом*. Из зависимостей (2.2.1) и (2.4.1) следует, что

при этом

$$p(t) = \Psi(q, t), \quad (2.4.5)$$

где $\Psi(q, t) = \{\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_l\}$ — некоторая заданная функция, которую мы в дальнейшем будем называть *измеряемой функцией*. В общем случае она является векторной и представляет собой совокупность нескольких скалярных измеряемых функций $\Psi_j(q, t)$ ($j = 1, 2, \dots, l$).

Пользуясь функцией $\Psi(q, t)$ и задавая времена измерений t_i , находящиеся на мерном интервале (2.4.4), можно получить серию измерений вида

$$d_i = \Psi_{\beta_i}(q, t_i), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.4.6)$$

где β_i — индекс скалярной измеряемой функции, значение которой определяется в момент t_i .

Заметим, что измеряемая функция может зависеть не только от времени измерения, но и от других величин, которые мы будем называть *условиями измерений*. Например, при измерении дальности от измерительного пункта до летательного аппарата к числу условий измерений относятся координаты измерительного пункта, которые при решении некоторых прикладных задач целесообразно рассматривать в качестве переменных величин.

Таким образом, в общем случае выражение для измеряемой функции имеет вид

$$p = \Psi(q, r), \quad (2.4.7)$$

где r — некоторый переменный вектор условий измерения, лежащий в заданной области R , т. е.

$$r \in R. \quad (2.4.8)$$

Из изложенного следует, что вся используемая измерительная информация может быть разделена на *единичные* и *множественные* измерения. К числу первых относятся априорные сведения о составляющих вектора q , а также измерения характеризуемые зависимостями вида (2.4.2). Общее число таких измерений ограничено. Так, при определении составного вектора d по формуле (2.4.3) число используемых единичных измерений равно сумме размерностей векторов q и p .

Множественные измерения выбираются из некоторого заданного бесконечного множества Δ возможных измерений. Иначе говоря,

$$d \in \Delta. \quad (2.4.9)$$

При этом имеется возможность выбора неограниченного числа различных векторов d , удовлетворяющих условию (2.4.9). Вопросы оптимизации такого выбора будут рассмотрены ниже. Примером измерений этого типа могут служить измерения, определяемые при помощи функций вида (2.4.5) или (2.4.7).

В тех случаях, когда используемый вектор измерений $d = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ определяется одной скалярной функцией $\Psi(q, t)$, т. е.

$$d_i = \Psi(q, t_i), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.4.10)$$

мы будем называть его *однородным*. В противном случае мы будем говорить о *разнородных* измерениях.

Рассмотрим модельную зависимость (2.1.3) между векторами d и q . Обозначим через d_n и q_n истинные значения этих векторов. Зависимость (2.1.3) должна удовлетворять условию однозначности. Иначе говоря, в пространстве векторов q существует такая область Q , включающая вектор q_n , для которой каждому вектору

$$q \in Q \quad (2.4.11)$$

соответствует одно и только одно значение d .

Обратное утверждение, вообще говоря, не имеет места. При $n < m$ зависимость (2.1.3), рассматриваемая как система n уравнений относительно m неизвестных q_1, q_2, \dots, q_m (при заданном d), может иметь несколько решений. При $n > m$ эта система может не иметь решений.

Совокупность измерений d_1, d_2, \dots, d_n , для которой зависимость между векторами d и q является взаимно однозначной и взаимно непрерывной, мы будем называть *достаточной*. При этом, пользуясь принятой в топологии терминологией, можно сказать, что область Q пространства векторов q гомеоморфно отображается на соответствующую область пространства векторов d . Как известно, гомеоморфные отображения могут иметь место лишь между пространствами одинаковой размерно-

сти [1]. Поэтому число неизвестных в системе (2.1.3) должно равняться числу уравнений, т. е.

$$n = m, \quad (2.4.12)$$

и указанная система уравнений должна иметь однозначное решение для любого

$$d \in D. \quad (2.4.13)$$

Здесь D — некоторая область в пространстве векторов d , удовлетворяющая условию

$$\tilde{d} = d_n + \xi \in D \quad (2.4.14)$$

при любом возможном значении ошибки ξ .

Совокупность измерений $d = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$, в которой

$$n > m, \quad (2.4.15)$$

мы будем называть *избыточной*. В этом случае система уравнений (2.1.3) может не иметь решения при некоторых d , удовлетворяющих условию (2.4.13).

Введем теперь понятие *полноты* совокупности измерений. Для этого обозначим через q_1 некоторое фиксированное значение вектора q , а через d_1 величину $F(q_1)$. Система уравнений $d_1 = F(q)$ всегда имеет решение $q = q_1$. Если это решение является в области Q единственным для любого q_1 , удовлетворяющего условию (2.4.11), то рассматриваемую совокупность измерений мы будем называть *полной* в области Q . Иначе говоря, для полной совокупности измерений из зависимости

$$F(q_1) = F(q_2) \quad (2.4.16)$$

непосредственно следует, что

$$q_1 = q_2 \quad (2.4.17)$$

для любых q_1 и q_2 , удовлетворяющих условию (2.4.11).

Очевидно, что любая достаточная совокупность измерений является полной в некоторой области. Это утверждение остается справедливым для избыточной совокупности, полученной путем добавления любого числа дополнительных измерений к некоторой достаточной совокупности.

Если пренебречь влиянием ошибок измерения и модели, т. е. принять, что

$$\xi = \eta = 0,$$

то из выражений (2.1.5) и (2.1.6) следует, что система условных уравнений (2.1.7) оказывается точной и принимает вид

$$F(q_n) = d_n.$$

При использовании полной совокупности измерений решение этой системы уравнений позволяет однозначно определить вектор q_n .

Таким образом, полнота совокупности измерений является достаточным условием того, что при отсутствии ошибок исходных данных истинное состояние системы однозначно определяется по имеющейся измерительной информации.

Мы в дальнейшем ограничимся рассмотрением полных (избыточных и достаточных) систем измерений. При этом оказывается возможным оценивать все составляющие вектора q . Вопросы оценки состояния системы по неполной измерительной информации (в случае использования метода наименьших квадратов) рассмотрены С. Р. Рао [41]. При этом определяются условия, позволяющие по неполной совокупности измерений оценивать часть составляющих вектора q (или некоторые функции этих составляющих).

В заключение рассмотрим вопрос о независимости отдельных измерений d_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Мы будем считать их *независимыми* в том случае, когда между соответствующими измеренными значениями нет детерминированной связи вида

$$\Phi(\tilde{d}_1, \tilde{d}_2, \dots, \tilde{d}_n) = 0. \quad (2.4.18)$$

Отсюда следует, что измерения могут быть независимыми и в том случае, когда их соответствующие модельные выражения зависимы между собой. Для этого достаточно лишь отсутствия детерминированной зависимости между ошибками измерений.

В качестве примера рассмотрим задачу оценки некоторой скалярной величины q . При этом мы будем

n раз измерять ее значение, т. е.

$$d_i = q, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Если между ошибками этих измерений нет детерминированной зависимости, то измерения следует считать независимыми, несмотря на то, что каждый раз измеряется одна и та же величина. Каждое из этих измерений несет новую информацию о значении оцениваемого параметра.

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением совокупностей независимых измерений, так как все зависимые измерения могут быть предварительно исключены при помощи выражений (2.4.18).

Глава III

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ И ОПТИМИЗАЦИЯ

§ 3.1. Ошибки измерений

При решении ряда прикладных задач возникает необходимость в определении некоторых характеристик точности получаемых оценок вектора состояния. Очевидно, что эти характеристики не могут быть найдены без ошибок. Фактически речь может идти лишь об «оценке точности оценки вектора состояния». В дальнейшем мы будем, для простоты, говорить об «оценке точности определения вектора состояния» или об «оценке точности некоторого алгоритма фильтрации». Исходными данными для решения этой задачи служат имеющиеся сведения об ошибках измерений или модели.

Рассмотрим в первую очередь ошибку измерений, представляющую собой случайный вектор $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$. Наиболее полно такой вектор описывается соответствующим n -мерным законом распределения. Однако в подавляющем большинстве прикладных задач составление точного закона распределения ошибок оказывается практически невозможным. Особенно большие трудности возникают в случае определения вектора измерений при помощи некоторой измеряемой функции. Для простоты рассмотрим случай одной скалярной измеряемой функции $\Psi(q, t)$. Обозначим через $\tilde{\Psi}(q, t)$ и $\Psi_n(q, t)$ ее измеренное и истинное значения, а через

$$\xi(q, t) = \tilde{\Psi}(q, t) - \Psi_n(q, t) \quad (3.1.1)$$

ошибку измерений. При этом составляющие вектора ξ определяются выражением

$$\xi_i = \xi(q, t_i), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.1.2)$$

где t_i — времена измерений, лежащие на мерном интервале (2.4.4). Отсюда следует, что для построения закона распределения ошибок произвольного вектора $\tilde{a} = \{\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n\}$, образованного при помощи рассматриваемой измеряемой функции, необходимо знать бесконечномерный закон распределения случайной функции $\tilde{\Psi}(q, t)$, что является достаточно трудной задачей.

В настоящее время обычно используются следующие два способа обхода указанных выше трудностей. Первый из них заключается в том, что заранее постулируется форма закона распределения ошибок. При этом задается (или определяется по данным эксперимента) некоторое число параметров, согласующих этот закон с фактическим законом распределения ошибок. Второй способ заключается в задании некоторых моментов рассматриваемого закона распределения. При первом способе обычно используется нормальный закон распределения (1.10.1). Это объясняется, с одной стороны, близостью большинства реальных законов распределения ошибок к нормальному, а с другой, — удобством использования этого закона при решении различных теоретических и прикладных задач. При втором способе, как правило, задаются первые два момента рассматриваемого многомерного распределения: его математическое ожидание $E(\xi)$ и ковариационная матрица $D(\xi)$.

Оба указанных способа близки между собой, так как нормальный закон распределения полностью определяется его математическим ожиданием и ковариационной матрицей. Однако второй способ является более общим, поскольку получаемые при нем результаты справедливы для любого, в том числе и не нормального закона распределения, имеющего заданные характеристики $E(\xi)$ и $D(\xi)$. В связи с этим мы более подробно остановимся на втором способе.

Если известно математическое ожидание $E(\xi)$, то, заменяя измеренный вектор \tilde{a} величиной $\tilde{a} - E(\xi)$, приходим к несмещенным измерениям, для которых

$$E(\xi) = 0. \quad (3.1.3)$$

В дальнейшем мы, как правило, будем считать, что это условие выполняется,

Покажем, что, не нарушая общности, можно считать закон распределения ошибок ξ собственным (см. § 1.9). При этом его ковариационная матрица $D(\xi)$ оказывается определенно положительной, а ее определитель

$$|D(\xi)| > 0. \quad (3.1.4)$$

Предположим, что закон распределения вектора ξ является не собственным, т. е.

$$|D(\xi)| = 0. \quad (3.1.5)$$

В этом случае ранг матрицы $D(\xi)$

$$R[D(\xi)] = r < n,$$

где n — размерность вектора ξ . При этом, как было показано в § 1.9, с вероятностью единица можно утверждать, что между составляющими вектора ξ существует $k = n - r > 0$ линейных соотношений вида

$$\sum_{i=1}^n b_{ij} \xi_i = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k, \quad (3.1.6)$$

где b_{ij} — некоторые коэффициенты, определяемые элементами матрицы $D(\xi)$. Отсюда, пользуясь зависимостью (2.1.5), находим, что с вероятностью единица

$$\sum_{i=1}^n b_{ij} d_{in} = \sum_{i=1}^n b_{ij} \tilde{d}_i = \tilde{A}_j, \quad j = 1, 2, \dots, k, \quad (3.1.7)$$

где d_{in} и \tilde{d}_i — истинные и измеренные значения составляющих вектора ξ , а \tilde{A}_j — измеренные значения соответствующих линейных комбинаций этих составляющих.

Если пренебречь влиянием ошибок η модели, то из зависимостей (2.1.4) и (3.1.7) следует, что

$$\sum_{i=1}^n b_{ij} F_i(q) = \tilde{A}_j, \quad j = 1, 2, \dots, k. \quad (3.1.8)$$

Пользуясь зависимостями (3.1.7) и (3.1.8), можно выразить k составляющих векторов q и d через остальные составляющие этих векторов. Исключая эти величины из числа определяемых и измеряемых параметров, получим задачу оценки остающихся $m - k$ составляющих вектора q по $r = n - k$ составляющим вектора d .

При этом размерность r вектора измеряемых параметров оказывается равной рангу соответствующей ковариационной матрицы, а закон распределения ошибок измерения — собственным. После подстановки найденных в конечном итоге оценок составляющих вектора q в левые части зависимостей (3.1.8), получаем систему из r уравнений относительно оставшихся k составляющих вектора состояния. Решение этой системы определяет оценки указанных составляющих вектора q .

Описанная процедура может быть осуществлена и в том случае, когда ошибками η модели нельзя пренебречь. При этом оценки остающихся k параметров состояния будут несколько искажены за счет влияния ошибок η на решение системы уравнений (3.1.8).

Простейшей формой ковариационной матрицы является диагональная матрица

$$D(\xi) = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \sigma_2^2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}, \quad (3.1.9)$$

соответствующая отсутствию корреляции между ошибками отдельных измерений. Путем линейного преобразования составляющих вектора измерений

$$d'_i = \frac{\sigma}{\sigma_i} d_i, \quad (3.1.10)$$

где $\sigma > 0$ — некоторая постоянная, можно преобразовать матрицу (3.1.9) к виду

$$D(\xi) = \sigma^2 I. \quad (3.1.11)$$

Преобразование типа (3.1.10) мы в дальнейшем будем называть *нормированием* вектора d . Измерения с ковариационной матрицей (3.1.9) будем называть *некоррелированными неравноточными*, а с матрицей (3.1.11) — *некоррелированными равноточными*.

Некоррелированные ошибки имеют место в тех случаях, когда погрешности отдельных измерений практически не зависят друг от друга. Примером могут служить ошибки, возникающие при считывании экспери-

ментатором показаний различных приборов (или одного прибора в разные моменты времени).

Наряду с некоррелированными ошибками при решении ряда прикладных задач приходится иметь дело с так называемыми систематическими ошибками, для которых характерна определенная закономерность в значениях погрешностей отдельных измерений. Такие ошибки возникают, в частности, когда вектор $d = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ измерений зависит не только от вектора $q = \{q_1, q_2, \dots, q_m\}$ состояния, но и от некоторого другого вектора $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\}$, называемого *вектором мешающих параметров*. В этом случае

$$d = \Phi(q, \alpha). \quad (3.1.12)$$

Вектор α будем считать постоянным в течение данного эксперимента, но меняющимся случайным образом от эксперимента к эксперименту.

Будем полагать математическое ожидание $E(\alpha)$ и ковариационную матрицу $D(\alpha)$ этого вектора заданными. Не нарушая общности, можно считать вектор α несмещенным, т. е. удовлетворяющим условию

$$E(\alpha) = 0. \quad (3.1.13)$$

Полагая α малым, разложим выражение (3.1.12) в ряд Тейлора и ограничимся первыми двумя членами этого разложения. В результате получим

$$d = F(q) + B\alpha, \quad (3.1.14)$$

где $F(q) = \Phi(q, 0)$, а

$$B = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \right)_0 = \left(\frac{\partial d}{\partial \alpha} \right)_0 = \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial \alpha_j} \right)_0 \quad (3.1.15)$$

— матрица частных производных от составляющих вектора $\Phi(q, \alpha)$ по составляющим вектора α , вычисленная для значения $\alpha = 0$.

Отсюда естественно при использовании модели вида

$$d = F(q)$$

под *систематической ошибкой измерений* подразумевать величину

$$\xi = B\alpha. \quad (3.1.16)$$

Из выражения (3.1.13) и зависимости (1.9.23) следует, что эта ошибка удовлетворяет условию несмещенности

$$E(\xi) = 0. \quad (3.1.17)$$

Пользуясь зависимостью (1.9.23), находим выражение для ковариационной матрицы

$$D(\xi) = BD(\alpha)B^T. \quad (3.1.18)$$

Заметим, что матрица B , вообще говоря, зависит от вектора q состояния системы. Поэтому для ее вычисления необходимо использовать какое-либо приближенное значение этого вектора (либо получаемое по априорным данным, либо вычисляемое в процессе оценки состояния системы).

Не нарушая общности, можно считать входящую в выражение (3.1.18) матрицу $D(\alpha)$ единичной. Для этого достаточно, пользуясь результатами § 1.9, заменить вектор α вектором

$$\alpha' = D^{-\frac{1}{2}}(\alpha)\alpha,$$

имеющим единичную ковариационную матрицу.

В том случае, когда

$$D(\alpha) = I, \quad (3.1.19)$$

вектор $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\}$ представляет собой совокупность равнооточных и некоррелированных между собой параметров α_j ($j = 1, 2, \dots, k$), каждому из которых соответствует вектор частных производных

$$f_j^T = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_j} \right)_0 = \left\{ \frac{\partial \Phi_1}{\partial \alpha_j}, \frac{\partial \Phi_2}{\partial \alpha_j}, \dots, \frac{\partial \Phi_n}{\partial \alpha_j} \right\}. \quad (3.1.20)$$

При этом матрица $B = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \right)_0$ может быть представлена в виде

$$B = (f_1 f_2 \dots f_k), \quad (3.1.21)$$

а выражения (3.1.16) и (3.1.18) можно переписать в форме

$$\xi = \sum_{j=1}^k f_j \alpha_j, \quad D(\xi) = \sum_{j=1}^k f_j f_j^T. \quad (3.1.22)$$

Таким образом, систематическая ошибка представляет собой сумму погрешностей, определяемых отдельными мешающими параметрами. Если последние некоррелированы между собой, то ковариационная матрица суммарной ошибки представляет собой сумму ковариационных матриц составляющих ошибок.

Заметим, что произвольная ковариационная матрица D $n \times n$ может быть представлена в виде (3.1.22) при условии $k = n$. Действительно, из неотрицательной определенности матрицы D следует существование матрицы $D^{1/2}$. Отсюда, пользуясь (1.3.14), получим

$$D = D^{1/2} D^{1/2}.$$

Далее, представляя матрицу $D^{1/2}$ в виде совокупности векторов, являющихся ее столбцами,

$$D^{1/2} = (f_1 f_2 \dots f_n),$$

получим

$$D = D^{1/2} (D^{1/2})^T = \sum_{i=1}^n f_i f_i^T. \quad (3.1.23)$$

Однако, как это следует из приведенных ниже результатов, наиболее эффективным представление ковариационной матрицы в виде (3.1.22) становится в том случае, когда число k составляющих систематических ошибок меньше числа n измерений. При этом следует иметь в виду, что ранг построенной таким образом ковариационной матрицы

$$R \left(\sum_{i=1}^k f_i f_i^T \right) \leq k < n. \quad (3.1.24)$$

Действительно, введя обозначение (3.1.21) можно написать, что

$$\sum_{i=1}^k f_i f_i^T = B B^T.$$

Отсюда, пользуясь известным соотношением $R(B B^T) = R(B)$ [41], получим, что

$$R \left(\sum_{i=1}^k f_i f_i^T \right) = R(B).$$

Но ранг матрицы B

$$R(B) \leq k.$$

Таким образом, при $k < n$ закон распределения ошибок ξ , характеризуемый ковариационной матрицей (3.1.22), оказывается несобственным. Для того чтобы избежать этого, обычно представляют ошибки ξ в виде суммы

$$\xi = \xi_0 + \xi_1, \quad (3.1.25)$$

где ξ_0 — некоррелированная составляющая, а ξ_1 систематическая ошибка. При этом корреляция между векторами ξ_0 и ξ_1 отсутствует. Тогда матрица $D(\xi)$ представляет собой сумму матриц вида (3.1.11) и (3.1.22). Если заменить векторы f_j на f_j/σ , то получим

$$D(\xi) = \sigma^2 \left(I + \sum_{j=1}^k f_j f_j^T \right). \quad (3.1.26)$$

Легко убедиться, что при этом закон распределения ошибок ξ оказывается собственным. Действительно, в этом случае квадратичная форма, соответствующая матрице $D(\xi)$, будет представлять собой сумму двух форм с матрицами $\sigma^2 I$ и $\sigma^2 \sum_{j=1}^k f_j f_j^T$. Первая из них положительно, а вторая — неотрицательно определена. Следовательно, суммарная форма и ее матрица $D(\xi)$ положительно определены.

Отметим, что добавление составляющей ξ_0 производится не только по указанным формальным соображениям, но и исходя из существа задачи, так как в любых ошибках измерений всегда содержится некоторая чисто случайная, некоррелированная часть.

§ 3.2. Ошибки измеряемых функций

Рассмотрим вопрос определения ошибок измерения в том случае, когда для определения вектора q используется измеряемая функция вида (2.4.7):

$$p = \Psi(q, r) = \{\Psi_1(q, r), \Psi_2(q, r), \dots, \Psi_l(q, r)\}, \quad (3.2.1)$$

где вектор r условий измерений лежит в заданной области (2.4.8). Эта функция определяет множество воз-

можных измерений Δ , каждый элемент которого $d = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ характеризуется выражением вида

$$d_i = \Psi_{\beta_i}(q, r), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.2.2)$$

Обозначим через $\tilde{\Psi}(q, r)$ измеренное значение функции $\Psi(q, r)$, получаемое в процессе измерения соответствующих векторов d , а через $\xi(q, r)$ — ошибку измерений

$$\xi(q, r) = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_l\} = \tilde{\Psi}(q, r) - \Psi_n(q, r), \quad (3.2.3)$$

где $\Psi_n(q, r)$ — истинное значение измеряемой функции. Функция $\xi(q, r)$ определяет ошибку $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ измерения любого вектора d , принадлежащего множеству Δ ,

$$\xi_i = \xi_{\beta_i}(q, r_i), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.2.4)$$

Она представляет собой случайную функцию, характеризуемую своим математическим ожиданием $E[\xi(q, r)]$, автокорреляционными функциями $K_{jj}(q, r', r'')$, $j = 1, 2, \dots, l$, составляющих случайных функций $\xi_j(q, r)$ и их взаимно корреляционными функциями $K_{ij}(q, r', r'')$, $i, j = 1, 2, \dots, l$.

Если задано математическое ожидание $E[\xi(q, r)]$, то, не нарушая общности, можно считать ошибку $\xi(q, r)$ несмещенной, т. е. принять, что

$$E[\xi(q, r)] = 0. \quad (3.2.5)$$

Для этого достаточно от измерений $\tilde{\Psi}(q, r)$ перейти к измерениям

$$\tilde{\Psi}'(q, r) = \Psi(q, r) - E[\xi(q, r)].$$

Из условия (3.2.5) и зависимости (3.2.4) непосредственно следует несмещенность любого вектора измерений, определяемого равенствами (3.2.2). Ковариационная матрица $D = (D_{ij})$ измеренного значения \tilde{d} этого вектора (или его ошибки ξ) определяется через указанные выше авто- и взаимно корреляционные функции при помощи выражения

$$D_{ij} = K_{\beta_i \beta_j}(q_0, r'_i, r''_j), \quad (3.2.6)$$

где q_0 — некоторое приближенное значение вектора q , используемое при вычислении величин D_{ij} .

В том случае, когда все измерения некоррелированы между собой, отпадает необходимость в определении полных корреляционных функций. Нужно знать лишь дисперсии составляющих случайной функции $\xi(q, r)$, образующие вектор дисперсий $K(q, r) = \{K_1, K_2, \dots, K_l\}$.

При этом дисперсии D_i ошибок измерения составляющих вектора d определяются равенствами

$$D_i = K_{\beta_i}(q, r_i), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.2.7)$$

Систематические ошибки измерения $\Psi(q, r)$ возникают в том случае, когда эта функция зависит от некоторого малого вектора $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\}$ мешающих параметров, постоянного для данного эксперимента, но меняющегося случайным образом от эксперимента к эксперименту. Иначе говоря,

$$\Psi = \Psi(q, r, \alpha). \quad (3.2.8)$$

Разлагая это выражение в ряд Тейлора, и ограничиваясь членами первого порядка малости относительно α , получим

$$\Psi = \Psi(q, r, 0) + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \alpha}\right)_0 \alpha, \quad (3.2.9)$$

где $\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \alpha}\right)_0 = \left(\frac{\partial \Psi_j}{\partial \alpha_i}\right)_0$ — матрица $k \times l$ производных от функций Ψ_j ($j = 1, 2, \dots, l$) по величинам α_i ($i = 1, 2, \dots, k$), вычисленным при $\alpha = 0$ и некотором приближенном значении q_0 вектора q . Если принять в качестве измеряемой функции

$$\Psi(q, r) = \Psi(q, r, 0), \quad (3.2.10)$$

то второй член правой части зависимости (3.2.9) будет определять систематическую ошибку измерения этой функции

$$\xi(q, r) = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \alpha}\right)_0 \alpha. \quad (3.2.11)$$

Отсюда, пользуясь равенством (3.2.4), находим выражение для систематической ошибки ξ измерения

вектора d , определяемого равенством (3.2.2),

$$\xi = B\alpha, \quad (3.2.12)$$

где $B = (B_{ij})$ — матрица $n \times k$ с коэффициентами

$$B_{ij} = \frac{\partial \Psi_{\beta_i}}{\partial \alpha_j}. \quad (3.2.13)$$

§ 3.3. Ошибки модели

Из основного уравнения (2.1.6) следует, что наряду с ошибками ξ измерения на точность решения рассматриваемой задачи влияют также ошибки модели η (методические ошибки), определяемые из равенства (2.1.4).

Основными источниками возникновения этих погрешностей являются:

— неизбежная неполнота используемого вектора q состояния;

— погрешности модельных зависимостей (2.1.3).

Как было указано выше, фактическое состояние любой реальной системы определяется бесконечным или практически бесконечным числом параметров, большинство которых не входит в вектор q . Среди них имеется некоторое число параметров, оказывающих заметное влияние на результаты решения поставленной задачи. Однако включение этих параметров в число оцениваемых может оказаться нецелесообразным из-за связанного с ним чрезмерного усложнения используемых алгоритмов фильтрации. Кроме того, при недостаточности априорных сведений о вероятностных характеристиках ошибок исходных данных излишнее увеличение количества оцениваемых параметров может привести к ухудшению точности (см. ниже).

Таким образом, при решении прикладных задач всегда приходится считаться с наличием значительного числа параметров, влияющих на состояние системы и не включенных в вектор q . Они могут быть условно разделены на две группы:

— параметры, влияние которых на значение вектора d измерений изучено достаточно полно;

— параметры, влияние которых мало изучено.

Из первой группы может быть составлен вектор α мешающих параметров. Соответствующая ему ошибка η модели определяется по формуле, аналогичной зависимости (3.1.16)

$$\eta = B\alpha, \quad (3.3.1)$$

где матрица B находится из выражений (3.1.15) или (3.2.13).

Однако при определении вероятностных характеристик ошибки η могут возникнуть принципиальные трудности. Дело в том, что входящий в правую часть зависимости (3.3.1) вектор α не всегда может рассматриваться как случайный. В ряде случаев он имеет постоянное, хотя и неизвестное значение. В качестве примера рассмотрим движение искусственного спутника Земли. На него в числе прочих факторов влияют флуктуации параметров верхней атмосферы и аномалии гравитационного поля Земли. Первые из них изменяются случайным образом и для анализа их влияния может быть использован аппарат случайных функций. Что касается вторых, то они практически не изменяются в течение достаточно длительного интервала времени и не могут рассматриваться как случайные величины.

Таким образом, вся совокупность мешающих параметров, определяющих ошибку модели, может быть разделена на случайные и постоянные параметры. Для учета влияния первых могут быть использованы результаты, приведенные в предыдущих двух параграфах при анализе систематических ошибок измерения. Что касается вторых, то при рассмотрении их влияния на точность решения поставленной задачи вероятностный подход, по-видимому, неоправдан. В этом случае следует пользоваться другими способами оценки точности конечного результата. Например, задаваясь максимальными возможными значениями составляющих вектора α , оценивать соответствующие максимальные ошибки η .

Как было указано выше, наряду с ошибками модели вида (3.3.1) существуют ошибки, не представимые в такой форме. К их числу относятся ошибки, вызываемые мешающими параметрами, влияние которых на вектор η не поддается учету, а также ошибки, связанные с неточностью зависимости (2.1.3). Эти погрешности либо

представляют собой частные реализации некоторых случайных последовательностей (для единичных измерений) или случайных функций (для множественных измерений), либо не изменяются от эксперимента к эксперименту. В первом случае возникает задача определения вероятностных характеристик этих случайных последовательностей или функций, а во втором — оценки ошибок по их максимуму.

В заключение заметим, что разделение суммарной ошибки модели и измерений на отдельные составляющие и определение основных характеристик этих составляющих представляет собой достаточно трудную и важную задачу, без решения которой невозможен обоснованный выбор алгоритма фильтрации, а также рассмотрение других вопросов оптимизации процесса определения движения. Решение этой задачи требует детального исследования конкретных свойств определяемой системы.

§ 3.4. Оценка точности

При анализе результатов определения состояния некоторой реальной системы исследователя часто интересует не столько точность оценки параметров состояния системы, сколько точность оценки других параметров, для определения которых поставлен эксперимент, и которые мы в дальнейшем будем называть *оцениваемыми параметрами*. Так, например, при определении движения летательного аппарата нас может интересовать не точность оценки составляющих его векторов состояния, в качестве которых обычно используются начальные условия движения, т. е. координаты и составляющие вектора скорости в начальный момент, а точность попадания аппарата в заданную цель.

В общем случае наряду с вектором $q = \{q_1, q_2, \dots, q_m\}$ состояния системы имеется вектор $l = \{l_1, l_2, \dots, l_k\}$ оцениваемых параметров. Этот вектор может включать часть или все составляющие вектора q и даже полностью совпадать с ним. Зависимость между векторами l и q является частью математической модели задачи и может быть записана в виде

$$l = G(q). \quad (3.4.1)$$

Это равенство, вообще говоря, не является точным из-за погрешностей используемой математической модели. Поэтому между истинными значениями q_n и l_n указанных векторов существует зависимость

$$l_n = G(q_n) + \xi, \quad (3.4.2)$$

где ξ — ошибка модельной зависимости (3.4.1). Для этой погрешности остается справедливым все высказанное в предыдущем параграфе относительно ошибок η . В качестве оценки \hat{l} вектора l используются выражения

$$\hat{l} = G(\hat{q}) = \theta(\tilde{d}), \quad (3.4.3)$$

где \hat{q} — оценка вектора состояния, получаемая при помощи алгоритма фильтрации (2.1.8), а

$$\theta(\tilde{d}) = G[\Phi(\tilde{d})] \quad (3.4.4)$$

— алгоритм определения оценки \hat{q} по измерениям \tilde{d} .

Обозначим через

$$v = \hat{q} - q_n, \quad \chi = \hat{l} - l_n \quad (3.4.5)$$

ошибки оценок \hat{q} и \hat{l} . Для определения зависимостей этих ошибок от погрешностей исходных данных ξ , η и ζ , воспользуемся равенствами (2.1.6) и (2.1.8), из которых следует, что

$$\hat{q} = \Phi[F(q_n) + \xi + \eta].$$

Разложим это выражение в ряд Тейлора и ограничимся членами первого порядка малости относительно ξ и η . В результате получим приближенное выражение

$$\hat{q} = \Phi[F(q_n)] + \frac{\partial \Phi}{\partial d}(\xi + \eta), \quad (3.4.6)$$

где $\frac{\partial \Phi}{\partial d} = \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial d_j} \right)$ — матрица $m \times n$ частных производных от составляющих вектора $\Phi = \{\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_m\}$ по составляющим вектора $d = \{d_1, \dots, d_n\}$. С другой стороны, из условия несмещенности (2.1.10) следует, что

$$\Phi[F(q_n)] = q_n. \quad (3.4.7)$$

Отсюда, пользуясь зависимостью (3.4.5), находим выражение для ошибки оценки \hat{q}

$$v = \frac{\partial \Phi}{\partial d} (\xi + \eta). \quad (3.4.8)$$

Это выражение является приближенным, так как оно не учитывает члены высших порядков малости относительно ξ и η . Кроме того, при расчете коэффициентов матрицы $\partial \Phi / \partial d$, как правило, используются не истинные, а какие-либо приближенные (например, измеренные или оценочные) значения составляющих вектора d . Однако в большинстве прикладных задач такая степень приближения оказывается вполне достаточной. Это объясняется, с одной стороны, невысокой точностью знания основных характеристик исходных ошибок ξ и η , а с другой, — отсутствием необходимости очень точного определения ошибки v .

Подставляя выражения (3.4.6) и (3.4.7) в (3.4.3), получим

$$\hat{l} = G \left[q_n + \frac{\partial \Phi}{\partial d} (\xi + \eta) \right].$$

Разложим правую часть этого равенства в ряд Тейлора и ограничимся членами первого порядка малости относительно ошибок ξ и η . В результате получим

$$\hat{l} = G(q_n) + \frac{\partial l}{\partial d} (\xi + \eta), \quad (3.4.9)$$

где

$$\frac{\partial l}{\partial d} = \left(\frac{\partial \theta_i}{\partial d_j} \right) = \frac{\partial G}{\partial I} \frac{\partial \Phi}{\partial I} \quad (3.4.10)$$

— матрица $k \times n$ частных производных от составляющих вектора $\theta = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k\}$ по составляющим вектора $d = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$, а $\partial G / \partial q$ — матрица частных производных от составляющих вектора G по составляющим вектора q . Из зависимостей (3.4.2), (3.4.5) и (3.4.10) находим выражение для ошибки оценки \hat{l}

$$x = \frac{\partial l}{\partial I} (\xi + \eta) - \xi. \quad (3.4.11)$$

Приведенная выше зависимость (3.4.8) является частным случаем этого выражения (при $l = q$, чему

соответствует: $\frac{\partial G}{\partial \mathbf{f}} = \mathbf{I}$, $\frac{\partial \vartheta}{\partial \mathbf{d}} = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{d}}$, $\xi = 0$). Поэтому в дальнейшем мы не будем рассматривать определяемую равенством (3.4.8) ошибку \mathbf{v} и ограничимся исследованием более общего выражения (3.4.11) для ошибки χ .

Предположим, что ошибка модели определяется некоторым вектором $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\beta\}$ мешающих параметров. Тогда в линейном приближении

$$\eta = \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \alpha} \alpha, \quad \xi = \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial \alpha} \alpha, \quad (3.4.12)$$

где $\partial \mathbf{d} / \partial \alpha$ и $\partial \mathbf{l} / \partial \alpha$ — соответственно матрицы $n \times \beta$ и $k \times \beta$ производных от составляющих векторов \mathbf{d} и \mathbf{l} по составляющим вектора α . Подставляя (3.4.12) в (3.4.11), получим

$$\chi = \frac{\partial \vartheta}{\partial \mathbf{f}} \xi + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial \mathbf{d}} \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \alpha} - \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial \alpha} \right) \alpha. \quad (3.4.13)$$

Пусть входящая в это выражение ошибка ξ измерений может быть разделена на две составляющие,

$$\xi = \xi_0 + \xi_1,$$

где ξ_0 — случайная ошибка произвольного вида, а ξ_1 — некоторая систематическая ошибка, определяемая вектором α_1 мешающих параметров. Из зависимостей (3.1.15) и (3.1.16) следует, что

$$\xi_1 = \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \alpha_1} \alpha_1.$$

При этом выражение (3.4.13) принимает вид

$$\chi = \frac{\partial \vartheta}{\partial \mathbf{f}} \xi_0 + \frac{\partial \vartheta}{\partial \mathbf{d}} \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \alpha_1} \alpha_1 + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial \mathbf{d}} \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \alpha} - \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial \alpha} \right) \alpha. \quad (3.4.14)$$

Третий член правой части этого равенства, определяющий влияние ошибок модели, отличается от второго члена, характеризующего влияние систематических ошибок измерения, наличием в скобках величины $-\partial \mathbf{l} / \partial \alpha$. Последняя определяет влияние мешающих параметров на вектор \mathbf{l} оцениваемых параметров. В том случае, когда некоторый мешающий параметр не влияет на указанный вектор, соответствующую ему погрешность можно в равной мере рассматривать как систематическую ошибку измерений либо как ошибку модели. Если заменить в

зависимости (3.4.14) ξ_0 на ξ , а совокупность векторов α_1 и α — одним вектором α , то мы снова получим равенство (3.4.13). При этом вектор α будет представлять собой совокупность мешающих параметров, определяющих ошибки модели и систематические ошибки измерений. Для последних соответствующие частные производные $\partial l / \partial \alpha_j = 0$.

При классической постановке задачи входящие в правую часть выражения (3.4.13) векторы ξ и α рассматриваются как случайные. При этом ошибка χ является случайной и представляет собой линейную комбинацию большого числа случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ и $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\beta$. Отсюда, учитывая центральную предельную теорему теории вероятностей (см. § 1.11) можно ожидать, что при $n \rightarrow \infty$ закон распределения величины χ стремится к нормальному (т. е. является асимптотически нормальным). В математической статистике это утверждение при некоторых предположениях доказывается строго (см. § 1.11). Исходя из этих соображений, при решении прикладных задач, обычно предполагают нормальность закона распределения ошибок χ . Для полной характеристики такого распределения достаточно знать его математическое ожидание $E(\chi)$ и ковариационную матрицу $D(\chi)$.

Полагая величины ξ и α несмещенными ($E(\xi) = E(\alpha) = 0$) и некоррелированными между собой, а их ковариационные матрицы $D(\xi)$ и $D(\alpha)$ заданными, получим из зависимостей (1.9.23) и (3.4.13), что

$$E(\chi) = 0, \quad D(\chi) = XD(\xi)X^T + YD(\alpha)Y^T, \quad (3.4.15)$$

где

$$X = \frac{\partial \theta}{\partial \alpha}, \quad Y = \frac{\partial \theta}{\partial l} \frac{\partial l}{\partial \alpha} - \frac{\partial l}{\partial \alpha}. \quad (3.4.16)$$

Пользуясь значениями $E(\chi)$ и $D(\chi)$, а также допущением о нормальности закона распределения рассматриваемой ошибки, можно вычислить ряд численных характеристик точности оценки \hat{l} . Так, например, вероятность того, что ошибка χ лежит в заданной области Δ , находится по формуле

$$P(\chi \in \Delta) = \int_{\Delta} f(\chi) d\chi, \quad (3.4.17)$$

где $f(\chi)$ — плотность распределения величины χ , определяемая при помощи выражений (1.10.1) и (3.4.15), а интегрирование в правой части ведется по всем составляющим вектора $\chi = \{\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_k\}$ внутри области Δ .

В ряде случаев корреляция между ошибками составляющих вектора l не представляет интереса. При этом в задаче оценки точности каждая из этих составляющих может рассматриваться отдельно, как некоторый скалярный оцениваемый параметр l . Пусть

$$\hat{l} = \theta(\tilde{d}) \quad (3.4.18)$$

— оценка этого параметра, определяемая при помощи алгоритма фильтрации $\theta(\tilde{d})$, а χ — ошибка этой оценки. При l — скалярном входящие в выражения (3.4.15) матрицы X и Y становятся строками $X = (x_1 x_2 \dots x_n)$ и $Y = (y_1 y_2 \dots y_\beta)$, составляющие которых определяются равенствами

$$\left. \begin{aligned} x_i &= \frac{\partial \theta}{\partial d_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ y_j &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial \theta}{\partial d_i} \frac{\partial d_i}{\partial a_j} - \frac{\partial l}{\partial a_j}, \quad j = 1, 2, \dots, \beta. \end{aligned} \right\} \quad (3.4.19)$$

Тогда равенство (3.4.13) принимает вид

$$\chi = \sum_{i=1}^n x_i \xi_i + \sum_{j=1}^{\beta} y_j \alpha_j, \quad (3.4.20)$$

а равенство (3.4.15)

$$\left. \begin{aligned} E(\chi) &= 0, \\ D(\chi) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n D(\xi_i, \xi_j) x_i x_j + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\beta} D(\alpha_i, \alpha_j) y_i y_j, \end{aligned} \right\} \quad (3.4.21)$$

где $D(\xi_i, \xi_j)$ и $D(\alpha_i, \alpha_j)$ — ковариации (корреляционные моменты) между величинами, стоящими в скобках.

В том случае, когда случайные векторы ξ и α некоррелированы, выражение (3.4.21) принимает вид

$$D(\chi) = \sum_{i=1}^n D(\xi_i) x_i^2 + \sum_{j=1}^{\beta} D(\alpha_j) y_j^2. \quad (3.4.22)$$

Путем нормирования векторов ξ и α можно перейти к соответствующим векторам с единичными дисперсиями. При этом

$$D(\chi) = \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{j=1}^B y_j^2. \quad (3.4.23)$$

При решении ряда прикладных задач может возникнуть необходимость определения предельной ошибки χ_{\max} оценки \hat{l} . Эта величина обычно отыскивается с некоторой надежностью H . Под последней подразумевается вероятность осуществления неравенства

$$|\chi| \leq \chi_{\max}, \quad (3.4.24)$$

т. е.

$$H = P(|\chi| \leq \chi_{\max}). \quad (3.4.25)$$

Полагая на основе приведенных выше соображений закон распределения ошибки χ нормальным, получим, что

$$H = \frac{2}{\sqrt{2\pi D(\chi)}} \int_0^{\chi_{\max}} e^{-\frac{x^2}{2D(\chi)}} dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\lambda} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(\lambda), \quad (3.4.26)$$

где $\lambda = \frac{\chi_{\max}}{\sqrt{D}}$, а $\Phi(\lambda)$ — табулированная функция.

Ниже дана таблица некоторых значений этой функции (полная таблица этой функции может быть найдена в любом курсе теории вероятностей):

λ	2	2,5	3	3,5	4	4,5
$H = \Phi(\lambda)$	0,954	0,988	0,997	0,9995	0,99994	0,999994

По этой таблице, задаваясь некоторым значением надежности H , можно найти соответствующую величину λ и определить максимальную ошибку

$$\chi_{\max} = \lambda(H) \sqrt{D(\chi)}. \quad (3.4.27)$$

При решении ответственных прикладных задач обычно принимают $\lambda = 3$, чему соответствует $H = 0,997$.

Однако в задачах, требующих пониженной надежности, можно пользоваться меньшим значением λ ($\lambda = 2 \div 2,5$). С другой стороны, при решении некоторых*) задач величину λ приходится увеличивать. Из таблицы видно, что даже сравнительно небольшое увеличение λ (и соответственно χ_{\max}) приводит к резкому увеличению надежности неравенства (3.4.24).

Зависимость вида (3.4.27) может быть получена и без допущения о нормальности закона распределения ошибок χ . Для этого достаточно воспользоваться неравенством Чебышева (1.8.12), из которого непосредственно следует, что при определении χ_{\max} выражением (3.4.27) надежность осуществления неравенства (3.4.24)

$$N \geq 1 - \frac{1}{\lambda^2} \quad (3.4.28)$$

для произвольного закона распределения. Получаемое при этом значение надежности оказывается сильно заниженным по сравнению с результатами расчета по формуле (3.4.26).

В заключение заметим, что приведенные выше зависимости базируются на допущении о возможности определения погрешности оценки \hat{t} при помощи линейного выражения (3.4.11). Это справедливо в том случае, когда линейные члены разложений (3.4.6) и (3.4.9) существенно превосходят суммы отброшенных нелинейных членов. Однако в тех случаях, когда все элементы хотя бы одной из матриц $\partial\Phi/\partial d$, $\partial G/\partial q$ или их произведения обращаются в нули, или некоторые из этих элементов не существуют, использование линейной зависимости (3.4.11) становится недопустимым. Примером может служить оценка точности определения расстояния R от конца траектории некоторого летательного аппарата до заданной цели. Обозначим через $r_k = \{x_k, y_k, z_k\}$ совокупность прямоугольных координат конечной точки траектории, а через $r_{\Pi} = \{x_{\Pi}, y_{\Pi}, z_{\Pi}\}$ — соответствующие координаты цели. Очевидно, что

$$R = \sqrt{(x_k - x_{\Pi})^2 + (y_k - y_{\Pi})^2 + (z_k - z_{\Pi})^2}. \quad (3.4.29)$$

*) В частности, когда от правильности решения зависит человеческая жизнь (например при расчетах, обеспечивающих возвращение обитаемого космического аппарата на Землю).

В окрестности номинальной траектории, характеризуемой равенством $r_k = r_{ц}$, зависимость (3.4.29) R от r_k оказывается существенно нелинейной, что исключает возможность использования линейной теории при оценке точности определения величины R .

В подобных случаях необходимо или перейти к оценке точности по параметрам, допускающим линеаризацию, или исследовать нелинейные зависимости между ошибками. В частности, при оценке точности попадания летательного аппарата в цель вместо суммарного отклонения R от цели рассматривают отклонения каждой из координат x_k , y_k , z_k в отдельности, для которых используются соответствующие линейные выражения.

§ 3.5. Неклассический подход к оценке точности

До сих пор при оценке ошибок определения состояния и движения системы мы считали погрешности ξ , η , ζ исходных данных случайными величинами с заданными вероятностными характеристиками (законами распределения, математическими ожиданиями, ковариационными матрицами и т. п.). Однако в реальных условиях, как правило, оказывается, что действительные значения вероятностных характеристик ошибок исходных данных не совпадают с их принятыми значениями.

В связи с этим возникает задача определения вероятностных характеристик ошибок по результатам измерений. Эта задача не может быть решена до конца, поскольку количество подлежащих определению характеристик значительно больше числа n измерений. Так, например, количество составляющих вектора математического ожидания ошибок равно n , а число различных элементов ковариационной матрицы ошибок составляет $n(n+1)/2$. Поэтому обычно используется некоторая форма задания этих характеристик, зависящая от сравнительно небольшого числа свободных параметров, значения которых оцениваются по данным измерений. Так например, при решении задачи по методу наименьших квадратов (см. главу V) предполагается, что математическое ожидание и ковариационная матрица ошибок удовлетворяет условиям (5.1.1). Входящий в эти

условия коэффициент σ^2 оценивается по результатам измерений (см. § 5.8).

Такой подход, при котором считаются заданными значения или форма записи вероятностных характеристик ошибок, мы будем в дальнейшем называть *классическим*. На практике часто оказывается, что используемые при этом основные допущения в действительности не выполняются. Кроме того, как было указано в § 3.3, наряду со случайными составляющими ошибок ξ , η , ζ следует учитывать постоянные (но неизвестные) погрешности, с которыми, строго говоря, нельзя оперировать как со случайными величинами. Это в первую очередь относится к ошибкам модели. В результате возникают дополнительные погрешности определения вектора оцениваемых параметров, которые, как будет показано ниже, часто становятся определяющими. При этом классические методы приводят к неоправданно оптимистическим оценкам точности, что при решении ряда прикладных задач совершенно недопустимо. В частности, это имеет место в тех случаях, когда результаты определения движения используются в целях управления. Если фактическая точность определения движения оказывается в действительности хуже предполагаемой, то конечная цель управления может быть вообще не достигнута или достигнута с неудовлетворительной точностью.

Для примера рассмотрим задачу управления полетом летательного аппарата, предназначенного для попадания в заданную цель. Предположим, что первоначальная траектория аппарата не обеспечивает требуемого попадания. В процессе управления полетом представляется возможным произвести необходимую коррекцию этой траектории. Для этого нужно предварительно определить действительное движение аппарата с точностью, обеспечивающей решение поставленной задачи. Пока эта точность не будет достигнута, корректировать движение нельзя, так как в результате траектория может быть даже ухудшена. Очевидно, что при этом неоправданно оптимистическая оценка точности определения движения недопустима. В этих условиях значительно меньшую опасность представляет получение заниженных оценок точности в определении движения.

В связи с этим, в последние годы появился ряд работ [34, 50], для которых характерен новый, *неклассический* подход к задаче оценки точности. При этом считается заданным некоторое множество M , которому принадлежат возможные значения ошибок исходных данных или характеристик их распределения

$$\gamma \in M, \quad (3.5.1)$$

где $\gamma = \{\xi, \eta, \zeta\}$ — совокупность ошибок измерения и модели.

Ставится задача вычисления наихудших значений характеристик точности при этом условии. Пусть K — некоторая скалярная характеристика, используемая при оценке точности. Мы будем называть ее *минимизируемой*, если с точки зрения решаемой задачи оптимальным является возможное уменьшение величины K , и *максимизируемой*, если оптимально возможное увеличение этой величины. Пример минимизируемой характеристики — дисперсия некоторого оцениваемого параметра. Пример максимизируемой характеристики — вероятность попадания погрешности χ в заданную область. Для минимизируемой характеристики ставится задача определения ее *гарантированного* значения

$$K_{\text{гар}} = \max_{\gamma \in M} K, \quad (3.5.2)$$

а для максимизируемой характеристики

$$K_{\text{гар}} = \min_{\gamma \in M} K, \quad (3.5.3)$$

где \max или \min отыскиваются при условии (3.5.1).

Полученное таким образом значение $K_{\text{гар}}$ используется при оценке точности решения рассматриваемой задачи. Такой подход во многих случаях предпочтительнее указанного выше классического подхода, так как он лучше соответствует реальным условиям решения ряда прикладных задач и позволяет существенно повысить надежность оценки точности, что для управляемых систем равносильно увеличению надежности управления.

Простейший способ задания множества M — это задание векторов $a = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ и $b = \{b_1, b_2, \dots, b_\beta\}$, составленных, соответственно, из максимумов модулей составляющих вектора ξ ошибок измерения и вектора α

мешающих параметров. При этом учитываются как случайные, так и неслучайные составляющие ошибок исходных данных. Таким образом,

$$\left. \begin{aligned} |\xi_i| &\leq a_i, & i = 1, 2, \dots, n; \\ |\alpha_j| &\leq b_j, & j = 1, 2, \dots, \beta. \end{aligned} \right\} \quad (3.5.4)$$

В качестве гарантированной характеристики точности принимается максимальное значение χ_{\max} модуля ошибки χ некоторого скалярного оцениваемого параметра l :

$$\chi_{\max} \geq |\chi| \quad \text{при} \quad \gamma \in M. \quad (3.5.5)$$

Из зависимостей (3.4.20) и (3.5.4) следует, что

$$\chi_{\max} = \sum_{i=1}^n a_i |x_i| + \sum_{j=1}^{\beta} b_j |y_j|. \quad (3.5.6)$$

При наличии нескольких оцениваемых параметров l_j ($j = 1, 2, \dots, k$) определяется несколько соответствующих гарантированных критериев $\chi_{j\max}$ точности.

Не нарушая общности, можно считать все составляющие векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} равными единице. Для этого достаточно нормировать векторы \mathbf{d} и $\mathbf{\alpha}$, перейдя от составляющих d_i ($i = 1, 2, \dots, n$) вектора \mathbf{d} к величинам d_i/a_i , а от составляющих α_j ($j = 1, 2, \dots, k$) вектора $\mathbf{\alpha}$ — к величинам α_j/b_j . В результате выражение (3.5.6) принимает вид

$$\chi_{\max} = \sum_{i=1}^n |x_i| + \sum_{j=1}^{\beta} |y_j|. \quad (3.5.7)$$

Другой способ задания множества M заключается в наложении некоторых ограничений на значения составляющих векторов математических ожиданий $E(\xi)$ и $E(\alpha)$, а также ковариационных матриц $D(\xi)$ и $D(\alpha)$.

Рассмотрим для примера случай наличия только ошибок измерения ξ , удовлетворяющих следующим условиям:

$$\left. \begin{aligned} E(\xi) &= 0, \quad D(\xi_i) \leq \mu_i^2, & i = 1, 2, \dots, n, \\ |K(\xi_i, \xi_j)| &= \frac{|D(\xi_i, \xi_j)|}{\sqrt{D(\xi_i) D(\xi_j)}} \leq f_{ij}, & i, j = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \right\} \quad (3.5.8)$$

где $D(\xi_i)$ — дисперсия составляющей ξ_i случайной ошибки ξ , $D(\xi_i, \xi_j)$ и $K(\xi_i, \xi_j)$ — соответственно корреляционный момент и коэффициент корреляции между величинами ξ_i и ξ_j , а μ_i^2 и f_{ij} — некоторые положительные числа, определяющие границы возможных значений соответствующих вероятностных характеристик (т. е. множество M).

В качестве характеристики точности используется дисперсия $D(\hat{l})$ оценки \hat{l} некоторого скалярного параметра l . Отсюда следует, что в качестве гарантированной характеристики точности можно принять величину

$$K_{\text{гар}} = \max_{\xi \in M} D(\hat{l}). \quad (3.5.9)$$

Выражение (3.4.20) для ошибки χ оценки \hat{l} принимает в рассматриваемом случае вид

$$\chi = \sum_{i=1}^n x_i \xi_i. \quad (3.5.10)$$

Отсюда, пользуясь зависимостью (1.9.23), находим

$$D(\hat{l}) = D(\chi) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j K(\xi_i, \xi_j) \sqrt{D(\xi_i) D(\xi_j)}. \quad (3.5.11)$$

Далее, учитывая условия (3.5.8), находим выражение для гарантированного критерия точности (3.5.9).

$$K_{\text{гар}} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |x_i| |x_j| \mu_i \mu_j f_{ij}. \quad (3.5.12)$$

Это выражение существенно упрощается, когда величины f_{ij} задаются в виде

$$f_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ k \leq 1 & \text{при } i \neq j. \end{cases} \quad (3.5.13)$$

При этом условия (3.5.8) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} E(\xi) = 0, \quad D(\xi_i) \leq \mu_i^2, \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ |K(\xi_i, \xi_j)| \leq k \leq 1, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \right\} \quad (3.5.14)$$

В этом случае равенство (3.5.12) можно представить в виде

$$K_{\text{гар}} = \max_{\xi \in M} D(\hat{l}) = \\ = k \left(\sum_{i=1}^n |\mu_i x_i| \right)^2 + (1-k) \sum_{i=1}^n \mu_i^2 x_i^2. \quad (3.5.15)$$

При этом отпадает необходимость в двойном суммировании, что существенно облегчает вычисления. Кроме того, равенство (3.5.15) нам понадобится в дальнейшем при исследовании некоторых свойств гарантированных оценок точности.

Для доказательства представим выражение (3.5.11) в виде

$$D(\hat{l}) = \sum_{i,j=1}^n x_i x_j K(\xi_i, \xi_j) \sqrt{D(\xi_i) D(\xi_j)} + \sum_{i=1}^n x_i^2 D(\xi_i),$$

где первая сумма берется по всем парам индексов i, j , удовлетворяющих условию $i \neq j$. Отсюда, пользуясь условием (3.5.14), получим

$$D(\hat{l}) = \sum_{i,j=1}^n x_i x_j K(\xi_i, \xi_j) \sqrt{D(\xi_i) D(\xi_j)} + \\ + (k+1-k) \sum_{i=1}^n x_i^2 D(\xi_i) \leq \\ \leq k \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |\mu_i x_i| |\mu_j x_j| + (1-k) \sum_{i=1}^n \mu_i^2 x_i^2 = \\ = k \left(\sum_{i=1}^n |\mu_i x_i| \right)^2 + (1-k) \sum_{i=1}^n \mu_i^2 x_i^2.$$

Покажем теперь, что существуют такие ошибки ξ_i , удовлетворяющие условиям (3.5.14), при которых определяемый выражением (3.5.15) $\max D(\hat{l})$ достигается. Для этого рассмотрим вектор ξ , составляющие которого ξ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) находятся из выражений

$$\xi_i = |\mu_i| \sqrt{k} \alpha \operatorname{sign} x_i + |\mu_i| \sqrt{1-k} \xi'_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где α и ξ'_i — случайные величины, удовлетворяющие условиям

$$E(\alpha) = E(\xi'_i) = 0, \quad D(\alpha) = D(\xi'_i) = 1,$$

$$D(\alpha, \xi'_i) = D(\xi'_i, \xi'_j) = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Пользуясь зависимостями (1.9.24) и (1.9.25), легко показать, что в этом случае вектор ξ удовлетворяет условиям (3.5.14). При этом выражение (3.5.10) принимает вид

$$\chi = \sum_{i=1}^n |\mu_i| (|x_i| \sqrt{k} \alpha + x_i \sqrt{1-k} \xi'_i).$$

В результате, пользуясь зависимостью (1.9.25), получим

$$D(\chi) = k \left(\sum_{i=1}^n |\mu_i x_i| \right)^2 + (1-k) \sum_{i=1}^n \mu_i^2 x_i^2.$$

Не нарушая общности, можно считать, что все $\mu_i^2 = 1$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Для этого достаточно соответствующим образом нормировать вектор d . В результате выражение (3.5.15) принимает вид

$$K_{\text{гap}} = \max_{\xi \in M} D(\hat{l}) = k \left(\sum_{i=1}^n |x_i| \right)^2 + (1-k) \sum_{i=1}^n x_i^2. \quad (3.5.16)$$

Соотношения (3.5.15) и (3.5.16) могут быть, в частности, использованы в том случае, когда никаких ограничений на коэффициенты корреляции между составляющими вектора ξ не налагается, т. е. корреляция между этими составляющими полагается произвольной. Из зависимости (1.9.19) следует, что при этом $k = 1$, а выражения (3.5.15) и (3.5.16) принимают вид

$$K_{\text{гap}} = \max_{\xi \in M} D(\hat{l}) = \left(\sum_{i=1}^n \mu_i |x_i| \right)^2 \quad (3.5.17)$$

$$K_{\text{гap}} = \max_{\xi \in M} D(\hat{l}) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i| \right)^2. \quad (3.5.18)$$

Полученные результаты могут быть непосредственно обобщены на случай наличия ошибок η и ξ модели, опре-

деляемых вектором α мешающих параметров, некоррелированным с вектором ξ . Если предположить, что на вероятностные характеристики этого вектора наложены ограничения вида (3.5.8), то из (3.4.21) могут быть получены выражения для $K_{\text{гип}}$, аналогичные выражениям (3.5.12), (3.5.15), (3.5.16), (3.5.17) и (3.5.18). При этом к правым частям этих равенств добавляются соответствующие члены, зависящие от коэффициентов y_j ($j = 1, 2, \dots, \beta$) и чисел, ограничивающих вероятностные характеристики вектора α .

Ограничения на вероятностные характеристики векторов ξ и α могут быть также наложены путем задания некоторых граничных значений их математических ожиданий и ковариационных матриц. Пусть $a = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ и $b = \{b_1, b_2, \dots, b_\beta\}$ — заданные векторы с неотрицательными составляющими, а A и B — симметричные, положительно определенные матрицы $n \times n$ и $\beta \times \beta$. Множество M возможных ошибок задается условиями

$$\left. \begin{aligned} |E(\xi_i)| &\leq a_i, & i &= 1, 2, \dots, n; \\ |E(\alpha_j)| &\leq b_j, & j &= 1, 2, \dots, \beta; \\ D(\xi) &\leq A, & D(\alpha) &\leq B, \end{aligned} \right\} \quad (3.5.19)$$

где $E(\xi_i)$ и $E(\alpha_j)$ — математические ожидания соответствующих составляющих векторов ξ и α , а приведенные матричные неравенства равносильны условиям неотрицательной определенности матриц $A - D(\xi)$ и $B - D(\alpha)$. При этом максимальные математические ожидания определяются не только случайными, но и неслучайными составляющими соответствующих ошибок.

Из этих условий, а также зависимостей (3.4.20) и (3.4.21) непосредственно следует, что математическое ожидание $E(\chi)$ и дисперсия $D(\chi)$ ошибки оценки некоторого скалярного параметра χ удовлетворяют неравенствам

$$\left. \begin{aligned} |E(\chi)| &\leq E_{\max} = \sum_{i=1}^n a_i |x_i| + \sum_{j=1}^{\beta} b_j |y_j|, \\ D(\chi) &\leq D_{\max} = XAX^T + YBY^T. \end{aligned} \right\} \quad (3.5.20)$$

Полагая ошибку χ случайной, нормально распределенно величиной, можно для нее построить наихудший

нормальный закон распределения, определяемый полученными значениями E_{\max} и D_{\max} . Подставляя этот закон в зависимости (3.4.25), можно определить наибольшее гарантированное значение максимальной ошибки χ_{\max} при заданной надежности H или, наоборот, — наименьшее гарантированное значение H при заданном χ_{\max} . Связь между этими гарантированными величинами характеризуется зависимостью

$$H = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_{\max}}} \left\{ \int_{-\chi_{\max}}^{E_{\max}} e^{-\frac{(x-E_{\max})^2}{2D_{\max}}} dx + \int_{E_{\max}}^{\chi_{\max}} e^{-\frac{(x-E_{\max})^2}{2D_{\max}}} dx \right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \int_0^{\lambda+\lambda_1} e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \int_0^{\lambda-\lambda_1} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right\} = \frac{\Phi(\lambda+\lambda_1) + \Phi(\lambda-\lambda_1)}{2},$$
(3.5.21)

где

$$\lambda = \frac{\chi_{\max}}{\sqrt{D_{\max}}}, \quad \lambda_1 = \frac{E_{\max}}{\sqrt{D_{\max}}}, \quad (3.5.22)$$

а функция $\Phi(\lambda)$ определяется выражением (3.4.26).

При упрощенных инженерных расчетах иногда принимают, что

$$\chi_{\max} = E_{\max} + \lambda \sqrt{D_{\max}}, \quad H = \Phi(\lambda). \quad (3.5.23)$$

Легко убедиться в том, что при этом мы получаем завышенное значение χ_{\max} для заданной надежности H или, наоборот, — заниженную надежность при заданной χ_{\max} .

Приведенные выше результаты могут быть непосредственно обобщены на случай определения точности оценки некоторого многомерного вектора $l = \{l_1, l_2, \dots, l_k\}$. При этом вычисляется гарантированная вероятность попадания ошибки $\chi = \{\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_k\}$ в заданную область Δ , для чего в правой части формулы (3.4.17) используется нормальная плотность распределения $f(\chi)$ с математическим ожиданием

$$E_{\max} = \{E_{\max_1}, E_{\max_2}, \dots, E_{\max_k}\} \quad (3.5.24)$$

и ковариационной матрицей D_{\max} . Составляющие E_{\max_j} ($j = 1, 2, \dots, k$) вектора E_{\max} вычисляются по формуле (3.5.20) для соответствующих ошибок χ_j . Матрица D_{\max}

находится по формуле, аналогичной зависимости (3.5.20)

$$D_{\max} = XAX^T + YBY^T, \quad (3.5.25)$$

в которой матрицы X и Y определяются из выражений (3.4.16).

В заключение укажем один из способов задания матриц A и B в зависимостях (3.5.19) и (3.5.20). Для этой цели используются линейные преобразования векторов d и α в соответствующие векторы d' и α' , при которых матрицы $D(\xi')$ и $D(\alpha')$ становятся диагональными (см. § 1.9). В новых переменных в качестве матриц $A' \geq D(\xi')$ и $B' \geq D(\alpha')$ могут быть взяты диагональные матрицы, все элементы которых не меньше соответствующих элементов матриц $D(\xi')$ и $D(\alpha')$. Отсюда обратным преобразованием к переменным d и α находим матрицы A и B .

§ 3.6. Оптимизация стратегии определения состояния системы

При организации процесса определения состояния реальной системы возникает ряд задач оптимизации. Основными из них являются:

- выбор оптимального алгоритма фильтрации,
- выбор оптимального состава измерений,
- выбор оптимальной математической модели.

Выбор оптимального алгоритма фильтрации. Исходными данными для решения этой задачи служат:

— заданная структура векторов $q = \{q_1, q_2, \dots, q_m\}$, $d = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$, $l = \{l_1, l_2, \dots, l_k\}$, т. е. перечень параметров состояния системы, а также измеряемых и оцениваемых параметров.

— математическая модель задачи, описываемая зависимостями (2.1.3) и (3.4.1);

— некоторые сведения о характеристиках возможных ошибок ξ , η , ζ измерений и моделей;

— критерий оптимальности, по которому проводится оптимизация;

— различные дополнительные ограничения, налагаемые на алгоритм фильтрации (по простоте, быстродействию, виду используемых зависимостей и т. п.).

По этим данным требуется выбрать оптимальный алгоритм (2.1.8) фильтрации, служащий для определения оценки \hat{q} вектора состояния по измерениям \hat{d} .

Выбор оптимального состава измерений. В этой задаче полагаются заданными:

— векторы q и l , а также модельная зависимость (3.4.1) и некоторые характеристики ошибки ξ этой зависимости;

— множество Δ возможных измерений, к которому принадлежит любой используемый вектор d измерений

$$d \in \Delta; \quad (3.6.1)$$

— способ построения модельной зависимости $d = F(q)$ для любого вектора d , принадлежащего множеству Δ ;

— способ определения некоторых характеристик ошибок ξ , η измерений и модели при любом выборе вектора d , удовлетворяющем условию (3.6.1).

— алгоритм фильтраций (2.1.8)

— критерий оптимальности.

По этим данным требуется выбрать используемый вектор d измерений.

Заметим, что множество Δ возможных измерений может быть конечным или бесконечным. В последнем случае для его определения обычно используются измеряемые функции вида (2.4.5) или (2.4.7). В этом случае, как было показано в § 3.2, задание соответствующих авто- и взаимно корреляционных функций позволяет определить ковариационную матрицу измеренного значения \tilde{d} для любого вектора d , удовлетворяющего условию (3.6.1).

Выбор математической модели. В этой задаче используются следующие исходные данные:

— векторы d и l ;

— характеристики ошибок ξ измерений;

— вектор q , или некоторое множество Q , из которого он может быть выбран,

$$q \in Q; \quad (3.6.2)$$

— способ построения алгоритма фильтрации (2.1.8) при любом выборе вектора q ;

— множество возможных математических моделей, для каждой из которых могут быть построены соответствующие зависимости (2.1.3) и (3.4.1), а также определены характеристики ошибок η и ξ этих зависимостей;

— критерий оптимальности.

По этим данным выбирается вектор q и используемая математическая модель.

Указанные задачи оптимизации могут решаться не только раздельно, но и совместно в различных возможных комбинациях. В дальнейшем все задачи такого типа мы будем называть задачами выбора *оптимальной стратегии* определения состояния системы.

§ 3.7. Критерии оптимальности при классической постановке задачи

При решении перечисленных выше задач оптимизации большое значение имеет удачный выбор используемого критерия оптимальности. При этом можно, вообще говоря, исходить из различных соображений. Так, например, можно минимизировать время, затрачиваемое на проведение необходимых расчетов, стоимость измерений в каком-либо смысле (денежную, энергетическую и т. д.), оптимизировать условия выполнения вычислений на счетных машинах и т. п. При решении ответственных прикладных задач обычно руководствуются соображениями максимального повышения точности получаемой оценки основных параметров системы. В этом случае оптимизируемый критерий представляет собой некоторую характеристику K точности оценки \hat{l} вектора l оцениваемых параметров. Задача сводится к отысканию экстремального (минимального, максимального или минимаксного значения этой характеристики). При этом отыскивается абсолютный экстремум. В случае неединственности последнего отыскивается одно из возможных оптимальных решений.

В простейшем случае нас может интересовать точность оценки какого-нибудь одного скалярного параметра l . Так, например, это будет иметь место тогда, когда целью эксперимента является определение некоторой физической константы (скорости света, массы планеты и т. п.). При этом выбирается некоторая скалярная

характеристика $K(\hat{l})$ точности оценки \hat{l} . В классической постановке при наличии достаточных сведений об ошибках ξ, η, ζ исходных данных и заданной стратегии определения состояния системы, т. е. при заданных условиях проведения эксперимента и обработки получаемых данных (о составе измерений, математической модели, алгоритме фильтрации), величина $K(\hat{l})$ определяется однозначно. Задача оптимизации сводится к выбору стратегии, обеспечивающей достижение абсолютного минимума или максимума величины $K(\hat{l})$ (в зависимости от того, является ли она минимизируемой или максимизируемой). Построенные таким образом критерии оптимальности мы будем называть *одномерными*.

В более сложных задачах исследователя интересует точность оценки конечного числа параметров, образующих вектор $l = \{l_1, l_2, \dots, l_k\}$. При этом есть несколько способов построения критерия оптимальности.

Один из них основан на использовании некоторой скалярной величины $K(l)$, одновременно характеризующей точность оценки всех составляющих вектора l , и нахождении экстремального значения этой величины. Такой критерий оптимальности мы будем в дальнейшем называть *многомерным*. Однако использование многомерных критериев не всегда представляется возможным. Это связано, с одной стороны, с трудностью определения величины $K(l)$, а с другой, — со сложностью решения соответствующих задач оптимизации. В связи с этим, при решении ряда прикладных задач используются критерии оптимальности, базирующиеся на вычислении величин K_j ($j = 1, 2, \dots, k$), каждая из которых характеризует точность оценки соответствующего параметра l_j . При этом в простейшем случае для оценки каждого параметра K_j строится своя оптимальная стратегия, базирующаяся на соответствующем одномерном критерии оптимальности, т. е. на нахождении экстремального значения величины K_j . Такой подход наиболее прост с точки зрения решения задач оптимизации, однако он, вообще говоря, связан с увеличением используемого состава измерений и многократным повторением расчетов, необходимых для осуществления алгоритмов фильтраций,

В некоторых задачах представляется возможным из всех оцениваемых параметров l_j ($j = 1, 2, \dots, k$) выделить основной l_1 , характеристика K_1 точности которого оптимизируется. При этом на величины характеристик точности остальных параметров налагаются определенные ограничения. Так, например, при использовании неотрицательных минимизируемых характеристик K_j точности отыскивается $\min K_1$ при условии, что

$$K_j \leq M_j, \quad j = 2, 3, \dots, k, \quad (3.7.1)$$

где M_j — некоторые заданные положительные числа.

В случае, когда все составляющие вектора $l = \{l_1, l_2, \dots, l_k\}$ равноправны, в качестве критерия оптимальности может быть использовано условие достижения минимума наибольшей из величин K_j (или максимума наименьшей из этих величин). Иначе говоря, для минимизируемой характеристики точности отыскивается

$$\min_j \max_j K_j, \quad (3.7.2)$$

а для максимизируемой характеристики —

$$\max_i \min_i K_j, \quad (3.7.3)$$

где \max или \min берутся по всем возможным значениям индекса j .

В некоторых задачах интерес представляет точность оценки любого из параметров l , удовлетворяющих условию

$$l \in L, \quad (3.7.4)$$

где L — заданное бесконечное множество оцениваемых параметров. Так, например, при определении гравитационного поля Земли нас интересует точность оценки составляющих вектора ускорения земного тяготения в произвольной точке околоземного пространства. Обозначим через $K(l)$ характеристику точности оценки некоторого параметра l , удовлетворяющего условию (3.7.4). Будем, для определенности, считать эту характеристику минимизируемой и положим, что среди всех параметров l может быть выделен основной l_1 . Тогда в качестве критерия оптимальности может быть принято отыскание $\min K(l_1)$ при условии, что для всех остальных парамет-

ров

$$K(l) \leq M(l), \quad l \neq l_1, \quad (3.7.5)$$

где $M(l)$ — заданные максимальные значения соответствующих характеристик точности.

Если все оцениваемые параметры l равноправны, то в качестве критерия оптимальности может быть использовано отыскание

$$\min_{l \in L} \max K(l), \quad (3.7.6)$$

где \max берется по всем l , удовлетворяющим условию (3.7.4).

Критерий (3.7.6) представляет собой пример *универсального критерия оптимальности*, характеризуемого одновременной оптимизацией точности оценки бесконечного числа параметров, принадлежащих к множеству L . Ниже будут даны примеры других универсальных критериев оптимальности.

При выборе используемых критериев оптимальности следует исходить из существа решаемой задачи, характера имеющейся информации об ошибках исходных данных, а также из возможностей получения эффективного решения рассматриваемой задачи оптимизации. Следует избегать использования формальных критериев, не отвечающих существу задач даже в том случае, когда они обеспечивают получение эффективного решения, так как полученные на их основе результаты могут оказаться ложными.

Рассмотрим некоторые, применяемые на практике точностные критерии оптимальности, используемые при классической постановке задачи, когда ошибки исходных данных считаются случайными и сведения о вероятностных характеристиках этих ошибок задаются некоторыми равенствами. В том случае, когда эти сведения являются наиболее полными и известны законы распределения ошибок ξ, η, ζ , представляется возможным, исходя из равенства (3.4.11), определить закон распределения ошибки $\chi = \hat{l} - l_n$ и пользуясь этим законом строить различные критерии оптимальности.

В частности, при одном скалярном оцениваемом параметре l можно, пользуясь зависимостью (3.4.25) между максимальным значением χ_{\max} ошибки оценки \hat{l} и

надежностью этой величины H , построить два одномерных критерия оптимальности. Первый из них заключается в отыскании

$$\min \chi_{\max} \text{ при } H = H_1, \quad (3.7.7)$$

а второй — в отыскании

$$\max H \text{ при } \chi_{\max} = \chi_{\max_1}, \quad (3.7.8)$$

где H_1 и χ_{\max_1} — некоторые заданные величины.

В том случае, когда для любой стратегии закон распределения ошибки χ непрерывен и плотность этого распределения на замкнутом интервале — $\chi_{\max} \leq \chi \leq \chi_{\max}$ не обращается в нуль, оба эти критерия эквивалентны. Для доказательства воспользуемся тем, что в этом случае при заданной стратегии между величинами χ_{\max} и H существует непрерывное взаимно однозначное соответствие, причем каждая из них является непрерывной монотонно возрастающей функцией другой величины (это непосредственно следует из зависимости (3.4.25) и элементарных свойств непрерывных функций распределения). Зададимся теперь величиной $H = H_1$ и будем отыскивать оптимальную стратегию, исходя из критерия (3.7.7). Пусть в результате решения задачи оптимизации найдено некоторое значение χ_{\max_1} , удовлетворяющее условию

$$\chi_{\max}(H_1) \geq \chi_{\max_1}, \quad (3.7.9)$$

для любой из рассматриваемых стратегий S . При этом для некоторой оптимальной стратегии S_1 это неравенство превращается в равенство.

Зададимся теперь полученной величиной χ_{\max_1} и будем оптимизировать стратегию, исходя из критерия (3.7.8). В результате найдем некоторую величину H_2 , для которой

$$H(\chi_{\max_1}) \leq H_2 \quad (3.7.10)$$

при любой стратегии. Для найденной оптимальной стратегии S_2 это неравенство обращается в равенство. Так как при стратегии S_1

$$H(\chi_{\max_1}) = H_1,$$

то $H_1 \leq H_2$. Докажем, что всегда $H_1 = H_2$ и, следовательно, обе стратегии S_1 и S_2 эквивалентны, т. е. обеспечивают одинаковую надежность одного и того же значения максимальной ошибки. Предположим, что это не выполняется. Тогда

$$H_1 < H_2. \quad (3.7.11)$$

Из (3.7.10) и (3.7.11) и монотонности функции $\chi_{\max} = \chi_{\max}(H)$ следует, что при стратегии S_2

$$\chi_{\max}(H_2) = \chi_{\max_1}, \quad \chi_{\max}(H_1) < \chi_{\max_1}.$$

Но это противоречит условию (3.7.9). Следовательно, неравенство (3.7.11) надо заменить равенством.

Заметим, что при неоднозначности решения рассматриваемой задачи оптимизации, эквивалентные стратегии S_1 и S_2 могут не совпадать. Кроме того, следует иметь в виду, что приведенное доказательство эквивалентности критериев (3.7.7) и (3.7.8) существенным образом базируется на допущении о непрерывности закона распределения ошибки χ .

Указанные критерии оптимальности могут быть непосредственно обобщены на случай оценки многомерного вектора $l = \{l_1, l_2, \dots, l_k\}$. При этом для области Δ , в которую допускается попадание ошибки $\chi = \{\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_k\}$, может быть по формуле (3.4.17) вычислена соответствующая надежность

$$H = P(\chi \in \Delta), \quad (3.7.12)$$

и оптимизация заключается в отыскании

$$\max H \quad \text{при} \quad \Delta = \Delta_1, \quad (3.7.13)$$

где Δ_1 — некоторая заданная область (k -мерный куб, сфера, эллипсоид, параллелепипед и т. п.).

Если задан некоторый характерный скалярный размер $R(\Delta)$ области Δ (сторона куба, радиус сферы, объем и т. п.), то может быть поставлена задача отыскания

$$\min R(\Delta) \quad \text{при} \quad H = H_1. \quad (3.7.14)$$

Аналогично предыдущему можно показать, что критерии (3.7.13) и (3.7.14) эквивалентны при непрерывном законе распределения ошибки χ и условии, что при

$R(\Delta_1) > R(\Delta_2)$ область Δ_2 целиком лежит внутри области Δ_1 .

Приведенные выше критерии оптимальности могут быть использованы в том случае, когда законы распределения ошибок ξ , η , ζ исходных данных не заданы, а известны лишь их математические ожидания и ковариационные матрицы. При этом на основе приведенных выше соображений (см. § 3.4) закон распределения ошибки полагается нормальным; для его определения достаточно знать математическое ожидание и ковариационную матрицу этой ошибки. При этом могут быть использованы зависимости (3.4.15) или (3.4.21).

В том случае, когда ошибки исходных данных являются несмещенными и для получения оценки используются несмещенный алгоритм фильтрации, ошибка χ также оказывается несмещенной (в линейном приближении) и ее математическое ожидание

$$E(\chi) = 0. \quad (3.7.15)$$

При этом точность оценки характеризуется ковариационной матрицей $D(\chi)$ и используются различные критерии, базирующиеся на вычислении коэффициентов этой матрицы. Простейшим из них является отыскание

$$1) \min D(\chi), \quad (3.7.16)$$

где χ — ошибка оценки некоторого скалярного параметра l . Очевидно, что при допущении о нормальности закона распределения χ и условии (3.7.15) критерий (3.7.16) эквивалентен критериям (3.7.7) и (3.7.8). Если основной целью является попадание в некоторую точку евклидова пространства и вектор $l = \{l_1, l_2, \dots, l_k\}$ оцениваемых параметров определяет отклонение от этой точки, то путем ортогонального преобразования этого пространства можно привести матрицу $D(\chi)$ к диагональному виду

$$D(\chi) = \begin{pmatrix} D_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & D_k \end{pmatrix}. \quad (3.7.17)$$

Дисперсии D_j представляют собой собственные значения матрицы $D(\chi)$. Наибольшая из них определяет максимальное отклонение в наихудшем направлении.

При этом оптимизация может вестись по критерию отыскания

$$\min_l \max_j D_j, \quad j = 1, 2, \dots, k, \quad (3.7.18)$$

где \max отыскивается по всем возможным значениям индекса j .

При теоретических исследованиях вопросов получения оптимальных оценок часто используются так называемая « D -оптимальность», при которой отыскивается минимум определителя $|D(v)|$ ковариационной матрицы $D(v)$ ошибки v оценки вектора q . Этот критерий обладает рядом преимуществ, к числу которых относится:

- универсальность (независимость от выбора вектора l оцениваемых параметров);
- удобство использования при решении ряда задач оптимизации;
- некоторая связь с критерием минимума дисперсии $D(x)$ оценки произвольного скалярного параметра

$$l = G(q). \quad (3.7.19)$$

Для того чтобы установить эту связь, рассмотрим случай, когда погрешностью модельной зависимости (3.4.4) можно пренебречь, и ограничимся членами, линейными относительно составляющих вектора $v = \hat{q} - q_{\text{н}}$. При этих условиях можно написать, что

$$x = Cv, \quad (3.7.20)$$

где

$$C = (c_1, c_2, \dots, c_m) = \frac{\partial l}{\partial q} = \left(\frac{\partial l}{\partial q_1} \frac{\partial l}{\partial q_2} \dots \frac{\partial l}{\partial q_m} \right). \quad (3.7.21)$$

Отсюда, пользуясь зависимостью (1.9.23), находим, что

$$D(x) = CD(v)C^T. \quad (3.7.22)$$

Неотрицательно определенная матрица $D(v)$ имеет m неотрицательных собственных значений D_j ($j = 1, 2, \dots, m$). Расположим их в порядке возрастания

$$0 \leq D_1 \leq D_2 \leq \dots \leq D_m.$$

Пользуясь зависимостями (3.7.21) и (1.9.23), можно написать, что

$$C^2 D_1 \leq D(x) \leq C^2 D_m, \quad (3.7.23)$$

где

$$C = |C| = \sqrt{\sum_{j=1}^m C_j^2}. \quad (3.7.24)$$

С другой стороны, в соответствии с равенством (1.3.9),

$$|D(v)| = D_1 D_2 \dots D_m. \quad (3.7.25)$$

Из сопоставления зависимостей (3.7.23) и (3.7.25) следует, что минимизация определителя $|D(v)|$ в какой-то мере связана с минимизацией верхней и нижней границ дисперсии $D(\chi)$. Однако эта связь не является однозначной и достижение $\min |D(v)|$ еще не означает минимизацию дисперсии ошибки χ некоторого конкретного параметра l , а также верхней границы этой дисперсии для всевозможных оцениваемых параметров.

Поэтому в тех случаях, когда нас интересует достижение максимальной точности оценки одного или нескольких параметров, целесообразнее пользоваться указанными выше критериями, привязанными к конкретным оцениваемым параметрам. В том случае, когда желательно минимизировать погрешность оценки произвольного скалярного параметра, лучше вместо критерия $\min |D(v)|$ отыскивать минимум наибольшего характеристического числа D_m матрицы $D(v)$. Из зависимости (3.7.23) следует, что при этом обеспечивается минимум верхней границы дисперсии $D(\chi)$ ошибки оценки произвольного скалярного параметра.

§ 3.8. Критерии оптимальности при неклассической постановке задачи

В случае неклассической постановки задачи, когда неизвестны точные значения вероятностных характеристик ошибок исходных данных, а суммарный вектор $\gamma = \{\xi, \eta, \zeta\}$ этих ошибок удовлетворяет некоторому условию вида (3.5.1), оптимизация заключается в отыскании экстремального значения некоторой гарантированной характеристики точности $K_{\text{гар}}$, определяемой равенством (3.5.2) или (3.5.3). Иначе говоря, при использовании минимизированной характеристики K точности

в качестве критерия оптимальности принимается отыскание

$$\min K_{\text{rap}} = \min_{\gamma \in M} \max K, \quad (3.8.1)$$

а при использовании максимизируемой характеристики — отыскание

$$\max K_{\text{rap}} = \max_{\gamma \in M} \min K. \quad (3.8.2)$$

В простейшем случае, когда множество M возможных ошибок определяется условием (3.5.4) и целью оптимизации является достижение наилучшей точности оценки некоторого скалярного параметра l , в качестве критерия оптимальности может быть выбрано условие достижения минимума максимальной ошибки χ_{max} . Из зависимости (3.5.6) следует, что при этом отыскивается

$$\min \left(\sum_{i=1}^n a_i |x_i| + \sum_{j=1}^p b_j |y_j| \right). \quad (3.8.3)$$

В случае, когда учитываются только ошибки ξ измерений ($\alpha = 0$), —

$$\min \sum_{i=1}^n a_i |x_i|. \quad (3.8.4)$$

Если влияние вектора α не учитывается, а ограничения на вероятностные характеристики вектора ξ налагаются условиями (3.5.14), оптимизацию можно проводить по минимуму максимального гарантированного значения дисперсии $D(\hat{l})$. Из выражения (3.5.15) следует, что при этом отыскивается

$$\min \left[k \left(\sum_{i=1}^n |\mu_i x_i| \right)^2 + (1-k) \sum_{i=1}^n \mu_i^2 x_i^2 \right]. \quad (3.8.5)$$

Для случая произвольной корреляции между ошибками измерений ($k = 1$) задача сводится к отысканию

$$\min \sum_{i=1}^n |\mu_i x_i|. \quad (3.8.6)$$

Следует обратить внимание на аналогичность критериев оптимальности (3.8.4) и (3.8.6), полученных при различных предположениях. Если допустить, что между

максимальными значениями ошибок a_i и значениями $\mu_i = \max \sqrt{D(\xi_i)}$ существуют зависимости вида

$$a_i = \lambda \mu_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.8.7)$$

в которых коэффициент λ не зависит от индекса i , то критерии (3.8.4) и (3.8.6) оказываются полностью эквивалентными. Таким образом, мы получили доказательство следующей важной теоремы, которая нам понадобится в дальнейшем.

Теорема. *В том случае, когда зависимость между максимальными значениями ошибок ξ_i и максимальными дисперсиями этих ошибок может быть представлена в виде (3.8.7) с постоянным коэффициентом λ , задача минимизации максимальной ошибки оценки некоторого скалярного параметра при заданных максимумах модулей ошибок измерений эквивалентна задаче минимизации дисперсии этого параметра при заданных максимумах дисперсий ошибок измерений и произвольной корреляции между этими ошибками.*

Эта теорема может быть непосредственно распространена на случай учета влияния не только ошибок ξ измерения, но и ошибок модели, зависящих от некоторого вектора α мешающих параметров. При этом допускается произвольная корреляция между векторами ξ и α .

В том случае, когда множество M возможных ошибок исходных данных задается неравенствами (3.5.19), для построения гарантированных критериев оптимальности может быть использован указанный в § 3.5 «наихудший» нормальный закон распределения ошибок χ . При этом для скалярного оцениваемого параметра l математическое ожидание E_{\max} и дисперсия D_{\max} этого закона определяется выражениями (3.5.20), а при оценке вектора l математическое ожидание E_{\max} и ковариационная матрица D_{\max} находятся из зависимостей (3.5.24) и (3.5.25).

Подставляя полученный таким образом закон распределения или его параметры в правые части выражений (3.4.25), (3.5.21), (3.5.22) и (3.7.12), находим соответствующие гарантированные зависимости между надежностью H и максимальным значением χ_{\max} ошибки

оценки скалярного параметра l или областью Δ изменения ошибки оценки вектора l . При использовании этих зависимостей критерии оптимальности (3.7.7), (3.7.8), (3.7.13) и (3.7.14) становятся гарантированными.

§ 3.9. Асимптотические свойства оценок состояния реальных систем

При решении многих прикладных задач, требующих высокой точности оценки состояния различных реальных систем, часто используется очень большое число n независимых измерений (порядка нескольких тысяч и больше). Это определяется, с одной стороны, важностью и ответственностью решаемых задач, а с другой, — возможностями современной вычислительной техники, обеспечивающей проведение математической обработки значительного объема измерительной информации. В связи с этим, большое значение приобретает исследование асимптотических свойств статистических оценок, получаемых при стремлении числа n к бесконечности.

Одним из таких свойств является так называемая *состоятельность* оценки, под которой подразумевается сходимость по вероятности оценки некоторого параметра к его истинному значению при числе n , стремящемся к бесконечности.

Обозначим через Δ имеющееся в распоряжении исследователя бесконечное множество возможных измерений. Пусть для каждого вектора $d \in \Delta$ может быть составлена математическая модель (2.1.3) и найдены вероятностные характеристики ошибок, позволяющие построить соответствующий алгоритм определения оценки \hat{l} рассматриваемого скалярного параметра

$$\hat{l} = \theta(\tilde{d}). \quad (3.9.1)$$

Примером такого множества может служить множество измерений, определяемых измеряемой функцией вида (2.4.5) или (2.4.7). При этом для всех составляющих этой векторной функции известны их математические ожидания, а так же авто- и взаимно корреляционные функции, позволяющие определить математическое ожидание и ковариационную матрицу ошибок измерения любого вектора $d \in \Delta$.

Рассмотрим некоторую возрастающую последовательность чисел n , которой соответствует последовательность векторов $\mathbf{d}_n = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$, принадлежащих множеству Δ , и последовательность оценок $l_n = \theta_n(\mathbf{d}_n)$.

Мы будем в дальнейшем называть оценку \hat{l} , получаемую при помощи алгоритма фильтрации (3.9.1), *состоятельной* на множестве Δ , если существует по крайней мере одна последовательность векторов $\mathbf{d}_n \subset \Delta$, для которой имеет место сходимость по вероятности

$$\hat{l}_n \xrightarrow{P} l_n \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad (3.9.2)$$

где l_n — истинное значение оцениваемого параметра l . Для состоятельности оценки \hat{l} достаточно, чтобы математические ожидания $E(\hat{l}_n)$ и дисперсии $D(\hat{l}_n)$ оценок \hat{l}_n удовлетворяли условиям [41]:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(\hat{l}_n) = l_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} D(\hat{l}_n) = 0. \quad (3.9.3)$$

Действительно, из зависимостей (3.9.2) и (3.9.3) следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(\hat{l}_n - l_n)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \{D(\hat{l}_n) + [E(\hat{l}_n) - l_n]^2\} = 0.$$

Таким образом,

$$\hat{l}_n \xrightarrow{\text{с. к.}} l_n \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (3.9.4)$$

Как было показано в § 1.11, это является достаточным условием сходимости по вероятности (3.9.2).

В частности, для состоятельности несмещенных оценок, у которых $E(\hat{l}_n) = l_n$, достаточно, чтобы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D(\hat{l}_n) = 0. \quad (3.9.5)$$

Из § 1.11 следует, что зависимости (3.9.3) или (3.9.5) являются не только достаточным, но и необходимым условием состоятельности оценки \hat{l}_n в одном из следующих (несовместимых) случаев:

- оценки распределены по нормальному закону;
- ошибки χ_n оценок \hat{l}_n удовлетворяют условию $\chi_n < M$ при любом n , где M — некоторое число.

При рассмотрении вопросов состоятельности статистических оценок следует обратить внимание на выбор используемой последовательности векторов d_n . В § 5.10 будет дан пример состоятельной оценки, для которой существует бесконечная последовательность $d_n \subset \Delta$, не удовлетворяющая условию (3.9.3). При этом оказывается, что выполнение условия (3.9.3) зависит не только от выбора последовательности d_n , но и от оцениваемого параметра l .

Ниже будет показано, что основные, используемые на практике алгоритмы фильтрации при определенных условиях обеспечивают состоятельность соответствующих оценок. Это открывает теоретическую возможность получения оценок со сколь угодно высокой надежностью отклоняющихся от соответствующих истинных значений оцениваемых параметров на как угодно малую величину. Однако на практике указанная возможность часто не может быть реализована. Это объясняется не только необходимостью использования большого числа измерений, но и тем, что для обеспечения состоятельности оценки l алгоритм фильтрации и последовательность векторов d_n должны соответствовать вполне определенной системе допущений о математической модели задачи и значениях вероятностных характеристик ошибок исходных данных. Однако при решении прикладных задач ни одна система допущений не удовлетворяется с абсолютной точностью. Поэтому ошибки χ_n оценок l_n всегда представляют собой суммы двух составляющих,

$$\chi_n = \chi'_n + \chi''_n, \quad (3.9.6)$$

где χ'_n — ошибка, соответствующая принятой системе допущений (*моделируемая ошибка*), а χ''_n — ошибка, вызываемая отклонениями от этих допущений (*немоделируемая ошибка*). При использовании состоятельного алгоритма фильтрации $\chi'_n \xrightarrow{P} 0$ при $n \rightarrow \infty$. Однако это нельзя сказать про немоделируемую ошибку χ''_n . При $n \rightarrow \infty$ она либо сходится по вероятности к некоторому не равному нулю пределу, либо расходится. Это приводит к тому, что при больших значениях n основную роль начинают играть немоделируемые ошибки и, практически, оценка l оказывается несостоятельной.

Рассмотрим более подробно случай, когда χ'_n и χ''_n можно считать некоррелированными случайными величинами. Обозначим через E_n , E'_n , E''_n математические ожидания ошибок χ_n , χ'_n , χ''_n , а через σ_n , σ'_n , σ''_n — их средние квадратические отклонения от соответствующих математических ожиданий (т. е. корни квадратные их дисперсий). Очевидно, что

$$E_n = E'_n + E''_n, \quad \sigma_n = \sqrt{\sigma'^2_n + \sigma''^2_n}. \quad (3.9.7)$$

Предположим, что оценки \hat{l}_n находятся при помощи несмещенного состоятельного алгоритма фильтрации, для которого

$$E'_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma'_n = 0. \quad (3.9.8)$$

При не очень больших числах n и правильном выборе системы основных допущений величина σ'_n значительно превосходит σ''_n и E''_n . В этом случае, с достаточной для практики точностью, можно считать, что

$$\sigma_n \approx \sigma'_n \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma''_n}{\sigma'_n} \right)^2 \right] \approx \sigma'_n,$$

и не учитывать влияние математического ожидания E''_n .

По мере увеличения числа n величина σ'_n становится сколь угодно малой. В конечном итоге она оказывается значительно меньше, чем σ''_n и E''_n . При этом

$$\sigma_n \approx \sigma''_n \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma'_n}{\sigma''_n} \right)^2 \right] \approx \sigma''_n,$$

и фактическая точность оценки \hat{l}_n практически полностью определяется характеристиками σ''_n и E''_n немоделируемой ошибки.

Полученный вывод проиллюстрирован на рис. 3.9.1, на котором помещены графики зависимостей величин σ_n , σ'_n и σ''_n от числа n для случая, когда при возрастании n величина σ'_n уменьшается пропорционально \sqrt{n} , а σ''_n — увеличивается пропорционально \sqrt{n} (ср. пример, рассмотренный в § 5.10).

Таким образом, при использовании состоятельных алгоритмов фильтрации и достаточно большом числе измерений, основное влияние на точность получаемых оценок оказывают немоделируемые ошибки. В результате соотношение (3.9.2) не выполняется, а оценка точности конечного результата, получаемая на основе исследования моделируемых ошибок, оказывается грубо ошибочной. При этом начиная с некоторой величины n дальнейшее увеличение числа измерений становится бесполезным или даже вредным.

Другим важным асимптотическим свойством статистических оценок является их *асимптотическая нормальность*. Она заключается в том, что при некоторых условиях и $n \rightarrow \infty$ закон распределения оценок \hat{l}_n стремится к нормальному. Как было указано выше, это свойство может рассматриваться как следствие центральной предельной теоремы теории вероятности. Оно позволяет при больших числах n оперировать с оценками \hat{l}_n как с величинами, распределенными по нормальному закону.

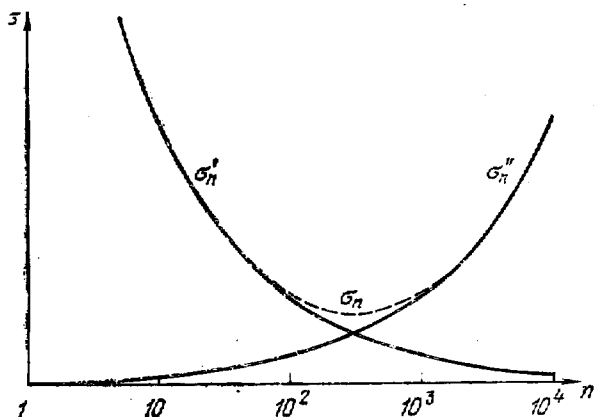


Рис. 3.9.1. Зависимость величин σ_n , σ'_n и σ''_n от числа n .

При анализе свойств статистических оценок часто вводится понятие эффективности оценки. В математической статистике существует несколько определений этого понятия [33, 41]. Мы здесь ограничимся тем определением, согласно которому эффективной считается оценка, асим-

птотически стремящаяся к оценке, обеспечивающей достижение минимума дисперсии $D(l)$ некоторого оцениваемого параметра l при любых значениях вектора q , за исключением, быть может, множества лебеговой меры нуль [60].

§ 3.10. Апостериорная оценка точности

Рассмотренные выше критерии точности и оптимальности базируются на некоторых априорных сведениях об ошибках исходных данных. На основе этих сведений еще до начала эксперимента может быть произведена априорная оценка ожидаемой точности определения состояния изучаемой реальной системы. Такая оценка совершенно необходима при решении различных вопросов планирования экспериментов и проектирования систем управления.

Любая априорная оценка точности неизбежно базируется на ряде допущений о характере погрешностей используемой математической модели, а также о свойствах ошибок измерений. Поэтому после проведения эксперимента в процессе математической обработки полученных данных возникает необходимость проверки сделанных допущений и апостериорной оценки точности определения состояния системы. Такая оценка осуществляется на основе результатов эксперимента. Она особенно важна в том случае, когда целью эксперимента является определение некоторых физических констант и необходима оценка фактической точности и надежности полученных данных. Кроме того, результаты апостериорной оценки точности могут быть использованы в качестве априорных данных при последующем проведении аналогичных экспериментов. При этом возникает необходимость определения некоторых характеристик точности этих данных.

Один из распространенных способов апостериорной оценки точности базируется на вычислении при помощи зависимости (2.1.9) вектора δ невязок. Если предположить, что используемый алгоритм фильтрации обеспечивает высокую точность определения оценки \hat{q} , в результате чего разность $F(q_{\pi}) - F(\hat{q})$ оказывается малой по

сравнению с суммарной ошибкой $\xi + \eta$, то из выражений (2.1.6) и (2.1.9) следует, что

$$\xi + \eta \cong \delta. \quad (3.10.1)$$

Отсюда, пользуясь результатами вычисления вектора δ по формуле (2.1.9), можно определить вероятностные характеристики суммарной ошибки $\xi + \eta$. Такой способ иногда называют оценкой точности по *внутренней сходимости*. Однако при наличии значительных систематических ошибок этот метод может привести к неоправданно оптимистическим оценкам точности.

В качестве примера рассмотрим задачу определения движения материальной точки по измерениям пройденного пути s . Обозначим через $s = f(t)$ действительную зависимость пути s от времени t . При определении движения заменим эту зависимость линейной моделью

$$s = s_0 + v_0 t = \Psi(q, t), \quad (3.10.2)$$

где s_0 — значение пути в начальный момент t_0 , v_0 — начальная скорость, $q = \{s_0, v_0\}$ — вектор состояния.

Проводя измерения в некоторые фиксированные моменты t_i , получаем соответствующие измеренные значения пути \tilde{s}_i . Предположим, что ошибка ξ_i этих величин имеет наряду со случайной некоторую медленно меняющуюся систематическую составляющую, закон изменения которой не известен. В результате получаем изображенную на рис. 3.10.1 картину, на которой сплошной линией представлена истинная зависимость s от t , точками — измеренные значения \tilde{s}_i , а штрих-пунктирной прямой — модельная зависимость $s_M(t) = \Psi(q_M, t)$.

Предположим, что оценка \hat{q} вектора состояния и соответствующая модельная зависимость $\hat{s} = \Psi(\hat{q}, t)$ находятся путем минимизации некоторой функции невязок $\delta_i = \tilde{s}_i - \Psi(\hat{q}, t_i)$ (например, по методу наименьших квадратов). При этом зависимость $\hat{s}(t)$ получается путем усреднения измеренных значений \tilde{s}_i . На рисунке она изображена пунктиром. Из рисунка видно, что невязки δ_i в рассматриваемом случае существенным образом отличаются от суммы случайных и систематических ошибок.

Из приведенного примера видно, что оценка по внутренней сходимости в ряде случаев не обеспечивает получение надежной апостериорной оценки точности определения состояния реальной системы. В связи с этим, при решении ответственных задач крайне желательно проведение апостериорной оценки точности, основанной на

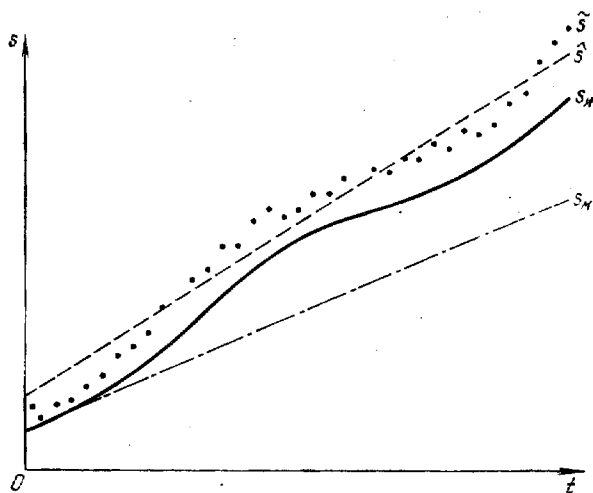


Рис. 3.10.1. Графики истинной (s_n), модельной (s_m), измеренной (\tilde{s}) и оценочной (\hat{s}) зависимостей пути s от времени t .

сравнении результатов определения состояния одной и той же системы по независимым исходным данным.

Примером может служить рассмотренная ниже (см. § 4.1) задача определения внешнего гравитационного поля Земли. При этом в качестве исходных данных могут быть, с одной стороны, использованы результаты гравиметрической съемки на поверхности Земли, а с другой, — данные об эволюциях орбит искусственных спутников Земли. Сравнение значений параметров гравитационного поля Земли, полученных по указанным независимым группам измерений, позволяет оценить точность определения этих параметров.

Как было замечено выше, при определении состояния некоторой прогнозируемой системы весь изучаемый про-

межуток времени может быть разделен на несколько интервалов прогнозирования (2.2.2), на каждом из которых производится определение вектора q . На границах этих интервалов могут быть проведены два независимых определения вектора q по измерениям на предыдущем и последующем интервалах. Сравнение полученных таким образом значений вектора q позволяет оценить точность решения рассматриваемой задачи.

В некоторых случаях для апостериорной оценки точности могут быть использованы результаты определения конечного состояния изучаемой системы. Так, например, при определении траектории межпланетной станции могут быть найдены координаты точки ее встречи с планетой-целью. Сравнение измеренных значений этих координат с соответствующими величинами, полученными расчетным путем по результатам определения траектории ракеты, может быть использовано для апостериорной оценки точности этого определения.

Г л а в а IV

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СОСТОЯНИЯ РЕАЛЬНЫХ СИСТЕМ

§ 4.1. Определение внешнего гравитационного поля планеты

Задача определения внешнего гравитационного поля некоторой планеты принадлежит к числу классических задач рассматриваемого типа. Ее целью является нахождение оценки вектора γ ускорения гравитационного притяжения к данной планете в любой точке окружающего ее пространства. Это в свою очередь необходимо для решения ряда прикладных вопросов: проведения геодезических работ на этой планете; управления аппаратами, движущимися по ее поверхности и в окружающем пространстве; определения влияния планеты на движение ближайших естественных и искусственных небесных тел и т. п. Кроме того, гравитационное поле планеты неразрывно связано с ее внутренней структурой. Поэтому результаты определения этого поля могут быть использованы при решении ряда задач физики данной планеты.

Ускорение γ гравитационного притяжения к планете можно рассматривать как сумму ускорений притяжения к элементарным частицам, из которых она составлена. Притяжение к каждой из этих частиц определяется по закону всемирного тяготения Ньютона. Будем решать задачу в прямоугольной системе координат x, y, z , связанной с планетой. Положение некоторой точки в этой системе обозначим вектором $r = \{x, y, z\}$. Тогда выражение для ускорения может быть представлено

в виде

$$\mathbf{v} = \text{grad } U = \left\{ \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right\}, \quad (4.1.1)$$

где $U = U(\mathbf{r})$ — некоторая функция координат x, y, z , называемая *потенциалом ускорения гравитационного притяжения* к данной планете и определяемая выражением

$$U = f \int \frac{dm}{|\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}|}. \quad (4.1.2)$$

Здесь f — гравитационная постоянная, а $\boldsymbol{\rho}$ — вектор, определяющий положение частицы с массой dm в системе координат x, y, z . При этом интегрирование ведется по всему объему планеты.

Физически потенциал U представляет собой энергию, которую необходимо затратить на преодоление гравитационного притяжения планеты при удалении элементарной частицы единичной массы из точки с координатами $\mathbf{r} = \{x, y, z\}$ на бесконечное расстояние от планеты [49].

Так как распределение масс внутри планеты претерпевает непрерывные изменения, то потенциал U , строго говоря, зависит не только от координат \mathbf{r} , но и от времени t . Однако законы, по которым происходят эти изменения, в настоящее время недостаточно изучены. Известно лишь, что по крайней мере для планет земной группы (Земли, Марса, Венеры и Меркурия), а также для естественных спутников планет эти изменения происходят чрезвычайно медленно. Поэтому в подавляющем большинстве случаев при определении полей планет пренебрегают зависимостью потенциала U от времени и решают задачу с использованием непрогнозируемой математической модели (см. § 2.2). Лишь в последние годы стали появляться работы, учитывающие зависимость потенциала от времени. Так, например, Козаи исследовал изменение потенциала U под влиянием приливной волны, образующейся в теле Земли вследствие притяжения к Луне и Солнцу [59].

Таким образом, для определения внешнего гравитационного поля планеты достаточно знать соответствующий потенциал U во всех точках внешнего пространства, окружающего планету. Для его вычисления можно воспользоваться зависимостью (4.1.2). Однако при этом

возникает необходимость в определении характера распределения масс внутри планеты, что в настоящее время практически неосуществимо. Поэтому обычно не интересуются распределением масс внутри планеты, а определяют потенциал U непосредственно по данным измерений. При этом пользуются тем, что правая часть равенства (4.1.2) во всем внешнем пространстве, окружающем планету, может быть представлена в виде разложения в ряд по сферическим функциям [28], и находят коэффициенты этого разложения. Характерной особенностью такого представления потенциала U является то, что его сходимость резко ухудшается по мере приближения к поверхности планеты. Для улучшения этой сходимости иногда добавляют члены, содержащие выражения для потенциалов сосредоточенных точечных масс, так называемых *масконов*. Каждый из таких потенциалов в свою очередь может быть представлен в виде ряда сферических функций. Однако в тех случаях, когда имеются крупные гравитационные аномалии вблизи поверхности планеты и нужно точное аналитическое описание гравитационного потенциала на небольшом удалении от планеты, это потребовало бы существенного увеличения порядка разложения потенциала по сферическим функциям и соответственного усложнения используемой математической модели. Это в первую очередь относится к описанию поля тяготения Луны, для которой характерно, с одной стороны, наличие мощных гравитационных аномалий, а с другой, — необходимость точного аналитического представления ее тяготения на небольших удалениях от поверхности. Последнее определяется тем, что гравитационное поле Луны используется при расчете движения ее искусственных спутников, а также спускаемых аппаратов, которые из-за отсутствия атмосферы могут летать на сравнительно небольших высотах (порядка нескольких десятков километров, в отличие от сотен и тысяч километров, характерных для искусственных спутников Земли). Некоторые авторы считают также целесообразным использование масконов при описании гравитационного поля Марса.

На основе приведенных соображений в настоящее время общепринятой является следующая форма пред-

ставления потенциала $U(r)$:

$$U = \frac{fM}{r} \left[1 + \sum_{i=2}^N \left(\frac{R}{r} \right)^i \sum_{j=0}^i P_i^j(\sin \psi) (c_{ij} \cos j\lambda + d_{ij} \sin j\lambda) + r \sum_{i=1}^k \frac{\mu_i}{|r - \rho_i|} \right]. \quad (4.1.3)$$

Здесь r, ψ, λ — сферические координаты рассматриваемой точки (соответственно: расстояние от начала координат, широта и долгота), $P_i^j(\sin \psi)$ — присоединенные функции Лежандра, f — гравитационная постоянная, M — основная масса планеты, R — некоторое принятое значение среднего радиуса планеты, c_{ij} и d_{ij} — коэффициенты разложения в ряд по сферическим функциям, N — принятый порядок этого разложения, μ_i — отношения масс масконов к массе M , ρ_i ($i = 1, 2, \dots, k$) — векторы, определяющие положение масконов, k — число масконов. Входящие в это выражение функции $P_i^j(\sin \psi)$ определяются по формулам

$$P_i^j(\sin \psi) = \cos^j \psi \frac{d^j P_i(\sin \psi)}{d(\sin \psi)^j}, \quad P_i^0(\sin \psi) = P_i(\sin \psi),$$

где $P_i(t)$ — полиномы Лежандра, вычисляемые по формулам

$$P_i(t) = \frac{1}{2^i i!} \frac{d^i (t^2 - 1)^i}{dt^i}.$$

При использовании выражения (4.1.3) необходимо учитывать следующие обстоятельства.

1. Разложение в ряд по сферическим функциям начинается с $i = 2$ и предусматривает вполне определенный выбор начала координат, которое должно совпадать с центром основной массы планеты (исключая масконы). Координаты x_0, y_0, z_0 этого центра входят в число неизвестных, подлежащих определению.

2. Полная масса планеты

$$M_{\pi} = M \left(1 + \sum_{i=1}^k \mu_i \right).$$

При использовании зависимости (4.1.3) выбор чисел N и k определяет математическую модель задачи. При

заданных N и k вектор состояния $q = \{q_1, q_2, \dots, q_m\}$ включает в себя:

- координаты центра основной массы x_0, y_0, z_0 ;
- основную массу M ;
- коэффициенты c_{ij} и d_{ij} ;
- относительные массы масконов μ_i ;
- координаты масконов x_i, y_i, z_i .

Общее число m составляющих вектора q (порядок модели) определяется по формуле

$$m = 4 + (N + 3)(N - 1) + 4k = (N + 1)^2 + 4k. \quad (4.1.4)$$

Это число может сильно колебаться в зависимости от свойств изучаемого поля и потребностей решаемой задачи. При необходимости точного описания гравитационного поля на небольших удалениях от планеты число m может достигать нескольких сотен. Как видно из выражения (4.1.3), влияние старших гармоник (т. е. сферических функций с большим индексом i) резко убывает по мере удаления от планеты. Кроме того, при этом отпадает необходимость во введении масконов, так как их гравитационные поля можно на больших удалениях представить разложениями по сферическим функциям. Поэтому в тех случаях, когда не требуется детальная картина гравитационного поля или интерес представляет описание этого поля лишь на значительном расстоянии от планеты, в выражении (4.1.3) можно ограничиться одним или несколькими первыми членами.

Для определения коэффициентов разложения (4.1.3), образующих вектор состояния, можно пользоваться результатами гравиметрической съемки на поверхности планеты и данными об эволюциях орбит космических объектов, пролетающих вблизи планеты. Измерения первого из указанных типов позволяют с высокой точностью определить составляющие вектора g ускорения силы тяжести в точках с известными координатами x, y, z . Отсюда, исключая влияние центробежного ускорения, создаваемого вращением планеты, находят измеренные значения составляющих вектора g гравитационного ускорения. Модельная зависимость (2.1.3) между этими измерениями и принятым вектором q может быть легко построена при помощи выражений (4.1.1) и (4.1.3). В результате приходим к сформулированной в § 2.1 задаче

получения оценки \hat{q} по измеренному значению \tilde{d} . При этом следует учесть, что разложение (4.1.3) на поверхности планеты сходится очень плохо. Поэтому для исключения влияния местных гравитационных аномалий производится предварительное усреднение результатов определения вектора g . Выбор величин участков усреднения зависит от максимального порядка используемых в выражении (4.1.3) гармоник. Чем выше этот порядок, тем более детальным должно быть описание гравитационного поля и тем меньше должна быть величина участков усреднения.

Наряду с результатами гравиметрической съемки большое значение при решении рассматриваемой задачи имеют сведения об эволюциях орбит пролетающих близко от планеты космических объектов и в первую очередь — искусственных и естественных спутников этой планеты. Для всех планет, кроме Земли, они являются в настоящее время единственными источниками исходных данных, используемых при определении гравитационных полей. Для Земли эти сведения также имеют важное значение.

Основанием для использования указанных данных служит то обстоятельство, что при движении в центральном поле тяготения Ньютона, т. е. при наличии лишь первого члена в разложении (4.1.3), элементы орбиты (углы, определяющие положение ее плоскости, большая полуось, эксцентриситет, угловое положение перигентра, время прохождения через перигентр) остаются неизменными [49]. Если же движение происходит в гравитационном поле, описываемом потенциалом вида (4.1.3), то значения этих элементов изменяются. При помощи законов небесной механики может быть определена модельная зависимость между эволюциями элементов орбит и значениями коэффициентов разложения (4.1.3). Отсюда, проводя систематические наблюдения движения летающих около планеты небесных тел и определяя эволюции их орбит, получаем данные, которые могут быть включены в измеренный вектор \tilde{d} . При этом возникает задача совместного определения коэффициентов разложения (4.1.3) и элементов орбит рассматриваемых небесных тел. Эти элементы включаются в число составляющих вектора q (см. § 4.4).

При использовании указанных данных следует иметь в виду, что влияние различных коэффициентов разложения (4.1.3) на эволюции элементов орбит далеко не равнозначно. Особенно большое значение оно приобретает тогда, когда имеет вековой или долгопериодический характер, т. е. когда соответствующие элементы орбит монотонно изменяются с течением времени либо колеблются с очень большим периодом (это в первую очередь относится к эволюциям орбит искусственных и естественных спутников планеты). В этом случае даже небольшие изменения коэффициентов разложения (4.1.3) влекут за собой значительные эволюции элементов орбит в течение длительных интервалов времени. Измеряя эти эволюции, можно точно определить указанные коэффициенты. Так, например, одновременные измерения большой полуоси и периода обращения спутника планеты позволяют с высокой точностью определить массу планеты, а измерения скорости процессии плоскости орбиты — коэффициент c_{20} , характеризующий сжатие планеты и ее гравитационного поля. Большой интерес с этой точки зрения представляет использование так называемых резонансных орбит, для которых характерно большое влияние коэффициентов некоторых гармоник [29]. Измерения эволюций таких орбит позволяют с высокой степенью точности определять соответствующие коэффициенты разложения (4.1.3). При этом, используя результаты наблюдений за движением спутников по различным резонансным орбитам, можно уточнять различные коэффициенты.

В процессе определения гравитационного поля планеты могут возникать указанные в § 3.6 задачи выбора оптимальной стратегии. При этом выбор математической модели сводится к нахождению оптимальных значений чисел N и k в выражении (4.1.3). Если эти числа выбраны, то старшие члены разложения, не вошедшие в используемую математическую модель, определяют систематические ошибки модели. Соответствующие этим членам величины c_{ij} и d_{ij} ($i > N$), а также μ_i и ρ_i ($i > k$), могут рассматриваться как мешающие параметры. Очевидно, что при любом выборе чисел N и k всегда остаются члены, не вошедшие в математическую модель. Кроме того, источником ошибок модели (4.1.3)

является неучет влияния переменности гравитационного поля (например, приливных эффектов). В том случае, когда в качестве измерений используются результаты наблюдений за движением окружающих небесных тел, возникают неизбежные систематические ошибки, вызываемые погрешностями расчета орбит этих тел.

Задача выбора оптимального состава измерений сводится в рассматриваемом случае к выбору используемых данных гравиметрической съемки, а также результатов наблюдений за движением окружающих небесных тел. В некоторых случаях для уточнения параметров гравитационного поля могут запускаться специальные искусственные космические объекты. При этом возникает проблема оптимального выбора орбит этих объектов.

При решении вопросов выбора оптимальной стратегии могут использоваться различные критерии. Их выбор зависит от решаемой основной прикладной задачи. Так, например, целью эксперимента может быть определение некоторого вполне определенного параметра гравитационного поля (массы планеты, ее сжатия и т. п.). В этом случае оптимизируются критерии, характеризующие точность оценки этого параметра (см. §§ 3.7 и 3.8). В том случае, когда исследователя интересует максимальная точность определения характеристик гравитационного поля в заданной области D , в качестве критерия оптимальности может быть использовано условие достижения

$$\min_{r \in D} \max K(r), \quad (4.1.5)$$

где $K(r)$ — некоторый минимизируемый скалярный критерий точности определения ускорения γ в точке r , а \max отыскивается на множестве всех точек, принадлежащих области D .

§ 4.2. Определение магнитного поля Земли

Задача определения магнитного поля Земли имеет важное теоретическое и прикладное значение. Результаты ее решения используются при изучении ряда геофизических вопросов, при навигации кораблей и т. п.

Поэтому во всем мире ведутся интенсивные работы по уточнению основных характеристик этого поля.

Математическая модель магнитного поля по своей структуре близка к описанной в предыдущем параграфе модели гравитационного поля. Отыскивается потенциал $V(r)$ магнитного поля, по которому определяется вектор $\mathbf{H} = \{H_x, H_y, H_z\}$ напряженности этого поля при помощи формулы, аналогичной зависимости (4.1.1.),

$$\mathbf{H} = \text{grad } V = \left\{ \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z} \right\}. \quad (4.2.1)$$

Для определения потенциала V , так же как и для гравитационного потенциала U , используется разложение в ряд по сферическим функциям. При этом учитывается, что, в отличие от гравитационного поля, магнитное поле вызывается не только источниками, расположенными внутри Земли, но и внешними источниками, которые создаются электрическими токами, протекающими в окружающем Землю пространстве (ионосфере, радиационных поясах и т. п.). При этих условиях потенциал магнитного поля вне шара некоторого радиуса R описывается моделью вида

$$V = R \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^i P_i^j \sin(\psi) \left[(g_{ij} \cos j\lambda + h_{ij} \sin j\lambda) \left(\frac{R}{r} \right)^{i+1} + (\gamma_{ij} \cos j\lambda + \sigma_{ij} \sin j\lambda) \left(\frac{r}{R} \right)^{i+1} \right], \quad (4.2.2)$$

где g_{ij} и h_{ij} — коэффициенты, определяемые источниками, находящимися внутри указанного шара, γ_{ij} и σ_{ij} — коэффициенты, определяемые внешними по отношению к этому шару источниками, а остальные обозначения совпадают с соответствующими обозначениями в зависимости (4.1.3).

Обычно в качестве величины R используется средний радиус Земли. При этом внутренние источники располагаются под средней поверхностью Земли, а внешние — над этой поверхностью.

Выражение (4.2.2) может быть представлено в виде

$$V = V_i + V_e, \quad (4.2.3)$$

где V_i и V_e соответственно суммы потенциалов внутренних и внешних источников.

Магнитное поле отличается от гравитационного меньшей стабильностью. Оно может быть разделено на две части: постоянное поле с потенциалом V_1 и переменное — с потенциалом V_2 . Вблизи поверхности Земли постоянное поле почти полностью совпадает с полем внутренних относительно этой поверхности источников. Однако на расстояниях порядка нескольких земных радиусов существенное значение приобретает вклад, вносимый радиационными поясами Земли. Следует иметь в виду, что само понятие «постоянное магнитное поле» является в значительной мере условным. Известно, что за время геологической жизни Земли это поле несколько раз меняло свой знак. Даже в течение последних нескольких веков зарегистрировано заметное изменение магнитного поля Земли.

Переменное магнитное поле в основном определяется внешними источниками. Оно связано с активностью Солнца и временами испытывает мощные возмущения (магнитные бури). Напряженность этого поля вблизи поверхности Земли, как правило, не превосходит одного процента от напряженности постоянного поля (во время очень сильных магнитных бурь она может быть несколько большей). По мере удаления от Земли влияние переменного магнитного поля возрастает. Следует отметить, что помимо потенциальной части, описываемой соответствующими членами выражения (4.2.2), это поле имеет еще некоторую непотенциальную часть, связанную с наличием в околоземном пространстве незамкнутых электрических токов.

Из изложенного следует, что рассматриваемая задача сводится к определению потенциалов V_1 и V_2 . Для получения оценки потенциала V могут быть использованы измерения, проводимые в течение сравнительно длительного интервала времени. При этом обычно применяется математическая модель, включающая лишь потенциалы внутренних источников (т. е. в выражении (4.2.2) полагают, что $\gamma_{ij} = \sigma_{ij} = 0$). В этом случае потенциалы внешних источников входят в ошибки модели. При оценке точности полученных результатов величины γ_{ij} и σ_{ij} следует считать мешающими параметрами, которые могут изменяться не только от эксперимента к эксперименту, но и в течение одного опыта. Другим

источником ошибок модели являются неучитываемые члены с коэффициентами g_{ij} и h_{ij} , для которых $i > N$. Кроме того, при совместной обработке измерений на длительном интервале времени могут возникать заметные ошибки модели, связанные с переменностью внутренних источников.

Потенциал V_2 переменного поля определяется по данным измерений на небольшом интервале времени. При этом в выражение (4.2.2) подставляют значение коэффициентов g_{ij} и h_{ij} из какой-либо предварительно построенной модели потенциала V_1 постоянного поля и оценивают величины коэффициентов γ_{ij} и σ_{ij} . В этом случае источниками методических ошибок являются:

— погрешности используемых характеристик постоянного поля;

— неполнота описания переменного поля соответствующими членами выражения (4.2.2).

Таким образом в зависимости от характера решаемой задачи, вектор состояния системы $\mathbf{q} = \{q_1, q_2, \dots, q_m\}$ включает либо коэффициенты g_{ij} и h_{ij} либо коэффициенты γ_{ij} и σ_{ij} , либо и те и другие. В качестве составляющих вектора $\mathbf{d} = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ измерений используются результаты определения фактических значений составляющих вектора $\mathbf{H} = \{H_x, H_y, H_z\}$ напряженности

магнитного поля или его модуля $H = \sqrt{H_x^2 + H_y^2 + H_z^2}$ в различных точках пространства и в разные моменты времени. Модельная зависимость между этими величинами и вектором \mathbf{q} может быть легко построена при помощи выражений (4.2.1) и (4.2.2). Измерения проводятся специальными приборами (магнитометрами), которые могут устанавливаться на поверхности Земли либо на различных летательных аппаратах (самолетах, искусственных спутниках и т. п.). При использовании измерений, проводимых на искусственных спутниках, следует учесть, что некоторые источники, например, токи в ионосфере, являются внешними по отношению к магнитному полю на поверхности Земли, но могут рассматриваться как внутренние для поля на высоте полета спутника. При оценке точности получаемых результатов необходимо помимо погрешностей измерительных приборов и ошибок математической модели

учитывать ошибки определения положения магнитометров и ориентации их осей. Особенно большое значение могут иметь эти ошибки при использовании результатов спутниковых наблюдений. В том случае, когда ориентация спутника в пространстве не определяется или определяется с недостаточной точностью, целесообразно ограничиться использованием измерений модуля вектора напряженности, которые не зависят от ориентации.

При организации процесса определения магнитного поля могут возникнуть различные задачи выбора оптимальной стратегии. При этом выбор математической модели сводится к выбору совокупности оцениваемых коэффициентов в правой части зависимости (4.2.2). Выбор состава измерений заключается в выборе мест и времен их проведения, а также траектории используемых летательных аппаратов. В качестве критериев оптимальности могут быть использованы условия вида (4.1.5).

§ 4.3. Определение движения механической системы

В предыдущих двух параграфах были даны примеры задач определения состояния систем, описываемых непрогнозируемыми математическими моделями, т. е. такими моделями, для которых неизвестна зависимость вектора q состояния от времени t . При решении ряда прикладных задач удается построить прогнозируемые математические модели с известными зависимостями q от t . Использование таких зависимостей позволяет существенно увеличить интервал времени, в течение которого производятся измерения, т. е. расширить множество Δ возможных измерений. Это в свою очередь улучшает возможности решения задач выбора оптимальной стратегии (см. § 3.6) и открывает возможности достижения более высокой точности оценки состояния системы.

В качестве примера прогнозируемой модели рассмотрим механическую модель, в которой исследуемая система заменяется совокупностью конечного или бесконечного числа материальных точек, находящихся под действием различных сил. Кроме того, на координаты и скорости этих точек могут быть наложены дополнительные ограничения, называемые связями. Таким способом строятся модели естественных и искусственных

космических объектов, летательных аппаратов, снарядов и других управляемых и неуправляемых объектов. Остановимся более подробно на основных принципах построения таких моделей. При этом мы будем пользоваться определениями и теоремами теоретической механики [46]. Читатели, не интересующиеся вопросами построения механических моделей, могут пропустить этот раздел без особого ущерба для понимания дальнейшего материала.

Рассмотрим некоторую систему из N материальных точек. Заметим, что приведенные ниже результаты могут быть использованы при изучении движения непрерывных сред, рассматриваемых как пределы последовательностей систем материальных точек при $N \rightarrow \infty$. Обозначим через $\mathbf{r}_i = \{x_i, y_i, z_i\}$ ($i = 1, 2, \dots, N$) трехмерные векторы, определяющие положения соответствующих точек в некоторой прямоугольной системе координат x, y, z . Допустим, что исследуемая система удовлетворяет k идеальным голономным связям вида

$$f_j(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, t) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k. \quad (4.3.1)$$

Кроме того, на нее наложено l идеальных неголономных линейных относительно скоростей связей вида

$$\sum_{i=1}^N \dot{\mathbf{r}}_i \mathbf{B}_{vi}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, t) + \mathbf{B}_{v0}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, t) = 0, \quad v = 1, 2, \dots, l, \quad (4.3.2)$$

где f_j , \mathbf{B}_{vi} и \mathbf{B}_{v0} — некоторые заданные функции векторов \mathbf{r}_i и времени t . (Здесь и в дальнейшем точками обозначаются производные по времени.)

Пользуясь зависимостями (4.3.1), можно выразить координаты всех точек системы через

$$m_1 = 3N - k \quad (4.3.3)$$

обобщенных координат q_1, q_2, \dots, q_{m_1}

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_{m_1}, t), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (4.3.4)$$

Кроме того, связи (4.3.1) и (4.3.2) налагают на возможные перемещения (изохронные вариации) $\delta \mathbf{r}_i =$

$$\begin{aligned}
 &= \{\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i\} \quad (i = 1, 2, \dots, N) k + l \text{ ограничений вида} \\
 &\left. \begin{aligned}
 \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial f_j}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial f_j}{\partial z_i} \delta z_i \right) &= 0, \\
 j &= 1, 2, \dots, k, \\
 \sum_{i=1}^N \mathbf{B}_{vi} \delta \mathbf{r}_i &= 0, \quad v = 1, 2, \dots, l.
 \end{aligned} \right\} \quad (4.3.5)
 \end{aligned}$$

Поэтому среди $3N$ возможных перемещений координат системы будет лишь

$$m_2 = 3N - (k + l) \quad (4.3.6)$$

независимых. Одновременно m_2 представляет собой число независимых обобщенных скоростей $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_{m_2}$. В механике его принято называть *числом степеней свободы*.

Для определения движения системы воспользуемся общим уравнением механики [19], согласно которому

$$\sum_{i=1}^N (\mathbf{P}_i - M_i \ddot{\mathbf{r}}_i) \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (4.3.7)$$

при любых возможных перемещениях $\delta \mathbf{r}_i$. Здесь M_i — массы соответствующих точек, а \mathbf{P}_i суммарные активные силы, действующие на каждую точку (включая силы инерции при решении задачи в неинерциальной системе координат). Силы \mathbf{P}_i , вообще говоря, зависят от времени, координат и скоростей точек систем. Будем полагать эти зависимости заданными.

Выразим в уравнении (4.3.7) векторы $\mathbf{r}_i = \{x_i, y_i, z_i\}$ декартовых координат через обобщенные координаты q_i ($i = 1, 2, \dots, m_1$), векторы $\dot{\mathbf{r}}_i$ и $\ddot{\mathbf{r}}_i$ скоростей и ускорений — через независимые обобщенные скорости и ускорения \dot{q}_α и \ddot{q}_α ($\alpha = 1, 2, \dots, m_2$), а возможные перемещения $\delta \mathbf{r}_i$ — через независимые возможные перемещения δq_α ($\alpha = 1, 2, \dots, m_2$). В результате получим уравнение вида

$$\begin{aligned}
 \sum_{\alpha=1}^{m_2} \Phi_\alpha(q_1, q_2, \dots, q_{m_1}, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \\
 \dots, \dot{q}_{m_2}, \ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \dots, \ddot{q}_{m_2}) \delta q_\alpha = 0.
 \end{aligned}$$

Это равенство должно иметь место при любых значениях независимых возможных перемещений δq_α . Отсюда

$$\Phi_\alpha(q_1, q_2, \dots, q_{m_1}, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_{m_2}, \ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \dots, \ddot{q}_{m_2}) = 0, \\ \alpha = 1, 2, \dots, m_2. \quad (4.3.8)$$

Кроме того, пользуясь зависимостями (4.3.4), можно переписать уравнение (4.3.2) в виде

$$\sum_{j=1}^{m_1} \dot{q}_j C_{vj}(q_1, q_2, \dots, q_{m_1}, t) + \\ + C_{v0}(q_1, q_2, \dots, q_{m_1}, t) = 0, \quad v = 1, 2, \dots, l, \quad (4.3.9)$$

где C_{vj} и C_{v0} — некоторые функции обобщенных координат и времени. Равенства (4.3.8) и (4.3.9) представляют собой систему из $m_2 + l = m_1$ обыкновенных дифференциальных уравнений относительно m_1 обобщенных координат q_1, q_2, \dots, q_{m_1} . В эту систему входят вторые производные от m_2 обобщенных координат q_1, q_2, \dots, q_{m_2} и первые производные от остальных l обобщенных координат. Поэтому порядок системы

$$\pi = 2m_2 + l = m_1 + m_2. \quad (4.3.10)$$

Таким образом, определение движения механической модели сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений (системы уравнений движения), порядок которой равен сумме чисел обобщенных координат и степеней свободы. В частности, для голономных систем, т. е. для систем, не имеющих неголономных связей,

$$m_1 = m_2, \quad \pi = 2m_1. \quad (4.3.11)$$

Как известно, решение такой системы дифференциальных уравнений целиком определяется $m_1 + m_2$ начальными условиями, используемыми при ее интегрировании. В качестве этих начальных условий может быть принята совокупность m_1 значений обобщенных координат q_1, q_2, \dots, q_{m_1} и m_2 значений независимых обобщенных скоростей $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_{m_2}$ для некоторого задан-

ного момента времени t . В механике принято называть ее совокупностью фазовых координат φ_j , $j = 1, 2, \dots, m$, $m = m_1 + m_2$ и объединять в фазовый вектор

$$\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m\} = \{q_1, q_2, \dots, q_{m_1}, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_{m_2}\}.$$

Этот вектор изменяется со временем, т. е. $\Phi = \Phi(t)$, и полностью характеризует состояние системы в заданный момент. Задаваясь начальным значением этого вектора $\Phi_0 = \Phi(t_0)$, где t_0 — некоторый начальный момент времени, можно, интегрируя систему (4.3.8) и (4.3.9) уравнений движения, определить значение фазового вектора для произвольного времени. Отсюда следует, что в качестве вектора q состояния модели можно принять начальное значение фазового вектора

$$q = \Phi(t_0), \quad (4.3.12)$$

либо любой другой m -мерный вектор, связанный с $\Phi(t_0)$ взаимно однозначной зависимостью.

До сих пор мы полагали заданными массы рассматриваемых точек, наложенные на эти точки связи, а также зависимости действующих сил от фазовых координат и времени. Полученный результат может быть обобщен на случай, когда указанные величины и зависимости задаются с точностью до некоторого вектора подлежащих определению параметров

$$p = \{p_1, p_2, \dots, p_{m_3}\}, \quad (4.3.13)$$

где m_3 — число этих параметров. При этом система уравнений движения может быть записана в виде векторного уравнения

$$\dot{\Phi} = \theta(t, \Phi, p), \quad (4.3.14)$$

а вектор q состояния системы представляет собой совокупность векторов $\Phi_0 = \Phi(t_0)$ и p , т. е.

$$q = \{\Phi_0, p\}, \quad (4.3.15)$$

и его размерность

$$m = m_1 + m_2 + m_3 = n + m_3. \quad (4.3.16)$$

В обоих рассматриваемых случаях решение системы уравнений движения определяет зависимость текущего значения $\Phi(t)$ фазового вектора от вектора q и

времени t

$$\varphi(t) = \Phi(q, t). \quad (4.3.17)$$

В ряде прикладных задач эта зависимость оказывается достаточно сложной и может быть определена только путем численного интегрирования системы уравнений движения.

В качестве примера рассмотрим точечную модель Солнечной системы. Будем изучать движение планет в ортогональной системе координат с началом в центре Солнца и постоянной ориентацией относительно звезд. Связи в этой системе отсутствуют, а число независимых координат равно числу степеней свободы

$$m_1 = m_2 = 3N,$$

где N — общее число планет и их спутников, входящих в используемую модель.

При определении движения рассматриваемых небесных тел мы будем учитывать лишь взаимное притяжение соответствующих точечных масс. Из закона всемирного тяготения следует, что оно целиком определяется отношением масс планет и их спутников к массе Солнца, а также произведением массы Солнца на гравитационную постоянную. Отсюда число параметров, определяющих действующие силы

$$m_3 = N + 1,$$

а полная размерность вектора состояния рассматриваемой модели

$$m = m_1 + m_2 + m_3 = 7N + 1. \quad (4.3.18)$$

При составлении уравнений движения (4.3.8) и (4.3.9) не могут быть до конца учтены все факторы, определяющие состояние реальной системы. Кроме того, используемые выражения для связей и действующих сил базируются на определенной идеализации реальных процессов. Наконец интегрирование этих уравнений во многих случаях ведется приближенными методами. Все это приводит к методическим ошибкам выражения (4.3.17), которые, как правило, возрастают с увеличением промежутка времени $t - t_0$. Для того чтобы эти ошибки не превзошли допустимых пределов, при определении со-

стояния системы используются измерения на некотором замкнутом мерном интервале времени

$$t_n \leq t \leq t_k, \quad (4.3.19)$$

где t_n и t_k — времена начала и окончания этого интервала.

В том случае, когда необходимо следить за состоянием системы на большем интервале времени, он разбивается на несколько мерных интервалов, для каждого из которых вектор q оценивается независимо.

Иногда в рассматриваемой задаче используются динамические алгоритмы фильтрации (см. § 2.3) и для каждого момента времени определяется текущее значение вектора состояния

$$q(t) = \{\varphi(t), p\}. \quad (4.3.20)$$

При этом может быть использован метод скользящего мерного интервала, когда по мере возрастания времени, для которого оценивается вектор, соответственно перемещаются границы t_n и t_k мерного интервала (4.1.19). Это приводит к постепенному исключению ранних измерений и замене их более поздними.

Для оценки вектора q может быть использована как априорная, так и апостериорная информация. Первая включает имеющиеся до опыта сведения о значениях всех или части составляющих вектора q . Эти сведения могут быть получены по данным предыдущих измерений либо (для искусственных систем) почерпнуты из проектных характеристик систем. В том случае, когда все интересующее исследователя время разбивается на несколько мерных интервалов, результаты оценки состояния системы на предыдущем интервале могут быть использованы в качестве априорных сведений для последующего интервала.

Апостериорная информация, как правило, получается путем измерения некоторых функций $f[\varphi(t)]$ текущего значения вектора фазовых координат. Отсюда, пользуясь зависимостями (4.3.17), получаем измеряемые функции вида

$$\Psi(q, t) = f[\varphi(t)] = f[\Phi(q, t)]. \quad (4.3.21)$$

Если таких скалярных функций несколько, то их совокупность образует векторную измеряемую функцию (2.4.5).

Пользуясь измеряемыми функциями (2.4.5) или (4.3.21) и выбирая на интервале (4.3.19) последовательность времен t_i измерений, получаем при помощи зависимости вида (2.4.6) соответствующую серию измерений d_i ($i = 1, 2, \dots, n$).

Выбор параметров, определяющих точность оценки вектора q по имеющимся априорным и апостериорным данным, зависит от характера решаемой прикладной задачи. Рассмотрим следующие виды этих задач.

1. Целью эксперимента является определение некоторых из параметров p_j ($j = 1, 2, \dots, m_3$), характеризующих массы точек системы, действующие силы и связи. Так, например, в результате оценки состояния Солнечной системы могут быть найдены массы отдельных планет. В подобных случаях определяющими являются некоторые характеристики точности оценки интересующих исследователя параметров p_j .

2. Основная задача заключается в оценке состояния системы для некоторого момента $t = t_1$. При этом вектор l оцениваемых параметров является заданной функцией $\theta[\varphi(t_1)]$ значений фазового вектора в этот момент. Отсюда, пользуясь зависимостью (4.3.17), получим, что

$$l = \theta[\varphi(t_1)] = \theta[\Phi(q, t_1)] = G(q). \quad (4.3.22)$$

В этом случае точность оценки составляющих вектора l характеризует решение задачи в целом.

3. Интерес представляет достижение максимальной точности оценки некоторого переменного вектора

$$l(t) = \theta[\varphi(t)] \quad (4.3.23)$$

при условии

$$t_1 \leq t \leq t_2, \quad (4.3.24)$$

где t_1 и t_2 — границы заданного замкнутого интервала L .

В этом случае оценка точности может производиться по значениям $\max_{t \in L} K(t)$ или $\min_{t \in L} K(t)$, где $K(t)$ некоторая, соответственно минимизируемая или максимизируемая характеристика точности оценки $\hat{l}(t)$.

В случаях 2 или 3 следует различать задачи интерполяции и экстраполяции результатов измерений. Первая из них характеризуется тем, что времена t_1 и t_2 находятся внутри мерного интервала (4.3.19). При решении задач второго типа по крайней мере одно из этих времен лежит вне указанного интервала. Подобные задачи обычно решаются в процессе управления движением, когда на основе измерений на интервале (4.3.19) необходимо получить прогноз движения системы. При решении задач экстраполяции, как правило, обеспечивается значительно худшая точность оценки параметров системы, чем в задачах интерполяции.

При оптимизации стратегии определения движения механических систем установление оптимального состава измерений сводится к выбору используемых измеряемых функций (4.3.21) из некоторого заданного множества допустимых функций, определению оптимального мерного интервала (4.3.19) и назначению на этом интервале времен измерений.

Выбор используемой механической модели начинается с определения учитываемых сил и связей и построения их математических моделей. После этого составляется система уравнений движения и выбирается тот или иной (обычно приближенный) способ ее решения. Наконец, определяются характеристики сил и связей, включаемые в оцениваемый вектор q состояния. Неизвестные характеристики сил и связей, не вошедшие в вектор q , следует рассматривать как мешающие параметры.

§ 4.4. Определение траектории космического аппарата

В задачах определения движения различных космических аппаратов (КА) обычно используется механическая модель абсолютно твердого тела. При этом в подавляющем большинстве случаев представляется возможным рассматривать раздельно движения центра масс этого тела и его движения относительно центра масс. Это объясняется тем, что обычно при расчете траектории центра КА можно пренебречь зависимостью внешних сил от ориентации аппарата. В тех случаях, когда это сделать нельзя, например, при расчете траек-

тории входа в плотные слои атмосферы, приходится изучать оба движения совместно.

Необходимость в оценке траектории центра масс КА возникает в процессе решения ряда прикладных задач, требующих определения положения и скорости аппарата. К их числу относятся следующие.

1. Управление полетом КА. В процессе полета КА часто имеют место отклонения аппарата от заданной траектории, связанные с ошибками выведения его на орбиту, а также с влиянием различных возмущающих сил. Для устранения этих отклонений на аппарате устанавливаются специальные корректирующие двигатели, возвращающие его на заданную орбиту. Эти же двигатели могут быть использованы для осуществления траекторного маневра, необходимость в котором возникает на различных этапах полета (при старте с орбиты искусственного спутника планеты, возвращении на эту орбиту, посадке на планету и т. п.). Осуществление всех этих операций требует предварительного определения фактической орбиты аппарата. Результаты такого определения служат исходными данными для расчета установок двигателей. Таким образом, определение траектории играет роль звена обратной связи в контуре управления полетом КА.

2. Навигационная привязка данных научных измерений. В настоящее время КА применяются в качестве подвижных платформ для приборов, используемых в процессе проведения различных экспериментов в около- и межпланетном пространстве. При обработке данных этих экспериментов часто возникает необходимость в определении координат приборов во время проведения ими измерений, т. е. в навигационной привязке данных этих измерений. Для этой цели используются результаты определения траекторий КА.

3. Определение различных физических параметров. Траектории полета КА зависят от внешних сил, действующих на аппарат. При этом даже сравнительно небольшие силы, действующие в течение длительных интервалов времени, могут вызывать заметные возмущения орбит КА. Определяя эти возмущения, можно оценить соответствующие возмущающие силы и, в конечном итоге, находить значения физических пара-

метров, от которых эти силы зависят. В частности, таким путем могут быть уточнены различные характеристики гравитационных полей планет, параметры их атмосфер, элементы орбит планет и т. п.

При построении математической модели движения центра масс КА он, в соответствии с известными теоремами механики [19, 46], рассматривается как материальная точка, на которую действуют все приложенные к аппарату внешние силы. Таким образом, он представляет собой голономную систему, состоящую из одной свободной точки с тремя степенями свободы. В соответствии с зависимостью (4.3.11) движение такой системы характеризуется шестью фазовыми координатами. В качестве последних могут быть использованы три координаты центра масс КА и три составляющие его вектора скорости. Часто они заменяются некоторыми функциями этих величин, которые называются элементами орбиты. Для построения последних подбирается приближенное поле сил, называемое *нормальным*, которое мало отличается от реального и позволяет получить в конечной форме все шесть первых интегралов уравнений движения центра масс КА. Найденные таким образом шесть постоянных интегрирования используются в качестве элементов орбиты. При движении в нормальном поле сил они остаются постоянными, а в реальных условиях — медленно меняются с течением времени. Это делает их удобными как для наглядного представления реального движения в виде медленно меняющейся последовательности движений в нормальном поле, так и для построения различных приближенных решений системы уравнений движения в реальном поле, базирующихся на методе последовательных приближений. В настоящее время применяется много различных систем элементов орбиты [49].

В соответствии с § 4.3 построение модели движения центра масс КА базируется на составлении системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Будем решать задачу в прямоугольной системе координат, начало которой совпадает с центром масс некоторого небесного тела, называемого основным. Выбор этого тела обычно определяется характером движения рассматриваемого КА. Так, для искусственных спутников планет за основ-

ное небесное тело обычно принимают соответствующую планету, для межпланетных КА — Солнце. Направление осей координат будем ориентировать относительно удаленных «неподвижных» звезд. Построенную таким образом систему можно считать невращающейся. Однако она будет неинерциальной за счет ускорения, сообщаемого ее началу притяжением к остальным небесным телам. При этом ввиду малости КА, можно пренебречь притяжением остальных небесных тел к нему. При этих допущениях система уравнений движения КА может быть записана в виде векторного уравнения [49]

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\mu_0 \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} + \sum_{i=1}^N \mu_i \left(\frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}|^3} - \frac{\mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_i|^3} \right) - \frac{\mathbf{P}_0}{M_0} + \frac{\mathbf{P}}{M}, \quad (4.4.1)$$

где \mathbf{r} — вектор, определяющий положение КА в принятой системе координат, \mathbf{r}_i ($i = 1, 2, \dots, N$) — векторы, составленные из координат всех окружающих небесных тел (кроме основного), притяжение к которым учитывается при решении задачи, N — число этих тел, M_0 — масса основного тела, μ_0 — произведение этой массы на гравитационную постоянную, μ_i ($i = 1, 2, \dots, N$) — произведение масс окружающих небесных тел на гравитационную постоянную, \mathbf{P} — сумма дополнительных сил, действующих на КА, т.е. всех сил, за исключением притяжения к центрам рассматриваемых небесных тел, \mathbf{P}_0 — сумма дополнительных сил, действующих на основное тело, M — масса КА.

Первый член правой части уравнения (4.4.1) представляет собой ускорение притяжения центра КА к центру основного небесного тела, второй член — сумму ускорений, вызываемых остальными небесными телами. Каждое из этих ускорений представляет собой геометрическую разность ускорений притяжения КА и основного небесного тела к соответствующему дополнительному телу. Можно показать, что отношение модуля ускорения КА, вызываемого i -м дополнительным телом, к модулю ускорения притяжения к основному телу в первом приближении пропорционально величине [49]

$$k_i = \frac{\mu_i}{\mu_0} \left(\frac{|\mathbf{r}|}{|\mathbf{r}_i|} \right)^3, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

т. е. обратно пропорционально кубу расстояния между основным и дополнительными телами. Поэтому при изучении движения КА, летящего в непосредственной близости от основного тела, можно не учитывать влияния остальных небесных тел. В частности, это относится к искусственным спутникам Земли, летающим на высотах порядка сотен или нескольких тысяч километров. При рассмотрении движения спутников Земли, движущихся на больших высотах, обычно учитывается ускорение, вызываемое Солнцем и Луной, а для межпланетных КА — также ближайшими планетами.

Третий член правой части уравнения (4.4.1) мал и, как правило, не учитывается даже при самых точных расчетах. Что касается последнего члена, то он может определяться различными причинами. Основными из них являются:

- влияние нецентральности полей тяготения рассматриваемых небесных тел;
- аэродинамические силы, возникающие при прохождении через атмосферу некоторого небесного тела;
- световое давление;
- реактивные силы, возникающие при работе различных двигателей КА, а также при любом отделении каких-либо масс от аппарата (истечении газов, выбрасывании ненужных предметов, выходе космонавтов и т. п.).

Из выражений (4.1.1) и (4.1.3) видно, что влияние нецентральности гравитационных полей планет резко убывает по мере удаления от этих планет. Для Земли оно главным образом определяется ее сжатием и в основном описывается членом выражения (4.1.3) с коэффициентом c_{20} . Модуль соответствующего ускорения пропорционален расстоянию от КА до центра Земли в минус четвертой степени. Это ускорение оказывает существенное влияние на движение близких искусственных спутников Земли. Даже на расстоянии орбиты Луны его влияние остается заметным [49]. Что касается остальных членов разложения (4.1.3) потенциала поля тяготения Земли, то соответствующие им ускорения даже у поверхности Земли примерно на два порядка меньше ускорения, вызываемого членом с коэффициентом c_{20} и еще резче убывают с высотой. Однако в ряде случаев

приходится учитывать эти члены (особенно при точном расчете орбит близких спутников Земли).

Аэродинамические силы оказывают заметное влияние на движение КА, пролетающих в непосредственной близости от планет, имеющих атмосферы. В частности, для Земли это имеет место у спутников, летающих на высоте меньше 1000 км. При этом, как правило, учитывается лишь сила сопротивления воздуха, направленная в сторону, противоположную направлению скорости движения спутника относительно окружающей атмосферы. Ее модуль R вычисляется по формуле

$$R = C_x S_m \frac{\rho v^2}{2}, \quad (4.4.2)$$

где C_x — так называемый коэффициент сопротивления воздуха, S_m — площадь миделевого сечения (т. е. наибольшего, нормального к скорости набегающего потока сечения спутника), ρ — плотность атмосферы, v — модуль скорости движения спутника относительно окружающей атмосферы.

Коэффициент C_x зависит от формы спутника и характера его взаимодействия с атмосферой. Он обычно вычисляется по соответствующим приближенным формулам. При этом неизбежны ошибки, достигающие 10—15% определяемой величины. Площадь миделя S_m , строго говоря, зависит от ориентации спутника. В тех случаях, когда движение центра масс вычисляется независимо от движения относительно центра и фактическая ориентация спутника не учитывается, используется среднее значение этой величины [49]

$$S_m = \frac{S_{\text{пол}}}{4},$$

где $S_{\text{пол}}$ — полная поверхность спутника. При этом, как правило, неизбежны дополнительные методические ошибки.

Плотность ρ верхней атмосферы является крайне нестабильной величиной. По современным воззрениям она зависит от высоты рассматриваемой точки над поверхностью Земли, географической широты этой точки, местного солнечного времени, склонения Солнца, его актив-

ности, геомагнитных возмущений и времени года. При этом на одной и той же высоте она может в зависимости от остальных указанных факторов изменяться на несколько порядков.

В настоящее время имеется несколько моделей, позволяющих определять величину ρ с учетом влияния перечисленных факторов [21]. Эти модели имеют неизбежные ошибки, отражающиеся на точности расчета силы сопротивления воздуха. Все это делает невозможным точное определение аэродинамических сил. Поэтому даже при наиболее полном учете влияния этих сил они в ряде случаев остаются источниками значительных методических погрешностей. Для спутников Земли, летающих на сравнительно небольшой высоте (порядка 200—300 км), эти погрешности делают практически бесполезным учет других более тонких факторов (например, старших гармоник в выражении (4.1.3) для потенциала земного тяготения).

Световое давление, действующее на КА в пределах солнечной системы, вызывается излучением Солнца. Это давление оказывает заметное влияние на движение почти всех современных КА, не слишком далеко удаляющихся от Солнца. Исключение составляют лишь низкие спутники планет с атмосферой, для которых влияние светового давления полностью «затушевывается» погрешностями в определении аэродинамических сил. При учете светового давления следует считаться с неизбежными ошибками его определения, связанными с недостаточным знанием законов поглощения и отражения лучистой энергии различными частями КА, трудностями полного расчета этих сил при сложной конфигурации аппарата, погрешностями в определении ориентации КА и т. п. [49].

При включении корректирующих двигателей КА определяющими могут оказаться реактивные силы, создаваемые этими двигателями. При этом характер движения аппарата может полностью измениться. Обычно такое управление полетом носит импульсный характер, т. е. двигатели включаются на сравнительно короткое время (несколько секунд или минут), в течение которого они сообщают аппарату необходимые корректирующие импульсы. Однако могут применяться и двигатели с

малой тягой, изменяющие орбиту КА в течение длительного интервала времени. Не исключено появление неконтролируемых реактивных сил, связанных с неполной компенсацией работы двигателей системы ориентации, непредвиденной утечкой газов из аппарата и т. п.

Следует отметить, что реактивные силы, как правило, не поддаются точному учету. Погрешности в их определении могут явиться источниками существенных ошибок используемых математических моделей движения КА. Поэтому обычно стараются определять фактическую траекторию КА лишь на участках, на которых эти силы заведомо отсутствуют либо пренебрежимо малы. Как указано ниже, погрешности знания реактивных сил могут быть исключены путем установки на КА достаточно точных акселерометров и использования зависимости (4.4.4).

Из изложенного следует, что вопрос о целесообразности и возможности учета влияния тех или иных членов в правых частях уравнений движения КА является достаточно сложным. На него нет общего ответа и он должен решаться для каждого типа аппаратов в отдельности, исходя из конкретных условий (характера орбиты, требований к точности расчета, реальных возможностей учета влияния тех или иных факторов, величины этого влияния и т. п.). При этом следует учитывать не только величину различных составляющих суммарного ускорения центра масс КА, но и характер влияния этих составляющих. Особое внимание следует обращать на составляющие ускорения, влияние которых имеет вековой или долгопериодический характер. Однако, при любой сколь угодно полной системе сил всегда остаются методические погрешности, связанные с неточностью используемых зависимостей сил от фазовых координат, а также с неучетом ряда второстепенных сил.

Помимо выбора системы учитываемых сил большое значение при построении модели движения КА имеет способ интегрирования системы уравнений движения, при помощи которого осуществляется переход от уравнения (4.4.1) к зависимости (4.3.17). В подавляющем большинстве случаев эти уравнения не могут быть проинтегрированы в конечном виде, и приходится прибегать к различным способам получения приближенного или

численного решения, что служит источником дополнительных методических погрешностей.

Полный вектор q состояния центра масс КА включает шесть фазовых координат или элементов орбиты. Он может определяться для заданного (статическая фильтрация) или текущего времени (динамическая фильтрация). Помимо указанных шести величин в вектор q могут быть включены различные уточняемые параметры, определяющие правую часть уравнения (4.4.1). К их числу относятся:

- массы и элементы орбит небесных тел, влияющих на движение КА;

- коэффициенты выражений для потенциалов учитываемых гравитационных полей;

- различные константы, определяющие используемые модели атмосфер планет и коэффициент сопротивления воздуха (следует отметить, что по наблюдениям за движением одного спутника может уточняться лишь произведение величин C_x , S_m и ρ , входящих в выражение (4.4.2), а не каждая из этих величин в отдельности);

- константы, характеризующие световое давление и т. п.

Таким образом, при полном решении рассматриваемой задачи ее размерность $m \geq 6$. Однако в некоторых случаях может решаться неполная задача с размерностью $m < 6$. При этом оценивается лишь часть элементов орбиты или фазовых координат, а остальные принимаются равными их априорным значениям.

Апостериорные данные, используемые при решении рассматриваемой задачи, могут быть разделены на:

- измерения некоторых функций текущих значений фазовых координат (т. е. геометрических координат и составляющих вектора скорости);

- измерения составляющих вектора кажущегося ускорения или их функций (под кажущимся ускорением подразумевается геометрическая разность истинного и гравитационного ускорений).

К первым относятся различные геометрические и кинематические характеристики траектории КА, в том числе:

- расстояния от КА до измерительных пунктов (дальности);

- производные от дальностей по времени (радиальные скорости);
- углы, определяющие направление «измерительный пункт — аппарат» (углы визирования);
- производные от углов визирования по времени (угловые скорости);
- углы между направлениями от аппарата на два фиксированных пункта (звезду, планету, измерительный пункт на Земле, другой КА и т. п.);
- косинусы углов между направлением «измерительный пункт — аппарат» и некоторыми фиксированными направлениями (направляющие косинусы);
- производные от направляющих косинусов по времени, а также другие величины.

Эти величины измеряются различными радиотехническими и оптическими приборами, работа которых сводится к определению:

- времен прохождения используемых сигналов;
- изменений частот сигналов под влиянием эффекта Доплера;
- сдвига фаз при приходе одной и той же электромагнитной волны в различные измерительные пункты;
- направлений электрических и оптических осей измерительных приборов.

Для всех указанных измеряемых параметров p могут быть легко найдены соответствующие геометрические и кинематические зависимости от текущего значения $\varphi(t)$ вектора фазовых координат

$$p = f[\varphi(t)]. \quad (4.4.3)$$

Отсюда, пользуясь полученной в результате интегрирования системы уравнений движения зависимостью (4.3.17), можно построить соответствующие измеряемые функции вида (4.3.21).

Методические ошибки зависимостей (4.3.21) определяются:

- рассмотренными выше погрешностями системы уравнений движения;
- погрешностями приближенного интегрирования этой системы;
- погрешностями зависимостей (4.4.3).

Последние в основном связаны с погрешностями знания условий распространения используемых сигналов, погрешностями определения координат измерительных приборов и направлений их осей, а также с тем, что в реальных условиях слежение ведется не за центром масс аппарата, а за некоторой другой точкой (электрическим центром бортовой антенны, оптическим отражателем и т. п.). При значительных размерах КА и раздельном рассмотрении движения центра масс и вокруг центра масс это может привести к значительным методическим ошибкам, сравнимым с другими ошибками.

Кажущееся ускорение w измеряется акселерометрами, установленными на борту КА. Оно может быть определено по формуле

$$w = a - \gamma = \frac{P_{\text{пов}}}{M}, \quad (4.4.4)$$

где a — истинное ускорение, γ — гравитационное ускорение, $P_{\text{пов}}$ — сумма всех поверхностных сил, действующих на КА (аэродинамических, реактивных, светового давления и т. п.), M — масса КА.

При наличии измерений всех составляющих вектора w можно из правой части уравнения (4.4.1) исключить выражения для ускорений поверхностных сил (входящие в член P/M), заменив их измеренным значением w . Это открывает принципиальную возможность существенного уменьшения методических ошибок, которые в значительной мере определяются неточностью имеющихся выражений для поверхностных сил. Однако при этом необходимо учесть следующие обстоятельства.

1. Для использования измеренных значений w при интегрировании уравнений движения необходимо с достаточной точностью знать фактическую ориентацию аппарата (так как измерения w на борту ведутся в системе координат, связанной с КА, а уравнения движения записаны в невращающейся системе координат).

2. Включение в правую часть уравнения (4.4.1) измеренного значения вектора w вносит в это уравнение дополнительные погрешности, определяемые ошибками измерения величины w .

3. Строго говоря, формула (4.4.4) справедлива лишь в том случае, когда чувствительные элементы акселеро-

метров размещены точно в центре масс КА. В противном случае возникают дополнительные методические погрешности, вызываемые движением аппарата относительно центра его масс. При больших отклонениях от центра масс могут стать заметными погрешности, связанные с неравномерностью гравитационного поля.

Выбор составляющих вектора l оцениваемых параметров, используемых при решении вопросов оценки точности и определения оптимальной стратегии, существенным образом зависит от цели, ради достижения которой определяется траектория. В том случае, когда определение траектории является звеном в системе управления полетом, в качестве составляющих вектора l следует брать величины, по которым ведется управление. Так, например, при определении траектории межпланетного КА, предназначенного для прямого попадания в заданную точку планеты-цели, в вектор l включаются координаты пересечения траектории КА с поверхностью планеты или с так называемой картинной плоскостью (т. е. плоскостью, проходящей через центр планеты и нормальной к номинальной траектории). В том случае, когда межпланетный КА предварительно выводится на орбиту искусственного спутника планеты, в качестве оцениваемого параметра может быть принята так называемая высота условного перицентра (т. е. высота перицентра условной гиперболической орбиты, являющейся продолжением реальной траектории). При управлении движением искусственных спутников планет в качестве оцениваемых параметров часто используются минимальная высота полета и период обращения спутника.

Использование результатов определения траектории КА в контуре управления полетом этого аппарата предъявляет повышенные требования к точности и надежности решения задачи. При этом следует считаться с необходимостью минимизации времени, затрачиваемого на проведение измерений и последующие расчеты. Это связано с тем, что увеличение указанного времени вызывает соответствующую задержку момента подачи корректирующего импульса, что обычно приводит к возрастанию энергетических затрат на проведение коррекции. Последнее является крайне нежелательным, так как запасы топлива на борту КА обычно ограничены. В связи

с этим в рассматриваемом случае определение траектории ведется, как правило, в темпе поступления информации и заканчивается через некоторое время τ после момента t_k окончания мерного интервала (4.3.19). Для сокращения этого времени могут применяться рекуррентные алгоритмы фильтрации (см. § 6.6). При достаточно малом τ решающее значение приобретает возможное сокращение времени t_k . Однако последнее сопряжено с сокращением мерного интервала (4.3.19) и увеличением интервала экстраполяции. Это в свою очередь приводит к ухудшению точности решения задачи, что допустимо лишь до определенного предела. В результате возникает задача выбора оптимальной стратегии, обеспечивающей минимум t_k при заданной точности оценки вектора l . При определении последней следует учитывать не только измерительные, но и указанные выше методические ошибки, влияние которых часто оказывается решающим.

В связи с важностью и ответственностью задач оценки точности и выбора оптимальной стратегии определения траекторий КА следует обратить особое внимание на правильный выбор основных характеристик ошибок измерений и моделей. Так как эти характеристики обычно известны с недостаточной точностью, то при решении указанных задач предпочтителен неклассический подход, описанный в §§ 3.5 и 3.8. При этом различные параметры, определяющие действующие силы (коэффициенты выражений для потенциалов гравитационных полей, массы и элементы орбит притягивающих тел, параметры, характеризующие аэродинамические силы, световое давление и т. п.) и не включаемые в вектор q , следует рассматривать как мешающие.

§ 4.5. Определение фактической ориентации неориентированных космических аппаратов

При проведении научных экспериментов в космосе нередко используются полностью или частично неориентированные КА. Первые из них характеризуются отсутствием каких-либо устройств для поддержания определенной ориентации аппарата в пространстве. На вторых

имеется система ориентации, включаемая лишь эпизодически. Таким образом, оба рассматриваемые типа КА характеризуются тем, что на протяжении всего или значительной части полета они движутся как свободные тела, вращающиеся или колеблющиеся относительно своих центров масс. К этой же категории относятся аппараты, специально закручиваемые относительно какой-либо из своих осей. В том случае, когда на КА установлен научный прибор, показания которого зависят от направления связанной с ним оси, может возникнуть необходимость определения ориентации этой оси относительно некоторой не связанной с КА системой координат (невращающейся системы, системы, связанной с Землей или какой-либо планетой и т. п.). Так как ориентация оси прибора относительно системы координат, связанной с аппаратом, обычно известна, то задача сводится к определению фактической ориентации осей координат, связанных с КА, относительно какой-либо не связанной системой осей (переход от одной не связанной системы к другой обычно не представляет труда).

Обозначим через α совокупность координат единичного вектора оси прибора в связанной с КА прямоугольной системе координат, а через r^0 — координаты того же вектора в не связанной прямоугольной системе. Очевидно, что

$$r^0 = A(t) \alpha^0, \quad (4.5.1)$$

где $A(t)$ — ортогональная матрица перехода от одной системы координат к другой. Таким образом, задача сводится к определению зависимости матрицы A от времени. Из условия ортогональности этой матрицы следует, что ее девять коэффициентов полностью определяются тремя независимыми величинами. В качестве последних могут быть взяты, например, углы Эйлера [19] или совокупность каких-либо других трех величин $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, связанная с углами Эйлера взаимно однозначным соответствием всюду, за исключением некоторых особых направлений. В результате получаем задачу определения вектора $\gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$ в зависимости от времени.

При решении этой задачи используются следующие два типа математических моделей:

— кинематические модели, основанные на аппроксимации зависимости $\gamma(t)$ некоторыми приближенными выражениями;

— динамические модели, в которых зависимость $\gamma(t)$ находится из решения системы уравнений движения.

При построении кинематических моделей зависимость $\gamma(t)$ представляется в виде комбинации элементарных функций, в которую входят несколько подлежащих определению свободных параметров. Совокупность этих параметров представляет собой вектор $q = \{q_1, q_2, \dots, q_m\}$ состояния. Обычно используются простейшие степенные или тригонометрические функции [43]. При этом вид приближенной зависимости $\gamma(t)$ выбирается с учетом характера движения КА относительно центра масс. В результате получаем зависимость вида

$$\gamma(t) = \Phi(q, t). \quad (4.5.2)$$

Преимуществом такого подхода является простота математической модели и возможность построения этой модели в том случае, когда создание динамической модели оказывается затруднительным. Недостаток — меньшая точность по сравнению с достаточно полной динамической моделью и связанная с ней необходимость уменьшения мерного интервала (что в свою очередь приводит к увеличению влияния ошибок измерений на точность получаемых результатов).

Динамические модели движения КА относительно центра масс обычно базируются на рассмотрении аппарата в качестве абсолютно твердого тела, представляющего собой голономную систему с тремя степенями свободы [19]. В соответствии с зависимостью (4.3.11) движение этого тела описывается шестимерным фазовым вектором $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_6\}$. В качестве последнего может быть взята совокупность векторов $\dot{\gamma}$ и γ или любой другой шестимерный вектор, находящийся во взаимно однозначном соответствии с этой совокупностью. При этом система уравнений движения аппарата относительно его центра масс может быть представлена в виде векторного уравнения

$$\dot{\Phi} = \Phi(\Phi, L), \quad (4.5.3)$$

где L — сумма моментов всех действующих на КА сил относительно его центра масс, а вид зависимости $\Phi(\varphi, L)$ определяется выбором фазового вектора φ .

При $L = 0$ интегрирование уравнения (4.5.3) представляет собой известную задачу Эйлера — Пуансо, имеющую конечное решение в эллиптических функциях [19]. При $L \neq 0$ уравнение (4.5.3) не имеет, вообще говоря, конечного решения (за исключением нескольких частных случаев, не представляющих для нас практического интереса). В этом случае для решения системы (4.5.3) и получения зависимости вида (4.3.17) приходится прибегать к численному интегрированию. При этом имеют место трудности, связанные с часто встречающейся малостью периода вращения или колебания аппарата относительно его центра масс, что заставляет пользоваться малым шагом численного интегрирования. Последнее в свою очередь увеличивает время расчета и ухудшает его точность *).

Отдельные составляющие суммарного момента L определяются в основном:

- неоднородностью гравитационного поля;
- аэродинамическими силами;
- взаимодействием КА с магнитными и электрическими полями;
- световым давлением;
- движением внутри КА (работой отдельных агрегатов, движением космонавтов и т. п.).

Гравитационные, аэродинамические и магнитные моменты имеют наибольшее значение при полете в непосредственной близости от планет, где особенно сказываются неравномерности гравитационного поля, а также влияние атмосферы и магнитного поля планеты. Проведенные исследования [11] показывают, что для искусственных спутников Земли до высот 200—300 км преобладают аэродинамические моменты. С увеличением высоты полета их влияние резко падает, и на высотах больше 500 км преобладают гравитационные и магнитные моменты. Следует заметить, что магнитные моменты

*) Эта трудность может быть преодолена путем использования теории возмущений. Однако при этом существенно усложняется алгоритм расчета.

в значительной мере зависят от конструкции спутника. При наличии на последнем сильных постоянных магнитов, сильных токовых систем и т. п. они могут быть на 2—3 порядка больше гравитационных. В обычных условиях они сравнимы с гравитационными моментами.

Моменты сил светового давления на указанной высоте на один—два порядка меньше гравитационных. С дальнейшим увеличением высоты полета гравитационные и магнитные моменты постепенно уменьшаются, в то время как моменты сил светового давления остаются практически постоянными. Поэтому на высотах больше 35 000—40 000 км они становятся преобладающими.

Из указанных моментов наиболее просто определяется гравитационный, для которого имеются несложные и достаточно точные выражения [11]. Что касается остальных моментов, то их вычисление наталкивается на значительные трудности, определяемые:

- сложностью конфигурации большинства КА;
- трудностью точного определения в условиях полета собственного магнитного поля КА и возникающих в нем электрических токов;
- недостаточной изученностью основных характеристик взаимодействия КА с набегающим потоком воздуха;
- плохим знанием параметров, определяющих поглощение и отражение лучистой энергии;
- трудностью учета влияния всех движений внутри КА;
- большими углами поворота аппарата при его движении относительно центра масс, что исключает использование различных методов линеаризации.

С другой стороны, моменты, действующие на КА, обычно малы по сравнению с его собственным кинетическим моментом. Это позволяет при расчете движения на длительных интервалах времени (порядка часа и больше) вообще не учитывать влияние моментов сил и полагать в правой части уравнения (4.5.3) $L = 0$. В результате получаем задачу Эйлера — Пуансо, в которой движение КА относительно центра масс целиком определяется начальными значениями фазового вектора Φ_0 и шестью составляющими I_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) центрального тензора инерции аппарата [19]. В этом случае

вектор q состояния представляет собой двенадцатимерную совокупность указанных величин

$$q = \{\varphi_0, J_1, J_2, \dots, J_6\}. \quad (4.5.4)$$

Пользуясь известным решением задачи Эйлера — Пуансо, можно получить зависимость (4.3.17) текущего значения фазового вектора от вектора состояния и времени.

Составляющие тензора инерции КА могут быть определены до запуска аппарата расчетным путем или в результате проведения соответствующих стендовых испытаний. Если эта работа проделана достаточно тщательно, то величины J_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) могут быть исключены из числа оцениваемых составляющих вектора q .

При неблагоприятном соотношении кинетического момента аппарата и моментов действующих сил (когда первый из них относительно мал, а последние — велики) точность построения модели движения на основе решения задачи Эйлера — Пуансо падает. В этом случае приходится либо сокращать продолжительность мерного интервала (4.3.19), либо строить зависимость (4.3.17) на основе численного интегрирования уравнения (4.5.3) с учетом основных моментов сил. При этом в число составляющих вектора q могут быть включены некоторые параметры, характеризующие учитываемые моменты сил.

В качестве измеряемых параметров используются результаты определения в связанной с КА системе координат некоторых направлений, известных в несвязанной системе. К их числу относятся:

- направление от КА на какое-либо другое небесное тело, движение которого известно (Солнце, звезду, планету, другой КА);
- направление вектора напряженности магнитного поля Земли.

Пользуясь результатами определения траектории КА (см. § 4.4), можно для заданного времени t найти единичный вектор r^0 рассматриваемого направления в несвязанной системе координат. Соответствующий единичный вектор α^0 в связанной системе определяется в результате измерений. Зависимость между обоими век-

торами характеризуется выражением (4.5.1). Входящая в это равенство матрица $A(t)$ является известной функцией вектора $\gamma(t)$ и, следовательно, текущего значения $\Phi(t)$ фазового вектора. Единичный вектор r^0 может быть охарактеризован двумя независимыми параметрами p_1 и p_2 (например, некоторыми двумя углами). В результате, пользуясь зависимостью (4.5.2) или (4.3.17), получаем две скалярные измеряемые функции

$$p_i = \Psi(q, t), \quad i = 1, 2. \quad (4.5.5)$$

Если одновременно определяется несколько направлений, то число независимых измеряемых функций оказывается больше трех. В этом случае можно определять вектор $\gamma(t)$ и матрицу $A(t)$ для каждого момента времени t в отдельности, а затем объединять получаемые результаты единой интерполяционной зависимостью вида (4.5.2) или (4.3.17).

В тех случаях, когда модели типа (4.3.17) или (4.5.2) обеспечивают достаточную точность расчета коэффициентов матрицы $A(t)$ на сравнительно длительном интервале времени (4.3.19), ориентация КА может быть с успехом определена по измерениям одного направления, характеризуемого единичными векторами α^0 и r^0 . При этом, в соответствии с зависимостью (4.5.5), мы получаем две независимые измеряемые функции $p_1(t)$ и $p_2(t)$. Очевидно, что их недостаточно для локального определения трех составляющих вектора $\gamma(t)$ в заданный момент t , так как в этом случае ориентация КА определяется лишь с точностью до произвольного поворота относительно вектора r^0 . Однако если использовать результаты измерений на некотором мерном интервале (4.3.19), на котором существенно изменяется направление вектора r^0 , и объединить эти измерения математической моделью вида (4.3.17) или (4.5.2), то можно получить достаточную информацию для оценки вектора q состояния, а значит, и для определения полной ориентации КА на всем интервале (4.3.19).

Таким образом, в зависимости от вида имеющейся измерительной информации и характера сведений о законе движения КА относительно его центра масс, могут быть использованы следующие два способа определения ориентации КА;

1. Способ, базирующийся на локальном независимом определении ориентации для каждого момента t в отдельности. Для осуществления этого способа необходимы одновременные измерения в связанной с КА системе координат составляющих нескольких единичных векторов α_j^0 ($j = 1, 2, \dots, k; k \geq 2$). Зависимости между этими векторами и единичными векторами r_j^0 соответствующих направлений в несвязанной системе координат определяются выражениями вида (4.5.1). Входящая в эти выражения матрица $A(t)$ является функцией вектора $\gamma(t) = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$, т. е.

$$A(t) = A[\gamma(t)].$$

В результате получаем совокупность зависимостей

$$\alpha_j^0 = A^{-1}[\gamma(t)] r_j^0(t), \quad j = 1, 2, \dots, k, k \geq 2. \quad (4.5.6)$$

Задаваясь некоторой последовательностью времен

$$t_1, t_2, \dots, t_n \quad (4.5.7)$$

и измеряя для каждого из этих времен t_i направления векторов $\alpha_j^0(t_i)$, можно найти соответствующую оценку вектора $\gamma(t_i)$ и определить ориентацию КА для всех времен, входящих в последовательность (4.5.7). При этом зависимость (4.5.6) играет роль непрогнозируемой математической модели.

2. Способ, базирующийся на совместной обработке результатов измерений на некотором мерном интервале (4.3.19). При этом в каждый момент времени можно ограничиться измерением направления одного вектора α^0 или даже только одного из параметров p_1 или p_2 , характеризующих этот вектор. При этом совершенно необходимо использование прогнозируемой модели движения, описываемой зависимостью вида (4.3.17) или (4.5.2).

Выбор того или иного способа определения ориентации зависит от конкретных условий, в которых решается задача. При невозможности построения достаточно точной и надежной модели движения (когда на КА действуют большие, не поддающиеся учету моменты сил) и при наличии достаточно полной системы измерений предпочтительнее первый способ. В том случае, когда

может быть построена хорошая модель движения, второй способ обеспечивает большую точность решения задачи. При этом может быть использована ограниченная система измерений. Следует иметь в виду, что второй способ сопряжен со значительно более трудоемкими расчетами, так как он сводится к совместной статистической обработке большого числа измерений и требует использования сложной математической модели. С другой стороны, первый способ, строго говоря, позволяет определять ориентацию лишь для времен t_i проведения измерений. Для перехода к другим временам необходимо использование некоторых сведений о законе движения.

Из изложенного следует, что при определении ориентации КА наряду с построением оптимального алгоритма фильтрации могут рассматриваться следующие задачи выбора оптимальной стратегии:

1. Выбор одного из указанных двух способов определения ориентации.

2. Выбор типа и структуры математической модели, а также состава вектора φ . При этом для кинематической модели должна быть определена форма зависимости (4.5.2), а для динамической модели — установлен состав учитываемых при решении уравнения (4.5.3) моментов сил и построены зависимости этих моментов от фазового вектора Φ .

3. Разделение всего интервала обработки на мерные интервалы (4.3.19) и определение состава измерений, используемых на каждом мерном интервале.

При решении перечисленных задач, а также при оценке точности полученных результатов, следует наряду с ошибками измерений учитывать методические погрешности, вызываемые различными причинами. К последним относятся:

— ошибки определения единичных векторов r^0 в несвязанной системе координат, вызываемые погрешностями вычисления координат используемых для этой цели небесных тел, ошибками расчета направления вектора напряженности магнитного поля и другими причинами;

— методические ошибки измерителей векторов α^0 (погрешности магнитометров, вызываемые собственными магнитными полями КА, различные уходы осей оптических приборов и т. п.);

— погрешности приведения всех измерений к одному времени при локальном определении ориентации с использованием зависимости (4.5.6);

— ошибки приближенной зависимости (4.5.2), используемой при построении кинематической модели движения;

— неучет влияния всех или части моментов сил в уравнении (4.5.3), используемом при построении динамической модели;

— ошибки приближенных выражений для зависимостей моментов сил от фазового вектора;

— ошибки приближенного решения уравнения (4.5.3).

§ 4.6. Линеаризация математической модели

Как будет показано ниже, многие используемые на практике алгоритмы фильтрации разработаны применительно к линейным (относительно q) моделям, в которых зависимость (2.1.3) имеет вид

$$\dot{d} = Aq, \quad (4.6.1)$$

где A — заданная матрица $n \times m$. Примером линейной модели может служить описанная в § 4.2 модель магнитного поля Земли. Из выражений (4.2.1) и (4.2.2) следует, что если в качестве измеряемых параметров d_i ($i = 1, 2, \dots, n$) использовать составляющие вектора H напряженности магнитного поля, а в качестве параметров q_j ($j = 1, 2, \dots, m$) — коэффициенты разложения (4.2.2), то зависимость между этими величинами имеет вид (4.6.1).

Однако, как видно из приведенных выше примеров, во многих имеющих важное прикладное значение случаях между векторами d и q существует сложная нелинейная зависимость. Часто она даже не может быть описана аналитическими выражениями и определяется численными алгоритмами расчета на вычислительных машинах (например, численным решением системы дифференциальных или интегральных уравнений).

В связи с этим возникает задача приведения общей зависимости (2.3.1) к виду (4.6.1). Эта операция называется *линеаризацией*. Для ее осуществления предварительно выбирают некоторое приближенное *опорное* зна-

чение q_0 вектора q . При этом используются результаты обработки предыдущих наблюдений, либо результаты решения условных уравнений (2.1.7) для некоторой достаточной системы измерений, либо проектные данные (для искусственных систем).

Введем обозначения:

$$d_0 = F(q_0), \quad v = q - q_0, \quad \beta = d - d_0. \quad (4.6.2)$$

Тогда, полагая зависимость (2.1.3) дифференцируемой, получим

$$\beta = \left(\frac{\partial F}{\partial q} \right)_0 v + O(v^2), \quad (4.6.3)$$

где $\left(\frac{\partial F}{\partial q} \right)_0 = \left(\frac{\partial F_i}{\partial q_j} \right)_0$ — матрица $n \times m$ частных производных от составляющих вектора $F = \{F_1, F_2, \dots, F_n\}$ по составляющим вектора $q = \{q_1, q_2, \dots, q_m\}$, вычисленная для значения $q = q_0$, а $O(v^2)$ — величина высшего порядка малости (по отношению к v). Отбрасывая в правой части выражения (4.6.3) величину $O(v^2)$ и обозначая

$$\left(\frac{\partial F}{\partial q} \right)_0 = A, \quad (4.6.4)$$

получим линейную зависимость

$$\beta = A v. \quad (4.6.5)$$

В качестве измеренного значения вектора β используем величину

$$\tilde{\beta} = \tilde{d} - d_0. \quad (4.6.6)$$

Отсюда, пользуясь одним из описанных ниже алгоритмов фильтрации, находим соответствующие оценки векторов v и q :

$$\hat{v} = \Phi(\tilde{\beta}), \quad \hat{q} = q_0 + \hat{v}. \quad (4.6.7)$$

При таком способе оценки состояния системы к ошибкам η модели добавляются погрешности $O(v^2)$ линеаризации. Эти погрешности тем меньше, чем ближе опорное значение q_0 к истинной величине $q_{\text{н}}$. В том случае, когда влияние $O(v^2)$ на оценку \hat{q} мало по сравнению с влиянием ошибок η и ξ , ими можно пренебречь.

Если влияние погрешности линеаризации ощутимо, обычно используют метод последовательных приближе-

Образуемый этой совокупностью вектор $d = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ связан с вектором q линейной зависимостью (4.6.1), в которой матрица

$$A = \begin{pmatrix} \Psi_1(t_1) & \Psi_2(t_1) & \dots & \Psi_m(t_1) \\ \Psi_1(t_2) & \Psi_2(t_2) & \dots & \Psi_m(t_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Psi_1(t_n) & \Psi_2(t_n) & \dots & \Psi_m(t_n) \end{pmatrix}. \quad (4.6.12)$$

При задании произвольной измеряемой функции $\Psi(q, t)$ и линеаризации ее по указанной выше схеме используемые в процессе последовательных приближений линейные функции $\Psi_i(t)q$ ($i = 0, 1, 2, \dots$) определяются с помощью формул

$$\left. \begin{aligned} \Psi_i(t) &= (\Psi_{i1}(t) \Psi_{i2}(t) \dots \Psi_{im}(t)), \\ \Psi_{ij}(t) &= \left. \frac{\partial \Psi_j(q, t)}{\partial q_i} \right|_{q=\hat{q}_i}, \quad j = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \right\} \quad (4.6.13)$$

Все сказанное выше может быть непосредственно распространено на случай неоднородных измерений, определяемых произвольной векторной функцией вида (2.4.7).

§ 4.7. Вычисление матриц частных производных от измеряемых параметров по параметрам состояния системы

В процессе линеаризации математической модели (2.1.3) возникает необходимость вычисления матрицы $\partial F / \partial q$ частных производных от измеряемых параметров d_i ($i = 1, 2, \dots, n$) по параметрам q_j ($j = 1, 2, \dots, m$) состояния системы. В настоящее время обычно применяются следующие три способа решения этой задачи:

- способ конечных разностей;
- сведение задачи к решению системы дифференциальных уравнений в вариациях;
- дифференцирование приближенных аналитических зависимостей.

При первом способе частные производные $\partial F_i / \partial q_j$ вычисляются путем численного дифференцирования исходной зависимости (2.1.3). Наиболее часто используются

простейшие формулы

$$\frac{\partial F_i}{\partial q_j} = \frac{F_i(q_1, q_2, \dots, q_{j-1}, q_j + h, q_{j+1}, \dots, q_m) - F_i(q_1, q_2, \dots, q_m)}{h} \quad (4.7.1)$$

или

$$\frac{\partial F_i}{\partial q_j} = \frac{F_i(q_1, q_2, \dots, q_{j-1}, q_j + h, q_{j+1}, \dots, q_m) - F_i(q_1, q_2, \dots, q_{j-1}, q_j - h, q_{j+1}, \dots, q_m)}{2h}, \quad (4.7.2)$$

где h — шаг численного дифференцирования.

Первая из этих формул несколько менее трудоемка, но обеспечивает худшую точность расчета. Шаг в этих формулах обычно выбирается на основе результатов серии расчетов с различными значениями h . На рис. 4.7.1

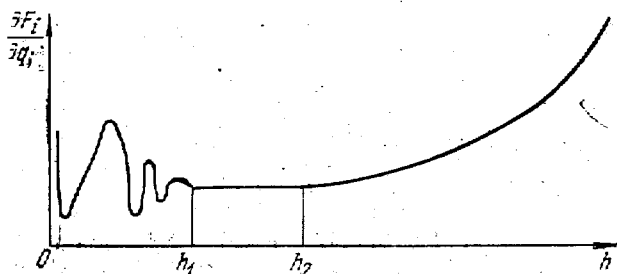


рис. 4.7.1. Зависимость вычисленного значения производной $\partial F_i/\partial q_j$ от шага h численного дифференцирования.

изображен график типичной зависимости полученных значений $\partial F_i/\partial q_j$ от шага h . Из этого рисунка видно, что по мере уменьшения h расчетное значение $\partial F_i/\partial q_j$ стремится к определенному пределу, что связано с уменьшением влияния методических погрешностей используемой формулы численного интегрирования. На некотором интервале

$$h_1 < h < h_2 \quad (4.7.3)$$

$\partial F_i/\partial q_j$ практически не зависит от h . При дальнейшем уменьшении h начинает сказываться влияние случайных ошибок расчета, приводящих к скачкообразным измене-

ниям вычисляемого значения $\partial F_i / \partial q_j$. В случае получения такой картины для решения рассматриваемой задачи может быть использовано любое значение h , лежащее на интервале (4.7.3).

Однако в некоторых случаях интервал (4.7.3) отсутствует и скачкообразное изменение величины $\partial F_i / \partial q_j$ начинается до достижения ею некоторого стационарного значения. В этом случае необходимо увеличить точность вычислений (например, перейти к расчету с большим числом знаков) либо использовать формулу численного дифференцирования с меньшей методической погрешностью (например, — перейти от формулы (4.7.1) к (4.7.2)).

✓ Способ расчета матрицы $\partial F / \partial q$, при котором используется решение системы дифференциальных уравнений в вариациях, может быть применен в том случае, когда в основу математической модели положено решение системы дифференциальных уравнений. Рассмотрим этот способ на примере механической системы (см. § 4.3), движение которой описывается векторным дифференциальным уравнением (4.3.14). В этом случае некоторый измеряемый параметр d_i ($i = 1, 2, \dots, n$) определяется при помощи выражения

$$d_i = F_i(q) = \Psi(q, t_i), \quad (4.7.4)$$

где $\Psi(q, t)$ — соответствующая измеряемая функция, вычисляемая по формуле (4.3.21), а t_i — время измерений.

Пользуясь зависимостями (4.7.4), (4.3.17) и (4.3.21), находим выражения для произвольного элемента матрицы $\partial F / \partial q$

$$\frac{\partial F_i}{\partial q_j} = \sum_{\beta=1}^{\pi} \frac{\partial f}{\partial \Phi_{\beta}(t_i)} \frac{\partial \Phi_{\beta}(t_i)}{\partial q_j}, \quad (4.7.5)$$

$$i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

где π — определяемый по формуле (4.3.10) или (4.3.11) порядок системы уравнений движения, равный размерности фазового вектора Φ . Зависимость $f[\Phi(t)]$, как правило, имеет простейшую аналитическую форму. Поэтому вычисление частных производных $\partial f / \partial \Phi_{\beta}(t_i)$ не представляет труда.

Остается задача вычисления частных производных $\partial\varphi(t_i)/\partial q_i$. Обозначим через $\partial\varphi(t_i)/\partial q$ матрицу $\pi \times m$ этих производных. Пользуясь выражением (4.3.15), можно представить ее в виде совокупности двух матриц

$$\frac{\partial\varphi(t_i)}{\partial q} = \left(\frac{\partial\varphi(t_i)}{\partial\varphi_0} \quad \frac{\partial\varphi(t_i)}{\partial p} \right), \quad (4.7.6)$$

где $\partial\varphi(t_i)/\partial\varphi_0$ — матрица $\pi \times \pi$ частных производных от текущих значений фазовых координат по их начальным значениям, а $\partial\varphi(t_i)/\partial p$ — матрица $\pi \times m_2$ частных производных от текущих значений фазовых координат по параметрам, определяющим правые части уравнений движения.

Таким образом, задача сводится к определению матриц $\partial\varphi(t)/\partial\varphi_0$ и $\partial\varphi(t)/\partial p$ для произвольного момента t . Для вычисления первой из них перепишем выражения (4.3.14), (4.3.15) и (4.3.17) в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\varphi(t)}{dt} &= \theta[\varphi(t), p, t], \\ \varphi(t) &= \Phi(\varphi_0, p, t). \end{aligned} \right\} \quad (4.7.7)$$

Дифференцируя эти зависимости по составляющим вектора φ_0 , получаем матричное однородное дифференциальное уравнение в вариациях

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial\varphi(t)}{\partial\varphi_0} \right] = \frac{\partial\theta}{\partial\varphi(t)} \frac{\partial\varphi(t)}{\partial\varphi_0}. \quad (4.7.8)$$

Если задаться некоторым номинальным значением $q_n = \{\varphi_n(t_0), p_n\}$, вектора состояния, то, интегрируя уравнение (4.3.14) при начальных условиях

$$\varphi_0 = \varphi_n(t_0), \quad p = p_n, \quad (4.7.9)$$

получаем соответствующее значение фазового вектора

$$\varphi(t) = \Phi(q_n, t),$$

пользуясь которым можно представить уравнение (4.7.8) в виде матричного линейного однородного уравнения

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial\varphi(t)}{\partial\varphi_0} \right] = A(q_n, t) \frac{\partial\varphi(t)}{\partial\varphi_0}, \quad (4.7.10)$$

где $A(q_n, t)$ — значение матрицы $\partial\theta/\partial\varphi(t)$ при условиях (4.7.9).

Напишем теперь начальные условия, которым должно удовлетворять решение уравнения (4.7.10)

$$\frac{\partial \Phi(t)}{\partial \Phi_0} = I \quad \text{при} \quad t = t_0. \quad (4.7.11)$$

Интегрирование матричного уравнения (4.7.10) при начальных условиях (4.7.11) равносильно отысканию π решений векторного дифференциального уравнения

$$\frac{dz}{dt} = A(q_n, t)z, \quad (4.7.12)$$

представляющего собой систему π линейных однородных уравнений относительно составляющих вектора $z = \{z_1, z_2, \dots, z_\pi\}$.

Эта система решается при начальных условиях

$$z_j = \begin{cases} 0 & \text{при } j \neq \alpha, \\ 1 & \text{при } j = \alpha, \end{cases} \quad (4.7.13)$$

где α — некоторое заданное значение индекса j .

Решение системы (4.7.12) при фиксированном α дает соответствующий столбец $z_\alpha(t)$ матрицы $\partial \Phi(t) / \partial \Phi_0$. Придавая α все возможные значения $\alpha = 1, 2, \dots, \pi$, находим всю матрицу

$$\frac{\partial \Phi(t)}{\partial \Phi_0} = [z_1(t) \ z_2(t) \ \dots \ z_\pi(t)]. \quad (4.7.14)$$

Для вычисления матрицы $\partial \Phi(t) / \partial p$ продифференцируем зависимость (4.7.7) по составляющим вектора $p = \{p_1, p_2, \dots, p_{m_3}\}$. Получим матричное неоднородное дифференциальное уравнение в вариациях

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \Phi(t)}{\partial p} \right] = \frac{\partial \Phi(t)}{\partial \Phi(t)} \frac{\partial \Phi(t)}{\partial p} + \frac{\partial \Phi(t)}{\partial p}, \quad (4.7.15)$$

которое при условиях (4.7.9) представляет собой линейное неоднородное уравнение

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \Phi(t)}{\partial p} \right] = A(q_n, t) \frac{\partial \Phi(t)}{\partial p} + B(q_n, t), \quad (4.7.16)$$

где $B(q_n, t)$ — соответствующее значение матрицы $\partial \Phi / \partial p$.

Это уравнение интегрируется при начальных условиях

$$\frac{\partial \Phi(t)}{\partial p} = 0 \quad \text{при} \quad t = t_0, \quad (4.7.17)$$

что равносильно интегрированию m_3 векторных уравнений

$$\frac{dz}{dt} = A(q_n, t)z + B_\beta(q_n, t), \quad \beta = 1, 2, \dots, m_3 \quad (4.7.18)$$

при начальных условиях

$$z(t_0) = 0.$$

Здесь $B_\beta(q_n, t)$ — соответствующий столбец матрицы $B(q_n, t)$.

Каждое из уравнений (4.7.18) представляет собой систему n линейных неоднородных дифференциальных уравнений. Его решение определяет β -й столбец матрицы $\partial \Phi(t)/\partial p$. Совокупность этих решений при $\beta = 1, 2, \dots, m_3$ дает всю матрицу.

Как было замечено в предыдущем параграфе, при линеаризации математической модели, в методе последовательных приближений допустимы определенные погрешности расчета матрицы $\partial F/\partial q$. Это позволяет заменять при расчете указанной матрицы точную математическую модель (2.1.3) некоторой приближенной аналитической зависимостью и определять элементы матрицы частных производных путем дифференцирования указанной зависимости.

В качестве примера рассмотрим задачу определения траектории космического аппарата. При приближенном исследовании движения такого аппарата можно в ряде случаев разбить всю траекторию на участки, соответствующие так называемым зонам действия притягивающих тел [49]. На каждом из этих участков точная траектория заменяется кеплеровской орбитой, получаемой при движении в центральном поле тяготения Ньютона.

Пусть $q = \{\varphi, p\}$ — вектор состояния, включающий фазовый вектор φ аппарата (вектор элементов орбиты) и вектор p параметров, определяющих правые части уравнений движения (массы притягивающих центров, элементы их орбит и т. п.). Предположим, что вся траек-

тория разбита на k участков движения по кеплеровским орбитам. Обозначим эти участки через u_j ($j = 1, 2, \dots, k$), а через t_{j-1} и t_j — времена начала и окончания участка u_j . На каждом из этих участков может использоваться своя форма записи фазового вектора Φ , определяемая спецификой расчета соответствующей кеплеровской орбиты (выбором системы координат, элементов орбит, учитываемых составляющих вектора p и т. п.). Обозначим через Φ_j форму представления вектора Φ на участке u_j , а через $q_j(t) = \{\Phi_j(t), p\}$ — текущее значение вектора состояния на этом участке. Между значениями $q_j(t_j)$ и $q_{j+1}(t_j)$, представляющими вектор состояния в момент перехода с участка на u_j на участок u_{j+1} , существует простая аналитическая зависимость

$$q_{j+1}(t_j) = f[q_j(t_j)], \quad (4.7.19)$$

определяемая соответствующим преобразованием координат.

Кроме того, на основе законов движения по кеплеровской орбите, для каждого участка u_j может быть составлена аналитическая зависимость текущего значения $q_j(t)$ вектора состояния от его значения $q_j(t_{j-1})$ в начале этого участка,

$$q_j(t) = \Phi[t, q_j(t_{j-1})] \quad (4.7.20)$$

при условии, что время t принадлежит замкнутому интервалу

$$t_{j-1} \leq t \leq t_j. \quad (4.7.21)$$

В качестве вектора q , определяющего всю траекторию, можно использовать начальное значение текущего вектора состояния

$$q = q_1(t_0). \quad (4.7.22)$$

Зная эту величину, можно, пользуясь зависимостями (4.7.19) и (4.7.20), определить текущее значение вектора $q(t)$ в любой точке траектории.

Дифференцируя зависимости (4.7.19) и (4.7.20), находим выражение для матрицы частных производных от текущего значения вектора фазовых координат по вектору q состояния системы, для произвольного вре-

мени, принадлежащего замкнутому интервалу (4.7.21):

$$\frac{\partial \Phi(t)}{\partial q} = \frac{\partial \Phi(t)}{\partial q_j(t_{j-1})} \cdot \frac{\partial q_j(t_{j-1})}{\partial q_{j-1}(t_{j-1})} \cdot \frac{\partial q_{j-1}(t_{j-1})}{\partial q_{j-1}(t_{j-2})} \cdot \frac{\partial q_{j-1}(t_{j-2})}{\partial q_{j-2}(t_{j-2})} \cdot \dots$$

$$\dots \frac{\partial q_2(t_2)}{\partial q_2(t_1)} \cdot \frac{\partial q_2(t_1)}{\partial q_1(t_1)} \cdot \frac{\partial q_1(t_1)}{\partial q_1(t_0)}. \quad (4.7.23)$$

Вычислив матрицу $\partial \Phi(t)/\partial q$, можно при помощи выражений (4.7.5) определить искомую матрицу $\partial F/\partial q$.

При сравнении описанных методов расчета матрицы $\partial F/\partial q$ следует отметить, что первый из них является наиболее простым и не налагает ограничений на вид математической модели. Однако при его практическом применении могут возникнуть трудности с выбором шага численного дифференцирования, а также необходимость проведения всех расчетов с высокой точностью, что в свою очередь может потребовать больших затрат машинного времени.

Второй способ является более сложным с точки зрения составления алгоритмов и программ расчета. Кроме того, он применим лишь для определенного вида математической модели. Преимуществом его является большая точность (он не имеет собственных методических погрешностей) и возможность проведения всех вычислений с пониженным по сравнению с первым методом числом знаков.

Третий способ часто требует составления сложных алгоритмов и программ расчета. Он применим лишь при возможности представления математической модели приближенной аналитической зависимостью и обладает собственными методическими погрешностями. Его преимуществом является возможность существенного повышения скорости проведения расчетов (по сравнению с первыми двумя способами).

§ 4.8. Статистическая регрессия

Для рассмотренных в §§ 4.1—4.5 прикладных задач характерно наличие достаточно полных сведений о математических законах, определяющих состояние и движение изучаемых реальных систем. На этих законах базируется построение используемых математических

моделей. При этом предполагается наличие детерминированной зависимости между истинными значениями d_n и q_n векторов измерений и состояния.

Однако при решении ряда важных задач математические законы, управляющие состоянием и движением исследуемых систем, неизвестны или известны с недостаточной точностью. Это в первую очередь относится к различным биологическим и социальным системам.

При этом часто возникает задача определения значения некоторого вектора $y = \{y_1, y_2, \dots, y_l\}$ характеристик рассматриваемой системы по измерениям другого вектора $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, т. е. в построении зависимости вида

$$y = F(x). \quad (4.8.1)$$

Для этой цели используется одно или несколько измерений соответствующих друг другу значений векторов x и y и подбирается наилучшее (в определенном смысле) соотношение (4.8.1), описывающее зависимость между результатами измерений. Это соотношение используется в дальнейшем для оценки величины y по измеренному значению x .

Сформулированная таким образом задача обычно называется задачей определения *статистической регрессии*, величина x — вектором *независимых* (или *предсказывающих*) переменных, y — вектором *зависимых* переменных (или *переменных критерия*).

Характерной особенностью задач такого типа является то, что они могут решаться и при отсутствии детерминированной зависимости между величинами x и y . Рассмотрим следующий пример. Предположим, что мы ведем одновременные наблюдения за числом x автомобильных катастроф в большом городе и уменьшением y периода обращения некоторого искусственного спутника Земли. Очевидно, что между этими величинами практически не существует детерминированной зависимости. Однако если мы рассмотрим достаточно большой ряд измерений, то обнаружим, что увеличению x часто соответствует возрастание y . Это связано с тем, что при усилении активности Солнца, с одной стороны, возрастает число автомобильных катастроф, а с другой, — увеличивается плотность верхней атмосферы, что в свою оче-

редь усиливает процесс торможения спутника за счет сопротивления воздуха. Поэтому в результате статистической обработки данных измерений может быть получена регрессионная статистическая зависимость $y = F(x)$. Однако ею можно пользоваться лишь при вполне определенных условиях, соответствующих условиям проведения измерений. При изменении этих условий (например, при изменении орбиты спутника, проведении различных административных мероприятий по борьбе с автомобильными катастрофами, переходе в другой диапазон изменения солнечной активности и т. п.) эта зависимость может нарушаться. Очевидно, что полностью абсурдной является попытка использования полученной зависимости для целей управления полетом спутника путем изменения числа автомобильных катастроф.

Заметим, что разделение изучаемых зависимостей на детерминированные и статистические в значительной мере условно. Любая детерминированная зависимость содержит элемент неопределенности, связанный с наличием ошибок измерений и модели. С другой стороны регрессионная зависимость (4.8.1) может в большей или меньшей мере определяться детерминированными связями.

Примером может служить задача формализации постановки медицинского (или какого-либо другого) диагноза. При этом составляющими векторами x служат результаты исследования состояния пациента (данные медицинского осмотра, различных анализов, рентгенологических исследований и т. п.), а составляющими вектора y — вероятности того, что пациент здоров или болен некоторой определенной болезнью (каждой болезни соответствует своя составляющая вектора y). По результатам обследования большого числа пациентов можно найти ряд соответствующих друг другу значений x_i и y_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Задача заключается в построении по этим данным зависимости вида (4.8.1), позволяющей по результатам медицинского обследования определить вероятность того, что пациент здоров или болен той или иной болезнью.

Очевидно, что надежность такого способа постановки диагноза увеличивается в том случае, когда становится

более определенной зависимости вектора x от значения вектора y , т. е. исследуемые параметры x_j , характеризующие состояние пациента детерминировано изменяются под влиянием изучаемых болезней. При этом не обязательно знать механизм этой зависимости.

Таким образом, при определении статистической регрессии изучаемая система заменяется «черным ящиком», внутренняя структура которого неизвестна, а известны лишь его вход и выход. Требуется по результатам наблюдений за функционированием этого «черного ящика» определить зависимость между его входом и выходом.

При решении поставленной задачи обычно задаются видом зависимости (4.8.1), включая в нее некоторый вектор $q = \{q_1, q_2, \dots, q_m\}$ параметров, характеризующих эту зависимость (*коэффициентов регрессии*). В результате получаем зависимость вида

$$y = F(x, q), \quad (4.8.2)$$

в которой структура функции $F(x, q)$ задана, и при фиксированном значении q эта функция определяет однозначную зависимость y от x . Задача сводится к определению вектора q по результатам измерений соответствующих друг другу векторов x_i и y_i ($i = 1, 2, \dots, n$).

В простейшем случае выражение (4.8.2) задается в виде линейной зависимости

$$y = Ax, \quad (4.8.3)$$

где A — отыскиваемая матрица коэффициентов регрессии. Совокупность элементов этой матрицы образует вектор q определяемых коэффициентов регрессии.

Зависимость (4.8.3) представляет собой l равенств

$$y_j = q_j^* x, \quad j = 1, 2, \dots, l, \quad (4.8.4)$$

где q_j^* — j -я строка матрицы A . Каждое из этих равенств может быть использовано для независимого определения соответствующего вектора q_j коэффициентов регрессии. При этом на основе серии измерений соответствующих значений y_j и x находят оценку вектора q_j .

Заметим, что схема линейной регрессии (4.8.3) имеет формальное сходство с линейной математической моделью (4.6.1). Однако существо обеих задач различно.

В первой из них определяется матрица A по результатам многократных измерений векторов y и x . Во второй задаче матрица A задана, вектор d измеряется однократно, а вектор q оценивается.

В общем случае линейное выражение (4.8.3) может не обеспечить требуемой точности представления связи между векторами y и x . Возникает задача выбора оптимальной структуры зависимости (4.8.2). В частности, могут быть использованы выражения вида

$$y = \sum_{j=1}^m q_j f_j(x), \quad (4.8.5)$$

где $f_j(x)$ — некоторые заданные векторные функции.

При скалярном y его иногда представляют в виде произведения

$$y = \prod_{j=1}^k x_j^{\gamma_j}. \quad (4.8.6)$$

Отсюда, переходя к новым переменным

$$u = \ln y, \quad z_j = \ln x_j, \quad j = 1, 2, \dots, k, \quad (4.8.7)$$

получаем задачу определения линейной регрессии

$$u = \sum_{j=1}^k \gamma_j z_j$$

с коэффициентами γ_j .

Более подробно вопросы определения статистической регрессии рассмотрены в курсах математической статистики [30, 33, 41].

Глава V

МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

§ 5.1. Сущность метода

Метод наименьших квадратов является в настоящее время основным способом решения задач рассматриваемого типа. Ниже будет показано, что большинство используемых на практике алгоритмов фильтрации в конечном итоге сводится к этому методу. При рассмотрении последнего мы будем объединять измерительные и методические погрешности зависимости (2.1.3) в единую суммарную ошибку, обозначая ее вектором ξ . При этом выражение (2.1.6) заменяется равенством

$$\tilde{d} = F(q_n) + \xi. \quad (5.1.1)$$

Применение метода наименьших квадратов базируется на следующих допущениях:

1. Задана математическая модель (2.1.3).
2. Известно математическое ожидание $E(\xi)$ суммарной ошибки ξ модели и измерений.
3. Ковариационная матрица $D(\xi)$ задана с точностью до некоторого произвольного множителя.
4. Вектор ошибок ξ является собственным, т. е. удовлетворяет условию (1.9.27).

Не нарушая общности, можно считать ошибку ξ несмещенной. В этих условиях

$$E(\xi) = 0, \quad D(\xi) = \sigma^2 K, \quad (5.1.2)$$

где σ^2 — произвольный множитель, уточняемый в процессе обработки измерительной информации, а K — заданная положительно определенная матрица $n \times n$. При сделанных допущениях алгоритм фильтрации по рассматриваемому методу сводится к отысканию оценки \hat{q}

из условия достижения минимума квадратичной формы

$$S(\hat{q}) = [\tilde{d} - F(\hat{q})]^T K^{-1} [\tilde{d} - F(\hat{q})] = \delta^T K^{-1} \delta, \quad (5.1.3)$$

где δ — определяемый по формуле (2.1.9) вектор невязок. Пользуясь положительно определенной матрицей K^{-1} , можно в пространстве векторов $d = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ ввести норму

$$\|d\| = \sqrt{d^T K^{-1} d}. \quad (5.1.4)$$

Легко убедиться в том, что при этом удовлетворяются все условия, налагаемые на норму вектора. А именно:

$$\left. \begin{aligned} \|d\| &= 0 \text{ при } d = 0, \\ \|d\| &> 0 \text{ при } d \neq 0, \\ \|kd\| &= |k| \cdot \|d\|, \\ \|d_1 \pm d_2\| &\leq \|d_1\| + \|d_2\|. \end{aligned} \right\} \quad (5.1.5)$$

При этом фильтрация по методу наименьших квадратов сводится к отысканию абсолютного минимума $\|\delta\|$.

Широкое распространение этого метода и его различных модификаций объясняется рядом его преимуществ. К их числу относятся следующие:

1. Оптимальность метода при некоторых условиях.
2. В случае невыполнения этих условий метод обычно обеспечивает получение оценки \hat{q} , близкой к оптимальной. Это объясняется использованием принципа минимизации нормы вектора невязок, что при малых ошибках § дает оценку \hat{q} , близкую к истинному значению q_k .
3. Известная универсальность, заключающаяся в том, что построенные по этому методу алгоритмы фильтрации не зависят от выражения (3.4.1), связывающего вектор l оцениваемых параметров с вектором q состояния системы.
4. Наличие большого числа соответствующих стандартных алгоритмов фильтрации, а также отлаженных программ расчета на вычислительных машинах.

Широкое распространение и привычность метода наименьших квадратов часто вызывают некритическое отношение к получаемым по этому методу результатам. Из его теории во многих случаях делаются неверные

выводы. Причиной этого является обычно несоответствие реальных условий, в которых решается рассматриваемая прикладная задача, с условиями, принятыми при обосновании метода. В частности, это относится к оценкам точности получаемых результатов, а также к различным задачам оптимизации стратегии определения состояния реальных систем.

Все это вызывает необходимость в детальном изложении основ метода наименьших квадратов и его различных модификаций, а также в анализе влияния погрешностей принятых допущений на точность получаемых результатов.

§ 5.2. Простейшая задача построения алгоритма фильтрации по методу наименьших квадратов. Теорема Гаусса — Маркова

Рассмотрим задачу выбора оптимального алгоритма фильтрации, обеспечивающего получение оценки \tilde{q} вектора $q = \{q_1, q_2, \dots, q_m\}$ по измеренному значению \tilde{d} вектора $d = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$, при следующих допущениях:

1. Используется линейная математическая модель (4.6.1).

2. Система измерений является полной, т. е. из равенства (2.4.16) следует зависимость (2.4.17). Для линейной модели (4.6.1) это равносильно следующему условию, налагаемому на ранг матрицы A :

$$R(A) = m. \quad (5.2.1)$$

3. Суммарная ошибка ξ модели (4.6.1) является несмещенной, некоррелированной и равноточной, т. е.

$$E(\xi) = 0, \quad D(\xi) = \sigma^2 I. \quad (5.2.2)$$

4. Выбор оптимального алгоритма фильтрации производится из условия минимума дисперсии $D(l)$ оценки некоторого скалярного параметра l , связанного с вектором состояния линейной зависимостью

$$l = Cq, \quad (5.2.3)$$

где $C = (C_1 C_2 \dots C_m)$ — заданная матрица-строка.

5. Оптимальный алгоритм фильтрации выбирается на множестве всех линейных несмещенных алгоритмов вида

$$\hat{q} = Y\tilde{d}, \quad (5.2.4)$$

где Y — матрица $m \times n$, не зависящая от значений \tilde{d} и q_n .

Таким образом, задача сводится к отысканию по заданным A и C матрицы $Y = Y(A, C)$, обеспечивающей достижение абсолютного минимума $D(\hat{q})$. Ниже мы покажем, что рассматриваемая задача решается методом наименьших квадратов, причем матрица Y не зависит от C , т. е.

$$Y = Y(A). \quad (5.2.5)$$

Это утверждение носит название *теоремы Гаусса — Маркова*. Прежде, чем приступить к ее доказательству, рассмотрим некоторые свойства оценки по методу наименьших квадратов при сделанных выше допущениях.

В первую очередь заметим, что в исследуемом случае входящая в условие (5.1.2) матрица

$$K = K^{-1} = I. \quad (5.2.6)$$

Пользуясь зависимостями (4.6.1) и (5.2.6), можно записать выражение для минимизируемой квадратичной формы (5.1.3) в виде

$$S(\hat{q}) = (\tilde{d} - A\hat{q})^T (\tilde{d} - A\hat{q}) = \sum_{i=1}^n \left(\tilde{d}_i - \sum_{j=1}^m a_{ij} \hat{q}_j \right)^2, \quad (5.2.7)$$

где a_{ij} ($i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, m$) — элементы матрицы A . Необходимые условия минимума этой формы:

$$\frac{\partial S}{\partial \hat{q}_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (5.2.8)$$

Пользуясь выражением

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \hat{q}_k} &= \\ &= -2 \sum_{i=1}^n \left(\tilde{d}_i - \sum_{j=1}^m a_{ij} \hat{q}_j \right) a_{ik} = 2 \sum_{j=1}^m \hat{q}_j \sum_{i=1}^n a_{ij} a_{ik} - 2 \sum_{i=1}^n \tilde{d}_i a_{ik}, \end{aligned}$$

что противоречит условию (5.2.1) полноты системы измерений. Таким образом, существует единственный вектор \hat{q} , удовлетворяющий необходимым условиям $\min S(\hat{q})$.

С другой стороны, из выражения (5.2.7) видно, что $S(\hat{q}) \geq 0$ и является непрерывной функцией величин \hat{q}_j ($j = 1, 2, \dots, m$). Кроме того, $S(\hat{q}) \rightarrow \infty$, если хотя бы одно $q_j \rightarrow \infty$. Отсюда следует, что $\min S(\hat{q})$ существует и определяется единственным решением системы нормальных уравнений (5.2.10). Иначе говоря, это решение удовлетворяет не только необходимым, но и достаточным условиям $\min S(\hat{q})$.

Последнее утверждение может быть доказано и непосредственно. Пусть \hat{q} — решение системы уравнений (5.2.10), т. е.

$$A^T A \hat{q} = A^T \tilde{d}. \quad (5.2.14)$$

Рассмотрим произвольный вектор q и покажем, что

$$S(q) \geq S(\hat{q}). \quad (5.2.15)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} S(q) &= (\tilde{d} - Aq)^T (\tilde{d} - Aq) = \\ &= [\tilde{d} - A\hat{q} + A(\hat{q} - q)]^T [\tilde{d} - A\hat{q} + A(\hat{q} - q)] = \\ &= S(\hat{q}) + (\hat{q} - q)^T (A^T \tilde{d} - A^T A \hat{q}) + (\tilde{d}^T A - \hat{q}^T A^T A) (\hat{q} - q) + \\ &\quad + [A(\hat{q} - q)]^T A(\hat{q} - q). \end{aligned}$$

Но из равенства (5.2.14) следует, что

$$A^T \tilde{d} - A^T A \hat{q} = \tilde{d}^T A - \hat{q}^T A^T A = 0.$$

Отсюда

$$S(q) = S(\hat{q}) + |A(\hat{q} - q)|^2 \geq S(\hat{q}). \quad (5.2.16)$$

При этом доказательстве мы не пользовались условием полноты системы измерений (5.2.1). Доказательство остается справедливым и для неполных систем, у которых

$$R(A) < m. \quad (5.2.17)$$

Заметим, что для полных систем при $q \neq \hat{q}$

$$|A(\hat{q} - q)| > 0,$$

и из (5.2.16) следует, что

$$S(q) > S(\hat{q}),$$

т. е. $S(q)$ имеет единственный строгий минимум при $q = \hat{q}$.

Для неполных систем это, вообще говоря, не имеет места, т. е. $\min S(q)$ является не единственным и не строгим, но остается абсолютным. При этом

$$R(Q) < m \quad (5.2.18)$$

и система нормальных уравнений (5.2.10) имеет не единственное решение [41].

Решая систему (5.2.10) при условии (5.2.1), находим

$$\hat{q} = Y\tilde{d}, \quad Y = (A^T A)^{-1} A^T, \quad (5.2.19)$$

т. е. оценка по методу наименьших квадратов является линейной и соответствующая матрица Y удовлетворяет условию (5.2.5). Докажем, что при этом удовлетворяется условие несмещенности алгоритма фильтрации (2.1.10), т. е.

$$Y A q = q. \quad (5.2.20)$$

Это непосредственно следует из зависимости (5.2.19), согласно которой

$$Y A = (A^T A)^{-1} A^T A = I. \quad (5.2.21)$$

Из зависимостей (5.1.1), (4.6.1) и (5.2.2) находим, что математическое ожидание измеренного значения \tilde{d}

$$E(\tilde{d}) = A q_n. \quad (5.2.22)$$

Отсюда, пользуясь равенствами (1.9.23) и (5.2.19), получим, что имеет место равенство (2.1.12)

$$E(\hat{q}) = \hat{q}_n, \quad (5.2.23)$$

т. е. при условии несмещенности суммарной ошибки ξ оценка по методу наименьших квадратов оказывается несмещенной.

Из линейности оценки \hat{q} непосредственно следует линейность оценки \hat{l} любого параметра, связанного с вектором q зависимостью вида (5.2.3). Действительно, в этом случае

$$\hat{l} = C\hat{q} = X\tilde{d}, \quad X = C(A^T A)^{-1} A^T. \quad (5.2.24)$$

Из выражений (3.4.1), (3.4.2) и (5.2.3) находим, что

$$l_n = Cq_n + \xi, \quad (5.2.25)$$

где l_n — истинное значение l , а ξ — погрешность модельной зависимости (5.2.3). Пренебрегая влиянием этой погрешности, т. е. полагая

$$\xi = 0 \quad (5.2.26)$$

и пользуясь зависимостями (1.9.23), (5.2.23), (5.2.24) и (5.2.25), находим, что

$$E(\hat{l}) = l_n, \quad (5.2.27)$$

т. е. оценка \hat{l} оказывается несмещенной.

При невыполнении условия (5.2.26) оценка \hat{l} оказывается несмещенной в том случае, когда ошибку ξ можно рассматривать как случайную величину с математическим ожиданием

$$E(\xi) = 0. \quad (5.2.28)$$

В этом случае по крайней мере одну из входящих в равенство (5.2.25) величин l_n и q_n следует рассматривать как случайную, и тогда имеет место равенство

$$E(l_n) = CE(q_n). \quad (5.2.29)$$

При этом условия несмещенности (5.2.23) и (5.2.27) принимают вид

$$E(\hat{q}) = E(q_n), \quad E(\hat{l}) = E(l_n). \quad (5.2.30)$$

Перейдем теперь к доказательству теоремы Гаусса — Маркова, согласно которой метод наименьших квадратов обеспечивает минимум дисперсии оценки произвольной линейной функции вектора q на множестве всех линейных несмещенных оценок при использовании линейной математической модели (4.6.1) и суммарной ошибки ξ , удовлетворяющей условиям (5.2.2).

Пусть q_1 — некоторая произвольная линейная оценка вектора q

$$q_1 = Y\tilde{d}, \quad (5.2.31)$$

удовлетворяющая условию несмещенности

$$E(q_1) = q_n. \quad (5.2.32)$$

Соответствующая оценка линейной функции (5.2.3)

$$l_1 = Cq_1 = X\tilde{d}, \quad (5.2.33)$$

где

$$X = CY.$$

Пользуясь зависимостями (1.9.23), (5.2.22) и (5.2.32), находим, что

$$E(l_1) = Cq_n = XAq_n.$$

Это равенство справедливо при произвольных значениях q_n . Поэтому можно написать, что

$$XA = C. \quad (5.2.34)$$

Полученная зависимость имеет большое значение. Мы будем называть ее в дальнейшем *условием несмещенности линейного алгоритма фильтрации* (5.2.33).

Сравним оценку l_1 с оценкой \hat{l} , полученной по методу наименьших квадратов. Рассматриваемая теорема равносильна утверждению, что

$$D(l_1) \geq D(\hat{l}). \quad (5.2.35)$$

Для доказательства воспользуемся равенством (1.9.41) и представим $D(l_1)$ в виде

$$D(l_1) = D(l_1 - \hat{l} + \hat{l}) = D(\hat{l}) + D(l_1 - \hat{l}) + 2D[(l_1 - \hat{l}), \hat{l}]. \quad (5.2.36)$$

Из выражения (5.2.24) следует, что

$$\hat{l} = \lambda A^T \tilde{d}, \quad \lambda = C(A^T A)^{-1}. \quad (5.2.37)$$

Отсюда, учитывая (5.2.33), получим

$$l_1 - \hat{l} = (X - \lambda A^T) \tilde{d}. \quad (5.2.38)$$

При помощи (1.9.39), (5.2.2), (5.2.34), (5.2.37) и (5.2.38) находим, что

$$\begin{aligned} D[(l_1 - \hat{l}), \hat{l}] &= D[(X - \lambda A^T) \tilde{d}, \lambda A^T \tilde{d}] = \\ &= (X - \lambda A^T) A \lambda^T \sigma^2 = [XA - C(A^T A)^{-1} A^T A] \lambda^T \sigma^2 = \\ &= (XA - C) \lambda^T \sigma^2 = 0. \end{aligned}$$

Отсюда зависимость (5.2.36) принимает вид

$$D(l_1) = D(\hat{l}) + D(l_1 - \hat{l}) \geq D(\hat{l}),$$

так как $D(l_1 - \hat{l}) \geq 0$. Теорема доказана.

Важным следствием теоремы Гаусса — Маркова является универсальность метода наименьших квадратов. Она заключается в том, что этот метод обеспечивает одновременное получение оптимальной оценки всех однородных линейных функций вектора состояния.

Пользуясь этим свойством метода наименьших квадратов, рассмотрим случай, когда вместо скалярного оцениваемого параметра l имеется вектор оцениваемых параметров $l = \{l_1, l_2, \dots, l_k\}$, связанный с вектором состояния линейной зависимостью

$$l = Cq, \quad (5.2.39)$$

где C — заданная матрица $k \times m$. В этом случае метод наименьших квадратов обеспечивает одновременное достижение минимумов дисперсий всех оцениваемых параметров l_j ($j = 1, 2, \dots, k$). В частности, обеспечивается минимум дисперсий всех составляющих вектора \hat{q} .

Другим важным следствием теоремы Гаусса — Маркова является теорема о выборе оптимального состава измерений. Согласно этой теореме при оценке по методу наименьших квадратов оптимальной является стратегия, использующая все составляющие вектора \hat{d} измерений. Предполагается, что вектор \hat{d} удовлетворяет условиям (5.1.2), а оптимальность понимается в смысле достижения минимума дисперсии оценки произвольной линейной функции l вектора q на множестве всех линейных несмещенных оценок.

Для доказательства рассмотрим некоторое разбиение вектора

$$d = \{d_1, d_2\} \quad (5.2.40)$$

и сравним следующие две стратегии оценки состояния системы.

1. Используются все составляющие вектора \tilde{d} . В этом случае модель (4.6.1) и алгоритм фильтрации (5.2.24) могут быть представлены в виде

$$\tilde{d} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} q, \quad \hat{l} = (X_1 X_2) \tilde{d}, \quad (5.2.41)$$

где A_1 и A_2 — заданные матрицы, \hat{l} — получаемая оценка параметра l , X_1 и X_2 — отыскиваемые строки. При этом условие несмещенности (5.2.34) принимает вид

$$X_1 A_1 + X_2 A_2 = C. \quad (5.2.42)$$

2. Используются только составляющие вектора \tilde{d}_1 . Математическая модель, алгоритм фильтрации и условие несмещенности имеют вид

$$\tilde{d}_1 = A_1 q, \quad \hat{l}' = X'_1 \tilde{d}_1, \quad X'_1 A_1 = C, \quad (5.2.43)$$

где \hat{l}' — соответствующая оценка, а X'_1 — отыскиваемая матрица-строка.

Обозначим через Σ множество всех линейных алгоритмов (5.2.41), удовлетворяющих условиям (5.2.42), а через Σ' — множество всех алгоритмов (5.2.43). Легко показать, что

$$\Sigma' \subset \Sigma. \quad (5.2.44)$$

Действительно, каждый алгоритм, входящий в Σ' , может рассматриваться как элемент множества Σ , если полагать, что

$$X_1 = X'_1, \quad X_2 = 0. \quad (5.2.45)$$

Согласно теореме Гаусса — Маркова оценка \hat{l} по методу наименьших квадратов обеспечивает достижение $\min D(\hat{l})$ на множестве Σ , а оценка \hat{l}' — достижение $\min D(\hat{l}')$ на множестве Σ' . Отсюда, пользуясь (5.2.44), непосредственно получаем неравенство

$$D(\hat{l}) \leq D(\hat{l}'), \quad (5.2.46)$$

справедливое при любом разбиении (5.2.40) и доказывающее теорему.

§ 5.3. Случай коррелированных измерений

Перейдем к рассмотрению метода наименьших квадратов в том случае, когда суммарные ошибки ξ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) коррелированы и условия (5.2.2) заменяются более общими условиями (5.1.2).

Этот случай приводится к рассмотренному в предыдущем параграфе линейным преобразованием

$$\tilde{d}' = K^{-1/2} d, \quad (5.3.1)$$

где матрица $K^{-1/2}$ определяется по заданной матрице K при помощи зависимости (1.3.13). Отсюда, пользуясь равенством (5.1.1), находим связь между измеренным \tilde{d}' и истинным d_n значениями вектора \tilde{d}' , а также соответствующей суммарной ошибкой ξ'

$$\tilde{d}' = K^{-1/2} \tilde{d} = \tilde{d}'_n + \xi', \quad (5.3.2)$$

где

$$\tilde{d}'_n = K^{-1/2} d_n, \quad \xi' = K^{-1/2} \xi. \quad (5.3.3)$$

Из соотношений (1.3.14), (1.9.23), (5.1.2) и (5.3.3) непосредственно следует, что

$$E(\xi') = K^{-1/2} E(\xi) = 0, \quad D(\xi') = K^{-1/2} \sigma^2 K K^{-1/2} = \sigma^2 I, \quad (5.3.4)$$

т. е. новый вектор ξ' удовлетворяет условиям (5.2.2). При этом математическая модель (4.6.1) принимает вид

$$\tilde{d}' = A' q, \quad A' = K^{-1/2} A. \quad (5.3.5)$$

Применяя к задаче определения q по измеренным значениям вектора \tilde{d}' теорему Гаусса—Маркова, получим, что построение соответствующего оптимального алгоритма фильтрации сводится к отысканию минимума квадратичной формы

$$S(\hat{q}) = (\tilde{d}' - A' \hat{q})^T (\tilde{d}' - A' \hat{q}).$$

Заменяя в правой части этого выражения величины \tilde{d}' и A' их значениями (5.3.2) и (5.3.5), находим, что

$$S(\hat{q}) = (\tilde{d} - A \hat{q})^T K^{-1} (\tilde{d} - A \hat{q}). \quad (5.3.6)$$

Полученное выражение для минимизируемой квадратичной формы $S(\hat{q})$ полностью совпадает с общим выражением (5.1.3) при использовании линейной модели (4.6.1).

Из изложенного следует, что условие (5.2.2) не является существенным для теоремы Гаусса — Маркова, и она остается справедливой при более общем условии (5.1.2). Сохраняются также приведенные в § 5.2 следствия из этой теоремы (универсальность метода и теорема о выборе оптимального состава измерений). При этом отыскание минимума квадратичной формы (5.3.6) сводится к решению системы нормальных уравнений (5.2.10). Пользуясь зависимостями (5.2.11) и (5.2.12), находим выражение для матрицы Q и вектора b , определяющих систему (5.2.10)

$$Q = A'^T A' = A^T K^{-1} A, \quad b = A'^T \tilde{d}' = A^T K^{-1} \tilde{d}. \quad (5.3.7)$$

Таким образом, для решения задачи в рассматриваемом случае не нужно переходить к новым измерениям \tilde{d}' . Алгоритм фильтрации, обеспечивающий отыскание оптимальной оценки \hat{q} , сводится к составлению и решению системы (5.2.10) нормальных уравнений, коэффициенты которой определяются равенствами (5.3.7).

Однако с вычислительной точки зрения между алгоритмами фильтрации с использованием коррелированных и некоррелированных измерений имеется существенная разница. В первом случае задача заключается в составлении и обращении матрицы Q $m \times m$, тогда как во втором — возникает дополнительная необходимость обращения матрицы K $n \times n$. В ряде важных прикладных задач число используемых измерений $n \gg m$ и может достигать нескольких тысяч. Как известно, обращение матриц столь высокого порядка сопряжено со значительными вычислительными трудностями.

Рассмотрим два частных случая, при которых обращение матрицы K существенно упрощается.

1. Случай некоррелированных неравноточных измерений. Обозначая через σ_i^2 ($i = 1, 2, \dots, n$) дисперсии соответствующих измерений \tilde{d}_i , можно написать, что

$$K = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}. \quad (5.3.8)$$

Отсюда

$$K^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2^2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\sigma_n^2} \end{bmatrix}. \quad (5.3.9)$$

Выражение (5.3.6) принимает вид

$$S(\hat{q}) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\tilde{d}_i - \sum_{j=1}^m a_{ij} q_j}{\sigma_i} \right)^2, \quad (5.3.10)$$

а элементы матрицы Q и вектора b находятся по формулам

$$\left. \begin{aligned} Q_{kj} &= \sum_{i=1}^n \frac{a_{ik} a_{ij}}{\sigma_i^2}, \\ b_k &= \sum_{i=1}^n \frac{a_{ik} \tilde{d}_i}{\sigma_i^2}. \end{aligned} \right\} \quad (5.3.11)$$

Этот результат может быть получен непосредственно из зависимостей (5.2.7), (5.2.11) и (5.2.12). Достаточно от исходной системы условных уравнений

$$\sum_{j=1}^m a_{ij} q_j = \tilde{d}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

перейти к системе

$$\sum_{j=1}^m \frac{a_{ij}}{\sigma_i} q_j = \frac{\tilde{d}_i}{\sigma_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

При этом неравноточные измерения \tilde{d}_i заменяются равноточными некоррелированными измерениями $\tilde{d}'_i = \frac{\tilde{d}_i}{\sigma_i}$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

2. Измерения распадаются на не коррелированные между собой группы. В этом случае матрица K имеет вид

$$K = \begin{pmatrix} K_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & K_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & K_\alpha \end{pmatrix}, \quad (5.3.12)$$

где K_j ($j = 1, 2, \dots, \alpha$) заданные положительно определенные матрицы. При этом

$$K^{-1} = \begin{pmatrix} K_1^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & K_2^{-1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & K_\alpha^{-1} \end{pmatrix}. \quad (5.3.13)$$

В результате обращение матрицы высокого порядка сводится к решению значительно более простой задачи обращения нескольких матриц низкого порядка.

Заметим, что использование матриц вида (5.3.12) не только даёт вычислительные преимущества. Оно позволяет обобщить некоторые свойства некоррелированных измерений. В частности, это относится к применению рекуррентных алгоритмов фильтрации, базирующихся на методе наименьших квадратов (см. главу VI).

Учитывая трудности обращения матрицы K и то, что ее значение часто неизвестно или известно с недостаточной достоверностью, при решении многих прикладных задач ограничиваются использованием метода наименьших квадратов при допущениях (5.2.2) или (5.3.8), что обеспечивает существенную экономию вычислительных средств.

В литературе под методом наименьших квадратов часто подразумевают лишь минимизацию выражений (5.2.7) или (5.3.10), а минимизацию общих выражений (5.1.3) или (5.3.6) называют *методом максимального правдоподобия*. Для этого имеются свои основания. Во-первых, выражения (5.2.7) и (5.3.10) представляют собой суммы квадратов, в отличие от общих квадратичных форм (5.1.3) и (5.3.6). Во-вторых, именно в таком виде метод наименьших квадратов был впервые предложен Гауссом. Однако мы согласны с теми авторами, которые считают, что задача минимизации квадратичной формы (5.3.6) принципиально не отличается от задачи

отыскания минимума формы (5.2.7), так как первая получается из второй простым линейным преобразованием. Что касается минимизации формы (5.1.3), то ниже будет показано, что она получается из задачи отыскания минимума выражения (5.3.6) путем линеаризаций исходной модельной зависимости (2.1.3). Поэтому мы объединяем все рассмотренные задачи под общим названием метода наименьших квадратов. Что касается метода максимального правдоподобия, то он имеет значительно более общий характер, и метод наименьших квадратов является его частным случаем (см. главу VI).

В заключение рассмотрим метод наименьших квадратов при достаточном числе измерений, когда $n = m$. Из условия (5.2.1) следует, что в этом случае существует матрица $(A^T)^{-1}$. Тогда, составив систему нормальных уравнений

$$A^T K^{-1} A \hat{q} = A^T K^{-1} \tilde{d}$$

и умножив ее слева на $K(A^T)^{-1}$, получим

$$A \hat{q} = \tilde{d}. \quad (5.3.14)$$

Таким образом, при достаточном числе измерений отыскание оценки \hat{q} сводится к решению системы (5.3.14) условных уравнений. Это может быть получено непосредственно из того, что в результате решения системы (5.3.14) вектор δ невязок обращается в нуль. Отсюда, учитывая зависимости (5.1.3), (5.1.5), находим, что при этом положительно определенная квадратичная форма $S(\hat{q})$ достигает своего абсолютного минимума

$$\min S(\hat{q}) = \min \|\delta\| = 0. \quad (5.3.15)$$

Из изложенного следует, что при достаточном числе измерений оценка по методу наименьших квадратов не зависит от ковариационной матрицы K .

§ 5.4. Влияние мешающих параметров. Теорема эквивалентности

Рассмотрим вопрос о применении метода наименьших квадратов при наличии систематических ошибок измерения или ошибок модели, определяемых выражениями типа (3.1.16).

Предположим, что используется линейная математическая модель (4.6.1), а суммарная ошибка $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ может быть представлена в виде

$$\xi = \xi_0 + Ba, \quad (5.4.1)$$

где $a = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\mu\}$ — вектор мешающих параметров и B — заданная матрица $n \times \mu$. При этом корреляция между величинами ξ_0 и a отсутствует, а их математические ожидания и ковариационные матрицы определяются выражениями вида

$$E(\xi_0) = 0, \quad D(\xi_0) = \sigma^2 K_0, \quad E(a) = 0, \quad D(a) = \sigma^2 K_1, \quad (5.4.2)$$

где K_0 и K_1 — заданные симметричные матрицы $n \times n$ и $\mu \times \mu$, первая из которых положительно определенная, а вторая — неотрицательная. Отсюда, пользуясь зависимостью (1.9.23), находим математическое ожидание и ковариационную матрицу вектора ξ :

$$E(\xi) = 0, \quad D(\xi) = \sigma^2 K, \quad K = K_0 + BK_1B^T. \quad (5.4.3)$$

В соответствии с результатами § 3.1 сформированный таким образом вектор ξ оказывается собственным, а матрица K — определено положительной. Поэтому она может быть использована для построения при помощи зависимостей (5.2.10) и (5.3.7) алгоритма фильтрации по методу наименьших квадратов. При этом могут иметь место следующие два подхода к рассматриваемой задаче.

1. По измеренному значению \tilde{d} вектора измерений определяется оценка \hat{q} вектора состояния. Эту задачу мы будем называть *первоначальной*.

2. Мешающие параметры α_j ($j = 1, 2, \dots, \mu$) включаются в число оцениваемых и измеряемых параметров. При этом векторы q , d и \tilde{d} заменяются векторами

$$q' = \{q, a\}, \quad d' = \{d + Ba, a\}, \quad \tilde{d}' = \{\tilde{d}, \tilde{a}\} = \{\tilde{d}, 0\}, \quad (5.4.4)$$

размерности которых

$$m' = m + \mu, \quad n' = n + \mu. \quad (5.4.5)$$

Сформулированную таким образом задачу мы будем называть расширенной.

Рассмотрим произвольный скалярный оцениваемый параметр l , связанный с векторами q и a линейной зависимостью

$$l = Cq + C_1 a, \quad (5.4.6)$$

где C и C_1 — заданные матрицы-строки $1 \times m$ и $1 \times n$.

Обозначим через χ ошибку оценки параметра l , получаемую в результате решения первоначальной задачи, а через χ' — ту же ошибку при решении расширенной задачи. Имеет место следующая *теорема эквивалентности* [51].

В том случае, когда параметр l не зависит от вектора a ($C_1 = 0$), решения первоначальной и расширенной задач по методу наименьших квадратов эквивалентны в том смысле, что они обеспечивают получение одинакового значения дисперсии ошибки рассматриваемой оценки, т. е.

$$D(\chi') = D(\chi). \quad (5.4.7)$$

При $C_1 \neq 0$ имеет место неравенство

$$D(\chi') \leq D(\chi). \quad (5.4.8)$$

Для доказательства заметим, что при решении первоначальной задачи влияние вектора a мешающих параметров учитывается лишь при определении ковариационной матрицы $D(\xi)$ из выражения (5.4.3). Однако само значение вектора a не оценивается. При этом для перехода от оценки \hat{q} к \hat{l} вместо a используется соответствующее априорное значение $\tilde{a} = E(a) = 0$. Иначе говоря,

$$\hat{l} = C\hat{q}. \quad (5.4.9)$$

Тогда в соответствии с теоремой Гаусса — Маркова отыскание оценки \hat{l} по методу наименьших квадратов сводится к построению линейного алгоритма фильтрации

$$\hat{l} = X\tilde{d}, \quad (5.4.10)$$

удовлетворяющего условию несмещенности (5.2.34) и обеспечивающего минимум величины

$$D_0(\hat{l}) = \sigma^2 X(K_0 + BK_1 B^T) X^T. \quad (5.4.11)$$

Однако дисперсия $D(\chi)$ ошибки χ оценки l не совпадает с величиной $D_0(l)$, так как при определении последней не учитывалось влияние погрешностей, возникающих вследствие несовпадения истинного значения α с принятым априорным.

Для определения величины χ воспользуемся зависимостью (3.4.13). Из выражений (5.4.1), (5.4.6) и (5.4.10) следует, что в рассматриваемом случае

$$\frac{\partial \theta}{\partial d} = X, \quad \frac{\partial d}{\partial \alpha} = B, \quad \frac{\partial l}{\partial \alpha} = C_1, \quad \xi = \xi_0. \quad (5.4.12)$$

В результате получим

$$\chi = X\xi_0 + (XB - C_1)\alpha. \quad (5.4.13)$$

Отсюда, учитывая равенства (1.9.23) и (5.4.2), находим, аналогично зависимости (3.4.15),

$$D(\chi) = \sigma^2 [XK_0X^T + (XB - C_1)K_1(XB - C_1)^T]. \quad (5.4.14)$$

Переходя к расширенной задаче, заметим, что в соответствии с зависимостями (4.6.1), (5.4.4) и (5.4.6) ее математическая модель имеет вид

$$d' = A'q', \quad l' = C'q', \quad (5.4.15)$$

где

$$A' = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I_\mu \end{pmatrix}, \quad C' = (C \ C_1). \quad (5.4.16)$$

Отсюда, пользуясь выражениями (5.4.1) и (5.4.4), находим соответствующую суммарную ошибку

$$\begin{aligned} \xi' &= \tilde{d}' - A'q'_n = \\ &= \{Aq_n + \xi_0 + B\alpha, 0\} - \{Aq_n + B\alpha, \alpha\} = \{\xi_0, -\alpha\}. \end{aligned} \quad (5.4.17)$$

Далее на основании (5.4.2), а также учитывая некоррелированность векторов ξ_0 и α , можно написать выражение для ковариационной матрицы ошибки ξ' :

$$D(\xi') = \sigma^2 \begin{pmatrix} K_0 & 0 \\ 0 & K_1 \end{pmatrix}. \quad (5.4.18)$$

В расширенной задаче определение оценки l' сводится к отысканию оптимального линейного алгоритма

$$l' = X'\tilde{d}', \quad (5.4.19)$$

обеспечивающего достижение $D(\hat{l})$ при условии

$$X'A' = C'. \quad (5.4.20)$$

Представим отыскиваемую матрицу-строку X' в виде

$$X' = (X'_n \ X'_\mu), \quad (5.4.21)$$

где X'_n — совокупность первых n элементов этой строки, а X'_μ — остальные μ элементов. Пользуясь зависимостью (5.4.16), можно переписать условие (5.4.20) в виде

$$(X'_n \ X'_\mu) \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I_\mu \end{pmatrix} = (C \ C_1)$$

или

$$X'_n A = C, \quad X'_n B + X'_\mu = C_1. \quad (5.4.22)$$

Сравнивая эти равенства с условием (5.2.34), получим, что между множествами алгоритмов (5.4.10) и (5.4.19) существует взаимнооднозначное соответствие вида

$$X' = (X \ C_1 - XB). \quad (5.4.23)$$

Отсюда, пользуясь (5.4.18), находим выражение для дисперсии оценки \hat{l}' и ее ошибки χ'

$$\begin{aligned} D(\hat{l}') &= D(\chi') = \sigma^2 (X \ C_1 - XB) \begin{pmatrix} K_0 & 0 \\ 0 & K_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^T \\ (C_1 - XB)^T \end{pmatrix} = \\ &= \sigma^2 [XK_0X^T + (XB - C_1)K_1(XB - C_1)^T]. \end{aligned} \quad (5.4.24)$$

Таким образом, для любых двух соответствующих алгоритмов (5.4.10) и (5.4.19), связанных соотношением (5.4.23), определяемые зависимостями (5.4.14) и (5.4.24) значения $D(\chi)$ и $D(\chi')$ совпадают. С другой стороны, оценка по методу наименьших квадратов в расширенной задаче находится путем минимизации величины $D(\chi')$, в то время как в первоначальной задаче минимизируется другая величина (5.4.11). Отсюда непосредственно следует доказываемое неравенство (5.4.8).

При $C_1 = 0$ выражения (5.4.11), (5.4.14) и (5.4.24) совпадают, что приводит к полной эквивалентности обоих алгоритмов и равенству (5.4.7).

Следует обратить внимание на то, что доказательство теоремы эквивалентности существенным образом базируется на использовании априорных сведений (5.4.2)

о векторе α . Если значения $E(\alpha)$ и $D(\alpha)$ не заданы с достаточной достоверностью, то они не могут быть использованы при построении рассматриваемых алгоритмов фильтрации. В этом случае при решении первоначальной задачи вместо выражений (5.4.3) используются зависимости

$$E(\xi) = 0, \quad D(\xi) = \sigma^2 K_0 \quad (5.4.25)$$

и отыскивается минимум величины

$$D_0(\hat{l}) = \sigma^2 X K_0 X^T. \quad (5.4.26)$$

Однако неучитываемый при этом вектор α продолжает влиять на точность оценки \hat{l} , и значения дисперсии $D(x)$ ошибки этой оценки определяются по формуле (5.4.14).

При решении расширенной задачи вектор α не включается в число измерений, но входит в число оцениваемых параметров. Связь между векторами $q' = \{q, \alpha\}$ и d характеризуется зависимостью

$$d = (A \ B) q', \quad (5.4.27)$$

а вероятностные характеристики ошибки ξ определяются по формулам (5.4.25).

Отсюда следует, что определение оценки \hat{l}'' путем решения расширенной задачи в указанных условиях сводится к отысканию линейного алгоритма фильтрации

$$\hat{l}'' = X'' \tilde{d}, \quad (5.4.28)$$

обеспечивающего минимум дисперсии

$$D(\hat{l}'') = \sigma^2 X'' K_0^{-1} X''^T \quad (5.4.29)$$

при условии несмещенности

$$X''(A \ B) = (C \ C_1), \quad (5.4.30)$$

которое может быть представлено в виде

$$X''A = C, \quad X''B = C_1. \quad (5.4.31)$$

Из сравнения условий (5.2.34) и (5.4.31) видно, что множество строк X'' является частью множества строк X , так как оно удовлетворяет дополнительному условию

$X''B = C_1$. С другой стороны, минимизируемые выражения (5.4.26) и (5.4.29) в обеих задачах совпадают. Отсюда непосредственно следует, что

$$D_0(\hat{l}) \leq D(\hat{l}'') = D(x''), \quad (5.4.32)$$

где $D(x'')$ — дисперсия ошибки x'' оценки l'' .

С другой стороны, из выражений (5.4.14) и (5.4.26) видно, что дисперсия ошибки x

$$D(x) \geq D_0(\hat{l}). \quad (5.4.33)$$

Неравенства (5.4.32) и (5.4.33) не позволяют сделать какой-либо общий вывод о соотношениях между величинами $D(x)$ и $D(x'')$. В связи с этим приобретает смысл задача определения меньшей из них, которой соответствует лучшая из двух рассмотренных стратегий отыскания оценки параметра l при отсутствии надежных априорных данных о векторе α .

Из сравнения выражений (5.4.14) и (5.4.26) видно, что при $K_1 \rightarrow 0$ (т. е. в том случае, когда возможные значения составляющих вектора α неограниченно убывают) $D(x) \rightarrow D_0(l)$. Поэтому в пределе при $K_1 \rightarrow 0$ становится справедливым неравенство $D(x) \leq D(x'')$ и переход к расширенной задаче при малых K_1 делается невыгодным. Наоборот, по мере возрастания матрицы K_1 увеличивается значение $D(x)$, в то время как величина $D(x'')$ остается неизменной. При достаточно большой матрице K_1 имеет место неравенство $D(x) \geq D(x'')$ и переход к расширенной задаче оказывается целесообразным.

Полученные результаты могут быть использованы при выборе математической модели для построения алгоритма фильтрации по методу наименьших квадратов. Пусть вектор q состояния связан с вектором d измерений линейной зависимостью (4.6.1). Рассмотрим некоторое произвольное разбиение вектора $q = \{q_1, q_2\}$, при котором отсутствует корреляционная связь между его составляющими — случайными векторами q_1 и q_2 , и сравним следующие стратегии определения оценки этого вектора.

1. Находится оценка вектора q_1 , а вектор q_2 принимается равным своему априорному значению $\hat{q}_2 = E(\hat{q}_2)$.

При составлении ковариационной матрицы $D(d)$ вектора измерений не учитывается влияние методических ошибок, связанных с этим допущением.

2. Оценивается весь вектор q . При этом априорные сведения о векторе q_2 не включаются в число используемых измерений.

3. Используется математическая модель стратегии 1. При составлении матрицы $D(\tilde{d})$ учитываются связанные с допущением $q_2 = \tilde{q}_2$ методические ошибки.

4. Вектор q_2 включается в число оцениваемых и измеренных параметров.

В качестве критерия, по которому сравниваются эти оценки, используется достижение минимума дисперсии ошибки оценки заданной линейной функции l вектора q .

При исследовании поставленной задачи могут быть полностью использованы приведенные выше теоремы. Для этого достаточно от вектора q_2 перейти к вектору мешающих параметров

$$a = q_2 - E(\tilde{q}_2).$$

В результате приходим к следующим выводам:

1. При наличии достоверных сведений о математическом ожидании и ковариационной матрице вектора \tilde{q}_2 оптимальной является стратегия 4. Если при этом оцениваемый параметр l не зависит от вектора q_2 , то стратегии 3 и 4 эквивалентны.

2. При отсутствии достоверного значения ковариационной матрицы $D(\tilde{q}_2)$ стратегии 3 и 4 неосуществимы. При этом могут быть использованы стратегии 1 и 2. Первая из них требует знания величины математического ожидания $E(\tilde{q}_2)$, а вторая может быть осуществлена при отсутствии каких-либо априорных сведений о вероятностных характеристиках вектора \tilde{q}_2 .

Сравнение стратегий 1 и 2 показывает, что первая из них является лучшей в том случае, когда элементы ковариационной матрицы $D(\tilde{q}_2)$ малы по сравнению с элементами матрицы $D(\tilde{d})$ (здесь \tilde{d} — совокупность априорных сведений о векторе d и результатов апостериорных измерений). При обратном соотношении этих матриц более предпочтительна стратегия 2.

Ниже в § 5.11 на примере одной конкретной задачи приведен более детальный сравнительный анализ указанных выше стратегий.

В заключение заметим, что использование теоремы эквивалентности позволяет существенно упростить построение алгоритма фильтрации по методу наименьших квадратов в том случае, когда векторы ξ_0 и α могут быть приведены к такому виду, при котором корреляция между их составляющими отсутствует. При этом выражение (5.4.3) принимает форму (3.1.26), а зависимость (5.4.18) переходит в равенство

$$D(\xi') = \sigma^2 I_{n+\mu},$$

где $I_{n+\mu}$ — единичная матрица размера $n + \mu$. В результате при переходе к расширенной задаче мы получаем описанный в § 5.2 простейший случай построения алгоритма фильтрации по методу наименьших квадратов, что позволяет существенно сократить объем вычислений.

Кроме того, как будет показано ниже, теорема эквивалентности может быть использована при исследовании некоторых свойств оценок, получаемых по методу наименьших квадратов.

§ 5.5. Случай нелинейной модели

В предыдущих параграфах настоящей главы мы рассматривали основные свойства метода наименьших квадратов в предположении, что используемая математическая модель линейна и определяется зависимостями (4.6.1) и (5.2.3). С другой стороны, как было показано в главе IV, при решении ряда важных прикладных задач приходится пользоваться достаточно сложными нелинейными моделями. В связи с этим целесообразно рассмотреть вопросы применения метода наименьших квадратов в том случае, когда математическая модель рассматриваемой системы описывается нелинейными зависимостями (2.1.3) и (3.4.1)*).

*) Использование метода наименьших квадратов для нелинейных задач имеет большое прикладное значение, однако теоретически оно недостаточно обосновано. В настоящем параграфе описываются некоторые, не имеющие строгого обоснования, но хорошо зарекомендовавшие себя на практике способы решения нелинейных задач.

Предположим, что вектор q отыскивается в некоторой области Q , т. е.

$$q \in Q, \quad (5.5.1)$$

в которой удовлетворяется условие полноты системы измерений, и из равенства (2.4.16) следует равенство (2.4.17) для любых q_1 и q_2 , удовлетворяющих условию (5.5.1).

Рассмотрим сначала случай отсутствия ошибок измерения и модели, при котором зависимость (5.1.1) принимает вид

$$\tilde{d} = F(q_n). \quad (5.5.2)$$

Задача отыскания величины q_n сводится к решению системы уравнений (5.5.2), имеющей единственное решение

$$q = q_n.$$

Нахождение этого решения равносильно отысканию абсолютного минимума квадратичной формы

$$S_0(q) = [\tilde{d} - F(q)]^T K^{-1} [\tilde{d} - F(q)], \quad (5.5.3)$$

где K — произвольная положительно определенная матрица $n \times n$.

Действительно, из (5.5.2) следует, что

$$S_0(q) \begin{cases} = 0 & \text{при } q = q_n, \\ > 0 & \text{при } q \neq q_n. \end{cases}$$

Заметим, что вследствие нелинейности зависимости (2.1.3) величина $S_0(q)$ может иметь несколько локальных минимумов. Задача заключается в отыскании наименьшего из них.

Перейдем теперь к рассмотрению случая, когда имеется суммарная ошибка ξ , входящая в зависимость (5.1.1). В качестве критерия оптимальности алгоритма фильтрации примем достижение минимума дисперсии некоторого скалярного оцениваемого параметра $l = G(q)$. При этом будем полагать, что для всех значений $q \in Q$ выполняются следующие условия линеаризируемости модели (2.1.3).

1. Функции $F(q)$ и $G(q)$ дифференцируемы.

2. Среди измерений $d_i = F_i(q)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) всегда можно найти m линейно независимых, т. е.

$$R \left(\frac{\partial F}{\partial q} \right) = m. \quad (5.5.4)$$

3. В некоторой окрестности Δ истинного значения q_{II} для произвольных

$$q \in \Delta, \quad q_0 \in \Delta,$$

удовлетворяющих условию

$$|q - q_0| < \mu, \quad (5.5.5)$$

можно с достаточной для практики точностью написать, что

$$\left. \begin{aligned} F(q) &\approx F(q_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial q} \right)_0 (q - q_0), \\ G(q) &\approx G(q_0) + \left(\frac{\partial G}{\partial q} \right)_0 (q - q_0). \end{aligned} \right\} \quad (5.5.6)$$

Здесь μ — заданная постоянная, а под словами «достаточная для практики точность» подразумевается малость отброшенных в правых частях зависимостей (5.5.6) нелинейных членов по сравнению с соответствующими составляющими вектора ξ . Кроме того, будем полагать вектор ξ некоррелированным и удовлетворяющим условиям (5.2.2). Случай коррелированных ошибок будет рассмотрен ниже.

Обозначим через \hat{q} отыскиваемую оценку вектора состояния. Предположим, что каким-либо методом удалось найти некоторое близкое к \hat{q} значение q_0 , такое, что

$$\hat{q} = q_0 + \hat{v}, \quad |\hat{v}| < \mu. \quad (5.5.7)$$

Задача сводится к определению вектора \hat{v} . Для этого воспользуемся линеаризованной математической моделью (см. § 4.6)

$$\beta = \left(\frac{\partial F}{\partial q} \right)_0 v, \quad \lambda = \left(\frac{\partial G}{\partial q} \right)_0 v, \quad (5.5.8)$$

где $v = q - q_0$, $\beta = d - F(q_0)$, $\lambda = l - G(q_0)$ — вектор состояния, вектор измерения и оцениваемый параметр в линеаризованной задаче, а индексом «0» обозначены значения соответствующих матриц частных производных при $q = q_0$.

Обозначим через $\hat{\beta} = \tilde{d} - F(q_0)$ измеренное значение вектора β , а через $\hat{\lambda} = \left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)_0 \hat{v}$ — оценку величины λ . Будем отыскивать оценку \hat{v} из условия минимума $D(\hat{l}) = D(\hat{\lambda})$ на множестве линейных несмещенных оценок

$$\hat{v} = X\hat{\beta} = X[\tilde{d} - F(q_0)].$$

При этих условиях \hat{v} находится из решения системы нормальных уравнений (5.2.10), которая для математической модели (5.5.8) может быть написана в виде

$$\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)_0^T \left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)_0 \hat{v} = \left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)_0^T [\tilde{d} - F(q_0)]. \quad (5.5.9)$$

Из (5.2.1), (5.2.13) и (5.5.4) следует, что эта система имеет единственное решение \hat{v} , пользуясь которым находим по формуле (5.5.7) соответствующую оптимальную оценку \hat{q} в первом приближении. В случае необходимости она может быть уточнена описанным в § 4.6 способом последовательных приближений. Найдем теперь необходимое условие, которому должна удовлетворять эта оценка.

Очевидно, что приведенные выше выкладки остаются справедливыми и в том случае, когда

$$q_0 = \hat{q}. \quad (5.5.10)$$

Из (5.5.7) следует, что при этом $\hat{v} = 0$, и зависимость (5.5.9) принимает вид

$$\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)^T [\tilde{d} - F(\hat{q})] = 0, \quad (5.5.11)$$

где $\partial F / \partial \hat{q}$ — значение матрицы $\partial F / \partial q$ при $q = \hat{q}$.

Легко показать, что это есть не что иное, как условие стационарности величины

$$S(\hat{q}) = [\tilde{d} - F(\hat{q})]^T [\tilde{d} - F(\hat{q})] = \sum_{i=1}^n [\tilde{d}_i - F_i(\hat{q})]^2 \quad (5.5.12)$$

при $q = \hat{q}$, т. е. условие того, что все

$$\frac{\partial S}{\partial \hat{q}_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (5.5.13)$$

Действительно, дифференцируя выражение (5.5.12), можно представить уравнения (5.5.13) в виде

$$\sum_{l=1}^n \frac{\partial F_l}{\partial \hat{q}_k} [\tilde{d}_l - F_l(\hat{q})] = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m,$$

равносильном матричному уравнению (5.5.11).

Таким образом, необходимым условием оптимальности оценки \hat{q} является стационарность квадратичной формы (5.5.12).

Этот результат может быть непосредственно обобщен на случай коррелированных измерений, удовлетворяющих условию (5.1.2). Для этого при помощи преобразования (5.3.1) перейдем от вектора \tilde{d} к вектору \tilde{d}' .

Можно написать, что

$$\tilde{d}' = F'(\tilde{q}), \quad F'(\tilde{q}) = K^{-\frac{1}{2}} F(\tilde{q}), \quad \tilde{d}' = K^{-\frac{1}{2}} \tilde{d}, \quad (5.5.14)$$

где \tilde{d}' — измеренное значение вектора \tilde{d} . Из (5.3.4) следует, что составляющие вектора \tilde{d}' некоррелированы. Поэтому необходимым условием оптимальности оценки $\hat{\tilde{q}}$ является стационарность величины

$$S(\hat{\tilde{q}}) = [\tilde{d}' - F'(\hat{\tilde{q}})]^T [\tilde{d}' - F'(\hat{\tilde{q}})],$$

что равносильно решению матричного уравнения

$$\left(\frac{\partial F'}{\partial \hat{\tilde{q}}} \right)^T [\tilde{d}' - F'(\hat{\tilde{q}})] = 0.$$

Отсюда, пользуясь преобразованиями (5.5.14), приходим к условию стационарности величины

$$S(\hat{q}) = [\tilde{d} - F(\hat{q})]^T K^{-1} [\tilde{d} - F(\hat{q})] \quad (5.5.15)$$

и соответствующему матричному уравнению

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \hat{q}} \right)^T K^{-1} [\tilde{d} - F(\hat{q})] = 0, \quad (5.5.16)$$

представляющему собой систему m скалярных уравнений относительно m неизвестных $\hat{q}_1, \hat{q}_2, \dots, \hat{q}_m$.

Полученное условие является необходимым, но, вообще говоря, недостаточным. Выше было показано, что при условии линейности зависимости $\tilde{d} = F(q)$ величина

$S(q)$ имеет единственное стационарное значение, в котором достигается ее абсолютный минимум. В этом случае необходимое условие оптимальности является одновременно достаточным. Однако при нелинейной зависимости d от \hat{q} величина $S(\hat{q})$ может иметь несколько стационарных значений. Возникает проблема выбора одного из них, соответствующего оптимальной оценке.

В следующей главе будет показано, что, исходя из метода максимального правдоподобия, при допущении о нормальности закона распределения ошибок § следует выбирать то стационарное значение $S(\hat{q})$, которое обеспечивает достижение абсолютного минимума этой величины. Однако, оставаясь в рамках метода наименьших квадратов и не пользуясь допущением о нормальности закона распределения ошибок, можно в известной мере обосновать такой выбор. Для этого воспользуемся тем, что в соответствии с зависимостями (5.5.2) и (5.5.3) функция

$$S_0(q) = [F(q_n) - F(q)]^T K^{-1} [F(q_n) - F(q)] \quad (5.5.17)$$

достигает абсолютного минимума при $q = q_n$. Если этот абсолютный минимум является единственным и изолированным, т. е. по своей величине и положению в пространстве векторов q заметно отличается от остальных стационарных значений рассматриваемой функции, а также достаточно острым (т. е. заметно отличается от значений $S_0(q)$ в своей ближайшей окрестности), то можно с большой уверенностью утверждать, что близкая к $S_0(q)$ функция $S(q)$ имеет единственный абсолютный минимум при некотором значении q , близком к q_n . Кроме того, остальные стационарные значения $S(q)$ будут соответствовать векторам q , заметно отличающимся от q_n . Так как оптимальная оценка \hat{q} должна мало отличаться от q_n , то ее следует искать в точке, обеспечивающей абсолютный минимум $S(q)$.

Приведенные рассуждения ни в коем случае не претендуют на строгость. Мало того, существуют примеры, для которых отыскание абсолютного минимума $S(q)$ приводит к неправильным результатам. Несмотря на это, при решении прикладных задач даже в тех случаях, когда математическая модель нелинейна, а закон рас-

пределения ошибки ξ существенно отличается от нормального, широко используются алгоритмы фильтрации, базирующиеся на отыскании абсолютного минимума величины (5.5.15). При этом, как правило, получаются вполне удовлетворительные оценки. Однако к ним следует относиться с известной осторожностью и по возможности проверять каким-либо независимым способом, например, путем апостериорной оценки их точности (см. § 4.10). Иногда говорят, что задача отыскания оценки \hat{q} *хорошо обусловлена*, если достижение абсолютного минимума величины $S(q)$ обеспечивает ее удовлетворительное решение. В противном случае задача считается *плохо обусловленной*.

Для отыскания абсолютного минимума $S(q)$ может быть использован любой из известных способов численного решения аналогичных задач. В частности, применяется описанный в § 4.6 способ последовательных приближений. При этом переход от предыдущего приближения к последующему производится при помощи линейного алгоритма фильтрации по методу наименьших квадратов. Если этот процесс сходится, то он приводит к некоторому стационарному значению величины $S(q)$. Для хорошо обусловленных задач при правильном выборе начального приближения q_0 это стационарное значение совпадает с абсолютным минимумом и обеспечивает получение удовлетворительной оценки \hat{q} . В противном случае метод последовательных приближений может вообще не сходиться, или приводить к ложной оценке \hat{q} , соответствующей не абсолютному минимуму $S(q)$, а какому-либо другому стационарному значению.

Для проверки правильности оценки \hat{q} могут быть использованы значения составляющих вектора δ невязок, определяемого из зависимости (2.1.9)

$$\delta = \tilde{d} - F(\hat{q}).$$

Если они не превосходят ожидаемых максимальных значений сумм соответствующих измерительных и методических ошибок, то рассматриваемое решение не противоречиво. В противном случае следует определить причины возникновения больших невязок. К числу этих причин относятся:

— неправильный выбор начального значения q_0 , при котором метод последовательных приближений приводит к стационарному значению $S(q)$, не совпадающему с абсолютным минимумом;

— плохая обусловленность задачи, когда даже при хорошем выборе q_0 в процессе отыскания оценки q методом последовательных приближений может иметь место значительное отклонение решения от q_n ;

— наличие значительных аномальных, т. е. грубо ошибочных измерений;

— неправильность априорных сведений об ошибках измерений и модели.

Для выявления и устранения этих обстоятельств необходимо:

— проанализировать используемые измерения и в случае выявления аномальных исключить последние из вектора \tilde{d} ;

— попытаться найти лучшее начальное приближение q_0 ;

— попытаться улучшить обусловленность задачи, добавляя новые составляющие вектора d , улучшающие экстремальные свойства функции $S_0(q)$;

— пересмотреть имеющиеся априорные сведения о максимальных значениях возможных ошибок измерения и модели.

Однако следует иметь в виду, что малость составляющих вектора δ может рассматриваться лишь как необходимое условие правильности решения задачи. Однако оно не всегда достаточно. При плохой обусловленности задачи может оказаться, что при малых невязках системы условных уравнений (2.1.9) полученная оценка \hat{q} существенно отклоняется от истинного значения q_n .

В качестве примера рассмотрим задачу определения орбиты спутника Земли по измерениям его координат на двух разнесенных участках орбиты. Обозначим через C_1 и C_2 две точки на орбите спутника (см. рис. 5.5.1), а через $t_1 < t_2$ — времена прохождения спутника через эти точки. Предположим, что в некоторой окрестности точек C_1 и C_2 производится измерение значений вектора r , определяющего положение спутника в прямоугольной системе координат с началом O в центре Земли. В каче-

стве математической модели примем кеплеровскую эллиптическую орбиту, соответствующую движению материальной точки в центральном поле тяготения Ньютона. Она определяется шестью своими элементами, образующими вектор $\mathbf{q} = \{q_1, q_2, \dots, q_6\}$.

Рассмотрим сначала идеализированный случай, когда суммарная ошибка $\xi = 0$, а в качестве вектора измерений используется шестимерный вектор

$$\mathbf{d} = \{\mathbf{r}(t_1), \mathbf{r}(t_2)\}. \quad (5.5.18)$$

При этом задача отыскания оценки $\hat{\mathbf{q}}$ сводится к решению системы уравнений

$$\tilde{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{r}(t_1, \hat{\mathbf{q}}), \quad \tilde{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{r}(t_2, \hat{\mathbf{q}}), \quad (5.5.19)$$

где $\tilde{\mathbf{r}}_1$ и $\tilde{\mathbf{r}}_2$ — измеренные значения векторов $\mathbf{r}(t_1)$ и $\mathbf{r}(t_2)$, а $\mathbf{r}(t, \mathbf{q})$ — известная зависимость вектора \mathbf{r} от времени t и вектора \mathbf{q} при движении по кеплеровской орбите.

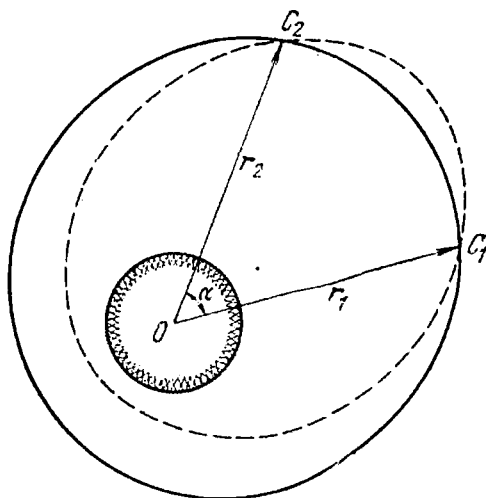


Рис. 5.5.1. Определение орбиты спутника по измерениям на двух разнесенных ее участках.

Из элементов q_j ($j = 1, 2, \dots, 6$) два представляют собой углы, определяющие положение плоскости орбиты, проходящей через точки O , C_1 и C_2 . В том случае, когда эти точки не лежат на одной прямой, указанные углы находятся из простых геометрических соображений. После этого определение остальных элементов орбиты

сводится к решению уравнения Эйлера — Ламберта [45, 49], имеющего вид

$$\Delta t = \Psi(\tilde{r}_1, \tilde{r}_2, \alpha, a), \quad (5.5.20)$$

где $\Delta t = t_2 - t_1$, $\tilde{r}_1 = |\tilde{\mathbf{r}}_1|$, $\tilde{r}_2 = |\tilde{\mathbf{r}}_2|$, α — угол между векторами \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 , отсчитываемый в направлении движения спутника, a — большая полуось орбиты, являющаяся одним из ее элементов.

После определения величины a путем решения уравнения Эйлера — Ламберта значения остающихся трех элементов орбиты вычисляются при помощи простых однозначных зависимостей [49].

Анализ уравнения Эйлера — Ламберта показывает, что оно имеет однозначное решение в том случае, когда направление полета спутника известно, и он при своем движении от точки C_1 к точке C_2 не совершает полного оборота вокруг Земли. Если направление полета задано, а целое число k полных оборотов неизвестно, то решение становится неоднозначным. При этом существует некоторое максимально возможное целое число $N = N(\tilde{\mathbf{r}}_1, \tilde{\mathbf{r}}_2, \Delta t)$ полных оборотов спутника. Таким образом, возможны решения уравнения (5.5.20), соответствующие всем целым k от 0 до N . Значению $k = 0$ соответствует одно решение, а каждому $k \neq 0$, вообще говоря, два решения. В результате получаем $2N + 1$ решений, которым соответствует $2N + 1$ возможных орбит. Таким образом, система измерений (5.5.18) оказывается неполной. При этом определяемая по формуле (5.5.17) функция $S_0(\mathbf{q})$ имеет $2N + 1$ абсолютных минимумов $S_0(\hat{\mathbf{q}}_j) = 0$, где $\hat{\mathbf{q}}_j$ ($j = 1, 2, \dots, 2N + 1$) — возможные решения системы уравнений (5.5.19). При $\xi = 0$ только одно из этих решений удовлетворяет условию $\hat{\mathbf{q}}_j = \mathbf{q}_n$, где \mathbf{q}_n — истинное значение вектора \mathbf{q} . Поэтому применение метода наименьших квадратов к рассматриваемой идеализированной задаче может привести к ложному решению, что является следствием неполноты используемой системы измерений.

Перейдем теперь к рассмотрению реальной задачи, в которой $\xi \neq 0$ и используется избыточная система измерений векторов $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}(t_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) в точках, находящихся в некоторой окрестности точек C_1 и C_2 .

Если эта окрестность мала и ошибки ξ невелики, то вычисляемая по формуле (5.5.15) функция $S(\hat{q})$ близка по своему характеру к $S_0(q)$ и также имеет $2N + 1$ минимум.

В некоторых частных случаях уравнение Эйлера — Ламберта может иметь кратные корни. При приближении к такому случаю два решения идеализированной задачи неограниченно сближаются между собой. В результате, если вектор q_n определяет истинную орбиту, проходящую через точки C_1 и C_2 , то может существовать вектор q' , близкий к q_n и характеризующий орбиту, проходящую через те же точки и близкую к истинной орбите в окрестности этих точек. Однако на значительном удалении от рассматриваемых точек обе орбиты могут существенным образом отличаться друг от друга. На рис. 5.5.1 одна из них изображена сплошной линией, а другая — пунктиром. Обозначим через d_n и d' значения вектора d соответственно на истинной и близкой к ней орбите. Из рисунка видно, что составляющие разности $d' - d_n$ могут оказаться сравнимыми с соответствующими составляющими вектора ξ . При этом чрезвычайно затрудняется выбор между величинами $S(q')$ и $S(q_n)$. При некоторых ошибках ξ может даже получиться, что

$$S(q') < S(q_n).$$

В этом случае система измерений d хотя и является полной, но плохо обусловлена. Для улучшения обусловленности этой системы следует добавить к ней измерения r в точках, по возможности удаленных от C_1 и C_2 .

§ 5.6. Оценка точности метода наименьших квадратов

Так как метод наименьших квадратов при сделанных выше допущениях обеспечивает получение несмещенной оценки \hat{q} , удовлетворяющей условию

$$E(\hat{q}) = q_n, \quad (5.6.1)$$

то точность этой оценки может быть охарактеризована матрицей $D(\hat{q})$. Переходя к вычислению этой матрицы,

предположим, что используемая модель (2.1.3) удовлетворяет указанным в предыдущем параграфе условиям линеаризируемости. Пусть q_0 — некоторое, достаточно близкое к истинному, значение вектора q , позволяющее находить оценку \hat{q} по формуле (5.5.7). Тогда

$$D(\hat{q}) = D(\hat{v}). \quad (5.6.2)$$

Оценка \hat{v} определяется путем решения системы нормальных уравнений. Если суммарная ошибка ξ удовлетворяет условиям (5.2.2), эта система может быть представлена в виде векторного уравнения (5.5.9). В общем случае при условиях (5.1.2), пользуясь преобразованиями (5.3.1) и (5.5.14), можно представить уравнение (5.5.9) в виде

$$\left(\frac{\partial F}{\partial l}\right)_0^T K^{-1} \left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)_0 \hat{v} = \left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)_0^T K^{-1} [\tilde{d} - F(q_0)]. \quad (5.6.3)$$

Отсюда

$$\hat{v} = Q^{-1} \left(\frac{\partial F}{\partial l}\right)_0^T K^{-1} [\tilde{d} - F(q_0)], \quad (5.6.4)$$

где Q — матрица системы нормальных уравнений (5.6.3), определяемая выражением

$$Q = \left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)_0^T K^{-1} \left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)_0. \quad (5.6.5)$$

Из зависимостей (1.9.23), (5.1.2), (5.6.2), (5.6.4), учитывая симметричность матриц K , K^{-1} , Q , Q^{-1} , находим, что

$$D(\hat{q}) = \sigma^2 Q^{-1} \left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)_0^T K^{-1} \left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)_0 Q^{-1}.$$

Отсюда, пользуясь равенством (5.6.5), получаем окончательное выражение

$$D(\hat{q}) = \sigma^2 Q^{-1}. \quad (5.6.6)$$

Погрешности используемой в процессе вывода линейной зависимости (5.5.8) тем меньше, чем ближе q_0 к истинному значению q_n . Поскольку наиболее близким к q_n известным значениям вектора q является его оценка, целесообразно принять $q_0 = \hat{q}$. Тогда

$$Q = \left(\frac{\partial F}{\partial \hat{q}}\right)^T K^{-1} \frac{\partial F}{\partial \hat{q}}. \quad (5.6.7)$$

Для оценки \hat{l} вектора оцениваемых параметров, связанного с вектором q зависимостью (3.4.1), находим, что

$$D(\hat{l}) = \sigma^2 \frac{\partial G}{\partial \hat{q}} Q^{-1} \left(\frac{\partial G}{\partial \hat{q}} \right)^T. \quad (5.6.8)$$

В частности, для скалярного оцениваемого параметра l ковариационная матрица $D(\hat{l})$ обращается в дисперсию $D(\hat{l})$, а матрица $\partial G / \partial \hat{q}$ — в строку $1 \times m$.

Для линейной модели (4.6.1) и (5.2.3) зависимости (5.6.6) и (5.6.8) принимают вид

$$D(\hat{q}) = \sigma^2 (A^T K^{-1} A)^{-1}, \quad D(\hat{l}) = \sigma^2 C (A^T K^{-1} A)^{-1} C^T. \quad (5.6.9)$$

§ 5.7. Состоятельность оценки по методу наименьших квадратов

Рассмотрим два вектора, $d_n = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ и $d_k = \{d_1, d_2, \dots, d_k\}$. Будем считать, что $d_k \subset d_n$, если $k \leq n$, и все составляющие вектора d_k являются одновременно составляющими вектора d_n (т. е. принадлежат множеству измерений, образованному составляющими вектора d_n). Пусть имеется некоторая возрастающая последовательность чисел n и соответствующая последовательность векторов d_n такая, что для любых двух ее членов d_k и d_n

$$d_k \subset d_n \quad \text{при} \quad k \leq n. \quad (5.7.1)$$

Предположим, что результаты измерения векторов d_n используются для определения состояния некоторой системы по методу наименьших квадратов. Если l — определяемый в результате скалярный оцениваемый параметр, то последовательности d_n соответствует последовательность оценок \hat{l}_n с дисперсиями $D(\hat{l}_n)$. Из неравенства (5.2.46) и зависимости (5.7.1) следует, что

$$D(\hat{l}_n) \leq D(\hat{l}_k) \quad \text{при} \quad k \leq n,$$

т. е. последовательность дисперсий $D(\hat{l}_n)$ является невозрастающей. Так как $D(\hat{l}_n) \geq 0$, то всегда существует $\lim_{n \rightarrow \infty} D(\hat{l}_n)$. Большое значение имеет вопрос о том, справедливо ли равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D(\hat{l}_n) = 0. \quad (5.7.2)$$

Поскольку при допущениях (5.1.2) оценка по методу наименьших квадратов является несмещенной, то из зависимости (5.7.2) непосредственно следует состоятельность этой оценки. Однако обратное утверждение справедливо лишь при некоторых ограничениях, налагаемых на законы распределения оценок \hat{l}_n (см. § 3.9). Мы будем в дальнейшем полагать, что эти условия удовлетворяются, и в том случае, когда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D(\hat{l}_n) > 0,$$

оценка по методу наименьших квадратов становится несостоятельной.

Покажем на примере, что оценка по методу наименьших квадратов может быть состоятельной и несостоятельной. Для этого рассмотрим задачу определения скалярной величины q по ее n измеренным значениям, образующим вектор $\mathbf{d}_n = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$. В этом случае математическая модель является линейной и имеет вид

$$\mathbf{d}_n = \mathbf{v}_n q, \quad (5.7.3)$$

где \mathbf{v}_n — вектор, составленный из n единиц. Очевидно, что

$$\mathbf{v}_n^T \mathbf{v}_n = n. \quad (5.7.4)$$

Предположим, что все используемые измерения некоррелированы и равноточны. Тогда система нормальных уравнений (5.2.10) принимает вид

$$\mathbf{v}_n^T \mathbf{v}_n \hat{q}_n = \mathbf{v}_n^T \tilde{\mathbf{d}}_n.$$

Отсюда, пользуясь (5.7.4), находим, что

$$n \hat{q}_n = \sum_{i=1}^n \tilde{d}_i, \quad \hat{q}_n = \frac{\sum_{i=1}^n \tilde{d}_i}{n}. \quad (5.7.5)$$

Из (5.6.6) следует, что при этом

$$D(\hat{q}_n) = \frac{\sigma^2}{n} \quad (5.7.6)$$

и удовлетворяется условие (5.7.2) состоятельности оценки \hat{q} .

Рассмотрим теперь ту же задачу при наличии корреляционной связи между составляющими вектора d_n . Допустим, что ошибки ξ_n измерения этого вектора удовлетворяют условиям

$$E(\xi_n) = 0, \quad D(\xi_n) = \sigma^2 K_n, \quad K_n = I + \beta v_n v_n^T, \quad (5.7.7)$$

где $\beta > 0$ — заданное число. Очевидно, что произведение $v_n v_n^T$ представляет собой квадратную симметричную матрицу $n \times n$, состоящую из единиц. Поэтому матрица K_n симметрична. Докажем, что она положительно определена. Пусть $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ — произвольный вектор. Тогда квадратичная форма

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= x^T K_n x = \sum_{i=1}^n x_i^2 + \beta \sum_{i,j=1}^n x_i x_j = \\ &= \sum_{i=1}^n x_i^2 + \beta \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 > 0 \quad \text{при } x \neq 0. \end{aligned}$$

Найдем теперь матрицу K_n^{-1} . Для этого воспользуемся равенством (1.2.15) и заметим, что в рассматриваемом случае

$$A = K_n, \quad B = I, \quad C = v_n, \quad D = \beta, \quad E = v_n^T.$$

Тогда

$$\begin{aligned} D^{-1} &= \frac{1}{\beta}, \quad B^{-1} = I, \quad S = \frac{1}{\beta} + v_n^T v_n = \frac{1}{\beta} + n, \\ S^{-1} &= \frac{\beta}{1 + \beta n}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$K^{-1} = I - \frac{\beta}{1 + \beta n} v_n v_n^T.$$

Учитывая (5.3.7) и (5.7.4), находим матрицу системы нормальных уравнений

$$\begin{aligned} Q &= v_n^T K^{-1} v_n = v_n^T \left(I - \frac{\beta}{1 + \beta n} v_n v_n^T \right) v_n = \\ &= n - \frac{\beta n^2}{1 + \beta n} = \frac{n}{1 + \beta n}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$D(\hat{q}_n) = \sigma^2 Q^{-1} = \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \beta \right), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} D(\hat{q}_n) = \sigma^2 \beta > 0, \quad (5.7.8)$$

т. е. оценка \hat{q} несостоятельна.

Интересно отметить, что в рассмотренном случае оценка \hat{q} определяется при помощи выражения (5.7.5), полученного для некоррелированных измерений. Таким образом, в рассматриваемой задаче при различных значениях матрицы K получается одинаковая оценка \hat{q} . В общем случае вопрос об условиях, при которых различным матрицам K соответствует одинаковая оценка \hat{q} , получаемая по методу наименьших квадратов, был рассмотрен Б. Ц. Бахшияном.

Докажем теперь теорему, определяющую достаточные условия, при которых оценка по методу наименьших квадратов оказывается состоятельной.

Теорема. Оценка по методу наименьших квадратов является состоятельной в смысле, указанном в § 3.9, при следующих условиях:

1. Множество Δ возможных измерений определяются линейной или линеаризованной*) измеряемой функцией (4.6.10). При этом времена измерений t_i находятся на замкнутом мерном интервале (2.4.4), а соответствующие измерения d_i характеризуются зависимостями (4.6.11).

2. Допускается неограниченное повторение измерений, т. е. одному и тому же времени t_i может соответствовать произвольное число независимых (в смысле, указанном в § 2.4) измерений.

3. Оцениваемый параметр l связан с вектором q состояния линейной или линеаризованной зависимостью (5.2.3).

4. Погрешность ξ_n любого вектора $d_n = \{d_1, d_2, \dots, d_n\} \subset \Delta$ может быть представлена в виде суммы некоррелированной и систематической ошибок. При этом корреляция между указанными видами ошибок отсутствует, составляющие вектора a мешающих параметров некоррелированы, а число этих составляющих μ не зависит от размерности n вектора d_n .

Не нарушая общности, можно считать все составляющие ошибок равноточными. Тогда ковариационная мат-

*) Строго эта теорема доказывается лишь для линейных функций. Однако на практике ею можно пользоваться и в том случае, когда погрешность линеаризации мала по сравнению с ошибками измерений.

рица погрешности ξ_n определяется из выражения, аналогичного зависимости (3.1.26),

$$D(\xi_n) = \sigma^2 \left[I + \sum_{j=1}^{\mu} f_{nj} f_{nj}^* \right], \quad (5.7.9)$$

где f_{nj} ($j = 1, 2, \dots, \mu$) — векторы, определяемые равенствами

$$f_{nj} = \{f_j(t_1), f_j(t_2), \dots, f_j(t_n)\}. \quad (5.7.10)$$

Здесь t_1, t_2, \dots, t_n — времена измерений, используемые при формировании вектора d_n , а $f_j(t)$ — составляющее заданной строки функций

$$f(t) = [f_1(t), f_2(t), \dots, f_{\mu}(t)]. \quad (5.7.11)$$

5. Функции $\Psi_j(t)$, $j = 1, 2, \dots, m$, используемые при построении модели (4.6.1), и функции $f_j(t)$, $j = 1, 2, \dots, \mu$, характеризующие систематические ошибки измерения, линейно независимы. Иначе говоря, на мерном интервале (2.4.4) существует $m + \mu$ моментов времени t_i ($i = 1, 2, \dots, m + \mu$), для которых определитель

$$\begin{vmatrix} \Psi_1(t_1) & \Psi_2(t_1) & \dots & \Psi_m(t_1) & f_1(t_1) & f_2(t_1) & \dots & f_{\mu}(t_1) \\ \Psi_1(t_2) & \Psi_2(t_2) & \dots & \Psi_m(t_2) & f_1(t_2) & f_2(t_2) & \dots & f_{\mu}(t_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Psi_1(t_{m+\mu}) & \Psi_2(t_{m+\mu}) & \dots & \Psi_m(t_{m+\mu}) & f_1(t_{m+\mu}) & f_2(t_{m+\mu}) & \dots & f_{\mu}(t_{m+\mu}) \end{vmatrix} \neq 0. \quad (5.7.12)$$

В частном случае систематические ошибки могут отсутствовать, и тогда мы получаем теорему о состоятельности оценки по методу наименьших квадратов при условиях 1—3 и некоррелированных ошибках.

Прежде чем приступить к доказательству этой теоремы, докажем следующую лемму.

Лемма. Рассмотрим задачу определения состояния системы с линейной или линеаризованной моделью (4.6.1). Предположим, что одна из составляющих вектора d некоррелирована с остальными и существует возможность повторения этой составляющей k раз. При этом результаты всех повторных измерений некоррелированы между собой. Тогда оценка состояния системы

по методу наименьших квадратов с использованием повторных измерений совпадает с оценкой, полученной при использовании вместо указанных k одного измерения, равного их среднему арифметическому значению с уменьшенной в k раз дисперсией.

Для доказательства представим вектор d в виде $d = \{s, v\}$, где s — скалярное измерение, допускающее повторение, а v — вектор остальных измерений. При этом по условиям леммы ковариационная матрица измеренного значения \tilde{d} имеет вид

$$D(\tilde{d}) = \sigma^2 K, \quad K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix}, \quad K^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & L^{-1} \end{pmatrix},$$

где L — положительно определенная матрица $(n-1) \times (n-1)$. Математическая модель задачи может быть представлена в виде

$$d = Aq, \quad A = \begin{pmatrix} a \\ B \end{pmatrix}, \quad (5.7.13)$$

где a — нулевая строка матрицы A , а B — совокупность остальных строк. При повторении измерений s получаем вектор

$$d_1 = \{s_k, v\},$$

где s_k — вектор, составленный из k скаляров s . Ковариационная матрица измеренного значения этого вектора

$$D(\tilde{d}_1) = \sigma^2 K_1, \quad K_1 = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix}, \quad K_1^{-1} = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & L^{-1} \end{pmatrix},$$

где I_k — единичная матрица $k \times k$.

Вектор d_1 связан с вектором q математической моделью

$$d_1 = A_1 q, \quad A_1 = \begin{pmatrix} a_k \\ q \end{pmatrix},$$

где a_k — матрица, состоящая из k строк a .

Оценка \hat{q} по измеренному значению \tilde{d}_1 определяется путем решения системы нормальных уравнений

$$Q\hat{q} = b,$$

где

$$\left. \begin{aligned} Q &= A_1^T K_1^{-1} A_1 = (a_k^T \ B^T) \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & L^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_k \\ B \end{pmatrix} = \\ &= a_k^T a_k + B^T L^{-1} B = k a^T a + B^T L^{-1} B, \\ b &= A_1^T K_1^{-1} \tilde{d}_1 = (a_k^T \ B^T) \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & L^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{s}_k \\ \tilde{v} \end{pmatrix} = \\ &= a_k^T \tilde{s}_k + B^T L^{-1} \tilde{v} = a^T \sum_{i=1}^k \tilde{s}_i + B^T L^{-1} \tilde{v}, \end{aligned} \right\} \quad (5.7.14)$$

где \tilde{s}_i ($i = 1, 2, \dots, k$) — результаты повторных измерений величины s . Примем теперь за одно измерение среднее арифметическое

$$\tilde{\alpha} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \tilde{s}_i$$

с дисперсией

$$D(\tilde{\alpha}) = \frac{D(\tilde{s})}{k}.$$

В этом случае будем иметь вектор измерений

$$d_2 = \{a, v\}$$

с ковариационной матрицей

$$D(\tilde{d}_2) = \sigma^2 K_2, \quad K_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{k} & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix}, \quad K_2^{-1} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & L^{-1} \end{pmatrix}$$

и исходной математической моделью (5.7.13). В результате получаем следующие выражения для матрицы Q и вектора b , определяющих систему нормальных уравнений

$$Q = A^T K_2^{-1} A = (a^T \ B^T) \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & L^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ B \end{pmatrix} = k a^T a + B^T L^{-1} B,$$

$$\begin{aligned} b &= A^T K_2^{-1} \tilde{d}_2 = (a^T \ B^T) \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & L^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \tilde{s}_i \\ \tilde{v} \end{pmatrix} = \\ &= a^T \sum_{i=1}^k \tilde{s}_i + B^T L^{-1} \tilde{v}, \end{aligned}$$

которые совпадают с выражениями (5.7.14). Лемма доказана.

Перейдем теперь к доказательству основной теоремы. Рассмотрим сначала случай, когда систематические ошибки отсутствуют, и выражение (5.7.9) заменяется зависимостью

$$D(\xi_n) = \sigma^2 I.$$

Из линейной независимости функций $\Psi_j(t)$ следует, что на интервале (2.4.4) существует совокупность m времен t_1, t_2, \dots, t_m , на которой удовлетворяется условие

$$R(A_m) = m,$$

где A_m — квадратная матрица $m \times m$, определяемая выражением (4.6.12) при $n = m$. Пользуясь этой совокупностью времен, построим вектор измерений

$$d_m = \{\Psi(q, t_1), \Psi(q, t_2), \dots, \Psi(q, t_m)\},$$

связанный с вектором q модельной зависимостью

$$d_m = A_m q.$$

В этом случае система нормальных уравнений может быть написана в форме (5.3.14) и соответствующая оценка \hat{l}_m рассматриваемого параметра l находится при помощи выражения

$$\hat{l}_m = CA_m^{-1} \tilde{d}_m,$$

а ее дисперсия определяется по формуле

$$D(\hat{l}_m) = \sigma^2 CA_m^{-1} (CA_m^{-1})^T. \quad (5.7.15)$$

Рассмотрим теперь последовательность векторов $d_n (n = km)$, которая получается при помощи совокупности времен t_1, t_2, \dots, t_m путем проведения в каждый момент этой совокупности k одинаковых измерений. В соответствии с доказанной леммой каждая группа таких измерений $\tilde{d}_1, \tilde{d}_2, \dots, \tilde{d}_k$, соответствующих одному времени $t_j (j = 1, 2, \dots, m)$, может быть заменена одним измерением

$$\tilde{s}_j = \frac{\sum_{i=1}^k \tilde{d}_i}{k}$$

с дисперсией

$$D(\tilde{s}_j) = \frac{\sigma^2}{k}.$$

Проведя такую замену для всех времен t_1, t_2, \dots, t_m , получим аналогично выражению (5.7.15)

$$D(\hat{l}_n) = \frac{\sigma^2}{k} \mathbf{C} \mathbf{A}_m^{-1} (\mathbf{C} \mathbf{A}_m^{-1})^T. \quad (5.7.16)$$

Отсюда непосредственно следует, что на рассматриваемой последовательности оценок \hat{l}_n ($n = km, k = 1, 2, \dots$)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D(\hat{l}_n) = 0,$$

т. е. оценка \hat{l} является состоятельной на множестве Δ .

Для доказательства теоремы в общем случае при наличии систематических ошибок воспользуемся доказанной в § 5.4 теоремой эквивалентности. Согласно этой теореме, а также зависимостям (5.4.3), (5.4.4), (5.4.7), (5.4.9) и (5.7.9) отыскание оценки \hat{l}_n по измеренному значению \tilde{d}_n вектора

$$\mathbf{d}_n = \{\Psi(q, t_1), \Psi(q, t_2), \dots, \Psi(q, t_n)\} \quad (5.7.17)$$

равносильно решению расширенной задачи с векторами состояния и измерения

$$\mathbf{q}' = \{q, \alpha\}, \mathbf{d}'_n = \{\mathbf{d}_n + \mathbf{B}\alpha, \alpha\}, \tilde{\mathbf{d}}'_n = \{\tilde{\mathbf{d}}_n, \tilde{\alpha}\} = \{\tilde{\mathbf{d}}_n, 0\}, \quad (5.7.18)$$

связанными математической моделью

$$\mathbf{d}'_n = \mathbf{A}'_n \mathbf{q}', \quad \mathbf{A}' = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_n & \mathbf{B} \\ 0 & \mathbf{I}_\mu \end{pmatrix}, \quad (5.7.19)$$

где матрица \mathbf{A}_n определяется из выражения (4.6.12), а матрица

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} f_1(t_1) & f_2(t_1) & \dots & f_\mu(t_1) \\ f_1(t_2) & f_2(t_2) & \dots & f_\mu(t_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1(t_n) & f_2(t_n) & \dots & f_\mu(t_n) \end{pmatrix}. \quad (5.7.20)$$

Обозначим через ξ'_n суммарную ошибку вектора \mathbf{d}'_n . Из зависимостей (5.4.3), (5.4.18), (5.7.9) и (5.7.18) находим, что ковариационная матрица

$$\mathbf{D}(\tilde{\mathbf{d}}'_n) = \mathbf{D}(\xi'_n) = \sigma^2 \mathbf{I}_{m+\mu}, \quad (5.7.21)$$

т. е. ошибка ξ'_n является некоррелированной.

Выберем теперь совокупность времен t_i ($i = 1, 2, \dots, m + \mu$), удовлетворяющую условию (5.7.12). В каждый из этих моментов будем проводить k измерений. Обозначим через $n = k(m + \mu)$ общее число таких измерений, через d'_k — составленный из них вектор, а через \hat{l}'_k — полученную на основе этого вектора оценку параметра l . Аналогично зависимости (5.7.16) можно написать, что

$$D(\hat{l}'_k) = \frac{D(l'_1)}{k},$$

где оценка \hat{l}'_1 соответствует вектору d'_1 , получаемому при $k = 1$. Отсюда непосредственно следует доказательство рассматриваемой теоремы

$$\lim_{k \rightarrow \infty} D(\hat{l}'_k) = 0.$$

Как показал Р. Р. Назиров, используемое в данной теореме условие (5.7.12) может быть заменено другим, более общим, а именно: для состоятельности оценки заданного скалярного параметра l , определяемого модельной зависимостью (5.2.3), достаточно существования на мерном интервале (2.4.4) некоторой совокупности времен измерений

$$T = \{t_1, t_2, \dots, t_\beta\}, \quad (5.7.22)$$

удовлетворяющей условию

$$ZL = (C \ 0). \quad (5.7.23)$$

Здесь $0 < \beta \leq m + \mu$ — некоторое число, матрица L определяется выражением

$$L = \begin{pmatrix} \Psi_1(t_1) & \Psi_2(t_1) & \dots & \Psi_m(t_1) & f_1(t_1) & f_2(t_1) & \dots & f_\mu(t_1) \\ \Psi_1(t_2) & \Psi_2(t_2) & \dots & \Psi_m(t_2) & f_1(t_2) & f_2(t_2) & \dots & f_\mu(t_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Psi_1(t_\beta) & \Psi_2(t_\beta) & \dots & \Psi_m(t_\beta) & f_1(t_\beta) & f_2(t_\beta) & \dots & f_\mu(t_\beta) \end{pmatrix},$$

а $Z = (z_1, z_2, \dots, z_\beta)$ — некоторая соответствующим образом подобранная строка.

Из сравнения условий (5.7.12) и (5.7.22) видно, что первое из них определяет состоятельность оценки любого оцениваемого параметра l , характеризуемого выражением (5.2.3), а второе — лишь конкретного параметра, соответствующего вполне определенной матрице — стро-

ке C . При этом легко показать, что условия (5.7.12) достаточно для выполнения условия (5.7.22) при произвольном C . Поэтому последнее является более общим.

Для доказательства состоятельности оценки по методу наименьших квадратов при условии (5.7.22) перейдем при помощи равенств (5.7.18) и (5.7.19) к расширенной задаче и рассмотрим последовательность векторов $d'_k (k = 1, 2, \dots)$ образуемую путем повторения k раз измерений для всех времен совокупности (5.7.22). При этом математическая модель (5.7.19) расширенной задачи принимает вид

$$d'_k = A'_k q',$$

где матрица A'_k сформирована из матрицы L путем повторения k раз каждой строки последней.

Построим теперь линейную оценку параметра l

$$\hat{l}'_k = \frac{Z_k \tilde{d}'_k}{k},$$

в которой строка Z_k получена путем повторения k раз каждого элемента строки Z . Из зависимости (5.7.23) следует, что эта оценка удовлетворяет условию несмещенности для расширенной задачи

$$\frac{Z_k A'_k}{k} = ZL = (C \ 0).$$

Далее, пользуясь выражением (5.7.21), находим дисперсию оценки

$$D(\hat{l}'_k) = \frac{\sigma^2}{k} \sum_{i=1}^{\beta} z_i^2. \quad (5.7.24)$$

Так как условие (5.7.12) может, вообще говоря, не выполняться, то следует учесть возможность того, что

$$R(A'_k) = R(L) < m + \mu.$$

При этом вектор d'_k измерений оказывается неполным (см. § 2.4). Дополним его путем привлечения каких-либо дополнительных измерений, входящих в используемое множество Δ возможных измерений (в том числе, если это необходимо, — априорных сведений о значении вектора a мешающих параметров). В результате

получим вектор \bar{d}'_k , удовлетворяющий условиям.

$$\bar{d}'_k \supset d'_k, \quad R(\bar{A}'_k) = \mu + k, \quad (5.7.25)$$

где A'_k — матрица линейной модели

$$\bar{d}'_k = \bar{A}'_k q'.$$

Из несмещенности линейной оценки \hat{l}'_k , теоремы Гаусса — Маркова и зависимостей (5.7.25) непосредственно следует, что

$$D(\hat{l}'_k) \leq D(\hat{l}'_k),$$

где \hat{l}' — оценка, получаемая по методу наименьших квадратов с использованием вектора \bar{d}'_k . Отсюда, пользуясь (5.7.24), находим

$$\lim_{k \rightarrow \infty} D(\hat{l}'_k) = 0,$$

что доказывает состоятельность рассматриваемой оценки.

Заметим, что необходимость использования условий типа (5.7.12) или (5.7.23) при доказательстве состоятельности оценки обусловлена тем, что при невыполнении этих условий для получения оценки \hat{l}_n приходится использовать не только апостериорную информацию, но и априорные сведения о векторе мешающих параметров α . Точность этих сведений не изменяется при проведении дополнительных измерений, и доказательство не проходит.

Приведенный выше пример несостоятельности оценки соответствует такому случаю. В этом примере ошибка измерений может быть представлена в виде суммы некоррелированной части и систематической погрешности, определяемой мешающим параметром α . При этом

$$m = 1, \quad \Psi_1(t) = 1, \quad \mu = 1, \quad f_1(t) = \sqrt{\beta},$$

т. е. функции $\Psi_1(t)$ и $f_1(t)$ линейно зависимы.

В общем случае может быть доказана следующая теорема о несостоятельности оценок по методу наименьших квадратов.

Теорема. При условиях 1 и 4 предыдущей теоремы, а также при наличии линейной зависимости между функциями $\Psi_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, m$), определяющими матема-

тическую модель (4.6.11), и функциями $f_j(t)$ ($j = 1, 2, \dots, \beta$), характеризующими систематические ошибки измерений в соответствии с равенствами (5.7.9) и (5.7.10), существуют линейные оцениваемые параметры вида (5.4.6) $l = Cq + C_1\alpha$, для которых оценка по методу наименьших квадратов несостоятельна.

Обозначим через $\lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m+\mu}\}$ вектор коэффициентов линейной зависимости между рассматриваемыми системами функций. Представим его в виде совокупности двух векторов

$$\lambda = \{\lambda_m, \lambda_\mu\}, \quad (5.7.26)$$

где $\lambda_m = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\}$, $\lambda_\mu = \{\lambda_{m+1}, \lambda_{m+2}, \dots, \lambda_{m+\mu}\}$.

Тогда линейная зависимость между функциями $\Psi_i(t)$ и $f_j(t)$ может быть записана в виде

$$\Psi(t) \lambda_m + f(t) \lambda_\mu = 0, \quad (5.7.27)$$

где $\Psi(t) = [\Psi_1(t) \Psi_2(t) \dots \Psi_m(t)]$ и $f = [f_1(t) f_2(t) \dots f_\mu(t)]$.

Рассмотрим теперь некоторую произвольную совокупность времен измерений t_1, t_2, \dots, t_n , которой соответствует вектор $d = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$. Матрица A линейной зависимости $d = Aq$ определяется выражением (4.6.12), а ковариационная матрица ошибок ξ измеренных значений \tilde{d} этого вектора — выражением, аналогичным зависимости (5.7.9)

$$D(\xi) = \sigma^2(I + BB^T), \quad (5.7.28)$$

где матрица B вычисляется по формуле (5.7.20). Из (4.6.12), (5.7.20) и (5.7.27) следует, что

$$A\lambda_m + B\lambda_\mu = 0. \quad (5.7.29)$$

Воспользуемся теперь теоремой эквивалентности (5.4.8) и перейдем к расширенной задаче при помощи преобразования (5.4.4). Математическая модель расширенной задачи определяется зависимостями (5.4.15) и (5.4.16). В результате решения этой задачи получаем оценку

$$\hat{l}' = X' \begin{pmatrix} \tilde{d} \\ \tilde{\alpha} \end{pmatrix} = X'_n \tilde{d} + X'_\mu \tilde{\alpha}, \quad (5.7.30)$$

где $\mathbf{X}' = (x'_1 x'_2 \dots x'_{n+\mu}) = (\mathbf{X}'_n \mathbf{X}'_\mu)$ — строка коэффициентов алгоритма фильтрации по методу наименьших квадратов, а $\mathbf{X}'_n = (x'_1 x'_2 \dots x'_n)$ и $\mathbf{X}'_\mu = (x'_{n+1} x'_{n+2} \dots x'_{n+\mu})$.

Из принятых допущений и выражения (5.7.28) следует, что

$$D(\hat{l}') = \sigma^2 (|\mathbf{X}'_n|^2 + |\mathbf{X}'_\mu|^2). \quad (5.7.31)$$

Воспользуемся теперь условием (5.4.22) несмещенности алгоритма (5.7.30) и зависимостью (5.4.16)

$$\mathbf{X}'\mathbf{A}' = (\mathbf{X}'_n\mathbf{A} \mathbf{X}'_\mu\mathbf{B} + \mathbf{X}'_\mu) = (\mathbf{C}\mathbf{C}_1) = \mathbf{C}'.$$

Умножим это равенство справа на вектор λ и воспользуемся выражением (5.7.26). В результате получим $\mathbf{C}'\lambda = \mathbf{X}'_n\mathbf{A}\lambda_m + (\mathbf{X}'_\mu\mathbf{B} + \mathbf{X}'_\mu)\lambda_\mu = \mathbf{X}'_n(\mathbf{A}\lambda_m + \mathbf{B}\lambda_\mu) + \mathbf{X}'_\mu\lambda_\mu$.

Отсюда, учитывая (5.7.29), находим

$$\mathbf{X}'_\mu\lambda_\mu = \mathbf{C}'\lambda. \quad (5.7.32)$$

Всегда можно подобрать такой параметр l , для которого строка \mathbf{C}' удовлетворяет условию

$$\mathbf{C}'\lambda \neq 0. \quad (5.7.33)$$

Отсюда, пользуясь неравенством Коши — Буняковского, получим

$$|\mathbf{X}'_\mu|^2 \geq \frac{(\mathbf{C}'\lambda)^2}{|\lambda_\mu|^2} > 0$$

или, окончательно, учитывая (5.4.8) и (5.7.31),

$$D(\hat{l}) \geq D(\hat{l}') \geq \sigma^2 \frac{(\mathbf{C}'\lambda)^2}{|\lambda_\mu|^2} > 0. \quad (5.7.34)$$

Правая часть этого неравенства не зависит от числа n . Отсюда непосредственно следует несостоятельность оценок \hat{l} и \hat{l}' .

Заметим, что неравенства (5.7.33) и (5.7.34) могут быть получены при $\mathbf{C}_1 = 0$, т. е. для оцениваемых параметров l , не зависящих от вектора α . Для этого достаточно выполнения условия $\lambda_\mu \neq 0$.

Заметим, что требование допустимости повторения одних и тех же измерений не является существенным в теореме о состоятельности оценки. Последовательности векторов d_n , обеспечивающие выполнение условия

(5.7.2), могут быть получены и при несоблюдении этого требования. Необходимо лишь избежать накопления почти всех времен t_i ($i = 1, 2, \dots, n$) в окрестности некоторых фиксированных точек t_j ($j = 1, 2, \dots, k$), для которых соответствующий вектор

$$d_k = \{\Psi(q, t_1), \Psi(q, t_2), \dots, \Psi(q, t_k)\}$$

не образует полную систему измерений (см. § 2.4).

На первый взгляд может показаться парадоксальным, что при произвольной (но известной) корреляционной зависимости между составляющими вектора ξ , оценка по методу наименьших квадратов не всегда оказывается состоятельной. Действительно, пользуясь преобразованием (5.3.1), можно всегда перейти от условий (5.1.2) к условиям (5.2.2), при которых состоятельность оценки доказана. Однако следует иметь в виду, что при рассмотрении последовательности d_n каждому из этих векторов соответствует свое преобразование (5.3.1). При этом каждый раз полностью изменяется определяемая по формуле (5.3.5) матрица A'_n . В этих условиях приведенное выше доказательство состоятельности оценки не проходит.

§ 5.8. Оценка коэффициента σ^2

Из приведенных выше результатов следует, что алгоритм фильтрации по методу наименьших квадратов не зависит от величины σ^2 в зависимости (5.1.2). Однако последняя существенным образом влияет на оценку точности полученных результатов, так как входит в выражение (5.6.8) для ковариационной матрицы $D(\hat{I})$. В связи с этим возникает необходимость оценки величины σ^2 по результатам измерений.

Рассмотрим сначала случай некоррелированных равноточных измерений с ковариационной матрицей $D(d) = \sigma^2 I$ и сравним систему условных уравнений (2.1.9)

$$\tilde{d} = F(\hat{q}) + \delta$$

с зависимостью (5.1.1)

$$\tilde{d} = F(q_n) + \xi.$$

Если оценка \hat{q} состоятельна, то существует последовательность векторов $d_n = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$, для которой соответствующая оценка

$$\hat{q}_n \xrightarrow{P} q_n \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (5.8.1)$$

Отсюда, полагая функцию $F(q)$ непрерывной, находим, что

$$\xi_n \xrightarrow{P} \delta_n \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad (5.8.2)$$

где ξ_n и δ_n значения величин ξ и δ в случае использования вектора d_n . Поэтому при достаточно большом n можно рассматривать δ_n в качестве измеренного значения $\tilde{\xi}_n$ ошибки ξ_n .

С другой стороны, все составляющие ξ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) вектора ξ_n по условиям задачи некоррелированы и равнооточны. Дисперсия любой из них $D(\xi_i) = \sigma^2$, а математическое ожидание $E(\xi_i) = 0$. Поэтому в качестве оценки $\hat{\sigma}^2$ величины σ^2 можно принять среднее статистическое значение ξ_i^2 , т. е.

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tilde{\xi}_i^2.$$

Отсюда, заменяя $\tilde{\xi}_n$ на δ_n , получим, что

$$\hat{\sigma}^2 \approx \frac{R^2}{n}, \quad (5.8.3)$$

где

$$R^2 = \sum_{i=1}^n \delta_i^2 = \delta^T \delta = [\tilde{d} - F(\hat{q})]^T [d - F(\hat{q})]. \quad (5.8.4)$$

Зависимость (5.8.3) справедлива при $n \rightarrow \infty$. При конечном n можно рассматривать R^2 как случайную величину. В математической статистике доказывается [41], что при использовании линейной модели (4.6.1) математическое ожидание этой величины

$$E(R^2) = (n - m) \sigma^2.$$

Отсюда следует, что если в качестве оценки $\hat{\sigma}^2$ принять величину

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{R^2}{n - m}, \quad (5.8.5)$$

то ее математическое ожидание

$$E(\hat{\sigma}^2) = \frac{E(R^2)}{n-m} = \sigma^2,$$

т. е. оценка (5.8.5) является несмещенной.

Зависимость (5.8.5) обычно используется для оценки величины σ^2 по результатам измерений. При $n \gg m$ она практически не отличается от приближенного выражения (5.8.3).

Перейдем теперь к случаю наличия корреляционной зависимости между составляющими вектора ξ , когда выполняются условия (5.1.2). Преобразованием (5.5.14) решение задачи приводится к рассмотренному выше случаю. При этом сохраняются зависимости (5.8.3) и (5.8.5), а выражение (5.8.4) принимает вид

$$R^2 = [\tilde{d}' - F'(\hat{q})]^T [\tilde{d}' - F'(\hat{q})].$$

Отсюда, пользуясь зависимостями (5.5.14), находим

$$R^2 = [\tilde{d} - F(\hat{q})]^T K^{-1} [\tilde{d} - F(\hat{q})] = \delta^T K^{-1} \delta. \quad (5.8.6)$$

При использовании линейной или линеаризированной модели (4.6.1) выражение (5.8.6) может быть дополнительно преобразовано. В этом случае

$$\begin{aligned} R^2 &= (\tilde{d} - A\hat{q})^T K^{-1} (\tilde{d} - A\hat{q}) = \\ &= \tilde{d}^T K^{-1} \tilde{d} - \tilde{d}^T K^{-1} A\hat{q} - \hat{q}^T (A^T K^{-1} \tilde{d} - A^T K^{-1} A\hat{q}). \end{aligned}$$

Отсюда, пользуясь зависимостями (5.2.10) и (5.3.7), получим окончательно

$$R^2 = \tilde{d}^T K^{-1} \tilde{d} - b^T \hat{q}. \quad (5.8.7)$$

В заключение заметим, что выражения (5.8.3) и (5.8.5) получены в предположении, что оценка \hat{q} является состоятельной. Однако, как указано в § 3.9, любая оценка на практике несостоятельна из-за наличия неизбежных немоделируемых ошибок. Если при этом оказывается, что составляющие вектора $\lim_{n \rightarrow \infty} F(\hat{q}_n) - F(q_n)$

сравнимы с дисперсиями $D(\xi_i)$ соответствующих ошибок ξ_i , то использование рассматриваемых выражений может привести к грубым погрешностям. В этом случае

для оценки величины σ^2 необходимо предварительно уточнить математическую модель задачи, с тем чтобы влияние немоделируемых ошибок было мало по сравнению с ожидаемыми значениями составляющих вектора ξ .

§ 5.9. Погрешности метода наименьших квадратов, связанные с невыполнением принятых допущений

Из приведенных выше результатов следует, что для построения алгоритма фильтрации по методу наименьших квадратов необходимо, помимо математической модели (2.1.3), знать:

— математическое ожидание $E(\xi)$ суммарной ошибки измерения и модели;

— ковариационную матрицу $D(\xi)$ (по крайней мере, с точностью до множителя σ^2).

В реальных условиях решения прикладных задач эти данные не могут быть определены с абсолютной точностью. Поэтому при построении алгоритма фильтрации всегда приходится задаваться некоторыми приближенными значениями $\tilde{E}(\xi)$ и $\tilde{D}(\xi)$. В тех случаях, когда соответствующие истинные величины $E_{\Pi}(\xi)$ и $D_{\Pi}(\xi)$ существенным образом отличаются от $\tilde{E}(\xi)$ и $\tilde{D}(\xi)$, необходимо учитывать это различие при оценке точности результатов решения задачи.

Предположим, что с использованием принятых значений $\tilde{E}(\xi)$ и $\tilde{D}(\xi)$ задача оценки состояния системы приведена к виду, удовлетворяющему условиям (5.1.2), на основе которых строится алгоритм фильтрации. Однако в действительности ошибка ξ имеет математическое ожидание $E_{\Pi}(\xi)$ и ковариационную матрицу $D_{\Pi}(\xi)$. Пользуясь зависимостями (3.4.1), (5.5.7), (5.6.4) и (5.6.7), находим выражения для математического ожидания и ковариационной матрицы (или дисперсии) оценок \hat{q} и \hat{l} (или \hat{l}):

$$\left. \begin{aligned} E(\hat{q}) &= q_{\Pi} + Y E_{\Pi}(\xi), & D(\hat{q}) &= Y D_{\Pi} Y^T, \\ E(\hat{l}) &= l_{\Pi} + X E_{\Pi}(\xi), & D(\hat{l}) &= X D_{\Pi} X^T, \end{aligned} \right\} \quad (5.9.1)$$

где

$$Y = \left[\left(\frac{\partial F}{\partial \hat{q}} \right)^T K^{-1} \frac{\partial F}{\partial \hat{q}} \right]^{-1} \left(\frac{\partial F}{\partial \hat{q}} \right)^T K^{-1}, \quad X = \frac{\partial G}{\partial \hat{q}} Y. \quad (5.9.2)$$

Полученные выражения не совпадают с соответствующими зависимостями (5.2.23), (5.2.27), (5.6.6) и (5.6.8), найденными в предположении, что

$$\tilde{E}(\xi) = E_{\Pi}(\xi), \quad \tilde{D}(\xi) = D_{\Pi}(\xi). \quad (5.9.3)$$

В результате оказывается, что ряд свойств оценок по методу наименьших квадратов, доказанных при допущениях (5.9.3), не всегда имеет место в реальных условиях. В частности, это относится к следующим теоремам.

1. Теореме о выборе состава измерений, согласно которой оптимальным является использование всей имеющейся априорной и апостериорной информации (см. § 5.2).

2. Теореме эквивалентности и связанной с ней теореме об оптимальности оценивания всех составляющих вектора состояния при одновременном использовании априорной информации об этих составляющих (см. § 5.4).

3. Теореме о состоятельности оценок по методу наименьших квадратов (см. § 5.7).

Следствием невыполнения условий (5.9.3) является то, что в действительности оценки по методу наименьших квадратов, как правило, оказываются несостоятельными (см. §§ 3.9 и 7.11). В ряде случаев чрезмерное увеличение числа используемых измерений и оцениваемых параметров может привести к понижению точности получаемых оценок (см. § 5.10).

Докажем теперь следующую теорему, относящуюся к выбору значений $\tilde{E}(\xi)$ и $\tilde{D}(\xi)$.

Теорема. При выборе значений $\tilde{E}(\xi)$ и $\tilde{D}(\xi)$, используемых при построении алгоритма фильтрации по методу наименьших квадратов, оптимальным является выполнение условий

$$\tilde{E}(\xi) = E_{\Pi}(\xi), \quad \tilde{D}(\xi) = \sigma^2 D_{\Pi}(\xi), \quad (5.9.4)$$

где σ^2 — произвольное положительное число.

При этом оптимальность понимается в смысле получения несмещенной оценки \hat{l} произвольной линейной (или линеаризованной) функции параметров состояния, обеспечивающей достижение абсолютного (но не обязательно единственного) минимума дисперсии $D(\hat{l})$ на множестве всех линейных оценок,

Эта теорема является непосредственным следствием теоремы Гаусса — Маркова, согласно которой оценка по методу наименьших квадратов при условиях (5.9.4) обеспечивает получение оптимальной несмещенной оценки на множестве всех линейных алгоритмов фильтрации. Но к этому множеству принадлежит любой алгоритм метода наименьших квадратов, соответствующий другим значениям $\tilde{E}(\xi)$ и $\tilde{D}(\xi)$. Поэтому получаемая при помощи такого алгоритма оценка будет во всяком случае не лучше оценки при условиях (5.9.4).

Различным матрицам K в условиях (5.1.2) может соответствовать один и тот же алгоритм фильтрации. Примером служит рассмотренная в § 5.7 задача определения одного параметра q по многократным его измерениям. В этом случае различные условия (5.2.2) и (5.7.7) приводят к одному алгоритму (5.7.5). В общем случае определяемую с точностью до произвольного множителя симметричную матрицу K можно рассматривать как точку в пространстве ее элементов, имеющем размерность $\frac{n(n+1)}{2} - 1$, в то время как линейный алгоритм определения оценки одного скалярного параметра является точкой в пространстве размерности n . Поэтому одному алгоритму может соответствовать бесконечное количество различных матриц.

§ 5.10. Задача определения движения локомотива

Рассмотрим основные свойства метода наименьших квадратов на примере задачи определения движения локомотива по рельсам. Будем рассматривать локомотив как материальную точку, положение которой характеризуется пройденным путем s , отсчитываемым от некоторой начальной точки. В этом случае отыскиваемый закон движения представляет собой зависимость пути от времени t :

$$s = f(t). \quad (5.10.1)$$

Для определения функции $f(t)$ могут быть использованы измерения пути s в некоторые моменты t_i ($i = 1, 2, \dots, n$), находящиеся на мерном интервале (2.2.2). Примем начальный момент этого интервала за начало

отсчета времени и обозначим через T продолжительность мерного интервала. Тогда

$$0 \leq t_i \leq T, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5.10.2)$$

Очевидно, что измерений в любом конечном числе n точек t_i недостаточно для полного определения закона движения (5.10.1) при отсутствии каких-либо дополнительных сведений о характере этого закона.

Рассмотрим случай использования простейшего закона равномерного движения

$$s = a + vt, \quad (5.10.3)$$

где a — значение пути в начальный момент $t = 0$, а v — скорость локомотива. В этих условиях размерность задачи $m = 2$, вектор состояния $q = \{a, v\}$, а вектор измерений $d = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$, где

$$d_i = a + vt_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5.10.4)$$

Зависимость (5.10.4) может быть представлена в виде линейной математической модели (4.6.1) с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t_n \end{pmatrix}. \quad (5.10.5)$$

Предположим, что измеренное значение \tilde{d} вектора d удовлетворяет условиям (5.2.2). Тогда отыскание оценки \hat{q} вектора q по методу наименьших квадратов сводится к решению системы нормальных уравнений (5.2.10), в которой

$$Q = A^T A = \begin{pmatrix} n & \sum t_i \\ \sum t_i & \sum t_i^2 \end{pmatrix}, \quad b = A^T \tilde{d} = \begin{pmatrix} \sum \tilde{d}_i \\ \sum t_i \tilde{d}_i \end{pmatrix}, \quad (5.10.6)$$

где суммирование производится от 1 до n . Решение этой системы дает значения оценок \hat{a} и \hat{v} составляющих вектора q

$$\left. \begin{aligned} \hat{a} &= \frac{\sum \tilde{d}_i \sum t_i^2 - \sum t_i \tilde{d}_i \sum t_i}{Q}, \\ \hat{v} &= \frac{n \sum t_i \tilde{d}_i - \sum t_i \sum \tilde{d}_i}{Q}, \end{aligned} \right\} \quad (5.10.7)$$

где

$$Q = |Q| = n \sum t_i^2 - (\sum t_i)^2. \quad (5.10.8)$$

Будем характеризовать точность решения задачи точностью полученных оценок \hat{a} и \hat{v} , т. е. положим, что вектор \mathbf{l} оцениваемых параметров совпадает с вектором \mathbf{q} . Из зависимостей (5.6.6) и (5.10.6) находим, что ковариационная матрица оценки

$$D(\hat{\mathbf{q}}) = \frac{\sigma^2}{Q} \begin{pmatrix} \sum t_i^2 - \sum t_i & -\sum t_i \\ -\sum t_i & n \end{pmatrix}. \quad (5.10.9)$$

Дисперсии оцениваемых параметров определяются диагональными элементами матрицы (5.10.9)

$$D(\hat{a}) = \frac{\sigma^2 \sum t_i^2}{Q}, \quad D(\hat{v}) = \frac{\sigma^2 n}{Q}. \quad (5.10.10)$$

Покажем, что для состоятельности полученных оценок не обязательно повторять измерения в некоторые фиксированные моменты. Достаточно равномерно распределить их на всем мерном интервале. Для этого рассмотрим случай, когда измерения проводятся на интервале (5.10.2) через равные промежутки времени τ . Тогда времена измерений

$$t_i = (i-1)\tau, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \tau = \frac{T}{n-1} \quad (5.10.11)$$

и любой возрастающей последовательности чисел n соответствует последовательность векторов \mathbf{d}_n , составленных из измерений в моменты t_i , а также полученные на этой основе оценки \hat{a}_n и \hat{v}_n . Покажем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D(\hat{a}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} D(\hat{v}_n) = 0, \quad (5.10.12)$$

т. е. оценки \hat{a} и \hat{v} состоятельны на рассматриваемой последовательности \mathbf{d}_n . Для этого воспользуемся зависимостями

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n (i-1) &= \frac{(n-1)n}{2}, & \sum_{i=1}^n (i-1)^2 &= \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}, \\ n \sum_{i=1}^n (i-1)^2 - \left[\sum_{i=1}^n (i-1) \right]^2 &= \frac{(n-1)n^2(n+1)}{12}. \end{aligned} \right\} \quad (5.10.13)$$

Подставляя (5.10.8), (5.10.11) и (5.10.13) в (5.10.10), получим после элементарных преобразований

$$D(\hat{a}_n) = \frac{2(2n-1)}{n(n+1)} \sigma^2, \quad D(\hat{\vartheta}_n) = \frac{12(n-1)}{n(n+1)} \cdot \frac{\sigma^2}{T^2}, \quad (5.10.14)$$

откуда непосредственно следует справедливость зависимостей (5.10.12).

Покажем теперь, что доказательство состоятельности оценки существенным образом зависит от выбора последовательности \hat{a}_n . Для этого рассмотрим последовательность \hat{a}_n , в которой времена измерений t_i определяются выражениями

$$t_1 = T, \quad t_2 = \frac{T}{2}, \quad t_3 = \frac{T}{4}, \quad \dots, \quad t_n = \frac{T}{2^{n-1}}.$$

В этом случае, пользуясь (5.10.8) и (5.10.10), получим

$$D(\hat{\vartheta}_n) = \frac{\sigma^2}{T^2} \frac{1}{\sum 2^{2-2i} - \frac{1}{n} (\sum 2^{1-i})^2} = \frac{\sigma^2}{T^2} \frac{1}{\frac{1-2^{-2n}}{1-\frac{1}{4}} - \frac{1}{n} \left(\frac{1-2^{-n}}{1-\frac{1}{2}} \right)^2},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D(\hat{\vartheta}_n) = \frac{3\sigma^2}{4T^2} \neq 0.$$

Аналогично,

$$D(\hat{a}_n) = \sigma^2 \frac{\sum 2^{2-2i}}{n \sum 2^{2-2i} - (\sum 2^{1-i})^2} = \sigma^2 \frac{\frac{1-2^{-2n}}{1-\frac{1}{4}}}{n \frac{1-2^{-2n}}{1-\frac{1}{4}} - \left(\frac{1-2^{-n}}{1-\frac{1}{2}} \right)^2},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D(\hat{a}_n) = 0.$$

Таким образом, на рассматриваемой последовательности оценка \hat{a} состоятельна, а оценка $\hat{\vartheta}$ несостоятельна.

Перейдем теперь к исследованию влияния погрешностей принятых допущений на точность оценок (5.10.7), которые могут быть представлены в виде

$$\hat{a} = X\tilde{d}, \quad \hat{\vartheta} = Z\tilde{d}, \quad (5.10.15)$$

где элементы строк $\mathbf{X} = (x_1 x_2 \dots x_n)$ и $\mathbf{Z} = (z_1 z_2 \dots z_n)$ определяются из выражений

$$\left. \begin{aligned} x_i &= \frac{\Sigma t_i^2 - t_i \Sigma t_i}{Q}, & z_i &= \frac{nt_i - \Sigma t_i}{Q}, \\ i &= 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \right\} \quad (5.10.16)$$

Предположим, что используемые при построении алгоритма фильтрации (5.10.15) условия (5.2.2) нарушаются и истинная ковариационная матрица ошибок $\mathbf{D}_n(\xi)$ определяется выражением (5.7.7). Пользуясь зависимостями (5.9.1), (5.10.8), (5.10.15) и (5.10.16), получим после элементарных преобразований

$$\left. \begin{aligned} D(\hat{a}) &= \sigma^2 \mathbf{X} (\mathbf{I} + \beta \mathbf{v}_n \mathbf{v}_n^T) \mathbf{X}^T = \\ &= \sigma^2 [\Sigma x_i^2 + \beta (\Sigma x_i)^2] = \sigma^2 \left(\frac{\Sigma t_i^2}{Q} + \beta \right), \\ D(\hat{v}) &= \sigma^2 \mathbf{Z} (\mathbf{I} + \beta \mathbf{v}_n \mathbf{v}_n^T) \mathbf{Z}^T = \\ &= \sigma^2 [\Sigma z_i^2 + \beta (\Sigma z_i)^2] = \frac{\sigma^2 n}{Q}. \end{aligned} \right\} \quad (5.10.17)$$

Из сравнения зависимостей (5.10.10) и (5.10.17) видно, что выражения для $D(\hat{v}_n)$ в обоих случаях совпадают, а к величине $D(\hat{a})$ добавляется член $\sigma^2 \beta$. Пусть на некоторой последовательности векторов \mathbf{d}_n ($n \rightarrow \infty$) при условиях (5.2.2) имеют место зависимости (5.10.12), обеспечивающие состоятельность оценок \hat{a} и \hat{v} . Тогда при рассматриваемом нарушении условий (5.2.2) состоятельность оценки \hat{v} сохраняется, а оценка \hat{a} становится несостоятельной и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D(\hat{a}_n) = \sigma^2 \beta.$$

При этом оказывается, что для сколь угодно малого поправочного коэффициента $\beta \neq 0$ при достаточно большом числе n точность оценки \hat{a} почти исключительно определяется вторым членом правой части выражения (5.10.17), т. е. имеющимся нарушением условий (5.2.2) (сравнить с соображениями, приведенными в § 4.9).

Рассмотрим теперь влияние неучтенного при построении алгоритма фильтрации математического ожидания $\mathbf{E}(\xi)$ суммарной ошибки ξ . Предположим, что оно определяется некоторой функцией $e(t)$, равной математи-

ческому ожиданию ошибки $\xi_i = \xi(t_i)$ при $t_i = t$. Ограничимся исследованием влияния этой функции на точность оценки ϑ . Обозначим через $\chi = \vartheta - v_n$ ошибку определения v . Из зависимостей (5.9.1), (5.10.15) и (5.10.16) непосредственно следует, что математическое ожидание этой ошибки

$$E(\chi) = \frac{\sum (nt_i - \sum t_i) e(t_i)}{Q}. \quad (5.10.18)$$

Предположим, что измерения проводятся через одинаковые промежутки времени и времена t_i определяются при помощи зависимости (5.10.11). Полагая число n достаточно большим, примем приближенно, что

$$\tau = \frac{T}{n}. \quad (5.10.19)$$

Тогда, умножив числитель и знаменатель выражения (5.10.18) на величину τ^2 и пользуясь зависимостью (5.10.8), получим

$$E(\chi) = \frac{\sum (Tt_i - \sum t_i \tau) e(t_i) \tau}{T \sum t_i^2 \tau - (\sum t_i \tau)^2}.$$

При достаточно большом n можно рассматривать шаг τ как дифференциал dt и заменить суммы интегралами. В результате получим асимптотическое выражение

$$\begin{aligned} E(\chi) &= \int_0^T \frac{Tt - \int_0^T t dt}{T \int_0^T t^2 dt - \left(\int_0^T t dt \right)^2} e(t) dt = \\ &= \frac{12}{T^3} \int_0^T \left(t - \frac{T}{2} \right) e(t) dt, \quad (5.10.20) \end{aligned}$$

из которого видно, что вообще говоря, $E(\chi) \neq 0$ при произвольном n . Отсюда непосредственно следует смещенность и несостоятельность оценки ϑ .

Предположим, что про функцию $e(t)$ известно только то, что она ограничена по модулю, т. е.

$$|e(t)| \leq M. \quad (5.10.21)$$

Тогда, пользуясь (5.10.20), находим, что

$$|E(\chi)| \leq \frac{12M}{T^3} \int_0^T \left| t - \frac{T}{2} \right| dt = \\ = \frac{24M}{T^3} \int_0^{\frac{T}{2}} \left(\frac{T}{2} - t \right) dt = \frac{3M}{T}. \quad (5.10.22)$$

Величина $3M/T$ представляет собой гарантированное значение $|E(\chi)|$ при условии (5.10.21) и $n \rightarrow \infty$ (см. § 3.5). Иначе говоря,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max |E(\chi)| = \frac{3M}{T}, \quad (5.10.23)$$

где \max берется на множестве всех функций $e(t)$, удовлетворяющих условию (5.10.21), а времена измерений определяются выражениями (5.10.11). Отсюда следует, что увеличение числа измерений не только не улучшает гарантированную оценку $|E(\chi)|$, но может даже привести к ее ухудшению. Действительно, легко убедиться в том, что при $n = 2$, $t_1 = 0$, $t_2 = T$ и условии (5.10.21)

$$\max |E(\chi)| = \frac{2M}{T} < \lim_{n \rightarrow \infty} \max |E(\chi)|. \quad (5.10.24)$$

Это ухудшение может быть и более значительным в том случае, когда функция $e(t)$ на каком-либо участке резко изменяется. При этом проведение дополнительных измерений на указанном участке может привести к существенному увеличению $|E(\chi)|$.

Для оценки влияния ошибок используемой математической модели (5.10.3) рассмотрим следующую задачу. Предположим, что нам нужно определить скорость v локомотива в начальный момент $t = 0$, используя измерения пройденного пути на интервале (5.10.2). При этом намерения машиниста нам неизвестны, т. е. он может произвольным образом управлять двигателем локомотива. Нам известно только то, что возникающее при этом ускорение не превосходит заданной величины w , определяемой энергетическими возможностями локомотива. В этих условиях вполне естественно пользоваться моделью (5.10.3). Однако при этом следует считаться

с возможными систематическими ошибками, возникающими при работе двигателя. Своего максимума эти ошибки достигают в том случае, когда локомотив на всем интервале (5.10.2) движется с максимальным ускорением ω . В этом случае при отсутствии других систематических погрешностей математическое ожидание суммарной ошибки

$$E[\xi(t)] = e(t) = \pm \frac{\omega t^2}{2},$$

причем знак \pm остается постоянным на всем интервале (5.10.2). Отсюда, пользуясь зависимостью (5.10.20), получим

$$|E(\chi)| \leq \frac{6\omega}{T^3} \int_0^T \left(t - \frac{T}{2}\right) t^2 dt = \frac{\omega T}{2}, \quad (5.10.25)$$

т. е. ошибка возрастает с увеличением мерного интервала (5.10.2).

В заключение рассмотрим задачу выбора оптимальной стратегии определения оценки \hat{v} скорости v локомотива в начальный момент $t=0$. Предположим, что имеют место следующие условия:

1. Скорость локомотива оценивается по измерениям пройденного пути s , проводимым через равные промежутки τ времени t на замкнутом интервале (5.10.2).

2. Локомотив может двигаться с произвольным ускорением \ddot{s} , удовлетворяющим неравенству

$$|\ddot{s}| \leq \omega. \quad (5.10.26)$$

3. Математическое ожидание ошибки ξ измерений удовлетворяет неравенству

$$|E(\xi)| \leq M. \quad (5.10.27)$$

4. Истинная ковариационная матрица ошибок $D_{\pi}(\xi)$ определяется выражением (5.7.7) с произвольным значением β и величиной σ^2 , удовлетворяющей неравенству

$$\sigma^2 \leq \sigma_{\max}^2, \quad (5.10.28)$$

где σ_{\max}^2 задано.

5. Ошибка χ оценки \hat{v} распределена по нормальному закону. При этом, вообще говоря, $E(\chi) \neq 0$.

6. Промежутки τ между измерениями достаточно малы и позволяют использовать приближенную зависимость (5.10.20).

7. В качестве условия оптимальности используется достижение минимума гарантированного критерия точности

$$K_{\text{гар}} = \max_{\xi, \tilde{s}} \chi_{\text{max}}, \quad (5.10.29)$$

где χ_{max} — максимальное значение ошибки χ при заданной надежности H , т. е.

$$P(|\chi| \leq \chi_{\text{max}}) \geq H, \quad (5.10.30)$$

а χ_{max} в зависимости (5.10.29) берется по всем допустимым ускорениям \tilde{s} и ошибки ξ .

8. В качестве математической модели используется линейная зависимость (5.10.3), а в качестве алгоритма фильтрации — алгоритм метода наименьших квадратов, соответствующий условиям (5.2.2).

9. Требуется определить оптимальную продолжительность T -мерного интервала в зависимости от заданных значений τ , ω , M , σ_{max}^2 и H .

Из зависимости (3.5.21) следует, что $K_{\text{гар}}$ является известной функцией максимальных значений E_{max} и D_{max} математического ожидания $E(\chi)$ и дисперсии $D(\chi)$ на множестве допустимых ускорений \tilde{s} и ошибок ξ . При этом с неограниченным увеличением E_{max} и D_{max} возрастает неограниченно $K_{\text{гар}}$.

Из зависимостей (5.10.10), (5.10.14), (5.10.17), (5.10.22) и (5.10.25) находим, что

$$E_{\text{max}} = \frac{3M}{T} + \frac{\omega T}{2}, \quad D_{\text{max}} = \frac{\sigma_{\text{max}}^2}{T^2} \frac{12(n-1)}{n(n+1)}, \quad (5.10.31)$$

где число измерений

$$n = \frac{T}{\tau} + 1.$$

Из приведенных выражений и характера функции $K_{\text{гар}} = K_{\text{гар}}(E_{\text{max}}, D_{\text{max}})$ непосредственно следует существование некоторого оптимального конечного значения $T_{\text{опт}}$ продолжительности T мерного интервала, при котором обеспечивается достижение абсолютного $\min K_{\text{гар}}$. Величина $T_{\text{опт}}$ может быть найдена любым приближен-

ным способом, например, методом перебора различных значений T .

Из изложенного следует, что при рассматриваемых условиях оценка по методу наименьших квадратов является несостоятельной. При этом существует некоторое оптимальное число n измерений. Дальнейшее увеличение числа n приводит к неограниченному ухудшению точности оценки $\hat{\theta}$.

В заключение заметим, что при выводе зависимостей (5.10.31) мы полагаем, что при определении оценки $\hat{\theta}$ используются все допускаемые условиями задачи измерения. Однако из неравенства (5.10.24) следует, что это не всегда является оптимальным решением. Ниже будет рассмотрен вопрос о целесообразности исключения некоторых измерений из обработки (см. главу VII).

§ 5.11. Задача определения расстояния до медленно перемещающегося объекта

Для того чтобы проиллюстрировать влияние мешающих параметров на оценку по методу наименьших квадратов, рассмотрим задачу определения расстояния s до некоторого медленно перемещающегося объекта. При этом оценивается значение a расстояния s в начальный момент $t = 0$, для чего используются результаты измерений величины s для моментов t_i ($i = 1, 2, \dots, n$) на интервале (5.10.2). Эти измерения предполагаются несмещенными, некоррелированными и равноточными с дисперсией σ^2 . Объект перемещается с некоторой постоянной радиальной скоростью v , величина и знак которой неизвестны. Будем рассматривать эту скорость как случайную величину с математическим ожиданием и дисперсией:

$$E(v) = 0, \quad D(v) = \gamma\sigma^2, \quad (5.11.1)$$

где $\gamma > 0$ — некоторый постоянный коэффициент.

Проанализируем различные варианты стратегии решения этой задачи по методу наименьших квадратов и сравним их эффективность в разных условиях. При этом отдельные варианты будут различаться выбором вектора d измерений и математической моделью.

В качестве вектора измерений мы будем использовать либо совокупность $\mathbf{d} = \{s(t_1), s(t_2), \dots, s(t_n)\}$ измерений дальности в разные моменты времени (первоначальный вектор измерений), либо расширенный вектор $\mathbf{d}_1 = \{v, \mathbf{d}\}$, включающий имеющиеся априорные сведения о скорости v . В соответствии с условием (5.11.1), примем, что измеренное значение этой скорости

$$\hat{v} = E(v) = 0. \quad (5.11.2)$$

Мы будем рассматривать следующие два варианта математической модели.

1. Непрогнозируемую модель

$$s = a, \quad (5.11.3)$$

не учитывающую перемещение объекта, в которой связь между оцениваемым параметром a и вектором измерений \mathbf{d} определяется линейной зависимостью

$$\mathbf{d} = \mathbf{v}_n a, \quad (5.11.4)$$

где \mathbf{v}_n — вектор, составленный из n единиц.

При таком рассмотрении скорость v представляет собой случайный мешающий параметр, определяющий методическую ошибку. В результате суммарная ошибка может быть представлена в форме

$$\xi = \xi_0 + \mathbf{T}_n v, \quad (5.11.5)$$

где ξ_0 — некоррелированная ошибка измерений, $\mathbf{T}_n = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$, а $\mathbf{T}_n v$ — систематическая ошибка модели.

Учитывая зависимости (1.9.23), (5.11.1) и (5.11.5), находим математическое ожидание и ковариационную матрицу ошибки ξ

$$E(\xi) = 0, \quad D(\xi) = \sigma^2 \mathbf{K}, \quad \mathbf{K} = \mathbf{I} + \gamma \mathbf{T}_n \mathbf{T}_n^T. \quad (5.11.6)$$

Заметим, что полученное выражение для $D(\xi)$ является частным случаем зависимости (3.1.26).

2. Расширенную прогнозируемую модель, в которой мешающий параметр v включается в число оцениваемых параметров, и зависимость (5.11.3) заменяется выражением (5.10.3). При этом вектор состояния $\mathbf{q} = \{a, v\}$. Связь между векторами \mathbf{d} и \mathbf{q} характеризуется линейной

зависимостью (4.6.1) с матрицей A , определяемой выражением (5.10.5).

При использовании расширенного вектора d_1 связь между d_1 и q определяется линейной зависимостью

$$d = A_1 q, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ v_n & r_n \end{pmatrix}. \quad (5.11.7)$$

В связи с расширением модели входящая в правую часть равенства (5.11.6) систематическая ошибка исключается и остается только некоррелированная составляющая ξ_0 . В результате получаем, что ошибка ξ вектора d удовлетворяет условиям (5.2.2). При использовании расширенного вектора d_1 математическое ожидание и ковариационная матрица соответствующей ошибки ξ_1 определяются выражениями

$$E(\xi_1) = 0, \quad D(\xi_1) = \sigma^2 K_1, \quad K_1 = \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}. \quad (5.11.8)$$

Сравним теперь следующие четыре варианта стратегии решения задачи.

1. Коэффициент γ , характеризующий точность априорного значения скорости (5.11.2), нам достоверно не известен. Известно только, что скорость v мала. В этих условиях мы пренебрегаем влиянием скорости перемещения объекта и пользуемся математической моделью (5.11.4). Кроме того, при построении алгоритма фильтрации полагаем $\gamma = 0$ и заменяем выражения (5.11.6) зависимостями (5.2.2). Тогда оценка \hat{a} находится по формуле, аналогичной равенству (5.7.5):

$$\hat{a}_1 = \frac{\sum \tilde{d}_i}{n} = \frac{v_n^T \tilde{d}}{n}. \quad (5.11.9)$$

Если исходить из допущений, принятых при построении алгоритма фильтрации, то дисперсия полученной оценки

$$D_0(\hat{a}_1) = \frac{\sigma^2}{n}. \quad (5.11.10)$$

Однако в действительности следует считаться с тем, что истинная ковариационная матрица ошибок определяется выражением (5.11.6). Тогда, пользуясь зависимостями (5.9.1) и (5.11.9), находим фактическую

дисперсию оценки

$$D(\hat{a}_1) = \sigma^2 \frac{v_n^r}{n} (I + \gamma T_n T_n^r) \frac{v_n}{n}.$$

Воспользуемся теперь равенством

$$v_n^r v_n = n, \quad v_n^r T_n = T_n^r v_n = \Sigma t_i, \quad T_n^r T_n = \Sigma t_i^2. \quad (5.11.11)$$

В результате получим, что

$$D(\hat{a}_1) = \frac{\sigma^2}{n^2} [n + \gamma (\Sigma t_i)^2]. \quad (5.11.12)$$

В частности, при равномерном распределении времен измерений (5.10.11) находим, учитывая (5.10.13), что

$$D(\hat{a}_1) = \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{\gamma T^2}{4} \right), \quad (5.11.13)$$

где T — продолжительность мерного интервала (5.10.2).

Из сравнения зависимостей (5.11.10), (5.11.12) и (5.11.13) видно, что рассматриваемое отклонение истинной ковариационной матрицы $D_n(\xi)$ от принятой при построении алгоритма фильтрации $\hat{D}(\xi)$ приводит к увеличению дисперсии $D(\hat{a}_1)$. Это увеличение становится особенно существенным при больших числах n измерений, при которых формула (5.11.10) совершенно не соответствует фактической точности оценки \hat{a}_1 . Последняя в реальных условиях оказывается несостоятельной. Если задаться фиксированным промежутком τ между временами соседних измерений, то существует некоторое оптимальное число n измерений, соответствующее минимуму $D(\hat{a}_1)$. При дальнейшем увеличении числа n дисперсия $D(\hat{a}_1)$ неограниченно возрастает.

2. Коэффициент γ не известен, а скорость v не может рассматриваться как малая величина. В результате приходим к расширенной модели (5.10.3) с вектором измерений d . Математическое ожидание и ковариационная матрица ошибки ξ удовлетворяют условиям (5.2.2). Получаем рассмотренную в предыдущем параграфе задачу. Соответствующая оценка \hat{a}_2 находится по формуле (5.10.7), а дисперсия этой оценки — по формулам (5.10.8), (5.10.10) и (5.10.14)

$$D(\hat{a}_2) = \frac{\sigma^2 \Sigma t_i^2}{n \Sigma t_i^2 - (\Sigma t_i)^2} = \frac{2(2n-1)}{n(n+1)} \sigma^2, \quad (5.11.14)$$

из которых вторая соответствует равномерному распределению времен t_i .

3. Известно априорное значение коэффициента γ . При решении задачи используется первоначальный вектор d измерений и модель (5.11.4). Величина v рассматривается в качестве мешающего параметра. При этом суммарная ошибка ξ определяется по формуле (5.11.5), а ее математическое ожидание и ковариационная матрица — выражениями (5.11.6).

Для определения дисперсии соответствующей оценки \hat{a}_3 вычислим предварительно матрицу K^{-1} . Для этого заметим, что выражение (5.11.6) для матрицы K является частным случаем равенства (1.2.14) при условии, что

$$A = K, \quad B = I, \quad C = T_n, \quad D = \gamma, \quad E = T_n^T.$$

Тогда

$$D^{-1} = \gamma^{-1}, \quad B^{-1} = I, \quad S = \gamma^{-1} + T_n^T T_n, \quad S^{-1} = \frac{\gamma}{1 + \gamma T_n^T T_n}.$$

Отсюда, пользуясь зависимостью (1.2.15), находим, что

$$K^{-1} = I - \frac{\gamma T_n^T T_n}{1 + \gamma T_n^T T_n}.$$

При этом матрица системы нормальных уравнений обращается в скаляр

$$Q = v_n^T \left(I - \frac{\gamma T_n^T T_n}{1 + \gamma T_n^T T_n} \right) v_n.$$

или, учитывая (5.11.11),

$$Q = n - \frac{\gamma (\Sigma t_i)^2}{1 + \gamma \Sigma t_i^2}.$$

Отсюда, пользуясь зависимостью (5.6.6), находим

$$D(\hat{a}_3) = \sigma^2 Q^{-1} = \frac{1 + \gamma \Sigma t_i^2}{n + \gamma [n \Sigma t_i^2 - (\Sigma t_i)^2]} \sigma^2. \quad (5.11.15)$$

При равномерном распределении времен измерений (5.10.11) можно, учитывая равенства (5.10.13), переписать выражение (5.11.15) в виде

$$D(\hat{a}_3) = 2 \frac{6(n-1) + \gamma T^2 n(2n-1)}{n[12(n-1) + \gamma T^2 n(n+1)]} \sigma^2. \quad (5.11.16)$$

4. Мешающий параметр v включается в число оцениваемых и измеряемых параметров. При этом используется расширенный вектор d_1 измерений и модель (5.11.7). Ковариационная матрица ошибок определяется зависимостью (5.11.8). Отсюда находим выражение для матрицы системы нормальных уравнений

$$\begin{aligned} Q = A_1^T K_1^{-1} A_1 &= \begin{pmatrix} 0 & v_n^T \\ 1 & T_n^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ v_n & T_n \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} v_n^T v_n & v_n^T T_n \\ T_n^T v_n & \gamma^{-1} + T_n^T T_n \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

или, учитывая (5.11.11),

$$Q = \begin{pmatrix} n & \sum t_i \\ \sum t_i & \gamma^{-1} + \sum t_i^2 \end{pmatrix}. \quad (5.11.17)$$

Дисперсию $D(\hat{a}_4)$ получаемой оценки \hat{a}_4 находим из выражения для первого диагонального элемента матрицы $\sigma^2 Q^{-1}$. В результате оказывается, что

$$D(\hat{a}_4) = D(\hat{a}_3), \quad (5.11.18)$$

где дисперсия $D(\hat{a}_3)$ определяется выражениями (5.11.15) и (5.11.16). Полученное равенство непосредственно следует из рассмотренной в § 5.4 теоремы эквивалентности.

Пользуясь зависимостями (5.11.12), (5.11.14) и (5.11.15), можно показать, что при произвольных t_i и γ имеют место неравенства

$$D(\hat{a}_3) \leq D(\hat{a}_1), \quad D(\hat{a}_3) \leq D(\hat{a}_2). \quad (5.11.19)$$

Для этого достаточно вычислить разности между рассматриваемыми дисперсиями и воспользоваться тем, что всегда

$$n \sum t_i^2 - (\sum t_i)^2 \geq 0. \quad (5.11.20)$$

Последнее представляет собой неравенство Коши — Буняковского для векторов v_n и T_n .

Таким образом, при наличии достаточно достоверных априорных сведений о дисперсии скорости v эквивалентные стратегии 3 и 4 предпочтительнее стратегий 1 и 2. Это является следствием показанной выше оптимальности использования всей измерительной информации при одновременном уточнении всех параметров системы, о

которых имеются достаточные априорные сведения (см. §§ 5.2 и 5.4).

Заметим, что при $\gamma \rightarrow 0$ выражения (5.11.15) и (5.11.16) для $D(\hat{a}_3)$ и $D(\hat{a}_4)$ стремятся к соответствующим зависимостям (5.11.12) и (5.11.13) для $D(\hat{a}_1)$. При $\gamma \rightarrow \infty$ указанные выражения стремятся к равенствам (5.11.14), определяющим $D(\hat{a}_2)$. Иначе говоря, если с большой вероятностью можно утверждать, что скорость v мала, стратегия 1 практически эквивалентна оптимальным стратегиям 3 и 4. Если велика вероятность больших значений v , то стратегия 2 приближается к оптимальной.

В том случае, когда коэффициент γ не известен с достаточной достоверностью, использование стратегий 3 и 4 становится невозможным и приходится применять стратегию 1 или 2. Возникает вопрос о выборе среди них оптимальной. Для решения этого вопроса рассмотрим разность $D(\hat{a}_1) - D(\hat{a}_2)$. В том случае, когда $D(\hat{a}_1) - D(\hat{a}_2) \leq 0$, оптимальна стратегия 1, а при $D(\hat{a}_1) - D(\hat{a}_2) \geq 0$ — стратегия 2.

Ограничимся для простоты случаем равномерного распределения времен измерений (5.10.11) и воспользуемся зависимостями (5.11.13) и (5.11.14). В результате получим, что

$$D(\hat{a}_1) - D(\hat{a}_2) = \frac{\alpha n(n+1) - 12(n-1)}{4n(n+1)} \sigma^2, \quad (5.11.21)$$

где α — безразмерный параметр, характеризующий малость возможной скорости перемещения объекта и определяемый выражением

$$\alpha = \gamma T^2 = \left(\frac{\sigma_v}{\sigma/T} \right)^2, \quad (5.11.22)$$

а $\sigma_v = \sqrt{D(v)}$ — среднее квадратическое значение скорости.

Из выражения (5.11.21) следует, что при заданном α условие $D(\hat{a}_1) - D(\hat{a}_2) \leq 0$ выполняется для всех n , удовлетворяющих неравенству

$$n_2 \leq n \leq n_1, \quad (5.11.23)$$

где $n_1 \geq n_2$ — действительные корни квадратного уравнения

$$\alpha n(n+1) - 12(n-1) = \alpha n^2 + (\alpha - 12)n + 12 = 0. \quad (5.11.24)$$

При этом практическое значение имеют лишь целые n , удовлетворяющие условию

$$n \geq 2 \quad (5.11.25)$$

(так как при $n = 1$ стратегия 2 невозможна). Элементарный анализ решений уравнения (5.11.24) показывает, что целые n , одновременно удовлетворяющие условиям (5.11.23) и (5.11.25), существуют при условии $\alpha \leq 2$. При этом меньший из корней уравнения (5.11.22) $n_2 \leq 2$. В результате получаем, что стратегия 1 оптимальна при одновременном выполнении условий

$$\alpha \leq 2, \quad n \leq \frac{12 - \alpha + \sqrt{(12 - \alpha)^2 - 48\alpha}}{2\alpha}. \quad (5.11.26)$$

Если второе из этих неравенств обращается в равенство, то оптимальны одновременно обе стратегии. Если хотя бы одно из неравенств (5.11.26) не удовлетворяется, то оптимальна стратегия 2.

Таким образом, для сколь угодно малого α всегда существуют такие числа n , при которых стратегия 1 перестает быть оптимальной. Это является следствием того, что при сделанных допущениях оценка \hat{a}_1 несостоятельна, в то время как оценка \hat{a}_2 оказывается состоятельной. Если исследовать рассматриваемую задачу при более полной системе допущений, учитывая возможные систематические ошибки измерений и переменность скорости v (как это сделано в предыдущем параграфе), то оказывается, что оценка \hat{a}_2 в реальных условиях также несостоятельна. При этом может получиться, что для некоторых достаточно малых α стратегия 1 будет оптимальной независимо от n . Мы предлагаем читателю проанализировать этот вопрос, используя результаты § 5.10.

Другая задача, которая может быть предложена в качестве упражнения, заключается в следующем. Известно, что коэффициент γ удовлетворяет условию

$$\gamma_{\min} \leq \gamma \leq \gamma_{\max}, \quad (5.11.27)$$

где γ_{\min} и γ_{\max} — заданные величины. Требуется при допущениях, принятых в настоящем параграфе, определить такое значение $\tilde{\gamma}$, при котором стратегии 3 и 4 обеспечивают достижение

$$\min_{\tilde{\gamma}} \max_{\gamma_n} D(\hat{a}), \quad (5.11.28)$$

где оценка \hat{a} вычисляется при $\gamma = \tilde{\gamma}$, дисперсия этой оценки находится при условии $\gamma = \gamma_n$, а \max и \min выбираются на множестве всех значений γ_n и $\tilde{\gamma}$, удовлетворяющих условию (5.11.27).

Эта же задача может решаться с учетом влияния систематических ошибок измерения и возможной переменности скорости v . В этом случае могут быть приняты допущения, используемые в предыдущем параграфе, а вместо дисперсии $D(\hat{a})$ может рассматриваться максимальная ошибка χ_{\max} оценки \hat{a} , имеющая заданную надежность H .

В заключение заметим, что в §§ 5.10 и 5.11 используется одна и та же модель зависимости между векторами апостериорных измерений и состояния системы. Кроме того, обе рассматриваемые задачи решаются при одинаковых значениях математического ожидания и ковариационной матрицы ошибок измерений. С математической точки зрения разница между обеими задачами заключается в том, что в первой из них отсутствуют какие-либо априорные сведения о скорости v движения рассматриваемого объекта, в то время как во второй эти сведения имеются и могут быть использованы для определения оценки состояния системы (во всех вариантах этой задачи считается известным, что $E(v) = 0$, а в некоторых дополнительно задана дисперсия скорости). Наличие или отсутствие этих априорных сведений и предопределяет различный подход к стратегии решения рассматриваемых задач.

§ 5.12. Практическое применение метода наименьших квадратов

Из приведенных выше результатов следует, что метод наименьших квадратов удовлетворяет определенным условиям оптимальности при использовании линейной модели (4.6.1) и наличии достаточных сведений о суммарной ошибке ξ . Как будет показано ниже, в случае нелинейной модели (2.1.3) и при нормальном законе распределения ошибки ξ метод наименьших квадратов является частным случаем метода максимального правдоподобия и имеет соответствующее обоснование. В случае нелинейной модели и при законе распределения

ошибок, существенно отличающимся от нормального, некоторым обоснованием использования метода наименьших квадратов могут служить соображения, приведенные в § 5. 5. Эти соображения не обладают достаточной строгостью, и существуют примеры, когда метод наименьших квадратов в указанных условиях приводит к ложным результатам. Кроме того, значительные погрешности оценок по этому методу могут возникать под влиянием отклонений истинных значений математического ожидания и ковариационной матрицы ошибки ξ от принятых при составлении алгоритма фильтрации.

Несмотря на это, метод наименьших квадратов широко используется в тех случаях, когда математическая модель нелинейна, закон распределения ошибок существенно отличается от нормального, а математическое ожидание и ковариационная матрица ошибок неизвестны. При этом в большинстве прикладных задач получаются вполне удовлетворительные оценки, что связано с самим принципом, в основу которого положена минимизация нормы вектора невязок. Однако в указанных условиях совершенно необходима всесторонняя проверка получаемых оценок.

Одним из распространенных способов такой проверки является апостериорная оценка точности по внутренней сходимости (см. § 3.10). При этом определяемые по формуле (2.1.9) составляющие вектора $\delta = \{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n\}$ невязок сравниваются с ожидаемым максимальным значением соответствующих составляющих вектора ξ суммарных ошибок (см. § 5.5). Однако, как было показано в §§ 3.10 и 5.5, существуют примеры, в которых, несмотря на малость невязок δ_i ($i = 1, 2, \dots, n$), погрешности оценок по методу наименьших квадратов оказываются значительными. Это может иметь место при наличии систематических ошибок исходных данных, а также в результате решения нелинейных задач. Поэтому наиболее надежным способом проверки полученных оценок остается сравнение результатов, найденных при различных допущениях, и на основе различной измерительной информации. Если в этих условиях получаются близкие оценки, то можно с большой вероятностью полагать, что они мало отклоняются от истинных значений оцениваемых параметров.

Таким образом, несмотря на то, что принятые при обосновании метода наименьших квадратов допущения в большинстве прикладных задач не выполняются полностью или частично, этот метод может быть с известными оговорками использован для решения подобных задач. Однако в тех случаях, когда необходимо оценить точность получаемых результатов, применение классических зависимостей (5.6.1) и (5.6.6) часто приводит к грубым погрешностям, которые возрастают с увеличением числа n используемых измерений. При больших числах n (что в настоящее время имеет место при решении большинства ответственных прикладных задач) даже незначительные отклонения истинных условий задачи от принятых при построении алгоритма фильтрации приводят к тому, что истинные значения $E(\hat{q})$ и $D(\hat{q})$ резко отличаются от величин, определяемых по формулам (5.6.1) и (5.6.6). Причиной этого в значительной мере являются теоретическая несмещенность и состоятельность оценок по методу наименьших квадратов, которые в реальных условиях не имеют места (см. §§ 3.9, 5.9, 5.10, 5.11 и 7.11).

Использование зависимостей (5.6.1) и (5.6.6) также часто приводит к неправильным результатам при решении задач выбора оптимальной стратегии определения оценок по методу наименьших квадратов. В результате получаемый на основе теории этого метода вывод о том, что оптимально возможно увеличение чисел m и n оцениваемых параметров и используемых измерений, оказывается неверным. В реальных условиях увеличение этих чисел выше некоторого предела не только практически бесполезно, но во многих случаях ведет к ухудшению точности получаемых оценок.

В связи со сказанным возникает необходимость в использовании способов оценки точности, не зависящих от погрешностей допущений, принятых в процессе построения алгоритма фильтрации. Одним из них является способ, основанный на определении гарантированных характеристик точности (см. § 3.5). Для построения последних должны быть заданы некоторые области Λ и Δ , которым принадлежат истинные значения математического ожидания и ковариационной матрицы суммарной

ошибки

$$E_{\Pi}(\xi) \in \Lambda, \quad D_{\Pi}(\xi) \in \Delta. \quad (5.12.1)$$

Условия (5.12.1) определяют множество M возможных ошибок

$$\xi \in M. \quad (5.12.2)$$

При этом в качестве гарантированных характеристик точности оценки \hat{l} некоторого скалярного параметра l могут быть использованы величины

$$E_{\max} = \max_{\xi \in M} E(\hat{l}), \quad D_{\max} = \max_{\xi \in M} D(\hat{l}). \quad (5.12.3)$$

Для заданного алгоритма фильтрации, определяемого принятыми приближенными значениями $\tilde{E}(\xi)$ и $\tilde{D}(\xi)$, характеристики (5.12.3) находятся путем отыскания на множестве M максимумов величин $E(l)$ и $D(l)$. При этом значения $E(l)$ и $D(l)$ вычисляются по формулам (5.9.1).

В § 3.5 даны некоторые примеры условий (5.12.1) и соответствующие им выражения для гарантированных характеристик точности (5.12.3), которые могут быть использованы при определении точности оценок по методу наименьших квадратов.

В том случае, когда желательно охарактеризовать точность оценки \hat{l} одной величиной, в качестве последней могут быть использованы

$$\max_{\xi \in M} \chi_{\max}(H) \quad \text{или} \quad \min_{\xi \in M} H(\chi_{\max}), \quad (5.12.4)$$

где χ_{\max} — максимальное значение ошибки χ оценки \hat{l} , H — надежность χ_{\max} . Эти величины связаны друг с другом соотношением (3.4.25). При определении точности оценки одна из них задается, а другая используется в качестве характеристики.

Если полагать закон распределения ошибки χ нормальным, то любая из характеристик (5.12.4) может быть найдена из зависимостей (3.5.21) и (3.5.22) после подстановки в них величин (5.12.3).

Описанный подход может быть использован при решении задач выбора оптимальной стратегии определения оценок (см. § 3.8). В этом случае критерием опти-

мальности служит достижение

$$\min_{\xi \in M} \max \chi_{\max}(H) \quad (5.12.5)$$

при заданном H либо

$$\max_{\xi \in M} \min H(\chi_{\max}) \quad (5.12.6)$$

при заданном χ_{\max} .

В том случае, когда влиянием математического ожидания $E(\xi)$ на величину $E(\chi)$ можно пренебречь, критерием оптимальности может служить достижение

$$\min_{\xi \in M} \max D(\hat{l}). \quad (5.12.7)$$

Ниже в главах VII и VIII будут даны некоторые примеры решения задач выбора оптимальной стратегии определения оценок по методу наименьших квадратов, основанные на высказанных здесь идеях.

В заключение заметим, что при решении прикладных задач приходится считаться с наличием определенного процента грубо ошибочных, аномальных измерений. Включение этих измерений в число используемых в процессе фильтрации существенно ухудшает точность получаемых оценок. В связи с этим возникает проблема обнаружения и исключения аномальных измерений. К сожалению, в настоящее время нет строго обоснованного метода решения этой задачи. Обычно на практике исключение аномальной информации производится в следующем порядке.

1. Предварительно анализируется имеющаяся информация с точки зрения соблюдения условий нормальной работы измерительной аппаратуры. Измерения, для которых эти условия не соблюдаются, исключаются из дальнейшего рассмотрения.

2. В том случае, когда состояние системы зависит от аргумента t (например, времени для прогнозируемых систем), исследуется зависимость измеренных величин от этого аргумента. При этом весь интервал измерения некоторого параметра p разбивается на участки (сеансы), на которых зависимость $p(t)$ может быть аппроксимирована выражением вида

$$p(t) = \Phi(a, t), \quad (5.12.8)$$

где $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ — некоторый вектор, а $\Phi(\mathbf{a}, t)$ — заданная функция вектора \mathbf{a} и переменной t . Обычно в качестве этой функции используются алгебраические или тригонометрические полиномы, коэффициенты которых образуют вектор \mathbf{a} . Функция $\Phi(\mathbf{a}, t)$ должна удовлетворять следующим условиям:

— методические погрешности зависимости (5.12.8) заведомо значительно меньше исключаемых аномальных ошибок (при соответствующем подборе на каждом участке измерений своего значения \mathbf{a});

— количество измерений на каждом участке значительно превосходит число k составляющих вектора \mathbf{a} .

3. По результатам измерений на каждом участке в отдельности находится оценка $\hat{\mathbf{a}}$ и вычисляются составляющие вектора невязок $\delta = \{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n\}$ по формулам

$$\delta_i = \tilde{p}_i - \Phi(\hat{\mathbf{a}}, t_i), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (5.12.9)$$

где t_i — соответствующая рассматриваемому измерению величина переменной t , а \tilde{p}_i — измеренное значение параметра $p(t_i)$.

Полученные значения δ_i проверяются по критерию

$$|\delta_i| \leq k \sqrt{D(\tilde{p}_i)}, \quad (5.12.10)$$

где k — некоторый коэффициент, зависящий от закона распределения ошибок измерений (обычно полагают этот закон нормальным и принимают $k = 3$). Значение дисперсии $D(\tilde{p}_i)$, берется на основе априорных сведений об ошибках измерений либо предварительно уточняется путем определения коэффициента σ^2 по данным измерений (см. § 5.8).

Если некоторые составляющие вектора δ не удовлетворяют условию (5.12.10), то соответствующие измерения исключаются из дальнейшей обработки. Желательно проанализировать функционирование измерительных приборов в процессе проведения этих измерений и выявить причины возникновения аномалий.

4. Оставшаяся после проведенной отбраковки информация по всем сеансам измерений обрабатывается совместно методом наименьших квадратов, и находится соответствующая оценка \mathbf{q} вектора состояния. По фор-

муле (2.1.9) вычисляются составляющие вектора δ невязок и производится дополнительная отбраковка измерений на основе неравенства (5.12.10). По оставшейся информации снова определяется оценка \hat{q} . В результате получается последовательность оценок \hat{q} . Описанный процесс прекращается тогда, когда последующие оценки \hat{q} перестают отличаться от предыдущих.

В ряде прикладных задач проведение подобной отбраковки аномальных измерений является совершенно необходимой предпосылкой получения удовлетворительных оценок состояния исследуемой системы. От его успешного проведения в значительной мере зависит точность получаемых оценок. Однако следует иметь в виду, что описанный процесс не всегда сразу приводит к удовлетворительным результатам. В некоторых случаях последовательность получаемых оценок не сходится. Иногда в процессе последовательной отбраковки информации исключаются все или почти все измерения. Причиной этого могут являться: плохая обусловленность используемой системы измерений (см. § 5.5), наличие нескольких противоречащих друг другу групп измерений, имеющих большие систематические ошибки, неправильный выбор начального приближения, неправильность априорных представлений о вероятностных характеристиках ошибок и т. п. Только детальный конкретный анализ этих причин и их устранение обеспечивают получение удовлетворительных результатов.

Г л а в а VI

НЕКОТОРЫЕ СТАТИСТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ, ОСНОВАННЫЕ НА МЕТОДЕ МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ

§ 6.1. Метод максимального правдоподобия

Рассмотренный в предыдущей главе метод наименьших квадратов является наиболее распространенным способом получения статистической оценки вектора \mathbf{q} по измеренным значениям вектора \mathbf{d} . В настоящей главе мы кратко остановимся на некоторых других способах решения указанной задачи. Читатель, желающий более подробно ознакомиться с различными методами статистического оценивания и их теоретическим обоснованием, может обратиться к соответствующей литературе [30, 41].

Получаемое в результате измерений значение вектора \mathbf{d} может рассматриваться как случайная величина, закон распределения которой зависит от состояния системы, т. е. от вектора \mathbf{q} . Обозначим через $P(\mathbf{d}/\mathbf{q})$ плотность этого распределения. Если подставить в выражение для этой плотности измеренное значение $\tilde{\mathbf{d}}$, то получаем некоторую функцию вектора \mathbf{q} , которая носит название функции правдоподобия

$$L(\mathbf{q}) = P(\tilde{\mathbf{d}}/\mathbf{q}). \quad (6.1.1)$$

Метод максимального правдоподобия заключается в выборе в качестве оценки $\hat{\mathbf{q}}$ такого значения \mathbf{q} , при котором функция $L(\mathbf{q})$ достигает абсолютного максимума.

В математической статистике доказывается, что получаемая таким образом оценка обладает рядом оптимальных свойств, а именно: при определенных условиях

она является эффективной, состоятельной и асимптотически нормальной (см. § 3.9). Подробное обоснование этих свойств дано в курсах математической статистики [33, 41].

Для построения алгоритма фильтрации по методу максимального правдоподобия необходимо в первую очередь определить функцию $L(q)$. Для этого воспользуемся зависимостью (5.1.1)

$$\tilde{d} = F(q) + \xi. \quad (6.1.2)$$

Предположим, что суммарная ошибка ξ может рассматриваться как случайная величина с непрерывным законом распределения и заданной плотностью вероятности $f(\xi)$. Из зависимостей (6.1.1) и (6.1.2) непосредственно следует, что в этом случае

$$L(q) = f[\tilde{d} - F(q)]. \quad (6.1.3)$$

Таким образом, для практического осуществления фильтрации по методу минимального правдоподобия необходимо задать закон распределения ошибок ξ . От вида этого закона зависит структура соответствующего алгоритма фильтрации.

§ 6.2. Случай нормального закона распределения ошибок

В том случае, когда ошибки распределены по нормальному закону (1.10.1), удовлетворяющему условиям (5.1.2), выражение для функции правдоподобия (6.1.3) принимает вид

$$L(q) = \frac{1}{\sigma(2\pi)^{n/2} \sqrt{|K|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} [\tilde{d} - F(q)]^T K^{-1} [\tilde{d} - F(q)] \right\}.$$

Отсюда непосредственно следует, что отыскание максимума $L(q)$ сводится к нахождению минимума функции

$$S(q) = [\tilde{d} - F(q)]^T K^{-1} [\tilde{d} - F(q)], \quad (6.2.1)$$

полностью совпадающей с выражением (5.1.3), минимум которого отыскивается при построении алгоритма фильтрации по методу наименьших квадратов.

Таким образом, при нормальном законе распределения ошибок алгоритмы фильтрации по методу максимального правдоподобия и наименьших квадратов полностью совпадают.

Поэтому сформулированные в предыдущем параграфе оптимальные свойства метода максимального правдоподобия полностью распространяются на метод наименьших квадратов при нормальном законе распределения ошибок. Это обстоятельство и является теоретическим обоснованием использования метода наименьших квадратов в случае нелинейности модели (2.1.3). При этом из всех возможных стационарных значений функции $S(q)$, удовлетворяющих условию (5.5.16), следует выбрать то, которое обеспечивает достижение абсолютного минимума этой функции.

В математической статистике доказывается, что при *нормальном законе распределения ошибок* и линейной математической модели метод наименьших квадратов обеспечивает получение минимума дисперсии оценки произвольной линейной функции вектора состояния *в классе всех несмещенных оценок* не только асимптотически, но и при любом конечном числе n [41].

Этот результат является более сильным по сравнению с теоремой Гаусса — Маркова, согласно которой метод наименьших квадратов при *произвольном законе распределения ошибок* и линейной модели обеспечивает получение минимальной дисперсии оценки линейной функции вектора состояния *в классе линейных несмещенных оценок*.

§ 6.3. Метод наименьших модулей

Предположим, что составляющие вектора ξ суммарной ошибки независимы и распределены по закону Лапласа (1.10.5). Если математические ожидания и дисперсии величин ξ_i заданы, то можно путем соответствующего линейного преобразования (нормированием) вектора привести выражение для плотности вероятности $f(\xi)$ к виду

$$f(\xi) = \frac{1}{(2\beta)^n} \exp \left[- \frac{\sum_{i=1}^n |\xi_i|}{\beta} \right].$$

Отсюда, пользуясь (6.1.3), находим, что задача отыскания максимума $L(q)$ сводится к нахождению минимума функции

$$T(q) = \sum_{i=1}^n |\tilde{d}_i - F_i(q)|, \quad (6.3.1)$$

где $F_i(q)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) — составляющие векторной функции $F(q)$.

Метод отыскания оценки \hat{q} , основанный на определении минимума величины $T(q)$, носит название *метода наименьших модулей*.

При использовании линейной или линеаризированной модели (4.6.1) выражение для функции (6.3.1) принимает вид

$$T(q) = \sum_{i=1}^n |\tilde{d}_i - a_i q|, \quad (6.3.2)$$

где $a_i = (a_{i1} a_{i2} \dots a_{im})$ — i -я строка матрицы $A = (a_{ij})$.

В этом случае, как показано в работе [36], задача отыскания минимума $T(q)$ эквивалентна задаче линейного программирования, в которой находится минимум величины

$$L = \sum_{i=1}^n (\alpha_i + \beta_i) \quad (6.3.3)$$

при условии

$$\left. \begin{aligned} \tilde{d}_i - a_i q + \alpha_i - \beta_i &= 0, \quad \alpha_i \geq 0, \quad \beta_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ q_j &= q'_j - q''_j, \quad q'_j \geq 0, \quad q''_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, m, \end{aligned} \right\} \quad (6.3.4)$$

где q_j — составляющая вектора $q = \{q_1, q_2, \dots, q_m\}$.

Эквивалентность рассматриваемых задач следует из того, что в каждой паре значений α_i и β_i с одинаковым индексом, соответствующих $\min L$, по крайней мере одно должно равняться нулю. В противном случае величина L может быть уменьшена на $2 \min(\alpha_i, \beta_i)$. Отсюда непосредственно следует, что

$$|\tilde{d}_i - a_i q| = |\alpha_i - \beta_i| = \alpha_i + \beta_i$$

и значение $\min L$ совпадает с величиной $\min T$.

В работе [36] рассмотрены способы упрощения решения указанной задачи линейного программирования.

Сравнение метода наименьших модулей с методом наименьших квадратов показывает, что первый из них менее чувствителен к грубо ошибочным аномальным измерениям. Это связано с тем, что аномальные разности $d_i - F_i(q)$ меньше влияют на определяемую по формуле (6.3.1) функцию $T(q)$, чем на минимизируемую по методу наименьших квадратов (при некоррелированной ошибке ξ) величину [36].

$$S(q) = \sum_{i=1}^n [d_i - F_i(q)]^2.$$

§ 6.4. Метод максимума апостериорной вероятности

В методе максимального правдоподобия вектор q рассматривается как неизвестная, но неслучайная величина. Такой подход соответствует определению состояния различных уникальных систем, характеризующих неслучайными векторами q (Солнечная система, гравитационное поле планеты и т. п.). Однако в ряде задач вполне обоснованным является рассмотрение величины q в качестве случайного вектора. Это в первую очередь относится к различным искусственным системам (летательным аппаратам, системам управления и т. п.), исследуемые экземпляры которых могут рассматриваться как частные реализации больших серий аналогичных изделий. Подобная ситуация может иметь место и при анализе различных многократно воспроизводимых естественных систем (при проведении физических экспериментов, при исследовании биологических систем и т. п.). Наконец, может быть назван ряд систем, состояние которых зависит от большого числа различных случайных факторов и по своей природе является случайным (атмосфера планеты, переменная часть ее магнитного поля и др.).

При определении состояния подобных систем задача сводится к нахождению оценки \hat{q} для некоторой частной реализации случайного вектора q .

Предположим, что до начала эксперимента был известен априорный закон распределения значений этого вектора, характеризующий плотностью вероятности $Q(q)$. После проведения эксперимента и получения измерен-

ного значения $d = \tilde{d}$ этот закон должен быть заменен на закон распределения с условной плотностью вероятности $P(q/\tilde{d})$. В соответствии с формулой Байеса (1.9.8)

$$P(q/\tilde{d}) = \frac{Q(q) P(\tilde{d}/q)}{\int_R P(\tilde{d}/q) dQ_q}, \quad (6.4.1)$$

где $P(\tilde{d}/q)$ — условная плотность вероятности величины \tilde{d} при заданном q , dQ_q — априорная вероятность попадания вектора q в некоторый элементарный объем, а интегрирование ведется по всей области R возможного изменения q .

Метод максимума апостериорной вероятности заключается в выборе в качестве оценки \hat{q} такого значения вектора q , при котором достигается максимум $P(q/\tilde{d})$. Так как знаменатель правой части выражения (6.4.1) не зависит от q , то задача сводится к отысканию максимума функции

$$L(q) = Q(q) P(\tilde{d}/q). \quad (6.4.2)$$

Обозначим через \tilde{q} априорное значение вектора q , а через ξ его ошибку

$$\xi = \tilde{q} - q.$$

При этом

$$Q(q) = \varphi(\tilde{q} - q), \quad P(\tilde{d}/q) = f[\tilde{d} - F(q)],$$

где $\varphi(\xi)$ и $f(\xi)$ — плотности распределения ошибок ξ и $\xi = \tilde{d} - F(q)$.

В результате выражение (6.4.2) принимает вид

$$L(q) = \varphi(\tilde{q} - q) f[\tilde{d} - F(q)]. \quad (6.4.3)$$

Это же выражение может быть получено непосредственно из формулы (6.1.3). Для этого достаточно включить априорные значения \tilde{q} в число измерений и рассматривать вместо вектора d вектор $d' = \{q, d\} = F'(q)$. Тогда, полагая ошибки ξ и ξ независимыми, получим

$$L(q) = f'[\tilde{d}' - F(q)] = \varphi(\tilde{q} - q) f[\tilde{d} - F(q)],$$

где $f'(\xi') = \varphi(\xi) f(\xi)$ — плотность распределения ошибки $\xi' = \{\xi, \xi\}$ вектора \tilde{d}' .

Таким образом, метод максимума апостериорной вероятности совпадает с методом максимального правдоподобия, при условии включения априорных данных в число измерений и предположений о независимости ошибок априорных и апостериорных данных. Это обстоятельство может служить теоретическим обоснованием использования рассматриваемого метода, так как он обладает всеми оптимальными свойствами, присущими методу максимального правдоподобия (см. § 6.1).

Выражение (6.4.3) может быть непосредственно обобщено на случай, когда имеются априорные сведения лишь о части составляющих вектора q . Для этого представим последний в виде совокупности двух векторов

$$q = \{q_1, q_2\}, \quad (6.4.4)$$

и предположим, что задано априорное значение \tilde{q}_1 первого из них, а также плотность вероятности $\varphi(\xi_1)$ соответствующей ошибки ξ_1 . Тогда, повторяя приведенные выше рассуждения, получим задачу отыскания максимума функции

$$L(q) = \varphi(\tilde{q}_1 - q_1) f[\tilde{d} - F(q)]. \quad (6.4.5)$$

В частном случае при

$$q_2 = 0, \quad q_1 = q \quad (6.4.6)$$

выражение (6.4.5) переходит в (6.4.3).

§ 6.5. Метод максимума апостериорной вероятности при нормальном законе распределения ошибок

Предположим, что в рассмотренной выше задаче ошибки ξ_1 и ξ независимы и распределены по нормальным законам, удовлетворяющим условиям

$$E(\xi_1) = E(\xi) = 0, \quad D(\xi_1) = \sigma^2 K_1, \quad D(\xi) = \sigma^2 K_2. \quad (6.5.1)$$

Тогда, пользуясь зависимостью (1.9.23), находим, что задача отыскания абсолютного максимума определенной по формуле (6.4.5) функции $L(q)$ эквивалентна отысканию абсолютного минимума функции

$$S(q) = (\tilde{q}_1 - q_1)^T K_1^{-1} (\tilde{q}_1 - q_1) + [\tilde{d} - F(q)]^T K_2^{-1} [\tilde{d} - F(q)]. \quad (6.5.2)$$

Это выражение полностью совпадает с соответствующим выражением (5.1.3), полученным по методу наименьших квадратов путем включения априорных сведений \tilde{q}_1 в число используемых измерений.

В случае использования линейной или линеаризированной модели (4.6.1) равенство (6.5.2) принимает вид

$$S(q) = (\tilde{q}_1 - q_1)^T K_1^{-1} (\tilde{q}_1 - q_1) + (\tilde{d} - Aq)^T K_2^{-1} (\tilde{d} - Aq). \quad (6.5.3)$$

Такое же выражение для минимизируемой функции $S(q)$ получается при использовании зависимости (5.1.3) для решения по методу наименьших квадратов эквивалентной задачи с расширенным вектором d' измерений, удовлетворяющим условиям

$$\left. \begin{aligned} d' = \{q_1, d\} = A'q, \quad A' = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ A & \end{pmatrix}, \\ \tilde{d}' = \{\tilde{q}_1, \tilde{d}\}, \quad D(\tilde{d}') = \sigma^2 K', \quad K' = \begin{pmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \right\} \quad (6.5.4)$$

где $k \leq m$ — число составляющих вектора q_1 . Отсюда, пользуясь зависимостями (5.3.7), находим значения матрицы Q и вектора b , определяющих соответствующую систему нормальных уравнений (5.2.10)

$$\begin{aligned} Q\hat{q} &= b, \\ Q &= \begin{pmatrix} I_k & A^T \\ 0 & A^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1^{-1} & 0 \\ 0 & K_2^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ A & \end{pmatrix}, \\ b &= \begin{pmatrix} I_k & A^T \\ 0 & A^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1^{-1} & 0 \\ 0 & K_2^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{q}_1 \\ \tilde{d} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

или окончательно

$$Q = \begin{pmatrix} K_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + A^T K_2^{-1} A, \quad b = \begin{pmatrix} K_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{q}_1 \\ \tilde{d} \end{pmatrix} + A^T K_2^{-1} \tilde{d}. \quad (6.5.5)$$

В частности, при условиях (6.4.6), когда $k = m$, получим

$$Q = K_1^{-1} + A^T K_2^{-1} A, \quad b = K_1^{-1} \tilde{q} + A^T K_2^{-1} \tilde{d}. \quad (6.5.6)$$

Таким образом, использование априорных сведений о векторе q сводится к внесению соответствующих дополнительных членов в выражение (5.3.7).

§ 6.6. Рекуррентные алгоритмы фильтрации

Описанные выше алгоритмы фильтрации предусматривают совместную обработку всей измерительной информации, заключенной в векторе $\tilde{\mathbf{d}}$. При большом числе измерений и сложной математической модели это приводит к чрезвычайно трудоемким вычислениям, которые предъявляют высокие требования к используемым вычислительным машинам и связаны с большой затратой машинного времени.

С другой стороны, во многих случаях составляющие вектора $\tilde{\mathbf{d}}$ поступают последовательно с течением времени. Так, например, при слежении за движением некоторого летательного аппарата последовательно поступают сведения о положении аппарата в различные моменты времени. При этом часто оказывается полезным находить оценку $\hat{\mathbf{q}}$ по имеющейся в данный момент информации, последовательно уточняя ее по мере поступления новых данных.

Пусть вектор $\tilde{\mathbf{d}}$ может быть представлен в виде совокупности векторов

$$\tilde{\mathbf{d}} = \{\tilde{\mathbf{d}}_0, \tilde{\mathbf{d}}_1, \tilde{\mathbf{d}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{d}}_N\}, \quad (6.6.1)$$

где $\tilde{\mathbf{d}}_0$ включает в себя всю априорную информацию, а $\tilde{\mathbf{d}}_i$ ($i = 1, 2, \dots, N$) содержит последовательно поступающую апостериорную информацию. При этом каждому $\tilde{\mathbf{d}}_i$ соответствует свое время поступления t_i . Времена t_i ($i = 1, 2, \dots, N$) образуют монотонно возрастающую последовательность. Обозначим через

$$\tilde{\mathbf{d}}'_{i-1} = \{\tilde{\mathbf{d}}_0, \tilde{\mathbf{d}}_1, \tilde{\mathbf{d}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{d}}_{i-1}\} \quad (6.6.2)$$

вектор, включающий всю информацию, поступившую до момента t_i . Ему соответствует оценка

$$\hat{\mathbf{q}}_{i-1} = \Phi(\tilde{\mathbf{d}}'_{i-1}). \quad (6.6.3)$$

К следующему времени t_{i+1} будет иметься информация, составляющая вектор

$$\tilde{\mathbf{d}}'_i = \{\tilde{\mathbf{d}}'_{i-1}, \tilde{\mathbf{d}}_i\}, \quad (6.6.4)$$

по которому может быть получена оценка

$$\hat{\mathbf{q}}_i = \Phi(\tilde{\mathbf{d}}'_i). \quad (6.6.5)$$

В некоторых случаях представляется возможным заменить алгоритм совместной обработки (6.6.5) рекуррентным алгоритмом вида

$$\hat{q}_i = \Psi(\hat{q}_{i-1}, \tilde{d}_i), \quad (6.6.6)$$

в правую часть которого входит не весь вектор $\tilde{d}_i = \{\tilde{d}_0, \tilde{d}_1, \dots, \tilde{d}_i\}$, а лишь вектор \tilde{d}_i поступивших в последний момент t_i измерений. Что касается полученных ранее измерений, то их влияние учитывается оценкой \hat{q}_{i-1} .

Такой процесс получения последовательно уточняемых оценок мы будем называть *рекуррентной фильтрацией*. Он представляет известные удобства, так как распадается на ряд повторяющихся однотипных вычислений по формулам (6.6.6). Кроме того, отпадает необходимость в запоминании большого объема измерительной информации. Это в свою очередь позволяет использовать значительно более простые и компактные вычислительные устройства, по сравнению с теми, которые требуются для осуществления алгоритма совместной обработки (6.6.5), что особенно важно в тех случаях, когда к простоте, компактности и надежности вычислительных устройств предъявляются повышенные требования, например, при автономном определении параметров движения некоторого летательного аппарата на основе вычислений, проводимых на борту этого аппарата.

При использовании рекуррентных алгоритмов (6.6.6) может быть существенно сокращена временная задержка τ между моментом t_i поступления измерений \tilde{d}_i и вычислением соответствующей оценки \hat{q}_i . Это позволяет повысить точность получаемой в данный момент t оценки \hat{q} , так как для ее определения могут быть использованы все измерения, соответствующие временам $t_i \leq t - \tau$. Уменьшение задержки τ позволяет увеличить объем используемой информации и уменьшить интервал экстраполяции, что при правильной стратегии решения задачи приводит к повышению точности получаемых результатов. Это особенно важно в тех случаях, когда оценка \hat{q} используется в контуре управления движением быстро изменяющейся системы, например, при управлении полетом космического аппарата.

§ 6.7. Случай некоррелированных групп измерений

Рассмотрим построение рекуррентного алгоритма фильтрации в том случае, когда вся измерительная информация распадается на взаимно некоррелированные группы и используется линейная или линеаризованная модель (4.6.1).

Предположим, что имеется вектор $d = \{d_0, d_1, \dots, d_N\}$ измерений, каждая составляющая которого d_i связана с вектором состояния q линейной зависимостью $d_i = A_i q$. Тогда зависимость между векторами d и q характеризуется выражением

$$d = Aq, \quad A = \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ \vdots \\ A_N \end{pmatrix}. \quad (6.7.1)$$

Будем полагать измеренные значения \tilde{d}_i взаимно некоррелированными и удовлетворяющими условиям

$$E(\xi_i) = 0, \quad D(\xi_i) = D(\tilde{d}_i) = \sigma^2 K_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N, \quad (6.7.2)$$

где ξ_i — ошибки соответствующих измерений, K_i — заданные симметричные положительно определенные матрицы, а σ^2 — общий для всех измерений положительный множитель.

В этих условиях для получения оценки \hat{q}_i по измерениям $d'_i = \{d_0, d_1, \dots, d_i\}$ используется математическая модель

$$d'_i = A'_i q, \quad A'_i = \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ \vdots \\ A_i \end{pmatrix}, \quad (6.7.3)$$

а выражение для ковариационной матрицы имеет вид

$$D(\tilde{d}'_i) = \sigma^2 \begin{pmatrix} K_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & K_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & K_i \end{pmatrix}. \quad (6.7.4)$$

В частном случае все рассматриваемые группы могут включать лишь по одному измерению. При этом векторы \mathbf{d}_i ($i = 0, 1, \dots, N$) становятся скалярами, матрицы \mathbf{A}_i — строками, а ковариационная матрица $\mathbf{D}(\tilde{\mathbf{d}})$ — диагональной.

Применяя метод наименьших квадратов и подставляя выражения (6.7.3) и (6.7.4) в зависимость (5.3.6), приходим к задаче отыскания минимума функции

$$S_i(q) = \sum_{\alpha=0}^i (\tilde{\mathbf{d}}_{\alpha} - \mathbf{A}_{\alpha}q)^T \mathbf{K}_{\alpha}^{-1} (\tilde{\mathbf{d}}_{\alpha} - \mathbf{A}_{\alpha}q). \quad (6.7.5)$$

Задача сводится к решению системы нормальных уравнений (5.2.10)

$$\mathbf{Q}_i \hat{\mathbf{q}}_i = \mathbf{b}_i. \quad (6.7.6)$$

Из зависимостей (5.3.7), (6.7.3) и (6.7.4) непосредственно следует, что

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{Q}_i &= (\mathbf{A}_0^T \mathbf{A}_1^T \dots \mathbf{A}_i^T) \begin{pmatrix} \mathbf{K}_0^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_1^{-1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{K}_i^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_0 \\ \mathbf{A}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{A}_i \end{pmatrix} = \\ &= \sum_{\alpha=0}^i \mathbf{A}_{\alpha}^T \mathbf{K}_{\alpha}^{-1} \mathbf{A}_{\alpha}, \\ \mathbf{b}_i &= (\mathbf{A}_0^T \mathbf{A}_1^T \dots \mathbf{A}_i^T) \begin{pmatrix} \mathbf{K}_0^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_1^{-1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{K}_i^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{d}}_0 \\ \tilde{\mathbf{d}}_1 \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{d}}_i \end{pmatrix} = \\ &= \sum_{\alpha=0}^i \mathbf{A}_{\alpha}^T \mathbf{K}_{\alpha}^{-1} \tilde{\mathbf{d}}_{\alpha}. \end{aligned} \right\} \quad (6.7.7)$$

Выражения (6.7.5) и (6.7.7) могут быть представлены в виде рекуррентных зависимостей

$$\left. \begin{aligned} S_i(q) &= S_{i-1}(q) + (\tilde{\mathbf{d}}_i - \mathbf{A}_i q)^T \mathbf{K}_i^{-1} (\tilde{\mathbf{d}}_i - \mathbf{A}_i q), \\ \mathbf{Q}_i &= \mathbf{Q}_{i-1} + \mathbf{A}_i^T \mathbf{K}_i^{-1} \mathbf{A}_i, \quad \mathbf{b}_i = \mathbf{b}_{i-1} + \mathbf{A}_i^T \mathbf{K}_i^{-1} \tilde{\mathbf{d}}_i. \end{aligned} \right\} \quad (6.7.8)$$

Пользуясь тем, что

$$b_{i-1} = Q_{i-1} \hat{q}_{i-1}, \quad (6.7.9)$$

можно переписать последнее из равенств (6.7.8) в виде

$$b_i = Q_{i-1} \hat{q}_{i-1} + A_i^T K_i^{-1} \tilde{A}_i. \quad (6.7.10)$$

Кроме того, из (5.6.6) следует, что

$$D(\hat{q}_{i-1}) = \sigma^2 Q_{i-1}^{-1}. \quad (6.7.11)$$

Сравнение полученных выражений с соответствующими формулами (6.5.6), используемыми при фильтрации по методу максимума апостериорной вероятности, показывает, что оба метода совпадают, если рассматривать оценку \hat{q}_{i-1} в качестве априорных сведений о векторе q , а величину \tilde{A}_i — как апостериорную информацию. Перебирая все числа i от 1 до N , получаем последовательность непрерывно уточняемых оценок \hat{q}_i ($i = 1, 2, \dots, N$). При построении каждой такой оценки результаты предыдущего расчета можно рассматривать в качестве априорных данных, к которым добавляется новая апостериорная информация.

Зависимости (6.7.8) обычно используются при составлении программ обработки большого объема информации на вычислительных машинах. Они позволяют свести определение значений Q и b к выполнению последовательности однотипных операций и существенно снизить требования к объему занятой памяти машины.

Перейдем к выводу рекуррентного соотношения вида (6.6.6). Для этого введем обозначение

$$P_i = Q_i^{-1}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N, \quad (6.7.12)$$

Из зависимостей (6.7.6) и (6.7.8) следует, что

$$\hat{q}_{i-1} = P_{i-1} b_{i-1}, \quad \hat{q}_i = P_i b_i, \quad P_i^{-1} = P_{i-1}^{-1} + A_i^T K_i^{-1} A_i. \quad (6.7.13)$$

Воспользуемся теперь равенством (1.2.15), полагая в нем

$$A = P_{i-1}^{-1}, \quad B = P_{i-1}^{-1}, \quad C = A_i^T, \quad D = K_i^{-1}, \quad E = A_i.$$

Отсюда

$$S = K_i + A_i P_{i-1} A_i^T, \quad (6.7.14)$$

$$P_i = P_{i-1} - P_{i-1} A_i^T S_i^{-1} A_i P_{i-1}. \quad (6.7.15)$$

Далее, пользуясь зависимостями (6.7.8), (6.7.13), (6.7.14) и (6.7.15), находим

$$\begin{aligned} \hat{q}_i &= P_i b_i = (P_{i-1} - P_{i-1} A_i^T S_i^{-1} A_i P_{i-1}) (b_{i-1} + A_i^T K_i^{-1} \tilde{d}_i) = \\ &= \hat{q}_{i-1} + P_{i-1} A_i^T S_i^{-1} S_i K_i^{-1} \tilde{d}_i - P_{i-1} A_i^T S_i^{-1} A_i P_{i-1} b_{i-1} - \\ &\quad - P_{i-1} A_i^T S_i^{-1} A_i P_{i-1} A_i^T K_i^{-1} \tilde{d}_i = \\ &= \hat{q}_{i-1} + P_{i-1} A_i^T S_i^{-1} [(K_i + A_i P_{i-1} A_i^T) K_i^{-1} \tilde{d}_i - A_i \hat{q}_{i-1} - \\ &\quad - A_i P_{i-1} A_i^T K_i^{-1} \tilde{d}_i] = \hat{q}_{i-1} + P_{i-1} A_i^T S_i^{-1} (\tilde{d}_i - A_i \hat{q}_{i-1}). \end{aligned} \quad (6.7.16)$$

Окончательно, подставляя (6.7.14) в (6.7.15) и (6.7.16), получим искомые рекуррентные соотношения

$$\left. \begin{aligned} \hat{q}_i &= \hat{q}_{i-1} + P_{i-1} A_i^T (K_i + A_i P_{i-1} A_i^T)^{-1} (\tilde{d}_i - A_i \hat{q}_{i-1}), \\ P_i &= P_{i-1} - P_{i-1} A_i^T (K_i + A_i P_{i-1} A_i^T)^{-1} A_i P_{i-1}, \end{aligned} \right\} \quad (6.7.17)$$

позволяющие по значениям \hat{q}_{i-1} , P_{i-1} , A_i , K_i и \tilde{d}_i определить величины \hat{q}_i и P_i .

Заметим, что оценка \hat{q}_i получается путем добавления к предыдущей оценке \hat{q}_{i-1} некоторой линейной функции от величины $\tilde{d}_i - A_i \hat{q}_{i-1}$. Последняя представляет собой разность между измеренным значением вектора \tilde{d}_i и значением, получаемым после подстановки оценки \hat{q}_{i-1} в правую часть математической модели (6.7.1). В том случае, когда $\tilde{d}_i = A_i \hat{q}_{i-1}$, непосредственно получаем, что $\hat{q}_i = \hat{q}_{i-1}$.

Рекуррентные зависимости (6.7.17) позволяют по мере поступления информации последовательно находить соответствующие оценки \hat{q}_i . Для этого необходимо знать начальные значения \hat{q}_0 и $P_0 = D(\tilde{q}_0)/\sigma^2$. Они могут быть получены на основе априорных сведений о

векторе q . При отсутствии или недостатке этих сведений для определения величин q_0 и P_0 может быть использована некоторая начальная часть апостериорной информации.

§ 6.8. Динамическая фильтрация

В некоторых прикладных задачах целесообразно вместо рассмотренной в предыдущих параграфах статической рекуррентной фильтрации решать задачу динамической фильтрации (см. § 2.3). При этом определяется оценка текущего значения $q_i = q(t_i)$ вектора состояния (в отличие от определенной выше оценки его начального значения $q = q(t_0)$). Будем рассматривать эту задачу при следующих допущениях:

1. Математическая модель исследуемой системы линейна и имеет вид

$$q_i = M_i q_{i-1}, \quad d_i = A_i q_i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (6.8.1)$$

где d_i — совокупность информации, поступающей на интервале времени

$$t_{i-1} \leq t < t_i, \quad (6.8.2)$$

а M_i и A_i ($i = 1, 2, \dots, N$) — заданные матрицы. При этом квадратные матрицы M_i удовлетворяют условию

$$|M_i| \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (6.8.3)$$

2. Ошибки ξ_i и ξ_j измеренных значений \tilde{d}_i и \tilde{d}_j взаимно некоррелированы при $i \neq j$.

3. Математические ожидания и ковариационные матрицы ошибок ξ_i удовлетворяют условиям

$$E(\xi_i) = 0, \quad D(\xi_i) = \sigma^2 K_i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (6.8.4)$$

где K_i — заданные симметричные матрицы, а множитель σ^2 не зависит от i .

В этих условиях отыскание оценки \hat{q}_i вектора $q_i = q(t_i)$ сводится к рассмотренной в предыдущих параграфах задаче рекуррентной фильтрации. Для этого примем значение $q_i = q(t_i)$ в качестве вектора, описывающего состояние системы на всем рассматриваемом интервале. Это всегда можно сделать, так как из условия

(6.8.3) следует существование всех обратных матриц M_i^{-1} ($i = 1, 2, \dots, N$).

Обозначим через \hat{q}_i и \hat{q}'_i оценки вектора q_i , полученные соответственно по измерениям

$$\tilde{d}'_i = \{\tilde{d}_0, \tilde{d}_1, \dots, \tilde{d}_i\}$$

и

$$\tilde{d}'_{i-1} = \{\tilde{d}_0, \tilde{d}_1, \dots, \tilde{d}_{i-1}\},$$

а. через P_i и P'_i — матрицы

$$P_i = \frac{D(\hat{q}_i)}{\sigma^2}, \quad P'_i = \frac{D(\hat{q}'_i)}{\sigma^2}. \quad (6.8.5)$$

Пользуясь этим обозначением и равенством (6.7.14), можно записать зависимости (6.7.17) в виде

$$\left. \begin{aligned} \hat{q}_i &= \hat{q}'_i + P'_i A_i^T S_i^{-1} (\tilde{d}_i - A_i \hat{q}'_i), \\ P_i &= P'_i - P'_i A_i^T S_i^{-1} A_i P'_i, \\ S_i &= K_i + A_i P'_i A_i^T. \end{aligned} \right\} \quad (6.8.6)$$

С другой стороны, пользуясь математической моделью (6.8.1), можно написать, что

$$\left. \begin{aligned} \hat{q}'_i &= M_i \hat{q}_{i-1}, \\ P'_i &= M_i P_{i-1} M_i^T, \end{aligned} \right\} \quad (6.8.7)$$

где \hat{q}_{i-1} — оценка вектора $q_{i-1} = q(t_{i-1})$ по измерениям \tilde{d}'_{i-1} , а $P_{i-1} = D(\hat{q}_{i-1})/\sigma^2$.

Подставляя (6.8.7) в (6.8.6), получаем окончательную систему рекуррентных зависимостей:

$$\left. \begin{aligned} \hat{q}_i &= M_i \hat{q}_{i-1} + P'_i A_i^T S_i^{-1} (\tilde{d}_i - A_i M_i \hat{q}_{i-1}), \\ P_i &= P'_i - P'_i A_i^T S_i^{-1} A_i P'_i, \\ S_i &= K_i + A_i P'_i A_i^T, \\ P'_i &= M_i P_{i-1} M_i^T, \end{aligned} \right\} \quad (6.8.8)$$

позволяющую по значениям \hat{q}_{i-1} , P_{i-1} , \tilde{d}_i определить \hat{q}_i и P_i .

§ 6.9. Дискретный фильтр Калмана

Задача, приводящая к дискретному фильтру Калмана, отличается от рассмотренной в предыдущем параграфе задачи динамической фильтрации тем, что в ней связь между последовательными значениями q_i не детерминирована и включает некоторый случайный вектор η (так называемый шум системы). Ее математическая модель характеризуется зависимостями

$$q_i = M_i q_{i-1} + \eta_i, \quad \tilde{d}_i = A_i q_i + \xi_i, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (6.9.1)$$

При этом предполагается, что векторы ξ_i и η_j взаимно не коррелированы при любых значениях i и j . Кроме того, отсутствует корреляционная связь между ξ_i и ξ_j , а также η_i и η_j при $i \neq j$. Математические ожидания и дисперсии этих векторов удовлетворяют условиям

$$E(\xi_i) = E(\eta_i) = 0, \quad D(\xi_i) = \sigma^2 K_i, \quad D(\eta_i) = \sigma^2 N_i, \quad (6.9.2)$$

где K_i и N_i ($i = 1, 2, \dots, N$) — заданные симметричные, положительно определенные матрицы.

В математической модели (6.9.1) вектор $q_i = q(t_i)$ зависит не только от своего начального значения $q_0 = q(t_0)$, но и от последовательности случайных векторов $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_i$. Таким образом, мы имеем частный случай задачи, описываемой вероятностной моделью вида (2.2.4). Как было указано в § 3.3, при решении подобных задач следует пользоваться методом динамической фильтрации, отыскивая последовательно оценки \hat{q}_i векторов q_i ($i = 1, 2, \dots, N$).

Воспользуемся методом максимума апостериорной вероятности в случае нормальности законов распределения векторов ξ_i и η_i (см. § 6.5). При нахождении оценки \hat{q}_i будем рассматривать предыдущую оценку \hat{q}_{i-1} в качестве априорных данных. Из зависимостей (6.9.1), (6.9.2) и условия несмещенности отыскиваемых оценок следует, что соответствующее априорное значение вектора q_i

$$\tilde{q}_i = M_i \hat{q}_{i-1}. \quad (6.9.3)$$

Ошибка этой величины зависит от ошибки оценки \hat{q}_{i-1} и шума η_i . Последние между собой не коррелиро-

ваны, так как первая из них зависит от случайных векторов $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{i-1}, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{i-1}$, не коррелированных с вектором η_i . Поэтому, пользуясь зависимостями (1.9.23) и (6.9.2), можно написать, что

$$D(\tilde{q}_i) = M_i D(\hat{q}_{i-1}) M_i^T + D(\eta_i) = \sigma^2 P'_i, \quad (6.9.4)$$

где

$$P'_i = M_i P_{i-1} M_i^T + N_i, \quad P_{i-1} = \frac{D(\hat{q}_{i-1})}{\sigma^2}. \quad (6.9.5)$$

К этим априорным сведениям добавляются измерения \tilde{d}_i , связанные с оцениваемым вектором q_i зависимостью (6.9.1) при условиях (6.9.2). Из сравнения равенств (6.5.1) и (6.5.6) с выражениями (6.9.1) — (6.9.5) следует, что оценка по методу максимума апостериорной вероятности находится при помощи зависимостей

$$Q_i \hat{q}_i = b_i, \quad \hat{q}_i = P_i b_i, \quad P_i = Q_i^{-1}, \quad (6.9.6)$$

где

$$\begin{aligned} Q_i &= P_i^{-1} = P_i'^{-1} + A_i^T K_i^{-1} A_i, \\ b_i &= P_i'^{-1} M_i \hat{q}_{i-1} + A_i^T K_i^{-1} \tilde{d}_i. \end{aligned} \quad (6.9.7)$$

Воспользуемся зависимостью (1.2.15), полагая в ней $A = P_i^{-1}$, $B = P_i'^{-1}$, $C = A_i^T$, $D = K_i^{-1}$, $E = A_i$.

В результате получаем, что

$$P_i = P'_i - P'_i A_i^T S_i^{-1} A_i P'_i, \quad S_i = K_i + A_i P'_i A_i^T. \quad (6.9.8)$$

Из (6.9.6) — (6.9.8) находим, что

$$\begin{aligned} \hat{q}_i &= P_i b_i = (P'_i - P'_i A_i^T S_i^{-1} A_i P'_i) (P_i'^{-1} M_i \hat{q}_{i-1} + A_i^T K_i^{-1} \tilde{d}_i) = \\ &= M_i \hat{q}_{i-1} + P'_i A_i^T S_i^{-1} S_i K_i^{-1} \tilde{d}_i - P'_i A_i^T S_i^{-1} A_i M_i \hat{q}_{i-1} - \\ &\quad - P'_i A_i^T S_i^{-1} A_i P'_i A_i^T K_i^{-1} \tilde{d}_i = \\ &= M_i \hat{q}_{i-1} + P'_i A_i^T S_i^{-1} [(K_i + A_i P'_i A_i^T) K_i^{-1} \tilde{d}_i - A_i M_i \hat{q}_{i-1} - \\ &\quad - A_i P'_i A_i^T K_i^{-1} \tilde{d}_i] = M_i \hat{q}_{i-1} + P'_i A_i^T S_i^{-1} (\tilde{d}_i - A_i M_i \hat{q}_{i-1}). \end{aligned} \quad (6.9.9)$$

Зависимости (6.9.5), (6.9.8) и (6.9.9) составляют систему рекуррентных формул фильтра Калмана

$$\left. \begin{aligned} \hat{q}_i &= M_i \hat{q}_{i-1} + P'_i A_i^T S_i^{-1} (\tilde{d}_i - A_i M_i \hat{q}_{i-1}), \\ P_i &= P'_i - P'_i A_i^T S_i^{-1} A_i P'_i, \\ S_i &= K_i + A_i P'_i A_i^T, \\ P'_i &= M_i P_{i-1} M_i^T + N_i, \end{aligned} \right\} \quad (6.9.10)$$

позволяющую по значениям \hat{q}_{i-1} , P_{i-1} , \tilde{d}_i определить \hat{q}_i и P_i . Они отличаются от соответствующих формул (6.8.8) динамической фильтрации наличием члена N_i , характеризующего ковариационную матрицу шума η_i .

§ 6.10. Непрерывный фильтр Калмана

При решении некоторых прикладных задач измерения $\tilde{d}_i = \tilde{d}(t_i)$, $i = 1, 2, \dots, N$ производятся так часто, что их можно считать практически непрерывными. Это позволяет при построении алгоритма фильтрации заменить последовательность дискретных векторов \tilde{d}_i непрерывной векторной функцией $\tilde{d}(t)$. Рассмотрим задачу определения оценки $\hat{q}(t)$ по измеренному значению $\tilde{d}(t)$ при следующих допущениях.

1. Используется линейная модель системы вида

$$\frac{dq}{dt} = \Phi(t)q + v(t), \quad \tilde{d} = H(t)q + w(t), \quad (6.10.1)$$

где $\Phi(t)$ и $H(t)$ — заданные матричные функции, $v(t)$ и $w(t)$ — случайные функции, первая из которых представляет собой шум системы, а вторая — ошибку измерений.

2. Случайные функции $v(t)$ и $w(t)$ взаимно не коррелированы. Кроме того, отсутствует корреляция между значениями одной и той же функции в разные моменты времени. Математические ожидания указанных функций равны нулю.

3. Заданы начальная оценка $\hat{q}_0 = \hat{q}(t_0)$ и ее ковариационная матрица $D(\hat{q}_0)$.

4. Измерения величины \tilde{d} проводятся для некоторых фиксированных времен t . Промежуток τ между двумя соседними временами измерений будем полагать постоянным.

5. Требуется определить оценку $\hat{q}(t)$ для времен проведения измерений.

Рассматриваемая задача эквивалентна построению дискретного фильтра Калмана при условиях, что

$$q_{i-1} = q(t), \quad q_i = q(t + \tau), \quad \tilde{d}_i = \tilde{d}(t + \tau). \quad (6.10.2)$$

Полагая промежуток τ малым и отбрасывая малые высших порядков, можно, пользуясь зависимостями (6.10.1) и (6.10.2), написать, что

$$\left. \begin{aligned} q_i &= q_{i-1} + \frac{dq}{dt} \tau = (I + \Phi \tau) q_{i-1} + v \tau, \\ \tilde{d}_i &= H q_i + w. \end{aligned} \right\} \quad (6.10.3)$$

В результате мы получаем зависимости вида (6.9.1), в которых

$$M_i = I + \Phi \tau, \quad A_i = H, \quad \eta_i = v \tau, \quad \xi_i = w. \quad (6.10.4)$$

Введем обозначения:

$$V(t) = \frac{\tau D[v(t)]}{\sigma^2}, \quad W(t) = \frac{\tau D[w(t)]}{\sigma^2}, \quad (6.10.5)$$

$$P(t) = \frac{D[\hat{q}(t)]}{\sigma^2}, \quad P_i = P(t + \tau), \quad P_{i-1} = P(t), \quad (6.10.6)$$

где σ^2 — произвольный положительный скалярный множитель, а $D[v(t)]$, $D[w(t)]$ и $D[\hat{q}(t)]$ — ковариационные матрицы соответствующих случайных векторов.

Из выражений (6.9.2), (6.10.4) и (6.10.5) следует, что

$$K_i = \frac{W}{\tau}, \quad N_i = \tau V. \quad (6.10.7)$$

Рассмотрим теперь последовательность задач определения оценок $\hat{q}(\tau)$, построенную в предположении, что промежуток $\tau \rightarrow 0$, а функции $V(t)$ и $W(t)$ остаются неизменными. Подставляя выражения (1.9.23), (6.10.4), (6.10.6) и (6.10.7) в (6.9.10) и отбрасывая члены

высших порядков малости относительно τ , получим

$$\begin{aligned} P_i &= (I + \Phi\tau) P(t) (I + \Phi\tau)^T + V\tau = \\ &= P(t) + (\Phi P + P\Phi^T + V)\tau, \end{aligned}$$

$$S_i = \frac{W}{\tau},$$

$$P(t + \tau) = P(t) + (\Phi P + P\Phi^T + V - PH^T W^{-1} HP)\tau,$$

$$q(t + \tau) = \hat{q}(t) + [\Phi \hat{q} + PH^T W^{-1} (\tilde{d} - H\hat{q})]\tau.$$

Отсюда

$$\frac{\hat{q}(t + \tau) - q(t)}{\tau} = \Phi \hat{q} + PH^T W^{-1} (\tilde{d} - H\hat{q}) + O_1(\tau),$$

$$\frac{P(t + \tau) - P(t)}{\tau} = \Phi P + P\Phi^T + V - PH^T W^{-1} HP + O_2(\tau),$$

где $O_1(\tau)$ и $O_2(\tau)$ — члены, стремящиеся к нулю вместе с τ .

Окончательно, переходя к пределу при $\tau \rightarrow 0$, получаем систему дифференциальных уравнений непрерывного фильтра Калмана:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\hat{q}}{dt} &= \Phi \hat{q} + PH^T W^{-1} (\tilde{d} - H\hat{q}), \\ \frac{dP}{dt} &= \Phi P + P\Phi^T + V - PH^T W^{-1} HP. \end{aligned} \right\} \quad (6.10.8)$$

Решение этой системы при начальных условиях

$$\hat{q}(t_0) = \hat{q}_0, \quad P(t_0) = \frac{D(\hat{q}_0)}{\sigma^2} \quad (6.10.9)$$

определяет искомые функции $\hat{q}(t)$ и $P(t)$ в предельном случае.

Из выражений (6.10.5) следует, что

$$D(v) = \frac{\sigma^2 V}{\tau}, \quad D(w) = \frac{\sigma^2 W}{\tau}.$$

Поэтому при $\tau \rightarrow 0$ и заданных функциях $V(t)$ и $W(t)$ элементы матриц $D(v)$ и $D(w)$ неограниченно возрастают. Кроме того, при малых значениях промежутка τ становится несправедливым предположение о некоррелированности ошибок соседних измерений. Поэтому,

строго говоря, предельная задача, которой соответствуют уравнения (6.10.8), не имеет физического смысла. Несмотря на это, указанная система дифференциальных уравнений может с успехом применяться в тех случаях, когда τ достаточно мало для того, чтобы можно было пренебречь разницей между ее решением и результатами, получаемыми на основе конечных зависимостей (6.9.10), и одновременно достаточно велико для того, чтобы можно было считать соседние измерения некоррелированными. В этих условиях использование непрерывного фильтра Калмана является часто более удобным по сравнению с дискретным фильтром. В частности, это имеет место при проведении соответствующих расчетов на аналоговых вычислительных машинах.

§ 6.11. Практическое использование рекуррентных алгоритмов фильтрации

Описанные в §§ 6.7—6.10 рекуррентные алгоритмы фильтрации основаны на методе максимального правдоподобия при следующих дополнительных предположениях:

- закон распределения ошибок измерения считается нормальным;

- используется линейная математическая модель исследуемой системы;

- вся совокупность измерений может быть представлена в виде последовательности взаимно не коррелированных групп.

Следствием первого из этих допущений является эквивалентность указанных алгоритмов методу наименьших квадратов (см. §§ 6.2 и 6.5). Эта эквивалентность непосредственно показана для алгоритмов, рассмотренных в §§ 6.7 и 6.8. Что касается фильтра Калмана, то он также может быть сведен к методу наименьших квадратов путем включения шума η в число оцениваемых и измеряемых параметров. При этом нужно положить, что измеренное значение $\tilde{\eta} = 0$.

Несмотря на то, что с теоретической точки зрения рассмотренные выше алгоритмы фильтрации не представляют собой ничего нового по сравнению с методом наименьших квадратов, они получили в настоящее

время широкое распространение при решении ряда прикладных задач. Это может быть частично объяснено характерным для нашего времени стремлением к поиску новых оригинальных решений, которые часто оказываются лишь некоторым преобразованием давно полученных результатов. Однако наряду с этим рекуррентные алгоритмы фильтрации обладают определенными практическими преимуществами, указанными в § 6.6. Кроме того, использование фильтра Калмана открывает практическую возможность решения задачи при наличии шума системы, при котором детерминированная математическая модель заменяется вероятностной. Теоретически возможное применение в этом случае алгоритма совместной обработки, основанного на методе наименьших квадратов, связано со значительным увеличением числа одновременно оцениваемых составляющих вектора состояния. Это в свою очередь приводит к значительному усложнению алгоритма фильтрации, что делает метод совместной обработки практически неприемлемым.

Указанные обстоятельства предопределяют целесообразность использования рекуррентных алгоритмов фильтрации в тех случаях, когда определение фактического состояния некоторой реальной системы является частью контура управления движением этой системы, и требуется оперативное решение рассматриваемой задачи. В частности, они широко используются в процессе управления движением различных космических аппаратов.

При сравнении рекуррентных алгоритмов и алгоритмов совместной обработки следует учитывать, что хотя первые из них обеспечивают значительное уменьшение временной задержки τ между моментом t_i проведения измерений \tilde{a}_i и временем получения соответствующей оценки \hat{q}_i , общий объем вычислений, затрачиваемых на расчет величины \hat{q}_i (включая вычисления, выполненные до момента t_i), в этом случае часто оказывается большим. Поэтому в задачах, решаемых без учета шума системы и не связанных с необходимостью оперативного определения оценок \hat{q}_i , более целесообразным оказывается использование алгоритмов совместной обработки.

Кроме того, отыскание оценок вектора состояния при помощи рекуррентных алгоритмов в ряде случаев приводит к заметному ухудшению точности получаемых результатов. Это объясняется тем, что обоснование этих алгоритмов существенным образом базируется на допущении о линейности математической модели исследуемой системы. При решении нелинейных задач может быть применен метод последовательных приближений (см. §§ 4.6 и 5.5). Если используемое при этом начальное опорное значение $q_0(t)$ векторной функции $q(t)$ существенным образом отличается от соответствующего истинного значения $q_{\text{и}}(t)$, то приходится делать несколько приближений. При этом каждое новое приближение требует проведения расчетов заново с учетом результатов всех проведенных измерений. В результате теряется основное преимущество рекуррентных алгоритмов, заключающееся в том, что они позволяют на последнем этапе оперировать лишь с небольшим объемом измерительной информации. То обстоятельство, что в процессе осуществления рекуррентных алгоритмов измерительная информация постепенно забывается, крайне затрудняет исключение аномальных измерений, а также слежение за соответствием между фактическим состоянием системы и ее математической моделью. Поэтому при использовании подобных алгоритмов на больших интервалах времени постепенно накапливаются неконтролируемые ошибки модели и измерений, приводящие в конечном итоге к значительным отклонениям полученных оценок от соответствующих истинных величин.

То обстоятельство, что рассмотренные выше рекуррентные алгоритмы фильтрации существенным образом опираются на допущение о возможности разбиения всей измерительной информации на взаимно не коррелированные группы, также накладывает определенные ограничения на использование этих алгоритмов при решении различных практических задач. В связи с этим в настоящее время начинают разрабатываться методы построения рекуррентных алгоритмов фильтрации, не связанных с указанным допущением [18, 37].

Таким образом, рекуррентные алгоритмы фильтрации целесообразно использовать в контуре управления различными системами в тех случаях, когда:

— требуется оперативное решение задачи определения состояния системы для некоторой возрастающей последовательности моментов времени;

— система описывается линейной или линеаризуемой моделью; в последнем случае должно быть задано достаточно точное опорное значение q_0 вектора состояния, позволяющее ограничиться при решении задачи первым приближением;

— измерительная информация может содержать лишь незначительное количество аномальных измерений.

Глава VII

МИНИМАКСНЫЕ ОЦЕНКИ

§ 7.1. Постановка задачи

В главах V и VI были рассмотрены способы получения статистических оценок вектора состояния, базирующиеся на методе максимального правдоподобия. При этом суммарная ошибка рассматривалась в качестве случайного вектора и считался заданным либо ее закон распределения, либо математическое ожидание и ковариационная матрица (последняя — с точностью до произвольного множителя). Такой классический подход характерен для подавляющего большинства используемых в настоящее время на практике алгоритмов фильтрации. Он в большинстве случаев обеспечивает получение вполне удовлетворительных оценок вектора состояния, однако часто приводит к ошибочным выводам при оценке точности полученных результатов и выборе оптимальной стратегии решения задачи. Как было указано выше, это объясняется несоответствием между условиями, принятыми при решении поставленной задачи, и условиями, в которых находится рассматриваемая реальная система.

В настоящей главе мы рассмотрим некоторые результаты, полученные при неклассическом подходе к оценке точности определения состояния системы и выбору оптимальной стратегии решения задачи (см. §§ 3.5 и 3.8). При этом мы будем пользоваться критериями оптимальности вида (3.8.1) или (3.8.2). Получаемые в результате оценки состояния системы мы будем называть *минимаксными*, в отличие от *статистических* оценок, соответствующих классическому подходу к рассматриваемой задаче.

Будем исходить из следующих двух способов задания множества M возможных ошибок ξ и выбора критерия оптимальности.

1. Про составляющие ξ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) вектора ξ ничего не известно, кроме того, что они ограничены по модулю. В качестве гарантированной характеристики точности используется максимальное значение χ_{\max} модуля ошибки χ оценки некоторого скалярного параметра l , определяемое из условия (3.5.5). Отыскание минимума величины χ_{\max} служит критерием оптимальности при решении задач выбора оптимальной стратегии. Не нарушая общности, можно считать все составляющие вектора ξ равноточными. При этом условия (3.5.4) принимают вид

$$|\xi_i| \leq \alpha, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (7.1.1)$$

где α — некоторая положительная постоянная, а выражение (3.5.6) для определения χ_{\max} может быть написано в форме

$$\chi_{\max} = \alpha \sum_{i=1}^n |x_i|. \quad (7.1.2)$$

Здесь x_i — коэффициенты, вычисленные при помощи зависимостей (3.4.4) и (3.4.19).

Подобная система допущений может быть использована и тогда, когда ошибка ξ является случайной, но неизвестны ее вероятностные характеристики.

2. Составляющие ξ_i вектора ξ являются случайными величинами, математические ожидания которых равны нулю, дисперсии ограничены, а коэффициенты корреляции между любыми парами из них произвольны. В качестве гарантированной характеристики точности используется величина

$$D_{\max} = \max_{\xi \in M} D(\hat{l}), \quad (7.1.3)$$

а критерием оптимальности служит отыскание минимального значения D_{\max} .

Не нарушая общности, можно считать все величины ξ_i равноточными. При этом зависимости (3.5.14) и

(3.5.17) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} E(\xi) = 0, \quad D(\xi_i) \leq \mu^2, \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ |K(\xi_i, \xi_j)| = \frac{|D(\xi_i, \xi_j)|}{\sqrt{D(\xi_i)D(\xi_j)}} \leq 1, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \right\} \quad (7.1.4)$$

$$D_{\max} = \mu^2 \left(\sum |x_i| \right)^2, \quad (7.1.5)$$

где μ^2 — некоторая положительная постоянная.

Из доказанной в § 3.8 теоремы следует, что задачи отыскания $\min \chi_{\max}$ при условиях 1 и $\min D_{\max}$ при условиях 2 эквивалентны и сводятся к нахождению абсолютного минимума величины

$$z = \sum_{i=1}^n |x_i|. \quad (7.1.6)$$

В настоящей главе рассматриваются некоторые основные на этом критерии задачи оптимизации стратегии определения состояния реальных систем. При этом оптимальной считается стратегия, удовлетворяющая условию

$$z_{\text{опт}} \leq z_{\text{произв}}, \quad (7.1.7)$$

где $z_{\text{опт}}$ — соответствующее ей значение z , а $z_{\text{произв}}$ — любое значение, получаемое при произвольной стратегии, принадлежащей к некоторому заданному множеству.

Задача оптимизации по критерию (7.1.7) в ряде случаев имеет неоднозначное решение, т. е. может существовать несколько оптимальных стратегий. При решении многих прикладных задач можно ограничиться отысканием лишь одной из этих стратегий. Две стратегии, при которых обеспечивается достижение одинаковых значений z , будем в дальнейшем считать *эквивалентными*.

§ 7.2. Две основные теоремы

Предположим, что исследуемая система описывается линейной или линеаризированной моделью, характеризующей зависимостями (4.6.1) и (5.2.3),

$$d = Aq, \quad l = Cq, \quad (7.2.1)$$

при условии (5.2.1).

Задано измеренное значение вектора $\mathbf{d} = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$

$$\tilde{\mathbf{d}} = \mathbf{A}\mathbf{q} + \xi, \quad (7.2.2)$$

суммарная ошибка которого ξ удовлетворяет сформулированным в предыдущем параграфе условиям (7.1.1) или (7.1.4).

При этих допущениях могут быть доказаны две следующие основные теоремы о выборе оптимальной стратегии определения состояния системы.

1. Теорема об отыскании оптимальной линейной несмещенной оценки. Среди всех линейных оценок вида (5.2.4) и (5.2.24)

$$\hat{\mathbf{q}} = \mathbf{Y}\tilde{\mathbf{d}}, \hat{\mathbf{l}} = \mathbf{C}\hat{\mathbf{q}} = \mathbf{X}\tilde{\mathbf{d}}, \mathbf{X} = \mathbf{C}\mathbf{Y} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}, \quad (7.2.3)$$

удовлетворяющих условию несмещенности (5.2.21) и (5.2.34)

$$\mathbf{Y}\mathbf{A} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{X}\mathbf{A} = \mathbf{C}, \quad (7.2.4)$$

может быть найдена по крайней мере одна оптимальная по критерию (7.1.7) оценка $\hat{\mathbf{q}} = \{\hat{q}_1, \hat{q}_2, \dots, \hat{q}_m\}$, получаемая в результате решения системы t линейных уравнений

$$\tilde{\mathbf{d}}_m = \mathbf{A}_m \hat{\mathbf{q}}_m, \quad (7.2.5)$$

где $\tilde{\mathbf{d}}_m = \{\tilde{d}_1, \tilde{d}_2, \dots, \tilde{d}_m\}$ — некоторая достаточная совокупность измерений, выбираемая оптимальным образом из составляющих вектора $\tilde{\mathbf{d}} = \{\tilde{d}_1, \tilde{d}_2, \dots, \tilde{d}_n\}$, а \mathbf{A}_m — квадратная матрица $t \times t$, составленная из t строк, соответствующих в матрице \mathbf{A} выбранным измерениям $\tilde{d}_1, \tilde{d}_2, \dots, \tilde{d}_m$.

Эта теорема одновременно решает вопрос о выборе оптимального алгоритма фильтрации и оптимального состава используемых измерений, так как все составляющие вектора \mathbf{d} , не входящие в вектор \mathbf{d}_m , могут быть исключены из дальнейшего рассмотрения без ухудшения точности получаемой оценки.

2. Теорема о выборе оптимального состава измерений при фильтрации по методу наименьших квадратов (М. Л. Лидов). Помимо вектора $\tilde{\mathbf{d}} = \{\tilde{d}_1, \tilde{d}_2, \dots, \tilde{d}_n\}$, задана некоторая симметричная, положительно опреде-

ленная матрица K размерности $n \times n$. Рассматриваются все возможные векторы $\tilde{d}_k = \{\tilde{d}_1, \tilde{d}_2, \dots, \tilde{d}_k\}$, $m \leq k \leq n$, составленные из произвольно выбранных измерений $\tilde{d}_1, \tilde{d}_2, \dots, \tilde{d}_n$. Для каждого такого вектора строится соответствующий алгоритм отыскания оценки \hat{q}_k по методу наименьших квадратов. При этом отыскивается минимум функции

$$S_k(q) = (\tilde{d}_k - A_k q)^T K_k^{-1} (\tilde{d}_k - A_k q), \quad (7.2.6)$$

где A_k — матрица $k \times m$, составленная из строк матрицы A , соответствующих используемым измерениям $\tilde{d}_1, \tilde{d}_2, \dots, \tilde{d}_k$, а матрица K_k получается из матрицы K вычеркиванием всех строк и столбцов, соответствующих не включенным в вектор \tilde{d}_k измерениям.

Тогда на множестве всех построенных указанным способом оценок \hat{q}_k оптимальной по критерию (7.1.7) является оценка \hat{q}_m , получаемая путем решения системы уравнений (7.2.5) с использованием некоторой оптимальным образом выбранной достаточной совокупности измерений $\tilde{d}_m = \{\tilde{d}_1, \tilde{d}_2, \dots, \tilde{d}_m\}$ [34].

Эта теорема является непосредственным следствием теоремы 1. Действительно, как это следует из доказанной в конце § 5.3 теоремы, любая оценка \hat{q}_m принадлежит к множеству оценок \hat{q}_k при произвольной матрице K . Если для определения величины \hat{q}_m используется выбранная в соответствии с теоремой 1 оптимальная совокупность измерений \tilde{d}_m , то соответствующая оценка \hat{q}_m оптимальна на множестве получаемых по методу наименьших квадратов линейных несмещенных оценок \hat{q}_k .

§ 7.3. Сведение к задаче линейного программирования

Отыскание оптимальной линейной несмещенной оценки заключается в нахождении строки $X = (x_1 x_2 \dots x_n)$, обеспечивающей достижение абсолютного минимума величины

$$z = \sum_{i=1}^n |x_i| \quad (7.3.1)$$

при условии несмещенности (5.2.34)

$$XA = C. \quad (7.3.2)$$

М. Л. Лидов показал, что это равносильно решению некоторой задачи линейного программирования, из свойств которой следует доказательство сформулированных выше теорем [34].

Воспользуемся способом, предложенным Б. Ц. Бахшияном [52], и покажем, что отыскание минимума величины (7.3.1) при условии (7.3.2) может быть сведено к решению задачи линейного программирования, в которой отыскивается строка $U = (u_1 u_2 \dots u_N)$, обеспечивающая достижение абсолютного минимума величины

$$z = \sum_{i=1}^N u_i \quad (7.3.3)$$

при условиях:

$$UB = C, \quad (7.3.4)$$

$$u_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (7.3.5)$$

где B — некоторая матрица $N \times m$.

Будем называть первую из рассматриваемых задач задачей I, а вторую — задачей II. Разница между ними заключается в том, что задача II решается при дополнительном условии (7.3.5). Эквивалентность обеих задач обеспечивается специальным подбором величин N и B по заданным n и A .

Рассмотрим некоторую строку X , вообще говоря, не удовлетворяющую условиям (7.3.5). Совокупность ее элементов x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) может быть разбита на две группы: неотрицательных величин

$$x^i = x'_i \geq 0$$

и неположительных величин

$$x_i = -x''_i, \quad x''_i \geq 0.$$

Дополним эти группы до полных строк:

$$X' = (x'_1 x'_2 \dots x'_n), \quad X'' = (x''_1 x''_2 \dots x''_n),$$

полагая, что

$$x'_i = 0 \quad \text{при} \quad x_i = -x''_i \quad \text{и} \quad x''_i = 0 \quad \text{при} \quad x_i = x'_i.$$

Таким образом,

$$x_i = \begin{cases} x'_i & \text{при } x''_i = 0, \\ -x''_i & \text{при } x'_i = 0. \end{cases} \quad (7.3.6)$$

Отсюда

$$X = X' - X''. \quad (7.3.7)$$

Кроме того,

$$|x_i| = x'_i + x''_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

В результате задача I сводится к отысканию минимума величины

$$z = \sum_{i=1}^n (x'_i + x''_i) \quad (7.3.8)$$

при условиях:

$$(X' - X'') A = C, \quad (7.3.9)$$

$$x'_i \geq 0, \quad x''_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (7.3.10)$$

$$x'_i = 0 \text{ при } x''_i \neq 0, \quad x''_i = 0 \text{ при } x'_i \neq 0. \quad (7.3.11)$$

Покажем, что условие (7.3.11) необязательно, так как оно всегда выполняется в результате решения рассматриваемой задачи.

Предположим обратное. Пусть матрицы X' и X'' являются решением задачи при условиях (7.3.9) и (7.3.10) и существует хотя бы один индекс i , для которого

$$x'_i \geq x''_i > 0 \quad (7.3.12)$$

или

$$x''_i \geq x'_i > 0. \quad (7.3.13)$$

В первом случае можно заменить в строках X' и X'' элементы x'_i и x''_i на величины

$$\bar{x}'_i = x'_i - x''_i \geq 0 \quad \text{и} \quad \bar{x}''_i = 0.$$

При этом условия (7.3.9) и (7.3.10) не нарушаются, а член $x'_i + x''_i$ в выражении (7.3.8) заменяется членом

$$\bar{x}'_i + \bar{x}''_i = x'_i - x''_i < x'_i + x''_i.$$

В результате определяемая выражением (7.3.8) величина z уменьшается. Это противоречит предположению о том, что строки X' и X'' обеспечивают абсолютный минимум z .

Аналогичный результат получается в случае (7.3.13) при замене

$$\bar{x}'_i = 0, \quad \bar{x}''_i = x''_i - x'_i.$$

Таким образом, задача I сводится к отысканию минимума выражения (7.3.8) при условиях (7.3.9) и (7.3.10).

Введем теперь $2n$ -мерную матрицу-строку

$$U = (X'X'') = (u_1 u_2 \dots u_N), \quad N = 2n, \\ u_i = \left\{ \begin{array}{ll} x'_i & \text{при } i = 1, 2, \dots, n, \\ x''_i & \text{при } i = n+1, n+2, \dots, N, \end{array} \right\} \quad (7.3.14)$$

и матрицу

$$B = \begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix}. \quad (7.3.15)$$

При этом выражение (7.3.8) переходит в (7.3.3), условия (7.3.9) и (7.3.10) — в (7.3.4) и (7.3.5), а задача I сводится к задаче II линейного программирования.

Мы не будем здесь останавливаться на способах решения получаемой задачи линейного программирования, поскольку на эту тему имеется достаточно обширная литература [53]. Используем лишь некоторые свойства этого решения для доказательства интересующей нас теоремы об отыскании оптимальной линейной несмещенной оценки.

Из принятого при формулировке указанной теоремы допущения (5.2.1) и зависимости (7.3.15) следует, что

$$R(B) = m. \quad (7.3.16)$$

Поэтому условие (7.3.4) представляет собой совокупность m независимых линейных неоднородных уравнений относительно N переменных u_1, u_2, \dots, u_N . Выражая при помощи этих уравнений некоторые m переменных через остальные $N - m$ и исключая первые из выражения (7.3.3), можно преобразовать зависимости (7.3.3) — (7.3.5) к виду

$$z = \sum_{i=m+1}^N \gamma_i u_i + M, \quad (7.3.17)$$

$$u_j = \sum_{i=m+1}^N \alpha_{ji} u_i + \beta_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (7.3.18)$$

$$u_i \geq 0, \quad i = m+1, m+2, \dots, N, \quad (7.3.19)$$

где $\gamma_i, M, \alpha_{ji}, \beta_i$ — некоторые получаемые в результате проведенного преобразования постоянные. При этом мы

для простоты присвоили вынесенным в левые части равенств (7.3.18) переменным u_j ; первые m индексов $j = 1, 2, \dots, m$.

Переход от зависимостей (7.3.3) — (7.3.5) к (7.3.17) — (7.3.19) может быть проведен различными способами, так как $N > m$.

При решении задач линейного программирования обычно используется симплексный метод, заключающийся в отыскании такого преобразования указанного типа, при котором

$$\left. \begin{aligned} \beta_j &\geq 0, & j &= 1, 2, \dots, m, \\ \gamma_i &\geq 0, & i &= m+1, m+2, \dots, N. \end{aligned} \right\} \quad (7.3.20)$$

В теории линейного программирования доказывается, что такое преобразование всегда возможно, если условия (7.3.4) и (7.3.5) не противоречивы и величина z ограничена снизу (т. е. рассматриваемая задача имеет решение). При этом симплексный метод обеспечивает эффективный способ отыскания этого преобразования [27, 53].

В нашем случае это имеет место, поскольку исходная задача I всегда имеет решение, так как определяемая равенством (7.3.1) величина z ограничена снизу, а из допущения (5.2.1) следует непротиворечивость условия (7.3.2).

Если условие (7.3.20) удовлетворяется, то получаемая в результате соответствующего преобразования величина M представляет собой нижнюю границу возможных значений z . Действительно, из (7.3.17), (7.3.19) и (7.3.20) непосредственно следует, что

$$z \geq M. \quad (7.3.21)$$

Эта граница достигается, если элементы строки $U = (u_1, u_2, \dots, u_N)$ определяются выражениями

$$u_i = \begin{cases} \beta_i & \text{при } i = 1, 2, \dots, m, \\ 0 & \text{при } i = m+1, m+2, \dots, N, \end{cases} \quad (7.3.22)$$

удовлетворяющими условиям (7.3.18) и (7.3.19).

Построенная таким образом строка U определяет решение рассматриваемой задачи оптимизации. При

этом соответствующее оптимальное значение z

$$z_{\text{опт}} = M. \quad (7.3.23)$$

Если теперь от принятого в зависимостях (7.3.17) — (7.3.22) преобразованного порядка индексов $i = 1, 2, \dots, N$ вернуться к исходному порядку, то, пользуясь зависимостями (7.3.6) и (7.3.14), а также учитывая условие (7.3.11), можно всегда найти соответствующую оптимальную строку $X = \{x_1 x_2 \dots x_n\}$, содержащую не более m не равных нулю коэффициентов x_i ($i = 1, 2, \dots, n$).

Таким образом, рассматриваемая задача отыскания оптимальной линейной несмещенной оценки \hat{l} всегда имеет решение, зависящее не более чем от m измерений, выбранных из заданного вектора $\tilde{d} = \{\tilde{d}_1, \tilde{d}_2, \dots, \tilde{d}_n\}$.

Для доказательства сформулированной в § 7.2 теоремы 1 остается показать, что такая оптимальная оценка может быть получена из решения системы уравнений (7.2.5). Воспользуемся решением задачи II линейного программирования, полученным при помощи симплексного метода. Как это было указано выше, в процессе этого решения из элементов строки $U = (u_1 u_2 \dots u_N)$ выделяется совокупность m величин, образующих строку $U_m = (u_{\alpha_1} u_{\alpha_2} \dots u_{\alpha_m})$. Путем исключения элементов этой строки из выражения (7.3.3) задача приводится к виду (7.3.17) — (7.3.19). Обозначим через $B_{\alpha_1}, B_{\alpha_2}, \dots, B_{\alpha_m}$ строки матрицы B , соответствующие величинам $u_{\alpha_1}, u_{\alpha_2}, \dots, u_{\alpha_m}$. Совокупность этих строк образует квадратную матрицу $m \times m$. Обозначим ее через B_m . Из возможности исключения всех элементов строки U следует, что

$$R(B_m) = m. \quad (7.3.24)$$

Отсюда, а также из зависимости (7.3.15) находим, что среди индексов α_i ($i = 1, 2, \dots, m$) не может быть двух одинаковых или отличающихся на n , т. е.

$$\alpha_i \neq \alpha_j, \quad \alpha_i \neq \alpha_j - n \quad \text{при } i \neq j. \quad (7.3.25)$$

Далее, пользуясь зависимостями (7.3.6) и (7.3.14), находим соответствующую матрице U_m строку $X_m = (x_{\delta_1} x_{\delta_2} \dots x_{\delta_m})$, в которой индексы δ_i определяются

при помощи выражения

$$\delta_i = \begin{cases} \alpha_i & \text{при } \alpha_i \leq n, \\ \alpha_i - n & \text{при } \alpha_i > n. \end{cases} \quad (7.3.26)$$

Из (7.3.25) и (7.3.26) следует, что среди индексов δ_i ($i = 1, 2, \dots, m$) не может быть двух одинаковых. Обозначим через $A_{\delta_1}, A_{\delta_2}, \dots, A_{\delta_m}$ соответствующие этим индексам строки матрицы A , а через A_m — образованную из этих строк квадратную матрицу $m \times m$. Из (7.3.14) и (7.3.26) следует, что матрица A_m может отличаться от матрицы B_m лишь знаками некоторых своих строк. Отсюда, пользуясь равенством (7.3.24), находим, что

$$R(A_m) = m. \quad (7.3.27)$$

Получаемая в результате приведенного выше решения задачи оптимизации строка $X = (x_1 x_2 \dots x_n)$ содержит нули на всех местах с индексами, не входящими в совокупность δ_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Поэтому найденный оптимальный алгоритм фильтрации имеет вид

$$\hat{l} = X_m \tilde{d}_m, \quad (7.3.28)$$

где $\tilde{d}_m = \{\tilde{d}_{\delta_1}, \tilde{d}_{\delta_2}, \dots, \tilde{d}_{\delta_m}\}$. При этом условие несмещенности (7.3.2) можно записать в форме

$$X_m A_m = C. \quad (7.3.29)$$

Отсюда, учитывая зависимости (7.3.27) и (7.3.28), находим, что

$$X_m = C A_m^{-1}, \quad \hat{l} = C A_m^{-1} \tilde{d}_m. \quad (7.3.30)$$

Тот же результат может быть получен по формуле

$$\hat{l} = C \hat{q}_m,$$

где \hat{q}_m — решение системы уравнений (7.2.5) при найденных здесь значениях \tilde{d}_m и A_m .

Таким образом, решение системы уравнений (7.2.5) при надлежащем выборе вектора \tilde{d}_m обеспечивает получение оптимальной оценки. Отсюда непосредственно следует справедливость обеих сформулированных в § 7.2 основных теорем.

Будем называть полученную в результате достаточную совокупность измерений \tilde{d}_m *оптимальным измери-*

тельным базисом. Из приведенных выше результатов следует, что использование метода линейного программирования позволяет не только доказать существование этого базиса, но и предложить эффективный алгоритм его определения, что в свою очередь решает поставленные в §§ 7.1 и 7.2 задачи выбора оптимальной стратегии. При этом отыскиваемые минимальные значения гарантированных характеристик χ_{\max} и D_{\max} точности получаемых оценок l могут быть найдены из выражений (7.1.2), (7.1.5), (7.1.6) и (7.3.23)

$$\min \chi_{\max} = \alpha M, \quad \min D_{\max} = \mu^2 M^2. \quad (7.3.31)$$

Полученный результат может быть непосредственно распространен на случай, когда число N возможных измерений бесконечно. Предположим, что при формулировании рассмотренных в § 7.2 теорем вместо вектора d задана некоторая измеряемая функция $\Psi(q, t)$. При этом первое из равенств (7.2.1) заменяется зависимостью (4.6.10)

$$\Psi(q, t) = \Psi(t) q, \quad (7.3.32)$$

где $\Psi(t) = (\Psi_1 \Psi_2 \dots \Psi_m)$ — заданная строка непрерывных функций времени. Совокупность возможных измерений d_i определяется выражениями (4.6.11)

$$d_i = \Psi(t_i) q. \quad (7.3.33)$$

Здесь t_i — времена измерений, лежащие на заданном мерном интервале $[t_n, t_k]$,

$$t_n \leq t_i \leq t_k. \quad (7.3.34)$$

В результате получаем бесконечное число возможных измерений, и возникает задача выбора из них вектора $d = \{d_1, d_2, \dots, d_m\}$, удовлетворяющего сформулированным в §§ 7.1 и 7.2 условиям оптимальности.

Для решения этой задачи построим некоторую бесконечную убывающую последовательность промежутков Δ_j ($j = 1, 2, \dots$) времени, удовлетворяющую условиям

$$\Delta_{j+1} < \Delta_j, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \Delta_j = 0. \quad (7.3.35)$$

Каждому промежутку Δ_j сопоставим совокупность $T_j = \{t_1^{(j)}, t_2^{(j)}, \dots, t_{n_j}^{(j)}\}$ времен t_i измерений, лежащих на

интервале (7.3.34). Здесь n_j — число элементов этой совокупности. При этом должны удовлетворяться условия $\Delta_j > t_{i+1}^{(j)} - t_i^{(j)}$ ($i = 1, 2, \dots, n_j - 1$), $T_{j+1} \supset T_j$. (7.3.36)

Пользуясь совокупностью T_j времен измерений, находим при помощи зависимостей (7.3.33) и (4.6.12) соответствующий вектор $d_j = \{d_1, d_2, \dots, d_{n_j}\}$, а также матрицу A_j математической модели $d_j = A_j q$. Далее путем решения описанной выше задачи линейного программирования строим из составляющих вектора d_j оптимальный базис $d_m^{(j)} = \{d_1^{(j)}, d_2^{(j)}, \dots, d_m^{(j)}\}$ и находим соответствующее оптимальное значение $z_{\text{опт}}^{(j)}$ минимизируемой величины z . Из зависимостей (7.1.6), (7.1.7), (7.2.3) и (7.3.36) находим, что

$$z_{\text{опт}}^{(j)} \geq z_{\text{опт}}^{(j+1)} > 0. \quad (7.3.37)$$

Отсюда непосредственно следует существование предела

$$z_{\text{опт}}^{(\infty)} = \lim_{j \rightarrow \infty} z_{\text{опт}}^{(j)}. \quad (7.3.38)$$

Для того чтобы это предельное значение $z_{\text{опт}}$ можно было принять за решение рассматриваемой задачи, достаточно, чтобы оно не зависело от выбора последовательности совокупностей T_j ($j = 1, 2, \dots$). Мы докажем это утверждение при условии, что все составляющие $\Psi_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) векторной функции $\Psi(t)$, входящей в выражение (7.3.32) непрерывны на замкнутом интервале (7.3.34).

Для этого рассмотрим какие-либо две последовательности T_j и \bar{T}_k ($j, k = 1, 2, \dots$) совокупностей времен измерений и обозначим через $z_{\text{опт}}^{(j)}$ и $\bar{z}_{\text{опт}}^{(k)}$ значения $z_{\text{опт}}$, полученные решением задачи линейного программирования для совокупностей T_j и \bar{T}_k , через $d_m^{(j)}$ и $\bar{d}_m^{(k)}$ — соответствующие оптимальные базисы, а через $z_{\text{опт}}^{(\infty)}$ и $\bar{z}_{\text{опт}}^{(\infty)}$ предельные значения величин $z_{\text{опт}}^{(j)}$ и $\bar{z}_{\text{опт}}^{(k)}$ при $j, k \rightarrow \infty$.

Допустим, что

$$z_{\text{опт}}^{(\infty)} \neq \bar{z}_{\text{опт}}^{(\infty)}. \quad (7.3.39)$$

Примем для определенности, что $z_{\text{опт}}^{(\infty)} > \bar{z}_{\text{опт}}^{(\infty)}$. Тогда при достаточно больших значениях j и k имеет место

неравенство

$$z_{\text{опт}}^{(j)} > \bar{z}_{\text{опт}}^{(k)}. \quad (7.3.40)$$

Заметим, что из непрерывности функций $\Psi_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) на замкнутом интервале (7.3.34) следует их ограниченность на этом интервале. Поэтому для любого достаточного базиса $d_m = \{d_1, d_2, \dots, d_m\}$, выбранного из рассматриваемого множества возможных измерений, соответствующая величина z является непрерывной функцией используемых времен t_i ($i = 1, 2, \dots, m$) измерений. В частности, это относится к базису $\bar{d}_m^{(k)}$, которому соответствуют времена \bar{t}_i ($i = 1, 2, \dots, m$), входящие в совокупность T_k . Отсюда следует, что для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что

$$|z' - \bar{z}_{\text{опт}}^{(k)}| < \varepsilon, \quad (7.3.41)$$

где z' — величина z , найденная для некоторого достаточного базиса d'_m , удовлетворяющего условию

$$|\bar{t}_i - t'_i| < \delta, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (7.3.42)$$

Здесь t'_i ($i = 1, 2, \dots, m$) — времена измерений, входящие в базис d'_m .

Из определения последовательности T_j ($j = 1, 2, \dots$) следует, что при достаточно большом значении индекса j среди времен, входящих в совокупность T_j , всегда можно выбрать m времен t'_j , удовлетворяющих условию (7.3.42). Если для построенного на этих временах достаточного базиса d'_m определить величину z' , то имеет место неравенство

$$z' \geq z_{\text{опт}}^{(j)}. \quad (7.3.43)$$

Из зависимостей (7.3.40), (7.3.41) и (7.3.43) непосредственно следует, что для произвольного сколь угодно малого ε при достаточно больших значениях индексов j и k имеет место неравенство

$$|z_{\text{опт}}^{(j)} - z_{\text{опт}}^{(k)}| < \varepsilon,$$

что противоречит допущению (7.3.39).

Таким образом, существует общее для всех последовательностей T_j ($j = 1, 2, \dots$) предельное значение $z_{\text{опт}}^{(\infty)}$, определяемое выражением (7.3.38). Его можно принять за отыскиваемое оптимальное значение $z_{\text{опт}}$ величины z для исходной задачи с бесконечным числом измерений, так как из способа определения $z_{\text{опт}}$ и неравенства (7.3.37) следует выполнение условия (7.1.7). При этом либо величина $z_{\text{опт}}$ достигается при использовании некоторого оптимального достаточного базиса, выбираемого из имеющегося множества возможных измерений, либо из этого множества может быть выбран достаточный базис d_m , обеспечивающий получение величины z сколь угодно близкой к $z_{\text{опт}}$.

В итоге рассматриваемая задача оптимизации при бесконечном числе возможных измерений может быть с произвольной степенью точности заменена соответствующей задачей с конечным числом N , решаемой методом линейного программирования.

Заметим, что можно доказать лишь сходимость описанного процесса определения $z_{\text{опт}}$ и однозначность соответствующего предела величин $z_{\text{опт}}^{(j)}$. Однако получаемые при этом оптимальные базисы $d_m^{(j)}$ могут и не сходиться к определенному пределу. Это связано с возможной неоднозначностью решения задачи нахождения этих базисов.

§ 7.4. Геометрическая интерпретация

Наряду с описанным в предыдущем параграфе методом, для определения оптимального измерительного базиса d_m могут быть использованы следующие два способа:

— решение, базирующееся на геометрической интерпретации;

— сведение задачи к нахождению обобщенного чебышевского полинома, наименее уклоняющегося от нуля.

Мы здесь ограничимся описанием первого из указанных способов, обладающего в ряде случаев большой простотой и наглядностью. Что касается второго способа, то с ним можно ознакомиться по соответствующей работе Л. Ю. Белоусова и В. Я. Крупень [17].

Рассмотрим m -мерное евклидово пространство Q параметров состояния системы, в котором координатами являются составляющие q_1, q_2, \dots, q_m вектора q . Пользуясь характеризующими математическую модель (7.2.1) матрицами $A = (a_{ij})$ и $C = (c_1 c_2 \dots c_m)$, определим в пространстве Q векторы

$$\left. \begin{aligned} a_i &= A_i^T = \{a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{im}\}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ c &= C^T = \{c_1, c_2, \dots, c_m\}, \end{aligned} \right\} \quad (7.4.1)$$

где A_i — i -я строка матрицы A .

При помощи этих векторов можно представить зависимости (7.2.1) в виде

$$d_i = a_i \cdot q, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad l = c \cdot q. \quad (7.4.2)$$

Векторы a_i будем в дальнейшем называть *векторами измерений* d_i , а вектор c — *вектором оцениваемого параметра* l .

При этом условие (7.2.4) несмещенности линейного алгоритма фильтрации (7.2.3) принимает вид

$$c = \sum_{i=1}^n x_i a_i. \quad (7.4.3)$$

Таким образом, элементы строки $X = (x_1 x_2 \dots x_n)$, определяющей любой линейный несмещенный алгоритм фильтрации $\hat{l} = X\tilde{d}$, представляют собой коэффициенты разложения вектора c по векторам a_i . При избыточном числе измерений ($n > m$) такое разложение может быть проведено различными способами. Требуется найти оптимальное разложение, исходя из зависимостей (7.1.6) и (7.1.7).

Введем обозначение

$$p_i = \frac{|x_i|}{\sum_{i=1}^n |x_i|} = \frac{|x_i|}{z}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (7.4.4)$$

Очевидно, что

$$p_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^n p_i = 1, \quad (7.4.5)$$

Пользуясь зависимостями (7.1.6) и (7.4.4), можно представить условие несмещенности (7.4.3) в виде

$$c = z\gamma, \quad \gamma = \sum_{i=1}^n p_i a_i \operatorname{sign} x_i. \quad (7.4.6)$$

Отсюда непосредственно следует, что

$$z = \frac{|c|}{|\gamma|}. \quad (7.4.7)$$

Таким образом, задача отыскания минимума z сводится к нахождению максимума $|\gamma|$. Рассмотрим основные свойства вектора γ . Из равенства (7.4.6) находим, что он коллинеарен и одинаково направлен с вектором c , т. е.

$$\gamma \uparrow \uparrow c. \quad (7.4.8)$$

Кроме того, из выражений (1.13.7), (7.4.5) и (7.4.6) следует, что вектор γ принадлежит выпуклой оболочке Φ , образованной векторами $\pm a_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), т. е.

$$\gamma \in \Phi. \quad (7.4.9)$$

Обозначим через D точку пересечения вектора c или его продолжения с границей оболочки Φ , а через γ_{\max} вектор, оканчивающийся в этой точке. Из зависимости [1.13.12] следует, что для любого вектора γ , удовлетворяющего условиям (7.4.8) и (7.4.9), имеет место неравенство

$$|\gamma| \leq |\gamma_{\max}|. \quad (7.4.10)$$

Поставим теперь задачу выбора из всех $2n$ векторов $\pm a_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) совокупности S_m , состоящей из m линейно независимых векторов $\pm a_j$ ($j = 1, 2, \dots, m$), удовлетворяющих условию

$$\gamma_{\max} \in \Phi_m, \quad (7.4.11)$$

где Φ_m — выпуклая оболочка, образованная этими векторами. Очевидно, что

$$\Phi_m \subset \Phi. \quad (7.4.12)$$

Покажем, что если эта задача решена, то соответствующие векторам совокупности S_m измерения d_1, d_2, \dots, d_m образуют оптимальный измерительный базис

$d_m = \{d_1, d_2, \dots, d_m\}$. Для этого докажем, что существует единственный вектор y_m , одновременно удовлетворяющий условиям (7.4.8) и

$$y_m \in \Phi_m. \quad (7.4.13)$$

Действительно, из этих условий и зависимостей (1.13.7) следует, что

$$\left. \begin{aligned} y_m = kc &= \sum_{i=1}^m p_i (\pm a_i), \\ \sum_{i=1}^m p_i &= 1, \quad p_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \end{aligned} \right\} \quad (7.4.14)$$

где $k > 0$ — некоторый скалярный множитель.

Отсюда, введя обозначение $x_i = \pm p_i/k$, получим, что

$$c = \sum_{i=1}^m x_i a_i. \quad (7.4.15)$$

Учитывая линейную независимость векторов a_i ($i = 1, 2, \dots, m$), находим, что система уравнений (7.4.15) имеет единственное решение, которому соответствует единственный вектор y_m , определяемый по формуле (7.4.14) при

$$p_i = \frac{|x_i|}{\sum_{i=1}^m |x_i|}, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (7.4.16)$$

Из единственности вектора y_m и зависимости (7.4.11) следует, что

$$y_m = y_{\max}. \quad (7.4.17)$$

Введем обозначения

$$X_m = (x_1 x_2 \dots x_m), \quad A_m = \begin{bmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_m^T \end{bmatrix}. \quad (7.4.18)$$

При этом можно переписать уравнение (7.4.15) в виде

$$X_m A_m = C.$$

Но это есть не что иное, как уравнение (7.3.29), используемое при построении линейного несмещенного алгоритма фильтрации по достаточной совокупности d_m измерений. Соответствующий этому алгоритму вектор y_m удовлетворяет условию оптимальности (7.4.17). Поэтому измерительный базис d_m является оптимальным. Получаемый при использовании этого базиса оптимальный алгоритм фильтрации имеет вид

$$\hat{l} = X_m \tilde{d}_m = \sum_{i=1}^m x_i \tilde{d}_i. \quad (7.4.19)$$

Из уравнения (7.4.15) следует, что определяющие этот алгоритм величины x_i представляют собой коэффициенты разложения вектора c по векторам a_i . Далее, пользуясь зависимостями (7.4.7), (7.4.10) и (7.4.17), находим, что получаемое в результате решения рассматриваемой задачи оптимальное значение z определяется выражением

$$z_{\text{опт}} = \frac{|c|}{|y_{\text{max}}|}. \quad (7.4.20)$$

Из изложенного следует, что решение задачи оптимизации геометрическим методом сводится к:

- построению выпуклой оболочки ϕ , образуемой векторами $\pm a_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$);
- отысканию точки D пересечения границы оболочки ϕ с вектором c или его продолжением;
- выбору из всех векторов $\pm a_i$ совокупности из m линейно независимых векторов, для которой соответствующая выпуклая оболочка ϕ_m содержит точку D .

Рассмотрим простейший случай, когда $m = 2$. При этом оболочка ϕ представляет собой двухмерную геометрическую фигуру, а именно — выпуклый многоугольник, содержащий концы всех векторов $\pm a_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) с вершинами, совпадающими со всеми или частью концов этих векторов. Точка D находится в результате пересечения вектора c или его продолжения с границей многоугольника ϕ . Выпуклая фигура ϕ_m представляет собой отрезок прямой, соединяющий концы двух векторов $\pm a_i$. Для отыскания оптимального измерительного базиса достаточно выбрать отрезок ϕ_m , заключающий точку D . Таким образом, вся задача решается неслож-

ным геометрическим построением. На рис. 7.4.1 дан пример такого построения при $n = 5$. Фигура Φ представляет собой выпуклый шестиугольник $A_1 A_2 A_3 A'_1 A'_2 A'_3$ с вершинами на концах векторов $\pm a_i$ ($i = 1, 2, 3$). Векторы $\pm a_4$ заканчиваются на сторонах этого многоугольника, а $\pm a_5$ не достигают его границы. На рисунке изображены 4 вектора c_1, c_2, c_3, c_4 , соответствующие оцениваемым параметрам l_1, l_2, l_3, l_4 . Для каждого из этих

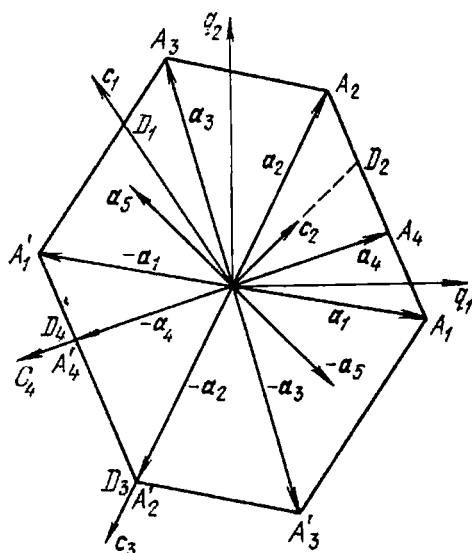


Рис. 7.4.1. Геометрическое определение оптимального измерительного базиса при $m = 2$ и $n = 5$.

параметров получаем следующее решение рассматриваемой задачи выбора оптимальной стратегии.

1. $c = c_1$. Вектор c_1 пересекает границу шестиугольника Φ в точке D_1 , лежащей на стороне $A_3 A'_1$, на которой заканчиваются векторы a_3 и $-a_1$. Задачи определения оптимального измерительного базиса d_m и оптимальной линейной несмещенной оценки \hat{l}_1 имеют однозначные решения

$$d_m = \{d_1, d_3\}, \quad \hat{l}_1 = x_1 \tilde{d}_1 + x_3 \tilde{d}_3,$$

где x_1 и x_3 — коэффициенты разложения вектора c_1 по векторам a_1 и a_3 .

2. $c = c_2$. Продолжение вектора c_2 пересекает границу фигуры Φ в точке D_2 , лежащей на стороне $A_1 A_2$,

на которой заканчиваются векторы a_1 , a_2 и a_4 . Существуют два оптимальных базиса d_m и d'_m и две соответствующие оптимальные оценки \hat{l}_2 и \hat{l}'_2 , определяемые выражениями

$$d_m = \{d_1, d_2\}, \quad \hat{l}_2 = x_1 \tilde{d}_1 + x_2 \tilde{d}_2$$

и

$$d'_m = \{d_2, d_4\}, \quad \hat{l}'_2 = x'_2 \tilde{d}_2 + x'_4 \tilde{d}_4.$$

3. $c = c_3$. Точка D_3 пересечения вектора c_3 с границей многоугольника Φ совпадает с его вершиной A'_2 . Оптимальным является любой базис вида

$$d_m = \{d_2, d_i\}, \quad i \neq 2,$$

которому соответствует оптимальная оценка

$$\hat{l}_3 = x_2 \tilde{d}_2 = - \frac{|c_2|}{|a_2|} \tilde{d}_2.$$

4. $c = c_4$. Точка D_4 пересечения вектора c_4 с границей фигуры Φ находится на стороне $A'_1 A'_2$ и совпадает с концом A'_1 вектора $-a_1$. Оптимальным является измерительный базис

$$d_m = \{d_1, d_2\},$$

а также все базисы вида

$$d'_4 = \{d_4, d_i\}, \quad i \neq 4.$$

Первому из них соответствует оценка

$$\hat{q}_4 = x_1 \tilde{d}_1 + x_2 \tilde{d}_2,$$

а всем остальным —

$$q'_4 = x_4 \tilde{d}_4 = - \frac{|c_4|}{|a_4|} \tilde{d}_4.$$

Аналогично решается задача при $m = 3$. В этом случае фигура Φ представляет собой выпуклый многогранник, содержащий концы всех векторов $\pm a_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) с вершинами, совпадающими со всеми или частью концов этих векторов. Точка D находится в результате пересечения вектора c или его продолжения с границей многогранника Φ . Выпуклая фигура Φ_m представляет собой треугольник с вершинами на концах

векторов $\pm a_i$. Для отыскания оптимального измерительного базиса достаточно выбрать треугольник Φ_m , содержащий точку D .

На рис. 7.4.2 дан пример указанного геометрического построения при $n = 8$. Фигура Φ представляет собой выпуклый двенадцатигранник $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A'_1 A'_2 A'_3 A'_4 A'_5$ с

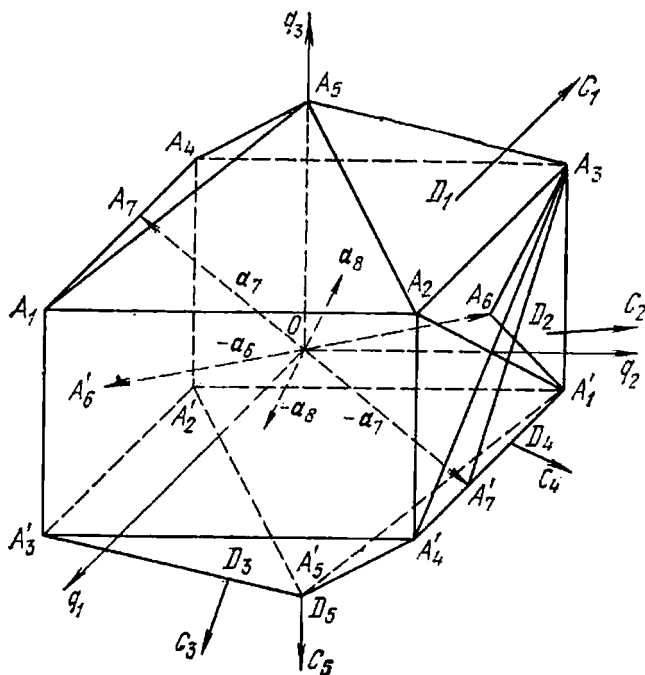


Рис. 7.4.2. Геометрическое определение оптимального измерительного базиса при $m = 3$ и $n = 8$.

вершинами на концах векторов $\pm a_i$ ($i = 1, 2, \dots, 5$). Векторы $\pm a_6$ заканчиваются на гранях многогранника Φ , $\pm a_7$ — на его ребрах, а $\pm a_8$ — внутри этого многогранника. На рисунке изображено пять векторов c_1, c_2, \dots, c_5 , соответствующих оцениваемым параметрам l_1, l_2, \dots, l_5 . Для каждого из этих параметров получаем следующее решение задачи выбора оптимальной стратегии:

1. $c = c_1$. Вектор c_1 пересекает границу многогранника Φ в точке D_1 , лежащей на треугольной грани $A_2 A_3 A_5$, на которой заканчиваются векторы a_2, a_3 и a_5 . Задачи определения оптимального измерительного ба-

базиса d_m и оптимальной линейной несмещенной оценки \hat{l}_1 имеют однозначные решения

$$d_m = \{d_2, d_3, d_5\}, \quad \hat{l}_1 = x_2 \tilde{d}_2 + x_3 \tilde{d}_3 + x_5 \tilde{d}_5,$$

где x_2, x_3, x_5 — коэффициенты разложения вектора c_1 по векторам a_2, a_3, a_5 .

2. $c = c_2$. Точка D_2 пересечения вектора c_2 с границей многогранника Φ лежит на грани $A_2 A_3 A'_1 A'_4$, на которой заканчиваются шесть векторов $a_2, a_3, a_6, -a_1, -a_4, -a_7$. Существуют четыре содержащих точку D_2 треугольника $A_2 A_3 A'_1$, $A_3 A'_1 A'_4$, $A_3 A'_1 A'_7$ и $A_3 A'_1 A_6$ с вершинами на концах указанных векторов. Этим треугольникам соответствуют следующие четыре оптимальных базиса d_m, d'_m, d''_m, d'''_m и оптимальные оценки $\hat{l}_2, \hat{l}'_2, \hat{l}''_2, \hat{l}'''_2$:

$$d_m = \{d_1, d_2, d_3\}, \quad \hat{l}_2 = x_1 \tilde{d}_1 + x_2 \tilde{d}_2 + x_3 \tilde{d}_3;$$

$$d'_m = \{d_1, d_3, d_4\}, \quad \hat{l}'_2 = x'_1 \tilde{d}_1 + x'_3 \tilde{d}_3 + x'_4 \tilde{d}_4;$$

$$d''_m = \{d_1, d_3, d_7\}, \quad \hat{l}''_2 = x''_1 \tilde{d}_1 + x''_3 \tilde{d}_3 + x''_7 \tilde{d}_7;$$

$$d'''_m = \{d_1, d_3, d_6\}, \quad \hat{l}'''_2 = x'''_1 \tilde{d}_1 + x'''_3 \tilde{d}_3 + x'''_6 \tilde{d}_6.$$

3. $c = c_3$. Соответствующая точка D_3 лежит на ребре $A'_3 A'_5$, на котором заканчиваются векторы $-a_3$ и $-a_5$. Оптимальными являются все базисы вида

$$d_m = \{d_3, d_5, d_i\}, \quad i \neq 3 \text{ или } 5,$$

которым соответствует оценка

$$\hat{l}_3 = x_3 \tilde{d}_3 + x_5 \tilde{d}_5.$$

4. $c = c_4$. Точка D_4 лежит на ребре $A'_1 A'_4$, на котором заканчиваются векторы $-a_1, -a_4, -a_7$. Имеются две группы оптимальных базисов,

$$d_m = \{d_1, d_4, d_i\}, \quad i \neq 1 \text{ или } 4, \text{ или } 7,$$

$$d'_m = \{d_1, d_7, d_i\}, \quad i \neq 1 \text{ или } 4, \text{ или } 7,$$

которым соответствуют оптимальные оценки

$$\hat{l}_4 = x_1 \tilde{d}_1 + x_4 \tilde{d}_4, \quad \hat{l}'_4 = x'_1 \tilde{d}_1 + x'_7 \tilde{d}_7.$$

5. $c = c_5$. Точка D_5 совпадает с вершиной A'_5 . Оптимальными являются, все базисы вида

$$d_m = \{d_5, d_i, d_j\}, \quad i \neq j, \quad i, j \neq 5.$$

которым соответствует оценка

$$\hat{l}_5 = x_5 \tilde{d}_5 = - \frac{|c_5|}{|a_5|} \tilde{d}_5.$$

Описанные выше геометрические методы могут быть распространены на случай, когда число n возможных измерений бесконечно. Рассмотрим, например, решение задачи при $m = 2$ и использовании линейной измеряемой функции вида (7.3.32)

$$\Psi(q, t) = q_1 \Psi_1(t) + q_2 \Psi_2(t). \quad (7.4.21)$$

Каждому времени t_i , лежащему на мерном интервале (7.3.34), в пространстве Q с координатами q_1, q_2 , соответствует вектор измерений

$$a_i = \{\Psi_1(t_i), \Psi_2(t_i)\}. \quad (7.4.22)$$

Концы всех возможных векторов a_i лежат на некотором отрезке кривой L , определяемом параметрическими уравнениями

$$q_1 = \Psi_1(t), \quad q_2 = \Psi_2(t), \quad t_n \leq t \leq t_k. \quad (7.4.23)$$

Аналогично концы векторов a_i лежат на отрезке кривой L' , уравнения которой имеют вид

$$q_1 = -\Psi_1(t), \quad q_2 = -\Psi_2(t), \quad t_n \leq t \leq t_k. \quad (7.4.24)$$

В результате получаем картину, изображенную на рис. 7.4.3. Как видно из рисунка, граница выпуклой фигуры Φ состоит из выпуклых частей кривых L и L' , а также из отрезков прямых, соединяющих концы этих кривых и охватывающих их вогнутые участки. В том случае, когда вектор c оцениваемого параметра пересекает границу фигуры Φ на ее криволинейной части или проходит через вершину этой фигуры, оптимальный измерительный базис состоит из соответствующего точке пересечения измерения, а также любого другого, линейно независимого с первым. Если вектор c пересекает границу фигуры Φ на некотором прямолинейном отрезке,

то оптимальный измерительный базис состоит из измерений, соответствующих концам этого отрезка.

Аналогичная картина получается при $m=3$. При этом возможны два случая. В первом из них параметрические уравнения кривых L и L' , на которых заканчиваются векторы $\pm a_i$, имеют вид

$$q_1 = \Psi_1(t), \quad q_2 = \Psi_2(t),$$

$$q_2 = \Psi_3(t), \quad t_n \leq t \leq t_k$$

и

$$q_1 = -\Psi_1(t), \quad q_2 = -\Psi_2(t),$$

$$q_2 = -\Psi_3(t), \quad t_n \leq t \leq t_k.$$

Граница выпуклой фигуры Φ представляет собой линейчатую поверхность, опирающуюся на эти кривые. Пример построения такой поверхности дан в § 7.6 (см. далее рис. 7.6.4).

Во втором случае концы векторов $\pm a_i$ образуют некоторые поверхности. Назовем их основными. Граница фигуры Φ включает выпуклые части основных поверхностей, а также линейчатые поверхности, охватывающие вогнутые части основных и соединяющие их границы. Соответствующий пример помещен в § 7.6 (см. далее рис. 7.6.2).

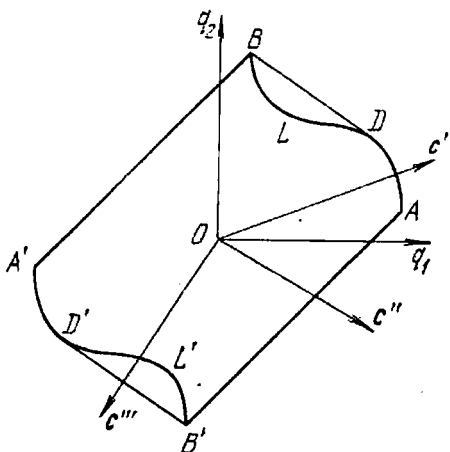


Рис. 7.4.3. Геометрическое определение оптимального измерительного базиса при $m=2$ и n бесконечном.

§ 7.5. Некоторые свойства оптимальных оценок

Из приведенных в предыдущем параграфе примеров видно, что не все имеющиеся измерения d_i ($i = 1, 2, \dots, n$) необходимы для построения различных оптимальных измерительных базисов, соответствующих отысканию оценки произвольного параметра l , определяемого линейной зависимостью вида (7.4.2). Как видно из рисунков 7.4.1—7.4.3, всегда существует некоторый минимально необходимый вектор измерений

$d_k = \{d_1, d_2, \dots, d_k\}$, $m \leq k \leq n$, из составляющих которого могут быть построены все оптимальные измерительные базисы $d_m = \{d_1, d_2, \dots, d_m\}$, соответствующие различным оцениваемым параметрам l . Для примера, изображенного на рис. 7.4.1, $d_k = \{d_1, d_2, d_3\}$, а для примера рис. 7.4.2 — $d_k = \{d_1, d_2, \dots, d_5\}$. Наконец, в примере, соответствующем рис. 7.4.3, в вектор d_k входят все измерения, для которых соответствующие векторы a_i заканчиваются на криволинейном отрезке AC , а также в точке B .

В общем случае вектор d_k представляет собой совокупность измерений, векторы которых заканчиваются в крайних точках выпуклой оболочки φ (см. § 1.13). При решении рассматриваемой задачи методом линейного программирования можно для построения вектора d_k воспользоваться результатами, приведенными в конце § 7.12.

В случае, когда

$$k < n, \quad (7.5.1)$$

имеются возможные измерения d_i ($i = k + 1, k + 2, \dots, n$), которые могут быть исключены из вектора d без ущерба для точности оценки любого параметра l по характеристикам (7.1.2) или (7.1.5). Как видно из рис. 7.4.1—7.4.3, могут быть исключены все измерения, векторы которых заканчиваются либо внутри выпуклой оболочки φ , либо внутри любой из оболочек φ_m , образующих границу фигуры φ .

Большой интерес представляет случай, когда

$$k = m. \quad (7.5.2)$$

При этом существует оптимальный измерительный базис

$$d_m = d_k, \quad (7.5.3)$$

общий для всех оцениваемых параметров l . Соответствующий этому базису алгоритм фильтрации, определяемый зависимостями (7.2.5) и (7.4.19), оптимален по критерию (7.1.7) для любого оцениваемого параметра l , т. е. является универсальным (см. § 3.7).

При выполнении условия (7.5.2) оболочка φ представляет собой выпуклый многогранник с $2m$ вершинами. В частности, при $m = 2$ она превращается в па-

параллелограмм, а при $m = 3$ в неправильный октаэдр. Эти фигуры изображены на рисунке 7.5.1. Из рисунка видно, что при этом существуют универсальные оптимальные измерительные базисы $d_m = \{d_1, d_2\}$ и $d_m = \{d_1, d_2, d_3\}$, обеспечивающие построение универсальных оптимальных алгоритмов фильтрации.

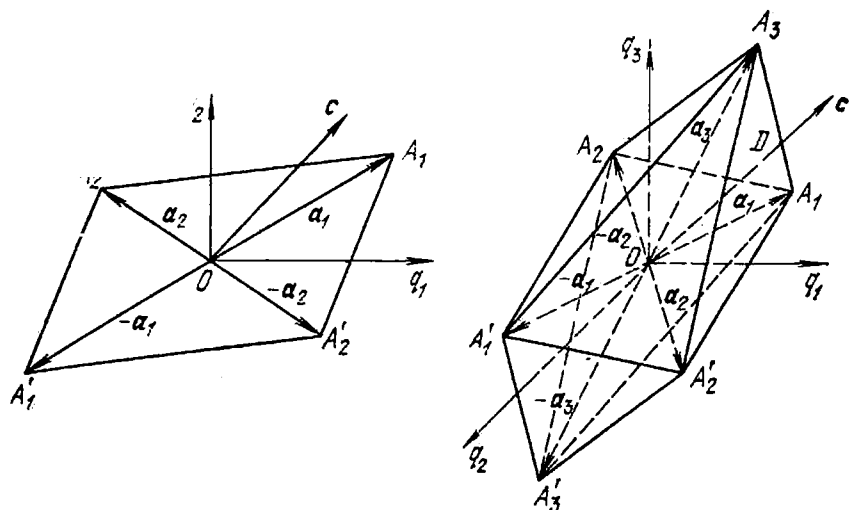


Рис. 7.5.1. Построение универсального измерительного базиса при $m = 2$ и $m = 3$.

Если условие (7.5.2) не выполняется, то универсальный оптимальный измерительный базис не существует. Если при этом число k конечно, то имеется некоторое конечное число N оптимальных базисов d_{mj} ($i = 1, 2, \dots, N$), соответствующих различным оцениваемым параметрам l . Множество всех возможных параметров l бесконечно. Поэтому каждому базису d_{mj} соответствует некоторое подмножество L_j параметров l , для которых данный базис является оптимальным. Очевидно, что среди этих подмножеств обязательно имеются непустые и бесконечные множества. Для заданного базиса $d_{mj} = \{d_1, d_2, \dots, d_m\}$ соответствующее подмножество L_j определяется следующим образом: — строятся векторы a_i измерений d_i ($i = 1, 2, \dots, m$), входящих в рассматриваемый базис;

— находятся все возможные множества Φ_m , лежащие на границе множества Φ и являющиеся выпуклыми

оболочками различных групп из m векторов, выбранных из совокупности векторов $\pm a_i$ ($i = 1, 2, \dots, m$);

— подмножество L_i определяется как совокупность всех оцениваемых параметров l , соответствующие которым векторы c (или их продолжения) пересекают по крайней мере одно из множеств Φ_m .

Так, например, в задаче, иллюстрируемой рис. 7.4.1, базис $d_m = \{d_1, d_2\}$ является оптимальным для всех параметров l , для которых соответствующие векторы c (или их продолжения) пересекают отрезки A_1A_2 и $A'_1A'_2$.

На рис. 7.4.2 базис $d_m = \{d_1, d_2, d_3\}$ является оптимальным для параметров l с векторами c , пересекающими треугольники $A_1A_2A'_3$, $A'_1A_2A_3$, $A'_1A'_2A_3$ и $A_1A'_2A'_3$.

В предыдущем параграфе было показано, что рассматриваемая задача оптимизации в ряде случаев может иметь несколько решений. В связи с этим известный интерес представляет следующая теорема.

Теорема. Если существует несколько различных линейных несмещенных оптимальных оценок одного и того же параметра l , то их средняя взвешенная также является несмещенной оптимальной оценкой этого параметра.

Предположим, что известны два линейных алгоритма фильтрации

$$\hat{l}' = X' \tilde{d} \quad \text{и} \quad \hat{l}'' = X'' \tilde{d}, \quad (7.5.4)$$

удовлетворяющие условиям несмещенности (7.2.4)

$$X'A = C, \quad X''A = C, \quad (7.5.5)$$

и являющиеся оптимальными по критерию (7.1.7).

Тогда, обозначая через x'_i и x''_i ($i = 1, 2, \dots, n$) элементы строк X' и X'' , можно записать, что

$$\sum_{i=1}^n |x'_i| = \sum_{i=1}^n |x''_i| = z_{\text{опт}}. \quad (7.5.6)$$

Обозначим через \hat{l} среднюю взвешенную оценок \hat{l}' и \hat{l}''

$$\hat{l} = \frac{p\hat{l}' + q\hat{l}''}{p + q}, \quad p \geq 0, \quad q \geq 0, \quad (7.5.7)$$

где p и q — произвольные неотрицательные числа.

Покажем сначала несмещенность оценки \hat{l} . Для этого, пользуясь выражениями (7.5.4), перепишем зависимость (7.5.7) в виде

$$\hat{l} = X\hat{d}, \quad X = \frac{pX' + qX''}{p + q}. \quad (7.5.8)$$

Отсюда, учитывая (7.5.5), получаем условие несмещенности

$$XA = \frac{pX'A + qX''A}{p + q} = C. \quad (7.5.9)$$

Обозначим теперь через x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) элементы строки X . Очевидно, что

$$x_i = \frac{px'_i + qx''_i}{p + q}. \quad (7.5.10)$$

Отсюда, пользуясь условиями (7.5.6), находим, что

$$x_i \leq \frac{p|x'_i| + q|x''_i|}{p + q}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (7.5.11)$$

$$\sum_{i=1}^n |x_i| \leq \frac{p \sum_{i=1}^n |x'_i| + q \sum_{i=1}^n |x''_i|}{p + q} = z_{\text{опт}}. \quad (7.5.12)$$

С другой стороны, из (7.1.6) и (7.1.7) следует, что

$$\sum_{i=1}^n |x_i| \geq z_{\text{опт}}. \quad (7.5.13)$$

Поэтому можно написать, что

$$\sum_{i=1}^n |x_i| = z_{\text{опт}}, \quad (7.5.14)$$

т. е. оценка \hat{l} является линейной несмещенной и оптимальной.

Приведенное доказательство может быть непосредственно распространено на случай среднего взвешенного от произвольного количества линейных несмещенных оптимальных оценок. При этом, если существует некоторое число k линейных несмещенных оптимальных оценок \hat{l}_i ($i = 1, 2, \dots, k$), то оптимальной является также любая

оценка вида

$$\hat{l} = \frac{\sum_{i=1}^k p_i l_i}{\sum_{i=1}^k p_i}, \quad p_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad (7.5.15)$$

где p_i — произвольные неотрицательные числа.

Следствием доказанной теоремы является то, что при наличии нескольких оптимальных алгоритмов знаки элементов x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) для них совпадают при одинаковых значениях индекса i . Иначе говоря,

$$\text{sign } x'_i = \text{sign } x''_i \quad \text{при} \quad x'_i \neq 0 \quad \text{и} \quad x''_i \neq 0. \quad (7.5.16)$$

Действительно, из (7.5.14) следует, что неравенства (7.5.11) обращаются в равенства. Поэтому

$$\frac{p |x'_i| + q |x''_i|}{p + q} = \left| \frac{px'_i + qx''_i}{p + q} \right|, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Отсюда, учитывая неотрицательность величин p и q , получаем зависимость (7.5.16).

Таким образом, если имеются по крайней мере две различные линейные несмещенные оптимальные оценки (7.5.4), то существует бесконечное множество таких оценок, определяемых выражением (7.5.7) при различных значениях отношения p/q .

Предположим, что различные оценки \hat{l}' и \hat{l}'' определяются при помощи соответствующих оптимальных измерительных базисов \tilde{d}'_m и \tilde{d}''_m и алгоритмов вида

$$\hat{l}' = X'_m \tilde{d}'_m, \quad \hat{l}'' = X''_m \tilde{d}''_m, \quad (7.5.17)$$

где X'_m и X''_m — матрицы-строки $1 \times m$.

Допустим, что обе строки X'_m и X''_m не содержат нулевых элементов. Как видно из приведенных в предыдущем параграфе примеров, это может иметь место в случае неоднозначности решения рассматриваемой задачи. В частности, при $m = 2$ в том случае, когда вектор c пересекает сторону выпуклого многоугольника Φ , на которой заканчивается более двух векторов $\pm a_i$. При $m = 3$ — тогда, когда вектор c пересекает грань много-

гранника Φ , на которой заканчивается более трех векторов $\pm a_i$.

Покажем, что если это условие выполняется, а числа p и $q \neq 0$, то определяемая по формуле (7.5.7) оптимальная оценка использует избыточную совокупность d_k измерений. Иначе говоря,

$$\left. \begin{aligned} \hat{l} &= X_k \tilde{d}_k, \quad X_k = (x_1 x_2 \dots x_k), \quad x_i \neq 0, \\ i &= 1, 2, \dots, k, \quad m < k \leq n. \end{aligned} \right\} \quad (7.5.18)$$

Для доказательства заметим, что базисы d'_m и d''_m не могут совпадать, так как для данного базиса соответствующий алгоритм фильтрации однозначно определяется выражением (7.3.30). Отсюда непосредственно следует, что $k > m$. Кроме того, пользуясь зависимостями (7.5.7) и (7.5.16), находим что все $x_i \neq 0$ ($i = 1, 2, \dots, k$).

Таким образом, при условии неоднозначности решения рассматриваемой задачи могут существовать оптимальные линейные несмещенные алгоритмы фильтрации, использующие не только достаточные, но и избыточные совокупности измерений. При этом они могут не быть алгоритмами фильтрации по методу наименьших квадратов при заданной матрице K . Иначе говоря, получаемые при помощи выражения (7.5.7) алгоритмы фильтрации удовлетворяют условиям теоремы 1 § 7.2, но не обязательно являются решениями задачи, рассматриваемой в теореме 2 этого параграфа.

§ 7.6. Примеры минимаксных оценок

Описанный в § 7.3 метод перехода к задаче линейного программирования открывает возможность построения оптимальных минимаксных алгоритмов фильтрации, а также определения критериев точности получаемых результатов для широкого класса прикладных задач. Для этой цели могут быть использованы хорошо разработанные методы численного решения задач линейного программирования на быстродействующих вычислительных машинах [27, 53]. Некоторым недостатком этих методов является отсутствие наглядности. С другой стороны, описанная в § 7.4 геометрическая интерпретация

позволяет в ряде случаев получать простые наглядные решения. Рассмотрим некоторые примеры построения таких решений.

1. Задача определения движения локомотива. В § 5.10 дано решение этой задачи по методу наименьших квадратов. При этом предполагается, что локомотив движется по рельсам равномерно и пройденный им путь s определяется линейной зависимостью (5.10.3)

$$s = a + vt, \quad (7.6.1)$$

где a — значение пути в начальный момент, v — скорость, t — время.

Рассмотрим задачу отыскания минимаксной оценки при этом предположении. Вектор состояния системы $q = \{a, v\}$, а размерность задачи $m = 2$. Допустим, что на некотором замкнутом интервале времени

$$t_n \leq t \leq t_k \quad (7.6.2)$$

возможны измерения пути s . Тогда зависимость (7.6.1) представляет собой линейную измеряемую функцию вида (7.4.21)

$$\left. \begin{aligned} s(q, t) &= a\Psi_1(t) + v\Psi_2(t), \\ \Psi_1(t) &= 1, \quad \Psi_2(t) = t. \end{aligned} \right\} \quad (7.6.3)$$

В двумерном пространстве Q с координатами a, v концы векторов $\pm a_i$ возможных измерений лежат на отрезках прямых A_1A_2 и $A'_1A'_2$, определяемых уравнениями (7.4.23) и (7.4.24)

$$a = \pm 1, \quad v = \pm t, \quad t_n \leq t \leq t_k.$$

Соединяя прямолинейными отрезками точки A_1 и A'_2 , а также A_2 и A'_1 , получаем выпуклую фигуру Φ , содержащую все возможные векторы $\pm a_i$ и представляющую собой параллелограмм (рис. 7.6.1). Отсюда следует существование универсального оптимального измерительного базиса $d_m = \{d_n, d_k\}$, где d_n и d_k — измерения пути s на концах интервала (7.6.2). Этому базису соответствует универсальный оптимальный алгоритм фильтрации, получаемый путем решения системы уравнений

$$\tilde{d}_n = \hat{a} + \hat{v}t_n, \quad \tilde{d}_k = \hat{a} + \hat{v}t_k,$$

из которой следует, что

$$\bar{a} = \frac{t_k}{t_k - t_n} \bar{d}_n - \frac{t_n}{t_k - t_n} \bar{d}_k, \quad \bar{v} = -\frac{1}{t_k - t_n} \bar{d}_n + \frac{1}{t_k - t_n} \bar{d}_k. \quad (7.6.4)$$

В том случае, когда вектор c , соответствующий рассматриваемому оцениваемому параметру l , пересекает границу параллелограмма Φ в точке D , расположенной на одной из сторон $A_1 A_2$ или $A_2 A_1$ (вектор c'' и точка D'' на рис. 7.6.1), оптимальный алгоритм (7.6.4) является единственным решением рассматриваемой задачи. Если точка D лежит на стороне $A_1 A_2$ или $A_1 A_2'$ (точка D' на рис. 7.6.1), то помимо указанного универсального оптимального измерительного базиса существует бесконечное число оптимальных измерительных базисов $\bar{d}'_m = \{d_1, d_2\}$, где d_1 и d_2 — измерения пути в некоторые моменты времени t_1 и t_2 , удовлетворяющие условиям

$$t_n \leq t_1 \leq t' \leq t_2 \leq t_k, \\ t' = v_D. \quad (7.6.5)$$

Здесь v_D — ордината точки D или точки, симметричной ей относительно начала координат. При этом, в частности, времена t_1 и t_2 могут слиться в одно, т. е. можно ограничиться одним измерением в момент t' .

Если в качестве оцениваемого параметра l принята скорость v , то вектор c совпадает с осью ординат и имеет место первый из рассмотренных случаев. Если в качестве параметра l принято положение локомотива

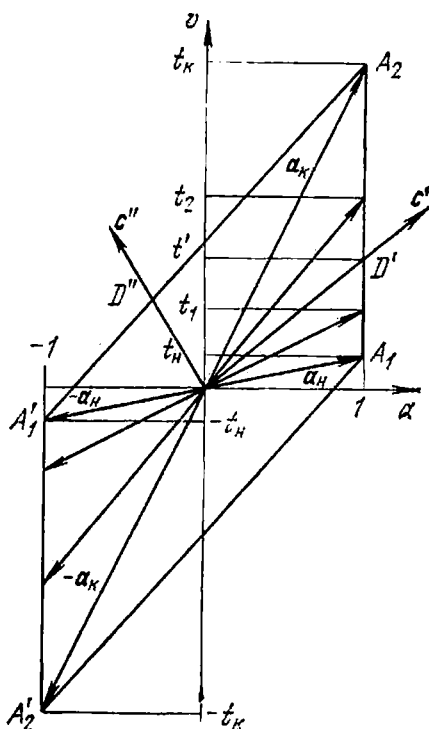


Рис. 7.6.1. Построение оптимального измерительного базиса в задаче определения движения локомотива.

в заданный момент t' , т. е. $l = a + vt'$, то при t' , лежащем на интервале (7.6.2), имеет место второй случай, а при t' , находящемся вне этого интервала, — первый случай.

Из выражений (7.3.1) и (7.6.4) следует, что при $l = v z = 2/T$, где $T = t_k - t_n$ — длительность мерного интервала. С другой стороны, пользуясь зависимостью (5.10.22), легко показать, что при фильтрации по методу наименьших квадратов с матрицей $K = I$ и проведении измерений через равные промежутки времени, $\lim_{n \rightarrow \infty} z = 3/T$. Таким образом, при оптимизации по критерию $\min z$ увеличение числа используемых измерений приводит к ухудшению точности решения задачи.

2. Определение линейной функции двух аргументов. Ставится задача определения линейной функции y от двух аргументов t и u

$$y = at + bu + e, \quad (7.6.6)$$

где a, b, e — отыскиваемые коэффициенты, являющиеся составляющими вектора состояния

$$q = \{a, b, e\}. \quad (7.6.7)$$

Для отыскания оценки \hat{q} могут быть использованы произвольные измерения вида

$$d_i = at_i + bu_i + e, \quad (7.6.8)$$

при условии, что соответствующие значения t_i и u_i лежат на замкнутых интервалах

$$t_n \leq t_i \leq t_k, \quad u_n \leq u_i \leq u_k. \quad (7.6.9)$$

Путем соответствующего выбора начал отсчета аргументов t и u можно всегда добиться симметричности интервалов (7.6.9). При этом

$$t_n = -\tau, \quad t_k = \tau, \quad u_n = -\mu, \quad u_k = \mu, \quad (7.6.10)$$

где τ и μ — заданные величины.

Рассмотрим трехмерное пространство Q с координатами a, b, e . В этом пространстве каждому измерению (7.6.8) соответствует вектор

$$a_i = \{t_i, u_i, 1\}. \quad (7.6.11)$$

Концы всех возможных векторов a_i , удовлетворяющих условиям (7.6.9) и (7.6.10), лежат внутри или на

границе прямоугольника $A_1A_2A_3A_4$, вершины которого имеют координаты $a = \pm\tau$, $b = \pm\mu$, $e = 1$. Аналогично концы векторов $-a_i$ принадлежат прямоугольнику $A'_1A'_2A'_3A'_4$, который симметричен фигуре $A_1A_2A_3A_4$ относительно начала координат (рис. 7.6.2). Отсюда следует, что выпуклая оболочка Φ представляет собой параллелепипед $A_1A_2A_3A_4A'_1A'_2A'_3A'_4$. Измерения d_i ($i = 1, 2, 3, 4$), концы соответствующих векторов $\pm a_i$ за на вершинах параллелепипеда Φ , образуют

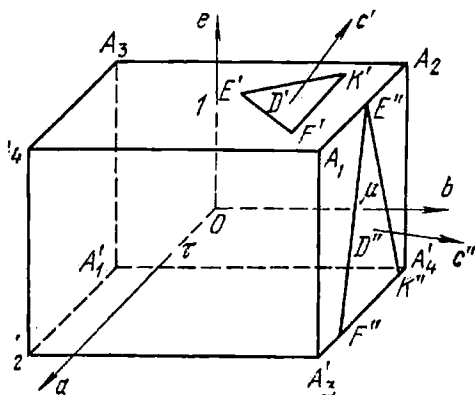


рис. 7.6.2. Построение оптимальных измерительных базисов в задаче определения линейной функции двух аргументов.

минимально необходимый вектор $d_k = \{d_1, d_2, d_3, d_4\}$, в котором

$$\left. \begin{aligned} d_1 &= a\tau + b\mu + e, & d_2 &= -a\tau + b\mu + e, \\ d_3 &= -a\tau - b\mu + e, & d_4 &= a\tau - b\mu + e. \end{aligned} \right\} (7.6.12)$$

Таким образом, в рассматриваемом случае $k = 4$, $n = 3$, т. е. условие (7.5.2) не выполняется. Поэтому в данной задаче не может быть определен универсальный оптимальный измерительный базис. Выбор оптимального базиса зависит от оцениваемого параметра l . Всего из составляющих вектора d_k , определяемых выражениями (7.6.12), может быть составлено четыре различных измерительных базиса d_m , соответствующих возможным сочетаниям из четырех величин d_1, d_2, d_3, d_4 по три. Совершенство этих базисов охватывает решение рассматриваемой задачи оптимизации для всех возможных оцениваемых параметров l . Пользуясь рис. 7.6.2, можно для

каждого базиса d_m определить множество L соответствующих параметров l . Так, например, для базиса $d_m = \{d_1, d_2, d_3\}$ множество L составляют все параметры l , для которых соответствующие векторы c пересекают один из треугольников $A_1A_2A_3$, $A'_1A_2A_3$, $A'_1A'_2A_3$, $A_1A'_2A'_3$, $A_1A_2A'_3$, $A'_1A'_2A'_3$.

Любой из указанных выше базисов, образованных составляющими вектора $\{d_1, d_2, d_3, d_4\}$, является оптимальным при одновременной оценке всех трех величин a, b, e . Так, например, при $d_m = \{d_1, d_2, d_3\}$ получаются следующие оптимальные оценки:

$$\hat{a} = \frac{\bar{d}_1 - \bar{d}_2}{2\tau}, \quad \hat{b} = \frac{\bar{d}_2 - \bar{d}_3}{2\mu}, \quad \hat{e} = \frac{\bar{d}_1 + \bar{d}_3}{2}. \quad (7.6.13)$$

Отсюда, полагая, что погрешности измерений удовлетворяют условиям (7.1.1), и пользуясь зависимостью (7.1.2), находим оптимальные значения максимальных ошибок $\chi_{\max}(\hat{a})$, $\chi_{\max}(\hat{b})$, $\chi_{\max}(\hat{e})$ соответствующих оценок

$$\chi_{\max}(\hat{a}) = \frac{\alpha}{\tau}, \quad \chi_{\max}(\hat{b}) = \frac{\alpha}{\mu}, \quad \chi_{\max}(\hat{e}) = \alpha.$$

Заметим, что эти же выражения могут быть получены непосредственно из зависимостей (7.1.2), (7.1.6) и (7.4.20) без построения конкретных алгоритмов (7.6.13). Для этого достаточно воспользоваться тем, что соответствующие рассматриваемым параметрам векторы c и γ_{\max} имеют вид

$$c(a) = \{1, 0, 0\}, \quad c(b) = \{0, 1, 0\}, \quad c(e) = \{0, 0, 1\}, \\ \gamma_{\max}(a) = \{\tau, 0, 0\}, \quad \gamma_{\max}(b) = \{0, \mu, 0\}, \quad \gamma_{\max}(e) = \{0, 0, 1\}.$$

Помимо оптимальных измерительных базисов, построенных из составляющих вектора $\{d_1, d_2, d_3, d_4\}$, для любого оцениваемого параметра l может быть найдено бесконечное число других оптимальных базисов. Для этого достаточно строить треугольники с вершинами на гранях $A_1A_2A_3A_4$ или $A'_1A'_2A'_3A'_4$, включающие точку D пересечения вектора c с границей параллелепипеда Φ . Измерения d_i ($i = 1, 2, 3$), векторы которых $\pm a_i$ заканчиваются на вершинах этих треугольников, образуют соответствующие оптимальные базисы. На рисунке 7.6.2 даны примеры построения таких треугольников для век-

торов c' и c'' (треугольники $E'F'K'$ и $E''F''K''$ соответственно).

3. Определение формы орбиты спутника Земли по измерениям высоты полета. Рассмотрим задачу определения формы орбиты спутника при следующих допущениях:

— измеряется высота h полета спутника S над поверхностью Земли (рис. 7.6.3);

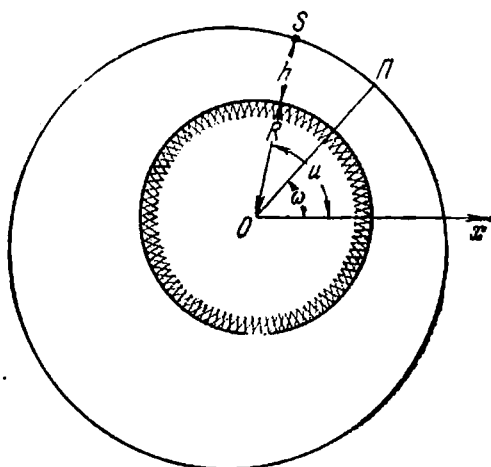


Рис. 7.6.3. Орбита спутника Земли.

- орбита спутника близка к круговой;
- Земля является сферой радиуса R ;
- из всех действующих на спутник сил учитывается лишь притяжение Земли;
- ускорение притяжения Земли направлено к ее центру и подчиняется закону Ньютона.

При этих предположениях можно вместо измерений высоты h рассматривать измерения расстояния до центра Земли $r = R + h$.

Положение спутника на орбите будем характеризовать его угловым расстоянием u от некоторого заданного направления Ox (O — центр Земли). Тогда между величинами r и u существует известная зависимость [49]

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(u - \omega)}, \quad (7.6.14)$$

где a — большая полуось орбиты, e — ее эксцентриситет, ω — угловое расстояние перигея орбиты от оси Ox .

Для орбит, близких к круговой, величина e мала. Отсюда, разлагая выражение (7.6.14) в ряд по степеням e и ограничиваясь первыми двумя членами, получим линейную математическую модель задачи

$$r = a + b \cos u + f \sin u, \quad (7.6.15)$$

где

$$b = -ae \cos \omega, \quad f = -ae \sin \omega. \quad (7.6.16)$$

При этом вектор состояния системы $q = \{a, b, f\}$. Совокупность возможных измерений d_i определяется выражением

$$d_i = r(u_i) = a + b \cos u_i + f \sin u_i, \quad 0 \leq u_i < 2\pi, \quad (7.6.17)$$

где u_i — угловая координата точки, в которой проводится измерение высоты полета.

В пространстве Q с координатами a, b, f измерению d_i соответствует вектор $a_i = \{1, \cos u_i, \sin u_i\}$. Концы всех векторов a_i лежат на окружности

$$a = 1, \quad b^2 + f^2 = 1,$$

а концы векторов $-a_i$ — на окружности

$$a = -1, \quad b^2 + f^2 = 1.$$

Отсюда следует, что выпуклая фигура Φ представляет собой круговой цилиндр единичного радиуса, ось которого совпадает с осью координат a , а основания лежат в плоскостях $a = \pm 1$ (рис. 7.6.4). В зависимости от расположения вектора c оцениваемого параметра l могут иметь место следующие случаи:

а) Вектор c пересекает границу цилиндра Φ в точке D , лежащей на одном из его оснований (вектор c' и точка D' на рисунке). Тогда выпуклая фигура Φ_m представляет собой произвольный треугольник $A_1A_2A_3$, имеющий вершины на границе соответствующего основания цилиндра Φ и заключающий точку D . Обозначим через O' центр рассматриваемого основания цилиндра Φ , а через u_1, u_2, u_3 — углы наклона отрезков $O'A_1, O'A_2, O'A_3$ к плоскости aOb . В том случае, когда точка D находится в плоскости $a = 1$, оптимальный измерительный базис

$d_m = \{d_1, d_2, d_3\}$ включает измерения

$$d_i = r(u_i) = a + b \cos u_i + f \sin u_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Если точка D находится в плоскости $a = -1$, то

$$d_i = r(u_i \pm \pi) = a + b \cos(u_i \pm \pi) + f \sin(u_i \pm \pi),$$

где знак \pm выбирается из условия

$$0 \leq u_i \pm \pi < 2\pi. \quad (7.6.18)$$

В частном случае две из вершин треугольника $A_1 A_2 A_3$ и точка D могут находиться на одном диаметре основания цилиндра ϕ . При этом оптимальный алгоритм определения оценки соответствующего параметра l использует лишь два измерения r .

Если точка D лежит на границе основания цилиндра ϕ (точка D'' на рисунке), то одна из вершин треугольника ϕ_m должна совпадать с этой точкой. В этом случае оптимальный алгоритм определения оценки l использует лишь одно измерение.

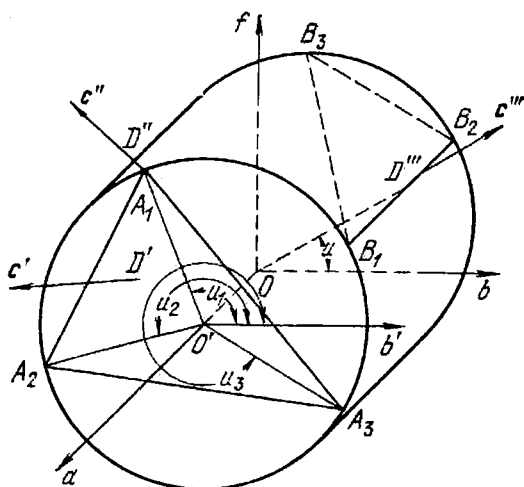


Рис. 7.6.4. Построение оптимального измерительного базиса в задаче определения формы орбиты спутника Земли.

б) Вектор c пересекает в точке D боковую поверхность цилиндра ϕ (вектор c''' и точка D''' на рисунке). При этом фигура ϕ_m представляет собой треугольник $B_1 B_2 B_3$ с вершинами B_1 и B_2 , на концах проходящей через точку D образующей цилиндра ϕ и вершиной B_3 ,

лежащей в произвольной точке границы одного из оснований этого цилиндра (не совпадающей с точками B_1 и B_2). Оптимальный измерительный базис $d_m = \{d_1, d_2, d_3\}$ включает измерения

$$\begin{aligned}d_1 &= r(u) = a + b \cos u + f \sin u, \\d_2 &= a + b \cos(u \pm \pi) + f \sin(u \pm \pi).\end{aligned}$$

Здесь u — угол между плоскостями B_1OB_2 и aOb , а знак \pm выбирается из условия (7.6.18). В качестве d_3 может быть взято произвольное измерение, не совпадающее с d_1 и d_2 . Оптимальный алгоритм оценки соответствующего параметра l определяется однозначно и использует лишь измерения d_1 и d_2 .

В качестве примера рассмотрим случаи использования в качестве оцениваемых параметров величин a , b и f . Соответствующие этим параметрам векторы c и γ_{\max} :

$$\left. \begin{aligned}c(a) &= \gamma_{\max}(a) = \{1, 0, 0\}, \\c(b) &= \gamma_{\max}(b) = \{0, 1, 0\}, \\c(f) &= \gamma_{\max}(f) = \{0, 0, 1\}.\end{aligned} \right\} \quad (7.6.19)$$

Отсюда, пользуясь зависимостями (7.1.2), (7.1.6) и (7.4.20), находим, что при условии (7.1.4) максимальные ошибки оптимальных оценок рассматриваемых параметров $\chi_{\max}(\hat{a}) = \chi_{\max}(\hat{b}) = \chi_{\max}(\hat{f}) = \alpha$.

Из (7.6.19) следует, что вектор $c(a)$ пересекает основание цилиндра ϕ , а векторы $c(b)$ и $c(f)$ — боковую поверхность этого цилиндра. Отсюда, пользуясь приведенными выше результатами, находим измерения $d_i = r(u_i)$, $i = 1, 2, 3$, входящие в соответствующие оптимальные базисы $d_m = \{d_1, d_2, d_3\}$:

— при $l = a$ в качестве u_i могут быть использованы произвольные углы, удовлетворяющие условиям

$$0 \leq u_1 \leq u_2 \leq u_3 < 2\pi, \quad u_2 - u_1 \leq \pi, \quad u_3 - u_1 \geq \pi,$$

— при $l = b$, $u_1 = 0$, $u_2 = \pi$, u_3 произвольно;

— при $l = f$, $u_1 = \frac{\pi}{2}$, $u_2 = \frac{3\pi}{2}$, u_3 произвольно.

Отсюда следует, что оптимальные базисы для нахождения оценок \hat{b} и \hat{f} различны. Однако любой из них является оптимальным для оценки \hat{a} .

§ 7.7. Разложение пространства параметров состояния системы

Из приведенных выше примеров видно, что метод геометрической интерпретации позволяет в ряде случаев получать простые наглядные решения рассматриваемой задачи, в частности, тогда, когда размерность m исследуемой системы невелика. При изучении системы с большой размерностью может быть в ряде случаев с успехом использован предложенный В. Н. Почукаевым метод разложения пространства Q параметров состояния системы [3].

Суть этого метода заключается в следующем. Предположим, что матрица A , характеризующая линейную или линеаризованную зависимость (7.2.1) между векторами $d = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ и $q = \{q_1, q_2, \dots, q_m\}$, представляет собой совокупность расположенных по диагонали матриц

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_\beta \end{pmatrix}, \quad (7.7.1)$$

где A_α ($\alpha = 1, 2, \dots, \beta$) — заданные матрицы $n_\alpha \times m_\alpha$. Очевидно, что

$$\sum_{\alpha=1}^{\beta} n_\alpha = n, \quad \sum_{\alpha=1}^{\beta} m_\alpha = m. \quad (7.7.2)$$

При этом совокупность индексов $i = 1, 2, \dots, n$ и $j = 1, 2, \dots, m$, определяющих элементы A_{ij} матрицы A , разбиваются на β групп, каждая из которых содержит n_α индексов строк и m_α индексов столбцов. Соответственно этому разбиению можно представить векторы d и q , а также строки C и X , в виде

$$\left. \begin{aligned} d &= \{d_1, d_2, \dots, d_\beta\}, & q &= \{q_1, q_2, \dots, q_\beta\}, \\ X &= (X_1 X_2 \dots X_\beta), & C &= (C_1 C_2 \dots C_\beta), \end{aligned} \right\} \quad (7.7.3)$$

где d_α и X_α ($\alpha = 1, 2, \dots, \beta$) — векторы и строки размерности n_α , а q и C — векторы и строки размерностей m_α .

Из зависимостей (7.7.1) и (7.7.3) следует, что условие несмещенности (7.2.4) распадается на β условий вида

$$X_{\alpha} A_{\alpha} = C_{\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, \beta. \quad (7.7.4)$$

Отсюда находим, что задача отыскания минимума величины $z = \sum_{i=1}^n |x_i|$ при условии (7.2.4) распадается на β задач отыскания минимумов величин

$$z_{\alpha} = \sum_{i=1}^{n_{\alpha}} |x_i| \quad (7.7.5)$$

при условиях (7.7.4).

Для решения каждой из этих задач может быть использована геометрическая интерпретация в пространстве Q_{α} , образованном составляющими вектора q_{α} . В результате определяется β оптимальных измерительных базисов $d_{m_{\alpha}}$ ($\alpha = 1, 2, \dots, \beta$). Их совокупность образует суммарный оптимальный базис

$$d_m = \{d_{m_1}, d_{m_2}, \dots, d_{m_{\beta}}\}. \quad (7.7.6)$$

Аналогичные результаты могут быть получены тогда, когда для определения вектора q используется линейная измеряемая функция (7.3.33). При этом разложение пространства Q имеет место в том случае, когда определяемый условием (7.3.34) мерный интервал T может быть представлен в виде совокупности интервалов T_{α} ($\alpha = 1, 2, \dots, \beta$), а строка функций $\Psi(t) = (\Psi_1 \Psi_2 \dots \Psi_m)$ — в виде совокупности β строк $\Psi(t) = (\Psi_1 \Psi_2 \dots \Psi_{\beta})$, каждая из которых включает m_{α} скалярных функций ($\alpha = 1, 2, \dots, \beta$) и удовлетворяет условию

$$\Psi_{\alpha}(t) \equiv 0 \quad \text{при } t \in T_{\gamma}, \quad \gamma \neq \alpha. \quad (7.7.7)$$

Условия (7.7.1) или (7.7.7), обеспечивающие возможность разложения пространства Q , могут не выполняться непосредственно. Однако в ряде случаев удастся отыскать такое взаимно однозначное преобразование этого пространства,

$$q = \Phi(q'), \quad (7.7.8)$$

при котором для нового вектора $q' = \{q'_1, q'_2, \dots, q'_m\}$ одно из этих условий выполняется и разложение пространства Q оказывается возможным.

§ 7.8. Однозначные и неоднозначные решения

Как это видно из приведенных выше примеров, при использовании геометрической интерпретации обычно сравнительно просто исследуется вопрос об однозначности получаемых оптимальных решений, а при наличии неоднозначности определяются все возможные оптимальные измерительные базисы и алгоритмы фильтрации.

В настоящем параграфе мы рассмотрим способы исследования вопросов однозначности или неоднозначности решения при использовании метода, основанного на сведении к задаче линейного программирования.

При решении задачи линейного программирования симплексным методом выражение (7.3.3) для минимизируемой величины z и налагаемые на переменные u_i ($i = 1, 2, \dots, N = 2n$) ограничения (7.3.4), (7.3.5) в конечном итоге преобразовываются к виду (7.3.17) — (7.3.19) при условиях (7.3.20).

Покажем, что результаты этого преобразования могут быть использованы для исследования вопросов однозначности или неоднозначности. При этом возможны следующие случаи:

1. Вместо условий (7.3.20) имеют место неравенства

$$\left. \begin{aligned} \beta_j &> 0, & j &= 1, 2, \dots, m, \\ \gamma_i &> 0, & i &= m+1, m+2, \dots, N. \end{aligned} \right\} \quad (7.8.1)$$

При этом рассматриваемая задача имеет единственное решение. Действительно, из зависимостей (7.3.17) — (7.3.19) и (7.8.1) следует, что минимальное значение $z = M$ достигается лишь при

$$\left. \begin{aligned} u_j &= \beta_j > 0, & j &= 1, 2, \dots, m, \\ u_i &= 0, & i &= m+1, m+2, \dots, N. \end{aligned} \right\} \quad (7.8.2)$$

Отсюда, пользуясь (7.3.11) и (7.3.14), находим, что существует единственная строка $X = (x_1 x_2 \dots x_n)$, определяющая оптимальный алгоритм фильтрации (7.2.3) и содержащая точно m не равных нулю элементов x_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Этой строке соответствует единственный оптимальный измерительный базис d_m .

2. Условия (7.3.20) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \beta_j &> 0, & j &= 1, 2, \dots, k, \\ \beta_j &= 0, & j &= k+1, k+2, \dots, m; k < m, \\ \gamma_i &> 0, & i &= m+1, m+2, \dots, N. \end{aligned} \right\} \quad (7.8.3)$$

Из зависимостей (7.3.17) — (7.3.19) и (7.8.3) находим, что задача отыскания минимума z имеет единственное решение:

$$\left. \begin{aligned} u_j &= \beta_j > 0, & j &= 1, 2, \dots, k, \\ u_i &= 0, & i &= k+1, k+2, \dots, N. \end{aligned} \right\} \quad (7.8.4)$$

Далее, учитывая (7.3.11) и (7.3.14), получаем, что существует единственная строка $X = (x_1, x_2, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$, определяющая оптимальный алгоритм фильтрации

$$\hat{l} = X\tilde{d} = \sum_{i=1}^k x_i \tilde{d}_i. \quad (7.8.5)$$

При этом условие несмещенности (7.4.3) принимает вид

$$c = \sum_{i=1}^k x_i a_i, \quad (7.8.6)$$

где c — вектор оцениваемого параметра l , а a_i ($i = 1, 2, \dots, k$) — векторы измерений d_i . Таким образом, вектор c принадлежит к линейному пространству, образованному векторами a_i . Отсюда следует, что при использовании любого достаточного измерительного базиса вида

$$d_m = \{d_1, d_2, \dots, d_k, d_{k+1}, \dots, d_m\}, \quad (7.8.7)$$

получается оптимальный алгоритм (7.8.5).

На измерения $d_{k+1}, d_{k+2}, \dots, d_m$, входящие в базис d_m , налагаются следующие условия:

— они должны принадлежать имеющейся совокупности измерений d_1, d_2, \dots, d_n ;

— соответствующие им векторы a_j ($j = k+1, k+2, \dots, m$) должны быть линейно независимы между собой, а так же с векторами a_i ($i = 1, 2, \dots, k$).

Если этим условиям удовлетворяет несколько групп измерений, то существует несколько оптимальных изме-

рительных базисов d_m . Однако все они приводят к одному и тому же алгоритму фильтрации (7.8.5).

3. Условие $\gamma_i > 0$ не выполняется для всех $i = m + 1, m + 2, \dots, N$. Предположим, для простоты, что имеется только один индекс $i = m + s$, для которого

$$\gamma_{m+s} = 0. \quad (7.8.8)$$

В этом случае помимо оптимального решения (7.3.22), минимальное значение $z = M$ достигается при

$$u_{m+s} > 0, \quad u_i = 0, \quad (7.8.9)$$

$$i = m + 1, \dots, m + s - 1, m + s + 1, \dots, N.$$

При этом необходимо проверить выполнение условий (7.3.18) и (7.3.19). Предположим, что имеется по крайней мере один индекс $r \leq m$, для которого

$$\alpha_{rm+s} < 0, \quad \beta_r = 0. \quad (7.8.10)$$

Тогда из (7.8.9) следует, что $u_r = \alpha_{rm+s} u_{m+s} < 0$, т. е. условие (7.3.18) не выполняется и существует лишь единственное решение (7.3.22).

Если зависимости (7.8.10) не выполняются ни для одного из индексов $r = 1, 2, \dots, m$, то, на первый взгляд, возможны следующие два случая:

$$\text{а) } \alpha_{im+s} \geq 0 \quad \text{при } i = 1, 2, \dots, m; \quad (7.8.11)$$

б) имеется некоторое число индексов v , для которых

$$\alpha_{vm+s} < 0, \quad \beta_v > 0 \quad \text{при } 1 \leq v \leq m. \quad (7.8.12)$$

Покажем, что первый из этих случаев в действительности не может иметь места. Это следует из того, что в соответствии с зависимостями (7.3.17)–(7.3.19), (7.8.8) и (7.8.11) оптимальным является любое решение вида

$$u_i = \begin{cases} K & \text{при } i = m + s, \\ 0 & \text{при } i = m + 1, \dots, m + s - 1, \\ & m + s + 1, \dots, N, \\ \alpha_{im+s}K + \beta_i & \text{при } i = 1, 2, \dots, m, \end{cases} \quad (7.8.13)$$

где $K > 0$ — произвольное неотрицательное число.

В частности, можно принять $K > M$. Но тогда из (7.3.3) следует $z > M$, что противоречит условию опти-

мальности $z = M$. Таким образом, остается случай одновременного выполнения условий (7.8.8) и (7.8.12). При этом среди всех индексов v можно отыскать такой $v = r$, для которого отношение $\beta_v / |\alpha_{vm+s}|$ достигает своего абсолютного минимума. Введем обозначение

$$\mu = \frac{\beta_r}{|\alpha_{rm+s}|} \leq \frac{\beta_v}{|\alpha_{vm+s}|}.$$

Тогда решение вида (7.8.13) удовлетворяет условиям (7.3.18), (7.3.19) и становится возможным при

$$0 \leq K \leq \mu. \quad (7.8.14)$$

При $K = 0$ получаем оптимальное решение (7.3.22), которому соответствует оптимальный измерительный базис d_m . При $K = \mu$ получаем другое оптимальное решение, в котором

$$u_i = 0 \quad \text{при} \quad i = r, m+1, m+2, \dots, m+s-1, \\ m+s+1, \dots, N. \quad (7.8.15)$$

Оно содержит не более m не равных нулю величин u_i , и ему соответствует второй оптимальный измерительный базис d'_m .

Таким образом, при одновременном выполнении условий (7.8.8) и (7.8.12) имеются два решения рассматриваемой задачи и два соответствующих оптимальных измерительных базиса. Из этих решений, пользуясь выражениями (7.5.7), можно получить бесконечное множество оптимальных решений вида (7.8.13) при условии (7.8.14).

Аналогично можно провести исследование задачи в том случае, когда равенство (7.8.8) выполняется при нескольких различных значениях s . При этом следует рассматривать каждый индекс s в отдельности.

§ 7.9. Выбор оптимальной стратегии

Рассмотрим задачу выбора оптимальной стратегии определения состояния системы в постановке, аналогично той, которая была использована в § 5.4 применительно к методу наименьших квадратов. При этом мы будем исходить из следующих предположений:

1. Вектор $q_0 = \{q_1, q_2, \dots, q_m\}$ состояния системы может быть разбит на две части $q_0 = \{q_1, q_2\}$, где $q_1 = \{q_1, q_2, \dots, q_x\}$ — совокупность параметров состояния, о которых нет априорных сведений, а $q_2 = \{q_{x+1}, q_{x+2}, \dots, q_m\}$ — совокупность параметров, для которой задано априорное значение $q_2 = \tilde{q}_2$.

2. Заданы вектор апостериорных измерений $d = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ и оцениваемый параметр l , связанные с вектором q линейной или линеаризованной моделью (7.2.1).

3. Ошибки измеренных значений \tilde{q}_2 и \tilde{d} удовлетворяют условиям (3.5.4) или (3.5.14) при $k = 1$. Соответственно этому в качестве критерия оптимальности используется либо достижение минимума максимальной ошибки χ_{\max} получаемой оценки l параметра l , либо минимума максимальной дисперсии D_{\max} этой оценки.

4. Используется линейный алгоритм фильтрации (7.2.3), удовлетворяющий условию несмещенности (7.2.4).

При этих предположениях требуется:

1. Среди составляющих вектора q_0 выбрать часть, образующую вектор определяемых параметров

$$q = \{q_1, q_2, \dots, q_\mu\} \quad (x \leq \mu \leq m),$$

значения которых находятся в процессе решения задачи. При этом составляющие вектора q_1 полностью включаются в q . Величины составляющих вектора q_2 , не вошедших в q , принимаются равными их априорным значениям. Такое разбиение вектора q_0 определяет используемую математическую модель рассматриваемой системы.

2. Из имеющихся исходных данных \tilde{q}_2 и \tilde{d} сформировать используемый вектор измерений, т. е. решить задачу выбора оптимального состава измерений.

3. Построить оптимальный алгоритм фильтрации.

Таким образом, мы имеем задачу полного выбора оптимальной стратегии определения состояния рассматриваемой системы (см. § 3.6). Как было показано в § 5.4, в классической постановке метода наименьших квадратов подобная задача приводит к тривиальному результату, согласно которому следует определять все состав-

ляющие вектора q_0 , используя всю имеющуюся априорную и апостериорную информацию и проводя фильтрацию по методу наименьших квадратов.

Переходя к решению этой задачи в минимаксной постановке, заметим, что путем соответствующего линейного преобразования векторов q_2 и d можно всегда перейти от условий (3.5.4) или (3.5.14) к условиям (7.1.1) или (7.1.4). В результате получаем задачу отыскания минимума величины z , определяемой выражением (7.1.6).

После проведения такого преобразования обозначим через $d_0 = \{d, q_2\} = \{d_1, d_2, \dots, d_N\}$ совокупность всей имеющейся измерительной информации, а через $N = n + m - \kappa$ — число составляющих вектора d_0 . Из (7.2.1) следует, что связь между векторами d_0 и q_0 характеризуется линейной зависимостью

$$d_0 = A_0 q_0,$$

где A_0 — матрица $N \times m$, определяемая выражением

$$A_0 = \begin{pmatrix} A & \\ 0 & I_{m-\kappa} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим теперь задачу выбора оптимального линейного алгоритма фильтрации

$$\hat{l} = X_0 \tilde{d}_0, \quad X_0 = (x_1 x_2 \dots x_N), \quad (7.9.1)$$

обеспечивающего достижение минимума величины

$$z_0 = \sum_{i=1}^N |x_i| \quad (7.9.2)$$

при условии несмещенности

$$X_0 A_0 = C. \quad (7.9.3)$$

Аналогично тому, как это сделано в § 5.4, можно показать, что использование любой из рассмотренных выше стратегий представляет собой частный случай построения оценки (7.9.1) при условии (7.9.3). Поэтому отыскание оптимальной стратегии сводится к нахождению минимума величины z_0 при условии (7.9.3).

В результате решения этой задачи находится оптимальный измерительный базис

$$d_m = \{d_1, d_2, \dots, d_m\} = \{d_\mu, q_{m-\mu}\}, \quad \kappa \leq \mu \leq m, \quad (7.9.4)$$

где $d_\mu = \{d_1, d_2, \dots, d_\mu\}$ — совокупность составляющих вектора d апостериорных измерений, вошедших в базис d_m , а $q_{m-\mu} = \{q_1, q_2, \dots, q_{m-\mu}\}$ — априорные данные, входящие в этот базис.

Очевидно, что получаемый результат дает решение поставленной выше задачи выбора оптимальной стратегии определения состояния системы [10]. При этом:

1. Используемая математическая модель характеризуется вектором состояния $q_\mu = \{q_1, q_2, \dots, q_\mu\}$, представляющим собой совокупность всех составляющих вектора q_0 , не вошедших в $q_{m-\mu}$. Что касается вектора $q_{m-\mu}$, то его оценка $\hat{q}_{m-\mu}$ принимается равной соответствующему априорному значению $\tilde{q}_{m-\mu}$.

2. Для нахождения оценки \hat{q}_μ используется определенный выше оптимальный базис d_μ .

3. Алгоритм фильтрации получается путем решения системы уравнений

$$\tilde{d}_\mu = A_\mu q_\mu, \quad (7.9.5)$$

где A_μ — квадратная матрица, получаемая в результате пересечения соответствующих векторам d_μ и q_μ строк и столбцов матрица A .

Рассмотрим в качестве примера выбор оптимальной стратегии решения задачи определения движения локомотива, описываемой математической моделью (7.6.1). Предположим, что для оценки вектора состояния $q_0 = \{a, v\}$ могут быть использованы: заданное априорное значение этого вектора $\tilde{q} = \{\tilde{a}, \tilde{v}\}$ и результаты измерений пути

$$s_i = a + vt_i \quad (7.9.6)$$

для произвольных времен t_i , лежащих на замкнутом интервале

$$t_n \leq t_i \leq t_k. \quad (7.9.7)$$

Обозначим через δa , δv и δs_i погрешности измеренных величин \tilde{a} , \tilde{v} и \tilde{s}_i . Допустим, что эти погрешности удовлетворяют условиям

$$|\delta a| \leq \Delta_a, \quad |\delta v| \leq \Delta_v, \quad |\delta s_i| \leq \Delta_s, \quad (7.9.8)$$

где Δ_a , Δ_v и Δ_s — заданные максимальные ошибки.

Составим теперь равноточный вектор измерений

$$\mathbf{d}_0 = \{d_1, d_2, d_3, \dots, d_i, \dots\}, \quad (7.9.9)$$

в котором

$$d_1 = \frac{\Delta_s}{\Delta_a} a, \quad d_2 = \frac{\Delta_s}{\Delta_v} v, \quad d_i = s_i, \quad i = 3, 4, \dots \quad (7.9.10)$$

Очевидно, что максимальная ошибка измерения любой составляющей этого вектора равна Δ_s .

Будем решать задачу методом геометрической интерпретации в двумерном евклидовом пространстве Q с координатами a, v . В этом пространстве соответствующие измерениям (7.9.10) векторы \mathbf{a}_i имеют вид

$$\mathbf{a}_1 = \left\{ \frac{\Delta_s}{\Delta_a}, 0 \right\}, \quad \mathbf{a}_2 = \left\{ 0, \frac{\Delta_s}{\Delta_v} \right\}, \quad \mathbf{a}_i = (t_i, 1), \quad (7.9.11)$$

$$i = 3, 4, \dots$$

Обозначим через ϕ_1 выпуклую оболочку векторов $\pm \mathbf{a}_1, \pm \mathbf{a}_2$, а через ϕ_2 — выпуклую оболочку векторов \mathbf{a}_i ($i = 3, 4, \dots$). Первая из них представляет собой ромб с вершинами в точках $A_1 \left(\frac{\Delta_s}{\Delta_a}, 0 \right)$, $A_2 \left(0, \frac{\Delta_s}{\Delta_v} \right)$, $A'_1 \left(-\frac{\Delta_s}{\Delta_a}, 0 \right)$, $A'_2 \left(0, -\frac{\Delta_s}{\Delta_v} \right)$, а вторая — параллелограмм с вершинами $B_1(1, t_n)$, $B_2(1, t_k)$, $B'_1(-1, -t_n)$, $B'_2(-1, -t_k)$. В зависимости от значений максимальных ошибок $\Delta_s, \Delta_a, \Delta_v$, а также времен t_n и t_k могут иметь место следующие случаи:

1. Максимальные ошибки Δ_a и Δ_v априорных данных велики по сравнению с максимальной ошибкой Δ_s измерений. При этом ромб ϕ_1 полностью помещается внутри параллелограмма ϕ_2 . В результате выпуклая оболочка ϕ векторов $\pm \mathbf{a}_i$ ($i = 1, 2, \dots$) совпадает с фигурой ϕ_2 , и совокупность измерений на концах интервала (7.9.7) составляет универсальный оптимальный измерительный базис (рис. 7.9.1, а). Иначе говоря, имеющиеся априорные сведения о значениях величин a и v являются практически бесполезным из-за их недостаточной точности.

2. Максимальные ошибки Δ_a и Δ_v сравнимы с величиной Δ_s . При этом фигуры ϕ_1 и ϕ_2 пересекаются друг с другом. Выпуклая оболочка ϕ представляет собой многоугольник, вершины которого совпадают с некоторыми

или всеми вершинами фигур Φ_1 и Φ_2 . На рис. 7.9.1, б — это восьмиугольник $A_1B_1B_2A_2A'_1B'_1B'_2A'_2$.

При таком соотношении ошибок измерений решение задачи выбора оптимальной стратегии зависит от расположения вектора c оцениваемого параметра l .

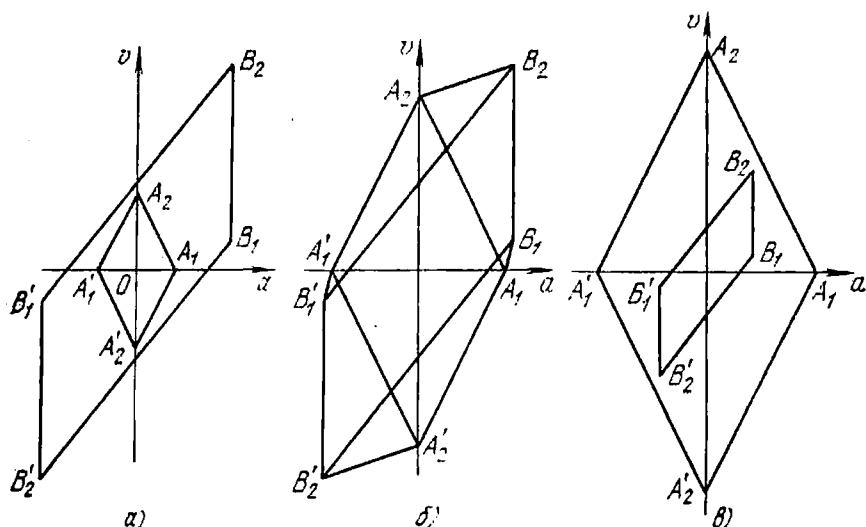


Рис. 7.9.1. Геометрическая интерпретация задачи выбора оптимальной стратегии в минимаксной постановке.

В примере, изображенном на рис. 7.9.1, б, возможны следующие случаи:

а) Вектор c пересекает отрезки A_1B_1 или $A'_1B'_1$. При этом оценка величины a принимается равной ее априорному значению ($\hat{a} = \tilde{a}$), а оценка v находится по измерению величины $s_{\Pi} = a + vt_{\Pi}$:

$$\hat{v} = \frac{s_{\Pi} - \hat{a}}{t_{\Pi}}.$$

б) Вектор c пересекает отрезки B_1B_2 или $B'_1B'_2$. Априорная информация о значениях a и v не используется, а оценки этих величин находятся по апостериорной информации (см. § 7.6).

в) Вектор c пересекает отрезок B_2A_2 или $B'_2A'_2$. При этом

$$\hat{v} = \bar{v}, \quad \hat{a} = \bar{s}_K - \hat{v}t_K, \quad (7.9.12)$$

где \bar{s}_K — измеренное значение величины $s_K = a + vt_K$.

г) Вектор c пересекает отрезок $A_2A'_1$ или A'_2A_1 . В этом случае апостериорные измерения не используются, а оценки составляющих вектора $q = \{a, v\}$ принимаются равными их априорным значениям:

$$\hat{a} = \bar{a}, \quad \hat{v} = \bar{v}. \quad (7.9.13)$$

3. Максимальные ошибки Δ_a и Δ_v малы по сравнению с Δ_s . Параллелограмм φ_2 находится целиком внутри ромба φ_1 и апостериорная информация не используется вследствие ее недостаточной точности. Оценки параметров состояния находятся по формулам (7.9.13).

Подобный подход может быть использован при решении широкого класса задач выбора оптимальной стратегии. Предположим, что имеется априорная информация обо всех составляющих вектора $q = \{q_1, q_2, \dots, q_m\}$, а погрешности этих данных $\delta \tilde{q}_j$ удовлетворяют условиям

$$|\delta \tilde{q}_j| \leq \Delta_j, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (7.9.14)$$

где Δ_j — заданные максимальные значения этих ошибок. Кроме того, имеется апостериорный вектор $s = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ измерений, связанный с вектором q состоянием линейной зависимостью $s = Aq$. Допустим, что система измерений s_i является полной, и ошибки δs_i соответствующих измеренных значений s_i удовлетворяют условиям

$$|\delta s_i| \leq \Delta'_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (7.9.15)$$

где $\Delta'_i > 0$ — заданные числа.

Составим теперь равноточный полный вектор измерений $d_0 = \{d_1, d_2, \dots, d_N\}$, в котором:

$$d_i = \begin{cases} \frac{\alpha}{\Delta_i} q_i, & i = 1, 2, \dots, m, \\ \frac{\alpha}{\Delta'_{i-m}} s_{i-m}, & i = m+1, m+2, \dots, N, \end{cases} \quad (7.9.16)$$

где $N = m + n$, а $\alpha > 0$ — произвольное положительное число. При этом составляющие вектора $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N\}$ ошибки измеренного значения \tilde{d} вектора d удовлетворяют условиям (7.1.1).

В евклидовом пространстве Q с координатами q_1, q_2, \dots, q_m измерениям d_i соответствуют векторы $a_i =$

$= \{a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{im}\}$, определяемые равенствами

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{при } i = 1, 2, \dots, m, \quad j \neq i, \\ \frac{\alpha}{\Delta_i} & \text{при } i = 1, 2, \dots, m, \quad j = i, \\ \frac{\alpha}{\Delta'_{i-m}} A_{ij} & \text{при } i = m+1, m+2, \dots, N, \end{cases} \quad (7.9.17)$$

где A_{ij} — элементы матрицы A .

Обозначим теперь через φ_1 выпуклую оболочку векторов a_1, a_2, \dots, a_m , а через φ_2 — выпуклую оболочку векторов $a_{m+1}, a_{m+2}, \dots, a_N$. Из (7.9.17) следует, что при достаточно больших максимальных ошибках Δ_i ($i = 1, 2, \dots, m$) априорных данных $\varphi_1 \subset \varphi_2$. В этом случае априорная информация оказывается практически бесполезной и оценка \hat{q} находится по измерениям \tilde{s} .

В том случае, когда максимальные ошибки Δ_i ($i = 1, 2, \dots, m$) и Δ'_i ($i = 1, 2, \dots, n$) априорных и апостериорных данных сравнимы между собой, выпуклые фигуры φ_1 и φ_2 пересекаются. Тогда граница выпуклой оболочки φ векторов a_1, a_2, \dots, a_N включает части границ фигур φ_1 и φ_2 . При этом в зависимости от расположения вектора c оцениваемого параметра l могут иметь место различные оптимальные стратегии, использующие ту или иную часть априорной и апостериорной информации.

Если максимальные ошибки Δ_i ($i = 1, 2, \dots, m$) априорных данных достаточно малы, то $\varphi_1 \supset \varphi_2$. При этом оптимальная оценка $\hat{q} = \tilde{q}$, а апостериорные измерения \tilde{s} становятся бесполезными.

Приведенные рассуждения несколько изменяются в том случае, когда по крайней мере одна из используемых групп измерительной информации \tilde{q} и \tilde{s} является неполной. Пусть, например, имеются априорные сведения лишь о части вектора $q = \{q_1, q_2, \dots, q_m\}$. Обозначим через $\tilde{q}_1 = \{\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \dots, \tilde{q}_k\}$, $k < m$ вектор априорной информации. Из (7.4.15) следует, что при этом оценка некоторого параметра l только по значениям \tilde{q}_1 возможна лишь при условии, если этот параметр является линейной комбинацией величин q_1, q_2, \dots, q_k . Поэтому для полного определения состояния системы всегда

требуется привлечение некоторой апостериорной информации. Отсюда следует, что могут иметь место лишь первые два из рассмотренных выше трех случаев использования различных видов информации. Аналогично при \tilde{q} полном и \tilde{s} неполном имеют место лишь второй и третий случаи, а если обе используемые группы измерений в отдельности не являются полными, — только второй случай.

§ 7.10. Сравнение минимаксных оценок и оценок по методу наименьших квадратов

В главе V были рассмотрены классические оценки, получаемые по методу наименьших квадратов. Было показано, что эти оценки обладают следующими основными свойствами:

1. Универсальность, приводящая к тому, что метод наименьших квадратов является оптимальным при определении любого оцениваемого параметра l .

2. Целесообразность использования стратегии, при которой уточняются все параметры состояния системы и используется вся имеющаяся априорная и апостериорная информация.

3. Состоятельность оценки при сравнительно широких допущениях, открывающая теоретическую возможность получения сколь угодно точных оценок при неограниченном возрастании числа используемых измерений.

Как это следует из приведенных выше результатов, минимаксные оценки не обладают ни одним из перечисленных свойств. А именно:

1. Они являются универсальными лишь в некоторых частных случаях и, вообще говоря, зависят от выбора оцениваемого параметра.

2. Оптимальной в общем случае является стратегия, при которой уточняется лишь часть параметров состояния, а остальные принимаются равными их априорным значениям. При этом используется лишь часть имеющейся измерительной информации.

3. Минимаксная оценка не является состоятельной, так как при бесконечном множестве возможных измерений существует предельное значение $z_{\text{опт}}^{(\infty)} > 0$ (см. § 7.3).

Столь существенное различие между обоими рассматриваемыми методами объясняется различием принятых при их построении основных допущений. При этом большая полнота сведений о погрешностях исходных данных, используемых при построении алгоритма фильтрации по методу наименьших квадратов, обеспечивает указанные выше преимущества этого метода по сравнению с методом минимакса. Однако в том случае, когда эти сведения оказываются ошибочными, использование метода наименьших квадратов может привести к неоправданно оптимистическим оценкам точности получаемых результатов, а также к ошибкам при выборе оптимальной стратегии решения задачи. Этот недостаток метода наименьших квадратов усиливается по мере возрастания числа оцениваемых параметров и количества используемых измерений.

С другой стороны, метод минимакса требует для своего осуществления значительно меньших сведений об ошибках исходных данных и обеспечивает гарантированную оценку точности получаемых результатов. Однако находимые в результате значения максимальных ошибок оценок параметров системы или их максимальных дисперсий часто оказываются сильно завышенными, так как их определение базируется на допущении о практически невероятном сочетании различных погрешностей исходных данных. При применении этого метода мы сознательно отказываемся от использования всей имеющейся информации и в результате получаем грубые, но зато надежные оценки параметров состояния исследуемой системы.

В следующей главе будет рассмотрен вопрос о возможности сочетания обоих указанных выше методов. При этом мы будем исходить из представления суммарной ошибки ξ в виде

$$\xi = \xi_1 + \xi_2, \quad (7.10.1)$$

где вектор ξ_1 удовлетворяет условиям метода наименьших квадратов, а ξ_2 — условиям метода минимакса.

Ниже будет показано, что такой подход позволяет в известной мере уменьшить влияние недостатков обоих методов.

§ 7.11. Гарантированная оценка точности несмещенного алгоритма фильтрации

Проведенное в настоящей главе исследование задачи отыскания минимума выражения (7.3.1) при условии (7.3.2) может быть использовано для анализа некоторых свойств гарантированной оценки точности произвольного несмещенного алгоритма фильтрации.

Рассмотрим задачу определения состояния системы, математическая модель которой характеризуется вектором $q = \{q_1, q_2, \dots, q_m\}$. Для оценки величины этого вектора в нашем распоряжении имеется вектор возможных измерений $d = \{d_1, d_2, \dots, d_N\}$. Однако при решении поставленной задачи из общего числа N составляющих этого вектора используется лишь n измерений, образующих вектор $d_n = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$. Пусть между векторами d и q существует модельная зависимость (2.1.3). Сохраняя в ней лишь строки, соответствующие используемому вектору d_n , получаем зависимость вида

$$d_n = F_n(q). \quad (7.11.1)$$

Предположим, что нас интересует точность оценки некоторого скалярного параметра

$$l = G(q). \quad (7.11.2)$$

Для получения этой оценки \hat{l} по измеренному значению вектора d_n используется алгоритм (3.4.18) фильтрации

$$\hat{l} = \theta_n(\tilde{d}_n), \quad (7.11.3)$$

удовлетворяющий условию несмещенности (2.1.10), из которого следует, что

$$G(q) = \theta_n[F_n(q)]. \quad (7.11.4)$$

Отсюда

$$C = X_n A_n, \quad (7.11.5)$$

где

$$C = \frac{\partial G}{\partial q}, \quad X_n = \frac{\partial \theta_n}{\partial \tilde{d}_n}, \quad A_n = \frac{\partial F_n}{\partial q}. \quad (7.11.6)$$

Допустим, что для определения ошибки χ оценки \hat{l} может быть использовано линейное выражение (3.5.10)

$$\chi = X_n \xi_n = \sum_{i=1}^n x_i \xi_i, \quad (7.11.7)$$

где x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) — элементы строки X_n , а $\xi_n = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ — суммарная ошибка, определяемая зависимостью вида (5.1.1)

$$\tilde{d}_n = F_n(q_n) + \xi_n.$$

Предположим, что множество M возможных ошибок ξ определяется условиями (3.5.14) и в качестве гарантированной характеристики точности используется величина (7.5.9)

$$K_{\text{гар}} = \max_{\xi \in M} D(\tilde{l}). \quad (7.11.8)$$

Если провести соответствующее нормирование вектора \tilde{d} , в результате которого в зависимостях (3.5.14) все $\mu_i^2 = 1$, то для определения $K_{\text{гар}}$ может быть использовано выражение (3.5.16)

$$K_{\text{гар}} = k \left(\sum_{i=1}^n |x_i| \right)^2 + (1 - k) \sum_{i=1}^n x_i^2. \quad (7.11.9)$$

Основным результатом настоящего параграфа является доказательство справедливости неравенства

$$K_{\text{гар}} \geq \left(k + \frac{1-k}{n} \right) L > 0, \quad (7.11.10)$$

где $L > 0$ — некоторая величина, не зависящая от выбора вектора \tilde{d}_n и целиком определяемая исходными модельными зависимостями (2.1.3) и (7.11.2).

Для этого воспользуемся неравенством Коши — Буныковского (1.2.19), полагая в нем

$$a = \{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}, \quad b = \{1, 1, \dots, 1\}.$$

В результате получим, что

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i| \right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n x_i^2. \quad (7.11.11)$$

Из зависимостей (7.11.9) и (7.11.11) следует, что

$$\left(k + \frac{1-k}{n} \right) \left(\sum_{i=1}^n |x_i| \right)^2 \leq K_{\text{гар}} \leq (kn + 1 - k) \sum_{i=1}^n x_i^2. \quad (7.11.12)$$

Воспользуемся теперь решением задачи отыскания

$$\min \sum_{i=1}^N |x_i| \quad (7.11.13)$$

при условии

$$C = XA, \quad (7.11.14)$$

где $A = \partial F / \partial q$, а $X = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ — некоторая строка из N элементов.

В соответствии с результатами § 7.3 эта задача может быть решена. Введем обозначение

$$L = \left(\min \sum_{i=1}^N |x_i| \right)^2 > 0. \quad (7.11.15)$$

Очевидно, что строка $X_n = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, удовлетворяющая условию (7.11.5), может рассматриваться как частный случай строки $X = (x_1, x_2, \dots, x_N)$, удовлетворяющей условию (7.11.14). Для этого достаточно заменить в последней нулями все элементы, соответствующие неиспользуемым измерениям. Отсюда

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i| \right)^2 \geq L. \quad (7.11.16)$$

Из зависимостей (7.11.12) и (7.11.16) непосредственно следует доказываемое неравенство (7.11.10).

Получаемый результат может быть непосредственно распространен на случай, когда вместо вектора d имеется бесконечное множество возможных измерений, определяемых при помощи непрерывной измеряемой функции вида (2.4.5), имеющей на замкнутом интервале (2.4.4) непрерывные частные производные по величинам q_j . При этом, рассматривая некоторую бесконечную последовательность чисел n , и соответствующую ей последовательность векторов d_n используемых измерений (аналогично тому, как это сделано в § 7.3), получим из зависимости (7.11.10), что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K_{\text{гип}} \geq kL > 0. \quad (7.11.17)$$

Таким образом, если множество M возможных ошибок измерений характеризуется зависимостями (3.5.14),

то величина гарантированной характеристики (7.11.8) точности имеет отличную от нуля нижнюю границу. Иначе говоря, при таком подходе к оценке точности любой несмещенный алгоритм фильтрации, удовлетворяющий сформулированным выше условиям, оказывается несостоятельным. В частности, это справедливо для фильтрации по методу наименьших квадратов при произвольной матрице K , определяющей минимизируемую функцию (5.1.3).

В заключение заметим, что, как это следует из зависимости (7.11.10), при большом числе n используемых измерений даже незначительные корреляционные связи между ошибками измерений могут оказать решающее влияние на оценку точности решения задачи. В настоящее время при решении ряда важных прикладных задач число n может достигать нескольких тысяч. В этих условиях корреляционные зависимости с коэффициентами $K(\xi_i, \xi_j)$ порядка 0,001 уже оказываются существенными.

§ 7.12. Исключение неинформативных измерений

Из рассмотренных в § 7.4 примеров видно, что вектор $d = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ может включать измерения d_i , не используемые при построении линейных несмещенных оценок \hat{l} произвольных параметров l , связанных с вектором q состояния линейными зависимостями вида (7.2.1). На рис. 7.4.1 такому измерению соответствует вектор a_5 , а на рис. 7.4.2 — вектор a_8 . На рис. 7.4.3 подобным свойством обладают все измерения, векторы которых заканчиваются внутри отрезка BD кривой L . Такие измерения мы будем в дальнейшем называть *неинформативными*. Они могут, вообще говоря, включаться в некоторые оптимальные измерительные базисы d_m , однако при этом соответствующие коэффициенты x_i оптимального алгоритма фильтрации удовлетворяют условию

$$x_i = 0. \quad (7.12.1)$$

Остальные измерения мы будем называть *информативными*. Очевидно, что при решении рассматриваемых в настоящей главе задач оптимизации все неинформативные измерения могут быть предварительно исклю-

чены из числа составляющих вектора \mathbf{d} , что в ряде случаев существенно упрощает дальнейшее решение задачи. Для этой цели можно воспользоваться следующей теоремой.

Теорема. Предложим, что исследуемая система описывается линейной моделью (7.2.1), а суммарная ошибка ξ удовлетворяет условиям (7.1.1) или (7.1.4). Рассмотрим некоторую составляющую d_i вектора $\mathbf{d} = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ измерений. Не нарушая общности, можно считать, что $d_i = d_1$. Введем обозначение $\mathbf{d}' = \{d_2, d_3, \dots, d_n\}$. Будем рассматривать d_1 в качестве оцениваемого параметра, а \mathbf{d}' — в качестве вектора измерений. Тогда математическая модель задачи принимает вид

$$\mathbf{d}' = \mathbf{A}'\mathbf{q}, \quad d_1 = \mathbf{A}_1\mathbf{q}, \quad (7.12.2)$$

где \mathbf{A}_1 — первая строка матрицы \mathbf{A} , а \mathbf{A}' — матрица, остающаяся после исключения из \mathbf{A} строки \mathbf{A}_1 . Таким образом,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}' \end{pmatrix}. \quad (7.12.3)$$

Рассмотрим задачу отыскания оптимального линейного алгоритма фильтрации

$$\hat{d}_1 = \bar{\mathbf{X}}'\tilde{\mathbf{d}}, \quad (7.12.4)$$

где $\tilde{\mathbf{d}}'$ — измеренное значение вектора \mathbf{d}' , а $\bar{\mathbf{X}}' = (\bar{x}_2\bar{x}_3 \dots \bar{x}_n)$ — отыскиваемая строка, удовлетворяющая условию несмещенности

$$\bar{\mathbf{X}}'\mathbf{A}' = \mathbf{A}_1 \quad (7.12.5)$$

и обеспечивающая достижение минимума величины

$$\bar{z}' = \sum_{i=2}^n |\bar{x}_i|. \quad (7.12.6)$$

Обозначим через \bar{z}'_{\min} решение этой задачи. Тогда необходимым и достаточным условием информативности измерения d_1 является неравенство

$$\bar{z}'_{\min} \geq 1. \quad (7.12.7)$$

Достаточность этого условия следует из того, что при $l = d_1$ алгоритм

$$\hat{d}_1 = \tilde{d}_1 \quad (7.12.8)$$

удовлетворяет условию (7.2.4). При этом определяемая выражением (7.3.1) величина $z = 1$. Любой другой линейный несмещенный алгоритм отыскания оценки \tilde{d}_1 , не включающий измерение \bar{d}_1 , будет иметь форму (7.12.4) при условии (7.12.5). Из (7.12.7) следует, что он будет не лучше алгоритма (7.12.8), использующего измерение \bar{d}_1 .

Для доказательства необходимости условия (7.12.7) предположим, что оно не выполняется, т. е. имеет место неравенство

$$\bar{z}'_{\min} < 1. \quad (7.12.9)$$

Покажем, что в этом случае измерение d_1 неинформативно. Пусть l — произвольный линейный оцениваемый параметр, а \hat{l} — его линейная несмещенная оценка, определяемая выражением вида (7.2.3) и удовлетворяющая условию

$$x_1 \neq 0. \quad (7.12.10)$$

Требуется доказать, что может быть найдена другая линейная несмещенная оценка \hat{l}' , для которой условие (7.12.10) не удовлетворяется, а определяемая выражением (7.3.1) величина z оказывается меньшей. Для этой цели представим строку X и вектор d в виде

$$X = (x_1 X'), \quad d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d' \end{pmatrix}.$$

Можно написать, что

$$\hat{l} = X\tilde{d} = x_1\tilde{d}_1 + X'\tilde{d}'. \quad (7.12.11)$$

При этом, пользуясь выражением (7.12.3), можно записать условие несмещенности (7.2.4) в виде

$$x_1 A_1 + X' A' = C. \quad (7.12.12)$$

Воспользуемся теперь решением рассмотренной выше задачи оптимизации и заменим в правой части выражения (7.12.11) измеренное значение \bar{d}_1 соответствующей оптимальной оценкой (7.12.4). В результате получим линейную оценку

$$\hat{l}' = (x_1 \bar{X}' + X') \tilde{d}', \quad (7.12.13)$$

не зависящую от измерения \bar{d}_1 . Покажем, что она удовлетворяет условию несмещенности (7.2.4). Действитель-

но, пользуясь зависимостями (7.12.3), (7.12.5), (7.12.12) и (7.12.13), можно записать, что

$$\begin{aligned} XA &= (0 \ x_1 \bar{X}' + X') \begin{pmatrix} A_1 \\ A' \end{pmatrix} = \\ &= x_1 \bar{X}' A' + X' A' = x_1 A_1 + X' A' = C. \end{aligned}$$

Найдем теперь для алгоритма (7.12.13) соответствующую величину z . Пользуясь зависимостями (7.3.1), (7.12.6), (7.12.9) и (7.12.10), можно записать, что

$$z = \sum_{i=2}^n |x_1 \bar{x}_i + x_i| \leq |x_1| \sum_{i=2}^n |\bar{x}_i| + \sum_{i=2}^n |x_i| < \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad (7.12.14)$$

т. е. при переходе от любого алгоритма фильтрации, удовлетворяющего условию (7.12.10), к соответствующему алгоритму (7.12.13), не удовлетворяющему этому условию, величина z уменьшается.

Приведенная теорема может быть использована для предварительной отбраковки неинформативных измерений при решении рассматриваемых задач оптимизации. При этом можно последовательно рассматривать имеющиеся измерения d_i , находить для них величины \bar{z}'_{\min} путем решения соответствующей задачи линейного программирования (см. § 7.3) и исключать все измерения, удовлетворяющие условию (7.12.9). При этом не обязательно доводить решение задачи линейного программирования до конца, т. е. добиваться выполнения условий (7.3.20). Рассматриваемое измерение может быть исключено после того, как в выражениях (7.3.17) и (7.3.18) удовлетворяются условия

$$M < 1, \quad \beta_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (7.12.15)$$

При использовании метода геометрической интерпретации (см. § 7.4) можно исключать как неинформативные все измерения, для которых соответствующие векторы a_i заканчиваются внутри выпуклой оболочки φ . Действительно, если этому условию удовлетворяет измерение d_1 с вектором a_1 , то существует такое число $\varepsilon > 0$, для которого вектор $(1 + \varepsilon)a_1 \in \varphi$. Иначе говоря, существует совокупность чисел p_i ($i = 1, 2, \dots, n$),

удовлетворяющих условиям (7.4.5), для которых

$$(1 + \varepsilon) a_1 = \sum_{i=1}^n p_i a_i, \quad p_1 < 1.$$

Отсюда следует, что существует вектор $\gamma \uparrow \uparrow a_1$, определяемый выражением

$$\gamma = \frac{1 - p_1 + \varepsilon}{1 - p_1} a_1 = \sum_{i=2}^n p'_i a_i, \quad p'_i = \frac{p_i}{1 - p_1},$$

$$i = 2, 3, \dots, n.$$

Легко убедиться в том, что величины p'_i удовлетворяют условиям (7.4.5). Отсюда, пользуясь зависимостью (7.4.7), находим, что соответствующая величина

$$\bar{z}' = \frac{|a_1|}{|\gamma|} = \frac{1 - p_1}{1 - p_1 + \varepsilon} < 1,$$

т. е. рассматриваемое измерение удовлетворяет условию (7.12.9) и является неинформативным.

Описанный способ исключения неинформативных измерений нуждается в проведении трудоемких вычислений. Его целесообразно применять в том случае, когда рассматриваемая совокупность измерений используется для оценки значительного числа различных параметров l . В том случае, когда оценивается один параметр l , можно воспользоваться предложенным Б. Ц. Бахшияном способом, позволяющим в процессе решения рассмотренной в § 7.3 задачи линейного программирования частично отбрасывать неинформативные измерения, не проводя при этом больших дополнительных вычислений. Для этого заметим, что входящие в правую часть зависимости (7.3.18) коэффициенты α_{ji} с точностью до знака совпадают с коэффициентами линейного алгоритма определения оценки \hat{d}_i по измеренному значению вектора d_m . Последний составлен из m измерений, соответствующих коэффициентам u_j , вынесенным в левые части равенств (7.3.18). Отсюда непосредственно следует, что

$$\sum_{j=1}^m |\alpha_{ji}| \geq \bar{z}'_{\min},$$

где величина \bar{z}'_{\min} определяется для измерения d_i (см. условия предыдущей теоремы).

Поэтому все измерения d_i , для которых в процессе решения задачи линейного программирования удовлетворяется неравенство

$$\sum_{j=1}^m |a_{jl}| < 1, \quad (7.12.16)$$

могут исключаться из дальнейшего рассмотрения как неинформативные.

Конечно, таким способом нельзя обеспечить исключение всех неинформативных измерений, однако можно в ряде случаев существенно ускорить решение задачи линейного программирования за счет уменьшения числа рассматриваемых измерений.

В заключение заметим, что изложенный выше метод может быть использован для построения минимально необходимого вектора d_k (см. § 7.5). При этом необходимое и достаточное условие принадлежности некоторого измерения d_l к вектору d_k имеет вид

$$\bar{z}'_{\min} > 1. \quad (7.12.17)$$

Достаточность этого условия следует из того, что в этом случае при $l = d_1$ не существует алгоритма фильтрации типа (7.12.4), который не был бы хуже алгоритма (7.12.8).

Для доказательства необходимости заметим, что в этом случае зависимость (7.12.14) принимает вид

$$z \leq \sum_{i=1}^n |x_i|,$$

т. е. если условие (7.12.17) не выполняется, то для любого алгоритма (7.2.3) может быть построен соответствующий алгоритм (7.12.13), который не хуже исходного.

Г л а в а VIII

ВЫБОР ОПТИМАЛЬНОГО СОСТАВА ИЗМЕРЕНИЙ

§ 8.1. Постановка задачи

Задача выбора оптимального состава измерений сформулирована в § 3.6. В главе VII приведено ее решение в неклассической постановке, когда суммарная ошибка ξ удовлетворяет условиям (7.1.1) или (7.1.4), а в качестве критерия оптимальности используется условие достижения минимума величин χ_{\max} или D_{\max} , определяемых соответственно выражениями (7.1.2) или (7.1.5). При этом оптимальным является использование некоторого достаточного измерительного базиса \mathbf{d}_m , в котором число используемых измерений равно размерности m вектора \mathbf{q} состояния системы.

Как показано в главе V, при классической постановке, приводящей к фильтрации по методу наименьших квадратов, любое привлечение дополнительных измерений улучшает или по крайней мере не ухудшает точность получаемой оценки. Поэтому при конечном множестве Δ возможных измерений оптимальным является использование всех его элементов. При Δ бесконечном задача выбора оптимального состава измерений не имеет решения на множестве всех конечномерных векторов \mathbf{d} . Однако она приобретает смысл в том случае, когда на векторы \mathbf{d} налагаются какие-либо дополнительные ограничения (например, по числу используемых измерений).

Выбор оптимального состава измерений при классической постановке метода наименьших квадратов и дополнительных ограничениях, налагаемых на векторы \mathbf{d} , рассматривается в теории оптимального планирования

экспериментов. При этом большое число работ посвящено различным задачам этого типа. Изложение основных результатов, полученных в этом направлении, а также подробная библиография даны в работах [47, 58]. Здесь мы ограничимся описанием лишь некоторых результатов, полученных в указанном направлении и используемых при решении прикладных задач рассматриваемого типа. Кроме того, рассмотрены некоторые задачи определения оптимального состава измерений при неклассической постановке.

§ 8.2. Задача Эльвинга

Рассмотрим простейшую задачу выбора оптимального состава некоррелированных измерений при ограничении их числа [54]. Будем решать ее при следующих условиях.

1. Для построения множества Δ возможных измерений используется некоторый вектор $\mathbf{d}_N = \{d_1, d_2, \dots, d_N\}$, связанный с вектором $\mathbf{q} = \{q_1, q_2, \dots, q_m\}$ состояния системы линейной (или линеаризированной) модельной зависимостью

$$\mathbf{d}_N = \mathbf{A}\mathbf{q}, \quad (8.2.1)$$

где \mathbf{A} — заданная матрица $N \times m$, удовлетворяющая условию

$$R(\mathbf{A}) = m. \quad (8.2.2)$$

При этом любая составляющая вектора \mathbf{d}_N может быть повторена неограниченное число раз. Таким образом, вектор $\mathbf{d} = \{d_1, d_2, \dots, d_x\}$ используемых измерений, удовлетворяющий условию

$$\mathbf{d} \subset \Delta, \quad (8.2.3)$$

может включать как различные, так и повторяющиеся составляющие вектора \mathbf{d}_N . Модельная зависимость между векторами \mathbf{d} и \mathbf{q} имеет вид

$$\mathbf{d} = \mathbf{A}'\mathbf{q}, \quad (8.2.4)$$

где \mathbf{A}' — матрица $x \times m$, составленная из соответствующих строк матрицы \mathbf{A} (при повторении измерений строки этой матрицы повторяются).

2. Все используемые (в том числе и повторяющиеся) измерения являются несмещенными и некоррелированными. Не нарушая общности, можно считать их равноточными. При этом вектор суммарных ошибок $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ удовлетворяет условиям (5.2.2).

3. Всего может быть произведено не более заданного числа n измерений, т. е.

$$k \leq n. \quad (8.2.5)$$

4. При оценке точности решения задачи используется скалярный параметр l , связанный с вектором q линейной модельной зависимостью (5.2.3).

5. Оценка \hat{q} вектора q определяется по методу наименьших квадратов, а соответствующая оценка \hat{l} параметра l находится по формуле $\hat{l} = C\hat{q}$.

В качестве критерия оптимальности используется достижение $\min D(\hat{l})$ при условии (8.2.3).

Как было указано выше, при условии (5.2.2) и фильтрации по методу наименьших квадратов привлечение дополнительных измерений во всяком случае не увеличивает значение $D(\hat{l})$. Отсюда следует, что среди решений поставленной задачи всегда имеются такие, для которых неравенство (8.2.5) заменяется равенством. Ограничимся отысканием именно этих решений.

Обозначим через n_i ($i = 1, 2, \dots, N$) число повторяющихся измерений \tilde{d}_i , входящих в измеренное значение \tilde{d} вектора d (если измерение с данным значением индекса i не входит в \tilde{d} , то соответствующее $n_i = 0$). Очевидно, что

$$\sum_{i=1}^{\beta} n_i = n, \quad (8.2.6)$$

где β — число используемых измерений с разными индексами.

Введем обозначение

$$p_i = \frac{n_i}{n}, \quad i = 1, 2, \dots, \beta. \quad (8.2.7)$$

Из (8.2.6) и (8.2.7) следует, что

$$1 \geq p_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{\beta} p_i = 1. \quad (8.2.8)$$

В соответствии с доказанной в § 5.6 леммой вектор \mathbf{d} используемых измерений может быть заменен вектором $\mathbf{s} = \{s_1, s_2, \dots, s_N\}$. При этом в качестве измеренных значений \tilde{s}_i ($i = 1, 2, \dots, N$) его составляющих используются средние арифметические соответствующих повторяющихся измерений \tilde{d}_j ($j = 1, 2, \dots, n_i$). Для значений индекса i , при которых составляющие вектора \mathbf{d}_N не входят в \mathbf{d} , принимается, что

$$\tilde{s}_i = 0 \quad \text{при} \quad p_i = 0. \quad (8.2.9)$$

Связь между векторами \mathbf{s} и \mathbf{q} определяется модельной зависимостью

$$\mathbf{s} = \mathbf{A}\mathbf{q}, \quad (8.2.10)$$

а вероятностные характеристики измеренного значения \tilde{s} определяются выражениями

$$E(\tilde{\mathbf{s}}) = \mathbf{s}_n, \\ D(\tilde{s}_i, \tilde{s}_j) = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j, \\ \frac{\sigma^2}{n} \frac{1}{p_i} & \text{при } i = j, \quad p_i \neq 0, \\ \infty & \text{при } i = j, \quad p_i = 0. \end{cases} \quad (8.2.11)$$

Из теоремы Гаусса — Маркова следует, что отыскание \hat{l} при фильтрации по методу наименьших квадратов эквивалентно решению аналогичной задачи при использовании произвольного линейного алгоритма фильтрации

$$\hat{l} = \mathbf{X}\tilde{\mathbf{s}}, \quad (8.2.12)$$

удовлетворяющего условию несмещенности (7.2.4) и обеспечивающего достижение $\min D(\hat{l})$.

Пользуясь выражениями (8.2.11), находим, что

$$D(\hat{l}) = \frac{\sigma^2}{n} \sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{p_i}, \quad (8.2.13)$$

где x_i ($i = 1, 2, \dots, N$) — элементы строки \mathbf{X} . Отсюда следует, что решение, соответствующее $\min D(\hat{l})$, удовлетворяет условию

$$x_i = 0 \quad \text{при} \quad p_i = 0, \quad (8.2.14)$$

и значения \bar{s}_i при $p_i = 0$ не отражаются на полученных результатах.

Окончательно получаем задачу отыскания

$$\min_p \min_X \sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{p_i},$$

где первый минимум отыскивается по всем возможным значениям строки X , удовлетворяющей условию несмещенности (7.2.4), а второй — всем значениям вектора $p = \{p_1, p_2, \dots, p_N\}$, удовлетворяющим условиям (8.2.8).

Очевидно, что порядок нахождения обоих минимумов может быть изменен. В результате получим задачу отыскания

$$\min_X \min_p \sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{p_i}. \quad (8.2.15)$$

Перейдем к решению ее первой части, т. е. к определению

$$\min_p \sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{p_i}. \quad (8.2.16)$$

Заметим, что по определению (8.2.7) все n_i — рациональные дроби со знаменателем n . Однако, полагая n достаточно большим, будем отыскивать значения p_i среди всех чисел, удовлетворяющих условиям (8.2.8), а затем при вычислении величины $n_i = p_i n$ округлять их до ближайших целых чисел. В результате получим приближенное решение, которое будет тем точнее, чем больше число n . Пользуясь известным способом определения условного экстремума, приходим к задаче отыскания $\min f(p)$, где

$$f(p) = \sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{p_i} + \lambda \left(\sum_{i=1}^N p_i - 1 \right),$$

а λ — неопределенный множитель Лагранжа. Отсюда находим необходимые условия минимума

$$\frac{\partial f}{\partial p_i} = -\frac{x_i^2}{p_i^2} + \lambda = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Далее, учитывая первое из условий (8.2.8), можно записать, что

$$p_i = \frac{|x_i|}{\sqrt{\lambda}}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (8.2.17)$$

Подставляя эти выражения во второе условие (8.2.8), получим

$$\frac{\sum_{i=1}^N |x_i|}{\sqrt{\lambda}} = 1, \quad \sqrt{\lambda} = \sum_{i=1}^N |x_i|. \quad (8.2.18)$$

Из выражений (8.2.17) и (8.2.18) следует, что

$$p_i = \frac{|x_i|}{\sum_{i=1}^N |x_i|}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (8.2.19)$$

Это решение найдено из необходимых условий минимума. При заданной строке X оно единственное. Поэтому достаточность условий (8.2.19) следует из существования отыскиваемого минимума. Для доказательства этого заметим, что минимизируемое выражение (8.2.16) является непрерывной функцией вектора p (за исключением значений $p_i = 0$ при $x_i \neq 0$, которые можно при отыскании минимума исключить из рассмотрения). Кроме того, эта величина ограничена снизу, так как из условия (8.2.8)

$$\sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{p_i} \geq \sum_{i=1}^N x_i^2.$$

Пользуясь этим, можно показать, что отыскиваемый минимум выражения (8.2.16) существует и определяется при помощи зависимости (8.2.19). Подставляя последнюю в (8.2.13), находим, что при оптимальном выборе вектора p

$$D(\hat{l}) = \frac{\sigma^2}{n} \left(\sum_{i=1}^N |x_i| \right)^2, \quad (8.2.20)$$

и рассмотренная задача оптимизации сводится к нахождению минимума величины z , определяемой выражением

(7.1.6) при условии (7.2.4). Решение этой задачи приведено в предыдущей главе. Из него следует, что имеется по крайней мере одна оптимальная строка X , содержащая не более m не равных нулю коэффициентов x_i ($i = 1, 2, \dots, N$). Индексы i этих коэффициентов совпадают с индексами измерений, входящих в оптимальный измерительный базис и определяемых изложенными выше методами (см. §§ 7.3 и 7.4). Не нарушая общности, можно изменить индексацию так, чтобы используемым измерениям соответствовали значения i , изменяющиеся от 1 до m . При этом оптимальный алгоритм фильтрации (8.2.12) принимает вид

$$\hat{l} = X_m \tilde{s}_m, \quad (8.2.21)$$

где $\tilde{s}_m = \{s_1, s_2, \dots, s_m\}$ — вектор используемых измерений, а $X_m = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ — соответствующая строка коэффициентов алгоритма фильтрации. В результате получаем задачу определения оценок \hat{q} и \hat{l} по достаточному числу измерений, которая сводится к решению системы уравнений

$$A_m \hat{q} = \tilde{s}_m, \quad (8.2.22)$$

где A_m — квадратная матрица $m \times m$, составленная из строк матрицы A , соответствующих используемым измерениям. Отсюда, учитывая зависимость (5.2.3), находим, что

$$\hat{q} = A_m^{-1} \tilde{s}_m, \quad \hat{l} = C A_m^{-1} \tilde{s}_m, \quad X_m = C A_m^{-1}. \quad (8.2.23)$$

После определения коэффициентов x_i ($i = 1, 2, \dots, m$) строки X_m находим по формуле (8.2.19) соответствующие значения p_i и при помощи зависимости (8.2.7) вычисляем величины

$$n_i = n p_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (8.2.24)$$

Округляя полученные величины n_i до ближайших целых чисел, находим количества повторяющихся измерений. При этом должно быть соблюдено равенство (8.2.6), а также условие

$$n_i \neq 0 \quad \text{при} \quad x_i \neq 0. \quad (8.2.25)$$

По полученным таким образом числам n_i находим

$$\tilde{s}_i = \frac{\sum \tilde{d}_i}{n_i}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (8.2.26)$$

где знаком \sum обозначена сумма всех повторяющихся измерений с данными значениями индекса i .

Полученный таким образом оптимальный состав измерений включает m значений \tilde{d}_i ($i = 1, 2, \dots, m$), каждое из которых повторяется n_i раз. Для построения соответствующего алгоритма фильтрации могут быть использованы зависимости (8.2.23) и (8.2.26) либо стандартный метод наименьших квадратов (см. § 5.2).

Как было замечено выше, приведенное решение рассматриваемой задачи является приближенным. Его точность возрастает по мере уменьшения величины отношения m/n .

Полученный результат может быть непосредственно обобщен на случай, когда множество Δ возможных измерений определяется линейной измеряемой функцией вида (4.6.10). Для этого достаточно воспользоваться описанным в конце § 7.3 предельным переходом.

§ 8.3. Примеры решения задачи Эльвинга

1. **Определение движения локомотива.** Рассмотрим в качестве примера задачу выбора оптимального состава измерений при определении движения локомотива по измерениям пройденного им пути s (см. §§ 5.10 и 7.6). Измерения могут производиться в произвольные моменты t , лежащие на замкнутом интервале (7.6.2). Модельная зависимость между величинами $s(t)$ и вектором $q = \{a, v\}$ состояния определяется измеряемой функцией (7.6.1). Вектор ξ суммарных ошибок удовлетворяет условиям (5.2.2), и фильтрация производится по методу наименьших квадратов. Таким образом, множество возможных измерений бесконечно. Требуется выбрать из него n измерений, обеспечивающих достижение минимумов дисперсий оценок \hat{a} и \hat{v} .

Как было показано выше (см. § 7.6), в рассматриваемой задаче существует оптимальный измерительный базис, соответствующих измерениям в моменты $t_1 = t_n$ и

$t_2 = t_k$. Из зависимостей (7.6.4) следует, что при выборе в качестве оцениваемого параметра l величины a , строка

$$X_m = \left(\frac{t_k}{t_k - t_n}, -\frac{t_n}{t_k - t_n} \right), \quad (8.3.1)$$

а' при $l = v$

$$X_m = \left(-\frac{1}{t_k - t_n}, \frac{1}{t_k - t_n} \right). \quad (8.3.2)$$

Отсюда, пользуясь зависимостями (8.2.19) и (8.2.24), находим соответствующие оптимальные количества измерений для моментов t_1 и t_2 :

$$\left. \begin{aligned} n_1 &= \frac{|t_k|}{|t_k| + |t_n|} n, \quad n_2 = \frac{|t_n|}{|t_n| + |t_k|} n \quad \text{при } l = a, \\ n_1 &= n_2 = \frac{n}{2} \quad \text{при } l = v. \end{aligned} \right\} \quad (8.3.3)$$

Таким образом, даже при наличии универсального оптимального измерительного базиса d_m соответствующее этому базису оптимальное распределение количеств n_i измерений не является, вообще говоря, универсальным, а зависит от выбора оцениваемого параметра l .

Из зависимостей (8.3.3) видно, что одинаковый для определения обеих оценок \hat{a} и \hat{v} оптимальный состав измерений получается при $t_n = -t_k$. При помощи зависимостей (8.2.20), (8.3.1) и (8.3.2) можно показать, что минимальные значения дисперсий оценок \hat{a} и \hat{v} , получаемые при использовании соответствующих оптимальных составов измерений

$$D_{\min}(\hat{a}) = \frac{\sigma^2}{n} \frac{(|t_n| + |t_k|)^2}{T^2}, \quad D_{\min}(\hat{v}) = \frac{\sigma^2}{n} \frac{4}{T^2}, \quad (8.3.4)$$

где $T = t_k - t_n$ — продолжительность мерного интервала. В частности, в том случае, когда

$$t_n \leq 0, \quad t_k \geq 0, \quad (8.3.5)$$

первое из выражений (8.3.4) принимает вид

$$D_{\min}(\hat{a}) = \frac{\sigma^2}{n} \quad (8.3.6)$$

и значение $D_{\min}(\hat{a})$ не зависит от времен t_n и t_k . Это обстоятельство связано с тем, что величина a определяет положение локомотива в момент $t = 0$. При условии

(8.3.5) это время находится внутри мерного интервала. Как показано в § 7.6, в этом случае оптимальным (с точки зрения определения оценки \hat{a}) является также проведение всех измерений при $t = 0$, что непосредственно приводит к выражению (8.3.6). Однако при таком составе измерений величина v вообще не определяется.

В том случае, когда обе зависимости (8.3.5) представляют собой строгие неравенства, можно, сосредотачивая все измерения на обоих концах интервала (7.6.2), получить оптимальное значение $D(\hat{a})$ при одновременном определении оценки \hat{v} (вообще говоря, не оптимальным способом). Если же одно из неравенств (8.3.5) обращается в равенство, то достижение величины $D_{\min}(\hat{a})$ требует сосредоточения всех измерений в момент $t = 0$, что исключает определение оценки \hat{v} .

Таким образом, могут иметь место случаи, при которых оптимальный состав измерений, соответствующий некоторому оцениваемому параметру l , оказывается неполным и не позволяет определить все составляющие вектора q . Из зависимостей (8.2.19) и (8.2.24) следует, что это будет иметь место, когда некоторые из элементов определяемой по формуле (8.2.23) строки X_m обращаются в нули. При исследовании задачи методом геометрической интерпретации (см. § 7.4) это соответствует тому случаю, когда вектор c оцениваемого параметра пересекает границу выпуклой оболочки Φ в ее вершине или на ребре.

В заключение сравним дисперсии $D_{\min}(\hat{a})$ и $D_{\min}(\hat{v})$, получаемые при оптимальном выборе n измерений со значениями $D_p(\hat{a})$ и $D_p(\hat{v})$, соответствующими равномерному распределению времен измерений. При этом рассмотрим случай использования мерного интервала (5.10.2). Путем сравнения выражений (5.10.14), (8.3.4) и (8.3.6) находим, что при достаточно большом n

$$\left. \begin{aligned} D_p(\hat{a}) &\approx 4D_{\min}(\hat{a}), \\ D_p(\hat{v}) &\approx 3D_{\min}(\hat{v}). \end{aligned} \right\} \quad (8.3.7)$$

Таким образом, при сделанных допущениях оптимальное распределение измерений обеспечивает существенный выигрыш точности по сравнению с равномерным распределением.

2. Определение формы орбиты спутника по измерениям высоты его полета. Рассмотрим задачу определения формы орбиты спутника некоторого притягивающего тела (Земли, Луны, планеты) по измерениям высоты h его полета над поверхностью этого тела. Полагая последнее сферой радиуса R , заменим высоту h расстоянием $r = R + h$ от центра притягивающего тела и воспользуемся линеаризованной моделью (7.6.15), связывающей эту величину с составляющими вектора $q = \{a, b, f\}$ состояния и углом u , характеризующим положение спутника на орбите. Примем в качестве вектора оцениваемых параметров величину $l = \{a, b\}$. Как показано в § 7.6, в качестве оптимального измерительного базиса при определении оценок \hat{a} и \hat{b} могут быть использованы измерения в точках $u_1 = 0$, $u_2 = \pi$ и любой третьей произвольной точке. При этом система уравнений (7.2.5) принимает вид

$$\hat{a} + \hat{b} = \tilde{r}(0), \quad \hat{a} - \hat{b} = \tilde{r}(\pi).$$

Решая эту систему, находим, что

$$X_m = \begin{cases} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} & \text{при } l = a, \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} & \text{при } l = b. \end{cases}$$

Отсюда, пользуясь зависимостями (8.2.19) и (8.2.24), получим оптимальные количества измерений в обеих точках

$$n_1 = n_2 = \frac{n}{2},$$

а при помощи (8.2.20) — соответствующие минимальные значения дисперсий

$$D_{\min}(\hat{a}) = D_{\min}(\hat{b}) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Приведенный состав измерений оптимален при оценке обоих рассматриваемых параметров a и b . Однако он недостаточен для одновременного определения всех трех составляющих вектора q . Заметим, что при оценке параметра b этот оптимальный состав является единственным. Его недостаточность связана с тем, что вектор c_b рассматриваемого параметра пересекает криволинейную

часть поверхности выпуклой фигуры Φ (см. рис. 7.6.4). При оценке параметра a соответствующий ему вектор c_a пересекает основание цилиндра Φ . При этом помимо указанного состава измерений может быть найдено бесконечное число других составов, являющихся оптимальными для оценки параметра a и обеспечивающих возможность одновременного определения остальных составляющих вектора q (см. § 7.6).

§ 8.4. Случай представления суммарной ошибки в виде суммы коррелированной и некоррелированной составляющих

Пользуясь приведенными выше результатами, сравним решения трех задач выбора оптимального состава измерений при следующих условиях.

1. Составляющие вектора ξ суммарных ошибок некоррелированы и равноточны, т. е. удовлетворяют условиям (5.2.2), а на общее число используемых измерений наложено ограничение (8.2.5). В качестве критерия оптимальности используется достижение минимума дисперсии $D(l)$ оценки некоторого скалярного оцениваемого параметра l .

2. Составляющие вектора ξ равноточны и ограничены по модулю, т. е. удовлетворяют условиям (7.1.1). Критерием оптимальности служит достижение минимума максимальной ошибки χ_{\max} оценки параметра l .

3. Величины ξ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) равноточны и произвольным образом коррелированы, т. е. удовлетворяют условиям (7.1.4). Оптимизация ведется по минимуму максимального значения $D_{\max}(l)$ дисперсии оценки величины l .

Во всех случаях используется линейная или линеаризованная модель, описываемая зависимостями (4.6.1) и (5.2.3), и применяется оптимальный линейный алгоритм фильтрации (7.2.3), удовлетворяющий условиям несмещенности (7.2.4).

Как было показано, все три задачи приводят к одному и тому же оптимальному измерительному базису $d_m = \{d_1, d_2, \dots, d_m\}$. Разница заключается в том, что при решении задачи 1 используются все n допустимых измерений, в то время как оптимальные решения задач

2 и 3 получаются при использовании только m измерений. Это связано с тем, что классическая постановка задачи 1 приводит к целесообразности максимального, увеличения числа измерений (см. § 5.2). Что касается задач 2 и 3, то они решаются в неклассической минимаксной постановке, при которой излишнее увеличение числа измерений оказывается бесполезным (или даже вредным).

Покажем, что состав измерений и алгоритм фильтрации, получаемые в результате решения задачи 1, одновременно являются оптимальными при условиях задач 2 и 3. Для этого воспользуемся тем, что в задаче 1 оптимальный алгоритм фильтрации может быть построен при помощи зависимостей (8.2.23) и (8.2.26). Обозначим через $\bar{\xi}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) суммарные ошибки величин \tilde{s}_i , определяемых по формуле (8.2.26). В том случае, когда ошибки ξ_i исходных измерений \tilde{d}_i удовлетворяют условиям (7.1.1), тем же условиям удовлетворяют ошибки $\bar{\xi}_i$. Если же для величин ξ_i справедливы зависимости (7.1.4), то они сохраняются также и для ошибок $\bar{\xi}_i$. Кроме того, определяемая по формуле (8.2.23) строка $X_m = (x_1 x_2 \dots x_m)$ оптимальна по критерию (7.1.7). Отсюда непосредственно следует оптимальность рассматриваемого алгоритма фильтрации при решении задач 2 и 3.

Пользуясь полученным результатом, можно решать задачу выбора оптимальной стратегии измерений при следующих предположениях.

1. Задано множество Δ возможных измерений (конечное или бесконечное, определяемое некоторой непрерывной и ограниченной по модулю измеряемой функцией).
2. Для каждого вектора $d = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$, удовлетворяющего условию

$$d \in \Delta, \quad (8.4.1)$$

может быть построена соответствующая линейная или линеаризованная модель вида (7.2.1).

3. Суммарная ошибка ξ вектора d может быть представлена в виде суммы трех взаимно не коррелированных векторов

$$\xi = \xi' + \xi'' + \xi''', \quad (8.4.2)$$

удовлетворяющих условиям:

$$\left. \begin{aligned} |\xi'_i| &\leq \sigma_1^2 a_i, & E(\xi'') &= E(\xi''') = 0, \\ D(\xi''_i) &\leq \sigma_2^2 a_i, & D(\xi'''_i) &\leq \sigma_3^2 a_i, \\ D(\xi''_i, \xi''_j) &= 0, & D(\xi'''_i, \xi'''_j) &\text{ произвольно,} \\ i, j &= 1, 2, \dots, \kappa \quad (i \neq j). \end{aligned} \right\} \quad (8.4.3)$$

Здесь $\xi'_i, \xi''_i, \xi'''_i$ ($i = 1, 2, \dots, \kappa$) — составляющие соответствующих векторов, а a_i ($i = 1, 2, \dots, \kappa$) — заданные неотрицательные величины (при этом дан способ определения постоянной a_i для любого измерения $d_i \in \Delta$).

4. Требуется выбрать оптимальный состав измерений, удовлетворяющий условию (8.2.5), и построить соответствующий оптимальный линейный несмещенный алгоритм фильтрации, обеспечивающий одновременное достижение

$$\min_{d \in \Delta} \max_{\xi \in M} |E(\chi)| \quad \text{и} \quad \min_{d \in \Delta} \max_{\xi \in M} D(\chi). \quad (8.4.4)$$

Здесь χ — ошибка оценки l некоторого скалярного параметра, характеризуемого линейной или линеаризованной зависимостью (7.2.1), максимумы отыскиваются на множестве M ошибок ξ , удовлетворяющих условиям (8.4.2) и (8.4.3), а минимумы — на множестве возможных измерений Δ .

Не нарушая общности, можно считать, что все $a_i = 1$, $i = 1, 2, \dots, \kappa$, так как этого всегда можно добиться соответствующим нормированием вектора d . Тогда из приведенных выше результатов следует, что решение поставленной задачи совпадает с решением рассмотренной в начале этого параграфа задачи 1. При этом

$$\left. \begin{aligned} \min_{d \in \Delta} \max_{\xi \in M} |E(\chi)| &= \sigma_1^2 z_{\text{опт}}, \\ \min_{d \in \Delta} \max_{\xi \in M} D(\chi) &= \left(\frac{\sigma_2^2}{n} + \sigma_3^2 \right) z_{\text{опт}}^2, \end{aligned} \right\} \quad (8.4.5)$$

где $z_{\text{опт}}$ — оптимальное значение величины z , получаемое путем подстановки в выражение (7.3.1) элементов строки $X_m = (x_1 x_2 \dots x_n)$. Последняя соответствует опти-

мальному алгоритму фильтрации и определяется по формуле (8.2.23).

Таким образом, представляется возможным решить задачу выбора оптимального состава измерений и оптимального алгоритма фильтрации при сравнительно широких допущениях, позволяющих сочетать метод наименьших квадратов с методом минимакса (см. § 7.10). При этом, по-видимому, наиболее жестким требованием является заключающееся в зависимостях (8.4.3) условие пропорциональности максимальных значений $\max |\xi'_i|$, $\max D(\xi''_i)$ и $\max D(\xi'''_i)$ модулей и дисперсий различных составляющих векторов ξ' , ξ'' , ξ''' :

$$\max |\xi'_i| : \max D(\xi''_i) : \max D(\xi'''_i) = \sigma_1^2 : \sigma_2^2 : \sigma_3^2. \quad (8.4.6)$$

Если условие (8.4.6) не выполняется, то, вообще говоря, критерии оптимальности (8.4.4) удовлетворяются не одновременно. В этом случае следует выбрать какой-либо единый критерий. В качестве последнего может быть использовано условие достижения $\min \chi_{\max}$ при заданной надежности H или $\max H$ при заданном χ_{\max} . При этом связь между величинами χ_{\max} и H определяется выражением (3.4.25). Если исходить из допущения о нормальности закона распределения ошибок χ , то для этой цели могут быть использованы зависимости (3.5.21) и (3.5.22). При этом определение оптимального состава измерений приводит к достаточно сложной задаче нелинейного программирования. Эта задача несколько упрощается, если вместо формулы (3.5.21) пользоваться завышенным выражением (3.5.23) для определения зависимости χ_{\max} от H . В том случае, когда $\xi' = 0$, в качестве критерия оптимальности может быть использовано достижение $\min \max D(\chi)$. Можно показать, что в этом случае возникает необходимость в решении некоторой задачи квадратичного программирования. Последняя при условии пропорциональности величин $\min D(\xi''_i)$ и $\max D(\xi'''_i)$ превращается в рассмотренную выше задачу линейного программирования.

Если число n используемых измерений достаточно велико, то из выражений (7.1.2), (7.1.5) и (8.2.20) следует, что можно пренебречь влиянием ошибки ξ'' по

сравнению с ошибками ξ' и ξ''' . В частности, при условиях (8.4.3) это имеет место тогда, когда

$$\sigma_1^2, \sigma_2^2 \gg \frac{\sigma_2^2}{n}. \quad (8.4.7)$$

Легко убедиться в том, что при $\xi'' = 0$ и пропорциональности $\max |\xi'_i|$ и $\max D(\xi_i''')$ (либо при равенстве нулю одного из векторов ξ' или ξ''') мы снова приходим к указанной задаче линейного программирования.

§ 8.5. Выбор оптимального состава измерений при ограничении модулей коэффициентов корреляции

Рассмотрим задачу выбора оптимального состава измерений при допущениях, принятых в предыдущем параграфе, и ограничении, налагаемом на модули коэффициентов корреляции между составляющими вектора ξ суммарных ошибок. При этом мы будем исходить из условий (3.5.14) и отыскивать

$$\min_{d \subset \Delta} \max_{\xi \in M} D(\hat{l}). \quad (8.5.1)$$

Решение этой задачи в предположении, что используется алгоритм фильтрации по методу наименьших квадратов, получено В. Н. Почукаевым [4]. Мы рассмотрим ее в эквивалентной постановке, при которой одновременно выбирается соответствующий оптимальный линейный несмещенный алгоритм фильтрации.

Не нарушая общности, можно считать все измерения равноточными и принять, что

$$\mu_i^2 = \sigma^2, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

При этом выражение (3.5.15) принимает вид

$$\max_{\xi \in M} D(\hat{l}) = \sigma^2 \left[k \left(\sum_{i=1}^n |x_i| \right)^2 + (1-k) \sum_{i=1}^n x_i^2 \right]. \quad (8.5.2)$$

Отсюда, пользуясь приведенными выше результатами, получаем, что оптимальный состав измерений определяется при помощи оптимального измерительного базиса d_m , найденного одним из методов, описанных в §§ 7.3 и 7.4. Количества n_i ($i = 1, 2, \dots, m$) повторяющихся из-

мерений определяются по формулам (8.2.19) и (8.2.24) с округлением до ближайшего целого при соблюдении условий (8.2.6) и (8.2.25). Соответствующий оптимальный алгоритм фильтрации описывается зависимостями (8.2.23) и (8.2.26), что равносильно использованию метода наименьших квадратов при условиях (5.2.2). Из выражений (7.1.2) и (8.2.20) следует, что

$$\min_{d \in \Delta} \max_{\xi \in M} D(\hat{l}) = \left(k + \frac{1-k}{n}\right) z_{\text{опт}}^2, \quad (8.5.3)$$

где величина $z_{\text{опт}}$ вычисляется путем подстановки в формулу (7.1.6) элементов строки X_m , определяемой зависимостью (8.2.23).

Сравнение полученного выражения с зависимостями (7.11.8), (7.11.10) и (7.11.15) показывает, что найденное в § 7.11 неравенство (7.11.10) обращается в равенство при условии использования оптимального состава измерений и оптимального алгоритма фильтрации.

Пользуясь полученными выводами, можно несколько обобщить результаты предыдущего параграфа. При этом вместо зависимости (8.4.2) будем представлять суммарную ошибку ξ в виде суммы четырех взаимно не коррелированных векторов

$$\xi = \xi' + \xi'' + \xi''' + \xi^{\text{IV}}, \quad (8.5.4)$$

где векторы ξ' , ξ'' и ξ''' удовлетворяют условиям (8.4.3), а вектор ξ^{IV} — условиям

$$\left. \begin{aligned} E(\xi^{\text{IV}}) &= 0, \quad D(\xi_i^{\text{IV}}) = \sigma_4^2 a_i, \quad |K(\xi_i^{\text{IV}}, \xi_j^{\text{IV}})| \leq k, \\ i &\neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \right\} \quad (8.5.5)$$

В этих условиях сохраняется указанный в § 7.4 оптимальный состав измерений и соответствующий оптимальный алгоритм фильтрации, а второе из выражений (8.4.5) заменяется равенством

$$\min_{d \in \Delta} \max_{\xi \in M} D(\chi) = \left[\frac{\sigma_2^2 + (1-k)\sigma_4^2}{n} + \sigma_3^2 + k\sigma_4^2 \right] z_{\text{опт}}^2. \quad (8.5.6)$$

При достаточно большом числе n основную роль в правой части (8.5.6) играют последние два члена.

§ 8.6. Целесообразность и возможность повторения измерений

Приведенные выше результаты решения задачи выбора оптимального состава измерений базируются на допущении о возможности повторения одинаковых измерений. Если при этом пользоваться измеряемой функцией вида (2.4.7), то существенны следующие два предположения.

1. Одному и тому же значению вектора \mathbf{r} условий измерений может соответствовать произвольное число измерений.

2. Ограничения, налагаемые на коэффициент $K(\tilde{d}_i, \tilde{d}_j)$ корреляции между двумя измерениями \tilde{d}_i и \tilde{d}_j , не зависят от соответствующих значений \mathbf{r}_i и \mathbf{r}_j вектора \mathbf{r} .

В том случае, когда коэффициент $K(d_i, d_j)$ произволен, повторение измерений с одинаковыми значениями \mathbf{r} становится бесполезным, так как эти измерения в наилучшем случае с вероятностью единица зависимы между собой. В этих условиях вполне естествен полученный выше результат, согласно которому измерения целесообразно проводить при m оптимально выбранных значениях \mathbf{r} . При этом повторение измерений не влияет на величину используемого гарантированного критерия точности.

Если корреляция между различными измерениями не учитывается, или коэффициент $K(\tilde{d}_i, \tilde{d}_j)$ ограничен по модулю, т. е. удовлетворяется условие

$$0 \leq |K(d_i, d_j)| \leq k < 1, \quad (8.6.1)$$

то повторяющиеся измерения взаимно независимы в смысле, указанном в § 2.4. Так как при этом условие (8.6.1) не зависит от значений \mathbf{r}_i и \mathbf{r}_j , то вполне естествен приведенный выше результат, согласно которому целесообразно накапливать измерения в m оптимальным образом выбранных точках.

Таким образом, при сделанных выше предположениях, накопление измерений (если оно дается не слишком дорогой ценой) в некоторых пределах всегда целесообразно, так как при произвольной корреляции оно

не ухудшает гарантированный критерий точности, а при $|K(d_i, d_j)| < 1$ приводит к улучшению точности *).

Если второе из указанных выше предположений не используется и величина $|K(\tilde{d}_i, \tilde{d}_j)|$ возрастает при $r_i \rightarrow r_j$, то можно ожидать, что при заданном числе n накопление измерений приведет к ухудшению точности. Подобный результат получен в работе [61], в которой рассматривается задача выбора оптимального состава измерений при заданной корреляционной функции, определяющей суммарные ошибки.

Возможность практического осуществления оптимального состава измерений с накоплением зависит от структуры вектора r . Если последний не содержит времени, то накопление может оказаться возможным. В качестве примера рассмотрим задачу оптимального выбора измерительных пунктов при определении гравитационного или магнитного поля. Если пренебречь зависимостью изучаемого поля от времени, то r представляет собой вектор координат измерительного пункта, а накопление измерений равносильно многократному использованию одного и того же пункта.

Если вектор r включает время, то накопление измерений, строго говоря, требует установки большого числа приборов, одновременно проводящих однотипные измерения. Однако в ряде случаев, когда мерный интервал времени достаточно продолжителен, а допустимые минимальные промежутки между соседними измерениями малы, возможно и при использовании одного измерительного прибора практическое осуществление составов измерений, которые достаточно близки к оптимальному с накоплением. Так, при определении орбит межпланетных космических аппаратов время полета исчисляется месяцами. При этом в течение нескольких суток характер измеряемой функции изменяется незначительно. С другой стороны, минимальное время между соседними измерениями может исчисляться долями секунды. Поэтому измерения, проводимые в течение одного сеанса связи, который обычно продолжается несколько часов, можно практически рассматривать как повторяющиеся.

*) С точки зрения оптимизации используемого гарантированного критерия точности.

В том случае, когда допустимый минимальный промежуток между соседними измерениями сравнительно велик, возникает необходимость в учете его влияния, т. е. в рассмотрении задачи выбора оптимального состава измерений при ограничении их общего количества и частоты проводимых измерений. Пример решения подобной задачи дан ниже.

§ 8.7. Выбор оптимального состава измерений при ограничении их общего количества и частоты проведения измерений

Рассмотрим задачу выбора оптимального состава измерений при следующих предположениях.

1. Состояние математической модели описывается вектором $q = \{q_1, q_2, \dots, q_m\}$.

2. Множество Δ возможных измерений определяется линейной (или линеаризированной) измеряемой функцией

$$\Psi(q, t) = \Psi(t)q,$$

где $\Psi(t) = [\Psi_1(t) \Psi_2(t) \dots \Psi_m(t)]$ — заданная строка функций времени.

3. Моменты t_i ($i = 1, 2, \dots, \kappa$) измерений могут выбираться на заданном замкнутом мерном интервале

$$t_n \leq t_i \leq t_\kappa \quad (8.7.1)$$

при условиях

$$\kappa \leq n \quad (8.7.2)$$

и

$$t_{i+1} - t_i \geq \tau > 0, \quad (8.7.3)$$

где n и τ — заданные величины.

4. При этих условиях требуется выбрать оптимальную совокупность $T = (t_1 t_2 \dots t_\kappa)$ времен t_i измерений, определяющую соответствующий вектор измерений $d = \{d_1 d_2, \dots, d_\kappa\}$, где $d_i = \Psi(q, t_i)$, $i = 1, 2, \dots, \kappa$.

5. Измеренное значение \tilde{d} любого вектора $d \in \Delta$ является несмещенным, некоррелированным и равноточным, т. е. его суммарная ошибка ξ удовлетворяет условиям (5.2.2).

6. Оценка \hat{q} вектора состояния определяется при помощи линейного несмещенного алгоритма фильтрации.

7. В качестве критерия оптимальности используется достижение

$$\min_{d \in \Delta} D(\hat{l}), \quad (8.7.4)$$

где \hat{l} — оценка некоторого скалярного параметра l , связанного с вектором q линейной или линеаризованной зависимостью (5.2.3).

Воспользуемся методом решения поставленной задачи, предложенным Н. Н. Козловым в работе [31]. Из теоремы Гаусса — Маркова следует, что при этом нужно пользоваться алгоритмом фильтрации по методу наименьших квадратов, определяемым зависимостями (5.2.10) — (5.2.12). При этом в соответствии с доказанной в § 5.2 теоремой о целесообразности использования максимального числа измерений задача имеет практический смысл лишь при условии

$$0 < n < \frac{t_k - t_n}{\tau}. \quad (8.7.5)$$

Если это условие не выполняется, то оптимальным является состав измерений, соответствующий максимально плотному размещению времен t_i , при котором

$$n = \frac{t_k - t_n}{\tau}. \quad (8.7.6)$$

Все совокупности T времен измерений, удовлетворяющие условию (8.7.6), сдвинуты по времени друг относительно друга не больше, чем на τ . Поэтому при достаточно малом τ их можно считать практически эквивалентными, и задача выбора оптимального состава измерений теряет смысл.

Если условие (8.7.5) выполняется, то оптимальным является использование максимально возможного числа измерений, при котором $n = n$. В результате мы получаем задачу оптимального распределения на интервале (8.7.1) заданного числа n измерений.

Для заданной совокупности $T = (t_1 t_2 \dots t_n)$ времен измерений вектор d связан с вектором q модельной зависимостью

$$d = Aq, \quad A = (\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_m), \quad (8.7.7)$$

где

$$\mathbf{y}_j = \{\Psi_j(t_1), \Psi_j(t_2), \dots, \Psi_j(t_n)\}, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Отсюда, пользуясь зависимостью (5.2.11), находим выражение для матрицы системы нормальных уравнений

$$\mathbf{Q} = \mathbf{A}^T \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1^T \\ \mathbf{y}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{y}_m^T \end{pmatrix} (\mathbf{y}_1 \mathbf{y}_2 \dots \mathbf{y}_m) = (Q_{ij}), \quad (8.7.8)$$

где

$$Q_{ij} = \mathbf{y}_i^T \mathbf{y}_j = \sum_{a=1}^m \Psi_i(t_a) \Psi_j(t_a). \quad (8.7.9)$$

Пользуясь зависимостью (5.6.6), можно написать выражение для ковариационной матрицы оценки $\hat{\mathbf{q}}$

$$\mathbf{D}(\hat{\mathbf{q}}) = \sigma^2 \mathbf{P}, \quad (8.7.10)$$

где

$$\mathbf{P} = (\mathbf{P}_{ij}) = \mathbf{Q}^{-1}. \quad (8.7.11)$$

Не нарушая общности, можно считать, что оцениваемый параметр l совпадает с первой составляющей вектора \mathbf{q} , т. е. $l = q_1$ (путем соответствующего линейного преобразования \mathbf{q} величина $l = \mathbf{C}\mathbf{q}$ может быть включена в число составляющих этого вектора). При этом

$$\mathbf{D}(\hat{l}) = \sigma^2 P_{11}, \quad (8.7.12)$$

и задача сводится к отысканию

$$\min_{d \in \Delta} P_{11}. \quad (8.7.13)$$

Поставленная таким образом задача оптимизации носит дискретный характер, что определяется дискретным характером отыскиваемых времен t_i ($i = 1, 2, \dots, n$). При большом числе n и малом τ она может быть приближенно заменена сформулированной ниже непрерывной вариационной задачей.

Для этой цели введем непрерывную функцию $N(t)$, которая при $t = t_i$ равна числу измерений на замкнутом

интервале $[t_n, t_i]$, а в промежутках между моментами t_i изменяется по линейному закону. Очевидно, что эта функция неубывающая и удовлетворяет условиям

$$N(t_n) = 0 \quad \text{или} \quad 1, \quad N(t_n) = n. \quad (8.7.14)$$

Введем обозначение

$$u(t) = \frac{dN}{dt}. \quad (8.7.15)$$

Функция $u(t)$ имеет ступенчатый характер. Она определена на всем мерном интервале (8.7.1), кроме точек $t = t_i$. В промежутках между этими точками она сохраняет постоянные значения. При этом

$$0 \leq u(t) \leq \frac{1}{\tau}. \quad (8.7.16)$$

В этих условиях зависимость (8.7.9) может быть заменена приближенным интегральным выражением

$$Q_{ij} = \int_{t_n}^{t_k} \Psi_i(t) \Psi_j(t) u(t) dt, \quad (8.7.17)$$

а условия (8.7.5) и (8.7.14) принимают вид

$$0 < \int_{t_n}^{t_k} u(t) dt = n < \frac{t_k - t_n}{\tau}. \quad (8.7.18)$$

Из выражений (8.7.8), (8.7.11) и (8.7.17) следует, что минимизируемая величина P_{11} является функционалом от $u(t)$, т. е. $P_{11} = P_{11}[u(t)]$. Введем теперь функционал

$$J[u(t)] = \frac{1}{P_{11}[u(t)]}. \quad (8.7.19)$$

Задача сводится к отысканию

$$\max J[u(t)] \quad (8.7.20)$$

при условии (8.7.18).

Таким образом, мы получаем вариационную задачу отыскания функции $u(t)$ на замкнутом интервале

$$t_n \leq t \leq t_k. \quad (8.7.21)$$

После решения этой задачи может быть определена функция

$$N(t) = \int_{t_n}^t u(\theta) d\theta \quad (8.7.22)$$

и найдены моменты измерений t_i из условий

$$N(t_i) = i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (8.7.23)$$

Отыскиваемую функцию $u(t)$ будем в дальнейшем называть плотностью измерений.

§ 8.8. Выражение для первой вариации δJ

Напишем теперь необходимое условие достижения $\max J[u(t)]$

$$\delta J = 0, \quad (8.8.1)$$

где δJ — первая вариация рассматриваемого функционала. Для ее определения воспользуемся равенством (8.7.11), из которого следует, что

$$PQ = I.$$

Отсюда

$$\delta PQ = -P\delta Q,$$

где δP и δQ — матрицы, составленные из первых вариаций элементов матриц P и Q . Умножая это равенство справа на P , получим

$$\delta P = -P\delta QP. \quad (8.8.2)$$

Обозначим через $L(t) = (L_{ij})$ матричную функцию, определяемую равенством

$$L_{ij} = \Psi_i(t) \Psi_j(t), \quad i, j = 1, 2, \dots, m. \quad (8.8.3)$$

Из (8.7.17) и (8.8.3) следует, что

$$\delta Q = \int_{t_n}^{t_k} L(t) \delta u dt.$$

Отсюда, пользуясь (8.8.2) и (8.8.3), находим

$$\delta P_{11} = - \int_{t_H}^{t_K} (\mathbf{PLP})_{11} \delta u \, dt = - \int_{t_H}^{t_K} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m P_{1i} \Psi_i \Psi_j(t) P_{j1} \delta u \, dt,$$

или, учитывая симметричность матриц \mathbf{Q} и \mathbf{P} ,

$$\delta P_{11} = - \int_{t_H}^{t_K} \left(\sum_{i=1}^m P_{1i} \Psi_i(t) \right)^2 \delta u \, dt.$$

Окончательно, пользуясь (8.7.19), находим

$$\delta J = - \frac{\delta P_{11}}{P_{11}^2} = \int_{t_K}^{t_H} x(t) \delta u(t) \, dt, \quad (8.8.4)$$

где

$$x(t) = \left[\sum_{i=1}^m v_i \Psi_i(t) \right]^2, \quad (8.8.5)$$

$$v_1 = 1, \quad v_i = \frac{P_{1i}}{P_{11}}, \quad i = 2, 3, \dots, m. \quad (8.8.6)$$

Заметим, что величины P_{ij} являются функционалами отыскиваемой функции $u(t)$. Поэтому $x(t)$ зависит от $u(t)$.

§ 8.9. Решение вариационной задачи

Исключим пока из рассмотрения особый случай, когда существует такая функция $u(t)$, для которой

$$x(t) = \text{const} \quad \text{при} \quad t_H \leq t_1 \leq t \leq t_2 \leq t_K. \quad (8.9.1)$$

Покажем, что тогда оптимальная функция $u(t)$ имеет релейный характер, т. е. принимает лишь свои предельные значения, определяемые неравенством (8.7.16)

$$u_{\min} = 0, \quad u_{\max} = \frac{1}{\tau}. \quad (8.9.2)$$

Предположим обратное. Тогда на некоторой части интервала (8.7.21) неравенство (8.7.16) принимает вид

$$0 < u(t) < \frac{1}{\tau}. \quad (8.9.3)$$

На рис. 8.9.1 изображен примерный график функций $u(t)$ и $x(t)$ в этом случае. Из графика видно, что на замкнутом интервале (8.7.21) можно всегда выбрать две точки, t_1 и t_2 , для которых

$$x(t_1) > x(t_2), \quad u(t_1) < \frac{1}{\tau}, \quad u(t_2) > 0. \quad (8.9.4)$$

Отсюда следует, что в окрестности точек t_1 и t_2 можно всегда произвести такую малую вариацию функции $u(t)$, при которой

— условие (8.7.16) не нарушается;

— $\int_{t_n}^{t_k} u(t) dt$ увеличивается в окрестности точки t_1 на не-

которую величину $\epsilon > 0$;

— в окрестности точки t_2 этот интеграл уменьшается на ту же величину.

При такой вариации δu условие (8.7.18) не нарушается. Поэтому она принадлежит к числу допустимых вариаций. Из зависимостей (8.8.4) и (8.9.4) следует, что при этом

$$\delta J = \epsilon [x(t_1) - x(t_2)] > 0,$$

что противоречит условию оптимальности (8.7.20).

Таким образом, весь мерный интервал (8.7.21) разбивается на две группы временных интервалов. На первой из них $u = 0$ и измерения вообще не проводятся. На второй группе $u = 1/\tau$, что соответствует проведению

измерений с максимально возможной частотой. Отсюда следует, что задача сводится к отысканию границ этих интервалов, т. е. точек переключения функции $u(t)$, в которых она переходит с одного из значений (8.9.2) на другое. Обозначим соответствующие моменты времени через θ_j ($j = 1, 2, \dots$) и покажем, что во всех этих

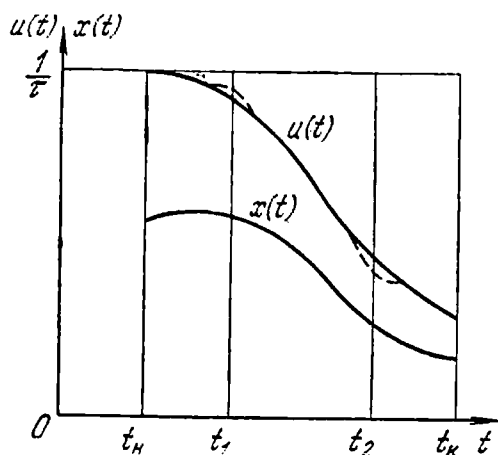


Рис. 8.9.1. Допустимая вариация функции $u(t)$ при условии (8.9.4).

точках значение функции $x(\theta)$ одинаково, т. е.

$$x(\theta_j) = \lambda = \text{const}, \quad j = 1, 2, \dots, \alpha. \quad (8.9.5)$$

Предположим обратное. Пусть в двух точках θ_j и $\theta_r (j \neq r)$

$$x(\theta_j) \neq x(\theta_r). \quad (8.9.6)$$

Для определенности рассмотрим случай, когда

$$x(\theta_j) > x(\theta_r), \quad (8.9.7)$$

и оба рассматриваемых момента соответствуют переключению $u(t)$ с 0 на $1/\tau$ (рис. 8.9.2).

Произведем теперь вариацию функции $u(t)$, при которой θ_j заменяется на $\theta_j - \varepsilon$, а θ_r — на $\theta_r + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — произвольная малая величина. Эта вариация является допустимой, так как она не нарушает условий (8.7.16) и (8.7.18). При этом из (8.8.4) и (8.9.7) следует, что

$$\delta J = \frac{\varepsilon}{\tau} [x(\theta_j) - x(\theta_r)] > 0,$$

что противоречит условию (8.7.20).

Аналогичные рассуждения могут быть проведены во всех остальных случаях, при которых имеет место неравенство (8.9.6), что и доказывает необходимость условия (8.9.5).

Заметим, что, пользуясь зависимостями (8.8.5) и (8.9.5), можно показать, что при достаточно слабых ограничениях, налагаемых на функции $\Psi_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, m$), число α времен θ_j ($j = 1, 2, \dots, \alpha$) переключения функции $u(t)$ должно быть конечным.

Покажем теперь, что

$$u(t) = \begin{cases} \frac{1}{\tau} & \text{при } x(t) > \lambda, \\ 0 & \text{при } x(t) < \lambda. \end{cases} \quad (8.9.8)$$

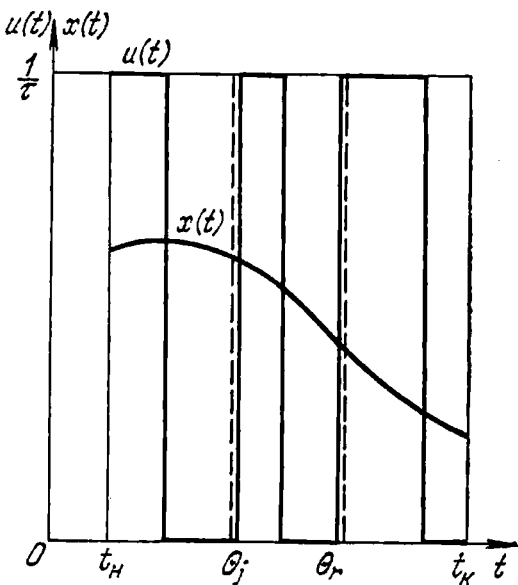


Рис. 8.9.2. Допустимая вариация функции $u(t)$ при условии (8.9.7).

Предположим обратное. Пусть, например, в некоторой точке t_1 , лежащей на открытом интервале (θ_j, θ_{j+1}) ,

$$x(t_1) < \lambda, \quad u(t_1) = \frac{1}{\tau}. \quad (8.9.9)$$

Кроме того, в соответствии с равенством (8.9.5), на границах этого интервала

$$x(\theta_j) = x(\theta_{j+1}) = \lambda.$$

В этом случае допустима вариация δu , уменьшающая в окрестности точки t_1 значение $\int_{t_n}^{t_k} u(t) dt$ на малую величину $\varepsilon > 0$ и одновременно заменяющая θ_{j+1} на

$\theta_{j+1} + \varepsilon\tau$ (или θ_j на $\theta_j - \varepsilon\tau$). Из рис. 8.9.3 видно, что в этом случае

$$\delta J = \varepsilon [\lambda - x(t_1)] > 0,$$

что противоречит условию (8.7.20).

Аналогичным образом может быть доказана невозможность других случаев невыполнения условия (8.9.8).

Пользуясь приведенными свойствами оптимальной функции $u(t)$, можно при заданной $x(t)$ определить соответствующую $u(t)$. Для этого зададимся некоторым значением λ , удовлетворяющим условию

$$x_{\min} < \lambda < x_{\max}, \quad (8.9.10)$$

где x_{\min} и x_{\max} — соответственно минимальное и максимальное значения функции $x(t)$ на замкнутом интервале (8.7.21).

Обозначим теперь через $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_\alpha$ все значения времени t , соответствующие точкам пересечения кривой

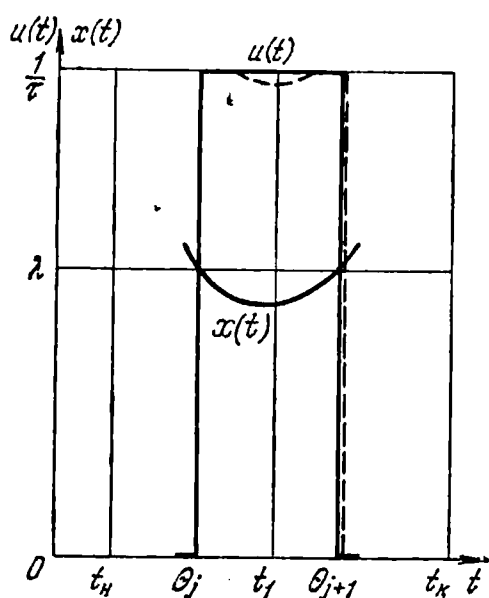


Рис. 8.9.3. Допустимая вариация функции $u(t)$ при условии (8.9.9).

$x = x(t)$ с прямой $x = \lambda$ на интервале (8.7.21). Пользуясь этими точками и условием (8.9.8), можно построить соответствующую функцию $u(t)$ (рис. 8.9.4). Она будет удовлетворять всем приведенным выше требованиям к оптимальной функции $u(t)$, за исключением,

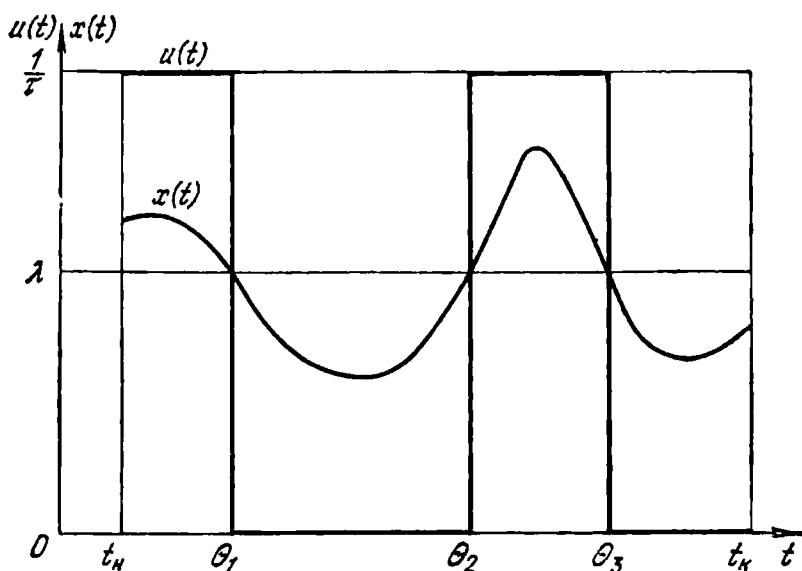


Рис. 8.9.4. Графическое решение вариационной задачи.

вообще говоря, условия (8.7.18). Для того чтобы это условие выполнялось, необходимо подобрать соответствующее значение λ . При этом можно воспользоваться выражением

$$\int_{t_n}^{t_k} u(t) dt = \frac{S(\lambda)}{\tau}, \quad (8.9.11)$$

где $S(\lambda)$ — сумма продолжительностей всех временных интервалов, на которых $x(t) > \lambda$ и $u(t) = 1/\tau$. Из (8.7.18) и (8.9.11) получаем уравнение для определения λ :

$$S(\lambda) = \tau n. \quad (8.9.12)$$

Очевидно, что при изменении λ от x_{\min} до x_{\max} функция $S(\lambda)$ монотонно убывает от величины $t_k - t_n$ до нуля. Отсюда, пользуясь неравенством (8.7.5), находим, что уравнение (8.9.12) имеет единственное решение, для нахождения которого могут быть с успехом использо-

ваны различные приближенные методы (перебора, последовательных приближений и т. п.).

Мы рассмотрели задачу определения оптимальной функции $u(t)$ по заданной $x(t)$. Однако из равенств (8.7.11), (8.7.17), (8.8.5) и (8.8.6) следует, что $x(t)$ в свою очередь зависит от $u(t)$. В связи с этим может быть предложен следующий способ решения рассматриваемой вариационной задачи.

1. Задаемся некоторым значением вектора $\mathbf{v} = \{1, v_2, v_3, \dots, v_m\}$.

2. По формуле (8.8.5) определяем соответствующую функцию $x(t)$.

3. Пользуясь полученным результатом, находим описанным выше способом функцию $u(t)$.

4. При помощи зависимостей (8.7.11), (8.7.17) и (8.8.6) находим соответствующее найденной функции $u(t)$ значение вектора \mathbf{v} . Обозначим его через \mathbf{v}' .

5. Задача может считаться решенной, если исходное и найденное в результате значения вектора \mathbf{v} совпадают, т. е. выполняется условие

$$\mathbf{v}'(\mathbf{v}) = \mathbf{v}. \quad (8.9.13)$$

Таким образом, задача сводится к решению векторного уравнения (8.9.13), которое представляет собой систему из $m - 1$ скалярных операторных уравнений. Для решения последней может быть использован любой метод приближенного решения системы трансцендентных уравнений, например, способ, основанный на отыскании минимума величины

$$\Phi(\mathbf{v}) = |\mathbf{v} - \mathbf{v}'|^2 = \sum_{i=2}^m (v_i - v'_i)^2. \quad (8.9.14)$$

Вычислительные аспекты решения этой задачи методом наискорейшего спуска рассмотрены в работе [31].

В качестве первого приближения, используемого при отыскании $\min \Phi(\mathbf{v})$, может быть взято значение вектора \mathbf{v} , найденное при помощи решения соответствующей задачи Эльвинга. При этом временные интервалы, на которых $u(t) = 1/\tau$ следует выбирать в окрестностях времен t_i оптимальных измерений в задаче Эльвинга, а продолжительности этих интервалов принимать равными величинам $n_i \tau$, где n_i — соответствующие числа опти-

мальных измерений в задаче Эльвинга. Для построенной таким образом функции $u(t)$ по формулам (8.7.11), (8.7.17) и (8.8.6) находится соответствующее приближенное значение вектора v .

В заключение покажем, что полученная описанным способом функция $u(t)$ удовлетворяет достаточным условиям сильного локального максимума функционала $J[u(t)]$. Обозначим через λ_0 соответствующее этой функции значение λ в зависимости (8.9.8) и разобьем весь замкнутый интервал (8.7.21) на множества Σ_0 , Σ_1 и Σ_2 времен t , удовлетворяющих условиям

$$x(t) \begin{cases} = \lambda_0 & \text{при } t \in \Sigma_0, \\ < \lambda_0 & \text{при } t \in \Sigma_1, \\ > \lambda_0 & \text{при } t \in \Sigma_2. \end{cases} \quad (8.9.15)$$

В качестве меры $M(\Sigma_i)$ ($i = 0, 1, 2$) соответствующего множества используем сумму продолжительностей временных интервалов, образующих это множество. Так как мы исключили из рассмотрения указанный в начале настоящего параграфа особый случай, то можно написать, что

$$M(\Sigma_0) = 0. \quad (8.9.16)$$

Рассмотрим теперь произвольную вариацию δu . Из (8.9.16) следует, что

$$\int_{t_H}^{t_K} \delta u dt = \int_{\Sigma_1} \delta u dt + \int_{\Sigma_2} \delta u dt,$$

где интегрирование в правой части ведется по всем временным интервалам, входящим в соответствующие множества.

Отсюда, пользуясь зависимостями (8.7.16), (8.7.18), (8.9.8) и (8.9.15), находим, что для любой допустимой вариации

$$\int_{\Sigma_1} \delta u dt = - \int_{\Sigma_2} \delta u dt = \varepsilon > 0. \quad (8.9.17)$$

При этом $\delta u(t) \geq 0$ для $t \in \Sigma_1$ и $\delta u(t) \leq 0$ для $t \in \Sigma_2$. Отсюда, пользуясь (8.8.4), можно на основании

теоремы о среднем [48] написать, что

$$\delta J = v(x_1 - x_2),$$

где x_1 и x_2 — некоторые средние значения функции $x(t)$ на множествах Σ_1 и Σ_2 . Из зависимостей (8.9.15) находим, что

$$x_1 < x_2.$$

Поэтому

$$\delta J < 0, \quad (8.9.18)$$

что является достаточным условием сильного локального максимума. Вопрос о том, является ли этот максимум абсолютным, нуждается в дополнительном исследовании.

§ 8.10. Особый случай

В предыдущем параграфе мы исключили из рассмотрения особый случай, характеризуемый условием (8.9.1). Перейдем теперь к рассмотрению этого случая.

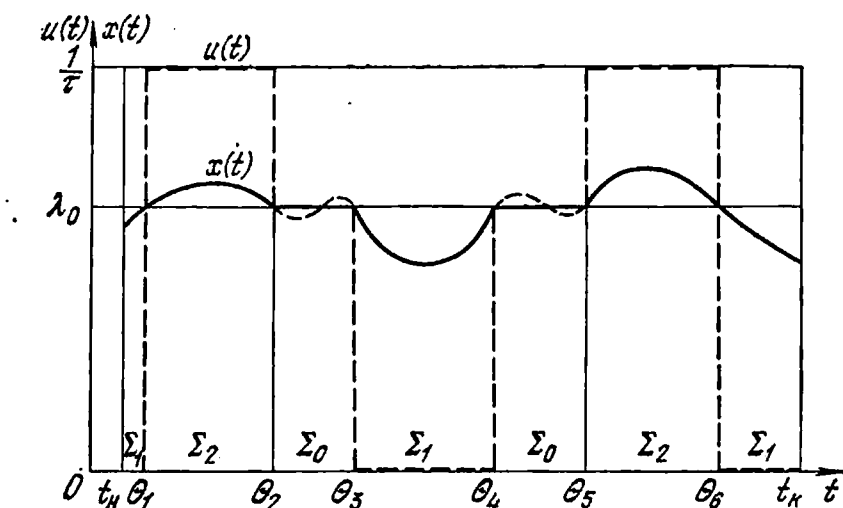


Рис. 8.10.1. Определение функции $u(t)$ в особом случае.

Обозначим через λ_0 постоянную в условии (8.9.1) и, пользуясь зависимостью (8.9.15), разобьем замкнутый интервал (8.7.21) на множества Σ_0 , Σ_1 и Σ_2 . Введем обозначение мер этих множеств (см. предыдущий параграф)

$$M(\Sigma_i) = M_i, \quad i = 0, 1, 2. \quad (8.10.1)$$

Очевидно, что

$$M_0 + M_1 + M_2 = t_k - t_n. \quad (8.10.2)$$

На рис. 8.10.1 сплошной линией изображен примерный график функции $x(t)$ в особом случае, а на оси абсцисс отмечены временные интервалы, входящие в множества Σ_0 , Σ_1 и Σ_2 .

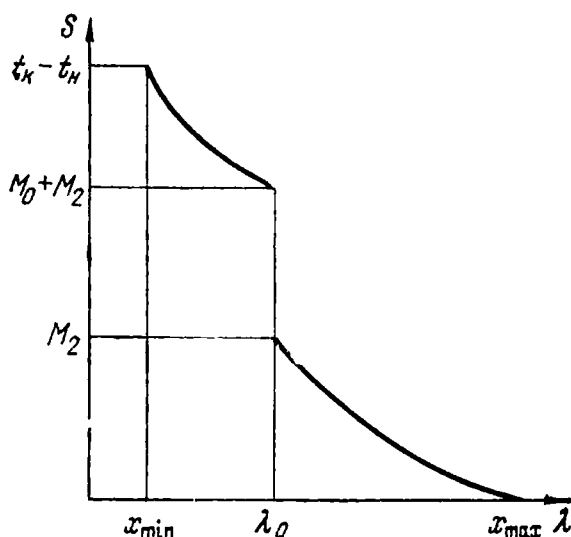


Рис. 8.10.2. Функция $S(\lambda)$ в особом случае.

Рассмотрим теперь введенную в предыдущем параграфе функцию $S(\lambda)$, равную мере множества времен t , при которых $x(t) > \lambda$. Очевидно, что

$$S(\lambda) \begin{cases} > M_0 + M_2 & \text{при } \lambda < \lambda_0, \\ \leq M_2 & \text{при } \lambda \geq \lambda_0. \end{cases} \quad (8.10.3)$$

С другой стороны, из (8.9.1) следует, что в особом случае условие (8.9.16) не выполняется и

$$M_0 = M(\Sigma_0) > 0. \quad (8.10.4)$$

Поэтому функция $S(\lambda)$ имеет разрыв в точке $\lambda = \lambda_0$ (рис. 8.10.2). При этом не существует значений $S(\lambda)$, лежащих на интервале

$$M_2 < S(\lambda) \leq M_2 + M_0. \quad (8.10.5)$$

Отсюда следует, что уравнение (8.9.12) имеет смысл лишь при условии

$$\tau n \leq M_2 \quad \text{или} \quad \tau n > M_2 + M_1. \quad (8.10.6)$$

При этом условии остаются справедливыми все результаты предыдущего параграфа и по $x(t)$ однозначно определяется соответствующая релейная функция $u(t)$.

Если это условие не выполняется, т. е.

$$M_0 + M_2 \geq \tau n > M_2, \quad (8.10.7)$$

то уравнение (8.9.12) не имеет смысла.

Рассматривая допустимые вариации δu , можно аналогично тому, как это сделано в предыдущем параграфе, показать, что в этом случае

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \in \Sigma_1, \\ \frac{1}{\tau} & \text{при } t \in \Sigma_2. \end{cases} \quad (8.10.8)$$

При этом равенство (8.7.18) можно представить в виде

$$\int_{\Sigma_1} u(t) dt = n - \frac{M_2}{\tau}, \quad (8.10.9)$$

где интегрирование ведется по всем значениям t , входящим в множество Σ_0 .

В том случае, когда неравенство (8.10.7) обращается в равенство

$$M_0 + M_2 = \tau n, \quad (8.10.10)$$

зависимость (8.10.9) принимает вид

$$\int_{\Sigma_1} u(t) dt = \frac{M_0}{\tau}. \quad (8.10.11)$$

При этом, пользуясь условием (8.7.16) и выражением (8.10.1), находим, что

$$u(t) = \frac{1}{\tau} \quad \text{при } t \in \Sigma_0. \quad (8.10.12)$$

В этом случае зависимости (8.10.8) и (8.10.12) полностью определяют функцию $u(t)$ на всем интервале (8.7.21).

Таким образом, существенный интерес представляет случай, когда

$$M_0 + M_2 > \tau n > M_2. \quad (8.10.13)$$

Из (8.10.9) и (8.10.13) следует существование времен $t \in \Sigma_0$, для которых $u(t) \neq 0$. Покажем теперь, что в этом случае из анализа первой вариации δJ нельзя определить характер функции $u(t)$ на множестве Σ_0 . Для этого дополним выражение (8.10.8) на множестве Σ_0 произвольной функцией $u(t)$, удовлетворяющей условию (8.10.9). В результате на всем интервале (8.7.21) график функции $u(t)$ примет вид, изображенный на рис. 8.10.1 пунктиром. Покажем теперь, что при произвольной допустимой вариации δu такой функции сохраняется условие

$$\delta J \leq 0, \quad (8.10.14)$$

которое не противоречит требованию (8.7.20). Для этого введем обозначение

$$\int_{\Sigma_i} \delta u \, dt = \varepsilon_i, \quad i = 0, 1, 2. \quad (8.10.15)$$

Из зависимостей (8.7.16), (8.7.18), (8.10.8) и (8.10.15) следует, что

$$\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 0, \quad \varepsilon_1 \geq 0, \quad \varepsilon_2 \leq 0. \quad (8.10.16)$$

Далее, из выражения (8.8.4), учитывая то, что в соответствии с зависимостями (8.7.16) и (8.10.8) допустимая вариация $\delta u(t)$ на множестве Σ_1 неотрицательна, а на множестве Σ_2 — неположительна, находим, пользуясь теоремой о среднем,

$$\delta J = \lambda_0 \varepsilon_0 + x_1 \varepsilon_1 + x_2 \varepsilon_2, \quad (8.10.17)$$

где x_1 и x_2 — некоторые средние значения функции на множествах Σ_1 и Σ_2 .

Из (8.9.15) следует, что

$$x_1 < \lambda_0, \quad x_2 > \lambda_0. \quad (8.10.18)$$

Из (8.10.16), (8.10.17) и (8.10.18) получаем

$$\delta J = (x_1 - \lambda_0) \varepsilon_1 + (x_2 - \lambda_0) \varepsilon_2 \leq 0 \quad (8.10.19)$$

Из этого выражения следует, что в том случае, когда $\delta J = 0$ на множествах Σ_1 и Σ_2 (т. е. варьируется только значение функции $u(t)$ на множестве Σ_0), неравенство (8.10.14) обращается в равенство

$$\delta J = 0.$$

Поэтому в особом случае при условии (8.10.13) одного анализа первых вариаций δJ недостаточно для отыскания $\max J[u(t)]$. Возникает необходимость в проведении более углубленных исследований (например, путем анализа старших вариаций рассматриваемого функционала).

Мы здесь ограничились рассмотрением того случая, когда существует только одна постоянная λ_0 , для которой имеет место условие (8.9.1). Однако полученный результат может быть легко распространен и на тот случай, когда имеется несколько таких констант. При этом можно показать, что только для одной из них может удовлетворяться условие (8.10.13), приводящее к существенно особому случаю. Для всех остальных констант справедливы зависимости (8.10.6) или (8.10.10), при которых постоянство функции $x(t)$ не влияет на решение задачи.

§ 8.11. Примеры

1. Определения движения локомотива. Рассмотрим вопрос о выборе оптимального состава измерений в задаче определения движения локомотива при условиях, указанных в § 8.7. При этом мы будем пользоваться линейной математической моделью (5.10.3)

$$s = vt + a. \quad (8.11.1)$$

Не нарушая общности, можно считать мерный интервал (8.7.21) симметричным относительно начала отсчета времени, т. е.

$$-T \leq t \leq T, \quad (8.11.2)$$

где $T = \frac{1}{2}(t_k - t_n)$. В качестве оцениваемого параметра l примем скорость v . Тогда

$$q = \{v, a\}, \quad \Psi_1 = t, \quad \Psi_2 = 1. \quad (8.11.3)$$

При этом выражения (8.7.17) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} Q_{11} &= \int_{-T}^T t^2 u(t) dt, \\ Q_{12} &= Q_{21} = \int_{-T}^T t u(t) dt, \\ Q_{22} &= \int_{-T}^T u(t) dt = n. \end{aligned} \right\} \quad (8.11.4)$$

Для построения первого приближения используем приведенное в § 8.3 решение задачи Эльвинга, согласно которому оптимальные времена t_1 , t_2 и соответствующие числа n_1 , n_2 измерений определяются равенствами

$$t_1 = -T, \quad t_2 = T, \quad n_1 = n_2 = \frac{n}{2}. \quad (8.11.5)$$

Отсюда находим следующее приближенное выражение для функции $u(t)$:

$$u(t) = \begin{cases} \frac{1}{\tau} & \text{при } -T \leq t \leq -T + \frac{n\tau}{2}, \\ 0 & \text{при } -T + \frac{n\tau}{2} < t < T - \frac{n\tau}{2}, \\ \frac{1}{\tau} & \text{при } T - \frac{n\tau}{2} \leq t \leq T. \end{cases} \quad (8.11.6)$$

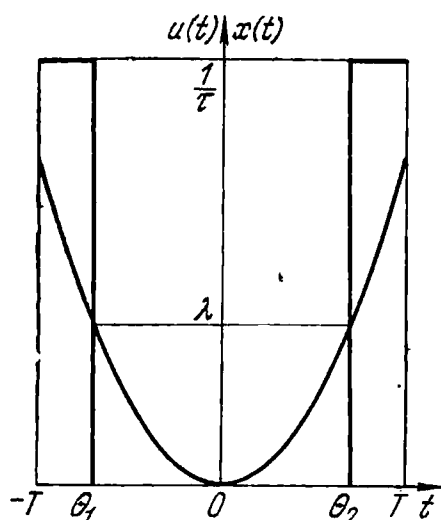
Далее, подставляя (8.11.6) в (8.11.4), находим

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{2}{\tau} \int_{T-\frac{n\tau}{2}}^T t^2 dt = \frac{n}{12} (12T^2 - 6Tn\tau + n^2\tau^2), \\ Q_{12} &= Q_{21} = 0, \quad Q_{22} = n, \\ Q &= n \begin{pmatrix} \frac{12T^2 - 6Tn\tau + n^2\tau^2}{12} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ P = Q^{-1} &= \frac{1}{n} \begin{pmatrix} \frac{12}{12T^2 - 6Tn\tau + n^2\tau^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (8.11.7)$$

В результате, учитывая (8.11.3), можно представить выражения (8.8.5) и (8.8.6) в виде

$$v_1 = 1, \quad v_2 = 0, \quad x(t) = t^2. \quad (8.11.8)$$

Таким образом, кривая $x = x(t)$ представляет собой параболу. Соответствующее графическое решение задачи определения $u(t)$ по $x(t)$ дано на рис. 8.11.1. Из рисунка видно, что полученная оптимальная функция $u(t)$



совпадает с принятым в качестве первого приближения выражением (8.11.6), которое и является решением рассматриваемой задачи. Отсюда следует, что при оптимальном распределении измерений их общее число n должно быть разбито на две равные группы, размещенные с максимальной плотностью на краях мерного интервала.

Оценим выигрыш от использования получаемого оптимального распределения измерений. Для этого сравним его с равномерным распределением. Обозначим

Рис. 8.11.1. Графический выбор оптимального распределения измерений в задаче определения скорости локомотива.

через $D_{\min}(\hat{v})$ значение дисперсии оценки \hat{v} в первом случае, а через $D_p(\hat{v})$ — во втором. Из (8.7.12) и (8.11.7) следует, что

$$D_{\min}(\hat{v}) = \sigma^2 P_{11} = \frac{3\sigma^2}{n(3T^2 - 3TN + N^2)}. \quad (8.11.9)$$

где согласно условию (8.7.5)

$$0 < N = \frac{n\tau}{2} \leq T. \quad (8.11.10)$$

Далее из выражения (5.10.14), учитывая, что в нем T — полная продолжительность мерного интервала, в то время как здесь T — половина длины этого интервала, находим

$$D_p(\hat{v}) = \frac{3(n-1)}{n(n+1)} \cdot \frac{\sigma^2}{T^2}.$$

Обозначим через k отношение рассматриваемых дисперсий. Тогда, полагая число n достаточно большим, можно написать, что

$$k = \frac{D_p(\hat{\nu})}{D_{\min}(\hat{\nu})} = \frac{3T^2 - 3TN + N^2}{T^2} = 1 + \left(\frac{N}{T} - 1\right)\left(\frac{N}{T} - 2\right). \quad (8.11.11)$$

С другой стороны, неравенство (8.11.10) можно переписать в виде

$$0 < \frac{N}{T} \leq 1. \quad (8.11.12)$$

Пользуясь выражением (8.11.11), легко показать, что коэффициент k , характеризующий степень выигрыша, монотонно убывает при возрастании отношения N/T на интервале (8.11.12) (т. е. при возрастании величины τ). При этом

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} k = 3,$$

что соответствует максимальному выигрышу, получаемому при допущении о возможности повторения измерений (см. § 8.3).

При $N/T = 1$, $k = 1$. В этом случае выигрыша нет, так как оптимальное распределение измерений совпадает с равномерным (в данном случае единственно возможным).

Выберем теперь в качестве оцениваемого параметра l величину a . В этом случае

$$q = \{a, v\}, \quad \Psi_1 = 1, \quad \Psi_2 = t.$$

Если принять в качестве первого приближения значение функции $u(t)$, определяемое выражением (8.11.6), то аналогично зависимостям (8.11.7) и (8.11.8) можно написать, что

$$P = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{12}{12T^2 - 6Tn\tau + n^2\tau^2} \end{pmatrix}, \quad (8.11.13)$$

$$v_1 = 1, \quad v_2 = 0, \quad x(t) = 1. \quad (8.11.14)$$

Таким образом, мы получим особый случай, характеризующий условием (8.9.1).

Равенства (8.11.14) справедливы для функции $u(t)$, удовлетворяющей условию

$$Q_{12} = Q_{21} = \int_{-T}^T tu(t) dt = 0, \quad (8.11.15)$$

и в частности, при

$$u(-t) = u(t), \quad (8.11.16)$$

так как в этом случае

$$P_{12} = P_{21} = 0, \quad P_{11} = \frac{1}{n}. \quad (8.11.17)$$

Все распределения измерений, удовлетворяющие условию (8.11.15), обеспечивают получение одинакового значения дисперсии оценки

$$D(\hat{a}) = \sigma^2 P_{11} = \frac{\sigma^2}{n}, \quad (8.11.18)$$

которое совпадает с выражением (8.3.6), полученным в результате решения задачи Эльвинга. Отсюда следует, что для любых n измерений (независимо от величины τ)

$$D(\hat{a}) \geq \frac{\sigma^2}{n}.$$

Таким образом, любое распределение измерений, удовлетворяющее условию (8.11.15), обеспечивает достижение абсолютного минимума $D(\hat{a})$.

В частности, этому условию удовлетворяет распределение (8.11.6), являющееся одновременно оптимальным с точки зрения достижения минимума $D(\hat{a})$.

Переходя к дискретным измерениям и пользуясь выражением (8.10.6), находим, что условие оптимальности (8.11.15) принимает вид

$$\sum_{i=1}^n t_i = 0. \quad (8.11.19)$$

Действительно, в этом случае

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sum_{i=1}^n t_i^2} \end{pmatrix}, \quad D(\hat{a}) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

2. Определение орбиты искусственного спутника Марса. В предыдущем примере мы получили оптимальное распределение измерений, качественно не отличающееся от результата решения задачи Эльвинга. При этом необходимость соблюдения условия (8.7.3) приводит к тому, что оптимальные моменты измерений заменяются соответствующими промежутками времени, на которых измерения ведутся с максимально допустимой частотой. Однако при решении более сложных задач может оказаться, что учет влияния условия (8.7.3) приводит к качественному изменению характера получаемых результатов. При этом число оптимальных промежутков измерений в некоторых случаях оказывается больше размерности m вектора q .

В качестве примера рассмотрим результаты выбора оптимального распределения измерений в задаче определения орбиты искусственного спутника Марса при следующих допущениях.

1. Используется линеаризованная модель кеплеровского движения относительно притягивающего центра заданной массы. При этом в правой части уравнения (4.4.1) учитывается только первый член. Размерность вектора состояния системы

$$m = 6,$$

а составляющими этого вектора служат отклонения элементов орбиты спутника от их некоторых опорных значений.

2. Целью эксперимента является определение с максимальной точностью величины минимального расстояния спутника до центра Марса.

3. Измеряется первая производная по времени от расстояния между спутником и измерительным пунктом, расположенным на поверхности Земли (радиальная скорость).

4. Измерения ведутся на двух соседних витках орбиты спутника.

5. Выбор оптимального распределения измерений проводится при условиях, принятых в начале § 8.7.

Результаты решения этой задачи приведены в работе [31], где показано, что при малых значениях

коэффициента

$$\alpha = \frac{n\tau}{t_k - t_n}$$

измерения следует проводить с максимальной допустимой частотой на шести промежутках времени. Последние расположены в районах перицентров рассматриваемых витков орбиты и находятся в окрестности оптимальных времен, получаемых в результате решения соответствующей задачи Эльвинга. По мере увеличения α продолжительности этих промежутков возрастают. Начиная с некоторого значения α появляются новые оптимальные промежутки времен измерений, расположенные в районе апоцентра орбиты. В рассмотренных численных примерах общее число оптимальных промежутков времен измерений доходит до 9. Таким образом, при больших значениях коэффициента α получается оптимальное распределение измерений, существенно отличающееся от результатов решения задачи Эльвинга.

§ 8.12. Выбор универсального оптимального состава измерений

В предыдущих параграфах были рассмотрены задачи выбора оптимального состава измерений при условии минимизации некоторой характеристики точности оценки заданного скалярного параметра l . В том случае, когда исследователя интересует точность оценки нескольких скалярных параметров, каждому из них будет, вообще говоря, соответствовать свой оптимальный состав измерений. В связи с этим представляет интерес выбор универсального состава измерений, оптимизирующего одновременно точность оценки нескольких параметров, образующих вектор $l = \{l_1, l_2, \dots, l_n\}$.

В теории оптимального планирования экспериментов для этой цели используются различные универсальные критерии оптимальности, на основе которых решается задача выбора состава измерений. Желающих ознакомиться с полученными результатами мы отсылаем к соответствующей литературе [47, 58]. Недостатком этих критериев является то, что они не всегда характеризуют точность оценки интересующих исследователя параметров (см. § 3.7).

Более удачным, на наш взгляд, является универсальный критерий оптимальности, используемый в работе В. Г. Ершова [26]. При этом отыскивается минимум числа n измерений при условии, что

$$D(\hat{l}_i) \leq \sigma_i^2, \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad (8.12.1)$$

где σ_i^2 — заданные положительные числа.

В указанной работе задача выбора оптимального состава измерений по этому критерию рассматривается при предположениях 1, 2 и 5, сделанных в § 8.2 при постановке задачи Эльвинга. В результате проделанных исследований в работе получен следующий основной результат, который мы здесь приводим без доказательства:

В числе оптимальных составов измерений имеется по крайней мере один, соответствующий проведению β различных измерений, каждое из которых повторяется n_i раз. При этом

$$\beta = \frac{m(m+1) - (m-k)(m-k+1)}{2}, \quad \sum_{i=1}^{\beta} n_i = n. \quad (8.12.2)$$

При $k = 1$ $\beta = m$, что соответствует результату, полученному при решении задачи Эльвинга.

§ 8.13. Одновременное использование единичных и множественных измерений

Рассмотрим задачу выбора оптимального состава в том случае, когда множество Δ включает единичные и множественные измерения (см. § 2.4). Будем решать ее при следующих предположениях.

1. Множество Δ состоит из некоторого числа μ единичных измерений d_1, d_2, \dots, d_μ и бесконечной совокупности множественных измерений. При этом в число величин d_1, d_2, \dots, d_μ может входить как априорная, так и апостериорная информация.

2. Вектор $d_\mu = \{d_1, d_2, \dots, d_\mu\}$ единичных измерений связан с вектором $q = \{q_1, q_2, \dots, q_m\}$ состояния системы линейной или линеаризованной моделью

$$d_\mu = A_\mu q, \quad (8.13.1)$$

где A_μ — заданная матрица $\mu \times m$.

3. Удовлетворяются условия $1 \div 6$ § 8.2. При этом условия 1 и 3 относятся к совокупности Δ' возможных множественных измерений. Повторение единичных измерений, входящих в вектор d_μ , не допускается.

4. Отыскивается приближенное решение рассматриваемой задачи выбора оптимального состава измерений, формально допускающее проведение дробных чисел повторяющихся измерений, которые затем округляются до ближайших целых с соблюдением условий (8.2.6) и (8.2.25).

Как это следует из приведенной в § 5.2 теоремы о выборе оптимального состава измерений, среди решений рассматриваемой задачи всегда имеется такое, при котором используется весь вектор d_μ возможных единичных измерений, а неравенство (8.2.5) обращается в равенство. Соответствующий этому решению вектор d имеет вид

$$d = \{d_\mu, d'\} = \begin{pmatrix} d_\mu \\ d' \end{pmatrix}, \quad (8.13.2)$$

где d' — совокупность используемых множественных измерений.

Вектор d' , вообще говоря, включает повторяющиеся составляющие исходного вектора d_N , используемого при построении множества Δ' (см. условие 1 в § 8.2). Поэтому, аналогично тому, как это сделано в § 8.2, можно ввести вектор $s = \{s_1, s_2, \dots, s_N\}$, составленный из средних арифметических повторяющихся составляющих вектора d_N и связанный с вектором q модельной зависимостью (8.2.10). При этом выражение (8.13.2) принимает вид

$$d = \{d_\mu, s\} = \begin{pmatrix} d_\mu \\ s \end{pmatrix}. \quad (8.13.3)$$

Пользуясь равенствами (8.2.10), (8.13.1) и (8.13.3), можно написать математическую модель задачи

$$d = \begin{pmatrix} A_\mu \\ A \end{pmatrix} q. \quad (8.13.4)$$

Используемый при фильтрации по методу наименьших квадратов линейный несмещенный алгоритм может

быть представлен в виде

$$\hat{l} = (X_\mu X) \begin{pmatrix} \tilde{d}_\mu \\ \tilde{s} \end{pmatrix} = X_\mu \tilde{d}_\mu + X \tilde{s}, \quad (8.13.5)$$

где \tilde{d}_μ и \tilde{s} — измеренные значения векторов d_μ и s , а $X_\mu = (\bar{x}_1 \bar{x}_2 \dots \bar{x}_\mu)$ и $X = (x_1 x_2 \dots x_N)$ — строки коэффициентов алгоритма.

Из (8.13.4) и (8.13.5) находим условие несмещенности (5.2.34):

$$(X_\mu X) \begin{pmatrix} A_\mu \\ A \end{pmatrix} = X_\mu A_\mu + X A = C. \quad (8.13.6)$$

Далее, аналогично равенству (8.2.13) можно написать выражение для дисперсии оценки

$$D(\hat{l}) = \sigma^2 \left(\sum_{j=1}^{\mu} \bar{x}_j^2 + \frac{1}{n} \sum_{l=1}^N \frac{x_l^2}{p_l} \right), \quad (8.13.7)$$

где величины p_i определяются по формулам (8.2.7).

Задача заключается в отыскании строк X_μ , X и вектора $p = \{p_1, p_2, \dots, p_N\}$, обеспечивающих достижение минимума этого выражения при условиях (8.2.8) и (8.13.6).

Если решение рассматриваемой задачи существует, то, как показал Б. Ц. Бахшиян, среди оптимальных стратегий имеется по крайней мере одна, при которой строка X содержит не более m не равных нулю коэффициентов x_i ($i = 1, 2, \dots, N$), т. е. используется не более m составляющих вектора d_N . При этом строки X_μ и X определяются из решения некоторой задачи квадратичного программирования, а вектор p — по формулам (8.2.19) [9].

Для доказательства обозначим через $(\bar{X}_\mu \bar{X})$ строку коэффициентов оптимального алгоритма фильтрации и рассмотрим множество линейных несмещенных алгоритмов, определяемых всевозможными строками вида $(\bar{X}_\mu X)$. Оптимальная строка $(\bar{X}_\mu \bar{X})$ принадлежит этому множеству. Отсюда, пользуясь зависимостями (8.13.6) и (8.13.7), получим, что величина \bar{X} и соответствующее ей

оптимальное значение p обеспечивают достижение

$$\min \frac{\sigma^2}{n} \sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{p_i} \quad (8.13.8)$$

при условии

$$\bar{X}A = C - \bar{X}_\mu A_\mu. \quad (8.13.9)$$

Таким образом, строка \bar{X} и вектор p являются решением некоторой задачи Эльвинга. Отсюда непосредственно следует существование оптимальной строки \bar{X} , содержащей не более m не равных нулю элементов, а также то, что составляющие оптимального вектора p определяются выражениями (8.2.19).

Так как условие (8.13.9) зависит от неизвестной строки \bar{X}_μ , то для эффективного решения задачи требуется найти способ совместного определения оптимальных строк \bar{X}_μ и \bar{X} . Для этой цели подставим зависимости (8.2.19) в выражение (8.13.7). В результате получаем задачу отыскания

$$\min \left[\sum_{j=1}^{\mu} \bar{x}_j^2 + \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^N |x_i| \right)^2 \right] \quad (8.13.10)$$

при условии (8.12.6). Методом, изложенным в § 7.3, она легко может быть сведена к задаче квадратичного программирования. При этом получаем задачу отыскания

$$\min \left[\sum_{i=1}^{2\mu} u_i^2 + \frac{1}{n} \left(\sum_{i=2\mu+1}^{2(\mu+N)} u_i \right)^2 \right] \quad (8.13.11)$$

при условиях

$$UB = C, \quad u_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, 2(\mu + N), \quad (8.13.12)$$

где

$$U = (u_1 u_2 \dots u_{2(\mu+N)}), \quad (8.13.13)$$

$$u_i = \begin{cases} \bar{x}_i & \text{при } 1 \leq i \leq \mu, \\ -\bar{x}_{i-\mu} & \text{при } \mu < i \leq 2\mu, \\ x_{i-2\mu} & \text{при } 2\mu < i \leq 2\mu + N, \\ -x_{i-2\mu-N} & \text{при } 2\mu + N < i \leq 2(\mu + N), \end{cases} \quad B = \begin{pmatrix} A_\mu \\ -A_\mu \\ A \\ -A \end{pmatrix}. \quad (8.13.14)$$

Полученный результат может быть обобщен на случай, когда множество Δ' определяется линейной измеряемой функцией (4.6.10). Для этого достаточно воспользоваться описанным в § 7.3 предельным переходом. Кроме того, аналогичная задача может решаться в случае коррелированных измерений при ограничении модулей коэффициентов корреляции [9].

В заключение заметим, что на основе приведенных в этом параграфе результатов может быть решена задача выбора оптимального состава измерений при наличии систематических ошибок и условиях 1—4 теоремы о состоятельности оценки по методу наименьших квадратов (см. § 5.7). Для этого достаточно воспользоваться помещенной в § 5.4 теоремой эквивалентности и перейти к расширенной задаче с некоррелированными ошибками измерений. Так как размерность расширенной задачи равна $m + \mu$, то оптимальным является проведение повторяющихся измерений, соответствующих $m + \mu$ временам t_i .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основной целью настоящей книги было установление связи между используемыми в процессе решения рассматриваемых задач допущениями о характере погрешностей исходных данных и получаемыми результатами, а также выявление влияния на эти результаты имеющего место в действительности несоответствия между реальными условиями и принятыми допущениями. При этом рассматриваются следующие виды указанных предположений.

1. Классическая постановка задачи, при которой считаются известными некоторые вероятностные характеристики ошибок исходных данных. В наиболее полном виде это — задание закона распределения вероятностей указанных ошибок, приводящее к методу максимального правдоподобия. В сокращенном виде — задание математического ожидания и ковариационной матрицы ошибок (последней — с точностью до произвольного множителя), необходимое при использовании метода наименьших квадратов и других, сводящихся к этому методу алгоритмов фильтрации.

Замежим, что в этом случае при решении нелинейных задач фактически используется обычно не высказываемое допущение о нормальности распределения вероятностей ошибок исходных данных, при котором метод максимального правдоподобия сводится к способу наименьших квадратов. В действительности указанные предположения всегда в той или иной степени не соответствуют реальным условиям. Несмотря на это, базирующиеся на них алгоритмы фильтрации с успехом применяются в подавляющем большинстве случаев. Это объясняется теоретически еще не исследованной, но подтвержденной многолетним опытом своеобразной устой-

чивостью классических оценок, в первую очередь — оценок, получаемых по методу наименьших квадратов, благодаря которой даже заметные отклонения от принятых допущений обычно мало отражаются на получаемых оценках. Заметим, что могут быть подобраны противоречащие сделанному утверждению примеры, но при решении большинства прикладных задач оно, как правило, является справедливым.

Однако в тех случаях, когда возникает необходимость в определении точности получаемых результатов, теоретические расчеты, основанные на классических допущениях, могут привести к грубым ошибкам. Получаемые с их помощью значения характеристик точности статистических оценок часто оказываются излишне оптимистическими. Это обстоятельство особенно сильно сказывается при большом числе используемых измерений, когда даже сравнительно небольшие не учитываемые корреляционные зависимости между ошибками исходных данных очень сильно отражаются на точности получаемых результатов. В итоге найденное из теоретических соображений свойство состоятельности классических оценок на практике не имеет места. Кроме того, решения задач оптимального планирования эксперимента, получаемые при классической постановке, также могут оказаться неверными. В частности, в некоторых случаях добавление новых измерений может привести к ухудшению точности конечных результатов.

2. Система допущений, при которой наряду со случайными ошибками, имеющими заданные математическое ожидание и ковариационную матрицу, учитываются систематические ошибки, зависящие от некоторой совокупности мешающих параметров. Как это следует из приведенной в тексте теоремы эквивалентности, при известных зависимостях измеряемых и оцениваемых параметров от мешающих и заданных значений математического ожидания и ковариационной матрицы вектора мешающих параметров определение состояния системы сводится к решению некоторой расширенной задачи, рассматриваемой в приведенной выше классической постановке. При этом мешающие параметры включаются в число уточняемых и измеряемых величин. Такой переход к расширенной задаче всегда целесообразен, если

имеются достаточно полные сведения о влиянии мешающих параметров и об их возможном разбросе. В противном случае, когда зависимость измеряемых и оцениваемых параметров от мешающих, а также математическое ожидание и ковариационная матрица вектора мешающих параметров точно не известны, переход к расширенной задаче не всегда целесообразен. Поэтому нельзя согласиться с распространенным утверждением, что «систематические ошибки всегда могут быть исключены и поэтому их не следует рассматривать». В действительности всегда имеют место некоторые систематические ошибки, о которых нет достаточных сведений и которые не могут быть исключены. Вопрос об учете влияния таких ошибок остается открытым и может служить предметом специальных исследований.

3. Неклассическая постановка задачи. При этом вероятностные характеристики ошибок исходных данных полагаются неизвестными, а задаются лишь множества, которым принадлежат эти ошибки или их характеристики. В тексте описаны существующие методы решения задач выбора оптимальной стратегии определения параметров состояния реальных систем при некоторых допущениях указанного типа (метод минимакса), а также оценки точности получаемых результатов. При этом заведомо обеспечивается то, что фактическая точность решения задачи оказывается всегда не хуже расчетной. Однако получаемые в результате границы возможных значений ошибок определения величин оцениваемых параметров являются обычно излишне расширенными. Кроме того, при этом плохо используются информационные возможности имеющегося или возможного массива измерений, что неблагоприятно отражается на точности конечных результатов. В связи с этим целесообразно продолжить поиски эффективных методов определения параметров состояния и оценки их точности при более гибких допущениях. В частности, желательно учесть зависимость предельных значений модуля коэффициента корреляции между двумя измерениями от промежутка времени, разделяющего эти измерения.

4. Комбинированный способ. При этом суммарные ошибки исходных данных разбиваются на отдельные составляющие, каждая из которых удовлетворяет различ-

ным условиям, принадлежащим к указанным выше типам. По-видимому, таким путем можно добиться наилучшего приближения к реальным условиям и получить гарантированную, но и не слишком ухудшенную оценку точности решения рассматриваемой задачи.

Из изложенного следует, что при планировании эксперимента, имеющего целью определение параметров состояния некоторой реальной системы, необходимо в первую очередь определить соответствующую решаемой задаче систему допущений о характере ошибок исходных данных и выбрать на основе этих допущений оптимальную стратегию проведения и обработки измерений. По окончании обработки полученных экспериментальных данных следует провести апостериорную проверку правильности принятых допущений.

ДОПОЛНЕНИЕ ПРИ КОРРЕКТУРЕ

Когда настоящая книга находилась в наборе, ее автором совместно с Б. Ц. Бахшияном и Р. Р. Назировым был получен ряд новых результатов, относящихся к гарантированным оценкам точности и выбору оптимальной стратегии определения движения. Ниже приводятся некоторые из этих результатов. Читателей, желающих ознакомиться с ними подробнее, отсылаем к соответствующим статьям указанных авторов, которые будут опубликованы в журнале «Космические исследования».

Теорема 1. Пусть введенное в § 3.5 множество M возможных суммарных ошибок $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ математической модели (5.1.1) определяется следующими условиями, налагаемыми на ковариационную матрицу $D(\xi) = D = (D_{ij})$:

$$D_{ij}^* - v_{ij} \leq D_{ij} \leq D_{ij}^* + v_{ij}, \quad i \neq j, \quad 0 \leq D_{ii} \leq D_{ii}^* + v_{ii}; \quad (1)$$

$$D \geq 0, \quad (2)$$

где $D = (D_{ij}^*)$ и $V = (v_{ij})$ — заданные матрицы ($v_{ij} \geq 0$).

Тогда дисперсия $D(\hat{l})$ оценки некоторого скалярного параметра l , при использовании линейного выражения (3.4.11) для определения ошибки χ этой оценки, удовлетворяет неравенству

$$D(\hat{l}) \leq D_{\text{гар}} = \sum_{i,j=1}^n (D_{ij}^* x_i x_j + v_{ij} |x_i| |x_j|), \quad (3)$$

где $X = (x_1 x_2 \dots x_n)$ — матрица-строка, определяемая зависимостью (3.4.16).

Выражение (3) для $D_{\text{гар}}$ может быть представлено в виде

$$D_{\text{гар}} = X \tilde{D} X^T, \quad \tilde{D} = D^* + \Lambda V \Lambda, \quad (4)$$

где Λ — диагональная матрица с элементами $\lambda_{ii} = \text{sign } x_i$.

Теорема 2. Необходимым и достаточным условием того, что найденная в соответствии с теоремой 1 величина $D_{\text{гар}}$ удовлетворяет равенству

$$D_{\text{гар}} = \max_{\hat{l} \in M} D(\hat{l}), \quad (5)$$

для произвольной строки X является то, что определяемая по формуле (4) матрица

$$\tilde{D} \geq 0 \quad (6)$$

при произвольном выборе диагональной матрицы Λ , составленной из ± 1 .

В частности, необходимо, чтобы

$$D^* + V \geq 0. \quad (7)$$

Теорема 3. Достаточным условием справедливости зависимостей (5) и (6) является осуществление неравенства

$$\mu_1(D^* + Z) + \mu_1(V - Z) \geq 0, \quad (8)$$

где Z — некоторая диагональная матрица, а μ_1 — минимальное собственное значение соответствующей матрицы.

Необходимым условием является справедливость неравенств

$$\left. \begin{aligned} \mu_1(D^* + Z) + \mu_n(V - Z) &\geq 0, \\ \mu_n(D^* + Z) + \mu_1(V - Z) &\geq 0, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

где μ_n — наибольшее собственное значение соответствующей матрицы, а Z — произвольная диагональная матрица.

В частности, достаточно, чтобы одновременно

$$D^* + Z \geq 0 \quad \text{и} \quad V - Z \geq 0 \quad (10)$$

для некоторой диагональной матрицы Z .

Теорема 4. Если условия (1) заменяются условиями

$$D_{ii} = m_i^2, \quad (11)$$

$$K_{ij}^* - w_{ij} \leq K_{ij} \leq K_{ij}^* + w_{ij}, \quad i \neq j, \quad (12)$$

где K_{ij} — коэффициент корреляции между ошибками ξ_i и ξ_j , а m_i , K_{ij}^* и w_{ij} — заданные числа ($m_i \geq 0$, $w_{ij} \geq 0$, $|K_{ij}^* \pm w_{ij}| \leq 1$), то входящая в неравенство (3) величина

$$\left. \begin{aligned} D_{\text{гар}} &= \sum_{i,j=1}^n (K_{ij}^* m_i m_j x_i x_j + w_{ij} m_i m_j |x_i| |x_j|) = Y \tilde{K} Y^T, \\ \tilde{K} &= K^* + \Lambda W \Lambda, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

где K_{ii}^* и w_{ii} — произвольные числа, удовлетворяющие условию $K_{ii}^* + w_{ii} = 1$, а $K^* = (K_{ij}^*)$, $W = (w_{ij})$, $Y = (y_1 y_2 \dots y_n)$, $y_i = m_i x_i$.

При этом теоремы 2 и 3 остаются справедливыми, если заменить матрицы D^* , V и \tilde{D} на K^* , W и \tilde{K} соответственно.

Теорема 5. Для того чтобы в предыдущей теореме равенства (11) можно было заменить неравенствами $D_{ii} \leq m_i^2$, достаточно выполнение условия $w_{ij} \geq |K_{ij}^*|$.

Теорема 6. Если к условиям (1) и (2) добавляются ограничения, налагаемые на математическое ожидание $E(\xi)$:

$$|E(\xi_i)| \leq \delta_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (14)$$

где $\delta_i \geq 0$ — заданные числа, то математическое ожидание $E(\chi^2)$ квадрата ошибки оценки \hat{I} удовлетворяет неравенству

$$E(\chi^2) \leq E_{\text{гар}} = \sum_{i,j=1}^n [D_{ij}^* x_i x_j + (v_{ij} + \delta_i \delta_j) |x_i| |x_j|]. \quad (15)$$

В этом случае теоремы 2 и 3 сохраняют силу при условии замены равенства (5) зависимостью

$$E_{\text{гар}} = \max_{I \in M} E(\chi^2). \quad (16)$$

Аналогичные результаты могут быть получены при совместном использовании условий (11), (12) и (14).

Теорема 7. Пусть вектор d выбирается произвольным образом из множества Δ возможных измерений, определяемого условиями 1 задачи Эльвинга (см. § 8.2). Положим, что при любом таком выборе ошибка ξ удовлетворяет условиям (1) и неравенствам

$$|v_{ij}| \geq \varepsilon, \quad D^* \geq 0, \quad (17)$$

где $\varepsilon > 0$ — заданное число, не зависящее от выбора вектора d .

Тогда можно показать, что определяемая по формуле (3) величина

$$D_{\text{гар}} \geq L > 0, \quad (18)$$

где L не зависит от выбора вектора d .

Аналогичное неравенство может быть написано для определяемой по формуле (16) величины $E_{\text{гар}}$. Для этого достаточно выполнения условия (17) либо условия

$$|\delta_i| \geq \varepsilon > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (19)$$

Таким образом, при указанных условиях неограниченно увеличивая число используемых измерений, невозможно неограниченно уменьшать приведенные гарантированные характеристики точности.

Теорема 8. Если равенства (5) или (16) имеют место, то полученные гарантированные характеристики $K_{\text{гар}}$ точности ($K_{\text{гар}} = D_{\text{гар}}$ или $E_{\text{гар}}$) могут быть использованы для оптимизации по критерию достижения $\min K_{\text{гар}}$.

В этом случае при использовании линейной математической модели (7.2.1) отыскание оптимального линейного алгоритма фильтрации (7.2.3), удовлетворяющего условию несмещенности (7.2.4), сводится подстановкой (7.3.6) к решению некоторой задачи

квадратичного программирования. Решение этой задачи определяет одновременно соответствующий выбор оптимального состава используемых измерений.

Теорема 9. Пусть рассматриваемая в предыдущей теореме задача выбора оптимального состава измерений решается на множестве Δ возможных измерений, определяемом условиями 1 и 3 задачи Эльвинга (см. § 8.2). При этом заданы две диагональные матрицы T_1 и T_2 размера N , удовлетворяющие условию $T_1 + T_2 \geq 0$, и две прямоугольные матрицы S_1 и S_2 размеров $N \times v$ и $N \times \mu$. Входящие в зависимости (1) матрицы D^* и V определяются выражениями

$$D^* = T'_1 + S'_1 (S'_1)^T, \quad V = T'_2 + S'_2 (S'_2)^T,$$

где матрицы T'_1 и T'_2 строятся из матриц T_1 и T_2 вычеркиванием всех строк и столбцов, соответствующих неиспользуемым в векторе d измерениям, и повторением строк и столбцов, соответствующих повторяющимся измерениям. Матрицы S'_1 и S'_2 определяются аналогичным вычеркиванием и повторением строк матриц S_1 и S_2 .

Тогда при $K_{\text{гир}} = D_{\text{гир}}$ и $n \gg m + v + \mu$ имеется приближенное решение рассматриваемой задачи, содержащее не более $m + v + \mu$ групп повторяющихся измерений. Количества измерений в группах определяются выражениями (8.2.24) и (8.2.19).

При $K_{\text{гир}} = E_{\text{гир}}$ число повторяющихся групп не превосходит $m + v + \mu + 1$.

Большинство помещенных в главах III, VII и VIII настоящей книги результатов, базирующихся на неклассическом подходе к оценке точности, является частным случаем доказанных выше теорем.

При решении прикладных задач определения состояния различных систем приведенные выше теоремы могут быть использованы для следующих целей.

1. Для оценки точности решения задачи с использованием заданного алгоритма фильтрации (например, при фильтрации по методу наименьших квадратов). В этом случае, определяя возможные границы изменения величин $D(\xi)$ и $E(\xi)$ (либо по результатам исследования используемой измерительной системы и математической модели, либо на основе корреляционного анализа невязок условных уравнений), можно, пользуясь приведенными соотношениями, вычислять соответствующую гарантированную характеристику точности.

2. Для построения оптимальных несмещенных алгоритмов фильтрации на основе теоремы 8. Учитывая большую трудоемкость решения задачи квадратичного программирования, целесообразно оперативное определение состояния системы проводить одним из принятых в настоящее время методов. При этом квадратичное программирование можно использовать в процессе последующей обработки измерительной информации для нахождения уточненных значений некоторых, особо интересующих исследователя параметров.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров П. С., Комбинаторная топология, Гостехиздат, 1947.
2. Бажинов И. К., Почукаев В. Н., Оценка параметров траектории полета космического аппарата при неизвестной матрице вторых моментов ошибок навигационных измерений. Космические исследования, т. 9, вып. 2, 1971.
3. Бажинов И. К., Почукаев В. Н., Геометрическая интерпретация задач оценки точности определения траекторий космических аппаратов, Космические исследования, т. 9, вып. 2, 1971.
4. Бажинов И. К., Почукаев В. Н., Об оптимальном распределении навигационных измерений, Космические исследования, т. 9, вып. 2, 1971.
5. Бажинов И. К., Почукаев В. Н., Сердюков А. И., О выборе измеряемых параметров при определении траектории космического аппарата, Космические исследования, т. 10, вып. 4, 1972.
6. Бахшиян Б. Ц., Оптимальный выбор информации, используемой при определении траектории движения космического аппарата. Космические исследования, т. 7, вып. 3, 1969.
7. Бахшиян Б. Ц., Выбор оптимальных моментов независимых траекторных измерений, Космические исследования, т. 8, вып. 1, 1970.
8. Бахшиян Б. Ц., Об изохронных производных по некоторым параметрам траектории космического аппарата, Космические исследования, т. 11, вып. 2, 1973.
9. Бахшиян Б. Ц., Некоторые задачи оценки точности прогнозирования параметров траектории и алгоритмы их решения, Космические исследования, т. 12, вып. 6, 1974.
10. Бахшиян Б. Ц., Эльясберг П. Е., Выбор оптимальной стратегии определения орбит, Автоматика и телемеханика, 3, 1970.
11. Белецкий В. В., Движение искусственного спутника относительно центра масс, «Наука», 1965.
12. Белецкий В. В., Голубков В. В., Степанова Е. А., Хацкевич И. Г., Определение ориентации искусственных спутников по данным измерений, Институт прикладной математики АН СССР, 1967.
13. Белоусов Л. Ю., Определение оптимальных моментов измерений, Космические исследования, т. 7, вып. 1, 1969.
14. Белоусов Л. Ю., О задаче квадратичного программирования в вопросах оптимального планирования траекторных измерений, Космические исследования, т. 9, вып. 6, 1971.

15. Белоусов Л. Ю., Оптимальное планирование измерений для случая нескольких измеряемых параметров, Космические исследования, т. 9, вып. 6, 1971.
16. Белоусов Л. Ю., Бочарова И. В., Об обработке двумерной дискретной совокупности, содержащей грубые ошибки измерений, Космические исследования, т. 8, вып. 5, 1970.
17. Белоусов Л. Ю., Крупень В. Я., О некоторых асимптотических оценках начальных параметров при измерении дальности, Космические исследования, т. 12, вып. 2, 1974.
18. Богуславский И. А., Методы навигации и управления по неполной статистической информации, «Машиностроение», 1970.
19. Бухгольц Н. Н., Основной курс теоретической механики, часть II, «Наука», 1969.
20. Вентцель Е. С., Теория вероятностей, Физматгиз, 1962.
21. Войсковский М. И., Волков И. И., Грязев Н. И., Кугаенко Б. В., Синицын В. М., Эльясберг П. Е., Несферическая модель плотности верхней атмосферы, Космические исследования, т. 11, вып. 1, 1973.
22. Гантмахер Ф. Р., Теория матриц, «Наука», 1967.
23. Дубошин Г. Н., Теория притяжения, Физматгиз, 1961.
24. Дубошин Г. Н., Небесная механика (основные задачи и методы), Физматгиз, 1963.
25. Ершов В. Г., Об оптимизации программы траекторных измерений, Космические исследования, т. 8, вып. 1, 1970.
26. Ершов В. Г., Оптимальная программа траекторных измерений, Космические исследования, т. 9, вып. 1, 1971.
27. Зуховицкий С. И., Авдеева Л. И., Линейное и выпуклое программирование, «Наука», 1964.
28. Идельсон Н. И., Теория потенциала и ее применение к вопросам геофизики, Гостехиздат, 1932.
29. Каула У., Спутниковая геодезия, «Мир», 1970.
30. Кендалл М., Стюарт А., Статистические выводы и связи, «Наука», 1973.
31. Козлов Н. Н., Об оптимизации процесса траекторных измерений, Космические исследования, т. 9, вып. 1, 1971.
32. Корн Г. и Корн Т., Справочник по математике, «Наука», 1968.
33. Крамер Г., Математические методы статистики, ИЛ, 1948.
- ✓ 34. Лидов М. Л., К априорным оценкам точности определения параметров по методу наименьших квадратов, Космические исследования, т. 2, вып. 5, 1964.
- ✓ 35. Лидов М. Л., Математическая аналогия между некоторыми оптимальными задачами коррекции траекторий и выбора состава измерений и алгоритмы их решения, Космические исследования, т. 9, вып. 5, 1971.
36. Мудров В. И., Кушко В. Л., Михайлов В. И., Осовицкий Е. М., Некоторые эксперименты по использованию метода наименьших модулей в задачах обработки орбитальной информации, Космические исследования, т. 6, вып. 4, 1968.
37. Назаренко А. И., Маркова Л. Г., Методы определения и прогнозирования орбит ИСЗ при наличии погрешностей в математическом описании движения. Сб. «Прикладные задачи космической баллистики», «Наука», 1973.

38. Новак Б. Л., Линейные оценки параметров движения космического аппарата при наличии априорной информации, Космические исследования, т. 10, вып. 2, 1972.
39. Новак Б. Л., О выборе частоты измерений при определении ориентации искусственного спутника Земли, Космические исследования, т. 10, вып. 6, 1972.
40. Новак Б. Л., О влиянии моментов сил на точность определения ориентации искусственных спутников, Космические исследования, т. 11, вып. 5, 1973.
41. Рао С. Р., Линейные статистические методы и их применение, «Наука», 1968.
42. Рокафеллар Р., Выпуклый анализ, «Мир», 1973.
43. Сидоров И. М., Прохоренко В. И., Определение углового положения искусственного спутника Земли с помощью датчиков магнитного поля, Космические исследования, т. 6, вып. 2, 1968.
44. Степанов В. В., Курс дифференциальных уравнений, Гостехиздат, 1950.
45. Субботин М. Ф., Введение в теоретическую астрономию, «Наука», 1968.
46. Суслов Г. К., Теоретическая механика, Гостехиздат, 1946.
47. Федоров В. В., Теория оптимального эксперимента, «Наука», 1971.
48. Фихтенгольц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. I. Гостехиздат, 1947.
49. Эльясберг П. Е., Введение в теорию полета искусственных спутников Земли, «Наука», 1965.
50. Эльясберг П. Е., Гарантированная оценка точности определения движения космических аппаратов, Космические исследования, т. 12, вып. 1, 1974.
51. Эльясберг П. Е., О состоятельности оценок параметров движения космических объектов, Космические исследования, т. 12, вып. 2, 1974.
52. Эльясберг П. Е., Бахшиян Б. Ц., Определение траектории полета космического аппарата при отсутствии сведений о законе распределения ошибок измерений, Космические исследования, т. 7, вып. 1, 1969.
53. Юдин Д. Б., Гольдштейн Е. Г., Линейное программирование, «Наука», 1969.
54. Elfing G., Optimum allocation in linear regression theory, Ann. Math. Statist., 23, 255, 1952.
55. Hutchinson C. E., D'Appolito J. A., Bongiovanni P. L., Minimax design of Kalman-like filters in the presence of large parameter uncertainties, AIAA Paper, 1972, No. 878. (Русский перевод: Хатчинсон С., д'Апполито Д., Минимаксное построение фильтра Калмана при большой неопределенности параметров, Экспресс-информация «Астронавтика и ракетодинамика», № 48, 1974.)
56. Kalman R. E., A new approach to linear filtering and prediction problems, Trans. ASME, J. Basic Engineering, March 1960.
57. Kalman R. E. and Bucy R. S., New results in linear filtering and prediction theory, Trans. ASME, J. Basic Engineering, 1961.

- (Русский перевод: К а л м а н Р. и Б ь ю с и Р., Новые результаты в линейной фильтрации и теории предсказания, Труды Американского о-ва инженеров-механиков, серия Д, т. 33, № 1, ИЛ, 1961.)
58. K i e f e r J., Optimum experimental designs, Actes du congrès international des mathématiciens, Septembre 1970, Nice, France, T. 3. (Русский перевод: К и ф е р Дж., Оптимальные планы регрессионных экспериментов, Сб. переводов «Математика», 18:2, «Мир», 1974.)
59. K o z a i Y., Temporal variations of the geopotential derived from satellite observations, COSPAR Space Research, XI, v. 1, Akademie-Verlag, Berlin, 1971.
60. L e C a m L., On some asymptotic properties of maximum likelihood estimates and related Bayes' estimates, Univ. Calif. Public. statist., 1 (1953), № 11, 277—330. (Русский перевод: Л е К а м Л., О некоторых асимптотических свойствах оценок максимального правдоподобия и соответствующих байесовских оценок. Сб. переводов «Математика», 4:2, ИЛ, 1960.)
61. S a c k s J. and I l v i s a k e r D., Designs for regression problems with correlated errors III, Ann. Math Statist., 41, No. 6, 1970.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Автокорреляционная функция 52
- Аксиома умножения вероятностей 32
- Аксиомы теории вероятностей 31
- Алгебра булева, ассоциативность 29
 - — вполне аддитивная 29
 - —, двойственность 29
 - —, дистрибутивность 29
 - —, закон поглощения 29
 - —, замкнутость 29
 - —, идемпотентность 29
 - —, коммутативность 29
 - —, корректность 29
 - —, совместимость 29
 - событий 29
- Алгоритм фильтрации 66, 73
 - —, выбор алгоритма 110
 - —, условие несмещенности 66
- Антипараллельные векторы 21
- Апостериорная вероятность 33
 - оценка точности 128
- Априорная вероятность события 33
 - оценка точности 128

- Базис оптимальный 302
- Байеса теорема 32
 - формула 38
- Бернулли теорема 49

- Вектор 16
 - зависимых переменных 184
 - измерений 77
 - — однородный 77
 - мешающих параметров 85
 - , модуль вектора 16
 - невязок 66
 - независимых переменных 184
 - переменных критерия 184
 - предсказывающих переменных 184
 - состояния 64
- Векторное дифференциальное уравнение 28
- Векторы антипараллельные 21
 - коллинеарные 21
 - линейно зависимые 24
 - линейно независимые 24
 - параллельные 21
- Вероятностные модели 71
- Вероятность события 31
 - — апостериорная 33
 - — априорная 33
- Внешняя точка для множества 55
- Внутренняя точка множества 5

- Выбор математической модели 111
 - — —, исходные данные 111
 - механической модели 151
 - оптимальной фильтрации 110, 190
 - — —, допущения 190
 - — состава измерений 111
 - — —, исходные данные 111
- Выпуклая оболочка множества 56
 - — —, свойства 56
- Выпуклое множество 56
- Выпуклые объемные фигуры 58
- Вырожденная матрица 17

- Гаусса — Маркова теорема 191
- Гаусса нормальное распределение 35
- Гиперплоскость 60
- Граница множества 55
- Граничная точка множества 55

- Действительная матрица 15
- Дисперсия случайной величины 35
- Дополнение события 29

- Единичная матрица 17

- Задача формализации диагноза 185
 - Эйлера — Пуансо 167
 - Эльвинга 356
- Закон больших чисел 49
 - распределения ошибок 82

- Избыточная совокупность измерений 78
- Измерения единичные 76
 - информативные 349
 - множественные 76
 - независимые 79
 - неинформативные 349
 - некоррелированные неравноточные 84
 - равноточные 84
- Интервал мерный 75

- Калмана фильтр 13
- Квадратичная форма неопределенная 25
 - — неотрицательно определенная 25

Квадратичная форма неположительно определенная 25
 — — отрицательно определенная 25
 — — положительно определенная 25
 Ковариации составляющих вектора 39
 Ковариационная матрица вектора 39
 — — взаимная 43
 Корреляционная функция 52
 — — симметричная 52
 Коши — Буняковского неравенство 21
 Коэффициент корреляции 40
 — регрессии 186
 — сопротивления воздуха 156
 Крайняя точка множества 62
 Критерии оптимальности 112
 — — многомерные 113
 — — одномерные 113
 — —, D -оптимальность, 119
 — — универсальные 115

Лапласа распределение 46
 Лежандра полиномы 135
 Линеаризация 172
 Линейная регрессия 186
 Логическое произведение событий 28

Максимизируемая характеристика 103
 Масконы 134
 Математическая статистика 13
 Математическое ожидание случайного вектора 39
 — — случайной функции 34, 39, 52
 Матрица вырожденная 17
 — действительная 15
 — диагональная 17
 — единичная 17
 — квадратная 15
 — —, определитель 16
 — клеточная 18
 — невырожденная 17
 — неособенная 17
 — нулевая 17
 — обратная 19
 — — обобщенная 20
 — g -обратная 20
 — ортогональная 20
 — особенная 17
 —, размер 15
 —, ранг 16
 — расширенная 23
 — симметричная 15
 —, собственные значения 22
 —, транспонирование 18
 Матрица-строка 15
 Матрицы конгруэнтные 25
 — подобные 22
 Мерный интервал 75
 Метод максимального правдоподобия 13, 202, 266
 — максимума апостериорной вероятности 13, 271
 — минимакса 291, 345
 — наименьших квадратов 12, 188
 — — —, допущения 188
 — — —, нелинейные задачи 211
 — — —, преимущества 189
 — — —, универсальность 197

Метод наименьших модулей 269
 — рекуррентной фильтрации 18
 — симплексный 299
 Минимизируемая характеристика 103
 — —, гарантированное значение 103
 Множество возможных измерений 77
 —, выпуклая оболочка 56
 —, — —, свойства 56
 — выпуклое 56
 — замкнутое 55
 — ограниченное 58
 — —, выпуклая оболочка 58
 — открытое 55
 —, размерность 58
 — симметричное 58
 Модель вероятностная 71
 — детерминированная 71
 — прогнозируемая 68
 — —, определение состояния 68
 — —, использование 68
 — прогнозируемая 67
 —, размерность 64
 — Солнечной системы точечная 148
 Модуль вектора 16
 Момент начальный 34
 — порядка r 34
 — центральный 35

Навигационная привязка измерений 152
 Некоррелированный вектор 40
 — — равноточный 41
 Немоделируемая ошибка 125
 Непрогнозируемая модель 68
 — —, использование 68
 — —, определение состояния 68
 Неравенство Коши — Буняковского 21
 — Чебышева 35
 Несобственный случайный вектор 42
 Нормирование вектора 84

Обобщенная обратная матрица 20
 Обратная матрица 18
 g -обратная матрица 20
 Объединение событий 28
 Определение орбиты спутника Марса 395
 — параметров системы 12
 — — траектории полета КА 152
 Определитель матрицы 16
 — —, порядок 16
 D -оптимальность 119
 Орбиты резонансные 138
 Ортогональное преобразование 21
 — —, инварианты 22
 Относительная частота событий 31
 Оцениваемые параметры 93
 Оценка минимаксная 291
 — несмещенная 67
 — статистическая 291
 — точности апостериорная 128, 260
 — — априорная 128
 — — по внутренней сходимости 6, 129
 — — по гарантированным характеристикам точности 261
 —, эффективность 127
 Ошибки измерений 81

Ошибки измерений, источники возникновения 91
 — методические 65
 — систематические 85

Параллельные векторы 21
 Параметр мешающий 44
 — оцениваемый 93
 Плотность верхней атмосферы 156
 — распределения вероятностей 37
 Подматрица 17
 Подобные матрицы 22
 Поле сил нормальное 153
 Полиномы Лежандра 135
 Полностью неориентированные КА 163
 Полнота совокупности измерений 78
 Построение модели движения КА 153
 — — — центра масс КА 153
 Потенциал ускорения гравитационного притяжения 133
 Преобразование к главным осям 25
 — к нормальному виду 25
 — ортогональное 21
 Прогнозируемая модель 67
 Прямая 55

Размер матрицы 15
 — суммы матриц 18
 Размерность задачи 64
 — множества 58
 — модели 64
 Разнородные измерения 77
 Ранг матрицы 16
 Распределение вектора несобственное 42
 — Лапласа 46
 — нормальное асимптотически 48
 — — Гаусса 35
 — — n -мерное 45
 Расширенная матрица 23
 Регрессия линейная 186
 Рекуррентная фильтрация 275

Световое давление на КА 157
 Симметричная матрица 15
 Симметричное множество 58
 Симплексный метод 299
 Система нормальных уравнений 192
 Систематические ошибки 85
 — измерений 85
 Скаляр 16
 Скалярное произведение векторов 21
 Случайная величина 33
 — —, момент начальный 34
 — —, — порядка r 34
 — — непрерывная 33
 — —, плотность распределения 33
 — —, среднее квадратичное отклонение 35
 — —, стандарт 35
 — функция 50
 — —, исчерпывающее описание 51
 — —, математическое ожидание 52
 — — слабо коррелированная 52
 — — сильно коррелированная 52
 — — стационарная 53

Случайная функция, частная реализация 51
 Случайные величины взаимно независимые 38
 — — некоррелированные 40
 Случайный вектор 37
 — —, ковариационная матрица 39
 — —, — — взаимная 43
 — — некоррелированный 40
 — — — равноточный 41
 — — непрерывный 37
 — — несобственный 42
 — — собственный 42
 Собственные значения матрицы 21
 События 28
 —, вероятность 31
 —, логическая сумма 28
 —, логическое произведение 28
 — невозможные 29
 — независимые 32
 — — в совокупности 32
 — — по вероятности 32
 —, объединение событий 28
 —, относительная частота 31
 —, статистическая вероятность 31
 —, — устойчивость 31
 —, условная вероятность 32
 Совмещение событий 28
 Совокупность измерений достаточная 77
 — — избыточная 78
 — — полная 78
 — —, полнота 78
 Состоятельность оценки 123
 Статическая фильтрация 73
 Стратегии эквивалентные 293
 Строка 15
 —, модуль 16
 Суммирование матриц 18
 — —, размер суммы 18
 Сфера 54
 Сходимость в среднем 47
 — по вероятности 47

Теорема Байеса 32
 — Бернулли 49
 — Гаусса — Маркова 191
 — о выборе оптимального состава измерений 197
 — — — — по методу наименьших квадратов 294
 — об отыскании оптимальной линейной несмещенной оценки 294
 — Хинчина 49
 — центральная предельная 49
 Точечная модель Солнечной системы 148
 Точка множества внутренняя 55
 — — граничная 55
 — — крайняя 62
 Точность фактическая 6
 Транспонирование матрицы 18

Углы Эйлера 164
 Умножение матриц 18
 Условие несмещенности алгоритма фильтрации 66
 Условная вероятность события 32

- Фактическая точность 6
- Фильтр Калмана 13
 - дискретный 281
 - непрерывный 284
- Фильтрация динамическая 73, 280
 - рекуррентная 275
 - статическая 73
- Функция автокорреляционная 52
 - взаимная корреляционная 53
 - измеряемая 76
 - корреляционная 52
 - симметричная 52
 - распределения 33
 - случайная 50
 - , исчерпывающее описание 51
 - , математическое ожидание 52
 - сильно коррелированная 52
 - слабо коррелированная 52
 - стационарная 53
 - , частная реализация 51
- Характеристика максимизируемая 103
 - минимизируемая 103
 - , гарантированное значение 103
- Хинчина теорема 49
- Центральная предельная теорема 49
- Частично неориентированные КА 163
- Чебышева неравенство 35
- Число степеней свободы 145
- Шар 55
- Эйлера — Ламберта уравнение 220
- Эквивалентные стратегии 293
- Элемент вероятности 34, 37
- Элементы матрицы 15
- Эффективность оценки 127