

**П. П. Гайденко**

**Понятие времени и проблема  
континуума**

## **Понятие времени и проблема континуума**

---

Категория времени принадлежит к числу тех, которые играют ключевую роль не только в философии, теологии, математике и астрономии, но и в геологии, биологии, психологии, в гуманитарных и исторических науках. Ни одна сфера человеческой деятельности не обходится без соприкосновения с реальностью времени: все, что движется, изменяется, живет, действует и мыслит, – все это в той или иной форме связано с временем. Однако удивительным образом само понятие времени представляет большие трудности для всякого, кто пытается постигнуть его природу. Не случайно о времени написаны горы литературы, особенно в последнее столетие, но число неразрешимых вопросов, как кажется, не только не уменьшается, а с каждым десятилетием, пожалуй, только возрастает.

Мы попытаемся рассмотреть лишь некоторые аспекты проблемы времени. Время непрерывно (или дискретно, как полагают некоторые). Поэтому для понимания его необходимо разобраться в природе континуума. В своей работе, посвященной анализу математического

континуума, Георг Кантор подчеркивал, что невозможно определить континуум, если исходить из представлений о времени или пространстве, потому что сами эти представления могут быть объяснены только с помощью понятия континуума, которое должно быть исходным и простым и не должно зависеть в своем содержании от других понятий<sup>1</sup>. Это утверждение Кантора связано с его пониманием теории множеств как общего фундамента и математики в целом, и теории континуума в особенности.

Надо сказать, что размышления о природе времени с первых шагов научной и философской мысли в Древней Греции были неразрывно связаны с попытками решить проблему континуума. Ведь время, так же как и пространство, и движение представляет собой континуум, который можно мыслить либо как состоящий из неделимых элементов (моментов- "мигов" – времени, неделимых частей – точек –

---

<sup>1</sup> Кантор Г. Основы общего учения о многообразиях // Новые идеи в математике. СПб., 1914. Вып. 6.

## Понятие времени и проблема континуума

пространства или "частей" движения), либо же как бесконечно делимую – в точном смысле непрерывную – величину. Вот что пишет в этой связи Герман Вейль, чьи работы по философии математики можно отнести к классическим: "Издавна противостоят друг другу атомистическая концепция, согласно которой континуум состоит из отдельных точек, и противоположная точка зрения, считающая невозможным понять таким образом непрерывное течение. Первая концепция дает нам построенную логически систему неподвижно сущих элементов, но она не в состоянии объяснить движение и действие; всякое изменение сводится для нее к иллюзии. Второй же концепции не удалось ни во времена античного мира, ни позже, вплоть до Галилея, вырваться из сферы туманной интуиции, чтобы проникнуть в область абстрактных понятий, необходимых для рационального анализа действительности. Достигнутое в конце концов решение – это то, математически-систематическим образом которого служит дифференциальное и интегральное исчисление.

Но современная критика анализа снова разрушает изнутри это решение, хотя, правда, она и не дает себе ясного отчета во всем значении старой философской проблемы и приходит в итоге к хаосу и бессмыслице"<sup>2</sup>.

Противостояние двух точек зрения на природу континуума – атомистической, представители которой мыслят непрерывное состоящим из неделимых элементов, и антиатомистической, защитники которой отрицают возможность составить континуум из неделимых в качестве их суммы, в основе своей имеет онтологическую дилемму, сформулированную еще древними философами, обсуждавшуюся на протяжении многих веков и не утратившую своей актуальности и сегодня: что является реально существующим и составляет подлинный предмет научного знания: бытие или становление? С V в. до н. э., прежде всего в учениях элеатов, а затем Платона получает свое первое и достаточно глубокое обоснование точка зрения, что реально

---

<sup>2</sup> Вейль Г. О философии математики. М.-Л., 1934. С. 102.

## Понятие времени и проблема континуума

существует лишь то, что неизменно и самотождественно; оно и получает название бытия. В силу именно своей неизменности и тождества самому себе бытие только и может быть постигнуто разумом с помощью понятий и, таким образом, стать предметом строгого научного знания. Что же касается окружающего нас чувственного мира, в котором происходит непрерывное изменение, движение, все явления которого претерпевают трансформации и никогда не остаются тождественными и равными себе, то он являет собой не бытие, а становление и в качестве такового есть предмет не знания, а лишь изменчивого и недостоверного мнения.

При обсуждении вопроса о природе континуума и особенно о природе времени как одномерного и необратимого континуума эта антитеза бытия и становления играет важную роль. Что касается времени, то тут ситуация особенно наглядна: те, кто считают предметом науки бытие как начало устойчивости и постоянства, а потому ищут неизменную основу изменчивых явлений, склонны устранять фактор

## Понятие времени и проблема континуума

времени при изучении природы. Напротив, те, кто отождествляют понятия "природа" и "становление" и пытаются создать средства для познания самого изменения и движения, убеждены в том, что время есть ключевой фактор в жизни природы и соответственно играет ведущую роль в ее познании.

Джордж Уитроу, автор обстоятельного исследования "Естественная философия времени", связывает эти два подхода к изучению природы с именами крупнейших ученых древности – Архимеда и Аристотеля. "Архимед, – пишет он, – служит прототипом тех, чья философия физики предполагает "элиминацию" времени, т. е. тех, кто полагает, что временной поток не является существенной особенностью первоосновы вещей. С другой стороны, Аристотель служит предшественником тех, кто рассматривает время как фундаментальное понятие, поскольку он утверждал, что имеется реальное "становление" и что мир имеет в своей основе временную

структуру"<sup>3</sup>. Действительно, Аристотель был одним из первых, кто подверг критике как учение элеатов о неизменном и неподвижном бытии, по отношению к которому всякое становление есть только иллюзия, так и платоновское учение об идеях как потусторонних чувственному миру вневременных неизменных "образцах" чувственных вещей<sup>4</sup>. С точки зрения Платона, строгое научное знание можно получить лишь с помощью умозрения, ибо лишь ум в состоянии созерцать вечные идеи, недоступные чувствам; их он называет истинно сущим, противопоставляя всему становящемуся, не обладающему подлинным бытием. В отличие от Платона Аристотель стремится создать науку также и о движущемся и изменяющемся – о мире становления. По его замыслу, это должна быть

---

<sup>3</sup> Уитроу Дж. Естественная философия времени. М., 1964. С. 9.

<sup>4</sup> К сожалению, эта критика не имела той силы, которая могла бы поколебать поставленные элеатами и Платоном вопросы. (Руслан Хазарзар.)



## Понятие времени и проблема континуума

наука о природе как начале движения и изменения – физика. И, как справедливо говорит Уитроу, Аристотель рассматривает время как фундаментальное понятие физики; не случайно его анализ времени и непрерывности не утратил своего значения по сегодняшний день.

Однако при этом у Аристотеля первостепенную роль играет и категория бытия (сущности) как начала устойчивого и постоянного. Анализ именно этого начала посвящена "первая философия" Аристотеля – метафизика; ему же уделяется и большое внимание в физике, поскольку и в изменчивом природном мире Аристотель пытается обнаружить некие инварианты – то прочное и устойчивое, что служит незыблемым фундаментом как самого природного сущего, так и науки о природе. Учение о субстанциях и вечном двигателе как высшей среди них как раз и составляет такой фундамент.

Необходимо отметить, что крайние формы противопоставления бытия и становления как взаимоисключающих реальностей в истории

философии сравнительно редки, хотя они и выполняют важную эвристическую функцию в развитии теоретического знания. Так, в античности представителям Элейской школы – Пармениду и Зенону, доказывавшим реальность и познаваемость бытия и иллюзорность и непостижимость становления, впервые со всей остротой удалось поставить и обсуждаемую нами здесь проблему континуума. Другой крайний полюс – признание реальности только становления – представлен в древности Гераклитом, а в новейшее время – Бергсоном. Между этими полюсами располагается большинство мыслителей, пытающихся избежать крайних позиций и признающих как начало устойчивости и постоянства (сверхчувственное бытие), так и известные права на существование изменчивого и преходящего – становления.

Сегодня полемика между приверженцами "бытия" и сторонниками "становления" воспроизводится в новой форме. При этом по-новому заостряется и вопрос о том, насколько существенным для познания природы, как и для

## Понятие времени и проблема континуума

самого ее существования, является фактор времени с характерной для него необратимостью. Об этом хорошо говорит В. С. Степин в своем фундаментальном исследовании "Теоретическое знание". Сравнивая принципиальную установку классической науки (прежде всего физики) с наукой постнеклассической, он указывает на различное отношение той и другой прежде всего к фактору времени. "Классическая наука преимущественно уделяла внимание устойчивости, равновесности, однородности и порядку. В числе ее объектов были замкнутые системы. Как правило, это были простые объекты, знание законов развития которых позволяло, исходя из информации о состоянии системы в настоящем, однозначно предсказать ее будущее и восстановить прошлое. Для механической картины мира характерен был вневременной характер. Время было несущественным элементом, оно носило обратимый характер, т. е. состояния объектов в прошлом, настоящем и будущем были практически неразличимы. Иначе говоря, мир устроен просто и подчиняется

обратимым во времени фундаментальным законам"<sup>5</sup>.

Иной подход обнаруживает современная физика, в частности синергетика, изучающая самоорганизующиеся сложные системы различной природы. При этом возникает вопрос о взаимоотношении неживой и живой природы, что ведет к изменению парадигмальных принципов классической (да и неклассической) физики. Как отмечает В. С. Степин, в XX в. появляется тенденция "устранить разрывы между эволюционной парадигмой биологии и традиционным абстрагированием от эволюционных идей при построении физической картины мира"<sup>6</sup>. Синергетика имеет дело не с замкнутыми, а с открытыми системами, которые обмениваются энергией, веществом и информацией с окружающим миром. Состояния таких открытых систем становятся

---

<sup>5</sup> Степин В. С. Теоретическое знание. М.: Наука, 2000. С. 651.

<sup>6</sup> Там же.

неустойчивыми, неравновесными. Процессы, происходящие в неравновесных системах, носят необратимый характер, и понятно, что необратимость времени – "стрела времени" – получает в них решающую роль. Не случайно Илья Пригожин подчеркивает, что, в отличие от классической физики, синергетика возвращает все права становлению, в котором порядок возникает "из хаоса" – через флуктуации, т. е. случайные отклонения величин от их среднего значения<sup>7</sup>.

Если классическая физика воспроизводит, упрощенно говоря, "парадигму Архимеда", исключаящую "стрелу времени"<sup>8</sup>, т. е. рассматривающую время как обратимое, то синергетика возвращается к Аристотелю, а если

---

<sup>7</sup> "Случайность подталкивает то, что осталось от системы, на новый путь развития, а после выбора пути вновь в силу вступает детерминизм, и так до следующей бифуркации" (Пригожин И., Стенгерс И. Порядок из хаоса. М., 1986. С. 28-29).

<sup>8</sup> Классическая физика, правда, в отличие от Архимеда, не исключает время полностью, но делает его обратимым и тем самым несущественным.

быть более точным, – к Бергсону, у которого время именно как необратимое играет основополагающую роль, становясь принципом "творческой эволюции" – становления, возведенного в ранг абсолютной реальности. В отличие от Аристотеля, Бергсон не признает никакого бытия как вневременной и неизменной реальности, для него нет ничего, кроме текущей изменчивости – становления.

Обращаясь теперь к понятию континуума, мы можем констатировать, что трактовка этого понятия определяется тем, как тот или иной философ, математик или физик решает проблему бытия и становления: устраняет ли он вообще один из этих "полюсов", как это делали элеаты, с одной стороны, и бергсонианцы – с другой, или же стремится найти способ опосредования, установить связь этих "полюсов", как это, собственно, и делает большинство философов и естествоиспытателей, начиная с Аристотеля и кончая Декартом, Ньютоном, Лейбницем, Кантом, Махом, Пуанкаре, Эйнштейном. Разумеется, каждый из названных ученых решает эту задачу

## **Понятие времени и проблема континуума**

---

по-своему, создавая свою систему понятий, и по-разному ставит проблему континуума.

Отметим еще один важный аспект рассматриваемой проблемы, которого мы до сих пор не касались: этот аспект связан с понятием бесконечности и с различением актуальной и потенциальной бесконечностей – различением, с древности и по сегодняшний день определяющим понимание как природы непрерывного вообще, так и сущности времени в частности.

# Парадоксы континуума Зенона и решение их Аристотелем<sup>9</sup>

Исторический анализ позволяет по-новому увидеть и глубже понять смысл современных дискуссий, посвященных проблеме континуума и различных его видов. В своей работе мы коснемся лишь наиболее важных, узловых моментов в истории понятия непрерывности, начиная с античности и кончая XVII-XVIII вв. Как уже упоминалось, впервые проблема континуума была поставлена Зеноном из Элеи, выявившим парадоксы, возникающие при попытке мыслить движение в понятиях. Кратко содержание этих парадоксов передает Аристотель: "Есть четыре рассуждения Зенона о движении, доставляющие большие затруднения тем, которые хотят их разрешить. Первое, о несуществовании движения

---

<sup>9</sup> Слово разрешение нужно заключить в кавычки, ибо, как вы увидите, Аристотель не только не разрешил апории, но и, похоже, вообще не понял проблемы (или сделал вид, что не понял), поставленной элеатами (Руслан Хазарзар)



## Парадоксы Зенона и решение их Аристотелем

на том основании, что перемещающееся тело должно прежде дойти до половины, чем до конца... Второе, так называемый Ахиллес. Оно заключается в том, что существо более медленное в беге никогда не будет настигнуто самым быстрым, ибо преследующему необходимо раньше прийти в то место, откуда уже двинулось убегающее, так что более медленное всегда имеет некоторое преимущество... Третье... заключается в том, что летящая стрела стоит неподвижно; оно вытекает из предположения, что время слагается из отдельных "теперь"... Четвертое рассуждение относится к двум разным массам, движущимся с равной скоростью: одни – с конца ристалища, другие – от середины, в результате чего, по его мнению, получается, что половина времени равна его двойному количеству" (Аристотель. Физика. VI, 9).

Первая апория – "Дихотомия" – доказывает невозможность движения, поскольку движущееся тело, прежде чем преодолеть определенное расстояние, должно сначала пройти его половину, а для этого – половину этой половины и т. д. до

бесконечности. В самом деле, если пространственный континуум рассматривать как актуально данное бесконечное множество элементов, то движение в таком континууме невозможно мыслить, ибо занять бесконечное количество последовательных положений в ограниченное время невозможно<sup>10</sup>: строго говоря, движение здесь не может даже начаться.

В основе апории "Ахиллес" – то же самое затруднение: пока Ахиллес преодолевает расстояние, отделяющее его от черепахи, последняя пройдет еще один отрезок пути и т. д. до бесконечности. Чтобы догнать ее, самый быстроногий бегун должен последовательно

---

<sup>10</sup> Увы, Гайденко не понимает проблематику апорий: логически не противоречиво, что тело может занять актуально бесконечное количество положений за ограниченное время, ибо сам ограниченный интервал времени состоит из актуально бесконечных мгновений, о чем, кстати, в другой форме говорит цитируемый Гайденко Аристотель. Проблема, поставленная элеатами, должным образом воспроизведена Анисовым (см. предыдущую статью). (Руслан Хазарзар.)

## Парадоксы Зенона и решение их Аристотелем

занять бесконечное множество мест, которые занимала черепаха. В обеих апориях Зенон предполагает континуум делимым до бесконечности, но эту бесконечность считает актуально существующей, т. е. бытием в том смысле, о каком мы говорили выше. В третьей апории – "Стрела" – философ доказывает, что летящая стрела покоится. Зенон здесь исходит из понимания времени как суммы неделимых моментов "теперь", а пространства – как суммы неделимых точек. В каждый момент времени, рассуждает Зенон, стрела занимает место, равное своему объему<sup>11</sup>, а значит, движение можно

---

<sup>11</sup> Американский философ Чарлз Пирс, убежденный в том, что апория "Стрела" затрагивает очень серьезные вопросы, связанные с природой движения, представил эту апорию в виде силлогизма. Большая посылка его гласит: "Никакое тело, не занимающее места больше, чем оно само, не движется". Меньшая посылка: "Никакое тело не занимает места больше, чем оно само". Вывод: "Следовательно, ни одно тело не движется". По мнению Пирса, ошибка Зенона кроется в меньшей посылке: в кратчайшее время движущееся тело занимает место, которое больше его самого на бесконечно малую величину. Из апории Зенона, как полагал

## Парадоксы Зенона и решение их Аристотелем

---

мыслить лишь как сумму "продвинутостей" – состояний покоя<sup>12</sup>, ибо при действительном

---

Пирс, можно сделать лишь вывод, что вне времени тело не проходит никакого расстояния (см. Peirce C. S. Collected Papers. Cambridge, Mass., 1934. P. 334).

<sup>12</sup> Интересно отметить, что наш современник Бертран Рассел согласен с древним философом в том, что движение можно составить из суммы неподвижностей. "Вейерштрасс, строго запретив все бесконечно малые, – пишет Рассел, имея в виду предложенную Вейерштрассом арифметизацию дифференциального исчисления, – показал в конечном счете, что мы живем в неизменном мире и что стрела в каждый момент своего полета фактически покоится. Единственным пунктом, в котором Зенон, вероятно, ошибался, был его вывод (если он действительно его сделал) о том, что, поскольку не существует никаких изменений, мир все время должен находиться в одном и том же состоянии как в одно время, так и в другое" (Russell B. The Principles of the Mathematics. London, 1937. P. 347). Рассел как логик, видимо, тяготеет больше к началу бытия, чем становления, поэтому ему созвучны некоторые мотивы элеатов. Однако, не будучи здесь все же столь последовательным, как Зенон, английский философ не может принять позицию, отрицающую всякую реальность становления, а значит, и реальность времени, поскольку время и есть условие возможности становления как такового. А ведь для Зенона признать наличие "одного и

## Парадоксы Зенона и решение их Аристотелем

движении предмет должен занимать место большее, чем он сам. Атомистический континуум, как доказывает Зенон, не позволяет движению ни существовать, ни быть мыслимым.

Мы не будем рассматривать четвертую апорию – "Стадий", по своим предпосылкам сходную со "Стрелой"<sup>13</sup>. С помощью этих апорий Зенон пытается доказать, что, независимо от того, рассматривать ли континуум как делимый до бесконечности или же как состоящий из неделимых моментов, движение в равной мере окажется невозможным. Смысл парадоксов Зенона – в стремлении доказать, что

---

другого времени" уже означало бы впустить "бациллу" становления в вечное, неподвижное, неизменное, единое бытие!

<sup>13</sup> И это неверно. Апории Стрела и Стадий действительно рассматривают проблемы, возникающие при дискретности пространства-времени, но эти апории приводят к парадоксу совершенно разными путями. По всей видимости, перед написанием данной статьи Гайденко, увы, не ознакомился в должной степени с темой – а именно с тем, что касается самих апорий. (Руслан Хазарзар.)

## Парадоксы Зенона и решение их Аристотелем

множественный и изменчивый чувственный мир становления есть мир иллюзорный и не допускающий строго научного познания; об этом, как хочет доказать Зенон, неопровержимо свидетельствует то, что любая попытка постигнуть движение с помощью строгого рассуждения ведет к неразрешимым противоречиям...

Теория континуума Аристотеля служит фундаментом не только физики, но и математики, поскольку Аристотель предложил новое обоснование математики по сравнению с тем, какое давала пифагорейско-платоновская школа. Анализируя понятие непрерывности, как его обосновал Аристотель, можно видеть, как он понимает связь физики с математикой. Итак, что же такое непрерывность? Это есть, по Аристотелю, определенный тип связи элементов системы, отличающихся от других типов связи – последовательности и смежности. Последовательность, или следование по порядку, – условие смежности, а смежность – условие непрерывности. Важно уяснить различие между

## Парадоксы Зенона и решение их Аристотелем

смежным и непрерывным: если предметы соприкасаются, но при этом сохраняют каждый свои края, так что соприкасающиеся границы не сливаются в одну общую, то мы имеем дело со смежностью; если же граница двух предметов (отрезков линии, "частей" времени и т. д.) оказывается общей, то тут речь идет о непрерывности. "Я говорю о непрерывном, — пишет Аристотель, — когда граница, по которой соприкасаются оба следующих друг за другом предмета, становится для обоих одной и той же и, как показывает название, не прерывается..." (Аристотель. Физика. V, 226b-227a).

Непрерывными, по Аристотелю, могут быть не только части пространства и времени, но и движения; более того, подлинно непрерывным он считает то, что непрерывно по движению (Аристотель. Физика. V, 4). Чтобы движение было непрерывным, должны быть выполнены три условия: единство (тождественность) вида движения, единство движущегося предмета и единство времени.

## Парадоксы Зенона и решение их Аристотелем

Непрерывное, по Аристотелю, – это то, что делится на части, всегда делимые. А это значит, что непрерывное не может быть составлено из неделимых. Таким образом, Аристотель снимает те трудности, которые возникают в физике при допущении, что пространство и время состоят из неделимых, и получает возможность мыслить движение как непрерывный процесс, а не как сумму "продвинутостей". Непрерывность составляет условие возможности движения и его мыслимости. Остаются, однако, две первых апории – "Дихотомия" и "Ахиллес", основанные на бесконечной делимости пространства и времени. Здесь для разрешения противоречия Аристотель действует иначе. Если любой отрезок пути в силу его непрерывности делим до бесконечности, то движение окажется невозможным только при забвении того, что и время, в течение которого тело проходит этот путь, тоже непрерывно, т. е. делимо до бесконечности. А если учесть, что непрерывности пути соответствует непрерывность времени, то парадокс снимается. "Поэтому ошибочно



## Парадоксы Зенона и решение их Аристотелем

---

рассуждение Зенона, что невозможно пройти бесконечное, т. е. коснуться бесконечного множества отдельных частей в ограниченное время<sup>14</sup>. Ведь длина и время, как и вообще все

---

<sup>14</sup> Увы, Аристотель меняет тезис. Проблема первых двух апорий заключается в другом, как это показано в предыдущей статье Анисова. А потому "опровержение" Аристотеля не касается самой проблематики, поставленной элеатами. Не исключено, что Аристотель не только неправильно понял апории, но и неправильно их передал (а ведь Аристотелева "Физика" – древнейших источник, по которому мы знаем апории). Иначе чем объяснить, например, столь странную формулировку апории Стадий: "Четвертый [аргумент] – о равных телах, движущихся по стадию в противоположных направлениях мимо [~ параллельно] равных [им тел]; одни [движутся] от конца стадиа другие – от середины с равной скоростью, откуда, как он думает, следует, что половина времени равна двойному [= целому]. Паралогизм – в допущении, что как мимо движущегося [тела], так и мимо покоящегося равная [им] величина с равной скоростью движется равное время. Но это ложь. Так, например, пусть АА будут неподвижные тела равного размера, ВВ – тела, начинающие с середины, равные телам АА по числу и величине, а ГГ – тела, [начинающие] с конца, равные телам ВВ по числу и величине и обладающие равной скоростью с телами В. Тогда получается, что, когда [тела ВВ

## Парадоксы Зенона и решение их Аристотелем

---

непрерывное, называются бесконечными в двояком смысле: или в отношении деления, или в отношении границ. И вот, бесконечного в количественном отношении нельзя коснуться в ограниченное время, бесконечного согласно делению – возможно, так как само время в этом смысле бесконечно. Следовательно, приходится проходить бесконечность в бесконечное, а не в ограниченное время и касаться бесконечного множества частей бесконечным, а не

---

и ГГ] движутся друг мимо друга, первое В накладывается на последнее [Г] одновременно с тем, как первое Г – [на последнее В]. Получается, что Г прошло мимо всех [В], а В – мимо только половины [А], и поэтому затратило только половину [того] времени, [которое затратило Г], так как каждое из двух проходит мимо каждого за равное [время]. Одновременно получается, что первое В прошло мимо всех Г, так как первое Г и первое В одновременно наложатся на противолежащие крайние [А], (ровно за такое же время проходя мимо каждого из тел В, как и мимо каждого из тел А, как он говорит), так как оба они проходят мимо тел А за равное время. Так гласит аргумент, но вывод основан на упомянутом выше ложном допущении" (Физика. Z 9. 239 b 33)?..(Руслан Хазарзар)

ограниченным множеством" (Аристотель. Физика. VI, 2, 233a).

Аристотелево определение непрерывности по существу совпадает с аксиомой Евдокса, получившей название также аксиомы Архимеда и сформулированной Евклидом в четвертом определении У книги "Начал": "Говорят, что величины имеют отношение между собой, если они, взятые кратно, могут превзойти друг друга"<sup>15</sup>. Вот как Аристотель формулирует евдоксов принцип отношений, показывая, что его альтернативой будет парадокс "Дихотомия": "Если, взявши от конечной величины определенную часть, снова взять ее в той же пропорции, т. е. не ту же самую величину, которая взята от целого, то конечную величину нельзя пройти до конца; если же настолько увеличивать пропорцию, чтобы брать всегда одну и ту же величину, то пройти можно, так как конечную величину всегда можно исчерпать любой определенной величиной" (Аристотель.

---

<sup>15</sup> Евклид. Начала. Кн. I-VI. С. 142.

## Парадоксы Зенона и решение их Аристотелем

Физика. III, 206b). Вероятно, теория отношений Евдокса была попыткой решить вопрос о возможности установления отношения также и несоизмеримых величин. Пока не была открыта несоизмеримость, отношения могли выражаться целыми числами, и для определения отношения двух величин нужно было меньшую взять столько раз, сколько необходимо для того, чтобы она сравнялась с большей. Но отношения несоизмеримых величин невозможно выразить в виде пропорции, члены которой будут целыми числами. Чтобы все же иметь возможность устанавливать отношения несоизмеримых величин, Евдокс предложил такой выход: если для двух величин  $a$  и  $b$ , где  $a > b$ , можно подобрать такое число  $n$ , чтобы меньшая величина, взятая  $n$  раз, превзошла большую, т. е. чтобы было справедливо неравенство  $nb > a$ , то величины  $a$  и  $b$  находятся между собой в некотором отношении. В противном же случае они не находятся ни в каком отношении, что действительно имеет место там, где приходится иметь дело с бесконечно малыми величинами, которые были известны

## Парадоксы Зенона и решение их Аристотелем

грекам в виде, например, роговидных углов: последние не имеют отношения с прямолинейными углами, ибо роговидный угол всегда меньше любого прямолинейного угла. Как пишет И. Г. Башмакова, "роговидные углы по отношению к любому прямолинейному являются актуальными бесконечно малыми, или неархимедовыми величинами"<sup>16</sup>. Именно эти величины, согласно Евдоксу, Архимеду и Аристотелю, не находятся ни в каком отношении с конечными.

Аристотель, как известно, не принимает понятия актуальной бесконечности, и его позиция совпадает с принципами античной математики. Он пользуется только понятием потенциально бесконечного, т. е. бесконечного делимого, которое, "будучи проходимым по природе, не имеет конца прохождения, или предела" (Аристотель. Физика. III, 6, 206b).

---

<sup>16</sup> Башмакова И. Г. Лекции по истории математики в древней Греции // Историко-математические исследования. М., 1958. С. 311.

## Парадоксы Зенона и решение их Аристотелем

Сказать, что бесконечное существует только как потенциальное, а не как актуальное – значит сказать, что оно становится, возникает, а не есть нечто законченное, завершенное, не есть бытие. Пример потенциально бесконечного – это беспредельно возрастающий числовой ряд, ряд натуральных чисел, который, сколько бы мы его ни увеличивали, остается конечной величиной. Потенциально бесконечное всегда имеет дело с конечностью и есть беспредельное движение по конечному. Принцип непрерывности, как его задал Аристотель, базируется на понятии потенциально бесконечного.

Бесконечное, таким образом, есть, по Аристотелю, возможное, а не действительное, материя, а не форма: не случайно же материю Аристотель понимает как возможность. Не допуская актуальной бесконечности, Аристотель определяет бесконечное как то, вне чего еще всегда что-то есть. А может ли существовать нечто такое, вне чего больше ничего нет? И если да, то как его назвать? "Там, где вне ничего нет, – говорит Аристотель, – это законченное и целое:

## Парадоксы Зенона и решение их Аристотелем

это то, у которого ничто не отсутствует, например, целое представляет собой человек или ящик... Целое и законченное или совершенно одно и то же, или сродственны по природе: законченным не может быть ничто, не имеющее конца, конец же граница" (Аристотель. Физика. III, 6, 207b). Бесконечное – это материя, т. е. в ее аристотелевском понимании нечто вполне неопределенное, не имеющее в себе своей связи и лишенное всякой структуры. Целое же – это материя оформленная, и "конец", "граница", структурирующая его и делающая чем-то актуально сущим, действительным – это форма. Именно потому, что началом актуально сущего является форма, а форма есть предел, начало цели (она же – "конец", граница), он отвергает возможность актуально бесконечного: такое понятие является, по Аристотелю, как, впрочем, и по Платону, самопротиворечивым.

## **Пересмотр аристотелевского принципа непрерывности и понятие бесконечно малого у Галилея и Кавальери**

Несмотря на напряженные споры вокруг понятий бесконечного и непрерывного, средневековая физика и математика признавала как теорию отношений Евдокса, так и аристотелево понятие непрерывного. Философско-теоретическому пересмотру эти античные принципы были подвергнуты в эпоху Возрождения – Николаем Кузанским и Джордано Бруно. В рамках же собственно физики и математики они были поставлены под сомнение и в сущности отвергнуты Галилеем и его учеником Кавальери, стоявшими у истоков инфинитезимального исчисления<sup>17</sup>.

---

<sup>17</sup> Еще до Кавальери метод исчисления неделимых применил Кеплер в своей "Стереометрии винных бочек". Однако, подобно античным математикам, он рассматривал этот метод лишь как технику вычисления, а не как строго научный, т. е. математический метод.



Проблема непрерывности обсуждается Галилеем в разных контекстах. Так, например, рассматривая вопрос о причинах сопротивления тел разрыву или деформации и считая причиной мельчайшие "пустоты" или "поры" в телах, Галилей сталкивается с таким аргументом: как объяснить большую силу сопротивления некоторых материалов, если при ничтожном размере "пустот" и сопротивление их должно быть ничтожным? Отвечая на этот вопрос, Галилей пишет: "Хотя эти пустоты имеют ничтожную величину и, следовательно, сопротивление каждой из них легко преодолаемо, но неисчислимость их количества неисчислимо увеличивает сопротивляемость"<sup>18</sup>. Понятие ничтожно-малых пустот характерно: ничтожно-малое, в сущности, не есть конечная величина, ибо в этом случае число пустот в любом теле было бы исчислимым. Что Галилей хорошо понимает заключающуюся здесь

---

<sup>18</sup> Галилей Г. Избранные труды. В 2-х т. Т. 2. М., 1964. С. 131.

проблему и трудность, свидетельствует следующая беседа Сагрето и Сальвиати: "Если сопротивление не бесконечно велико, – говорит Сагрето, – то оно может быть преодолено множеством весьма малых сил, так что большое количество муравьев могло бы вытащить на землю судно, нагруженное зерном... Конечно, для того чтобы это было возможно, необходимо, чтобы и число их было велико: мне кажется, что так именно обстоит дело и с пустотами, держащими связанными частицы металла.

Сальвиати. Но если бы понадобилось, чтобы число их было бесконечным, то сочли бы вы это невозможным?

Сагрето. Нет, не счел бы, если бы масса металла была бесконечной, в противном случае..."<sup>19</sup>.

Мысль Сагрето ясна: в противном случае мы окажемся перед парадоксом Зенона: как бы малы ни были составляющие элементы, но если они имеют конечную величину, то бесконечное их

---

<sup>19</sup> Там же, с. 131-132.

число в сумме даст величину бесконечную – неважно, идет ли речь о массе металла, длине линии или величине скорости. На этом принципе стояла как античная математика, так и античная физика. Но именно этот принцип и хочет оспорить Галилей. Вот ответ Сальвиати на соображения Сагрето: "В противном случае – что же? Раз мы уже дошли до парадоксов, то попробуем, нельзя ли каким-либо образом доказать, что в некоторой конечной непрерывной величине может существовать бесконечное множество пустот"<sup>20</sup>. Доказательство Галилея состоит в допущении тождества круга и многоугольника с бесконечным числом сторон, т. е. образований, с точки зрения античной математики, не могущих иметь между собой никакого отношения. Именно предельный переход от многоугольника к кругу путем допущения многоугольника с актуально бесконечным числом сторон составляет основание вводимого Галилеем метода

---

<sup>20</sup> Там же, с. 132.

инфинитезимального исчисления. Использование актуально бесконечного в математике, по мнению Галилея, расширяет возможности последней. Именно Галилей пользуется понятием неделимого, на основе которого строит затем геометрию неделимых его ученик Кавальери<sup>21</sup>. Эти неделимые Галилей именует "неконечными частями линии", "неделимыми пустотами", "атомами". Природа их парадоксальна, противоречива: они не являются ни конечными

---

<sup>21</sup> С помощью понятия "неделимых" Галилей пытается решить задачу "колеса Аристотеля": при совместном качении двух концентрических кругов больший проходит то же расстояние, что и меньший. Как это возможно? "Разделяя линию на некоторые конечные и потому поддающиеся счету части, нельзя получить путем соединения этих частей линии, превышающей по длине первоначальную, не вставляя пустых пространств между ее частями; но представляя себе линию, разделенную на неконечные части, т. е. на бесконечно многие ее неделимые, мы можем мыслить ее колоссально растянутой без вставки конечных пустых пространств, а путем вставки бесконечно многих неделимых пустот" (Галилей Г. Избранные труды. В 2-х т. Т. 2. М., 1964. С. 135).

величинами, ни "нулями". Из них-то, по Галилею, и состоит непрерывная величина.

Характерно, что в XVIII в., когда бурно обсуждалась природа этой самой "бесконечно малой", Вольтер со свойственным ему остроумием определил математический анализ как "искусство считать и точно измерять то, существование чего непостижимо для разума"<sup>22</sup>.

Галилей, вводя понятие "бесконечного числа бесконечно малых", принимает таким образом в качестве предпосылки актуальную бесконечность, которой избегала как античная математика, как и античная физика.

Вслед за Галилеем Кавальери, принимая те же предпосылки, предложил метод составления непрерывного из неделимых. При этом характерно название работы Кавальери: "Геометрия, изложенная новым способом при помощи неделимых непрерывного" (первое ее издание вышло в 1635 г.). Название полемично по

---

<sup>22</sup> Цит. по: Клайн М. Математика. Утрата определенности. М., 1984. С. 176.

отношению к принципу отношений Евдокса-Архимеда, как и к принципу непрерывности Аристотеля, который в XIII в. кратко сформулировал Фома Аквинский: "Ничто непрерывное не может состоять из неделимых"<sup>23</sup>. Каким образом непрерывное составлено из неделимых, Кавальери поясняет, в частности, в предложении XXXV второй книги "Геометрии": "Построенный на каком-либо прямоугольнике параллелепипед, высотой которого служит некоторая прямая линия, равен (сумме) параллелепипедов, имеющих основаниями тот же прямоугольник, а высотами какие угодно части, на которые может быть разделена высота. Если же представим себе, что прямоугольник, служащий основанием, разделен каким угодно образом на какое угодно число прямоугольников, то, указанный параллелепипед будет равен (сумме) параллелепипедов, имеющих высотами отдельные части высоты, а основанием —

---

<sup>23</sup> Цит. по: Lasswitz K. Geschichte der Atomistik, 1890. S. 191.

отдельные части основания"<sup>24</sup>. Плоская фигура мыслится, таким образом, как совокупность всех линий, а тело – как сумма всех его плоскостей.

Интересно разъяснение, которое дает Кавальери новому методу, прямо указывая на то, что ему не ясна природа "неделимого", с помощью которого он "составляет" геометрические объекты, а потому не ясна и сущность самого "составления": "Я пользовался тем же приемом, каким пользуются алгебраисты для решения предлагаемых им задач: хотя бы корни чисел были неопределимы, непостижимы и неизвестны, они их тем не менее складывают вместе, вычитают, умножают и делят и, если только они окажутся в состоянии получить в результате этих манипуляций нужное им решение предложенной задачи, они считают, что достигли цели. Как раз так же я оперирую с совокупностью линий или плоскостей: пусть они, поскольку речь идет об их числе, неопределимы и неизвестны;

---

<sup>24</sup> Кавальери Б. Геометрия, изложенная новым способом при помощи неделимых непрерывного. М.-Л., 1940. С. 277.

поскольку речь идет об их величине, они ограничены всякому видными пределами"<sup>25</sup>. Кавальери сознает, что понятие актуальной бесконечности, с которым оперирует геометрия неделимых, порождает "сомнения, связанные с опасностью плавления у скал этой бесконечности"<sup>26</sup>. Это сознание, как и та критика, которой подверглось понятие континуума как "совокупности неделимых" со стороны современников Кавальери<sup>27</sup>, заставили его в

---

<sup>25</sup> Там же, с. 89.

<sup>26</sup> Там же, с. 91.

<sup>27</sup> Вот что говорит об этом сам Кавальери: "От меня не скрыто, что о строении континуума и о бесконечном весьма много спорят философы, выдвигая такие положения, которые находятся в разногласии с немалым числом, моих принципов. Они будут колебаться либо потому, что понятие всех линий или всех плоскостей кажется им непонятным и более темным, чем мрак Киммерийский, либо потому, что мой взгляд склоняется к строению континуума из неделимых, либо, наконец, потому, что я осмелился признать за прочнейшее основание геометрии тот факт, что одно бесконечное может быть больше другого" (цит. по: Зубов В.



седьмой книге "Геометрии" уточнить метод, примененный им в первых шести книгах. Если первоначально Кавальери сравнивал между собой совокупность всех линий одной плоской фигуры с совокупностью всех линий другой (аналогично – и плоскостей, из которых составлены тела), то в седьмой книге он сравнивал любую линию одной фигуры с соответствующей линией другой, или одну плоскость одной фигуры тела с плоскостью другого. Таким путем он избегал необходимости оперировать понятиями "все линии" и "все плоскости". Поясняя свое ограничение, Кавальери писал: "Мы намеревались доказать лишь то, что отношение между континуумами соответствует отношению между неделимыми и наоборот"<sup>28</sup>.

Самое удивительное однако состоит в том, что одним из критиков Кавальери оказался также и... Галилей, сам, как мы знаем, предлагавший

---

П. Развитие атомистических представлений до начала XIX века. С. 223).

<sup>28</sup> Cavalieri B. *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota*. Bononia, 1635. Lib. VII. P. 2.

составлять непрерывное из бесконечно большого числа неделимых! Из переписки Кавальери известно, что Галилей не хотел признать правомерности понятий "все плоскости данного тела" и "все линии данной плоскости". Это кажется неожиданным, если мы вспомним, что Галилей допускал "строение континуума из абсолютно неделимых атомов"<sup>29</sup>, хотя и не мог разъяснить природу этих неделимых<sup>30</sup>. Как мы уже выше могли видеть, Галилей рассуждал о неделимых не только с точки зрения математической, но и как физик. Размышляя о природе континуума в работе "Разные мысли", Галилей утверждает: "Бесконечность должна быть вовсе исключена из математических рассуждений, так как при переходе к бесконечности

---

<sup>29</sup> Галилей Г. Избранные труды. В 2-х т. Т. 2. М., 1964. С. 154.

<sup>30</sup> Галилей называл их иногда "невеличинами", пытаясь избежать парадоксов. "Самая возможность продолжать деление на части приводит к необходимости сложения из бесконечного множества невеличин" (Галилей Г. Избранные труды. В 2-х т. Т. 2. М., 1964. С. 142).

количественное изменение переходит в качественное, подобно тому, как, если мы будем самой тонкой пилой размельчать тело, то как бы мелкие ни были опилки, каждая частица имеет известную величину, но при бесконечном размельчении получится уже не порошок, а жидкость, нечто качественно новое, причем отдельные частицы вовсе исчезнут"<sup>31</sup>.

В чем тут дело? Почему Галилей то допускает понятие актуальной бесконечности, то запрещает его? Почему он критикует Кавальери за метод, каким пользовался сам? Вот что думает по этому поводу С. Я. Лурье, переводчик "Геометрии" Кавальери и автор предисловия к переводу: "Галилей вообще не выставил никакой связной математической теории неделимых: стоя на атомистической точке зрения (непрерывное состоит из неделимых, линия состоит из точек), он в то же время видел логические

---

<sup>31</sup> Цит. по: Лурье С. Я. Математический эпос Кавальери // Кавальери Б. Геометрия, изложенная новым способом при помощи неделимых непрерывного. М.-Л., 1940. С. 37.

несообразности, к которым приводила эта теория; компромисс Кавальери его не удовлетворял, он не хотел понять Кавальери, чувствовал, что математический атомизм необходим для дальнейшего прогресса математики, но не знал, как сделать его теоретически приемлемым"<sup>32</sup>. Вероятно, С. Я. Лурье здесь недалек от истины, хотя его утверждение о том, что Галилей в своем учении о неделимых следует Демокриту, вряд ли можно принять без оговорок. Галилей пытается найти объединение физического атомизма Демокрита с математическим атомизмом, которого у Демокрита не было, а потому опирается скорее на Архимеда<sup>33</sup>. Но позиция его в

---

<sup>32</sup> Там же, с. 39.

<sup>33</sup> "Утверждали иногда, – пишет по этому поводу В. П. Зубов, – что Галилей продолжил традицию Демокрита. С гораздо большим основанием можно говорить, однако, о традиции Архимеда. Ведь мы знаем, что, по Демокриту, континуум слагался из элементов того же рода (тела из мельчайших тел и т. д.), тогда как у Архимеда речь шла об элементах  $n$ -I порядка" (Зубов В. П. Развитие атомистических представлений до начала XIX века. С. 215-216).

## Пересмотр принципа непрерывности

этом вопросе с психологической точки зрения очень показательна; то, что он позволяет себе, хотя и не без некоторых оговорок, крайне раздражает его у другого: тут с особой ясностью ему видны логические противоречия, связанные с понятием актуальной бесконечности, в частности – с бесконечно малым. Как бы то ни было, очевидно одно: Галилею не удалось удовлетворительно разрешить проблему континуума на пути, отличном от евклидовско-аристотелевского, и он, критикуя Кавальери, вынужден признать, что вместе с неделимым в математику входят неразрешимые парадоксы.

## Попытки преодолеть парадоксы бесконечного: Декарт, Ньютон, Лейбниц

Не удивительно, что Декарт, признавая принцип непрерывности не только в математике, но и в физике, возвращается в этом пункте к Аристотелю. "Невозможно, – пишет Декарт, – существование каких-либо атомов, т. е. частей материи, неделимых по своей природе, как это вообразили некоторые философы"<sup>34</sup>. Соответственно Декарт не допускает в научный обиход и понятие актуально бесконечного. Актуально бесконечен, по Декарту, лишь Бог, но именно потому он и непознаваем. Ведь познание, говорит Декарт, следуя здесь античной традиции, есть полагание предела, границы. "Мы никогда не станем вступать в споры о бесконечном, тем более что нелепо было бы нам, существам конечным, пытаться определить что-либо относительно бесконечного и полагать ему границы, стараясь постичь его. Вот почему мы не

---

<sup>34</sup> Декарт Р. Избранные произведения. М., 1950. С. 475.

## Попытки преодолеть парадоксы бесконечного

сочтем нужным отвечать тому, кто спрашивает, бесконечна ли половина бесконечной линии, или бесконечное число четное или нечетное и т. д. О подобных затруднениях, по-видимому, не следует размышлять никому, кроме тех, кто считает свой ум бесконечным. Мы же относительно того, чему в известном смысле не видим пределов, границ, не станем утверждать, что эти границы бесконечны, но будем лишь считать их неопределенными. Так, не будучи в состоянии вообразить столь обширного протяжения, чтобы в то же самое время не мыслить возможности еще большего, мы скажем, что размеры возможных вещей неопределенны. А так как никакое тело нельзя разделить на столь малые части, чтобы каждая из них не могла быть разделена на еще мельчайшие, то мы станем полагать, что количество делимо на части, число которых неопределенно"<sup>35</sup>.

Из этого отрывка видно, что в качестве понятия, доступного человеческому разуму,

---

<sup>35</sup> Там же, с. 437-438.

## Попытки преодолеть парадоксы бесконечного

Декарт признает только потенциальную бесконечность. Как и Аристотель, он мыслит континуум как беспредельно делимое.

Правда, в отличие от Аристотеля, Декарт не считает вселенную конечной. Но характерно, что он называет ее не бесконечной (*infinite*), а только неопределенной (*indefinite*), т. е. бесконечной потенциально, не имеющей предела. Атомизм же Декарт не признает ни в математике, ни в физике: картезианские корpusкулы отличаются от демокритовских атомов тем, что они бесконечно делимы. В этом смысле картезианская программа является континуалистской, как и перипатетическая. Отвергая аристотелианскую физику и космологию по целому ряду параметров, Декарт однако полностью разделяет аристотелевский принцип непрерывности.

Таким образом, пересмотр понятий античной науки и философии в XVII в. отнюдь не был универсальным: важнейшее положение античной математики и физики, вначале поколебленное учением о неделимых Галилея, Кавальери, Торичелли было восстановлено в правах



Декартом. Да и Галилей, как мы видели, в вопросе о непрерывности так и не пришел к определенному решению: критикуя Кавальери, он в сущности отказывался от своего революционного переворота.

Споры вокруг принципа непрерывности и природы бесконечно малого не утихали на протяжении XVII и XVIII вв., что, впрочем, не мешало дальнейшей разработке и использованию математического анализа. Характерна попытка Ньютона найти выход из затруднений, связанных с понятием актуально бесконечно малого. Первоначально английский ученый употреблял бесконечно малые величины и пользовался ими, как и его предшественники (в частности, Дж. Валлис<sup>36</sup>), т. е. отбрасывал их на том же

---

<sup>36</sup> В "Трактате о конических сечениях, изложенных новым методом" (1655) Валлис, ссылаясь на Кавальери, рассматривает площади плоских фигур как составленные из бесконечно многих параллельных линий. При этом, как пишет А. П. Юшкевич, "бесконечно малое количество то отождествляется нулевым, то параллелограммы бесконечно малой высоты объявляются вряд ли чем-либо иным, нежели

## Попытки преодолеть парадоксы бесконечного

основании, что и другие математики: поскольку значение их исчезающе мало по сравнению с конечными величинами. Однако затем Ньютон создает так называемую теорию флюксий. "Главное отличие теории флюксий в ее законченном виде от современного ей дифференциального исчисления, – пишет А. П. Юшкевич, – заключается в стремлении изгнать из математики бесконечное при помощи метода первых и последних отношений, т. е. пределов"<sup>37</sup>. Метод флюксий, содержащий в самой первоначальной формулировке принцип пределов, был со стороны Ньютона попыткой избежать актуально бесконечного и обосновать практически уже вошедшее в обиход математиков

---

линия..." (Юшкевич А. П. Развитие понятия предела до К. Вейерштрасса // Историко-математические исследования. Вып. XXX. М., 1986. С. 25). Валлис, таким образом воспроизводит те же принципы, что мы видели у Кавальери, и соответственно те же теоретические затруднения.

<sup>37</sup> Юшкевич А. П. Идеи обоснования математического анализа в XVIII в. // Историко-математические исследования. Вып. XXX. М., 1986. С. 26.

## Попытки преодолеть парадоксы бесконечного

отбрасывание бесконечно малых слагаемых. Метод флюксий следующим образом вводится в "Математических началах натуральной философии": "Количества, а также отношения количеств, которые в продолжение любого конечного времени постоянно стремятся к равенству и ранее конца этого времени приблизятся друг к другу ближе, нежели на любую заданную разность, будут напоследок равны"<sup>38</sup>.

Это – первая лемма I книги "Начал". Анализируя математические работы Ньютона, в частности его "Анализ с помощью уравнений с бесконечным числом членов", Д. Д. Мордухай-Болтовской замечает, что Ньютон стоял как бы на перепутье – между созданным им методом флюксий и возникшим позднее у Даламбера

---

<sup>38</sup> Как полагают некоторые историки, если бы Ньютон углубил дальше свою идею "окончательного отношения" "исчезающих приращений", он предвосхитил бы строгие методы, разработанные Коши в XIX в. (Boyer C. B. The Concepts of the Calculus. New York, 1949. С. 196).

понятием предела; однако создать теорию предела Ньютону не удалось<sup>39</sup>, хотя само понятие "предела" и появляется у Ньютона в "Началах".

Мы не можем сколько-нибудь подробно останавливаться на методе флюксий Ньютона: для нашей цели достаточно показать, что Ньютон искал способа избежать понятия бесконечно малой величины, т. е. актуально бесконечного, и его метод первых и последних отношений есть попытка приблизиться к методу исчерпывания древних, вполне строгому и строящемуся на признании лишь потенциальной бесконечности<sup>40</sup>.

---

<sup>39</sup> Мордухай-Болтовской Д. Д. Комментарии к Ньютону // Ньютон И. Математические работы. М.-Л., 1937. С. 289.

<sup>40</sup> Интересно, что известный математик К. Маклоран, пытавшийся защитить ньютоновский метод флюксий от критики Дж. Беркли (в сочинении "Аналист", 1734 г.), в своем "Трактате о флюксиях" сближает метод Ньютона с методом исчерпывания Евклида, и Архимеда. В основе метода исчерпывания лежит сколь угодно точное приближение к искомой величине с помощью сходящихся к ней сверху и снизу последовательностей известных величин. Вот как формулирует сущность метода исчерпывания Маклоран: если две переменные величины AP и AQ,

## Попытки преодолеть парадоксы бесконечного

Аналогичные затруднения с понятием бесконечно малого испытывал Лейбниц, чье отношение к принципу непрерывности весьма показательно для научно-философской мысли XVII-XVIII вв. На теории бесконечно малых Лейбница мы остановимся подробнее, поскольку немецкий ученый не только разработал метод дифференциального исчисления, но и многократно обсуждал те трудности, которые связаны с его обоснованием. Позиция Лейбница в вопросе о бесконечно малых столь же непоследовательна, как и позиция его предшественника Галилея: как и Галилей, Лейбниц, с одной стороны, оперирует этим понятием и сам разрабатывает метод математического анализа, а с другой, он вполне

---

находящиеся друг к другу в неизменном отношении, одновременно приближаются к двум определенным величинам  $AB$  и  $AD$  так, что разности между ними оказываются меньшими любой заданной величины, то отношение пределов будет тем же, что и отношение переменных величин  $AP$  и  $AQ$  (Maclaurin C. Treatise of Fluxions in two Books. 1742. T. 1. P. 6).

разделяет критическое отношение других математиков и особенно философов к этому понятию-парадоксу. Такая двойственная позиция у Лейбница в сущности сохраняется на протяжении всей его жизни. В этом отношении показательно письмо Лейбница к Фуше от января 1692 г. Фуше в письме к Лейбницу доказывал невозможность оперирования с неделимыми в математике и настаивал на необходимости признать принцип непрерывности в его аристотелевской формулировке. Отвечая Фуше, Лейбниц пишет: "Вы правы, говоря, что коль скоро все величины могут делиться до бесконечности, не существует такой величины, сколь угодно малой, которая в свою очередь не могла бы быть разделена на еще меньшие части, число которых бесконечно"<sup>41</sup>. Однако, признав бесконечную делимость любой величины, Лейбниц тут же добавляет: "Впрочем, я не нахожу ничего дурного и в предположении, что эта делимость может быть в конце концов исчерпана,

---

<sup>41</sup> Лейбниц Г. В. Сочинения. В 4-х т. М., 1984. С. 287.

хотя и не вижу в этом никакой нужды"<sup>42</sup>. Это замечание стоит в прямом противоречии с признанным только что принципом непрерывности: в самом деле, если делимость может быть исчерпана, значит, могут быть получены последние неделимые элементы, – а это означает, что величины не будут делимы до бесконечности. И тут делу не может помочь оговорка Лейбница: "Хотя и не вижу в этом никакой нужды".

Точно так же "вибрирует" мысль Лейбница в вопросе о бесконечном в его "Новых опытах о человеческом разумении", написанных в 1703-1704 гг. С одной стороны, Лейбниц признает, что математике нельзя оперировать с понятием актуальной бесконечности. "Не существует бесконечного числа, или бесконечной линии, или какого-нибудь другого бесконечного количества, если брать их как настоящие целые... Истинная бесконечность... заключается лишь в абсолютном, которое предшествует всякому

---

<sup>42</sup> Там же.

## Попытки преодолеть парадоксы бесконечного

соединению и не образовано путем прибавления частей"<sup>43</sup>. В данном случае речь идет о невозможности актуально существующей бесконечно большой величины. Однако и по отношению к актуально существующей бесконечно малой величине Лейбниц здесь высказывается тоже однозначно: "Мы заблуждаемся, пытаясь вообразить себе абсолютное пространство, которое было бы бесконечным целым, составленным из частей. Ничего подобного не существует. Такое понятие внутренне противоречиво, и все эти бесконечные целые, равно как и их антиподы, бесконечно малые, применимы лишь для математических выкладок, подобно мнимым корням в алгебре"<sup>44</sup>. Однако, с другой стороны, Лейбниц в той же работе признает актуально бесконечное множество восприятия, имеющих в нас в каждый момент, но не сознаваемых нами, а также актуально бесконечное множество субстанций-

---

<sup>43</sup> Там же, с. 157.

<sup>44</sup> Там же, с. 158.



## **Попытки преодолеть парадоксы бесконечного**

---

монад, или, как он их называет, "метафизических точек". Таким образом, причина "вибрации" Лейбница – в невозможности признать актуальную бесконечность в математике и в то же время в невозможности отвергнуть актуальную бесконечность в физике и метафизике; последние имеют дело с реально сущим, с бытием, тогда как математика – лишь с возможным, конструкцией воображения<sup>45</sup>.

---

<sup>45</sup> "Я признаю, – пишет Лейбниц, – что время, протяженность, движение и непрерывность в том общем смысле, который придается им в математике, суть вещи идеальные, т. е. выражающие возможность совершенно так же, как ее выражают цифры. Гоббс даже пространство определил как *phantasma existentis*. Но правильнее будет сказать, что протяженность – это порядок возможных сосуществовании, подобно тому как время – порядок возможностей не определенных, но тем не менее взаимозависимых" (Лейбниц Г. В. Сочинения. В 4-х т. М., 1984. С. 341). Определяя непрерывность через понятие возможности, т. е. как потенциально бесконечную, Лейбниц, как и Аристотель, не составляет математический континуум из актуально сущих неделимых. Однако не так обстоит дело в физике и метафизике Лейбница, где не протяжение, а сила

## **Попытки преодолеть парадоксы бесконечного**

---

есть истинное определение реально сущего, т. е. субстанций. Носители сил – это "формальные атомы", названные Лейбницем так в отличие от атомов материальных: формальные атомы – монады – являются метафизическими неделимыми. "... Сила есть нечто вполне реальное также и в сотворенных субстанциях; пространство же, время и движение имеют нечто от сущности разума и являются истинными и реальными не сами по себе, а лишь поскольку они причастны к божественным атрибутам – бесконечности, вечности, созиданию или силе творимых субстанций" (Лейбниц Г. В. Сочинения. В 4-х т. М., 1984. С. 262). Те виды континуума, которые перечисляет здесь Лейбниц, он характеризует как имеющие нечто от "сущности разума", что, собственно, и означает "идеальность", а не реальность их, ибо разум Лейбниц трактует здесь в духе номинализма. Вот определение различия между идеальным и реальным, данное Лейбницем в письме к Ремону: "В идеальном целое предшествует частям, как арифметическая единица предшествует дробям, на которые она делится и которые можно в ней обозначать произвольно, так как части только потенциальны; но в реальном простое предшествует агрегатам, части – действительны, предшествуют целому" (цит. по: Каринский В. Умозрительное знание в философской системе Лейбница. СПб., 1912. С. 189-190). Таким образом, в математике мы, по Лейбницу, имеем дело с потенциально бесконечным (возможным), иначе говоря, со становлением, а

## **Попытки преодолеть парадоксы бесконечного**

---

Вот что в этой связи пишет Лейбниц Фуше в 1693 г.: "Я настолько убежден в существовании актуальной бесконечности, что не только не допускаю мысли о том, что природа не терпит бесконечного, а, напротив, считаю, что она повсюду выказывает любовь к нему, дабы тем нагляднее продемонстрировать совершенство творца. Итак, я полагаю, что нет ни одной части материи, которая была бы не скажу только неделимой, но даже не разделенной актуально и, следовательно, любая мельчайшая частица материи должна рассматриваться как мир, наполненный бесчисленным количеством разнообразных созданий"<sup>46</sup>.

---

в метафизике – с актуально бесконечным, где целое представляет собой сумму бесконечного числа бытийных единиц – сверхчувственных монад. Трудности, связанные с понятием континуума, вызваны у Лейбница необходимостью согласовать эти две сферы – становление и бытие.

<sup>46</sup> Лейбниц Г. В. Сочинения. В 4-х т. М., 1984. С. 294. Здесь в переводе фраза несколько утяжелена, и мысль Лейбница ясна не сразу. В сущности философ утверждает, что любая часть материи не только делима до бесконечности,

## **Попытки преодолеть парадоксы бесконечного**

---

Возражая Декарту и его последователям, не допускавшим возможности для конечного существа мыслить актуально бесконечное, Лейбниц в письме к Мальбраншу замечает: "Ответ, что наш ум, будучи конечным, не понимает бесконечного, неправилен, так как мы можем доказать и то, чего мы не понимаем"<sup>47</sup>. Не правда ли, эта мысль Лейбница в точности повторяет высказанную Кавальери: хотя бы мы не понимали сущности тех приемов, которыми мы пользуемся, мы тем не менее можем получать с их помощью нужное решение задачи; именно так, справедливо говорит Кавальери, поступают алгебраисты, и математический анализ по своему методу сходен с алгеброй, оперирующей с непостижимыми корнями чисел. Это – целый переворот по сравнению с античной математикой, переворот, основанный на сближении техники вычисления (логистики) и точной науки,

---

но и актуально разделена на бесконечное множество физических точек.

<sup>47</sup> Лейбниц Г. В. Сочинения. В 4-х т. М., 1984. С. 316.

## **Попытки преодолеть парадоксы бесконечного**

---

приближенного метода вычисления (так понимал метод бесконечно-малых Кеплер) и строго математического доказательства.

Лейбниц, таким образом, допускает актуально бесконечное в тварном мире, а не только в Боге; то, что делимо до бесконечности, должно быть уже актуально разделено на бесконечное число бесконечно малых единиц, ибо, согласно Лейбницу, возможное должно иметь свое основание в действительном, потенциальное – в актуальном. Здесь Лейбниц занимает позицию, отличную как от античной – аристотелевско-евклидовой, так и от картезианской. В этом отношении интересно проанализировать диалог 1776 г. "Пацидий – Филалету", в котором намечены все ходы мысли, воспроизводившиеся затем Лейбницем на протяжении последующих сорока лет. Диалог посвящен трудностям, связанным с проблемой континуума, которая, по Лейбницу, есть узел, еще никем не развязанный. "Ни Аристотель, ни Галилей, ни Декарт не могли обойти этот узел: один его скрыл, другой оставил

## Попытки преодолеть парадоксы бесконечного

неразвязанным, третий разрубил"<sup>48</sup>. Диалог построен по классическим канонам жанра: принимается допущение, затем обсуждаются его следствия, и оно отвергается в пользу другого, которое затем обсуждается таким же образом. Первое допущение, которое принимает Лейбниц, принадлежит сторонникам составления непрерывного из неделимых. К ним первоначально, до своего приезда в Париж, принадлежал и сам Лейбниц. Вот это допущение: пространство состоит из точек, а время – из моментов "теперь". Поскольку составление линии из конечного числа точек ведет к очевидным несообразностям, например, к невозможности разделить отрезок пополам, то остается допустить, что "линии состоят из точек, но по числу бесконечных"<sup>49</sup>. Однако в этом случае пришлось бы согласиться, что диагональ и сторона квадрата равны, а также что целое равно части. Поскольку это невозможно, делается

---

<sup>48</sup> Лейбниц Г. В. Сочинения. В 4-х т. Т. 3. М., 1984. С. 246.

<sup>49</sup> Там же, с. 247.

вывод: линия не состоит из точек, и принимается аристотелево определение континуума как делимого до бесконечности. Актуально бесконечное в математике, таким образом, отвергается. Эту позицию Лейбниц оценивает как "ответ Галилею". Ответ этот гласит: "До обозначения нет никаких точек... Нет точек, линий, поверхностей, т. е. вообще оконечностей (границ, пределов. – П. Г.), кроме тех, которые возникают при делении: и в непрерывности нет частей, пока они не созданы делением. Но никогда не осуществляются все деления, какие только осуществимы..."<sup>50</sup>. Это – позиция Аристотеля, Евдокса, Декарта, допускающая лишь потенциальную бесконечность.

Однако Лейбниц на этом не останавливается. Хотя, казалось бы, вопрос решен и противоречия сняты, он ставит вопрос о континууме в физике, рассматривая структуру твердых тел и жидкостей и желая теперь возразить Декарту, с которым он только что солидаризировался. "Я не допускаю ни

---

<sup>50</sup> Там же, с. 250.

атомов (Гассенди), т. е. совершенно твердого тела, и тонкой материи Декарта, т. е. совершенно жидкого тела"<sup>51</sup>. Модель физической непрерывности, по Лейбницу, – это тело, повсюду сгибаемое. "Разделение непрерывности надо уподобить не песку, распадающемуся на отдельные песчинки, а бумаге или ткани, которая может образовать складки: хотя число складок ничем не ограничено и они могут быть все меньше и меньше одна другой, однако тело никогда не распадается на точки или наименьшие части"<sup>52</sup>. Для Лейбница главное здесь – что "складки" все время остаются протяженными величинами, а не превращаются в "неделимые точки". Однако принципиального отличия от Декарта тут нет, ибо у последнего тоже части материи корпускулы остаются всегда делимыми.

Рассмотрев непрерывность пространства, времени, а затем материи Лейбниц ставит вопрос о непрерывности по отношению к движению и

---

<sup>51</sup> Там же, с. 252.

<sup>52</sup> Там же.



рассматривает две альтернативных точки зрения. Если принять непрерывное движение, то придется признать, что непрерывность состоит из точек, ибо "движение есть смена двух пребываний, которыми тело связано с двумя ближайшими точками в два ближайших момента..."<sup>53</sup>. Поскольку же составленность линии из точек уже была отвергнута, то Лейбниц обращается ко второй возможности – движению скачками. "Между промежутками покоя будет происходить моментальное движение скачком"<sup>54</sup>. Скачки эти можно мыслить как своего рода "транскреации", т. е. уничтожение тела в одной точке и сотворение его заново в другой, как, по-видимому, решали проблему движения мусульманские математики мутекаллимы: "Движущееся тело  $E$ , пробыв некоторое время в  $A$ , исчезает и уничтожается, а в следующий момент снова возникает и возрождается в  $B$ "<sup>55</sup>. Характерно, что признать

---

<sup>53</sup> Там же, с. 253.

<sup>54</sup> Там же, с. 254.

<sup>55</sup> Там же, с. 255.

## Попытки преодолеть парадоксы бесконечного

первую из двух возможностей, а именно непрерывность движения, Лейбницу мешает убеждение в том, что "движение есть смена двух пребываний", т. е. что оно прерывно по своему существу. И эта посылка представляется Лейбницу настолько само собой разумеющейся, что он не принимает идею непрерывности движения Аристотеля, Лейбница, средневековых физиков, Декарта. Но и "скачки" тоже не удовлетворяют Лейбница, представляются ему таким же "чудом", что и "совершенная твердость атомов, принимаемая Гюйгенсом"<sup>56</sup>.

Какой же выход видится здесь немецкому философу? Как ни неожиданно это для читателя, только что принявшего к сведению пассаж о невозможности актуально бесконечного в математических и физических объектах, но Лейбниц вновь возвращается к актуально бесконечному, отвергнутому в споре с Галилеем: "Я думаю так: нет такой части материи, которая не была бы актуально разделена на множество

---

<sup>56</sup> Там же, с. 256.

## Попытки преодолеть парадоксы бесконечного

частей, и, следовательно, нет столь малого тела, в котором не содержался бы мир бесчисленных творений... Таким образом, и тело, и пространство, и время актуально подразделены до бесконечности"<sup>57</sup>. Соответственно теперь отвергается непрерывность движения и признаются уже было отброшенные "скачки", но, правда, с одной оговоркой: эти скачки должны быть "бесконечно малыми", а значит "проскакиваемое" расстояние должно быть меньше любой конечной величины<sup>58</sup>.

Таков итог размышлений Лейбница: можно было бы сказать, что бытие у него торжествует над становлением, если бы не целый ряд парадоксов, которые ему трудно разрешить.

С известной оговоркой он в конце концов вновь признает и бесконечно малую величину, а именно как "воображаемую": "В геометрии я допустил бы с эвристической целью бесконечно

---

<sup>57</sup> Там же.

<sup>58</sup> Там же, с. 263.

малые величины пространства и времени, рассматривая их как воображаемые"<sup>59</sup>.

Можно было бы сказать, что диалог, написанный в 1676 г., еще не вполне зрелое произведение Лейбница, если бы те же самые ходы мысли не были воспроизведены им почти двадцать лет спустя в переписке с Фуше, а затем и в более поздних работах – вплоть до 1716 г. Поэтому нельзя не согласиться с А. П. Юшкевичем, отмечавшим в одной из своих статей непоследовательность Лейбница: "Великий философ и математик высказывал в разное время различные мнения о сущности исчисления бесконечно малых. Иногда, например, он рассматривал дифференциал  $dx$  как конечный, но крайне малый отрезок, по крайней мере, пропорциональный конечному отрезку. Очень часто, особенно в более поздние годы жизни, он отзывался о бесконечно малых как об идеальных вещах и понятиях, как об удобных в эвристическом отношении фикциях, результаты

---

<sup>59</sup> Там же, с. 260.

## Попытки преодолеть парадоксы бесконечного

применения которых можно, если угодно, получить с помощью строгого доказательства исчерпыванием. Наконец, у него имеется и та мысль, что бесконечно малые суть величины, меньше всякой конечной величины, хотя и не нулевые, величины "несравнимые" в том смысле, что на какую бы конечную величину их ни умножить, результат не будет конечной величиной"<sup>60</sup>. И действительно, точка зрения Лейбница на бесконечно малую все время неустойчива, потому что он в своей физике и метафизике принимает актуальную бесконечность, что не может не отражаться и на его понимании бесконечного в математике.

В то же время в философии Лейбница идея непрерывности играет существенную роль: актуально существующие метафизические и физические "точки", единицы (монады) составляют своего рода непрерывную цепь,

---

<sup>60</sup> Юшкевич А. П. Идеи обоснования математического анализа в XVIII в. // Историко-математические исследования. Вып. XXX. М., 1986. С. 14-15.

## **Попытки преодолеть парадоксы бесконечного**

лишенную "промежутков", "разрывов", "скачков". Характерно, что П. А. Флоренский, отвергая идею непрерывности, которая, по его мнению, господствовала в науке и философии XIX в., возводит эту идею прежде всего к Лейбницу<sup>61</sup>.

Однако Лейбницево понимание непрерывности, как мы видели, существенно отличается от традиционного, к которому тяготел Декарт, а впоследствии – Кант: у Лейбница идея непрерывности имеет предпосылкой принятие актуально бесконечного. Так, вводя понятие

---

<sup>61</sup> "Необходимо указать на источник, откуда вытекла эта идея в широкую публику и сделалась столь распространенной. Нет никакого сомнения, что таким первоисточником является открытие анализа бесконечных, и, говоря определеннее, мы можем утверждать, что Лейбниц как математик и философ ввел в общественное сознание идею непрерывности; мы можем даже сказать, что система Лейбница есть почти вся целиком коррелят его работ по анализу, гениальная транспонировка самим изобретателем математических данных на философский язык" (Флоренский П. А. Введение к диссертации "Идея прерывности как элемент мирозерцания" // Историко-математические исследования. Вып. XXX. М., 1986. С. 160).

"незаметных", "бесконечно малых восприятий", возникшее у него по аналогии с математической бесконечно малой, Лейбниц пишет: "Незаметные восприятия имеют такое же большое значение в пневматике, какое незаметные корпускулы имеют в физике... Ничто не происходит сразу, и одно из моих основных и достоверных положений – это то, что природа никогда не делает скачков... Значение этого закона в физике очень велико: в силу этого закона всякий переход от малого к большому и наоборот совершается через промежуточные величины... Точно так же никогда движение не возникает непосредственно из покоя, и оно переходит в состояние покоя лишь путем меньшего движения... Придерживаться другого взгляда – значит не понимать безграничной тонкости вещей, заключающей в себе всегда и повсюду актуальную бесконечность<sup>62</sup>. Эти последние слова об актуальной бесконечности кладут водораздел между традиционным принципом непрерывности

---

<sup>62</sup> Лейбниц Г. В. Сочинения. В 4-х т. Т. 2. М., 1984. С. 56.

## Попытки преодолеть парадоксы бесконечного

как бесконечности потенциальной (бесконечной делимости) и лейбницевым толкованием этого принципа.

Философское обоснование по-новому истолкованного им принципа непрерывности Лейбниц предлагает в "Монадологии". Здесь на новом уровне воспроизводится старый парадокс, возникающий при попытке составлять непрерывное из неделимых. С одной стороны, Лейбниц определяет монаду как простую субстанций, не имеющую частей, а значит, нематериальную (все материальное имеет части и делимо). Он поясняет, что "где нет частей, там нет ни протяжения, ни фигуры и невозможна делимость"<sup>63</sup>. С другой стороны, Лейбниц говорит, что "сложная субстанция есть не что иное, как собрание или агрегат простых"<sup>64</sup>. Выходит, что сложное (т. е. непрерывное) мы получаем из суммы бесконечного числа простых (неделимых), статус которых так же неясен, как и

---

<sup>63</sup> Лейбниц Г. В. Сочинения. В 4-х т. Т. 1. М., 1984. С. 143.

<sup>64</sup> Там же.



статус математической бесконечно-малой: это и не величины (ибо монады, по Лейбницу, нематериальны, не имеют протяжения), и не "нули" (ибо, как позднее мы узнаем, всякая монада обладает "телом").

Монада у Лейбница мыслится по аналогии с душой: именно души по определению неделимы. Но тогда выходит, что тело как сложная субстанция составляется из бесконечного числа душ-субстанций простых. Пытаясь выйти из этого затруднения, Лейбниц прибегает к метафоре: сравнивает тела с "прудом, полным рыбы" (где рыбы – это, надо думать, монады)<sup>65</sup>. Но в таком случае что такое та "вода", в которой обитают "рыбы"? Если реальны только монады, как и

---

<sup>65</sup> "... Не существует части вещества, в которой бы не было бесконечного множества органических и живых тел... Однако отсюда еще не следует, что всякая часть вещества одушевлена, точно так же как мы не говорим, что пруд, полный рыбы, одушевлен, хотя рыбы – одушевленные существа" (Лейбниц Г. Избранные философские сочинения. М., 1890. С. 240).

заявляет Лейбниц, то "вода" тоже состоит из новых неделимых и так до бесконечности.

Противоречие не разрешается. Для его разрешения Лейбниц прибегает еще к одному средству: рассматривать материю не как субстанцию, а как "субстанциат", подобный армии или войску. "В то время как ее рассматривают так; будто она есть некая вещь, на самом деле она есть феномен, но вполне истинный, из которого наше восприятие создает единство"<sup>66</sup>.

Рассмотрение материи как "феномена", пусть даже "хорошо обоснованного" (хотя самого этого обоснования Лейбниц так и не смог предъявить), означает – правда на другом языке – возвращение к предпосылкам Аристотеля, трактовавшего материю как возможность, а не действительность. Но для последовательного проведения такой точки зрения необходимо отказаться от понятия актуальной бесконечности применительно к конечному (тварному) миру: ведь Аристотель в

---

<sup>66</sup> Leibniz G. W. Die philosophische Schriften. S. 624.

## **Попытки преодолеть парадоксы бесконечного**

свое время потому и определил материю как бесконечно делимое, что она принадлежала у него к сфере возможного. Лейбниц же, объявляя материю феноменом, в то же время сохраняет в силе вышеприведенные тезисы: 1) в каждой части материи "содержится" актуально бесконечное число монад и 2) всякая душа обладает телом. Последнее утверждение совершенно лишено смысла, если считать, что тело – это феномен; первое, впрочем, тоже, хотя, может быть, это и не так очевидно.

Как видим, даже Лейбницу не удалось разрешить парадоксы актуальной бесконечности и последовательно провести принцип непрерывности в математике. Вопрос остался открытым и в философии. К нему во второй половине XVIII в. вновь обратились как математики, так и философы.

## Проблема континуума у Канта

В философии проблему непрерывности попытался разрешить Кант, столкнувшись с затруднениями, которые эта проблема породила у Лейбница, с одной стороны, и у математиков, с другой. Рождение трансцендентального идеализма в немалой степени было обусловлено необходимостью справиться с парадоксами актуальной бесконечности. В своей первой, еще студенческой работе "Мысли об истинной оценке живых сил" Кант затрагивает самый нерв вопроса, так и не решенного Лейбницем: как связать между собой метафизические неделимые (бытие) и физический мир, располагающийся в пространстве (становление). Мир бытия Лейбниц порой характеризует как "внутреннее", а чувственный мир — как "внешнее". Монады, по Лейбницу, "не имеют окон" и, таким образом, не имеют "выхода" друг к другу; их деятельность согласована лишь через божественную монаду — посредством предустановленной гармонии. Не вполне ясно также, как понимать соотнесенность

монад с "внешним" по отношению к ним материальным миром; мы уже видели, какими способами пытался Лейбниц разрешить этот вопрос, важнейшим аспектом которого является связь души с телом.

Именно с этого вопроса начинается молодой Кант: "... В метафизике, – пишет он в 1746 г., – трудно представить себе, каким образом материя в состоянии порождать в душе человека представления некоторым воистину действенным образом (т. е. физическим действием)... Подобная же трудность возникает и тогда, когда стоит вопрос о том, в состоянии ли также и душа приводить в движение материю... Вопрос о том, в состоянии ли душа вызывать движения, т. е. обладает ли она движущей силой, приобретает такой вид: может ли присущая ей сила быть предназначена к действию вовне, т. е. способна ли она вовне себя воздействовать на другие существа и вызывать изменения? На этот вопрос можно с полной определенностью ответить тем, что душа должна быть в состоянии действовать вовне на том основании, что сама она находится в

определенном месте. Ибо если разберем понятие того, что мы называем местом, то найдем, что оно указывает на взаимные действия субстанций"<sup>67</sup>. Вопрос поставлен точно. В самом деле, коль скоро "метафизическая точка" имеет жесткую связь с определенным местом, то она уже тем самым не абсолютно самозамкнута: в противном случае субстанция-монада существовала бы вне всякой связи с каким-либо телом (а что монады не могут существовать без тела, на этом Лейбниц всегда настаивал) и, стало быть, по словам Канта, "нигде во всем мире не находилась бы"<sup>68</sup>. Протяжение, таким образом, по мысли Канта, есть продукт действия субстанции вовне; так молодой философ интерпретирует Лейбница. "Ибо без этой силы нет никакой связи, без связи – никакого порядка, без порядка нет никакого пространства"<sup>69</sup>.

---

<sup>67</sup> Кант И. Сочинения. В 6-ти т. Т. 1. М., 1963. С. 66-67.

<sup>68</sup> Там же, с. 68.

<sup>69</sup> Там же, с. 69.

## Проблема континуума у Канта

---

Как видим, в своем рассуждении Кант опирается на Лейбницево определение пространства как порядка сосуществования. Однако, постулируя "воздействие субстанций вовне". Кант не разъясняет, как следует понимать это воздействие. Судя по всему, этот вопрос не переставал занимать Канта на протяжении целого десятилетия. В 1756 г. он предпринимает еще одну попытку его разрешения в магистерской диссертации "Применение связанной с геометрией метафизики в философии природы". За год до того, в 1755 г. была опубликована работа Канта "Всеобщая естественная история и теория неба", в которой он применил Ньютонову теорию тяготения для объяснения генезиса мироздания. Теперь с помощью ньютоновской динамики философ приступил к разрешению давно мучившей его антиномии неделимого (монады) и непрерывного (протяжения). На сей раз он рассматривает соотношение физики (динамики) и математики, оставляя вне поля зрения метафизическую сущность монад. Задача, которую при этом ставит перед собой Кант,

состоит в доказательстве, что "существование физических монад согласно с геометрией"<sup>70</sup>. Альтернатива – метафизика или геометрия – заострена у Канта еще одним дополнительным обстоятельством: он вместе с Ньютоном признает теорию тяготения как действия на расстоянии, а тяготение невозможно объяснить с помощью одной только геометрии. Кант пытается фундировать Ньютонову теорию всемирного тяготения с помощью Лейбницевой метафизики, хотя сам создатель монадологии считал ньютонову идею совершенно неприемлемой<sup>71</sup>.

---

<sup>70</sup> Там же, с. 319.

<sup>71</sup> Вот что писал Лейбниц по поводу теории всемирного тяготения Ньютона: "... Я не желал бы, чтобы в естественном ходе природы прибегали к чудесам и допускали абсолютно необъяснимые силы и действия. В противном случае мы дадим во имя всемогущества Божия слишком много воли плохим философам, и раз мы допустим эти центростремительные силы или эти действующие издали непосредственные притяжения, не будучи однако в состоянии сделать их понятными, то я уже не вижу, что помешает нашим школьным философам утверждать, что все совершается просто в силу способностей и поддерживать



"Метафизика, – пишет Кант, – без которой, по мнению многих, вполне можно обойтись при разрешении физических проблем, одна только и оказывает здесь помощь, возжигая свет познания. В самом деле, тела состоят из частей и... важно выяснить, как именно они составлены из этих частей: наполняют ли они пространство одним лишь сосуществованием этих первичных частей или через взаимное столкновение сил. Но каким образом в этом деле можно связать метафизику с геометрией, когда, по-видимому, легче грифов запрячь вместе с конями, чем трансцендентальную философию<sup>72</sup> сочетать с геометрией? Ибо если первая упорно отрицает, что пространство делимо до бесконечности, то вторая утверждает это с такой же уверенностью, с

---

свои образы сущностей (*species intentionales*), которые будто бы исходят от предметов к нам и находят средство проникать до самой нашей души" (Лейбниц Г. Избранные философские сочинения. М., 1890. С. 208).

<sup>72</sup> Как видим, Кант именует трансцендентальной не только созданную им впоследствии критическую философию.

какой она обычно отстаивает остальные свои положения. Первая настаивает на том, что пустое пространство необходимо для свободных движений; вторая же, напротив, решительно его отвергает. Первая указывает на то, что притяжение, или всеобщее тяготение, едва ли можно объяснить одними лишь механическими причинами, но что оно имеет свое начало во внутренних силах, присущих телам в состоянии покоя и действующих на расстоянии; вторая же относит всякое такое предположение к пустой игре воображения"<sup>73</sup>.

Мы привели этот отрывок целиком ввиду его важности для нашей темы: Кант здесь рассматривает проблему континуума, как она ставится в математике, имеющей дело с миром лишь возможного (становление), и в физике, с трудом отделимой от метафизики, которая претендует на то, что именно она раскрывает законы самого бытия. На уровне бытия континуум мыслится как дискретный, на уровне

---

<sup>73</sup> Кант И. Сочинения. В 6-ти т. Т. 1. М., 1963. С. 318.

становления – как непрерывный. Однако дело осложняется тем, что определенная школа физики – в частности картезианская – при объяснении природы допускала только принцип непрерывности, не признавая ни атомов, ни пустоты, ни сил тяготения. Что же касается метафизики, то сюда Кант, как видно, относит Ньютона и его последователей, ибо именно они принимают пустое пространство как условие возможности движения атомов, а также тяготение как действие на расстоянии. Хотя Ньютон, как известно, дистанцировался от метафизики (хорошо известен его афоризм "гипотез не изобретаю"), однако Кант характеризует его подход как метафизический, имея в виду то обстоятельство, что Ньютон, как и Лейбниц, вводит в свою динамику понятие силы и не ограничивается лишь установлением механических законов, как это делал Декарт. Но как примирить таким образом понятую

метафизику<sup>74</sup> с математикой, атомизм в физике с принципом непрерывности в математике?

Кант согласен с Декартом и большинством математиков в том, что пространство делимо до бесконечности и не состоит из простых частей. Но в то же время он подчеркивает, что "каждый простой элемент тела, или монада, не только существует в пространстве, но и наполняет пространство, сохраняя, однако, свою простоту"<sup>75</sup>. Как видим, в отличие от Декарта, Кант не признает, что пространство есть субстанция. Здесь он остается последователем Лейбница и

---

<sup>74</sup> Кант с самого начала оговаривает, что под метафизикой он здесь подразумевает учение о физических монадах, но не о монадах метафизических, которые составляют, согласно Лейбницу, последний фундамент бытия и должны объяснять природу также и физических монад. "Так как я намерен здесь рассуждать только о том классе простых субстанций, которые суть первичные части тел, то заранее заявляю, что в последующем изложении я буду пользоваться терминами простые субстанции, монады, элементы материи, первичные части тела как синонимами" (Кант И. Сочинения. В 6-ти т. Т. 1. М., 1963. С. 319).

<sup>75</sup> Кант И. Сочинения. В 6-ти т. Т. 1. М., 1963. С. 323.

считает субстанциями неделимые монады. Физические монады, по Канту, заполняют пространство не множеством своих частей (таковых у неделимых начал нет), а сферой своей деятельности, сущность которой – притяжение и отталкивание: притяжение создает единство, связь физических тел, а отталкивание – их разъединенность, обособленность. Таким путем Кант ищет выход из трудности, связанной с проблемой непрерывного и неделимого, т. е. в данном случае математического и физического континуумов.

Вот предложенный им выход: из непрерывности (бесконечной делимости) пространства, занимаемого элементом, не вытекает делимость самого элемента<sup>76</sup>. "Из доказанного выше, – подытоживает Кант, – с полной очевидностью следует, что ни геометр не

---

<sup>76</sup> Увы, и такое положение связано с неразрешимыми трудностями, указанными мною в сноске к апории Стрела в предыдущей статье Анисова. Не случайно Кант впоследствии отказался от этой точки зрения. (Руслан Хазарзар.)

ошибается, ни то мнение, которого придерживается метафизик, не уклоняется от истины, поэтому неизбежно должен быть ошибочным взгляд, который оспаривает оба эти мнения и согласно которому ни один элемент, поскольку он абсолютно простая субстанция, не может занимать пространства, не теряя своей простоты"<sup>77</sup>. Ошибается, по Канту, тот, кто не может примирить между собой два утверждения – метафизики: "Всякая сложная субстанция состоит из простых частей, и вообще существует только простое и то, что сложено из простого" – и математики: "Ни одна сложная вещь в мире не состоит из простых частей, и вообще в мире нет ничего простого"<sup>78</sup>.

Этот ошибающийся – сам Кант 25 лет спустя после написания работы "Применение связанной с геометрией метафизики в философии природы". Ибо именно он и сформулировал в "Критике чистого разума" эти два утверждения как

---

<sup>77</sup> Кант И. Сочинения. В 6-ти т. Т. 1. М., 1963. С. 324.

<sup>78</sup> Кант И. Сочинения. В 6-ти т. Т. 1. М., 1963. С. 270-271.

абсолютно непримиримые – как антиномию чистого разума. И вот как он теперь, в 1781 г., оценивает свою прежнюю попытку примирения этих двух утверждений: "Впрочем, монадисты ловко пытаются обойти это затруднение, именно они утверждают, что не пространство составляет условие возможности предметов внешнего наглядного представления (тел), а, наоборот, предметы внешнего наглядного представления и динамическое отношение между субстанциями вообще составляют условие возможности пространства"<sup>79</sup>. В качестве примера Кант мог бы сослаться на свою собственную работу 1756 г., только что рассмотренную нами, ибо там он, рассуждая как монадист, как раз и определял пространство как "явление внешнего отношения субстанций"<sup>80</sup>, как "сферу деятельности монады"<sup>81</sup>.

---

<sup>79</sup> Там же, с. 275.

<sup>80</sup> Там же, с. 324.

<sup>81</sup> Там же, с. 325.

## **Проблема континуума у Канта**

---

Размышления над проблемой континуума, таким образом, сыграли первостепенную роль в пересмотре Кантом принципов рационализма XVII-XVIII вв. и создании системы критической философии, где переосмыслено центральное в метафизике XVII в. понятия субстанции и фундаментом всей системы знания становится не субстанция, а субъект. Переход от субстанции к субъекту совершил уже английский эмпиризм в лице Локка и особенно Юма; но они имели в виду психологического, т. е. эмпирического субъекта в его индивидуальности. Кант ставит в центр своего учения понятие трансцендентального субъекта, освобождаясь тем самым от психологизма в теории познания. В результате эмпирический мир, мир опыта – как внешнего (природа как предмет естествознания), так и внутреннего (душа как предмет эмпирической психологии) существует у Канта лишь в отношении к трансцендентальному субъекту, конструирующему этот мир с помощью априорных форм чувственности (пространства и времени) и априорных форм рассудка (категорий). Определения, приписывавшиеся ранее



## Проблема континуума у Канта

---

материальной субстанции – пространственная протяженность, фигура, временная продолжительность, движение – суть, по Канту, продукт деятельности трансцендентального субъекта. В мире природы нет места тому, что существует в себе и через себя, здесь все определяется связью механических причин, т. е. другим и через другое, поскольку и сам этот мир существует лишь через отношение к трансцендентальному Я. Отвергая понятие субстанции применительно также и к индивидуальной душе. Кант рассматривает ее в теоретической философии лишь как явление, конструируемое посредством внутреннего чувства. Однако реликты субстанций как самостоятельных сущих, не зависящих не только от индивидуального, но и от трансцендентального субъекта, сохраняются у Канта в виде непознаваемых вещей в себе, аффицирующих нашу чувственность и таким образом порождающих ощущения. Недоступные теоретическому познанию, вещи в себе принадлежат к сверхчувственному миру – сфере

свободы, т. е. разума практического. Человек как существо нравственное несет в себе те черты, которыми традиционно наделялись духовные субстанции – разумные души, хотя онтологический статус разумной души у Канта совсем иной.

Посмотрим теперь, как в этой новой системе решается вопрос о природе континуума, столь волновавший Канта в докритический период. В "Критике чистого разума" этому вопросу уделяется тоже большое внимание, но способ его рассмотрения существенно меняется. Подлинным бытием, как теперь полагает Кант, обладают лишь вещи в себе, которые суть простые, неделимые единства, лишенные протяжения. От Лейбницевых монад эти единства однако отличаются тем, что, во-первых, они непознаваемы, а, во-вторых, из них недопустимо "составлять" материальные тела, т. е. рассматривать сложное как "агрегат" простого. Что же касается мира явлений, протяженного в пространстве и длящегося во времени, то он непрерывен, т. е. бесконечно делим. Именно

жесткое различие вещей в себе и явлении является основой кантовского решения проблемы континуума: непрерывность пространственно-временного, природного мира не противоречит "дискретности" мира сверхприродного. В "Метафизических началах естествознания" (1786) Кант пишет: "Сколь далеко... простирается математическая делимость пространства, наполненного той или иной материей, столь же далеко простирается и возможное физическое деление субстанции, его наполняющей. Но математическая делимость бесконечна, следовательно, и физическая, т. е. всякая материя до бесконечности делима, и притом на части, из которых каждая в свою очередь есть материальная субстанция"<sup>82</sup>. Последнее замечание имеет целью подчеркнуть, что в материи нет "последних неделимых" элементов, нет лейбницевых "физических монад", бесконечное множество которых составляет как бы "бытийный" фундамент непрерывности

---

<sup>82</sup> Кант И. Сочинения. В 6-ти т. Т. 6. М., 1963. С. 103.

феноменального мира (назовем его условно "становлением"). По Канту, всякая часть материи, как и пространства, делима до бесконечности. Здесь Кант в понимании континуума возвращается к Аристотелю и следовавшему за ним Декарту, хотя чисто философское обоснование такой трактовки непрерывности у Канта иное, чем у этих его предшественников.

Перед Кантом стояла альтернатива. Если принять материю за субстанцию, и притом не тождественную пространству (с пространством материю отождествлял Декарт), то тезис о бесконечной делимости материи требовал бы допустить, что она состоит из актуально бесконечного множества "последних единиц" – путь, которым пошел Лейбниц, отвергнув физический атомизм во имя принципа бесконечной делимости, но положив в основу природы атомизм метафизический – "монадизм". Но если считать, как Аристотель, что материя – это лишь возможность, потенциальность, то нет надобности в самой материи искать актуально бесконечного множества далее не делимых

"элементов" в качестве условия ее бесконечной делимости. Кант пришел к выводу, что материя есть только явление и благодаря этому возвратился к принципу непрерывности в его аристотелевско-евдоксовом варианте. "О явлениях, деление которых можно продолжить до бесконечности, можно лишь сказать, что частей явления столько, сколько их будет дано нами, пока мы будем в состоянии продолжать деление. Ведь части, как относящиеся к существованию явлений, существуют лишь в мыслях, т. е. в самом делении"<sup>83</sup>. Иначе говоря, если материя не есть вещь в себе, то нет надобности допускать, как это делал Лейбниц, актуальную бесконечность "частей" для обоснования потенциальной бесконечности, т. е. бесконечной делимости пространства, времени и материи. Таким образом, именно феноменалистское истолкование материи позволяет Канту справиться с парадоксами континуума.

---

<sup>83</sup> Там же.

Интересно отметить, что возвращение к потенциальной бесконечности при обосновании дифференциального исчисления происходит и в математике второй половины XVIII в., хотя полностью элиминировать понятие актуально бесконечно малого и создать теорию пределов, опирающуюся на методологические принципы метода исчерпывания древних, удалось лишь позднее, усилиями К. Ф. Гаусса, О. Коши и особенно К. Вейерштрасса. Противоречивость понятия бесконечно малого, как мы уже отмечали, была очевидна с самого появления этого понятия; не случайно Ньютон создавал теорию "первых и последних отношений", стремясь избежать употребления "бесконечно малых". Это стремление еще более усилилось после критики инфинитезимального исчисления, осуществленной Дж. Беркли. Не удивительно, что Даламбер в своих статьях "Дифференциал" (1754), "Флюксия" (1756), "Бесконечно малое" (1759) и "Предел" (1765), помещенных в знаменитой "Энциклопедии, или Словаре наук, искусств и ремесел", в качестве обоснования анализа

предложил теорию пределов. При этом он опирался на Ньютонов принцип "первых и последних отношений". Дальнейшие шаги в этом направлении предпринял Лагранж. В 1784 г. по инициативе Лагранжа Берлинская Академия наук назначила приз за лучшее решение проблемы бесконечного в математике. Объявление об условиях конкурса гласило:

"Всеобщим уважением и почетным титулом образцовой "точной науки" математика обязана ясности своих принципов, строгости своих доказательств и точности своих теорем. Для обеспечения непрерывного обновления столь ценных преимуществ этой изящной области знания необходима ясная и точная теория того, что называется в математике бесконечностью. Хорошо известно, что современная геометрия (математика) систематически использует бесконечно большие и бесконечно малые величины. Однако геометры античности и даже древние аналитики всячески стремились избегать всего, что приближается к бесконечности, а некоторые знаменитые аналитики современности

усматривают противоречивость в самом термине "бесконечная величина". Учитывая сказанное, Академия желает получить объяснение, каким образом столь многие правильные теоремы были выведены из противоречивого предположения, вместе с формулировкой точного, ясного, истинно математического принципа, который был бы пригоден для замены принципа "бесконечного" и в то же время не делал бы проводимые на его основе исследования чрезмерно сложными или длинными"<sup>84</sup>.

Однако, как мы уже говорили, строгое решение поставленной Берлинской Академией задачи было найдено только в XIX в. Решающую роль здесь сыграли работы французского математика О. Коши. Метод, им предложенный, исключает обращение к актуально бесконечному.

---

<sup>84</sup> Клайн М. Математика. Утрата определенности. М., 1984. С. 175. Характерно, что победитель конкурса, швейцарский математик С. Люилье представил работу под девизом: "Бесконечность – пучина, в которой тонут наши мысли" (там же).



Вот как определяет Коши вводимое им понятие предела: "Если значения, последовательно приписываемые одной и той же переменной, неограниченно (indefinitum) приближаются к фиксированному значению таким образом, чтобы в конце концов отличаться от него сколь угодно мало, то последнее называют пределом всех остальных"<sup>85</sup>. Бесконечно малая определяется здесь как переменная, последовательные значения которой становятся меньше любого данного положительного числа. Метод Коши оказался по своим теоретическим предпосылкам сходен с античным методом исчерпывания.

Философия Канта, с одной стороны, и созданная в XIX в. теория пределов, с другой, привели к тому, что понятие континуума, близкое к его античной трактовке, т. е. исключаящее принцип актуальной бесконечности, на некоторое время получило преобладающее влияние в науке. Однако не все математики и философы были удовлетворены таким решением проблемы. В

---

<sup>85</sup> Коши О. Л. Алгебраический анализ. СПб., 1864. С. 19.

## **Проблема континуума у Канта**

---

конце XIX в. вместе с созданием теории множеств Георга Кантора полемика вокруг понятия континуума вспыхнула с новой силой. И сегодня это понятие по-прежнему вызывает споры среди математиков, естествоиспытателей и философов.